НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СТАСЮК Сергій Андрійович

УДК 517.5

# АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

01.01.01 — математичний аналіз
111 – математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

**Науковий консультант**

доктор фізико-математичних наук, професор
**РОМАНЮК Анатолій Сергійович**,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії функцій.

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук, професор
**ВАКАРЧУК Сергій Борисович**,
ВНЗ "Університет імені Альфреда Нобеля"
МОН України, м. Дніпро, професор кафедри
інформаційних технологій;

доктор фізико-математичних наук, професор
**КОФАНОВ Володимир Олександрович**,
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара МОН України,
професор кафедри математичного аналізу
і теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
**ШЕВЧУК Ігор Олександрович**,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка МОН України,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «2» липня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «31» травня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

## Загальна характеристика роботи

**Актуальність теми.** Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із різними видами гладкостей, а саме: знаходженню точних за порядком оцінок величин найкращих $m$-членних тригонометричних наближень класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю та з малою мішаною гладкістю; встановленню точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю; знаходженню точних за порядком оцінок найкращих наближень класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів; встановленню точних за порядком оцінок величини найкращого $m$-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для класів типу Нікольського періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю; іншим супровідним задачам.

Двадцяте сторіччя у низці галузей математики було періодом переходу від одновимірних задач, тобто задач, які стосуються вивчення математичних моделей із однією змінною, до багатовимірних задач, тобто задач, які стосуються вивчення математичних моделей, що залежать від кількох, а часто й від великої кількості змінних. У багатьох випадках перехід від однієї змінної до багатьох змінних був пов’язаний не тільки з новими явищами, характерними для певної математичної моделі, а й вимагав нових методів. У деяких випадках навіть постановка багатовимірної задачі вимагає доволі нетривіальної модифікації одновимірної задачі. Наприклад, при розгляді збіжності кратних тригонометричних рядів одразу стикаємося з питанням про те, які частинні суми цих рядів варто розглядати. Або ж, інакше кажучи, що при цьому є природним багатовимірним аналогом тригонометричних поліномів, тобто, в якій множині повинні бути зосереджені “номери” їхніх гармонік? Шукаючи відповідь на це і подібні питання, математики використовували тригонометричні поліноми з різним упорядкуванням гармонік. Зокрема, при їхній побудові вибиралися “номери” гармонік із таких множин, як куля, куб, прямокутний паралелепіпед або, що найважливіше, гіперболічний хрест

$$\Gamma(N) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{j=1}^{d} \max\{|k_j|, 1\} \le N\}$$

і різні його модифікації. Зазначимо, що поняття гіперболічного хреста виникло в дослідженнях К.І. Бабенка на початку 60-х років минулого сторіччя. Відтоді й донині інтерес у теорії наближення функцій багатьох змінних до такого об'єкта, як гіперболічний хрест, не згасає, яскравим свідченням чого є монографія, нещодавно написана Д. Зунгом (D. Dũng), В.М. Темляковим (V.N. Temlyakov), Т. Ульріхом (T. Ullrich), яка побачила світ у 2018 році. Результати, одержані в роботах К.І. Бабенка, С.О. Теляковського, В.М. Темлякова, Б.С. Кашина, Е.С. Белінського, D. Dũng, Е.М. Галєєва, А.С. Романюка та ін., демонструють нам, що кратні тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів відіграють при наближенні періодичних функцій багатьох змінних таку саму роль, як звичайні тригонометричні поліноми при наближенні періодичних функцій однієї змінної.

Після з'ясування природи аналогів кратних тригонометричних поліномів одним із фундаментальних питань є таке: що є природним багатовимірним аналогом класів періодичних гладких функцій однієї змінної? У багатовимірному випадку розглядаються різні класи гладких функцій: ізотропні та анізотропні класи Соболєва, Нікольського–Бєсова, Лізоркіна–Трібеля, класи функцій з обмеженою мішаною похідною й обмеженою мішаною різницею, тобто класи функцій із обмеженою мішаною гладкістю, та інші.

Ще одним принциповим питанням є: яким чином наближати функції з цих класів, тобто які агрегати варто використовувати при цьому? У зв'язку з цим А.М. Колмогоров у 1936 році ввів поняття $n$-поперечника центрально-симетричної множини у банаховому просторі. Апроксимаційну характеристику, яку він запропонував, згодом почали називати $n$-поперечником за Колмогоровим або колмогоровським $n$-поперечником. У нашому випадку як центрально-симетричні множини для зазначеної апроксимаційної характеристики роглядаються класи періодичних гладких функцій однієї та багатьох змінних. Концепція $n$-поперечника за Колмогоровим дуже корисна для відповіді на питання, сформульоване вище. Колмогоровський $n$-поперечник є розв'язком оптимізаційної задачі, в якій ми здійснюємо оптимізацію над усіма $n$-вимірними лінійними підпросторами. Інакше кажучи, колмогоровський $n$-поперечник дозволяє зрозуміти, який $n$-вимірний лінійний підпростір є найкращим для апроксимації того або іншого класу періодичних гладких функцій. На сьогодні поведінка колмогоровського $n$-поперечника в більшості ситуацій досліджена для важливих класів періодичних гладких функцій однієї змінної. Понад те, в деяких випадках відомі не тільки точні за порядком оцінки, а й навіть точні значення колмогоровських $n$-поперечників класів періодичних гладких функцій однієї змінної. Проте й понині менш досліджена задача про точні за порядком оцінки колмогоровських $n$-поперечників деяких класів періодичних функцій багатьох змінних із мішаною гладкістю, на що акцентується увага в монографіях В.М. Темлякова (1993, 2018), А.С. Романюка (2012) і D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich (2018).

Віднедавна у зв'язку з застосуваннями в інженерії, біології, медицині та інших галузях науки важливу роль почали відігравати нелінійні наближення. Нелінійне наближення є важливим у застосуваваннях завдяки його стислим зображенням і зростаючій обчислювальній ефективності. Типовою задачею нелінійного наближення є $m$-членне наближення, яке інколи називають розрідженим наближенням. Для постановки задачі, яка стосується розрідженого наближення, розлянемо в банаховому просторі $X$ задану систему елементів (функцій) $\mathcal{D}$, яку називають словником. Тоді величина

$$\sigma_m(f,\mathcal{D})_X := \inf_{\substack{g_j \in \mathcal{D}, a_j \\ j=1,\ldots,d}} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_X$$

називається найкращим $m$-членним наближенням функції $f$ поліномами, що побудовані за системою $\mathcal{D}$, у метриці простору $X$.

Уперше таким чином означена величина з'явилася завдяки С.Б. Стєчкіну (1955) при формулюванні ним критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у гільбертовому просторі. Ця величина називалась величиною найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою $m$-членних поліномів за заданою системою.

Упродовж останніх 30–40 років величини

$$\sigma_m(F,\mathcal{D})_X := \sup_{f \in F} \sigma_m(f,\mathcal{D})_X$$

інтенсивно досліджувалися для важливих класів $F$ гладких функцій і для різних систем $\mathcal{D}$ у роботах В.М. Темлякова, Б.С. Кашина, R.A. DeVore, Е.С. Белінського, А.В. Андріанова, А.С. Романюка, В.С. Романюка, О.І. Степанця, А.Л. Шидліча, Д.Б. Базарханова, W. Sickel, M. Hansen, T. Ullrich, G. Byrenheid та інших.

У роботах згаданих авторів отримано багато глибоких і завершених результатів, але водночас залишається низка важливих питань стосовно оцінок найкращих $m$-членних наближень класів Нікольського–Бєсова та їхніх різноманітних узагальнень.

Про важливість функціональних просторів і класів Нікольського–Бєсова, які в цій дисертаційній роботі є об'єктом дослідження, свідчать монографії С.М. Нікольського (1969), О.В. Бєсова, В.П. Ільїна, С.М. Нікольського (1975), H. Triebel (1983, 2019), В.М. Темлякова (1986, 1993, 2015, 2018) H.-J. Schmeisser, H. Triebel (1987), Р.М. Тригуба, Е.С. Белінського (2004), А.С. Романюка (2012), Y. Sawano (2018) та інших.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079; "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", номер державної реєстрації 0198U001990; "Апроксимаційні характеристики функціональних класів", номер державної реєстрації 0101U000046.

**Мета і завдання дослідження.** Основною метою дисертаційного дослідження є розробка нових і вдосконалення існуючих методів знаходження точних за порядком оцінок деяких важливих апроксимаційних характеристик класів Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із різними видами гладкості у просторах Лебега, а також у просторі суттєво обмежених функцій.

*Об'єктом дослідження* є класи типу Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із широким діапазоном гладкостей.

*Предметом дослідження* є такі апроксимаційні характеристики, як колмогоровські $n$-поперечники, $\varepsilon$-ентропія, певні види розрідженого тригонометричного наближення, наближення тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із узагальнених східчастих гіперболічних хрестів згаданих класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних із широким діапазоном гладкостей у просторах Лебега, а також у просторі суттєво обмежених функцій.

*Завдання дослідження*:

— Знайти точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю.

— Одержати точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних із логарифмічною гладкістю.

— Установити точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості з класів Нікольського–Бєсова тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

— Одержати точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників згаданих класів і таким чином показати, що в деяких важливих випадках такі області, як узагальнені східчасті гіперболічні хрести, є оптимальними (в сенсі точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників).

— Установити точні за порядком оцінки наближення функцій із класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур'є у східчастих гіперболічних хрестах.

— Знайти точні за порядком оцінки найкращих $m$-членних тригонометричних наближень класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю.

— Одержати точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення періодичних функцій багатьох змінних малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова. З'ясувати, в яких випадках оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні ґріді (greedy) алгоритму.

— Установити точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних із класів типу Нікольського.

*Методи дослідження.* Використовується апарат математичного аналізу, теорії функцій. При вивченні розрідженого тригонометричного наближення розробляються методи дискретизації.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

— Знайдено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення ізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою гладкістю.

— Одержано точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних із логарифмічною гладкістю.

— Установлено точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості з класів Нікольського–Бєсова тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. При цьому показано, що в деяких важливих випадках такого виду поліноми є оптимальними (в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників).

— Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій із класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур'є у східчастих гіперболічних хрестах.

— Знайдено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю. Показано, що при певних співвідношеннях між параметрами оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні ґріді (greedy) алгоритму.

— Одержано точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою рівномірною мішаною гладкістю. З'ясовано, в яких випадках оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні ґріді (greedy) алгоритму.

— Встановлено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості з класів типу Нікольського.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційну роботу складають математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати доповнюють важливі розділи математичного аналізу, зокрема такі, як теорія функцій і теорія наближень. Деякі з одержаних в дисертації результатів можуть мати також і практичне застосування в таких галузях науки, як інженерія, біологія, медицина та інші, що вказує на перспективу подальшого розвитку окреслених тут досліджень.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати здобувач отримав самостійно, а в роботах, які опубліковані у співавторстві з О.В. Федуник [3] або А.Ф. Конограєм [5, 6], перша теорема в кожній із цих робіт належить дисертантові. У результатах робіт, написаних разом із С.Я. Янченком [23, 28], внесок авторів рівноцінний.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи доповідалися на:

— Конференції "Функціональні методи в теорії наближення, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці", присвяченій пам'яті А.Я. Дороговцева (1935–2004), Київ, 1–5 жовтня 2004 року.

— Міжнародній конференції "Функціональні простори, теорія наближень, нелінійний аналіз”, присвяченій сторіччю академіка С. М. Нікольського, Москва, Росія, 23–29 травня 2005 року.

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня 2007 року.

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики, механіки, інформатики”, присвяченій 85-річчю від дня народження професора Л.А. Толоконникова, Тула, Росія, 17–21 листопада 2008 року.

— Міжнародній конференції “Сучасні проблеми математики, механіки та їх застосувань”, присвяченій 70-річчю ректора МДУ академіка В.А. Садовничого, Москва, Росія, 30 березня – 2 квітня 2009 року.

— International conference “ANALYTIC METHODS OF MECHANICS AND COMPLEX ANALYSIS” dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary, Kyiv, June 29 – July 5, 2009.

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми аналізу та викладання математики”, присвяченій 105-річчю академіка С.М. Нікольського, Москва, Росія, 17–19 травня 2010 року.

— Конференції “Сучасні методи теорії функцій та суміжні проблеми” Воронізької зимової математичної школи, Вороніж, Росія, 25 січня – 1 лютого 2011 року.

— 16-й Саратовській зимовій школі “Сучасні проблеми теорії функцій та їх застосування”, Саратов, Росія, 27 січня – 3 лютого 2012 року.

— Четвертій міжнародній конференції “Функціональні простори. Диференціальні оператори. Загальна топологія. Проблеми математичної освіти”, присвяченій 90-річчю від дня народження члена-кореспондента РАН, академіка Європейської академії наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, Росія, 25–29 березня 2013 року.

— 2nd EUMLS Conference “Mathematics for Life Sciences”, Olenivka, Crimea, Ukraine, September 05–10, 2013.

— Mecklenburg Workshop (dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel) “Approximation Methods and Function Spaces”, Hasenwinkel, Germany, March 16–20, 2015.

— Міжнародній конференції з функціональних просторів та теорії наближення функцій, присвяченій 110-річчю від дня народження академіка С.М. Нікольського, Москва, Росія, 25–29 травня 2015 року.

— 3rd EUMLS Conference “Mathematics for Life Sciences”, Rivne, Ukraine, September 15–19, 2015.

— Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень та її застосування” з нагоди 75-річчя проф. члена-кореспондента НАНУ Віталія Павловича Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня, 2015 року.

— AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”, Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016;

— Workshop on Function Spaces and High-Dimensional Approximation, Bellaterra (Barcelona), Spain, May 2–6, 2016;

— Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Data Analysis” dedicated to the 60th birthday of Hrushikesh N. Mhaskar, Hasenwinkel, Germany, September 05–09, 2016.

— Workshop on Approximation Theory (dedicated to the 70th birthday of prof. I. O. Shevchuk), Kyiv, June 14, 2017.

— Follow-up Workshop “Approximation Theory and Function Spaces”, Barcelona, Spain, June 26–30, 2017.

— 4th AMMODIT Conference, Malekhiv (Lviv region), March 19–23, 2018.

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

— міжвузівському семінарі з теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 25 січня 2017 року, 31 січня 2018 року (керівник семінару — чл.-кор. НАН України В. П. Моторний)

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 1 червня 2017 року (керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 4 жовтня 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі кафедри математичного аналізу Інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова, 13 жовтня 2017 року (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. О. Кореновський).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи викладено у 48 наукових публікаціях, із яких 28 становлять статті [1–28] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, 17 із яких [3, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі списку основних позначень і означень, вступу, п'яти розділів з висновками, додатку і списку використаних джерел, що містить 210 найменувань. Повний обсяг роботи становить 332 сторінки друкованого тексту.

## Основний зміст дисертації

Основні положення дисертації з відповідними коментарями викладені у її **першому розділі**. Вказано місце отриманих результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Розпочнемо з викладу результатів **другого розділу**, основна частина яких присвячена знаходженню точних за порядком оцінок найкращих $m$-членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю, а також точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначає $d$-вимірний евклідів простір із елементами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi)$, — простір $2\pi$-періодичних за кожною зі змінних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$||f||_p = \left( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Позначимо через $V_l$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена виду:

$$V_l(t) = \frac{1}{l} \sum_{k=l}^{2l-1} D_k(t),$$

де $D_k(t) = \sum\limits_{m=-k}^{k} e^{imt}$ — ядро Діріхле. Багатовимірне ядро $V_l = V_l(\mathbf{x})$, $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, визначимо згідно з формулою

$$V_l(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_l(x_j). \tag{1}$$

Нехай

$$V_l(f) := f * V_l$$

— кратна сума Валле Пуссена функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, яка є згорткою між $f$ і (1).

Позначимо для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f) := V_1(f), \quad \Phi_s(f) := V_{2^s}(f) - V_{2^{s-1}}(f), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Вкажемо, що функція $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ належить до простору $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, якщо

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} := \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (2^{rs} \|\Phi_s(f)\|_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{H^r_p} := \|f\|_{B^r_{p,\infty}} := \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{rs} \|\Phi_s(f)\|_p < \infty.$$

Через $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ позначимо одиничні кулі просторів $B^r_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{B}^r_{p,\theta} := \{ f \in B^r_{p,\theta} : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1 \},$$

які називатимемо класами. Таким чином, $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, — класи Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із ізотропною гладкістю, зокрема $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, — класи Бєсова, а $\mathbf{B}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{H}^r_p$ — класи Нікольського.

Нехай $\Theta_m$ — набір із $m$ точок із цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$. Позначимо

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i(\mathbf{n}_k, \mathbf{x})}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ розглянемо величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m, \cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q,$$

яка називається найкращим $m$-членним тригонометричним наближенням функції $f$ у метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Для функціонального класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q.$$

**Теорема 2.3.** *Нехай* $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Якщо* $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}, \tag{2}$$

*якщо ж* $r = \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\,\theta})_q \asymp m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3}$$

В (3) і далі $\log m := \log_2 m$. Зазначимо також, що в одновимірному випадку, тобто при $d = 1$, точні зі порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\,\theta})_q$ для $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ раніше одержав Е.С. Белінський (1987). R.A. DeVore, V.N. Temlyakov (1995) у $d$-вимірному випадку, тобто при $d \ge 1$, а також, зокрема, при $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > \frac{d}{p}$ встановили, що $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Порівнюючи (2), (3) зі щойно наведеною оцінкою, бачимо відмінність (за винятком випадку $\theta = 1$) в оцінках наближення величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\,\theta})_q$, $1 \le p \le 2 < q < \infty$, при переході через так званий "критичний" показник гладкості $r = \frac{d}{p}$. Інакше кажучи, при переході показника гладкості $r$ через значення $\frac{d}{p}$ спостерігаємо "стрибок" порядкових оцінок наближення (завдяки логарифмічному множникові). Крім цього, при "критичному" значенні показника гладкості в (3) виявляємо залежність порядкової оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\,\theta})_q$ від параметра $\theta$, чого у випадках "великої" ($r > \frac{d}{p}$) й "малої" ($\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$) гладкостей не спостерігаємо.

Перейдемо тепер до викладу матеріалу підрозділу 2.2, який присвячений встановленню точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю.

Для $r > 0$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ позначимо

$$\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta} := \{f \in L_p : ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\infty}} := \sup_{s\ge 0}\frac{||\delta_s(f)||_p}{(s+1)^{-r}},\ \theta = \infty,$$

а $\delta_s(f) := \sum\limits_{[2^{s-1}]\le|k|<2^s}\widehat{f}(k)e^{ikx}$, $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. Класи $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ ми називаємо класами типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю. У випадку $\theta=\infty$ замість $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}$ запишемо $\mathbf{H}^{0,r}_p$, тобто позначимо, що $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}\equiv\mathbf{H}^{0,r}_p$.

Тепер наведемо означення досліджуваних апроксимаційних характеристик.

Нехай $\mathcal{K}$ — компакт у банаховому просторі $X$ із одиничною кулею $B_X$. Величини

$$d_m(\mathcal{K},X) := \inf_{\{v_j\}_{j=1}^m\subset X}\sup_{f\in\mathcal{K}}\inf_{c_j}\left\|f-\sum_{j=1}^m c_jv_j\right\|_X, \tag{4}$$

$$\varepsilon_m(\mathcal{K},X) := \inf\left\{\varepsilon\colon \exists\{u_j\}_{j=1}^n\subset X, n\le 2^{m-1}, \mathcal{K}\subset\bigcup_{j=1}^n\{u_j+\varepsilon B_X\}\right\} \tag{5}$$

$(m=1,2,\dots)$ називаються відповідно $m$-м поперечником за Колмогоровим і $m$-м ентропійним числом множини $\mathcal{K}$ у просторі $X$.

Зазначимо, що для класів $\mathbf{LG}^r$, які збігаються з класами $\mathbf{H}^{0,r}_\infty$, встановлено точні за порядком оцінки величин (4) і (5). Для $r>1$ виконуються співвідношення, які встановили Б.С. Кашин та В.М. Темляков (1999):

$$d_m(\mathbf{LG}^r,L_q)\asymp\varepsilon_m(\mathbf{LG}^r,L_q)\asymp\begin{cases}(\log m)^{-r+1}, & \text{якщо } q=\infty,\\ (\log m)^{-r+1/2}, & \text{якщо } 1\le q<\infty.\end{cases}$$

Ми одержали такі твердження.

**Теорема 2.7.** *Нехай* $1\le\theta<\infty$, $r>1-\frac{1}{\theta}$, *тоді*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp(\log m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}.$$

**Теорема 2.8.** *Нехай* $1\le q<\infty$, $\max\{q;2\}\le p\le\infty$, $r>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$, *тоді для* $\max\{q;2\}\le p\le\infty$, $2\le\theta<\infty$ *або* $\max\{q;2\}\le p<\infty$, $\theta=\infty$ *справедливі порядкові рівності*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta},L_q)\asymp\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta},L_q)\asymp(\log m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Перейдемо до викладу результатів **третього розділу**, попередньо навівши необхідні позначення й означення.

Надалі вважатимемо, що для $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ виконуватиметься умова

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x})\,dx_j=0,\quad j=1,\dots,d.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ і для $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$, розглянемо мішаний модуль неперервності (порядку $l$)

$$\Omega_l(f, \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1,\ldots,d}} ||\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\cdot)||_p,$$

де

$$\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_d}^l \big(\Delta_{h_{d-1}}^l ...(\Delta_{h_1}^l f(\mathbf{x}))\big)$$

— мішана кратна різниця $l$-го порядку з векторним кроком $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_d)$, а

$$\Delta_{h_j}^l f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + jh, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

— кратна $l$-та різниця із кроком $h_j$ за змінною $x_j$.

Нехай $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку $l$, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $\mathbf{t} > \mathbf{0}$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ є неспадною за кожною зі змінних;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$.

Множину таких функцій $\Omega$ позначимо через $\Psi_l$.

Нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$, тоді простір $MB_{p,\theta}^{\Omega}$, $\Omega \in \Psi_l$, визначається таким чином:

$$MB_{p,\theta}^{\Omega} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB_{p,\theta}^{\Omega}} < \infty \right\},$$

де

$$||f||_{MB_{p,\theta}^{\Omega}} := \left( \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left( \frac{\Omega_l(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$||f||_{MH_p^{\Omega}} := ||f||_{MB_{p,\infty}^{\Omega}} := \sup_{\mathbf{t} > \mathbf{0}} \frac{\Omega_l(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})}.$$

Зазначимо, що $MB_{p,\infty}^{\Omega} \equiv MH_p^{\Omega}$. Шкала просторів $MB_{p,\theta}^{\Omega}$ є природним узагальненням шкали просторів (мішаної гладкості) Нікольського–Бєсова $MB_{p,\theta}^{r}$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$, періодичних функцій багатьох змінних і $MB^{\Omega}_{p,\theta} \equiv MB^{r}_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \dots, d$. Зазначимо, що при $\theta = \infty$ $MB^{r}_{p,\theta} \equiv MH^{r}_{p}$ — простори С.М. Нікольського, а при $1 \le \theta < \infty$ $MB^{r}_{p,\theta}$ — простори О.В. Бєсова.

Кожному векторові $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = 1, \dots, d \right\},$$

і позначимо

$$\delta_{\mathbf{s}}(f) = \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Додатково вимагатимемо, щоб функція $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняла умови $(S^{\alpha})$ та $(S_l)$, які називають умовами Барі–Стєчкіна. Сформулюємо їх.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову $(S^{\alpha})$ з $\alpha > 0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову $(S_l)$, якщо існує $\gamma$, $0 < \gamma < l$, таке, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Вкажемо, що $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умову $(S^{\alpha})$ (відповідно $(S_l)$), якщо $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє цю умову за кожною змінною $t_j$ при всіх фіксованих $t_i$, $i \ne j$, і вважатимемо, що $\Omega(\mathbf{t})$ належить до множини $S^{\alpha}$ (відповідно $S_l$). Множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається рівністю $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$. Таке саме позначення $\Phi_{\alpha,l}$ використовуватимемо для аналогічно визначеної множини функцій однієї змінної.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{якщо} \;\; t_j > 0, \; j = 1, \dots, d; \\ 0, & \text{якщо} \;\; \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log\tau\}_+ = \max\{1;\ \log\tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$.

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathbf{s}}) ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \le \theta < \infty, \tag{6}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathbf{s}} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}. \tag{7}$$

Зображення (7) встановив М.М. Пустовойтов (1994), а (6) — Sun Yongsheng і Wang Heping (1997).

Зазначимо, що для норм функцій із простору $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати аналогічні до (6) і (7) зображення у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому “блоки” $\delta_{\mathbf{s}}(f)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному векторові $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left( V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_{\mathbf{s}}(f)$ позначимо згортку

$$A_{\mathbf{s}}(f) = f * A_{\mathbf{s}}.$$

Тоді для $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ норми функцій із простору $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, можна подати в такій формі:

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s} > \mathbf{0}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathbf{s}}) \left\| A_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{8}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathbf{s}} \frac{\left\| A_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}. \tag{9}$$

Співвідношення (9) встановив М.М. Пустовойтов (1994), а співвідношення (8) складає основний зміст теореми 3.1, сформульованої й доведеної у підрозділі 3.1.

**Теорема 3.1.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. *Функція* $f \in MB^{\Omega}_{p,\theta}$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\left( \sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

*і в цьому випадку*

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Одиничні кулі просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ називатимемо класами та позначатимемо $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$. У випадку $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1...t_d)$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, замість $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ та $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ використовуватимемо позначення $MB^{\omega}_{p,\theta}$ і $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ відповідно.

Нехай

$$Q_n := \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \rho(\mathbf{s}),$$

— східчастий гіперболічний хрест.

Через $t_{Q_n}(\mathbf{x})$ позначимо тригонометричний поліном із “номерами” гармонік із $Q_n$, тобто

$$t_{Q_n}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $c_{\mathbf{k}}$ — довільні числа.

Тоді для $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, величина

$$E_{Q_n}(f)_p = \inf_{t_{Q_n}} ||f(\cdot) - t_{Q_n}(\cdot)||_p$$

— найкраще наближення функції $f$ тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік із множини $Q_n$.

Якщо $F \subset L_p$ — деякий клас функцій, то означаємо

$$E_{Q_n}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_p.$$

Наведемо декілька тверджень із підрозділу 3.2.

**Теорема 3.2.** *Нехай* $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді для* $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $1 \le \theta \le 2$ *або* $p = q = \infty$, $\theta = 1$ *виконується порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}).$$

**Теорема 3.3.** *Нехай* $d = 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді справедливі співвідношення*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n})n^{1-\frac{1}{\theta}}, & \textit{якщо } p = q = \infty,\ 1 < \theta \le \infty, \\ \omega(2^{-n})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}, & \textit{якщо } 2 < p \le \infty,\ q = 1,\ 2 < \theta \le \infty. \end{cases}$$

**Теорема 3.6.** *Нехай* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$ *або* $2 < p < \infty$, $\theta = 1$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, *тоді для будь-якого* $d \ge 1$ *виконуєтьcя порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

У випадку $\omega(\tau) = \tau^r$ відповідні до теорем 3.2, 3.3 і 3.6 результати для класів $\mathbf{MH}^r_p$ встановив В.М. Темляков, а для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ — А.С. Романюк.

Тепер перейдемо до викладу результатів підрозділу 3.3.

Наведемо позначення множин, в яких міститимуться "номери" гармонік тригонометричних поліномів, які використовуватимемо для наближення. Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ означимо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, p, q, N) := \{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d :\ \Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)_+} \ge N^{-1}\},$$

$$Q(N) := Q(\Omega, p, q, N) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa(N)} \rho(\mathbf{s}),$$

де $a_+ := \max\{a; 0\}$. Множина $Q(N)$ є узагальненим східчастим гіперболічним хрестом.

Через $t_{Q(N)}(\mathbf{x})$ позначимо тригонометричний поліном із "номерами" гармонік із $Q(N)$, тобто

$$t_{Q(N)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q(N)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $c_{\mathbf{k}}$ — довільні числа.

Тоді для $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, величина

$$E_{Q(N)}(f)_p = \inf_{t_{Q(N)}} ||f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)||_p$$

— найкраще наближення функції $f$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з множини $Q(N)$.

Якщо $F \subset L_p$ — деякий клас функцій, то означаємо

$$E_{Q(N)}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q(N)}(f)_p.$$

**Теорема 3.8.** *Нехай $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, а для параметрів $p$ і $q$ виконана одна з таких умов:*

1) $1 \leq q = p < \infty$;
2) $1 < q < p \leq \infty,\ p \geq 2$;
3) $1 \leq q < p \leq 2$.

*Тоді при $1 \leq \theta < \infty$*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \frac{1}{N}\,(\log_2 N)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

*де $p_0 = \min\{p, 2\}$.*

**Теорема 3.10.** *Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, a $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/q}$, тоді*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+}.$$

**Теорема 3.11.** *Якщо $1 < p < 2$, $1 \leq \theta \leq 2$, $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, a $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/2}$, то*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \asymp N^{-1},$$

*де $N$ подібрано таким чином, щоб виконувалося співвідношення $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.*

Тут і надалі $|A|$ позначає кількість елементів скінченної множини $A$.

**Теорема 3.12.** *Якщо $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $q \neq \infty$, $1 \leq \theta \leq 2$ або $q = p = \infty$, $\theta = 1$, a $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp N^{-1},$$

*де $N$ підібрано таким чином, щоб виконувалося співвідношення $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp m$.*

Як бачимо, при певних співвідношеннях між параметрами результати теорем 3.11 і 3.12 свідчать про оптимальність множин $Q(N)$, в яких зосереджені “номери” гармонік тригонометричних поліномів, що використовуються для наближення в теоремах 3.8 і 3.10.

Результати теорем 3.8, 3.10–3.12 для класів $\mathbf{MH}^r_p$ і $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, установили В.М. Темляков та А.С. Романюк відповідно.

Підрозділ 3.4 стосується встановлення порядкових оцінок найкращого наближення класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із нерівномірних східчастих гіперболічних хрестів.

Підрозділ 3.5 присвячено встановленню точних за порядком оцінок наближення класів Нікольського–Бєсова функцій, визначених на $\mathbb{R}^d$, із узагальненою мішаною гладкістю цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур'є у східчастих гіперболічних хрестах.

Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q < \infty$, позначимо простір вимірних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \left( \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій $\varphi$, що спадають на нескінченності разом із усіма похідними швидше за будь-який степінь функції $|\mathbf{x}|^{-1}$. Через $S'$ позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над $S$. Зазначимо, що елементи простору $S'$ є узагальненими функціями повільного росту. Нехай $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення функціоналу $f \in S'$ на пробній функції $\varphi \in S$.

Пряме (обернене) перетворення Фур'є функції $\varphi \in S$ визначається за формулою:

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{t})} d\mathbf{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$$

$$\left( (\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\mathbf{t}) \right).$$

Пряме (обернене) перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ (для них ми зберігаємо такі самі позначення) визначаються за формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S$$

$$\Big( \langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S \Big).$$

Носієм узагальненої функції $f$ називатимемо замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для будь-якої $\varphi \in S$, що дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій перетворення узагальненої функції $f$ позначатимемо через $\operatorname{supp} f$. Зазначимо, що функція $f$ зосереджена на множині $G$, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Зазначимо також, що для $1 \leqslant p < \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в $S'$ і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з $S'$.

Далі, для кожного вектора $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \ldots, d$, розглянемо множину

$$Q^*_{2^{\mathbf{s}}} := Q^*(\mathbf{s}) := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d :\ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, d \Big\},$$

де $\eta(0) = 0$, а $\eta(t) = 1,\ t > 0$.

Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через $\chi_{\mathcal{A}}$ характеристичну функцію множини $\mathcal{A}$ і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ означимо

$$\delta^*_{\mathbf{s}}(f) = \delta^*_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{Q^*_{2^{\mathbf{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f\big).$$

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}$, тоді

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \left( \sum_{\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} = \sup_{\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}} \frac{\|\delta^*_{\mathbf{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}.$$

Далі, під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ матимемо на увазі множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leqslant 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті самі позначення, що й для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ означимо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, N) := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d) :\ s_j \in \mathbb{Z}_+,\ \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \geqslant \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) =: Q(\Omega, N) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa(N)} Q^*(\mathbf{s})$$

і вкажемо, що

$$G\big(Q(N)\big) = \Big\{ f \in L_q(\mathbb{R}^d) :\ \operatorname{supp} \mathfrak{F} f \subseteq Q(N) \Big\}.$$

Елементи $G\big(Q(N)\big)$ є цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур'є у множині $Q(N)$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q < \infty$, розглянемо величину

$$E\big(f, G\big(Q(N)\big)\big)_q := E_{Q(N)}(f)_q := \inf_{g \in G(Q(N))} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_q,$$

яка називається найкращим наближенням функції $f$ цілими функціями з множини $G\big(Q(N)\big)$. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то означимо

$$E_{Q(N)}(F)_q := \sup_{f \in F} E_{Q(N)}(f)_q.$$

**Теорема 3.17′.** *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді виконуються порядкові оцінки*

$$E_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

У **четвертому розділі** поряд із класами $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ ($\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta} \equiv \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ при $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 ... t_d)$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$) при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ розглядаються класи $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, які визначаються таким чином:

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}, \tag{10}$$

де

$$||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} := \sup_j \left( \sum_{||s||_1 = j} \Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\Big)^{-\theta} \ ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{11}$$

При $\theta = \infty$ означимо $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^{\omega}_p$, а $||f||_{MH^{\omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\omega}_p}$.

Для означених вище функціональних класів, за означеннями (10), (11), справедливі такі вкладення:

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_p, \ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_2}, \ \ 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty.$$

Класи $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ при $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, збігаються з класами $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$, які розглянув В.М. Темляков із погляду встановлення для них точних за порядком оцінок певних апроксимаційних характеристик, зокрема найкращого $m$-членного тригонометричного наближення.

Ми отримали такі твердження.

**Теорема 4.4.** *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\gamma < \frac{1}{p}$.

*Якщо* $1<\theta\le\infty$, *а* $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha>\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\}$, *а* $\gamma<\frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp$$

$$\asymp\omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}.$$

*Якщо ж* $1\le\theta<q$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, *а* $\gamma<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp\omega(m^{-\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

У випадку $\omega(\tau)=\tau^r$, відповідний до теореми 4.4 результат для класів $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ є новим, а для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ його встановив А.С. Романюк (2003).

**Теорема 4.4$'$.** *Нехай* $1<p\le2<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<\frac{1}{p}$.
*Якщо* $1<\theta<\infty$, $\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\}<r<\frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q\asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}.$$

*Якщо ж* $1\le\theta<q$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q\asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}.$$

*У випадку* $p\le\theta<\infty$, $(1/p-1/q)q'<r<1/p$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

**Теорема 4.5$'$.** *Нехай* $1<p\le2<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $r=1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q\asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}.$$

*У випадку* $p\le\theta<\infty$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

Теореми 4.4$'$ і 4.5$'$ доповнюють точні за порядком оцінки величин найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ і $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, які встановили В.М. Темляков і А.С. Романюк.

Для викладу результатів **п'ятого розділу** наведемо спочатку означення класів, а також означення як системи Хаара для випадку функції однієї змінної, так і тензорної системи Хаара.

Наведемо означення класів функцій $\mathbf{MH}^{\Omega}_p$.

Для $f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_d)$ і $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_d)$ визначимо мішану різницю $\Delta_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})$ за допомогою рівності

$$\Delta_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})=\Delta_{h_d}\dots\Delta_{h_1}f(\mathbf{x})=\Delta_{h_d}(\dots(\Delta_{h_1}f(\mathbf{x}))\dots),$$

де

$$\Delta_{h_j} f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(\mathbf{x}),\ j = 1, \dots, d.$$

Для $f \in L_p([0,1]^d)$ та для $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$, розглянемо мішаний модуль неперервності

$$\Omega(f, \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1,\dots,d}} ||\Delta_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p.$$

Для заданої функції $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності визначимо клас функцій

$$\mathbf{MH}_p^\Omega = \{f \in L_p([0,1]^d) :\ \Omega(f, \mathbf{t})_p \leq \Omega(\mathbf{t})\}.$$

У випадку $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 ... t_d)$, $\omega \in S^\alpha$, класи $\mathbf{MH}_p^\Omega$ позначатимемо $\mathbf{MH}_p^\omega$.

Нехай $D_s$, $s \geq 0$, позначає множину всіх двійкових інтервалів на відрізку $[0,1]$ виду $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$. Для вектора $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ означимо

$$\mathcal{D}_{\mathbf{s}} = \{I = I_1 \times \cdots \times I_d,\ I_j \in D_{s_j},\ j = 1, \dots, d\}$$

і

$$Q_n = \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \leq n} \mathcal{D}_{\mathbf{s}}.$$

Множина $Q_n$ є східчастим гіперболічним хрестом.

Означимо для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, якщо $t \in [j2^{-s}, (j + \frac{1}{2})2^{-s})$,

$$H_I(t) = |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [j2^{-s}, (j+\frac{1}{2})2^{-s}), \\ -1, & \text{якщо } t \in [(j+\frac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}), \\ 0, & \text{якщо } t \notin I, \end{cases}$$

де $|I| = 2^{-s}$ — довжина двійкового інтервалу $I$.

У $d$-вимірному випадку для $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ позначимо

$$H_I(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d H_{I_j}(x_j).$$

і

$$\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{I\in\mathcal{D}_{\mathbf{s}}} c_I(f) H_I(\mathbf{x}),$$

де

$$c_I(f) = (f, H_I) = \int\limits_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) H_I(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Визначимо величини, які досліджуватимуться нижче. Позначимо

$$H(Q_n) := \left\{ t = \sum_{I\in Q_n} a_I H_I, a_I \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

— множина поліномів за системою Хаара з номерами індексів із множини $Q_n$. Тоді величина

$$E_{H(Q_n)}(f)_q := \inf_{t\in H(Q_n)} ||f - t||_q$$

позначає найкраще наближення функції $f$ у метриці простору $L_q$ поліномами з множини $H(Q_n)$. Сформулюємо твердження, в якому встановлено точні за порядком оцінки величини

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q := \sup_{f\in \mathbf{MH}_p^{\omega}} E_{H(Q_n)}(f)_q.$$

**Теорема 5.1.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < \alpha < 1$, *тоді*

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}, & 1\le p<q<\infty, \\ \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p_0}}, & 1<q\le p\le\infty,\ (p,q)\ne(\infty,\infty), \end{cases} \tag{12}$$

*де* $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Зазначимо, що оцінки зверху в (12) забезпечуються східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара виду

$$S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{I\in Q_n} c_I(f) H_I = \sum_{||\mathbf{s}||_1\le n} \delta_{\mathbf{s}}(f).$$

Для заданої множини $\mathcal{D}$ функцій із простору $L_q([0,1]^d)$ найкращим $m$-членним наближенням функції $f \in L_q([0,1]^d)$ за системою $\mathcal{D}$ називається величина

$$\sigma_m(f,\mathcal{D})_q := \sigma_m(f,\mathcal{D})_{L_q} := \inf_{g_j\in\mathcal{D}, a_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_{L_q}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Для $F \subset L_q([0,1]^d)$ означаємо

$$\sigma_m(F, \mathcal{D})_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \mathcal{D})_q. \tag{13}$$

Розглянемо в (13) в якості $\mathcal{D}$ тензорну систему Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$, а в якості $F$ — класи $\mathbf{MH}_p^{\omega}$.

Отож, для класів $\mathbf{MH}_p^{\omega}$ встановлено такий результат.

**Теорема 5.2.** *Нехай* $1 < p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_p^{\omega}, \mathcal{H})_q \asymp \omega \left( m^{-1} \log^{d-1} m \right) \left( \log^{d-1} m \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку $\omega(\tau) = \tau^r$ відповідні до теорем 5.1 і 5.2 результати для класів $\mathbf{MH}_p^r$ встановив А.В. Андріанов (1999).

## Висновки

Дослідження спрямовані на вдосконалення старих і відшукання нових підходів до встановлення точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників таких важливих у теорії наближення класів гладких функцій, як ізотропні класи (періодичних функцій однієї та багатьох дійсних змінних) Нікольського–Бєсова логарифмічної гладкості або класи Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю. Отримані точні за порядком оцінки зазначених вище величин доповнюють та розповсюджують результати Б.С. Кашина, В.М. Темлякова та А.С. Романюка. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю доповнюють точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів типу Нікольського періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю, які 1999 року встановили Б.С. Кашин і В.М. Темляков.

Другий і четвертий розділи дисертації містять результати, які стосуються точних за порядком оцінок найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова функцій із малою ізотропною гладкістю (2-й розділ) або малою мішаною гладкістю (4-й розділ). Точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю з класів Нікольського–Бєсова доповнюють відповідні результати Р.А. ДеВора й В.М. Темлякова (1995) стосовно найкращого $m$-членного тригонометричного наближення ізотропних класів

Нікольського–Бєсова, де випадок малої гладкості не був розглянутий. А точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення узагальнених класів Бєсова функцій малої мішаної гладкості доповнюють результати найкращого $m$-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова мішаної гладкості, які В.М. Темляков і А.С. Романюк одержали впродовж минулих двох десятиріч.

У третьому розділі встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних із класів Нікольського–Бєсова узагальненої мішаної гладкості тригонометричними поліномами з номерами гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, які тісно пов'язані з гладкісною функцією, яка присутня в означенні класів. З'ясовано питання стосовно оптимальності (в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників) таких областей, як узагальнені східчасті гіперболічні хрести.

Завершальний п'ятий розділ присвячений встановленню порядкових оцінок наближення у просторі Лебега функціональних класів типу Нікольського узагальненої мішаної гладкості східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара. В цьому розділі також знайдено точні за порядком оцінки величини найкращого $m$-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних із класів типу Нікольського узагальненої мішаної гладкості.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Стасюк С. А. Наближене відновлення класів $H_p^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 349-359.

2. Стасюк С.А. Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}(\gamma)$ в метриці простору $L_q$ / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 258-267.

3. Стасюк С. А. Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк, О. В. Федуник // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 5. — С. 692–704.

Stasyuk S. A. Approximation characteristics of the classes $B_{p,\theta}^{\Omega}$ of periodic functions of many variables / S. A. Stasyuk, O. V. Fedunyk // Ukr. Math. J. — 2006. — V. 58, № 5. — P. 779–793.

4. Стасюк С. А. Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору $L_p$ / С. А. Стасюк

// Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 255–265.

5. Конограй А. Ф. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 151–171.

6. Конограй А. Ф. Найкращі $M$-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $L_q$ / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2008. — Т. 60, № 9. — С. 1206–1224.

Konohrai A. F. Best $M$-term trigonometric approximations of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space $L_q$ / A. F. Konohrai, S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2008. — V. 60, № 9. — P. 1396–1417.

7. Стасюк С. А. Приближение функций многих переменных классов $H^{\Omega}_{p}$ полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Analysis Mathematica. — 2009. — V. 35, № 4. — С. 257–271.

8. Стасюк С. А. Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 108–121.

Stasyuk S. A. Best approximations of periodic functions of several variables from the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / S. A. Stasyuk // Math. Notes. — 2010. — V. 87, № 1. — P. 102–114.

9. Стасюк С. А. Приближение суммами Фурье классов $B^{\omega}_{1,\theta}$ периодических функций в пространстве $L_1$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 338–344.

10. Стасюк С. А. Наилучшее $m$-членное тригонометрическое приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ функций малой гладкости / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 1. — С. 104–111.

Stasyuk S. A. Best $m$-term trigonometric approximation for the classes $B^{r}_{p,\theta}$ of functions of low smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2010. — V. 62, № 1. — P. 114–122.

11. Стасюк С. А. Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях / С. А. Стасюк // Матем. Студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 66–73.

12. Стасюк С. А. Наилучшее $m$-членное билинейное приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 206–215.

13. Стасюк С. А. Наилучшее приближение периодических функций

нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 1. — С. 140–144.

Stasyuk S. A. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2012. — V. 64, № 1. — P. 156–161.

14. Стасюк С. А. Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 258–266.

15. Stasyuk S.A. Best $m$-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness / S. A. Stasyuk // J. Approx. Theory. — 2014. — V. 177. — C. 1–16.

16. Стасюк С. А. Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\,\theta}$ периодических функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 247–257.

17. Стасюк С. А. Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 493–499.

Stasyuk S. A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2014. — V. 66, № 4. — P. 553–560.

18. Стасюк С. А. Наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$ / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 228–240.

19. Стасюк С. А. Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 308–317.

20. Стасюк С. А. Приближения классов $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 97–109.

Stasyuk S. A. Approximations of the classes $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by polynomials according to the Haar system / S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2015. — V. 210, № 1. — P. 76–85.

21. Стасюк С. А. Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2015. — Т. 67, № 11. — С. 1640–1645.

Stasyuk S. A. Kolmogorov widths for analogs of the Nikol'skii–Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2016. — V. 67, № 11. — P. 1786–1792.

22. Стасюк С. А. Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 251–260.

23. Stasyuk S. A. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk, S. Ya. Yanchenko // Analysis Mathematica. — 2015. — V. 41, № 4. — P. 311–334.

24. Стасюк С. А. Найкраще $m$-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 983–1003.

Stasyuk S. A. Best $m$-term trigonometric approximation for periodic functions with low mixed smoothness from the Nikol'skii–Besov type classes / S. A. Stasyuk // Ukr. Mat. J. — 2016. — V. 68, № 7. — P. 1121–1145.

25. Стасюк С. А. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для функций обобщенной смешанной гладкости / С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2016. — Т. 13, № 3. — С. 408–420.

Stasyuk S. A. Constructive sparse trigonometric approximations for the functions with generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2017. — V. 222, № 6. — P. 787–796.

26. Стасюк С. А. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для классов функций с небольшой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 247–253.

27. Стасюк С. А. Разреженное тригонометрическое приближение классов Бесова функций с малой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 3. — С. 244–252.

28. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності / С. Я. Янченко, С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 132–148.

Yanchenko, S. Ya. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of mixed moduli of continuity / S. Ya. Yanchenko, S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2018. — V. 235, № 1. — P. 103–115.

## Тези доповідей на конференціях

1. Стасюк С.А. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q$

/ С. А. Стасюк // Тези доп. Конференція “Функціональні методи в теорії наближення, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці”, присвячена пам’яті А.Я. Дороговцева (1935–2004). — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2004. — С. 117.

2. Стасюк С.А. Наилучшее приближение классов $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ / С. А. Стасюк // Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная столетию академика С. М. Никольского. Тезисы докладов.— М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2005.— С. 213.

3. Стасюк С. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ / С. Стасюк // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (24–28 вересня 2007, Дрогобич, Україна), Львів: Тези доповідей. — С. 262.

4. Стасюк С.А. Приближение суммами Фурье и наилучшее приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ / С. А. Стасюк // Международная научная конференция “Современные проблемы математики, механики, информатики”, посвященная 85-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова: Материалы конференции (Россия, Тула, 17–21 ноября 2008 года). — С. 94–96.

5. Стасюк С.А. Наилучшие $m$-членные тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ в случае малой гладкости / С. А. Стасюк // Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего: Материалы конференции (30 марта — 02 апреля 2009 года, Москва, Россия). — С. 97.

6. Стасюк С.А. Найкраще тригонометричне наближення класів $B^{r}_{p,\theta}$ для критичного показника гладкості / С. А. Стасюк // International conference “ANALYTIC METHODS OF MECHANICS AND COMPLEX ANALYSIS” dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary: Abstracts (June 29 – July 5, 2009, Kiev, Ukraine). — С. 73-74.

7. Стасюк С.А. Наилучшие $m$-членные тригонометрические приближения / С. А. Стасюк // Современные проблемы анализа и преподавания математики: Материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М. Никольского (Москва, 17–19 мая 2010 года). — С. 36.

8. Стасюк С.А. Наилучшее $m$-членное тригонометрическое приближение класса $B^{1/2}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Конференция “Современные методы теории функций и смежные проблемы” Воронежской зимней математической школы: Материалы конференции (Россия, Воронеж, 25 ян-

варя – 1 февраля 2011 г.). — С. 320–321.

9. Стасюк С.А. Поперечники по Колмогорову аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 16-й Саратовской зимней школы (Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 года). — С. 168–169.

10. Стасюк С.А. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования": тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г. — М.: РУДН, 2013. — С. 119–120.

11. Stasyuk S.A. The best multivariate approximation of Nikol'skii–Besov classes (mixed smoothness) of periodic functions / S. A. Stasyuk // 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Olenivka, Crimea, Ukraine, September 05–10, 2013. — P. 31.

12. Stasyuk S.A. $m$-Term trigonometric approximation of Nikol'skii-Besov classes // Mecklenburg Workshop (Dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel) "Approximation Methods and Function Spaces", Hasenwinkel, March 16–20, 2015. — P. 36.

13. Стасюк С.А. $M$-членные тригонометрические приближения анизотропных классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных / С. А. Стасюк // Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 25–29 мая 2015 г.): Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2015. — С. 226.

14. Stasyuk S.A. Sparse trigonometric approximation of Nikol'skii-Besov classes of generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Rivne, Ukraine, September 15–19, 2015. — P. 43–44.

15. Стасюк С.А. Разреженные тригонометрические приближения анизотропных классов периодических функций нескольких переменных / С. А. Стасюк // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень та її застосування" з нагоди 75-річчя проф. члена-кореспондента НАНУ Віталія Павловича Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня, 2015. — С. 72.

16. Stasyuk S.A. Nonlinear trigonometric approximation for functions with generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences" (Hasenwinkel, Germany,

March 07 – 11, 2016): Abstract. P. 31.

17. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness / S. Stasyuk // Workshop on Function Spaces and High-Dimensional Approximation (Bellaterra (Barcelona), Spain, May 2–6, 2016). — P. 18.

18. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of Nikolskii–Besov type classes of functions with small mixed smoothness / S. Stasyuk // Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Data Analysis” dedicated to the 60th birthday of Hrushikesh N. Mhaskar (Hasenwinkel, Germany, September 05–09, 2016). — P. 23.

19. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of functions with small mixed smoothness / S. Stasyuk // Workshop “Follow-up Approximation Theory and Function Spaces” (Bellaterra (Barcelona), Spain, June 26–30, 2017). — P. 27–28.

20. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of classes of functions with mixed smoothness / S. Stasyuk // 4th AMMODIT Conference (Malekhiv (Lviv region), Ukraine, March 19–23, 2018): Book of Abstracts. — P. 26.

## Анотації

**Стасюк С.А. Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – ”Математичний аналіз” (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних, а саме, встановленню порядкових оцінок цих характеристик класів типу Нікольського–Бєсова функцій із широким діапазоном гладкостей.

Знайдено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного тригонометричного наближення ізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою гладкістю. Одержано точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю.

Установлено точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості з класів Нікольського–Бєсова тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

Знайдено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного триго-

нометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із широким діапазоном гладкостей.

Установлено точні за порядком оцінки найкращого $m$-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, класів типу Нікольського періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості.

***Ключові слова:*** класи Нікольського–Бєсова; найкраще $m$-членне тригонометричне наближення; найкраще $m$-членне ортогональне тригонометричне наближення; розріджене тригонометричне наближення; колмогоровський поперечник; ентропійні числа; тензорна система Хаара; східчастий гіперболічний хрест; мішана гладкість; ізотропна гладкість; логарифмічна гладкість; узагальнена гладкість; мішаний модуль неперервності (гладкості).

**Стасюк С.А. Аппроксимационные характеристики классов гладких функций одной и многих переменных.** — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию апроксимационных характеристик классов периодических функций одной и многих переменных, а именно, установлению порядковых оценок этих характеристик классов типа Никольского–Бесова функций с широким диапазоном гладкости.

Найдены точные по порядку оценки наилучшего $m$-членного тригонометрического приближения изотропных классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных с малой гладкостью. Получены точные по порядку оценки некоторых апроксимационных характеристик классов типа Никольского–Бесова периодических функций с логарифмической гладкостью.

Установлены точные по порядку оценки наилучшего приближения периодических функций многих переменных обобщенной смешанной гладкости из классов Никольского–Бесова тригонометрическими полиномами с "номерами" гармоник со ступенчатых гиперболических крестов.

Найдены точные по порядку оценки наилучшего $m$-членного тригонометрического приближения классов типа Никольского–Бесова периодических функций многих переменных с широким диапазоном гладкостей.

Установлены точные по порядку оценки наилучшего $m$-членного приближения полиномами, построенные по тензорной системе Хаара, классов типа Никольского периодических функций многих переменных смешанной гладкости.

***Ключевые слова:*** классы Никольского–Бесова; наилучшее $m$-членное тригонометрическое приближение; наилучшее $m$-членное ортогональное тригонометрическое приближение; разреженное тригонометрическое приближение; колмогоровський поперечник; энтропийные числа; тензорная система Хаара; ступенчатый гиперболический крест; смешанная гладкость; изотропная гладкость; логарифмическая гладкость; обобщенная гладкость; смешанный модуль непрерывности (гладкости).

**Stasyuk S.A. Approximation characteristics of classes of smooth functions of one and several variables.** — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01 — "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the research of approximation characteristics of classes of periodic functions of one and several variables, more exactly, to obtaining of the order estimates (and in many cases the exact order estimates) of these characteristics for the Nikolskii-Besov type classes of functions with wide range of smoothness.

The beginning of the main part of this manuscript is devoted to finding the exact order estimates of the best $m$-term trigonometric approximation (which is one of the types of sparse trigonometric approximation) of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with small isotropic smoothness. These results supplement corresponding results regarding to the exact order estimates of the best $m$-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with bigger isotropic smoothness obtained by R.A. DeVore and V.N. Temlyakov (1995), where the case of small smoothness was not considered.

Moreover, the problem of finding of the exact order estimates for the Kolmogorov widths and entropy numbers for the Nikolskii–Besov type classes of periodic functions of one variable with logarithmic smoothness is solved. The obtained results supplement the corresponding results regarding to the exact order estimates for the Kolmogorov widths and entropy numbers for the Nikolskii type classes of periodic functions of one variable with logarithmic smoothness received by B.S. Kashin and V.N. Temlyakov (1999).

The third section relates to the finding of the exact order estimates of the best approximation of the Nikolskii-Besov classes of periodic multivariate functions with generalized mixed smoothness by trigonometric polynomials with harmonic “numbers” from step hyperbolic crosses. The optimality (in the sense of the exact order estimations) of the choice of such trigonometric polynomials is confirmed by the exact order estimates of the corresponding Kolmogorov widths found in some cases (for certain relations between parameters). The exact order estimates of just mentioned approximation characteristics obtained in this section supplement and distribute the corresponding results of V.N. Temlyakov, E.M. Galeev, Dinh Dung, A.S. Romanyuk, N.N. Pustovoitov, Sun Yongsheng and Wang Heping concerning the approximation of different classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness by trigonometric polynomials with harmonic “numbers” from the hyperbolic crosses.

The fourth section is devoted to sparse trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov type classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness. We obtain the exact order estimates of the best $m$-term orthogonal trigonometric approximation and the best $m$-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed generalized smoothness. We also obtain the exact order estimates of the best $m$-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov type classes of periodic multivariate functions with small mixed smoothness. For some relations between parameters the upper estimates are achieved by using of a constructive greedy-type algorithm proposed and developed by V.N. Temlyakov for research of the best $m$-term trigonometric approximation of the classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness. For some other relations between parameters the upper estimates are achieved by applying of nonconstructive approach (with using of a lemma of E.S. Belinskii) proposed and developed by A.S. Romanyuk for research of the best $m$-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness with further adaptation for the case of the Nikolskii–Besov type classes of periodic multivariate functions with different types of mixed smoothness.

In the fifth section, we explore an approximation of periodic multivariate functions with mixed smoothness from the Nikolskii–Besov type classes by polynomials constructed by the tensor Haar system. In particular, we find the exact order estimates of the best $m$-term approximation by the polynomials constructed by the tensor Haar system of the Nikolskii type classes of periodic multivariate functions with mixed generalized smoothness.

***Key words:*** Nikolskii–Besov classes; best $m$-term trigonometric approximation; best $m$-term orthogonal trigonometric approximation;

sparse trigonometric approximation; Kolmogorov width; entropy numbers; tensor Haar system; step hyperbolic cross; mixed smoothness; isotropic smoothness; logarithmic smoothness; generalized smoothness; mixed modulus of continuity (smoothness).

Підп. до друку 29. 05. 2019. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,31. Ум. друк. арк. 2,15. Тираж 130 пр. Зам. 33.

Інститут математики НАН України
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3