НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

СТАСЮК СЕРГІЙ АНДРІЙОВИЧ

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико – математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _______ С. А. Стасюк

Науковий консультант
РОМАНЮК Анатолій Сергійович
доктор фізико – математичних наук,
професор

Київ — 2019

АНОТАЦІЯ

Стасюк С.А. Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних, а саме, встановленню точних за порядком оцінок цих характеристик для класів функцій типу Нікольського–Бєсова.

Основні положення дисертаційної роботи з відповідними коментарями та результатами попередників висвітлені в її першому розділі.

Другий розділ присвячено знаходженню точних за порядком оцінок найкращих m-членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з малою ізотропною гладкістю. Знайдені оцінки доповнюють одержані Р.А. Де Вором та В.М. Темляковим (1995) точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з ізотропною гладкістю, де випадок малої гладкості не був розглянутий.

Також знайдено точні за порядком оцінки найкращого m-членного білінійного наближення ізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних для критичного значення показника гладкості. Ці оцінки є новими також і в одновимірному випадку. Вони доповнюють результати досліджень, які були проведені В.М. Темляковим, А.С. Романюком і стосуються встановлення точних за порядком оцінок найкращих m-членних білінійних наближень класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій

багатьох змінних як з ізотропною, так і з мішаною гладкостями.

Крім того, в даному розділі розглянуто і розв'язано задачу про знаходження точних за порядком оцінок поперечників за Колмогоровим (колмогоровських поперечників) та ентропійних чисел класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю. Зазначені результати доповнюють відповідні результати Б.С. Кашина та В.М. Темлякова (1999), які стосуються точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів типу Нікольського періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю. Виявилось, що точні за порядком оцінки, як колмогоровських поперечників, так і ентропійних чисел класів $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю окрім того, що залежать від параметра θ, ще й збігаються за порядком.

Завершальну частину другого розділу складають точні за порядком оцінки величини найкращого наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою ізотропною гладкістю тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з кубічних областей.

У третьому розділі встановлюються, в переважній більшості, точні за порядком оцінки найкращого наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, конструкція яких пов'язана з виглядом гладкісних функцій, які присутні в означенні досліджуваних класів. Оптимальність (в сенсі точних за порядком оцінок) вибору таких тригонометричних поліномів у деяких випадках підтверджена знайденими точними за порядком оцінками колмогоровських поперечників цих класів. Одержані в цьому розділі оцінки доповнюють та поширюють відповідні результати Я.С. Бугрова, Н.С. Нікольської, В.М. Темлякова, Е.М. Галєєва, Дінь Зунга, А.С. Романюка, М.М. Пустовойтова, Sun Yongsheng та Wang Heping, які стосуються наближення деяких класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік з відповідних гіперболічних хрестів.

Опишемо більш детально вміст третього розділу. Виклад результатів цього розділу розпочинається із встановлення декомпозиційного зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів Бєсова $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, де функція $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє так звані умови Барі-Стєчкіна.

Особливість одержаного тут результату полягає в тому, що нам, з одного боку, вдалось поширити на випадок $1 \leq \theta < \infty$ відповідне декомпозиційне зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів Нікольського $MH^{\Omega}_{p} = MB^{\Omega}_{p,\infty}$, яке встановлене М.М. Пустовойтовим (1994). З іншого боку, новизна встановеного декомпозиційного зображення полягає ще й у тому, що нами крім значень параметра $p \in (1, \infty)$ охоплено його “крайні” значення $p = 1$ та $p = \infty$. Це вдалося здійснити за рахунок залучення до розгляду двійкових “блоків” сум Валле Пуссена замість двійкових “блоків” сум Фур’є, які раніше використовувались Y.S. Sun та H.P. Wang (1997) при встановленні ними декомпозиційного зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$.

Одержане нами декомпозиційне зображення дало поштовх для встановлення порядкових оцінок апроксимаційних характеристик класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ (одиничних куль просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$) періодичних функцій багатьох змінних з різними видами узагальненої мішаної гладкості для “крайніх” значень параметра p ($p = 1$ та $p = \infty$). Відповідні результати викладено в 3-му та 4-му розділах, а також в роботах Г.А. Акішева, Ш.А. Балгімбаєвої і Т.І. Смірнова та учнів А.С. Романюка, таких як О.В. Федуник-Яремчук, А.Ф. Коноградй, К.В. Соліч, Н.В. Дерев’янко та ін.

У другій частині 3-го розділу містяться результати стосовно точних за порядком оцінок найкращого наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік з відповідних східчастих гіперболічних хрестів, які, в залежності від розглядуваних параметрів мають різну структуру (так звані “власні” та “невласні” гіперболічні хрести). Зазначимо, що “невласні” гіперболічні хрести вперше з’явились у роботі С.О. Теляковського (1964), в якій було показано їх апроксимаційні переваги над “власними” гіперболічними хрестами. Слід також звернути увагу, що з теоретико-множинної точки зору “невласні” гіперболічні хрести є ширшими, ніж відповідні їм “власні” гіперболічні хрести, однак кількість елементів цих множин є однаковою за порядком.

В завершальному підрозділі 3-го розділу встановлено точні за порядком оцінки наближення класів Нікольського–Бєсова $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур’є в множинах, обмежених поверхнями рівня функції Ω.

У четвертому розділі дисертації вивчаються такі апроксимаційні характеристики, як найкраще m-членне тригонометричне наближення та найкраще m-членне ортогональне тригонометричне наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості. Одержані оцінки поширюють та доповнюють відповідні результати В.М. Темлякова, А.С. Романюка, Д.Б. Базарханова стосовно найкращих m-членних тригонометричних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості. Отримано точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю. Для деяких співвідношень між параметрами верхні оцінки досягаються за допомогою конструктивного гріді (greedy) алгоритму, запропонованого і розробленого В.М. Темляковим для дослідження найкращого m-членного тригонометричного наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю. А для певних співвідношень між параметрами верхні оцінки досягаються за допомогою застосування неконструктивного підходу (з використанням леми Е.С. Белінського), запропонованого і розробленого А.С. Романюком для вивчення найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю з подальшою адаптацією до класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з різними типами мішаної гладкості.

Зупинимося більш детально на характеристиці результатів четвертого розділу. Перша його частина присвячена встановленню точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення та найкращого m-членного ортогонального тригонометричного наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою рівномірною мішаною гладкістю. При цьому функція, яка характеризує узагальнену рівномірну мішану гладкість, описується в термінах умов Барі–Стєчкіна. Зокрема, встановлено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного ортогонального тригонометричного наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю в метриці простору L_q, $1 < q \leq \infty$.

Найскладніша частина розділу стосується точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ і $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною узагальненою гладкістю.

Заключна частина розділу містить точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_q для $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq 1/p$.

У п'ятому розділі вивчаються наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара. Зокрема, знайдено точні за порядком оцінки наближення згаданих класів функцій східчасто-гіперболічними сумами Фур'є-Хаара. Крім цього встановлено точні за порядком оцінки найкращого m-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, в метриці простору L_q для класів типу Нікольського періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю.

Ключові слова: класи Нікольського–Бєсова; найкраще m-членне тригонометричне наближення; найкраще m-членне ортогональне тригонометричне наближення; розріджене тригонометричне наближення; колмогоровський поперечник; ентропійні числа; тензорна система Хаара; гіперболічний хрест; мішана гладкість; ізотропна гладкість; логарифмічна гладкість; мала гладкість; узагальнена гладкість; мішаний модуль неперервності (гладкості).

Stasyuk S.A. Approximation characteristics of classes of smooth functions of one and several variables. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the research of approximation characteristics of classes of periodic functions of one and several variables, namely, obtaining of the exact order estimates of these characteristics for the Nikolskii–Besov type classes of functions.

There are main provisions of the thesis with the corresponding comments and the results of the precursors in its first section.

The second section is devoted to finding the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation for the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with small isotropic smoothness. These estimates supplement the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation for the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with isotropic smoothness obtained by R.A. DeVore and V.N. Temlyakov (1995), where the case of small isotropic smoothness was not considered.

We have also obtained the exact order estimates of the best m-term bi-

linear approximation for the Besov classes of periodic multivariate functions with critic value of isotropic smoothness. These estimates are new in one-dimensional case, too. These estimates supplement corresponding results obtaining by V.N. Temlyakov and A.S. Romanyuk with regard to the exact order estimates of the best m-term bilinear approximation for the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions as with isotropic smoothness and with mixed smoothness.

Moreover, in the second section we have considered and solved a problem with regard to finding of the exact order estimates of the Kolmogorov widths and entropy numbers for the Nikolskii–Besov type classes of periodic functions of one variable with logarithmic smoothness. These results supplement the corresponding results regarding to the exact order estimates of the Kolmogorov widths and entropy numbers for the Nikolskii type classes of periodic functions of one variable with logarithmic smoothness obtained by B.S. Kashin and V.N. Temlyakov (1999). We have observed the exact order estimates of the Kolmogorov widths and entropy numbers for the classes $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ of periodic functions of one variable with logarithmic smoothness are same but depend on the parameter θ.

The last part of the second section consists of the exact order estimates of the best approximation for the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with generalized isotropic smoothness by trigonometric polynomials with "numbers" of harmonics from cubic areas.

The third section relates to obtaining (as a rule) of the exact order estimates of the best approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed by trigonometric polynomials with "numbers" of harmonics from step hyperbolic crosses. Construction of these step hyperbolic crosses is close connected with a smooth function which is present in the definition of the considered classes. Optimality (in the sense of the exact order estimates) of the choice of these trigonometric polynomials is confirmed by the exact order estimates of the Kolmogorov widths for the classes mentioned above. The results obtained in this section complement and extend corresponding results obtained by Ya.S. Bugrov, N.S. Nikolskaya, V.N. Temlyakov, E.M. Galeev, Dinh Dung, A.S. Romanyuk, N.N. Pustovoitov, Sun Yongsheng and Wang Heping with regard to approximation of some classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness by trigonometric polynomials with "numbers" of harmonics from suitable hyperbolic crosses.

Let us describe the content of the third section more detail. Description of the results of the section is begun from obtaining of a decomposition representation for the norm of the periodic multivariate functions from Besov space $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, where $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ satisfies so-called Bari–Stechkin conditions.

On the one hand, we have managed to extend the decomposition representation for the norm of the periodic multivariate functions of the Besov space $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ from the case $\theta = \infty$ considered by N.N. Pustovoitov (1994) for the Nikolskii space to the case $1 \le \theta < \infty$. On the other hand, we have also managed to extend the decomposition representation for the norm of the periodic multivariate functions of the Besov space $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ from the case $1 < p < \infty$ to the case $1 \le p \le \infty$. It is possible due to using of the binary "blocks" of the de la Vallée Poussin sums instead of the binary "blocks" of the Fourier sums considered by Sun Yongsheng and Wang Heping for $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$.

The decomposition representation gave impulse for the obtaining of the order estimates of approximation characteristics for the classes (the unit balls of the space $MB^{\Omega}_{p,\theta}$) of the periodic multivariate functions with different types of mixed generalized smoothness for $p = 1$ and $p = \infty$. There are corresponding results in the second and the fourth sections of the thesis and in the papers of G.A. Akishev, Sh.A. Balgimbaeva, T.I. Smirnov, O.V. Fedunyk–Yaremchuk, A.F. Konohrai, K.V. Solich, N.V. Derevianko.

The second part of the third section concerns the exact order estimation of the best approximation for the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed generalized smoothness by trigonometric polynomials with “numbers” of harmonics from the suitable hyperbolic crosses including as “proper” hyperbolic crosses and “improper” hyperbolic crosses. It should be noted that “improper” hyperbolic crosses appeared due to investigations of S.A. Telyakovskii (1964) with regard to advantage “improper” hyperbolic crosses before “improper” hyperbolic crosses. It should also be noted that the “improper” hyperbolic crosses are wider than the corresponding “proper” hyperbolic crosses but volumes of these sets are same from point of view of the exact order estimates.

In the last subsection of the third section we obtain the exact order estimates of approximation of the Nikolskii–Besov classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of multivariate functions defined on $\mathbb{R}^d$, in the L_q norm, by entire functions of exponential type with supports of their Fourier transforms in sets that generated by the level surfaces of a function Ω.

In the fourth section we investigate such trigonometric approximations as the best m-term trigonometric approximation and the best m-term orthogonal trigonometric approximation of the Nikolski–Besov type classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness. The results presented in the section supplement and extend the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation of the Nikolski–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness obtained by V.N. Temlyakov, A.S. Romanyuk, D.B. Bazarkhanov. We also obtain the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov type classes of periodic multivariate functions with small mixed smoothness. For some relations between parameters the upper estimates are achieved by using of a constructive greedy-type algorithm proposed and developed by V.N. Temlyakov for research of the best m-term trigonometric approximation of the classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness. For some other relations between parameters the upper estimates are achieved by applying of nonconstructive approach (with using of a lemma of E.S. Belinskii) proposed and developed by A.S. Romanyuk for research of the best m-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness with further adaptation for the case of the Nikolskii–Besov type classes of periodic multivariate functions with different types of mixed smoothness.

Let us describe the content of the fourth section more detail. The first part of the section is devoted to the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation and the best m-term orthogonal trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes of periodic multivariate functions with generalized uniform mixed smoothness. In this case, the function that characterizes the generalized uniform mixed smoothness is described by the Barry–Stechkin conditions. In particular, the exact order estimates of the best m-term orthogonal trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov classes $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions with generalized uniform mixed smoothness in the L_q, $1 < q \leq \infty$, norm are obtained.

The most difficult part of the section concerns the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov type classes $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ and $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions with small mixed generalized smoothness.

The last part of the section contains the exact order estimates of the best m-term trigonometric approximation of the Nikolskii–Besov type classes $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions with mixed smoothness in the L_q norm for $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq 1/p$.

In the fifth section we explore an approximation of the Nikolskii-Besov type classes of periodic multivariate functions with mixed smoothness by polynomials constructed by the Haar tensor system. In particular, we obtain the exact order estimates of the approximation by step hyperbolic Fourier–Haar sums and the best m-term approximation by polynomials constructed by the Haar tensor system for the Nikolskii type classes of periodic multivariate functions with mixed generalized smoothness.

Key words: Nikolskii-Besov classes; best m-term trigonometric approximation; best m-term orthogonal trigonometric approximation; sparse trigonometric approximation; Kolmogorov width; entropy numbers; tensor

Haar system; hyperbolic cross; mixed smoothness; isotropic smoothness; logarithmic smoothness; small smoothness; generalized smoothness; mixed modulus of continuity (smoothness).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Стасюк С. А. Наближене відновлення класів H_p^Ω періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 349-359.

2. Стасюк С.А. Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$ в метриці простору L_q / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 258-267.

3. Стасюк С. А. Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк, О. В. Федуник // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 5. — С. 692–704.

Stasyuk S. A. Approximation characteristics of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of many variables / S. A. Stasyuk, O. V. Fedunyk // Ukr. Math. J. — 2006. — V. 58, № 5. — P. 779–793.

4. Стасюк С. А. Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p / С. А. Стасюк // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 255–265.

5. Конограй А. Ф. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 151–171.

6. Конограй А. Ф. Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2008. — Т. 60, № 9. — С. 1206–1224.

Konohrai A. F. Best M-term trigonometric approximations of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of many variables in the space L_q / A. F. Konohrai,

S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2008. — V. 60, № 9. — P. 1396–1417.

7. Стасюк С. А. Приближение функций многих переменных классов H_p^Ω полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Analysis Mathematica. — 2009. — V. 35, № 4. — С. 257–271.

8. Стасюк С. А. Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^\Omega$ / С. А. Стасюк // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 108–121.

Stasyuk S. A. Best approximations of periodic functions of several variables from the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ / S. A. Stasyuk // Math. Notes. — 2010. — V. 87, № 1. — P. 102–114.

9. Стасюк С. А. Приближение суммами Фурье классов $B_{1,\theta}^\omega$ периодических функций в пространстве L_1 // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 338–344.

10. Стасюк С. А. Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов $B_{p,\theta}^r$ функций малой гладкости / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 1. — С. 104–111.

Stasyuk S. A. Best m-term trigonometric approximation for the classes $B_{p,\theta}^r$ of functions of low smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2010. — V. 62, № 1. — P. 114–122.

11. Стасюк С. А. Наближення класів $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях / С. А. Стасюк // Матем. Студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 66–73.

12. Стасюк С. А. Наилучшее m-членное билинейное приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 206–215.

13. Стасюк С. А. Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB_{p,\theta}^\omega$ / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 1. — С. 140–144.

Stasyuk S. A. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2012. — V. 64, № 1. — P. 156–161.

14. Стасюк С. А. Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 258–266.

15. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness / S. A. Stasyuk // J. Approx. Theory. — 2014. — V. 177. — C. 1–16.

16. Стасюк С. А. Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 247–257.

17. Стасюк С. А. Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 493–499.

Stasyuk S. A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2014. — V. 66, № 4. — P. 553–560.

18. Стасюк С. А. Наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$ / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 228–240.

19. Стасюк С. А. Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 308–317.

20. Стасюк С. А. Приближения классов $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 97–109.

Stasyuk S. A. Approximations of the classes $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by polynomials according to the Haar system / S. A. Stasyuk

// J. Math. Sci. (New York, USA). — 2015. — V. 210, № 1. — P. 76–85.

21. Стасюк С. А. Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2015. — Т. 67, № 11. — С. 1640–1645.

Stasyuk S. A. Kolmogorov widths for analogs of the Nikol'skii–Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2016. — V. 67, № 11. — P. 1786–1792.

22. Стасюк С. А. Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 251–260.

23. Stasyuk S. A. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk, S. Ya. Yanchenko // Analysis Mathematica. — 2015. — V. 41, № 4. — P. 311–334.

24. Стасюк С. А. Найкраще m-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 983–1003.

Stasyuk S. A. Best m-term trigonometric approximation for periodic functions with low mixed smoothness from the Nikol'skii–Besov type classes / S. A. Stasyuk // Ukr. Mat. J. — 2016. — V. 68, № 7. — P. 1121–1145.

25. Стасюк С. А. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для функций обобщенной смешанной гладкости / С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2016. — Т. 13, № 3. — С. 408–420.

Stasyuk S. A. Constructive sparse trigonometric approximations for the functions with generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2017. — V. 222, № 6. — P. 787–796.

26. Стасюк С. А. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для классов функций с небольшой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 247–253.

27. Стасюк С. А. Разреженное тригонометрическое приближение

классов Бесова функций с малой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 3. — С. 244–252.

28. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності / С. Я. Янченко, С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 132–148.

Yanchenko, S. Ya. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of mixed moduli of continuity / S. Ya. Yanchenko, S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2018. — V. 235, № 1. — P. 103–115.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. Стасюк С.А. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q / С. А. Стасюк // Конференція "Функціональні методи в теорії наближення, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці", присвячена пам'яті А.Я. Дороговцева (1935–2004): Тези доповідей. — Київ: Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2004. — С. 117.

2. Стасюк С.А. Наилучшее приближение классов $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q / С. А. Стасюк // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию академика С. М. Никольского (Москва, Россия, 23–29 мая 2005 г.): Тезисы докладов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2005.— С. 213.

3. Стасюк С. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ / С. Стасюк // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (24–28 вересня 2007, Дрогобич, Україна), Львів: Тези доповідей. — С. 262.

4. Стасюк С.А. Приближение суммами Фурье и наилучшее приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q / С. А. Стасюк // Международная научная конференция

"Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 85-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова: Материалы конференции (Тула, Россия, 17–21 ноября 2008 года). — С. 94–96.

5. Стасюк С.А. Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в случае малой гладкости / С. А. Стасюк // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего: Материалы конференции (30 марта — 02 апреля 2009 года, Москва, Россия). — С. 97.

6. Стасюк С.А. Найкраще тригонометричне наближення класів $B^r_{p,\theta}$ для критичного показника гладкості / С. А. Стасюк // International conference "ANALYTIC METHODS OF MECHANICS AND COMPLEX ANALYSIS" dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary: Abstracts (June 29 – July 5, 2009, Kiev, Ukraine). — С. 73-74.

7. Стасюк С.А. Наилучшие m-членные тригонометрические приближения / С. А. Стасюк // Современные проблемы анализа и преподавания математики: Материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М. Никольского (Москва, 17–19 мая 2010 года). — С. 36.

8. Стасюк С.А. Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение класса $B^{1/2}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Конференция "Современные методы теории функций и смежные проблемы" Воронежской зимней математической школы: Материалы конференции (Россия, Воронеж, 25 января – 1 февраля 2011 г.). — С. 320–321.

9. Стасюк С.А. Поперечники по Колмогорову аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 16-й Саратовской зимней школы (Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 года). — С. 168–169.

10. Стасюк С.А. Наилучшее приближение тригонометрическими поли-

номами аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования": тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г.). — М.: РУДН, 2013. — С. 119–120.

11. Stasyuk S.A. The best multivariate approximation of Nikol'skii–Besov classes (mixed smoothness) of periodic functions / S. A. Stasyuk // 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Olenivka, Crimea, Ukraine, September 05–10, 2013. — P. 31.

12. Stasyuk S.A. m-Term trigonometric approximation of Nikol'skii-Besov classes // Mecklenburg Workshop (Dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel) "Approximation Methods and Function Spaces", Hasenwinkel, March 16–20, 2015. — P. 36.

13. Стасюк С.А. M-членные тригонометрические приближения анизотропных классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных / С. А. Стасюк // Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 25–29 мая 2015 г.): Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2015. — С. 226.

14. Stasyuk S.A. Sparse trigonometric approximation of Nikol'skii-Besov classes of generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Rivne, Ukraine, September 15–19, 2015. — P. 43–44.

15. Стасюк С.А. Разреженные тригонометрические приближения анизотропных классов периодических функций нескольких переменных / С. А. Стасюк // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень та її застосування" з нагоди 75-річчя проф. члена-кореспондента НАНУ Віталія Павловича Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня, 2015. — С. 72.

16. Stasyuk S.A. Nonlinear trigonometric approximation for functions with generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences” (Hasenwinkel, Germany, March 07 – 11, 2016): Abstract. — P. 31.

17. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness / S. Stasyuk // Workshop on Function Spaces and High-Dimensional Approximation (Bellaterra (Barcelona), Spain, May 2–6, 2016). — P. 18.

18. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of Nikolskii–Besov type classes of functions with small mixed smoothness / S. Stasyuk // Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Data Analysis” dedicated to the 60th birthday of Hrushikesh N. Mhaskar (Hasenwinkel, Germany, September 05–09, 2016). — P. 23.

19. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of functions with small mixed smoothness / S. Stasyuk // Workshop “Follow-up Approximation Theory and Function Spaces” (Bellaterra (Barcelona), Spain, June 26–30, 2017). — P. 27–28.

20. Stasyuk S. Sparse trigonometric approximation of classes of functions with mixed smoothness / S. Stasyuk // 4th AMMODIT Conference (Malekhiv (Lviv region), Ukraine, March 19–23, 2018): Book of Abstracts. — P. 26.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — множини, відповідно, цілих та цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ — множини, відповідно, дійсних та дійсних невід'ємних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}^d_+$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_+$, $d \geq 1$, — простори d-вимірних векторів, кожна координата яких належить, відповідно, до множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$;

$x \in A\,(x \notin A)$ — елемент x належить (не належить) множині A;

$[a]$ — ціла частина дійсного числа a;

$\operatorname{sgn} a$ — величина, що дорівнює 1 при $a > 0$, дорівнює -1 при $a < 0$, і нулю при $a = 0$;

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$ — скалярний добуток векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$;

$||\boldsymbol{s}||_1 := (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) = s_1 + \cdots + s_d$;

$\mathbb{T}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний тор $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$;

$\|f\|_q$ — норма функції f у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$;

$L_q := L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, — простір функцій $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, які є 2π-періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q} := \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^q \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|, & q = \infty; \end{cases}$$

$L_{q_1,q_2} := L_{q_1,q_2}\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, — простір функцій $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, зі скінченною мішаною нормою $\|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{q_1} \Big\|_{q_2}$;

$L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|;$$

$\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{t})} \mathrm{d}\mathbf{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f;

$\varphi * g$ — згортка двох функцій φ і g $(\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d))$, тобто $\varphi * g := (\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$;

$\Theta_N = \{\mathbf{k}^n = (k_1^n, \dots, k_d^n) \in \mathbb{Z}^d, n = 1, \dots, N\}$ — множина, яка складається з N d-вимірних цілочислових векторів;

$P(\Theta_N) = P(\Theta_N, \mathbf{x})$ — поліном з "номерами" гармонік з множини Θ_N;

$a(n) \asymp b(n)$, $a(n) \ll b(n)$, $a(n) \gg b(n)$, $\{a(n)\}_{n=1}^\infty$, $\{b(n)\}_{n=1}^\infty > 0$ — відповідно, порядкова рівність та порядкові нерівності;

$\rho(\mathbf{s})$ — множина вигляду $\rho(\mathbf{s}) = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\colon\ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$\rho^+(\mathbf{s})$ — множина вигляду $\rho^+(\mathbf{s}) = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d\colon\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$\delta_{\mathbf{s}}(f)$ — двійкові "блоки" ряду Фур'є функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ вигляду

$$\delta_{\mathbf{s}}(f) = \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})};$$

$Q_n = \bigcup\limits_{||\mathbf{s}||_1 < n} \rho(\mathbf{s})$ — східчасті гіперболічні хрести;

$Q^*_{2^{\mathbf{s}}} := Q^*(\mathbf{s}) := \left\{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d :\ \eta(s_j) 2^{s_j-1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d\right\}$, де $\eta(0) = 0$ та $\eta(t) = 1,\ t > 0$;

$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі;

$\mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ — класи Вейля – Надя періодичних функцій багатьох змінних, $r_j > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$;

$B^{0,r}_{p,\theta}$ — простори типу Нікольського–Бєсова з логарифмічною гладкістю;

$MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $MB^{r}_{p,\theta}$, $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $MB^{\omega}_{p,\theta}$, $MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ — простори Нікольського–

Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з різними видами мішаної гладкості;

$\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ — класи типу Нікольського–Бєсова з логарифмічною гладкістю;

$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$, $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$, $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ — класи Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з різними видами мішаної гладкості;

$d_m(\mathcal{K}, X)$ — m-й поперечник за Колмогоровим (колмогоровський поперечник) множини $\mathcal{K}$ у просторі X;

$\varepsilon_m(\mathcal{K}, X)$ — ентропійне число множини $\mathcal{K}$ у просторі X;

$S_{Q_n}(f)$ — частинна східчасто–гіперболічна сума Фур'є функції $f \in L_1$;

$E_{Q_n}(f)_p$ $(E_{Q_n}(F)_p)$ — найкраще наближення функції $f \in L_p$ (класу $F \subset L_p$) тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із множини Q_n у просторі L_p.

$E_{H(Q_n)}(f)_q$ $(E_{H(Q_n)}(F)_q)$ — найкраще наближення функції $f \in L_q$ (класу $F \subset L_q$) періодичних функцій багатьох змінних поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, з індексами зі східчастих гіперболічних хрестів у просторі L_q;

$e^{\perp}_m(f)_q$ — найкраще m-членне ортогональне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$;

$\sigma_m(f)_q$ — найкраще m-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$;

$d^T_m(F)_q$ — тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q.

$\lambda_m(F)_q$ — лінійний поперечник класу F у просторі L_q.

$\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ — найкраще m-членне білінійне наближення функції f у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$;

$e^{\perp}_m(F)_q$, $\sigma_m(F)_q$, $\tau_m(F)_{q_1,q_2}$ — точні верхні межі, відповідно, величин $e^{\perp}_m(f)_q$, $\sigma_m(f)_q$, $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ по всіх функціях $f \in F$;

$\omega_k(f,t)_p$ — модуль неперервності (гладкості) k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$;

$\Omega_l(f,\mathbf{t})_p$ — мішаний модуль неперервності (гладкості) l-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $l \in \mathbb{N}$;

$S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом з усіма похідними швидше за будь-який степінь функції $|\mathbf{x}|^{-1}$;

$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda})$ $\big((\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\mathbf{t})\big)$ — пряме (обернене) перетворення Фур'є функції $\varphi \in S$;

$S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B$, $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ — простори (класи) Нікольського – Бєсова неперіодичних функцій багатьох змінних, визначених на $\mathbb{R}^d$, та їх узагальнення;

(S^α), (S_l) — умови Барі – Стєчкіна, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$.

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із різними видами гладкостей, а саме: знаходженню точних за порядком оцінок величин найкращих m-членних тригонометричних наближень класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю та з малою мішаною гладкістю; встановленню точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю; знаходженню точних за порядком оцінок найкращих наближень класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів; встановленню точних за порядком оцінок величини найкращого m-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для класів типу Нікольського періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю; іншим супровідним задачам.

Двадцяте сторіччя у низці галузей математики було періодом переходу від одновимірних задач, тобто задач, які стосуються вивчення математичних моделей із однією змінною, до багатовимірних задач, тобто задач, які стосуються вивчення математичних моделей, що залежать від кількох, а часто й від великої кількості змінних. У багатьох випадках перехід від однієї змінної до багатьох змінних був пов'язаний не тільки з новими явищами, характерними для певної математичної моделі, а й вимагав нових методів. У деяких випадках навіть постановка багатовимірної задачі вимагає доволі нетривіальної модифікації одновимірної задачі. Наприклад, при розгляді збіжності кратних тригонометричних рядів одразу стикаємося з питанням про те, які частинні суми цих рядів варто розглядати. Або ж, інакше кажучи, що при цьому є природним багатовимірним аналогом тригонометричних поліномів, тобто, в якій множині повинні бути зосереджені "номери" їхніх гармонік? Шукаючи відповідь на це і подібні питання, математики використовували тригонометричні поліноми з різним упорядкуванням гармонік. Зокрема, при їхній побудові вибиралися "номери" гармонік із таких множин, як куля, куб, прямокутний паралелепіпед або, що найважливіше, гіперболічний хрест

$$\Gamma(N) = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{j=1}^{d} \max\{|k_j|, 1\} \leq N\}$$

і різні його модифікації. Зазначимо, що поняття гіперболічного хреста виникло в дослідженнях К.І. Бабенка [8, 9] на початку 60-х років минулого сторіччя. Відтоді й донині інтерес у теорії наближення функцій багатьох змінних до такого об'єкта, як гіперболічний хрест, не згасає, яскравим свідченням чого є монографія [168], нещодавно написана Д. Зунгом (D. Dũng), В.М. Темляковим (V.N. Temlyakov), Т. Ульріхом (T. Ullrich), яка побачила світ у 2018 році. Результати, одержані в роботах К.І. Бабенка, С.О. Теляковського, В.М. Темлякова, Б.С. Кашина, Е.С. Белінського, D. Dũng, Е.М. Галєєва, А.С. Романюка та ін., демонструють нам, що кратні тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів відіграють при наближенні періодичних функцій багатьох змінних таку саму роль, як звичайні тригонометричні поліноми при наближенні періодичних функцій однієї змінної (див., наприклад, [7, 173, 192], де викладені окремі аспекти теорії наближення функцій однієї змінної).

Після з'ясування природи аналогів кратних тригонометричних поліномів одним із фундаментальних питань є таке: що є природним багатовимірним аналогом класів періодичних гладких функцій однієї змінної? У багатовимірному випадку розглядаються різні класи гладких функцій: ізотропні та анізотропні класи Соболєва, Нікольського–Бєсова, Лізоркіна–Трібеля, класи функцій з обмеженою мішаною похідною й обмеженою мішаною різницею, тобто класи функцій із обмеженою мішаною гладкістю, та інші.

Ще одним принциповим питанням є: яким чином наближати функції з цих класів, тобто які агрегати варто використовувати при цьому? У зв'язку з цим А.М. Колмогоров у 1936 році ввів поняття n-поперечника центрально-симетричної множини у банаховому просторі. Апроксимаційну характеристику, яку він запропонував, згодом почали називати n-поперечником за Колмогоровим або колмогоровським n-поперечником. У нашому випадку як центрально-симетричні множини для зазначеної апроксимаційної характеристики розглядаються класи періодичних гладких функцій однієї та багатьох змінних. Концепція n-поперечника за Колмогоровим дуже корисна для відповіді на питання, сформульоване вище. Колмогоровський n-поперечник є розв'язком оптимізаційної задачі, в якій ми здійснюємо оптимізацію над усіма n-вимірними лінійними підпросторами. Інакше кажучи, колмогоровський n-поперечник дозволяє зрозуміти, який n-вимірний лінійний підпростір є найкращим для апроксимації того або іншого класу періодичних гладких функцій. На сьогодні поведінка колмогоровського n-поперечника в більшості ситуацій досліджена для важливих класів періодичних гладких функцій однієї змінної. Понад те, в деяких випадках відомі не тільки точні за порядком оцінки, а й навіть точні значення колмогоровських n-поперечників класів періодичних гладких функцій однієї змінної. Проте й понині менш досліджена задача про точні за порядком оцінки колмогоровських n-поперечників деяких класів періодичних функцій багатьох змінних із мішаною гладкістю, на що акцентується увага в монографіях В.М. Темлякова (1993, 2018), А.С. Романюка (2012) і D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich (2018).

Віднедавна у зв'язку з застосуваннями в інженерії, біології, медицині та інших галузях науки важливу роль почали відігравати нелінійні наближення. Нелінійне наближення є важливим у застосуваваннях завдяки його стислим зображенням і зростаючій обчислювальній ефективності. Типовою задачею нелінійного наближення є m-членне наближення, яке інколи називають розрідженим наближенням. Для постановки задачі, яка стосується розрідженого наближення, розлянемо в банаховому просторі X задану систему елементів (функцій) $\mathcal{D}$, яку називають словником. Тоді величина

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_X := \inf_{\substack{g_j \in \mathcal{D}, a_j \\ j=1,\ldots,d}} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_X$$

називається найкращим m-членним наближенням функції f поліномами, що побудовані за системою $\mathcal{D}$, у метриці простору X.

Уперше таким чином означена величина з'явилася завдяки С.Б. Стєчкіну (1955) при формулюванні ним критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів у гільбертовому просторі. Ця величина називалась величиною найкращого квадратичного наближення елемента гільбертового простору за допомогою m-членних поліномів за заданою системою.

Упродовж останніх 30–40 років величини

$$\sigma_m(F, \mathcal{D})_X := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \mathcal{D})_X$$

інтенсивно досліджувалися для важливих класів F гладких функцій і для різних систем $\mathcal{D}$ у роботах В.М. Темлякова, Б.С. Кашина, R.A. DeVore, Е.С. Белінського, А.В. Андріанова, А.С. Романюка, В.С. Романюка, О.І. Степанця, А.Л. Шидліча, Д.Б. Базарханова, W. Sickel, M. Hansen, T. Ullrich, G. Byrenheid та інших.

У роботах згаданих авторів отримано багато глибоких і завершених результатів, але водночас залишається низка важливих питань стосовно оцінок найкращих m-членних наближень класів Нікольського–Бєсова та їхніх різноманітних узагальнень.

Про важливість функціональних просторів і класів Нікольського–Бєсова, які в цій дисертаційній роботі є об'єктом дослідження, свідчать монографії С.М. Нікольського (1969), О.В. Бєсова, В.П. Ільїна, С.М. Нікольського (1975), H. Triebel (1983, 2019), В.М. Темлякова (1986, 1993, 2015, 2018) H.-J. Schmeisser, H. Triebel (1987), Р.М. Тригуба, Е.С. Белінського (2004), А.С. Романюка (2012), Y. Sawano (2018) та інших.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079; "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", номер державної реєстрації 0198U001990; "Апроксимаційні характеристики функціональних класів", номер державної реєстрації 0101U000046.

Мета і завдання дослідження. Основною метою дисертаційного дослідження є розробка нових і вдосконалення існуючих методів знаходження точних за порядком оцінок деяких важливих апроксимаційних характеристик класів Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із різними видами гладкості у просторах Лебега, а також у просторі суттєво обмежених функцій.

Об'єктом дослідження є класи типу Нікольського-Бєсова функцій однієї та багатьох змінних із широким діапазоном гладкостей.

Предметом дослідження є такі апроксимаційні характеристики, як колмогоровські n-поперечники, ε-ентропія, певні види розрідженого тригонометричного наближення, наближення тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із узагальнених східчастих гіперболічних хрестів згаданих класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних із широким діапазоном гладкостей у просторах Лебега, а також у просторі суттєво обмежених функцій.

Завдання дослідження:

— Знайти точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю.

— Одержати точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних із логарифмічною гладкістю.

— Установити точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості з класів Нікольського–Бєсова тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

— Одержати точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників згаданих класів і таким чином показати, що в деяких важливих випадках такі області, як узагальнені східчасті гіперболічні хрести, є оптимальними (в сенсі точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників).

— Установити точні за порядком оцінки наближення функцій із класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур’є у східчастих гіперболічних хрестах.

— Знайти точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю.

— Одержати точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення періодичних функцій багатьох змінних малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова. З’ясувати, в яких випадках оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні гріді (greedy) алгоритму.

— Установити точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних із класів типу Нікольського.

Методи дослідження. Використовується апарат математичного аналізу, теорії функцій. При вивченні розрідженого тригонометричного наближення розробляються методи дискретизації.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

— Знайдено точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення ізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою гладкістю.

— Одержано точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних із логарифмічною гладкістю.

— Установлено точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості з класів Нікольського–Бєсова тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. При цьому показано, що в деяких важливих випадках такого виду поліноми є оптимальними (в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників).

— Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій із класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їхніх перетворень Фур'є у східчастих гіперболічних хрестах.

— Знайдено точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із узагальненою мішаною гладкістю. Показано, що при певних співвідношеннях між параметрами оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні гріді (greedy) алгоритму.

— Одержано точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із малою рівномірною мішаною гладкістю.

З'ясовано, в яких випадках оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, що базується на використанні гріді (greedy) алгоритму.

— Встановлено точні за порядком оцінки найкращого m-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості з класів типу Нікольського.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційну роботу складають математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати доповнюють важливі розділи математичного аналізу, зокрема такі, як теорія функцій і теорія наближень. Деякі з одержаних в дисертації результатів можуть мати також і практичне застосування в таких галузях науки, як інженерія, біологія, медицина та інші, що вказує на перспективу подальшого розвитку окреслених тут досліджень.

Особистий внесок здобувача. Всі результати здобувач отримав самостійно, а в роботах, які опубліковані у співавторстві з О.В. Федуник [102] або А.Ф. Конограєм [40, 41], перша теорема в кожній із цих робіт належить дисертантові. У результатах робіт, написаних разом із С.Я. Янченком [151, 189], внесок авторів рівноцінний.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Конференції "Функціональні методи в теорії наближення, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці", присвячена пам'яті А.Я. Дороговцева (1935–2004), Київ, 1–5 жовтня 2004 року.

— Міжнародній конференції "Функціональні простори, теорія наближень, нелінійний аналіз", присвяченій сторіччю академіка С. М. Нікольського, Москва, Росія, 23–29 травня 2005 року.

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня 2007 року.

— Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики, механіки, інформатики", присвяченій 85-річчю з дня народження професора Л.А. Толоконнікова, Тула, Росія, 17–21 листопада 2008 року.

— Міжнародній конференції "Сучасні проблеми математики, механіки та їх застосувань", присвяченій 70-річчю ректора МДУ академіка В.А. Садовнічого, Москва, Росія, 30 березня – 2 квітня 2009 року.

— International conference "ANALYTIC METHODS OF MECHANICS AND COMPLEX ANALYSIS" dedicated to N.A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich on the occasion of their birthday centenary, Kyiv, June 29 – July 5, 2009.

— Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми аналізу та викладання математики", присвяченій 105-річчю академіка С.М. Нікольського, Москва, Росія, 17–19 травня 2010 року.

— Конференції "Сучасні методи теорії функцій та суміжні проблеми" Воронежської зимової математичної школи, Воронеж, Росія, 25 січня – 1 лютого 2011 року.

— 16-й Саратовській зимовій школі "Сучасні проблеми теорії функцій та їх застосування", Саратов, Росія, 27 січня – 3 лютого 2012 року.

— Четвертій міжнародній конференції "Функціональні простори. Диференціальні оператори. Загальна топологія. Проблеми математичної освіти", присвяченій 90-річчю з дня народження члена-корреспондента РАН, академіка Європейської академії наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, Росія, 25–29 березня 2013 року.

— 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Olenivka, Crimea, Ukraine, September 05–10, 2013.

— Mecklenburg Workshop (dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel) "Approximation Methods and Function Spaces", Hasenwinkel, Germany, March 16–20, 2015.

— Міжнародній конференції з функціональних просторів та теорії наближення функцій, присвяченій 110-річчю з дня народження академіка С.М. Нікольського, Москва, Росія, 25–29 травня 2015 року.

— 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences", Rivne, Ukraine, September 15–19, 2015.

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень та її застосування" з нагоди 75-річчя проф. члена-кореспондента НАНУ Віталія Павловича Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня, 2015 року.

— AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences", Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016;

— Workshop on Function Spaces and High-Dimensional Approximation, Bellaterra (Barcelona), Spain, May 2–6, 2016;

— Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Data Analysis" dedicated to the 60th birthday of Hrushikesh N. Mhaskar, Hasenwinkel, Germany, September 05–09, 2016.

— Workshop on Approximation Theory (dedicated to the 70th birthday of prof. I. O. Shevchuk), Kyiv, June 14, 2017.

— Follow-up Workshop "Approximation Theory and Function Spaces", Barcelona, Spain, June 26–30, 2017.

— 4th AMMODIT Conference, Malekhiv (Lviv region), March 19–23, 2018.

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

— міжвузівському семінарі з теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 25 січня 2017 року, 31 січня 2018 року (керівник семінару — чл.-кор. НАН України В. П. Моторний)

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 1 червня 2017 року (керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 4 жовтня 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі кафедри математичного аналізу Інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова, 13 жовтня 2017 року (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. О. Кореновський).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 28 роботах у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, з них 5 — у співавторстві [3, 5, 6, 23, 28] (див. список публікацій здобувача на стор. 13), решта — самостійно, при цьому 17 робіт [3, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 210 найменування. Повний обсяг роботи становить 332 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю щиру подяку моєму науковому вчителю і в той же час науковому консультанту професору Романюку Анатолію Сергійовичу за підтримку та корисні обговорення одержаних результатів.

Розділ 1

Огляд літератури за основними напрямками досліджень

1.1. Розріджене тригонометричне наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з ізотропною гладкістю

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi)$, — простір 2π-періодичних за кожною зі змінних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$||f||_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Позначимо через $V_l = V_l(t)$, $t \in \mathbb{T}$, $l \in \mathbb{N}$, ядро Валле Пуссена виду:

$$V_l(t) := \frac{1}{l} \sum_{k=l}^{2l-1} D_k(t),$$

де $D_k(t) := \sum\limits_{m=-k}^{k} e^{imt}$ — ядро Діріхле.

Багатовимірне ядро $V_l = V_l(\mathbf{x})$, $l \in \mathbb{N}$, визначимо згідно з формулою

$$V_l(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} V_l(x_j).$$

Нехай

$$V_l(f) := f * V_l$$

— кратна сума Валле Пуссена функції $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, де значком "$*$" позначена операція згортки двох функцій φ і g ($\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$), тобто $\varphi * g := (\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$.

Покладемо для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f) := V_1(f), \quad \Phi_s(f) := V_{2^s}(f) - V_{2^{s-1}}(f), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Будемо казати, що функція $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ належить до простору $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, якщо (див., наприклад, [46]):

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (2^{rs} \|\Phi_s(f)\|_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{H^r_p} := \|f\|_{B^r_{p,\infty}} := \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|\Phi_s(f)\|_p}{2^{-rs}} < \infty. \tag{1.2}$$

З цього місця в якості позначень $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ і $\mathbf{H}^r_p$ будемо розуміти одиничні кулі в нормах просторів $B^r_{p,\theta}$ і H^r_p, відповідно, та називати такі множини класами.

Зазначимо, що з точки зору питань апроксимації (вивчення поведінки деяких апроксимаційних характеристик) класи $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ та $\mathbf{H}^r_p$ досліджувались в роботах [163, 164, 162, 170, 196, 171, 178, 72, 90], в яких можна ознайомитись з більш повною бібіліографією.

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. При цьому для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^\infty$ і $\{b(n)\}_{n=1}^\infty$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$

означає, що існує стала $C > 0$, яка не залежить від n, така, що $a(n) \le C\,b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати від певних параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, а в інших випадках вони будуть зрозумілими із контексту. Також зазначимо, що нумерацію сталих C_j, $j = 1, 2, \ldots$, будемо вести в межах одного підрозділу, або навіть пункту. Позначення однакових сталих в межах одного розділу, але в різних підрозділах, чи пунктах, не означає одне і те ж їх числове значення, що теж буде зрозуміло з контексту.

Нехай Θ_m — набір із m точок із цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i(\mathbf{n}_k, \mathbf{x})}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ розглянемо величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m, \cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q, \tag{1.3}$$

яка називається найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції f у метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Для функціонального класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \tag{1.4}$$

В [162] одержана оцінка

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} m^{-\frac{r}{d}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}, & \text{якщо } 1 \le p < q \le \infty,\ q > 2,\ r > \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, \\ m^{-\frac{r}{d}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, & \text{для інших значень } p \text{ і } q,\ r > (\frac{d}{p} - \frac{d}{q})_+, \end{cases} \tag{1.5}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$, $1 \le p, q, \theta \le \infty$.

В доповнення до цієї оцінки в дисертаційній роботі одержано таке твердження.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Якщо* $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, \tag{1.6}$$

якщо ж $r = \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.7}$$

Зазначимо, що в одновимірному випадку, тобто при $d = 1$, точні за порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ для $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ раніше одержані Е.С. Белінським (1987).

Теорема 2.3 ілюструє явище малої гладкості, яке, напевно, вперше було виявлено Б.С. Кашиним [32] в процесі встановлення ним оцінок колмогоровських поперечників класів Соболєва W^r_1, $1 - \frac{1}{q} < r < 1$, функцій однієї змінної в просторі L_q, $2 < q < \infty$. В чому ж суть цього явища? А суть його полягає в тому, що при переході гладкісного параметра r через деяке критичне значення спотерігається відмінність порядкових оцінок досліджуваних апроксимаційних характеристик. Пізніше подібного роду ефект спостерігався при вивченні наближення класів функцій як однієї, так і багатьох змінних в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [79, 22, 80, 168 199] та наведену там бібліографію).

Співставляючи (1.6), (1.7) та (1.5), бачимо відмінність (за винятком випадку $\theta = 1$) в оцінках величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$, $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$, при переході через так званий “критичний” показник гладкості $r = \frac{d}{p}$. Іншими словами, при переході показника гладкості r через значення $\frac{d}{p}$ при $1 < \theta \leq \infty$ (на відміну від $\theta = 1$) спостерігаємо “стрибок” порядкових оцінок наближення за рахунок наявності логарифмічного множника. Крім цього при “критичному” значенні показника гладкості в (1.7) виявляємо залежність порядкової оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ від параметра θ, що у випадках великої ($r > \frac{d}{p}$) та малої ($\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$) гладкостей не спостерігаємо (див. (1.5) і (1.6) відповідно).

1.2. Колмогоровські поперечники класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій з логарифмічною гладкістю

Для $r>0$, $1<p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$ позначимо

$$\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta} := \{f\in L_p : ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \le 1\}, \tag{1.8}$$

де

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1\le\theta<\infty, \tag{1.9}$$

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\infty}} := \sup_{s\ge 0}\frac{||\delta_s(f)||_p}{(s+1)^{-r}},\ \theta=\infty, \tag{1.10}$$

а $\delta_s(f) := \sum\limits_{[2^{s-1}]\le|k|<2^s}\widehat{f}(k)e^{ikx}$, $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ і $[a]$ — ціла частина числа a. Множини $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ є аналогами класів Нікольського–Бєсова або класами типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій з логарифмічною гладкістю. У випадку $\theta=\infty$ замість $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}$ інколи будемо писати $\mathbf{H}^{0,r}_p$, тобто будемо покладати $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}\equiv\mathbf{H}^{0,r}_p$.

Зазначимо, що для класів

$$\mathbf{LG}^r := \{f\in L_\infty(\mathbb{T}) \colon\ ||\delta_s(f)||_\infty \le (s+1)^{-r},\ s=0,1,\dots\},$$

які є тотожними до класів $\mathbf{H}^{0,r}_\infty$, в [35] встановлено точні за порядком оцінки поперечників за Колмогоровим та ентропійних чисел у просторі L_q, $1\le q\le\infty$. Класи, що визначаються за допомогою (1.8)–(1.10) вивчались також в роботах [188, 101] з точки зору встановлення порядкових оцінок їх деяких апроксимаційних характеристик.

Зазначимо, що як простори, так і класи функцій з логарифмічною гладкістю були предметом досліджень в роботах [92, 158, 159, 160, 166].

Наведемо означення апроксимаційних характеристик, які нижче будуть обговорюватись.

Нехай $\mathcal{K}$ — компакт в банаховому просторі X з одиничною кулею B_X. Величини

$$d_m(\mathcal{K}, X) := \inf_{\{v_j\}_{j=1}^m \subset X} \sup_{f \in \mathcal{K}} \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j v_j \right\|_X, \tag{1.11}$$

$$\varepsilon_m(\mathcal{K}, X) := \inf \left\{ \varepsilon \colon \exists \{u_j\}_{j=1}^n \subset X, n \le 2^{m-1}, \mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^n \{u_j + \varepsilon B_X\} \right\} \tag{1.12}$$

($m = 1, 2, \dots$) називаються відповідно m-м поперечником за Колмогоровим та m-м ентропійним числом множини $\mathcal{K}$ у просторі X. З результатами досліджень величин (1.11) і (1.12) можна ознайомитись, наприклад, в [63, 192, 73, 82, 168], де наведена більш повна бібліографія.

Стосовно згаданих апроксимаційних характеристик наведемо такі результати.

Теорема II.3 [35]. *Для $r > 1$ виконуються співвідношення*

$$d_m(\mathbf{LG}^r, L_q) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{LG}^r, L_q) \asymp \begin{cases} (\log_2 m)^{-r+1}, & \textit{якщо } q = \infty, \\ (\log_2 m)^{-r+1/2}, & \textit{якщо } 1 \le q < \infty. \end{cases}$$

Теорема 2.7. *Нехай $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$, тоді*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.13}$$

Теорема 2.8. *Нехай $1 \le q < \infty$, $\max\{q; 2\} \le p \le \infty$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, тоді для $\max\{q; 2\} \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ або $\max\{q; 2\} \le p < \infty$, $\theta = \infty$ мають місце порядкові рівності*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.14}$$

Зазначимо, що теореми 2.7 та 2.8 доповнюють результат теореми II.3 в тому розумінні, що окрім введення та розгляду додаткових параметрів p і θ, також вдалося розширити множину зміни параметра r.

1.3. Класи періодичних функцій мішаної гладкості

Далі будемо вважати, що для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ виконана умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\mathbf{x})\, dx_j = 0,\ \ j = 1, \ldots, d,$$

і множину таких функцій будемо позначати через $L_p^0(\mathbb{T}^d)$. Надалі будемо вважати, що для періодичних функцій мішаної гладкості є виконаною наведена вище умова.

Нехай $V_l = V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле–Пуссена вигляду

$$V_l(t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} (1 - \frac{k-l}{l}) \cos kt.$$

Кожному вектору $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, d$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

і для $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d),\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f) := f * A_{\boldsymbol{s}}, \tag{1.15}$$

де “$*$” — операція згортки.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$ належить до класу $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d),\ r_j > 0,\ j = 1, \ldots, d$, якщо виконані умови

$$\left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \tag{1.16}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\sup_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p \le 1 \tag{1.17}$$

при $\theta = \infty$.

Зауважимо, що величини в лівих частинах (1.16) і (1.17) еквівалентні нормам $\|f\|_{MB^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$, $1 \le \theta < \infty$, і $\|f\|_{MB^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} = \|f\|_{MH^{\boldsymbol{r}}_p}$ при $\theta = \infty$, просторів $MB^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $MH^{\boldsymbol{r}}_p$ відповідно (див., наприклад, [47]).

У випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне означення класів $\mathbf{MB}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, замінивши "блоки" $A_{\boldsymbol{s}}(f)$ на дещо інші. З цією метою для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, і $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \left\{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) :\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d\right\}$$

і для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) = \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Тоді при $p \in (1, \infty)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$ з точністю до абсолютних сталих, класи $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином:

$$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta} := \left\{ f :\ \|f\|_{MB^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \left(\sum_{\mathbf{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\infty} := \left\{ f :\ \|f\|_{MB^{\mathbf{r}}_{p,\infty}} := \sup_{\boldsymbol{s}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p \le 1 \right\}.$$

Нехай $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}),\ r_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і сумування проводиться тільки по тих $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, для яких $k_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$. Тоді через $\mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо клас функцій, які можна подати у вигляді

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{y}.$$

Нагадаємо, що між введеними класами існують такі вкладення:

$$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,p} \subset \mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,2}, \quad 1 < p \leq 2;$$

$$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,2} \subset \mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,p}, \quad 2 \leq p < \infty;$$

$$\mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^{\mathbf{r}}_{p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо також, що зі збільшенням параметра θ класи $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ розширюються, тобто

$$\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,1} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^{\mathbf{r}}_{p},\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \infty.$$

Надалі будемо вважати, що координати векторів $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, які містяться в означенні класів функцій, впорядковані у вигляді $0 < r_1 = \cdots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \cdots \leq r_d$. Якщо $r_1 = \cdots = r_d = r$ в $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, то будемо використовувати позначення $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$, $\mathbf{MH}^{r}_{p}$, $\mathbf{MW}^{r}_{p,\alpha}$, $MB^{r}_{p,\theta}$, MH^{r}_{p} замість, відповідно, $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $\mathbf{MH}^{\mathbf{r}}_{p}$, $\mathbf{MW}^{\mathbf{r}}_{p,\alpha}$, $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $MH^{\mathbf{r}}_{p}$.

1.4. Наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості тригонометричними поліномами з "номерами" гармоніками з гіперболічних хрестів

Нехай

$$Q_n := \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \rho(\mathbf{s}),$$

— східчастий гіперболічний хрест.

Через $t_{Q_n}(\mathbf{x})$ позначимо тригонометричний поліном із "номерами" гармонік із Q_n, тобто

$$t_{Q_n}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $c_{\mathbf{k}}$ — довільні числа.

Тоді для $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, величина

$$E_{Q_n}(f)_p = \inf_{t_{Q_n}} ||f(\cdot) - t_{Q_n}(\cdot)||_p$$

— найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із множини Q_n.

Якщо $F \subset L_p$ — деякий клас функцій, то означаємо

$$E_{Q_n}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_p.$$

Для найкращих наближень класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармоніками зі східчастих гіперболічних хрестів відомі такі твердження.

Теорема I.1. *Нехай p та q задовольняють одну з таких умов:*

1) $1 \le q = p < \infty$;

2) $1 < q < p \le \infty,\ p \ge 2$;

3) $1 \le q < p \le 2$.

Тоді для $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ *виконується порядкова рівність*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-rn}\, n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{1.18}$$

де $p_0 = \min\{p, 2\}$.

Порядкова рівність (1.18) у випадку $p = q = 2$, $\theta = \infty$ встановлена Я.С. Бугровим [18], у випадку $1 < p = q < \infty$, $\theta = \infty$ — Н.С. Нікольською [55], у випадку $p = q = 1$, $\theta = \infty$ — В.М. Темляковим [143], у випадку $p = q = 1$, $1 \le \theta < \infty$ — А.С. Романюком [88].

Теорема I.2. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 1/p - 1/q$, *тоді*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}\, n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{1.19}$$

Порядкова рівність (1.19) у випадку $1 \le p < q \le 2$, $\theta = \infty$ встановлена В.М. Темляковим [146], у випадку $1 \le p < q < \infty$, $\theta = \infty$ — В.М. Темляковим [145], у випадку $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ — А.С. Романюком [85], а у випадку $p = 1$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ — А.С. Романюком [75].

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ і для $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, \dots, d$, розглядатимемо мішаний модуль неперервності (порядку l)

$$\Omega_l(f, \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,d}} ||\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p,$$

де

$$\Delta^l_{h_j} f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + jh, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

— мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j.

Нехай $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $\mathbf{t} > \mathbf{0}$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ є неспадною за кожною зі змінних;

3) $\Omega(m_1t_1,\ldots,m_dt_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j=1,\ldots,d$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Нехай $1 \le p,\theta \le \infty$, тоді простір $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $\Omega \in \Psi_l$, визначається таким чином:

$$MB^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.20}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\Omega}_p} := \sup_{\boldsymbol{t}>\mathbf{0}} \frac{\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_p}{\Omega(\boldsymbol{t})}. \tag{1.21}$$

Зазначимо, що $MB^{\Omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\Omega}_p$. Шкала просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ є природним узагальненням шкали просторів (мішаної гладкості) Нікольського–Бєсова $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $r=(r_1,\ldots,r_d)$, $r_j>0$, $j=1,\ldots,d$, періодичних функцій багатьох змінних (див., наприклад, [47]) та $MB^{\Omega}_{p,\theta} \equiv MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ при $\Omega(\mathbf{t}) = t_1^{r_1}\ldots t_d^{r_d}$, $0<r_j<l$, $j=1,\ldots,d$. Зазначимо, що при $\theta=\infty$ $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta} \equiv MH^{\mathbf{r}}_p$ — простори С.М. Нікольського, а при $1 \le \theta < \infty$ $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ — простори О.В. Бєсова. Простори $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, називають просторами Нікольського–Бєсова.

Додатково вимагатимемо, щоб функція $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ задовольняла умови (S^{α}) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [13]. Сформулюємо їх.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha>0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така стала $C_1>0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \qquad 0<\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1; \tag{1.22}$$

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує γ, $0<\gamma<l$, таке, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така стала

$C_2 > 0$, що
$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1. \tag{1.23}$$

Вкажемо, що $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умову (S^α) (відповідно (S_l)), якщо $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ задовольняє цю умову за кожною змінною t_j при всіх фіксованих t_i, $i \neq j$, і вважатимемо, що $\Omega(\mathbf{t})$ належить до множини S^α (відповідно S_l). Множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається рівністю $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$. Таке саме позначення $\Phi_{\alpha,l}$ використовуватимемо для аналогічно визначеної множини функцій однієї змінної.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{якщо } \ t_j > 0, \ j = 1, \dots, d; \\ 0, & \text{якщо } \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1; \ \log \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \dots, d$.

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді (див. [191]):

$$MB^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathbf{s}}) ||\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \leq \theta < \infty \ , \tag{1.24}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathbf{s}} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)||_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})} \ , \tag{1.25}$$

Зображення (1.25) встановив М.М. Пустовойтов [70], а (1.24) — Sun Yongsheng і Wang Heping [191]. Нагадаємо, що при $\theta = \infty$ простори $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з просторами MH^{Ω}_p (див., наприклад, [70]), а при $\Omega(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, — з просторами $MB^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [47]).

Зазначимо, що для норм функцій з просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати аналогічні до (1.24) та (1.25) зображення у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо замінивши при цьому "блоки" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ на $A_{\mathbf{s}}(f)$, що означені за допомогою формули (1.15).

Нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді норми функцій з просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, можна подати в такому вигляді:

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{1.26}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathbf{s}} \frac{\|A_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}. \tag{1.27}$$

Співвідношення (1.27) встановив М.М. Пустовойтов [70], а співвідношення (1.26) складає основний зміст теореми 3.1, сформульованої й доведеної у підрозділі 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. *Функція* $f \in MB^{\Omega}_{p,\theta}$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

і в цьому випадку

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Одиничні кулі просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ називатимемо класами та позначатимемо $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$. У випадку $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1...t_d)$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, замість $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ та $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ використовуватимемо позначення $MB^{\omega}_{p,\theta}$ і $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ відповідно.

Наведемо позначення множин, в яких будуть міститись "номери" гармонік тригонометричних поліномів, які будуть використовуватись для наближення функцій. Для довільного $N \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, p, q, N) := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d : \ \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p - 1/q)_+} \geq N^{-1}\},$$

$$Q(N) := Q(\Omega, p, q, N) := \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} \rho(\boldsymbol{s}).$$

Теорема 3.8. *Нехай* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$*, а для параметрів* p *і* q *виконана одна з таких умов:*

1) $1 \le q = p < \infty$;

2) $1 < q < p \le \infty,\ p \ge 2$;

3) $1 \le q < p \le 2$.

Тоді при $1 \le \theta < \infty$

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \frac{1}{N} \, (\log_2 N)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $p_0 = \min\{p, 2\}$.

Теорема 3.10. *Нехай* $1 < p < q < \infty$*,* $1 \le \theta < \infty$*,* $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$*, а* $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/q}$*, тоді*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+}.$$

Теорема 3.11. *Якщо* $1 < p < 2$*,* $1 \le \theta \le 2$*,* $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$*, а* $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/2}$*, то*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \asymp N^{-1},$$

де N *подібрано таким чином, щоб виконувалось співвідношення* $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.

Теорема 3.12. *Якщо* $2 \le q \le p \le \infty$*,* $q \ne \infty$*,* $1 \le \theta \le 2$ *або* $q = p = \infty$*,* $\theta = 1$*, а* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$*, тоді*

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp N^{-1},$$

де N *підібрано таким чином, щоб виконувалось співвідношення* $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp m$.

Як бачимо, при певних співвідношеннях між параметрами результати теорем 3.11 і 3.12 свідчать про оптимальність множин $Q(N)$, в яких зосереджені “номери” гармонік тригонометричних поліномів, що використовуються для наближення в теоремах 3.8 і 3.10.

У випадку, якщо $\Omega(\mathbf{t}) = t_1^r \dots t_d^r$, сформульовані вище результати при відповідних обмеженнях на параметр r були встановлені А.С. Романюком [73] для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$.

1.5. Найкраще m-членне тригонометричне наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості

В цьому підрозділі поряд з просторами $MB^{\omega}_{p,\theta}$ при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, будемо розглядати простори $MH^{\omega}_{p,\theta}$, які визначаються таким чином:

$$MH^{\omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} := \sup_{j} \left(\sum_{||s||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \right)^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

При $\theta = \infty$ покладемо $MH^{\omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\omega}_p$, а $||f||_{MH^{\omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\omega}_p}$.

Через $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ будемо позначати одиничні кулі просторів $MH^{\omega}_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in MH^{\omega}_{p,\theta} : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}.$$

Класи $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ при $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, розглядались В.М. Темляковим [135] з точки зору встановлення для них точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик, зокрема, найкращого m-членного тригонометричного наближення.

Для означених функціональних класів, виходячи з означень, мають місце такі вкладення:

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p}, \ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_2}, \ \ 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty.$$

Теорема I.3. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 1/p - 1/q$, *тоді*

$$e^{\perp}_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log m)^{(d-1)(r-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{1.28}$$

Зазначимо, що порядкова рівність (1.28) встановлена А.С. Романюком в роботі [86] для випадку $p>1$, а в роботі [75] для випадку $p=1$.

Теорема I.4 [78]**.** *Нехай* $1\le p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $r>1/p$, *тоді*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r+\frac{1}{p}}(\log m)^{(d-1)(r-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{\theta})}. \tag{1.29}$$

Теорема I.5 [79, 135]**.** *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ $r>1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(\log m)^{(d-1)(r-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{\theta})}. \tag{1.30}$$

Теорема I.6 [79]**.** *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $r=1/p$. *Тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{1.31}$$

Теорема I.7 [79]. *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $1/p-1/q<r<1/p$. *Тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))_+}. \tag{1.32}$$

Порядкові співвідношення (1.30)–(1.32) у випадку $d=1$ встановлено Е.С. Белінським [14]. Співвідношення (1.30) для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ встановлено в [79], а для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ — в [135].

Ми отримали такі твердження.

Теорема 4.4. *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, *а* $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $\gamma<\frac{1}{p}$.

Якщо $1<\theta\le\infty$, *а* $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha>\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\}$, *а* $\gamma<\frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}.$$

Якщо ж $1\le\theta<q$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, *а* $\gamma<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

У випадку $\omega(\tau)=\tau^r$, відповідний до теореми 4.4 результат для класів $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ є новим, а для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ його встановив А.С. Романюк [79].

Теорема 4.4$'$. *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<\frac{1}{p}$. *Якщо* $1<\theta<\infty$, $\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\}<r<\frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}.$$

Якщо ж $1\le\theta<q$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}.$$

У випадку $p\le\theta<\infty$, $(1/p-1/q)q'<r<1/p$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

Теорема 4.5$'$. *Нехай* $1<p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $r=1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}.$$

У випадку $p\le\theta<\infty$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

Сформульовані вище результати теорем 4.4, 4.4$'$ і 4.5$'$ доповнюють точні за порядком оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, які встановлені А.С. Романюком [73], та $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, які встановлені В.М. Темляковим [199].

1.6. Наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара

Наведемо спочатку означення системи Хаара для функцій однієї змінної, попередньо зазначивши таке.

Системне вивчення рядів за системою Хаара було розпочато П.Л. Ульяновим (1964) та продовжено Б.І. Голубовим [26]. Основний вміст результатів з [26] складають прямі та обернені теореми наближення. У [19] установлено оцінки наближень індивідуальних функцій за допомогою поліномів, що побудовані за системою Хаара, в термінах, зокрема, норм $||f^{(1)}||_p$.

Покладемо для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \ldots, 2^s - 1$,

$$H_I(t) = |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [j2^{-s}, (j+\frac{1}{2})2^{-s}), \\ -1, & \text{якщо } t \in [(j+\frac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}), \\ 0, & \text{якщо } t \notin I, \end{cases}$$

де $|I| = 2^{-s}$ — довжина двійкового інтервалу I.

Нехай D_s, $s \geq 0$, позначає множину всіх двійкових інтервалів на відрізку $[0,1]$ вигляду $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \ldots, 2^s - 1$. Для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ означимо

$$\mathcal{D}_{\mathbf{s}} = \{I = I_1 \times \cdots \times I_d,\ I_j \in D_{s_j},\ j = 1, \ldots, d,\}$$

і

$$Q_n = \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \leq n} \mathcal{D}_{\mathbf{s}}.$$

Множина Q_n є східчастим гіперболічним хрестом і саме вона відіграє ключову роль при побудові поліномів за тензорною системою Хаара для наближення класів функцій з мішаною гладкістю.

В d-вимірному випадку для $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ позначимо

$$H_I(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} H_{I_j}(x_j)$$

і

$$\delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} c_I(f) H_I(\mathbf{x}),$$

де

$$c_I(f) = (f, H_I) = \int\limits_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) H_I(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Для заданої функції $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності визначимо клас функцій

$$\mathbf{MH}_p^{\Omega} = \{f \in L_p([0,1]^d) : \ \Omega(f, \mathbf{t})_p \leq \Omega(\mathbf{t})\}.$$

На функцію $\Omega(\mathbf{t})$ будемо накладати умову (S^{α}), про яку мова йшла вище. Клас $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$ будемо називати класом Нікольського періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю. У випадку $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \ldots t_d)$ для функцій з класу $\mathbf{MH}_p^{\Omega} \equiv \mathbf{MH}_p^{\omega}$ також буде виконуватись умова $||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \ll \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})$.

Позначимо

$$H(Q_n) := \left\{ t = \sum_{I \in Q_n} a_I H_I, a_I \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

— множина поліномів за системою Хаара з номерами індексів із множини Q_n. Тоді величина

$$E_{H(Q_n)}(f)_q := \inf_{t \in H(Q_n)} ||f - t||_q$$

позначає найкраще наближення функції f у метриці простору L_q поліномами з множини $H(Q_n)$. Сформулюємо твердження, в якому встановлено точні за порядком оцінки величини

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}^{\omega}_p)_q := \sup_{f \in \mathbf{MH}^{\omega}_p} E_{H(Q_n)}(f)_q.$$

Теорема 5.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < \alpha < 1$, *тоді*

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}^{\omega}_p)_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}, & 1 \le p < q < \infty, \\ \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p_0}}, & 1 < q \le p \le \infty, \ (p,q) \ne (\infty,\infty), \end{cases} \tag{1.33}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Зазначимо, що оцінки зверху в (1.33) забезпечуються східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара виду

$$S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{I \in Q_n} c_I(f) H_I = \sum_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \delta_{\mathbf{s}}(f).$$

У випадку $\omega(\tau) = \tau^r$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1$, тобто для класів Нікольського $\mathbf{MH}^r_p$, теорема 5.1 була доведена А.В. Андріановим [6].

Для заданої множини $\mathcal{D}$ функцій з простору $L_q([0,1]^d)$ найкращим m-членним наближенням функції $f \in L_q([0,1]^d)$ поліномами, що побудовані за системою $\mathcal{D}$, називається величина (див., наприклад, [6])

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_q := \sigma_m(f, \mathcal{D})_{L_q} := \inf_{g_j \in \mathcal{D}, a_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_{L_q}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Для $F \subset L_q([0,1]^d)$ покладаємо

$$\sigma_m(F, \mathcal{D})_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \mathcal{D})_q. \tag{1.34}$$

Точні за порядком оцінки величин (1.34) важливих класів гладких функцій багатьох змінних при наближенні m-членними поліномами, що побудовані за певними фіксованими системами $\mathcal{D}$, одержано в роботах [10, 93–95, 174–176] та інших.

Початок дослідженню величин $\sigma_m(F, \mathcal{D})_q$ для класів функцій мішаної гладкості у випадку тензорної системи Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$ було покладено А.В. Андріановим та В.М. Темляковим в роботах [154, 6, 153].

В доповнення до одержаних в цих роботах результатів наведемо одержаний нами результат стосовно $\sigma_m(F, \mathcal{H})_q$ для класів $F = \mathbf{MH}_p^{\omega}$.

Теорема 5.2. *Нехай* $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_p^{\omega}, \mathcal{H})_q \asymp \omega\left(m^{-1} \log^{d-1} m\right) \left(\log^{d-1} m\right)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку $\omega(\tau) = \tau^r$, тобто для класів Нікольського $\mathbf{MH}_p^r$, $\frac{1}{p} < r < 1$ наведена теорема була доведена А.В. Андріановим [6].

Розділ 2

Апроксимаційні характеристики класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій з ізотропною гладкістю

2.1. Апроксимаційні характеристики ізотропних класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних невеликих гладкостей

2.1.1. Основні позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ та $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi)$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Нехай далі $k \in \mathbb{N}$ і $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\triangle_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$$

та визначимо кратну різницю порядку k функції $f(\mathbf{x})$ в точці $\mathbf{x}$ з кроком

$\mathbf{h}$ за формулою

$$\Delta^k_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}} \Delta^{k-1}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}), \quad \Delta^0_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Модуль неперервності (гладкості) k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ визначимо згідно з формулою

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{|\mathbf{h}|\le t} ||\Delta^k_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p,$$

де $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_d^2}$.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ належить до простору $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, якщо

$$\left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \ \text{ при } 1 \le \theta < \infty$$

і

$$\sup_{t>0} t^{-r}\omega_k(f,t)_p < \infty \text{ при } \ \theta = \infty.$$

Норма в просторі $B^r_{p,\theta}$ визначається згідно з формулами

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty \tag{2.1}$$

і

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-r}\omega_k(f,t)_p, \quad \theta = \infty, \tag{2.2}$$

для $k > r$. Відомо, що різні k: $k > r$, $k \in \mathbb{N}$, визначають еквівалентні норми (див., наприклад, [161]).

Простори $H^r_p \equiv B^r_{p,\infty}$ та $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, введені С.М. Нікольським [56] та О.В. Бесовим [17] відповідно.

В наведених нижче міркуваннях нам буде зручно, замість (2.1) та (2.2), користуватись еквівалентним означенням норми функцій з просторів $B^r_{p,\theta}$.

Позначимо через $V_l = V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду:

$$V_l(t) = \frac{1}{l} \sum_{k=l}^{2l-1} D_k(t),$$

де

$$D_k(t) = \sum_{m=-k}^{k} e^{imt} \tag{2.3}$$

— ядро Діріхле, а

$$||V_l||_p \asymp l^{1-\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{2.4}$$

$$||D_k||_p \asymp k^{1-\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty. \tag{2.5}$$

Багатовимірне ядро $V_l = V_l(\mathbf{x}), l \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, визначимо згідно з формулою

$$V_l(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_l(x_j). \tag{2.6}$$

Нехай

$$V_l(f) := f * V_l.$$

— кратна сума Валле Пуссена функції f.

Покладемо для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f) := V_1(f), \quad \Phi_s(f) := V_{2^s}(f) - V_{2^{s-1}}(f), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Тоді для норми функцій з простору $B^r_{p,\theta}$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $r > 0$, мають місце співвідношення [46]:

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (2^{rs} \|\Phi_s(f, \cdot)\|_p)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \leq \theta < \infty, \tag{2.7}$$

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{rs} \|\Phi_s(f, \cdot)\|_p, \ \theta = \infty. \tag{2.8}$$

2.1.2. Найкраще m-членне білінійне наближення класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних для деяких гладкостей.

Визначимо апроксимаційну характеристику, яка досліджується в даному пункті.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ — множина функцій $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{T}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$||f(\mathbf{x},\mathbf{y})||_{q_1,q_2} := ||\,||f(\cdot,\mathbf{y})||_{q_1}||_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ за змінною $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$, а після цього від результату, але вже за змінною $\mathbf{y}\in\mathbb{T}^d$ в просторі $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $g\in L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ визначимо найкраще m-членне білінійне наближення порядку m таким чином:

$$\tau_m(g)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(\mathbf{x}),\, v_j(\mathbf{y})} \left\| g(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m} u_j(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y}) \right\|_{q_1,q_2}, \tag{2.9}$$

де $u_j\in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_j\in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Якщо $F\subset L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ — клас функцій, то покладаємо

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} := \sup_{g\in F}\tau_m(g)_{q_1,q_2}. \tag{2.10}$$

Основна мета даного пункту — одержання точних за порядком оцінок величини (2.10) за припущення, що $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{T}^d$, і $f\in\mathbf{B}^r_{p,1}$.

Сформулюємо декілька тверджень, якими будемо користуватись в подальшому.

Нехай $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$, $\square_{2^s}=\{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d): |k_j|<2^s, j=1,\dots,d,\ s\in\mathbb{Z}_+\}$, а $\#\mathcal{M}$ позначає кількість елементів скінченної множини $\mathcal{M}\subset\mathbb{Z}^d$. Тоді в прийнятих позначеннях можемо записати

$$\#\square_{2^s}=(2^{s+1}-1)^d. \tag{2.11}$$

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ та $s \in \mathbb{Z}_+$ покладемо

$$f_{(s)} = f_{(s)}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{2.12}$$

де

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{t})}\, d\mathbf{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, а $\square_{2^{-1}} := \varnothing$.

Для норми функцій з простору $B^r_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > 0$, мають місце співвідношення [46]:

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (2^{rs} \|f_{(s)}\|_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{2.13}$$

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{rs} \|f_{(s)}\|_p, \quad \theta = \infty. \tag{2.14}$$

Теорема II.1 [46]. *Нехай задано $p \in (1, \infty)$. Існують додатні сталі $C_1(p)$ і $C_2(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ має місце оцінка*

$$C_1(p)||f||_p \leq \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |f_{(s)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2(p)||f||_p. \tag{2.15}$$

Теорема II.1 є одним з багатовимірних аналогів відомої теореми Літтльвуда–Пелі.

Теорема II.2. *Нехай*

$$t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{|k_j| \leq n_j \\ j=1,\dots,d}} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, тоді при $1 \leq p < q \leq \infty$ має місце нерівність

$$\|t\|_q \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|t\|_p. \tag{2.16}$$

Нерівність (2.16) встановлена С.М. Нікольським [56] і носить назву "нерівність різних метрик", або "нерівність різних метрик Нікольського".

Для $N \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\Theta_N = \{\mathbf{k}^n = (k_1^n, \dots, k_d^n) \in \mathbb{Z}^d, n = 1, \dots, N\}$$

і нехай $P(\Theta_N) = P(\Theta_N, \mathbf{x})$ — поліном з "номерами" гармонік з множини Θ_N.

Лемма II.1 [15]. *Нехай $2 < q < \infty$. Тоді для будь-якого тригонометричного полінома $P_1(\Theta_K, \mathbf{x})$ та для будь-якого $M < K$ знайдеться тригонометричний поліном $P_2(\Theta_M, \mathbf{x})$, для якого має місце оцінка*

$$||P_1(\Theta_K, \cdot) - P_2(\Theta_M, \cdot)||_q \le C(q) \sqrt{KM^{-1}} \, ||P_1(\Theta_K, \cdot)||_2,$$

причому $\Theta_M \subset \Theta_K$.

Нехай

$$C^d(N) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)\colon \ k_j \in \mathbb{Z}, \ |k_j| \le N, \ j = 1, \dots, d\}$$

а $T(C^d(N))$ позначає множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини $C^d(N)$.

Лемма II.2 [142]. *Нехай задано число N і $m = N^d$. Тоді для будь-якої функції*

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in C^d(2N)} \hat{g}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

такої, що $|\hat{g}(\mathbf{k})| \le 1$ і $|\hat{g}(\mathbf{k})| = 1$ при $\mathbf{k} \in C^d(N)$, виконується співвідношення

$$\tau_m(g(\mathbf{x} - \mathbf{y}))_{2,1} \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Тепер сформулюємо та доведемо одержане нами твердження, стосовно класів $\mathbf{B}^r_{p,1}$ і критичних значень показника гладкості r.

Теорема 2.1. *Нехай $1 \le p < q_1 < \infty$, $q_1 > 2$, $1 \le q_2 \le \infty$,*

$r = \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}$, *тоді*

$$\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,1})_{q_1,q_2} \asymp m^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.17)$$

Доведення. Доведемо спочатку оцінку зверху в (2.17) за умови $r = \frac{d}{2}$ і $p = 2$.

Нехай f — довільна функція з класу $\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}$, тоді згідно з (2.9) при $u_j(\mathbf{x}) = c_j e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}$, $v_j(\mathbf{y}) = e^{-i(\mathbf{k}^j,\mathbf{y})}$ для $f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ одержуємо

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} \leq \tau_m(f)_{q_1,\infty} \leq \left\| f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(\mathbf{k}^j,\cdot)} \right\|_{q_1}. \qquad (2.18)$$

Звернемо увагу на те, що множини комплексних чисел $c_1, \ldots, c_m$ і набори Θ_m цілочислових векторів $\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^m$ вибираються довільним чином.

Для натурального числа m виберемо число $n = n(m) \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $\#\square_{2^{n-1}} < m \leq \#\square_{2^n}$. Зазначимо, що згідно з (2.11) має місце співвідношення $\#\square_{2^n} \asymp \#\square_{2^{n-1}} \asymp 2^{dn}$, а тому $m \asymp 2^{dn}$.

В якості поліному $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}$ в (2.18) розглянемо поліном вигляду

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{n-1} f_{(s)}(\mathbf{x}) + \sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} P(\Theta_{N_s}, \mathbf{x}), \qquad (2.19)$$

де $P(\Theta_{N_s})$ — поліноми, які наближають "блок" $f_{(s)}$, $n \leq s < \frac{qn}{2}$, згідно з лемою II.1, а

$$N_s := \left[2^{dn} 2^{\frac{ds}{2}} ||\Phi_s(f)||_2 \right]. \qquad (2.20)$$

Легко бачити, що $\Theta_{N_s} \subset \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}$. Дійсно, оскільки для $f \in \mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}$ виконується співвідношення

$$||\Phi_s(f)||_2 \leq 2^{-\frac{ds}{2}}, \qquad (2.21)$$

то

$$\#\Theta_{N_s} := N_s = \left[2^{dn}2^{\frac{ds}{2}}||f_{(s)}||_2\right] <$$

$$< (2^{s+1}-1)^d - (2^s-1)^d = \#\{\square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}\}.$$

Покажемо тепер, що кількість гармонік полінома $P(\Theta_m, \mathbf{x})$ не перевищує за порядком m. Згідно з (2.20) маємо

$$\#\Theta_m = \sum_{s=0}^{n-1} \#\{\square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}\} + \sum_{n \le s < \frac{q_1 n}{2}} N_s \ll$$

$$\ll 2^{dn} + \frac{q_1 n}{2} + 2^{dn}||f||_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \ll 2^{dn} \asymp m.$$

Таким чином, використовуючи поліном (2.19), зі співвідношень (2.18) одержуємо

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} \ll ||f - P(\Theta_m)||_{q_1} =$$

$$= \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{(s)} - \sum_{n \le s < \frac{q_1 n}{2}} P(\Theta_{N_s}) \right\|_{q_1} \le$$

$$\le \left\| \sum_{n \le s < \frac{q_1 n}{2}} \left(f_{(s)} - P(\Theta_{N_s})\right) \right\|_{q_1} + \left\| \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} f_{(s)} \right\|_{q_1}. \tag{2.22}$$

Оцінимо кожен з одержаних доданків. Скориставшись нерівністю різних метрик Нікольського та взявши до уваги (2.21), будемо мати

$$\left\| \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} f_{(s)} \right\|_{q_1} \le \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} ||f_{(s)}||_{q_1} \ll \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} 2^{ds(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1})}||f_{(s)}||_2 \asymp$$

$$\asymp \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} 2^{ds(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1})}||\Phi_s(f)||_2 \le \sum_{s \ge \frac{q_1 n}{2}} 2^{-\frac{ds}{q_1}} \asymp 2^{-\frac{d}{q_1}\cdot\frac{q_1 n}{2}} \asymp m^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

Для першого доданка з (2.22) згідно з теоремою II.1 (Літтльвуда–

Пелі), лемою II.1 та означенням (2.7) можемо записати

$$\Big\|\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})\Big\|_{q_1}=\Big\|\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} |f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})|^2\Big\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{q_1}{2}}\le$$

$$\le\Big(\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} ||f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})||^2_{q_1}\Big)^{\frac{1}{2}}\ll\Big(\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} \frac{2^{ds}}{N_s}||f_{(s)}||^2_2\Big)^{\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll 2^{-\frac{dn}{2}}\Big(\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} 2^{\frac{ds}{2}}||f_{(s)}||_2\Big)^{\frac{1}{2}}\asymp 2^{-\frac{dn}{2}}\Big(\sum_{n\le s<\frac{q_1 n}{2}} 2^{\frac{ds}{2}}||\Phi_s(f)||_2\Big)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le 2^{-\frac{dn}{2}}||f||^{\frac{1}{2}}_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\ll m^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

Таким чином, підставивши (2.24) і (2.23) в (2.22), одержуємо потрібну оцінку знизу величини $\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})_{q_1,q_2}$, тобто

$$\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})_{q_1,q_2}\ll m^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.25}$$

Скориставшись (2.25) легко одержати шукані оцінки зверху для величин $\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1})_{q_1,q_2}$, $2<p<q_1<\infty$, і $\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1})_{q_1,q_2}$, $1\le p<2<q_1<\infty$.

Оскільки $\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1}\subset\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}$, $p>2$, то згідно з (2.25) одержуємо

$$\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1})_{q_1,q_2}\le\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})_{q_1,q_2}\ll m^{-\frac{1}{2}},$$

де $2<p<q_1<\infty$.

У випадку $1\le p<2$ внаслідок нерівності різних метрик та означення (2.7) маємо

$$||f||_{B^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\asymp\sum_s 2^{\frac{ds}{2}}||\Phi_s(f)||_2\ll\sum_s 2^{\frac{ds}{2}}2^{ds(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}||\Phi_s(f)||_p\asymp||f||_{B^{\frac{d}{p}}_{p,1}},$$

тобто $\mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}\subset\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}$, $1\le p<2$. А тому, скориставшись (2.25), знаходимо

$$\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1})_{q_1,q_2}\le\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})_{q_1,q_2}\ll m^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, оцінки зверху в (2.17) встановлено.

Тепер знайдемо відповідні оцінки знизу.

Нехай $m = N^d$, $N \in \mathbb{N}$. У випадку $2 \le p < q_1 < \infty$ розглянемо функцію

$$f_1(\mathbf{x}) = C_1 N^{-d} \mathcal{R}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) := C_1 N^{-d} \prod_{j=1}^{d} \mathcal{R}_N(x_j),$$

де

$$\mathcal{R}_N(x_j) = \sum_{l=-N}^{N} \varepsilon_j e^{ilx_j}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \tag{2.26}$$

— поліноми Рудіна–Шапіро. Добре відомо, що в (2.26) числа $\varepsilon_j = \pm 1$ підібрано таким чином, що виконується нерівність (див., наприклад, [36, с. 146])

$$||\mathcal{R}_N||_\infty \ll N^{1/2}, \tag{2.27}$$

а тому

$$||\mathcal{R}_{\mathbf{N}}||_\infty \ll N^{\frac{d}{2}}. \tag{2.28}$$

Легко перевірити, що $f_1 \in \mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1}$ при певному значенні $C_1 > 0$. Дійсно, згідно з (2.4) і (2.28) маємо

$$||\mathcal{R}_{\mathbf{N}}||_{B^{\frac{d}{2}}_{p,1}} = \sum_{s=0}^{[\log_2 N]+1} 2^{\frac{ds}{2}} ||\Phi_s(\mathcal{R}_{\mathbf{N}})||_p \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{[\log_2 N]+1} 2^{\frac{ds}{2}} ||\mathcal{R}_{\mathbf{N}}||_p (||V_{2^s}||_1 + ||V_{2^{s-1}}||_1) \ll$$

$$\ll ||\mathcal{R}_{\mathbf{N}}||_\infty \sum_{s=0}^{[\log_2 N]+1} 2^{\frac{ds}{2}} \ll N^d.$$

Тепер, скориставшись (для функції $\mathcal{R}_{\mathbf{N}}$) лемою II.2, одержуємо

$$\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,1})_{q_1,q_2} \ge \tau_m(f_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q_1,q_2} \ge \tau_m(f_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{2,1} \gg$$

$$\gg N^{-d} \tau_m(\mathcal{R}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{2,1} \gg m^{-\frac{1}{2}}.$$

Оцінка знизу у випадку $2 \le p < q_1 < \infty$, $r = \frac{d}{2}$ встановлена.

Далі, у випадку $1 \le p < 2 < q_1 < \infty$, $r = \frac{d}{p}$ доведення оцінки знизу величини $\tau_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1})_{q_1,q_2}$ є аналогічним до доведення оцінки знизу величини $\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ при $r > \frac{d}{p}$ [76].

Теорему 2.1 доведено.

Зауваження 2.1. *Звернемо увагу, що встановлений в теоремі 2.1 результат доповнює проведені в [75, 76] дослідження величини* $\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$. *Зокрема, в [76] встановлено, що при* $1 \le p < q_1 < \infty$, $q_1 > 2$, $1 \le q_2, \theta \le \infty$, $r > \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}$ *має місце порядкова рівність*

$$\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp m^{-\frac{r}{d}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауваження 2.2. *Зазначимо також, що питання про порядки величини* $\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ *у випадках* $1 \le p < q_1 < \infty$, $q_1 > 2$, $1 \le q_2 \le \infty$ *при* $r = \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}$, $1 < \theta \le \infty$, *або* $\frac{d}{p} - \frac{d}{q_1} < r < \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}$, $1 \le \theta \le \infty$ *залишається відкритим навіть в одновимірному випадку.*

2.1.3. Найкраще m-членне тригонометричне наближення класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості.

В даному пункті досліджується найкраще m-членне тригонометричне наближення класів Бєсова $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ періодичних функцій d змінних в просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, при $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r < \frac{d}{p}$. Встановлена точна за порядком оцінка вказаної величини доповнює результати, одержані Р.А. ДеВором та В.М. Темляковим [162]. Більш детально про це буде йти мова наприкінці даного пункту.

Нехай Θ_m — множина, яка складається з m d-вимірних цілочислових векторів, тобто $\Theta_m = \{\mathbf{n}_k = (n_{k_1}, \ldots, n_{k_d}), \mathbf{n}_k \in \mathbb{Z}^d, k = 1, \ldots, m\}$. Покладемо

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i(\mathbf{n}_k, \mathbf{x})}$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ розглянемо величину

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{c_k} \inf_{\Theta_m} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q, \tag{2.29}$$

яку називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції f.

Для функціонального класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладаємо

$$\sigma_m(F)_q = \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \tag{2.30}$$

Величина $\sigma_m(f)_2$ для функцій однієї змінної була введена С.Б. Стєчкіним [133] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Перші оцінки величини $\sigma_m(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були одержані Р.С. Ісмагіловим [31]. Дещо пізніше дослідження величин $\sigma_m(F)_q$ для тих або інших функціональних класів проводились в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [162, 50, 79, 199]), де можна ознайомитись з більш детальною інформацією з даного питання.

Звернемо увагу, що оскільки у твердженні, що буде сформульовано нижче, параметр θ приймає і граничне значення $\theta = \infty$, то згідно з прийнятими позначеннями в цьому твердженні міститься відповідний результат і для класів С.М. Нікольського $\mathbf{H}^r_p$.

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r < \frac{d}{p}$ *виконується порядкове співвідношення*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{2.31}$$

Доведення. Оскільки права частина (2.31) не залежить від θ, а при $1 \leq \theta \leq \infty$ мають місце вкладення $\mathbf{B}^r_{p,1} \subset \mathbf{B}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{B}^r_{p,\infty}$, то оцінку зверху в (2.31) будемо проводити для класів $\mathbf{B}^r_{p,\infty}$, а знизу — для класів $\mathbf{B}^r_{p,1}$.

Доведемо спочатку оцінку зверху. Нехай m — довільне натуральне число, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{dn} < m \leq 2^{d(n+1)}$. Нехай $f \in \mathbf{B}^r_{p,\infty}$. Добре відомо, що [46]

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} f_{(s)}(\mathbf{x}), \tag{2.32}$$

і при цьому $||f_{(s)}(\cdot)||_p \leq 2^{-rs}$.

Поліном, який дає для f потрібну оцінку наближення, будемо підбирати у вигляді

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{n-1} f_{(s)}(\mathbf{x}) + \sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} P(\Theta_{N_s}, \mathbf{x}), \tag{2.33}$$

де поліноми $P(\Theta_{N_s}, \mathbf{x})$ будуть побудовані для кожного "блоку" $f_{(s)}(\mathbf{x})$ згідно з лемою II.1, а числа N_s підберемо у вигляді

$$N_s = [2^{nd} 2^{s(\frac{d}{p}-r)} 2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}] + 1, \tag{2.34}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Переконаємось, що при такому виборі чисел N_s поліном (2.33) містить за порядком не більше, ніж m гармонік. Дійсно,

$$\sum_{s=0}^{n-1} \#\{\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d): 2^{s-1} \le \max|k_j| < 2^s, j=1,\dots,d\}+$$

$$+\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} N_s \ll 2^{dn}+(\frac{q}{2}-1)n+2^{dn}2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} 2^{s(\frac{d}{p}-r)} \ll$$

$$\ll 2^{dn}+(\frac{q}{2}-1)n+2^{dn}2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}2^{\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)} \ll 2^{dn} \asymp m,$$

де $\#\mathcal{M}$ позначає кількість елементів множини $\mathcal{M}$.

Таким чином, враховуючи розклад (2.32), згідно з (2.33), нерівністю Мінковського, а також теоремою II.1, будемо мати

$$||f-P(\Theta_m)||_q \ll \left\|\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} |f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q +$$

$$+\left\|\sum_{\frac{qn}{2}\le s<\infty} f_{(s)}\right\|_q =: I_1+I_2. \tag{2.35}$$

Для оцінки доданка I_2 скористаємось нерівностями Мінковського, різних метрик та $||f_{(s)}||_p \le 2^{-rs}$, внаслідок яких одержимо

$$I_2 \le \sum_{\frac{qn}{2}\le s<\infty} ||f_{(s)}||_q \ll \sum_{\frac{qn}{2}\le s<\infty} 2^{ds(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f_{(s)}||_p \le$$

$$\le \sum_{\frac{qn}{2}\le s<\infty} 2^{-s(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \asymp 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{2.36}$$

Щоб оцінити доданок I_1, скористаємось послідовно нерівністю Мінковського, лемою А та нерівністю різних метрик, і, насамкінець, підставляючи замість N_s їх значення з (2.34) будемо мати

$$I_1 = \left\|\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} |f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})|^2\right\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \left(\sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} ||f_{(s)} - P(\Theta_{N_s})||_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds}}{N_s} ||f_{(s)}||_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds}\, 2^{2ds(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}}{N_s} ||f_{(s)}||_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{\frac{2ds}{p}}\, 2^{-2rs}}{N_s} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-\frac{dn}{2}}\, 2^{\frac{qn}{4}(\frac{d}{p}-r)} \left(\sum_{n \leq s < \frac{qn}{2}} 2^{s(\frac{d}{p}-r)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{dn}{2}}\, 2^{\frac{qn}{4}(\frac{d}{p}-r)}\, 2^{\frac{qn}{4}(\frac{d}{p}-r)} = 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \qquad (2.37)$$

Таким чином, підставляючи (2.36) і (2.37) в (2.35), одержуємо потрібну оцінку зверху для величини $\sigma_m(\mathbf{H}_p^r)_q$, і, як наслідок, для величини $\sigma_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^r)_q$.

Перейдемо до доведення в (2.31) оцінки знизу. Для цього скористаємось двоїстим співвідношенням для $\sigma_m(f)_q$ [37, с. 25], яке є частковим випадком одного більш загального результату С.М. Нікольского. А саме, для величини $\sigma_m(f)_q$, визначеної рівністю (2.29), має місце співвідношення

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Theta_m) \\ ||P||_{q'} \leq 1}} \left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{P(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right|, \qquad (2.38)$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, що ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини Θ_m, $\overline{P(\mathbf{x})}$ — функція, яка є комплексно–спряженою до $P(\mathbf{x})$.

Нехай m — довільне натуральне число, а $n \in \mathbb{N}$, як і при проведенні оцінки зверху, виберемо з умови $2^{dn} < m \leq 2^{d(n+1)}$. Розглянемо функцію

$$F_{q,n}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{|k_j| < 2^{[\frac{qn}{2}]} \\ j=1,\dots,d}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \qquad (2.39)$$

відштовхуючись від якої побудуємо функцію P з (2.38).

Нехай Θ_m — довільний набір з векторів з цілочисловими координатами. Покладемо

$$g(\mathbf{x}) = F_{q,n}(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Theta_m}^{*} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\Theta_m}^{*} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ — поліном, який містить тільки ті доданки функції $F_{q,n}$, які мають “номери” з Θ_m.

Оскільки (див., наприклад, [31])

$$\Big\| \sum_{\substack{|k_j|<2^l \\ j=1,\dots,d}} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_q \asymp 2^{dl(1-\frac{1}{q})}, \quad 1 < q < \infty, \tag{2.40}$$

то при $1 < q' < 2$ із (2.40) знаходимо

$$||g||_{q'} \leq ||F_{q,n}||_{q'} + \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\Theta_m}^{*} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_2 \ll 2^{\frac{dqn}{2}(1-\frac{1}{q'})} + \sqrt{m} \asymp 2^{\frac{dn}{2}} + 2^{\frac{dn}{2}} \asymp 2^{\frac{dn}{2}}.$$

Звідси випливає, що функція

$$P_1(\mathbf{x}) = C_2 2^{-\frac{dn}{2}} \Bigg(\sum_{\substack{|k_j|<2^{[\frac{qn}{2}]} \\ j=1,\dots,d}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} - \sum_{\mathbf{k}\in\Theta_m}^{*} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Bigg), \tag{2.41}$$

з відповідною сталою $C_2 > 0$ задовольняє пред’явлені до неї вимоги з (2.38).

В якості f з (2.38) виберемо функцію

$$f_{p,n}(\mathbf{x}) = C_3 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} F_{q,n}(\mathbf{x}), \quad C_3 > 0. \tag{2.42}$$

і покажемо, що з деякою сталою $C_3 > 0$ вона належить до касу $\mathbf{B}^r_{p,1}$. Дійсно, виходячи з (2.39) та (2.40), одержуємо

$$||f_{p,n}||_{B^r_{p,1}} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{rs} \, ||(f_{p,n})_{(s)}||_p \ll 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{rs} ||(F_{q,n})_{(s)}||_p \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{rs} 2^{ds(1-\frac{1}{p})} \asymp 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} 2^{\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} = 1.$$

Таким чином, підставляючи (2.41) та (2.42) в (2.38), одержимо

$$\sigma_m(f_{p,n})_q \geq \inf_{\Theta_m} \left| \int_{\mathbb{T}^d} f_{p,n}(\mathbf{x}) \overline{P_1(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right| \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} 2^{-\frac{dn}{2}} \left(\|F_{q,n}\|_2^2 - m \right) \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{qn}{2}(r-\frac{d}{p}+d)} 2^{-\frac{dn}{2}} 2^{\frac{qdn}{2}} = 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}.$$

Теорему 2.2 доведено.

Прокоментуємо одержаний результат. Перш за все зазначимо, що у випадку $d = 1$ співвідношення (2.31) доведене Е.С. Белінським [14].

Окрім того, порядок величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$, зокрема, при $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > \frac{d}{p}$ одержаний в роботі [162] і має вигляд

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

Таким чином, співставивши (2.31) та (1.5), бачимо відмінність в оцінках наближення величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ при переході через так званий критичний показник гладкості $r = \frac{d}{p}$.

Цікавим є також порівняння одержаної нами оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ з найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$. Нагадаємо означення цієї величини та сформулюємо відповідний результат.

Нехай $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ — скінченна множина, яка містить m елементів, тобто $\#\Lambda = m$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$S_\Lambda(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Lambda} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$$

та розглянемо величину

$$e_m^{\perp}(f)_q = \inf_{\Lambda} ||f(\cdot) - S_{\Lambda}(f, \cdot)||_q.$$

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий клас функцій, то покладемо

$$e_m^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^{\perp}(f)_q. \tag{2.44}$$

Величину $e_m^{\perp}(F)_q$ називають найкращим m-членним ортогональним тригонометричним наближенням класу F в просторі L_q.

В [72] одержано такий результат:

$$e_m^{\perp}(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, \tag{2.45}$$

де $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p,q) \ne (1,1), (\infty,\infty)$, $r > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$.

Таким чином, співставивши (2.31) та (2.45) бачимо, що величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ та $e_m^{\perp}(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ при виконанні умов теореми 2.2 поводять себя по різному при $m \to \infty$.

Тепер, беручи до уваги результат теореми 2.2, трохи розширимо значення параметра p та гладкісного параметра r. Продовжуючи дослідження величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$, перейдемо від нерівностей $1 < p \le 2 < q < \infty$, $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r < \frac{d}{p}$ до розгляду нерівностей $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r \le \frac{d}{p}$.

Перш ніж перейти безпосередньо до формулювання результатів, які стосуються випадку $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < r \le \frac{d}{p}$ для величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$, зазначимо таке. Явище малої гладкості, напевно, вперше було виявлено Б.С. Кашиним [32] в процесі встановлення ним оцінок колмогоровських поперечників класів Соболєва W^r_1, $1 - \frac{1}{q} < r < 1$, функцій однієї змінної в просторі L_q, $2 < q < \infty$. В чому ж суть цього явища? А суть його полягає в тому, що при переході гладкісного параметра r через деяке критичне значення спотерігається відмінність порядкових оцінок досліджуваних апроксимаційних характеристик. Пізніше подібного роду ефект спостерігався при вивченні наближення класів функцій як однієї, так і багатьох змінних в роботах багатьох авторів (див., наприклад, [79, 22, 80, 168 199] та наведену там бібліографію).

Мають місце такі твердження.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Якщо* $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, \tag{2.46}$$

а якщо $r = \frac{d}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{2.47}$$

Теорема 2.4. *Нехай* $2 < p < q < \infty$, $r = \frac{d}{2}$ *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,1})_q \asymp m^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.48}$$

Доведення теорем 2.3 і 2.4. Доведемо спочатку в (2.46) і (2.47) оцінки зверху.

Нехай m — довільне натуральне число, а $n = n(m) \in \mathbb{N}$ є таким, що $\#\square_{2^{n-1}} < m \le \#\square_{2^n}$. Оскільки $\#\square_{2^n} \asymp \#\square_{2^{n-1}} \asymp 2^{dn}$, то $m \asymp 2^{dn}$.

Поліном, який реалізує для $f \in \mathbf{B}^r_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, будемо підбирати у вигляді

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{n-1} f_{(s)}(\mathbf{x}) + \sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} P(\Theta_{N_s}, \mathbf{x}), \tag{2.49}$$

де $P(\Theta_{N_s})$ — поліноми, які будуть побудовані для кожного “блоку” $f_{(s)}$ згідно з лемою II.1, а числа N_s виберемо наступним чином

$$N_s = \begin{cases} [2^{dn}2^{s(\frac{d}{p}-r)}2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}] + 1, & \text{якщо } \frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}, \\ [2^{dn}s^{-1}] + 1, & \text{якщо } r = \frac{d}{p}, \ 2 \le \theta \le \infty, \\ [2^{dn}(2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^{\theta}] + 1, & \text{якщо } r = \frac{d}{p}, \ 1 \le \theta < 2. \end{cases}$$

Переконаємось, що при такому виборі чисел N_s поліном (2.49) буде містити за порядком не більше, ніж m гармонік.

Дійсно, у випадку $\frac{d}{p}-\frac{d}{q}<r<\frac{d}{p}$ маємо

$$\#\Theta_m=\sum_{s=0}^{n-1}\#\{\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}}\}+\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}N_s<$$

$$<\#\left\{\bigcup_{s=0}^{n-1}(\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}})\right\}+\frac{qn}{2}+2^{dn}2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}2^{s(\frac{d}{p}-r)}\ll$$

$$\ll\#\square_{2^{n-1}}+\frac{qn}{2}+2^{dn}2^{-\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}2^{\frac{qn}{2}(\frac{d}{p}-r)}\ll 2^{dn}\asymp m.$$

Якщо ж $r=\frac{d}{p}$, $2\le\theta\le\infty$, то

$$\#\Theta_m<2^{dn}+\frac{qn}{2}+2^{dn}\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}s^{-1}\ll 2^{dn}\asymp m.$$

Нарешті, у випадку $r=\frac{d}{p}$, $1\le\theta<2$, беручи до уваги (2.7), одержимо

$$\#\Theta_m\ll 2^{dn}+2^{dn}\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}(2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^{\theta}\le 2^{dn}(1+||f||^{\theta}_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\theta}})\ll 2^{dn}\asymp m.$$

Таким чином, згідно з (2.49), нерівністю Мінковського, а також теоремою II.1, маємо

$$||f-P(\Theta_m)||_q\ll\left\|\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}}|f_{(s)}-P(\Theta_{N_s})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q+$$

$$+\left\|\sum_{s\ge\frac{qn}{2}}f_{(s)}\right\|_q=:I_1+I_2. \qquad (2.50)$$

Оцінимо спочатку доданок I_2. Внаслідок вкладень

$$\mathbf{B}^r_{p,1}\subset\mathbf{B}^r_{p,\theta}\subset\mathbf{B}^r_{p,\infty}\equiv\mathbf{H}^r_p,\ 1\le\theta\le\infty, \qquad (2.51)$$

досить встановити належну оцінку для $f\in\mathbf{H}^r_p$. Оскільки для $f\in\mathbf{H}^r_p$, згідно з (2.8), виконане співвідношення

$$||\Phi_s(f)||_p \ll 2^{-rs}, \tag{2.52}$$

то, скориставшись нерівностями Мінковського та різних метрик, будемо мати

$$I_2 \le \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} ||f_{(s)}||_q \asymp \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} ||\Phi_s(f)||_q \ll \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} 2^{ds(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ||\Phi_s(f)||_p \le$$

$$\le \sum_{s \ge \frac{qn}{2}} 2^{-s(r-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \asymp 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{2.53}$$

Для оцінки доданка I_1, внаслідок нерівності Мінковського, леми II.1 та нерівності різних метрик Нікольського, можемо записати

$$I_1 = \left\| \sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} |f_{(s)} - P(\Theta_{N_s})|^2 \right\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} ||f_{(s)} - P(\Theta_{N_s})||_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds}}{N_s} ||f_{(s)}||_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds}}{N_s} ||\Phi_s(f)||_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{ds} 2^{2ds(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}}{N_s} ||\Phi_s(f)||_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{\frac{2ds}{p}}}{N_s} ||\Phi_s(f)||_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} =: I_3. \tag{2.54}$$

Далі, оцінки для I_3 будемо проводити в залежності від обмежень на параметри r, p, q, θ та відповідних значень N_s з (2.34).

Нехай спочатку $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$. Тоді, згідно з (2.52), будемо мати

$$I_3 \le \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} \frac{2^{\frac{2ds}{p}} 2^{-2rs}}{N_s} \right)^{\frac{1}{2}} < 2^{-\frac{dn}{2}} 2^{\frac{qn}{4}(\frac{d}{p}-r)} \left(\sum_{n \le s < \frac{qn}{2}} 2^{s(\frac{d}{p}-r)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{2.55}$$

Співставивши (2.54) та (2.55), знаходимо

$$I_1 \ll m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{2.56}$$

Виходячи з (2.50) та враховуючи (2.56) і (2.53), приходимо до потрібної оцінки зверху для $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ у випадку $\frac{d}{p}-\frac{d}{q}<r<\frac{d}{p}$.

Розглянемо тепер випадок $r=\frac{d}{p}$, $1\le p\le 2$.

Нехай $\theta=\infty$. Тоді внаслідок (2.52) і (2.34) одержуємо

$$I_3 \le \left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} \frac{2^{\frac{2ds}{p}}2^{\frac{-2ds}{p}}}{N_s}\right)^{\frac{1}{2}} < 2^{-\frac{dn}{2}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} s\right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-\frac{dn}{2}} n \asymp m^{-\frac{1}{2}}\log m. \tag{2.57}$$

Якщо ж $2\le\theta<\infty$, то, використовуючи нерівність Гельдера, будемо мати

$$\begin{aligned} I_3 &< 2^{-\frac{dn}{2}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} s(2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll 2^{-\frac{dn}{2}} n^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} (2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} 1\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll 2^{-\frac{dn}{2}} n^{\frac{1}{2}}||f||_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\theta}} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Насамкінець для $1\le\theta<2$ внаслідок нерівності Гельдера одержимо

$$\begin{aligned} I_3 &< 2^{-\frac{dn}{2}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} (2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^{2-\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le 2^{-\frac{dn}{2}}\left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} \left((2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f)||_p)^{2-\theta}\right)^{\frac{\theta}{2-\theta}}\right)^{\frac{2-\theta}{2\theta}} \left(\sum_{n\le s<\frac{qn}{2}} 1\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll 2^{-\frac{dn}{2}}||f||^{\frac{2-\theta}{2}}_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\theta}} n^{1-\frac{1}{\theta}} \ll m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Таким чином, підставляючи (2.57)–(2.59) в (2.54), а потім (2.54) і (2.53) в (2.50), для $1 \le p \le 2$ маємо

$$\sigma_m(\mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\,\theta})_q \ll m^{-\frac{1}{2}}(\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{2.60}$$

Нарешті, оцінка зверху в (2.48) слідує з (2.60) при $p = 2$ внаслідок вкладення $\mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,\,\theta} \subset \mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{2,\,\theta}$, $p > 2$.

Оцінки зверху в (2.46) – (2.48) встановлено.

А зараз перейдемо до встановлення в (2.46) – (2.48) відповідних оцінок знизу.

Для заданих p, q, r і θ визначимо функції $P^* \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $f_j^* \in \mathbf{B}^r_{p,\theta}$, $j = 1, 2, 3$, що відповідають розглядуваним випадкам обмежень на параметри p, q, r і θ, для яких має місце оцінка

$$\left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} f_j^*(\mathbf{x}) \overline{P^*(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right| \gg \beta(m, p, q, r, \theta, d),$$

($\beta(m, p, q, r, \theta, d)$ — відповідна права частина співвідношень (2.46)–(2.48)), а значить така ж оцінка знизу для $\sigma_m(f_j^*)_q$, $j = 1, 2, 3$, і, як наслідок, для $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$.

Нехай m — довільне натуральне число, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\#\square_{2^{n-1}} < 2m \le \#\square_{2^n}. \tag{2.61}$$

Нехай Θ_m — довільний набір з m векторів з цілочисловими координатами. Покладемо

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \square_{2^{[\frac{qn}{2}]}}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{2.62}$$

та визначимо

$$g_1(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \square_{2^{[\frac{qn}{2}]}} \setminus \Theta_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{2.63}$$

Для g_1 з (2.63) внаслідок (2.40) та з урахуванням того, що розглядаємо випадок $2 < q < \infty$, маємо

$$||g_1||_{q'} \le ||F||_{q'} + \Bigg\| \sum_{\mathbf{k}\in\Theta_m \cap \square_{2^{[\frac{qn}{2}]}}} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Bigg\|_2 \ll 2^{\frac{dqn}{2}(1-\frac{1}{q'})} + \sqrt{m} \asymp 2^{\frac{dn}{2}} + 2^{\frac{dn}{2}} \asymp 2^{\frac{dn}{2}}.$$

Тому функція

$$P_1^*(\mathbf{x}) = C_2 2^{-\frac{dn}{2}} g_1(\mathbf{x}), \tag{2.64}$$

з відповідною сталою $C_2 > 0$ задовольняє вказані в (2.38) умови.

Перейдемо до побудови функції f_1^*. Розглянемо спочатку випадок $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$. Покладемо

$$f_1^*(\mathbf{x}) := C_3 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+1)} F(\mathbf{x}), \quad C_3 > 0, \tag{2.65}$$

і покажемо, що при деякому значенні сталої $C_3 > 0$ функція f_1^* належить до класу $\mathbf{B}^r_{p,1}$.

Зазначимо спочатку, що для заданої формулою (2.6) функції V_l, внаслідок (2.4) має місце співвідношення

$$||V_l||_p \asymp l^{d(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2.66}$$

з якого для $s \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$||V_{2^s} - V_{2^{s-1}}||_p \ll 2^{ds(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.67}$$

Тому, виходячи з (2.7), (2.62) і (2.67), маємо

$$||f_1^*||_{B^r_{p,1}} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{rs}\, ||\Phi_s(f_1^*)||_p = C_3 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+1)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]+1} 2^{rs} ||\Phi_s(F)||_p \ll$$

$$\ll 2^{\frac{dqn}{2}(\frac{1}{p}-1)} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]+1} 2^{ds(1-\frac{1}{p})} \asymp 1.$$

Враховуючи те, що $\#\Theta_m = m$, внаслідок означень (2.64) і (2.65) одер-

жимо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{T}^d} f_1^*(\mathbf{x})\overline{P_1^*(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}\right| \gg 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+1)}2^{-\frac{dn}{2}}||g_1||_2^2 =$$

$$= 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1)}\#\{\square_{2^{[\frac{qn}{2}]}} \setminus \Theta_m\} \geq 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1)}\left(\#\square_{2^{[\frac{qn}{2}]}} - m\right) \geq$$

$$\geq 2^{-\frac{dqn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1)}\left(\#\square_{2^{[\frac{qn}{2}]}} - \#\square_{2^n}\right) \asymp 2^{-\frac{qdn}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}.$$

Звідси слідує оцінка знизу в (2.46).

Розглянемо тепер випадок $1 \leq p \leq 2$, $r = \frac{d}{p}$. Покладемо

$$f_2^*(\mathbf{x}) = C_4 n^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{-ds} \sum_{\mathbf{k}\in\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},\ C_4 > 0, \qquad (2.68)$$

Оскільки згідно з (2.67)

$$||f_2^*||_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty}(2^{\frac{ds}{p}}||\Phi_s(f_2^*)||_p)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]+1}(2^{\frac{ds}{p}}2^{-ds}2^{ds(1-\frac{1}{p})})^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1,$$

то $f_2^* \in \mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, при відповідному значенні сталої $C_4 > 0$.

Використовуючи (2.8) подібним чином можна показати, що $f_2^* \in \mathbf{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}$.

Далі,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{T}^d} f_2^*(\mathbf{x})\overline{P_1^*(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}\right| \gg 2^{-\frac{dn}{2}}n^{-\frac{1}{\theta}}\inf_{\Theta_m}\left\|\sum_{s=0}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{-ds}\sum_{\mathbf{k}\in(\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}})\setminus\Theta_m} e^{i(\mathbf{k},\cdot)}\right\|_2^2 \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{dn}{2}}n^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{s=n+1}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{-ds}\left\|\sum_{\mathbf{k}\in(\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}})} e^{i(\mathbf{k},\cdot)}\right\|_2^2 =$$

$$= 2^{-\frac{dn}{2}}n^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{s=n+1}^{[\frac{qn}{2}]} 2^{-ds}\#\{\square_{2^s}\setminus\square_{2^{s-1}}\} \asymp 2^{-\frac{dn}{2}}n^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{s=n+1}^{[\frac{qn}{2}]} 1 \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{dn}{2}} n^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp m^{-\frac{1}{2}} (\log m)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Це співвідношення тягне за собою оцінку знизу в (2.47) у розглядуваному випадку.

Тепер перейдемо до встановлення оцінки знизу в (2.48).

Отож, нехай $2 < p < q < \infty$ і $r = \frac{d}{2}$. Покладемо

$$f_3^*(\mathbf{x}) = C_5 2^{-dn} \prod_{j=1}^{d} \mathcal{R}_{2^n}(x_j), \quad C_5 > 0, \tag{2.69}$$

де $\mathcal{R}_N$ — поліном Рудіна–Шапіро (див. формулу (2.26), для якого має місце нерівність (2.27).

Покажемо, що $f_3^* \in \mathbf{B}^{\frac{d}{2}}_{p,1}$ при деякому значенні сталої $C_5 > 0$. Дійсно, враховуючи (2.7), (2.67) і (2.27), одержимо

$$||f_3^*||_{B^{\frac{d}{2}}_{p,1}} = \sum_{s=0}^{n+1} 2^{\frac{ds}{2}} ||\Phi_s(f_3^*)||_p = \sum_{s=0}^{n+1} 2^{\frac{ds}{2}} ||f_3^* * (V_{2^s} - V_{2^{s-1}})||_p \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{n+1} 2^{\frac{ds}{2}} ||V_{2^s} - V_{2^{s-1}}||_1 \, ||f_3^*||_p \ll 2^{-dn} \sum_{s=0}^{n+1} 2^{\frac{ds}{2}} \prod_{j=1}^{d} ||\mathcal{R}_{2^n}(\cdot)||_\infty \ll$$

$$\ll 2^{-dn} \sum_{s=0}^{n+1} 2^{ds} \ll 1.$$

Для заданого набору Θ_m в якості полінома P у співвідношенні (2.38) візьмемо

$$P_2^*(\mathbf{x}) = C_6 2^{-\frac{dn}{2}} \left(R_{2^n}(\mathbf{x}) - R_{2^n}^{\Theta_m}(\mathbf{x}) \right), \quad C_6 > 0,$$

де

$$R_{2^n}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} \mathcal{R}_{2^n}(x_j),$$

а верхній індекс Θ_m в позначенні $R_{2^n}^{\Theta_m}$ означає, що поліном $R_{2^n}^{\Theta_m}$ є поліномом R_{2^n} з $\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0$ при $\mathbf{k} \in \square_{2^n+1} \setminus \Theta_m$.

Тоді, очевидно, що $P_2^* \in L^{\perp}(\Theta_m)$. Переконаємось тепер, що $||P_2^*||_{q'} \leq 1$

при деякому виборі сталої $C_6 > 0$. Дійсно,

$$||P_2^*||_{q'} \le ||P_2^*||_2 \ll 2^{-\frac{dn}{2}} \left(\|R_{2^n}\|_2 + \left\|R_{2^n}^{\Theta_m}\right\|_2\right) \ll 2^{-\frac{dn}{2}} (2^{\frac{dn}{2}} + \sqrt{m}) \ll 1.$$

Насамкінець, підставляючи (2.64) і (2.68) в (2.38) одержимо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{T}^d} f_3^*(\mathbf{x}) \overline{P_2^*(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}\right| \gg 2^{-\frac{3dn}{2}} \left(\|R_{2^n}\|_2^2 - \left\|R_{2^n}^{\Theta_m}\right\|_2^2\right) >$$

$$> 2^{-\frac{3dn}{2}} (2^{d(n+1)} - m) \asymp 2^{-\frac{3dn}{2}} 2^{dn} \asymp m^{-\frac{1}{2}}.$$

звідки одержуємо оцінки знизу в (2.48).

Таким чином, теореми 2.3 і 2.4 доведено.

Прокоментуємо теореми 2.3 і 2.4.

Одержані результати (2.46)–(2.48) доповнюють оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$, які встановлено в [162].

У зв'язку зі сказаним нагадаємо, що в [162] для $1 \le p, q, \theta \le \infty$ одержано оцінку

$$\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})_+}, & \text{якщо } 1 \le p < q \le \infty,\ q > 2,\ r > \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, \\ m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, & \text{для інших значень } p \text{ і } q,\ r > (\frac{d}{p} - \frac{d}{q})_+. \end{cases} \tag{2.70}$$

Зазначимо також, що в одновимірному випадку, тобто при $d = 1$, точні за порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ для $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ раніше були одержані в [14].

Співставляючи (2.46), (2.47) та (2.70), бачимо відмінність (за винятком випадку $\theta = 1$) в оцінках наближення величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le p \le 2 < q < \infty$, при переході через так званий "критичний" показник гладкості $r = \frac{d}{p}$. Іншими словами, при переході показника гладкості r через значення $\frac{d}{p}$ спостерігаємо "стрибок" порядкових оцінок наближення (за рахунок логарифмічного множника). Крім цього при "критичному" значенні показника гладкості в (2.47) виявляємо залежність порядкової оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ від параметра θ, що у випадках великої ($r > \frac{d}{p}$) та малої ($\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < r < \frac{d}{p}$) гладкостей не спостерігаємо (див. (2.70) і (2.46), відповідно).

Цікавим є також порівняння одержаних оцінок величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ з найкращим m-членним ортогональним тригонометричним наближенням класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ (див. означення (2.44)).

Зазначимо, що згідно з означеннями (2.30) та (2.44) величини $\sigma_m(F)_q$ та $e^{\perp}_m(F)_q$ пов'язані співвідношеннями

$$\sigma_m(F)_2 = e^{\perp}_m(F)_2,$$

$$\sigma_m(F)_q \le e^{\perp}_m(F)_q, \;\; q \ne 2.$$

В [72] при $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p,q) \ne (1,1), (\infty,\infty)$, $r > (\frac{d}{p} - \frac{d}{q})_+$ доведено наступне співвідношення

$$e^{\perp}_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}. \tag{2.71}$$

Таким чином, співставивши (2.46)–(2.48) і (2.45) бачимо, що величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ і $e^{\perp}_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ при виконанні умов теореми 2.3 або теореми 2.4 поводять себе по різному при $m \to \infty$.

2.2. Наближення класів типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій логарифмічної гладкості

2.2.1. Деякі апроксимаційні характеристики класів $\mathrm{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ типу Бєсова періодичних функцій багатьох змінних логарифмічної гладкості. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ і кратного ядра Діріхле

$$\mathcal{D}_{\square_{2^n}} := \mathcal{D}_{\square_{2^n}}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\square_{2^n}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $\square_N := \{\, \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) : \, |k_j| < N, \, j = 1, \ldots, d, \, N \in \mathbb{N} \,\}$, покладемо

$$f_{(s)} := f * (\mathcal{D}_{\square_{2^s}} - \mathcal{D}_{\square_{2^{s-1}}}), \; s = 0, 1, 2, \ldots, \; \mathcal{D}_{\square_{2^{-1}}} := 0,$$

де значком "$*$" позначена операція згортки двох функцій, тобто

$$\varphi * g := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$.

Розглянемо простір

$$B^{0,\alpha}_{p,\theta} := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} < \infty\},$$

де

$$||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left((s+1)^{\alpha} ||f_{(s)}||_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, \tag{2.72}$$

а $\alpha > 0$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Простори $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$ будемо називати аналогами просторів Бєсова, або просторами типу Бєсова періодичних функцій з логарифмічною гладкістю у зв'язку з тим, що

$$B^{r}_{p,\theta} := B^{r,0}_{p,\theta} := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{B^{r,0}_{p,\theta}} < \infty\},$$

де

$$||f||_{B^{r,0}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{rs}(s+1)^0 ||f_{(s)}||_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, \ \ 1 < p < \infty, \ \ 1 \le \theta < \infty, \ \ r > 0,$$

— простори Бєсова зі степеневою гладкістю (див. (2.13)). Терміни "аналогами", а також "типу" вживаються з тією метою, щоб підкреслити наступне. Ми означаємо простори функцій логарифмічної гладкості відштовхуючись від декомпозиційного зображення норм функцій з цих просторів. Про виключно логарифмічну гладкість функцій з просторів $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$ свідчить наявність множника $(s+1)^{\alpha}$ в зображенні (2.72). Оскільки ми не обговорюємо питання еквівалентності (з точністю до сталих множників) зображення (2.72) відповідному класичному (за допомогою повного модуля неперервності функції) зображенню норми функцій з просторів Бєсова з логарифмічною гладкістю, тому вживаємо термінологію "аналогами" та "типу". Зазначимо, що з питаннями еквівалентності норм просторів Бєсова з використанням різних підходів до їх означення в неперіодичному випадку можна ознайомитись в роботах [160, 159] та огляді [166].

Через $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ позначимо одиничну кулю простору $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta} := \{ f \in B^{0,\alpha}_{p,\theta} : \ ||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} \le 1 \}.$$

Означимо тепер величини, які будуть досліджуватись.

Нехай $\Theta_m := \{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^m$ — довільна множина m d-вимірних цілочислових векторів. Покладемо

$$\mathcal{D}_{\Theta_m} := \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

$$S_{\Theta_m}(f) := f * \mathcal{D}_{\Theta_m},$$

$$\mathcal{T}_{\Theta_m} := \left\{ t : \ t = \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} \, e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \ c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Зазначимо, що суму $S_{\Theta_m}(f)$ можна також подати у вигляді

$$S_{\Theta_m}(f) = \sum_{\mathbf{k}\in\Theta_m} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$, позначимо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q := \|f - S_{\square_{2^n}}(f)\|_q, \tag{2.73}$$

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q := \inf_{t\in\mathcal{T}_{\square_{2^n}}} ||f - t||_q \tag{2.74}$$

і якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q := \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q, \tag{2.75}$$

$$E_{\square_{2^n}}(F)_q := \sup_{f\in F} E_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{2.76}$$

Зазначимо, що величини $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q$ та $E_{\square_{2^n}}(f)_q$ згідно з означеннями (2.73) та (2.74) пов'язані нерівністю

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{2.77}$$

Величини

$$e_m^{\perp}(f)_q := \inf_{\Theta_m} \|f - S_{\Theta_m}(f)\|_q, \tag{2.78}$$

$$e_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{t\in\mathcal{T}_{\Theta_m}} \|f - t\|_q \tag{2.79}$$

називаються відповідно найкращим m-членним ортогональним тригонометричним наближенням та найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$. Як видно з означень (2.78) і (2.79) для $e_m^{\perp}(f)_q$ і $e_m(f)_q$ має місце нерівність

$$e_m(f)_q \le e_m^{\perp}(f)_q. \tag{2.80}$$

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладаємо

$$e_m(F)_q := \sup_{f\in F} e_m(f)_q, \tag{2.81}$$

$$e_m^{\perp}(F)_q := \sup_{f\in F} e_m^{\perp}(f)_q. \tag{2.82}$$

З апроксимаційною характеристикою $e_m(F)_q$ тісно пов'язана величина

$$d_m^T(F)_q := \inf_{\Theta_m} \sup_{f\in F} \inf_{t\in\mathcal{T}_{\Theta_m}} \|f-t\|_q, \tag{2.83}$$

яка називається тригонометричним поперечником класу F в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$. Згідно з означеннями (2.81) і (2.83) справджується нерівність

$$e_m(F)_q \le d_m^T(F)_q. \tag{2.84}$$

Нехай $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ і $\mathcal{L}_m$ — довільний простір в $L_q(\mathbb{T}^d)$ розмірності m, тоді величина

$$d_m(F)_q := \inf_{\mathcal{L}_m} \sup_{f\in F} \inf_{u\in\mathcal{L}_m} ||f-u||_q \tag{2.85}$$

— колмогоровський поперечник класу F в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Величина

$$\lambda_m(F)_q := \inf_{A:\mathrm{rank}A\le m} \sup_{f\in F} ||f-Af||_q \tag{2.86}$$

називається лінійним поперечником класу F в $L_q(\mathbb{T}^d)$. В (2.86) inf знаходиться по всіх лінійних операторах A, які діють з F в $L_q(\mathbb{T}^d)$ і таких, що їх ранг не перевищує m.

Обмежимо тепер дію операторів $A : \mathrm{rank}A \le m$ таким чином, щоб оператор A був оператором ортогонального проектування, іншими словами, A повинен бути оператором Фур'є за деякою ортонормованою системою $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Величини

$$d_m^{\perp}(F)_q := \inf_{\{u_k\}_{k=1}^m} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{k=1}^{m} (f,u_k)u_k \right\|_q \tag{2.87}$$

називаються ортопроекційними поперечниками або Фур'є–поперечниками класів F у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$. В (2.87) inf береться по всіх ортонормованих системах, що складаються з m обмежених функцій.

Зазначимо, що згідно з означеннями (2.85)–(2.87) мають місце нерівності

$$d_m(F)_q \le \lambda_m(F)_q \le d_m^{\perp}(F)_q. \tag{2.88}$$

Зазначимо також, що при $m = \#\square_{2^n} = (2^{n+1}-1)^d$ згідно з означеннями (2.75), (2.76), (2.82), (2.83), (2.87) мають місце нерівності

$$d_m^T(F)_q \le E_{\square_{2^n}}(F)_q, \tag{2.89}$$

$$e_m^{\perp}(F)_q \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q, \tag{2.90}$$

$$d_m^{\perp}(F)_q \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q. \tag{2.91}$$

Нехай $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, — множина функцій $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$||f(\mathbf{x}, \mathbf{y})||_{q_1,q_2} := ||\ ||f(\cdot, \mathbf{y})||_{q_1}||_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ за змінною $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, а потім від результату, але вже за змінною $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$ в просторі $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $g \in L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ визначимо найкраще m-членне білінійне наближення порядку m наступним чином:

$$\tau_m(g)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(\mathbf{x}),\, v_j(\mathbf{y})} ||g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m} u_j(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y})||_{q_1,q_2}, \tag{2.92}$$

де $u_j \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_j \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Якщо $F \subset L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ — клас функцій, то покладаємо

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} := \sup_{g \in F} \tau_m(g)_{q_1,q_2}. \tag{2.93}$$

Величина (2.93) буде досліджуватись за припущення, що $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{T}^d$, і $f\in\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$.

Зазначимо, що згідно з означеннями (2.79) і (2.92) для $\tau_m(f(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,q_1}$ і $e_m(f)_q$ можемо записати такі співвідношення

$$\tau_m(f(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,q_1} \le \tau_m(f(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,\infty} \le e_m(f)_q, \tag{2.94}$$

де $1\le q,q_1\le\infty$.

В.М. Темляковим [145, гл. IV, с. 85] показано, що

$$\tau_m(f(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,\infty} = d_m(F,L_q), \tag{2.95}$$

за припущення, що F — функціональний клас, інваріантний відносно зсуву аргумента функції $f\in F$. Рівність (2.95) дозволяє при встановленні оцінки знизу для колмогоровських поперечників перейти відразу до оцінки знизу величини $\tau_m(f(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,\infty}$.

Сформулюємо твердження, яке буде використане нами при доведенні результатів.

Лема II.3 [162]. *Нехай* $\mathbf{B}^N_\infty = \{t\colon t\in\mathcal{T}_{\square_{N+1}}, ||t||_\infty\le 1\}$. *Для будь-яких* $N\in\mathbb{N}$ *і* $m\le N^d/2$ *при* $1\le q\le\infty$ *має місце співвідношення*

$$\sigma_m(\mathbf{B}^N_\infty)_q \ge C(d).$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 2.5. *Нехай* $\alpha>0$, *а параметри* p, q *і* θ *задовольняють умову* $1\le q\le p\le\infty$, $p>1$, $q<\infty$, $1\le\theta\le p_0=\min\{2;p\}$. *Тоді справджуються оцінки*

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp n^{-\alpha}$$

при $n\in\mathbb{N}$, *а також*

$$e^{\perp}_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp d^T_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{-\alpha},$$

$$d_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp \lambda_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp d^{\perp}_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{-\alpha}, \quad q \geq 2,$$

$$\tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1} \asymp (\log m)^{-\alpha}, \quad q \geq 2, \ \ 1 \leq q_1 \leq \infty,$$

при $m = 2, 3, \ldots$

Доведення. Нехай f — довільна функція з класу $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$. Виходячи зі співвідношень (2.77), (2.80), (2.88) – (2.91), (2.94) оцінки зверху досліджуваних апроксимаційних характеристик зводяться до встановлення оцінок зверху величини $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$.

У випадку $1 \leq q \leq p < \infty$, $p > 1$, скориставшись теоремою II.1 (Літтльвуда–Пелі) та нерівністю

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\nu}\right)^{1/\nu} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\mu}\right)^{1/\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq \nu < \infty, \ \ a_k > 0, \ k \in \mathbb{N}, \quad (2.96)$$

одержимо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q \leq \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_p = \Big\| f - \sum_{s=0}^{n} f_{(s)} \Big\|_p =$$

$$= \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)} \Big\|_p \asymp \Big\| \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} |f_{(s)}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leq$$

$$\leq \Big\| \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} |f_{(s)}|^{p_0} \Big)^{1/p_0} \Big\|_p = \Big(\| \sum_{s=n+1}^{\infty} |f_{(s)}|^{p_0} \|_{p/p_0} \Big)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} \| \, |f_{(s)}|^{p_0} \|_{p/p_0} \Big)^{1/p_0} = \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}\|_p^{p_0} \Big)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} ((s+1)^{-\alpha}(s+1)^{\alpha}\|f_{(s)}\|_p)^{\theta} \Big)^{1/\theta} \leq n^{-\alpha} ||f||_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} \leq n^{-\alpha}.$$

Для $1 \leq q < \infty$, $p = \infty$ внаслідок вкладення $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,\theta} \subset \mathbf{B}^{0,\alpha}_{q+1,\theta}$ маємо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{q+1,\theta})_{q+1} \ll n^{-\alpha}.$$

Переходячи до встановлення оцінок знизу зазначимо наступне. Беручи до уваги співвідношення (2.80), (2.84), (2.88) – (2.90), (2.95) оцінки знизу встановимо лише для величин $e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$ та $\tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1}$.

Покажемо спочатку, що має місце вкладення

$$C_1 k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} \mathbf{B}^{2^k}_\infty \subset \mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,1}, \tag{2.97}$$

де

$$e_{3\cdot 2^k} := e_{3\cdot 2^k}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} e^{i3\cdot 2^k x_j}, \tag{2.98}$$

а $C_1 > 0$ — деяка стала. Дійсно, для $T \in \mathbf{B}^{2^k}_\infty$ одержимо

$$\|k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} T\|_{B^{0,\alpha}_{\infty,1}} = k^{-\alpha}(k+3)^\alpha \|(e_{3\cdot 2^k} T)_{(k+2)}\|_\infty = k^{-\alpha}(k+3)^\alpha \|T\|_\infty \ll 1.$$

Нехай $m \asymp 2^{kd}$ і $m \le 2^{kd-1}$. Скориставшись вкладенням (2.97) і

$$\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta} \supset \mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,\theta}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{2.99}$$

та застосувавши лему II.3, одержимо

$$e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \ge e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,1})_q \ge e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,1})_q \ge C_1 e_m(k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} \mathbf{B}^{2^k}_\infty)_q =$$

$$= C_1 k^{-\alpha} e_m(\mathbf{B}^{2^k}_\infty)_q \gg k^{-\alpha} \asymp (\log m)^{-\alpha}.$$

Екстремальну функцію, яка реалізує нижню оцінку величини $\tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1}$, $q \ge 2$, $1 \le q_1 \le \infty$, будемо будувати, базуючись на кратних поліномах Рудіна–Шапіро

$$R_{2^k} := \prod_{j=1}^{d} \mathcal{R}_{2^k}(x_j) := \prod_{j=1}^{d} \sum_{l=-2^k}^{2^k} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \quad \varepsilon_l = \pm 1, \tag{2.100}$$

де $\mathcal{R}_{2^k}$ — одновимірні поліноми Рудіна–Шапіро. Внаслідок виконання нерівності (2.27) маємо

$$||R_{2^k}||_\infty = (||\mathcal{R}_{2^k}||_\infty)^d \ll 2^{kd/2}. \tag{2.101}$$

Покажемо, що функція

$$g_1 = C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} e_{3\cdot 2^k} R_{2^k},$$

де $e_{3\cdot 2^k}$ і R_{2^k} задані відповідно формулами (2.98) і (2.100), належать до класу $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,1}$ при певному виборі сталої $C_2 > 0$. Дійсно, враховуючи нерівність (2.101), маємо

$$\|g_1\|_{B^{0,\alpha}_{\infty,1}} = C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \sum_{s=k+2}^{k+3} (s+1)^{\alpha} \|(e_{3\cdot 2^k} R_{2^k})_{(s)}\|_\infty =$$

$$= C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} ((k+3)^{\alpha} \|(e_{3\cdot 2^k} R_{2^k})_{(k+2)}\|_\infty + (k+4)^{\alpha}) =$$

$$= C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} ((k+3)^{\alpha} \|R_{2^k}\|_\infty + (k+4)^{\alpha}) \ll 1.$$

Нехай $m = 2^{kd}$. Беручи до уваги вкладення (2.99) та лему II.2 (покладаючи при цьому $N = 2^k$, $g = R_{2^k}$), одержимо

$$\tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1} \geq \tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,1})_{q,q_1} \geq \tau_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{\infty,1})_{q,q_1} \geq \tau_m(g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{q,q_1} \geq$$

$$\geq \tau_m(g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{2,1} = C_3 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \tau_m(e_{3\cdot 2^k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) R_{2^k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{2,1} =$$

$$= C_3 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \tau_m(R_{2^k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))_{2,1} \gg k^{-\alpha} 2^{-kd/2} m^{1/2} \asymp (\log m)^{-\alpha}.$$

Теорему 2.5 доведено.

2.2.2. Колмогоровські поперечники класів $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю. Нехай L_q, $1 \le q \le \infty$, — простір Лебега 2π-періодичних функцій $f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ зі стандартною нормою $||\cdot||_q$. Для $r > 0$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ позначимо

$$\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta} := \{f \in L_p : ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \le 1\}, \tag{2.102}$$

де

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1 \le \theta < \infty, \tag{2.103}$$

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\infty}} := \sup_{s \ge 0} \frac{||\delta_s(f)||_p}{(s+1)^{-r}},\ \theta = \infty, \tag{2.104}$$

а $\delta_s(f) := \sum\limits_{[2^{s-1}] \le |k| < 2^s} \widehat{f}(k)e^{ikx}$, $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. Класи $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ ми називаємо аналогами класів Нікольського–Бєсова з логарифмічною гладкістю. У випадку $\theta = \infty$ замість $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}$ інколи будемо писати $\mathbf{H}^{0,r}_p$, тобто будемо покладати $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty} \equiv \mathbf{H}^{0,r}_p$.

Зазначимо, що для класів $\mathbf{LG}^r$, які є тотожні до класів $\mathbf{H}^{0,r}_\infty$, в [35] встановлені точні за порядком оцінки поперечників за Колмогоровим та ентропійних чисел. Класи, що визначаються за допомогою (2.102)–(2.104) вивчались також в роботах [188], [101] з точки зору встановлення порядкових оцінок деяких апроксимаційних характеристик цих класів.

Наведемо означення апроксимаційних характеристик, які будемо досліджувати.

Нехай $\mathcal{K}$ — компакт в банаховому просторі X з одиничною кулею B_X. Величини

$$d_m(\mathcal{K}, X) := \inf_{\{v_j\}_{j=1}^m \subset X} \sup_{f \in \mathcal{K}} \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j v_j \right\|_X, \tag{2.105}$$

$$\varepsilon_m(\mathcal{K}, X) := \inf\left\{\varepsilon\colon \exists\{u_j\}_{j=1}^n \subset X, n \le 2^{m-1}, \mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^n \{u_j + \varepsilon B_X\}\right\} \tag{2.106}$$

($m = 1, 2, \dots$) називаються відповідно m-м поперечником за Колмогоровим та m-м ентропійним числом множини $\mathcal{K}$ в просторі X. З результатами досліджень величин (2.105) і (2.106) можна ознайомитись, наприклад, в [63, 73, 82], де наведена відповідна бібліографія.

Справедливі такі твердження.

Теорема II.3 [35]**.** *Для* $r > 1$ *виконуються співвідношення*

$$d_m(\mathbf{LG}^r, L_q) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{LG}^r, L_q) \asymp \begin{cases} (\log m)^{-r+1}, & \textit{якщо } q = \infty, \\ (\log m)^{-r+1/2}, & \textit{якщо } 1 \le q < \infty. \end{cases} \tag{2.107}$$

Теорема 2.6. *Нехай* $2 \le q \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > (1/2 - 1/\theta)_+$, *тоді*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log m)^{-r+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{2.108}$$

Доведення теореми 2.6 міститься в доведенні теорем 2.5 і 2.8.

Теорема 2.7. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$, *тоді*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp (\log m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{2.109}$$

Теорема 2.8. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $\max\{q; 2\} \le p \le \infty$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, *тоді для* $\max\{q; 2\} \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ *або* $\max\{q; 2\} \le p < \infty$, $\theta = \infty$ *мають місце порядкові рівності*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp \varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{2.110}$$

Зауваження 2.3. *Порівнюючи наведені вище теореми, бачимо, що теореми 2.7 та 2.8 доповнюють результат теореми II.3 в тому розумінні, що окрім введення та розгляду додаткових параметрів* p *і* θ, *також вдалося* *розширити множину зміни параметра* r.

Зауваження 2.4. *Зазначимо, що умови* $r > (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+ := \max\{0; \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\}$ *і* $r > 1 - \frac{1}{\theta}$ *забезпечують вкладення* $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta} \subset L_q$ *при* $1 \le q < \infty$, $q \le p$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $q = p = \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *відповідно. Цей факт випливає з доведення оцінок зверху в теоремах 2.7 та 2.8 за допомогою застосування нерівності Гельдера та співвідношення (див., наприклад, [145, вступ, § 3], [73, гл.§ I, § 1.1])*

$$\left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} ||\delta_s(f)||_p^2 \right)^{1/2}, \quad 2 \le p < \infty, \qquad (2.111)$$

для $f \in L_p$. *Співвідношення (2.111) є наслідком теореми Літтльвуда–Пелі.*

Основні пункти доведення теорем 2.7 та 2.8 містять оцінки зверху для $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$, оцінки знизу для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ з подальшим застосуванням леми, яка є наслідком однієї нерівності Карла (див., наприклад, [35]).

Лемма II.4. *Нехай A — компакт в сепарабельному банаховому просторі X. Припустимо, що для пари чисел (a, b), де або $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, або $a = 0$, $b < 0$, виконані співвідношення*

$$d_m(A, X) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m(A, X) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді

$$d_m(A, X) \asymp \varepsilon_m(A, X) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

***Доведення теорем* 2.7 *та* 2.8.** Схема міркувань, яку наведено нижче, містить ідеї, які застосовувались в [35] при доведенні теореми II.3, з подальшою їх адаптацією до класів $\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$.

Встановимо спочатку оцінки зверху для $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$. З цією метою розглянемо для $m = 2^n$ наближення функції $f \in \mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$ сумами Фур'є

$S_{2^n}(f)=\sum\limits_{s=0}^{n}\delta_s(f)$.

При $p=q=\infty$, $1<\theta<\infty$, $r>1-\frac{1}{\theta}$ внаслідок застосування нерівності Гельдера одержуємо

$$||f-S_{2^n}(f)||_\infty=||\sum_{s>n}\delta_s(f)||_\infty\leq\sum_{s>n}(s+1)^{-r}||\delta_s(f)||_\infty(s+1)^r\leq$$

$$\leq\left(\sum_{s>n}(s+1)^{-r\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}}\left(\sum_{s>n}((s+1)^r||\delta_s(f)||_\infty)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll n^{-r+1-\frac{1}{\theta}}||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}}\leq$$

$$\leq n^{-r+1-\frac{1}{\theta}}\asymp(\log m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.112)$$

Якщо ж $p=q=\infty$, $\theta=1$, $r>0$, то

$$||f-S_{2^n}(f)||_\infty\leq\sum_{s>n}(s+1)^{-r}||\delta_s(f)||_\infty(s+1)^r<$$

$$<n^{-r}\sum_{s>n}(s+1)^r||\delta_s(f)||_\infty\leq n^{-r}||f||_{B^{0,r}_{\infty,1}}\leq n^{-r}\asymp(\log m)^{-r}. \qquad (2.113)$$

Нехай тепер $2\leq q<\infty$, $2<\theta<\infty$, $r>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$. Скориставшись наслідком з теореми Літтльвуда–Пелі (2.111) і нерівністю Гельдера маємо

$$||f-S_{2^n}(f)||_q\ll\left(\sum_{s>n}||\delta_s(f)||_q^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}(||\delta_s(f)||_p\,(s+1)^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{s>n}(s+1)^{-\frac{2r\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{s>n}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll n^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}}\leq n^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\asymp(\log m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.114)$$

Якщо ж $q\geq2$, $\theta=2$, $r>0$, то

$$||f-S_{2^n}(f)||_q\ll\left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}(||\delta_s(f)||_p\,(s+1)^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}<$$

$$< n^{-r}\left(\sum_{s>n}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le n^{-r}||f||_{B^{0,r}_{p,2}} \ll (\log m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \quad (2.115)$$

У випадку $2 \le q < \infty$, $\theta = \infty$, $r > \frac{1}{2}$ одержуємо

$$||f - S_{2^n}(f)||_q \ll \left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}(||\delta_s(f)||_p\,(s+1)^r)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{s>n}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p) \ll$$

$$\ll n^{-r+\frac{1}{2}}||f||_{H^{0,r}_p} \ll n^{-r+\frac{1}{2}} \asymp (\log m)^{-r+\frac{1}{2}}. \quad (2.116)$$

При $1 \le q < 2 \le \theta \le \infty$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, враховуючи нерівність $||\cdot||_q \le ||\cdot||_2$ та (2.114)–(2.116), одержуємо

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \le d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_2) \ll (\log m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \quad (2.117)$$

Таким чином, оцінки зверху в (2.109), (2.110) для $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$, внаслідок (2.112)–(2.117) встановлені.

Доведемо тепер оцінки знизу в (2.109) і (2.110) для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$.

Базовими при доведенні цих оцінок є наведені нижче твердження з [35]. Для їх формулювання наведемо деякі додаткові позначення.

Попередньо для будь-якої множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ через $\mathcal{T}(\Lambda)$ позначимо множину тригонометричних поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikx}$$

і для випадку, коли множина $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ симетрична відносно початку координат (тобто, коли $\Lambda = -\Lambda$), покладемо

$$\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda) = \{t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikx} \colon c_k = \overline{c}_{-k}, k \in \Lambda\}$$

(для $\Lambda = -\Lambda$ іноді будемо використовувати позначення $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda \bigcap \mathbb{Z}_+)$ замісtь $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda)$).

Теорема II.4 [35]. *Для будь-якого полінома вигляду*

$$f = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x)\cos 4^k x,$$

де $p_k \in \mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\{-2^l, \dots, 2^l\})$, $k = l+1, \dots, 2l$, $l = 1, 2, \dots,$ *виконується нерівність*

$$||f||_\infty \geq c \sum_{k=l+1}^{2l} ||p_k||_1, \quad c > 0.$$

Лема II.5 [35]. *Існує така абсолютна стала* $c_0 > 0$, *що в кожному просторі* $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\{N, \dots, N+m\})$ *можна знайти* 2^m *функцій* $t^1, \dots, t^{2^m}$, *для яких*

1) $||t^i||_\infty \leq 1$ *для кожного* i;

2) $||t^{i_1} - t^{i_2}||_1 \geq c_0$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 2^m\}$.

Лемма II.6 [35]. *Нехай задані натуральні числа* m, μ, $\mu < m$, *і "паралелепіпед"* $\Pi \subset \mathbb{Z}^m$,

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{m} \{1, \dots, M_j\},$$

причому для деяких $Q \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $Q \leq M$,

$$Q \leq M_j \leq M, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тоді знайдеться множина $\Omega \subset \Pi$ *з не менше, ніж*

$$\left[M^{-\mu}(Q^m - 1) \Big/ \binom{m}{\mu} \right]$$

різних точок, які мають таку властивість: якщо $x = x_j \in \Omega$, $y = y_j \in \Omega$, $x \neq y$, *то*

$$\#\{j : x_j \neq y_j\} \geq \mu.$$

Оскільки права частина (2.110) від q не залежить, а $||\cdot||_q \geq ||\cdot||_1$, $1 \leq q < \infty$, і має місце вкладення $\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta} \subset \mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}$, $1 < p \leq \infty$, то встановлення оцінок знизу для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$, $1 \leq q < \infty$, зводиться до розгляду випадку $q = 1$, $p = \infty$. При $\theta = \infty$ вважаємо, враховуючи (2.107), що нижня оцінка в (2.110) для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\infty}, L_q)$ вже встановлена.

Для кожного числа l, побудуємо спеціальний набір функцій $\mathcal{F}_l \subset \mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}$, на якому буде реалізована нижня оцінка для $\varepsilon_{2^l}(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_1)$. Зафіксуємо число l і для кожного $j = l+1, \ldots, 2l$, згідно з лемою II.5, в якій покладемо $N = 2^j$, а $m = 2^l$, визначимо набір $\{t^i_j\}_{i=1}^{2^{2^l}} \subset \mathcal{T}_{\text{r}}(\{2^j, \ldots, 2^j + 2^l\})$ з властивостями

а) $||t^i_j||_\infty \leq 1$;

б) $||t^{i_1}_j - t^{i_2}_j||_1 \geq c_0$ для будь-яких j, $i_1 \neq i_2$.

В результаті одержимо l таких наборів. Далі розглянемо в якості “паралелепіпеда” Π з леми II.6 “куб” $\bigotimes\limits_{j=1}^{l}\{1, \ldots, M\}$, покладаючи $M = 2^{2^l}$, $m = l$, $\mu = [l/3]$, (тоді $\left[M^{-\mu}(M^m - 1)/\begin{pmatrix} m \\ \mu \end{pmatrix}\right] \geq 2^{l2^{l-1}}$) і за відповідною множиною Ω з леми II.6 визначимо таку множину функцій:

$$\mathcal{F}^0_l := \{f_I = \sum_{j=l+1}^{2l} t^{i_j}_j : \ i_j \in \{1, \ldots, 2^{2^l}\}, I := (i_{l+1}, \ldots, i_{2l}) \subset \Omega\}.$$

Зазначимо, що $2^{l2^{l-1}} \leq card\, \mathcal{F}^0_l \leq 2^{l2^l}$.

Для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}^0_l$, враховуючи, що $||\delta_s(f)||_\infty \leq 1$ при $s = l+1, \ldots, 2l$ і $\delta_s(f) = 0$ при $s \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{l+1, \ldots, 2l\}$ (див. властивість а)), маємо

$$||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{s=l+1}^{2l} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_\infty)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \left(\sum_{s=l+1}^{2l} (s+1)^{r\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp l^{r+\frac{1}{\theta}}.$$

Покладемо $\mathcal{F}_l := C_1 l^{-r-\frac{1}{\theta}} \mathcal{F}^0_l$. Тоді, очевидно, при деякому $C_1 > 0$ має місце вкладення $\mathcal{F}_l \subset \mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}$ для будь-якого $l \in \mathbb{N}$.

Далі, в [35] показано, що

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_l^0, \quad f \neq g, \quad ||f-g||_1 \gg l^{\frac{1}{2}}, \tag{2.118}$$

а значить, з врахуванням

$$\varepsilon_{l2^{l-1}}(\mathcal{F}_l^0, L_1) \gg l^{\frac{1}{2}},$$

і

$$\varepsilon_{2^l}(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_1) \gg \varepsilon_{2^l}(\mathcal{F}_l, L_1) \gg l^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}},$$

що завершує доведення оцінки знизу для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ у випадку $1 \leq q < \infty$.

Перейдемо до випадку $q = \infty$. Доведення в цьому випадку фактично збігається з доведенням для випадку $1 \leq q < \infty$, а, точніше, для $q = 1$. Вкажемо тільки на відмінності. Замість $\mathcal{F}_l$ розглянемо підмножину $H = \{h_I, I \in \Omega\}$ (Ω — множина точок (наборів) I, яка побудована в лемі II.6), де $h_I = \sum\limits_{k=l+1}^{2l} t^{i_k} \cos 4^k x$, а t^{i_k} — такий, що задовольняє вимоги леми II.5 (при $N = 0$, $m = 2^l$) набір тригонометричних поліномів порядку 2^l з кількістю елементів 2^{2^l}.

Застосовуючи тепер теорему II.5 (замість (2.118)), ми для $h \in H$, $g \in H$, $h \neq g$, маємо $||h-g||_\infty \geq cl$, тому $\varepsilon_{2^l}(\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \gg l^{-r+1-\frac{1}{\theta}}$ (внаслідок вкладення $C_2 l^{-r-\frac{1}{\theta}} H \subset \mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}$, $C_2 > 0$).

Таким чином, оцінки зверху для $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ і такі ж за порядком оцінки знизу для $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ одержані. Звідси, з врахуванням леми II.4, робимо висновок, що теореми 2.7 і 2.8 доведено.

Зауваження 2.5. *Зазначимо, що в теоремі 2.5 при* $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $q < \infty$, $1 \leq \theta \leq 2$, $r > 0$ *встановлена оцінка* $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log m)^{-r}$, *яка доповнює результати теореми 2.8, наприклад, за значеннями параметра* θ.

Зауваження 2.6. *Взявши до уваги теореми II.3, 2.8, 2.6 та 2.5 мо-*

жемо стверджувати, що для $1 \le \theta \le \infty$, $r > (1/2 - 1/\theta)_+$, $2 \le q < \infty$ *виконується порядкова рівність*

$$d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log m)^{-r+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{2.119}$$

А тепер, порівнюючи (2.119) та (2.109), бачимо, що "стрибок" в точних за порядком оцінках величин $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ *при переході від метрики* L_q, $1 \le q < \infty$, *до метрики* L_∞ *зникає лише при* $\theta = 1$, *тобто на найвужчих класах* $\mathbf{B}^{0,r}_{p,1}$.

2.3. Наближення класів $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з кубічних областей

В даному підрозділі одержані точні за порядком оцінки найкращого наближення класів $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з кубічних областей, а також точні за порядком оцінки наближення функцій з цих класів кубічними сумами Фур'є, тобто сумами Фур'є з "номерами" гармонік з кубічних областей.

Для викладу одержаних результатів наведемо необхідні позначення.

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ позначимо $\triangle_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$, де $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Тоді кратну різницю порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції f в точці $\mathbf{x}$ з кроком $\mathbf{h}$ визначимо за формулою

$$\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{h}} \Delta^{l-1}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}),$$

$$\Delta^0_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta^l_{\mathbf{h}} f$, задамо модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ згідно з формулою

$$\omega_l(f,t)_p = \sup_{|\mathbf{h}|\leq t} ||\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p\,,$$

де $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_d^2}$.

Нехай $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\omega(t)$ для $t \geq 0$ задовольняє наступні умови:

1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\omega(t)$ неперервна;

3) $\omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(nt) \le Cn^l\omega(t)$, де стала $C > 0$ не залежить від n і t.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ належить до простору $B^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta \le \infty$ (див., наприклад, [181]), якщо

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} < \infty \ \text{ при } 1 \le \theta < \infty$$

і

$$\sup_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} < \infty \text{ при } \ \theta = \infty,$$

де $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l.

Норма в просторі $B^{\omega}_{p,\theta}$ визначається за формулою

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B^{\omega}_{p,\theta}$ є узагальненням просторів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ [56], [17], тобто $B^{\omega}_{p,\theta} \equiv B^{r}_{p,\theta}$, якщо $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$. Надалі за позначенням $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ закріпимо позначення класу функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких $\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \le 1$. Класи $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ з точки зору апроксимації розглядались у роботах [172], [181], [210].

В наведених нижче міркуваннях нам буде зручно користуватись еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) визначенням норми просторів $B^{\omega}_{p,\theta}$. Але попередньо функцію $\omega = \omega(t)$ підпорядкуємо деяким додатковим умовам.

Будемо вважати, що $\omega(t)$ задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі-Стєчкіна [13]. Це означає наступне.

Функція $\omega(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S^α), якщо $\omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала

$C_1 > 0$, що
$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2.$$

Функція $\omega(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що
$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2. \tag{2.120}$$

Множину функцій $\omega = \omega(t)$, для яких виконуються сформульовані вище умови 1 – 4, а також умови (S^α) та (S_l), будемо позначати через $\Phi_{\alpha,l}$.

Нехай $V_m,\ m \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду:

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(\mathbf{x}),\ m \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, визначимо згідно з формулою
$$V_m(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай V_m — оператор, який задає згортку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ з багатовимірним ядром V_m, тобто

$$V_m f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{df}}{=} f(\mathbf{x}) * V_m(\mathbf{x}) = V_m(f, \mathbf{x}).$$

Покладемо для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f, \mathbf{x}) = V_1(f, \mathbf{x}),\ \Phi_s(f, \mathbf{x}) = V_{2^s}(f, \mathbf{x}) - V_{2^{s-1}}(f, \mathbf{x}),\ \ s = 1, 2, \ldots .$$

В наведених позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) при $1 \le p \le \infty$ класи $\mathbf{B}^\omega_{p,\theta}$ можна визначити наступним чином (див., наприклад, [181]):
$$\mathbf{B}^\omega_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) :\ \ ||f||_{B^\omega_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s})||\Phi_s(f,\cdot)||_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \ 1 \leq \theta < \infty, \tag{2.121}$$

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s\geq 0} \frac{||\Phi_s(f,\cdot)||_p}{\omega(2^{-s})}, \tag{2.122}$$

при умові, що $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$.

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з просторів $B^{\omega}_{p,\theta}$, використовуючи в (2.121) та (2.122) замість $||\Phi_s(f,\cdot)||_p$ норми відповідних двійкових "блоків" $||f_{(s)}(\cdot)||_p$ (див. (2.12)) ряду Фур'є функції f.

Тоді при $1 < p < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ мають місце рівності (див., наприклад, [181]):

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s})||f_{(s)}(\cdot)||_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \ 1 \leq \theta < \infty, \tag{2.123}$$

$$||f||_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s\geq 0} \frac{||f_{(s)}(\cdot)||_p}{\omega(2^{-s})}\,. \tag{2.124}$$

Визначимо тепер величини, які будуть досліджуватись в роботі. Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_{\square_{2^n}}(f)$ позначимо кратну (кубічну) суму Фур'є

$$S_{\square_{2^n}}(f) := S_{\square_{2^n}}(f,\mathbf{x}) := \sum_{\substack{|k_j|<2^n \\ j=1,\dots,d}} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k}\in\square_{2^n}} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

($\square_{2^n} = \{\, \mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) : \ |k_j| < 2^n, \ j = 1,\dots,d \,\}$), яку природно назвати кубічною сумою Фур'є функції f. Зазначимо, що згідно з наведеними вище позначеннями суму $S_{\square_{2^n}}(f)$ можна записати у вигляді:

$$S_{\square_{2^n}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(\mathbf{x}).$$

Для $f\in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1\leq q\leq\infty$, позначимо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q= \|f(\cdot)-S_{\square_{2^n}}(f,\,\cdot)\|_q \tag{2.125}$$

і якщо $F\subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q= \sup_{f\in F}\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q.$$

Нехай

$$T_{\square_{2^n}}=\Big\{t(\mathbf{x}):\,t(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\square_{2^n}}c_{\mathbf{k}}\,e^{i(\mathbf{k},\,\mathbf{x})},\,c_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}\Big\}.$$

Для $f\in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1\leq q\leq\infty$, покладемо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q=\inf_{t\in T_{\square_{2^n}}}||f(\cdot)-t(\cdot)||_q \tag{2.126}$$

і для функціонального класу $F\subset L_q(\mathbb{T}^d)$ —

$$E_{\square_{2^n}}(F)_q=\sup_{f\in F}E_{\square_{2^n}}(f)_q.$$

Зауважимо, що у випадку $1<q<\infty$ для величин (2.125) і (2.126) справджується співвідношення (див., наприклад, [46])

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q\asymp\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{2.127}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.9. *Нехай $1\leq p,q,\theta\leq\infty$, а $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha>d\left(1/p-1/q\right)_+$, тоді*

$$E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\,\theta})_q\asymp\omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \tag{2.128}$$

Доведення. Поскільки при $1\leq\theta\leq\infty$ має місце вкладення

$$\mathbf{B}^{\omega}_{p,\,1}\subset\mathbf{B}^{\omega}_{p,\,\theta}\subset\mathbf{B}^{\omega}_{p,\,\infty}\equiv\mathbf{H}^{\omega}_{p}\,, \tag{2.129}$$

а права частина (2.128) не залежить від θ, то шукану оцінку зверху будемо встановлювати для величини $E_{\square_{2^n}}(\mathbf{H}^{\omega}_p)_q$, а знизу — для $E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,1})_q$.

Спочатку одержимо в (2.128) оцінку зверху. Розглянемо всі можливі співвідношення між параметрами p та q.

Нехай спочатку $1 \leq q \leq p \leq \infty$, тоді використовуючи нерівність

$$||\Phi_s(f)||_p \leq \omega(2^{-s}) \tag{2.130}$$

і ту обставину, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$, одержимо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \leq ||f - V_{2^{n-1}}(f)||_q = ||f - \sum_{s=0}^{n-1} \Phi_s(f)||_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_q \leq$$

$$\leq \sum_{s=n}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-\alpha s} \asymp \omega(2^{-n}). \tag{2.131}$$

У випадку $1 \leq p < q \leq \infty$, враховуючи нерівність різних метрик Нікольського, (2.130) та той факт, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > d(1/p - 1/q)$, одержимо

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \leq ||f - \sum_{s=0}^{n-1} \Phi_s(f)||_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ||\Phi_s(f)||_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-(\alpha - d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-(\alpha - d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))s} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, оцінки зверху в (2.128) встановлені.

Перейдемо до доведення в (2.128) оцінок знизу.

Розглянемо випадок $1 \le q \le p \le \infty$ і покажемо, що функція

$$f_1(\mathbf{x}) = C_3 \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^{d} e^{i2^{n+1}x_j}, \ C_3 > 0,$$

реалізує нижню оцінку в (2.128). Переконаємось, що $f_1 \in \mathbf{B}^{\omega}_{\infty,1}$ при деякому виборі сталої $C_3 > 0$. Дійсно, згідно з (2.121) маємо

$$||f_1||_{B^{\omega}_{\infty,1}} = \omega^{-1}(2^{-(n+1)})||\Phi_{n+1}(f_1)||_{\infty} = C_3 \omega(2^{-n})\, \omega^{-1}(2^{-n-1}) \ll 1.$$

Далі, нехай

$$t_n^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \square_{2^n}} c^*_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$$

— поліном найкращого наближення функції f_1 в просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$. Тоді, з одного боку, беручи до уваги, що функція $e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\mathbf{x})}$ не містить гармонік з "номерами" з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$\big(f_1(\mathbf{x}) - t_n^*(\mathbf{x}), e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\mathbf{x})}\big) = (f_1(\mathbf{x}), e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\mathbf{x})}) \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) \|e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\cdot)}\|_2^2 = \omega(2^{-n}). \tag{2.132}$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера будемо мати

$$\big(f_1(\mathbf{x}) - t_n^*(\mathbf{x}), e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\mathbf{x})}\big) \le \|f_1(\cdot) - t_n^*(\cdot)\|_1 \ \|e^{i(\mathbf{2}^{n+1},\cdot)}\|_{\infty} =$$

$$= E_{\square_{2^n}}(f_1)_1. \tag{2.133}$$

Співставивши (2.132) і (2.133), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{\infty,1})_1 \ge E_{\square_{2^n}}(f_1)_1 \gg \omega(2^{-n}). \tag{2.134}$$

А тому внаслідок (2.129) і (2.134) маємо

$$E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta})_q \ge E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{\infty,\theta})_q \ge E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{\infty,1})_q \ge E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{\infty,1})_1 \gg \omega(2^{-n}).$$

Нехай $1 \le p < q \le \infty$. У випадку $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, розглянемо функцію

$$f_2(\mathbf{x}) = C_4\, \omega(2^{-n}) 2^{n\, d(\frac{1}{p}-1)}\, \upsilon_{n+1}(\mathbf{x}), \quad C_4 > 0,$$

де

$$\upsilon_{n+1}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Поскільки (див., наприклад, [145, с. 66])

$$\|\upsilon_{n+1}\|_p \asymp 2^{n\, d(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2.135}$$

то неважко переконатися, що $f_2 \in \mathbf{B}^{\omega}_{p,1}$ при відповідному значенні сталої $C_4 > 0$. Дійсно, згідно з (2.121) та (2.135) маємо

$$\|f_2\|_{B^{\omega}_{p,1}} = \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|\Phi_s(f_2)\|_p \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\, d(\frac{1}{p}-1)} \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \|\upsilon_s\|_p \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) \sum_{s=n}^{n+2} \omega^{-1}(2^{-s}) \ll 1,$$

тобто $f_2 \in \mathbf{B}^{\omega}_{p,1}$.

Далі, нехай

$$t_n^{**}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \square_{2^n}} c_{\mathbf{k}}^{**} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$$

— поліном найкращого наближення функції f_2 в просторі $L_\infty(\mathbb{T}^d)$. Тоді, з одного боку, приймаючи до уваги, що функція υ_{n+1} не містить гармонік з “номерами” з множини $\square_{2^n}$, можемо записати

$$\big(f_2(\mathbf{x}) - t_n^{**}(\mathbf{x}), \upsilon_{n+1}(\mathbf{x})\big) = (f_2(\mathbf{x}), \upsilon_{n+1}(\mathbf{x})) \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\, d(\frac{1}{p}-1)} \|\upsilon_{n+1}\|_2^2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n\, d}{p}}. \tag{2.136}$$

З іншого боку, внаслідок нерівності Гельдера та оцінки (2.135), будемо мати

$$\big(f_2(\mathbf{x}) - t_n^{**}(\mathbf{x})), \upsilon_{n+1}(\mathbf{x})\big) \leq \|f_2 - t_n^{**}\|_\infty \, \|\upsilon_{n+1}\|_1 \asymp$$

$$\asymp \|f_2 - t_n^{**}\|_\infty = E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty. \qquad (2.137)$$

Співставивши (2.134) і (2.137), приходимо до оцінки

$$E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^\omega_{p,\theta})_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^\omega_{p,1})_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(f_2)_\infty \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n\,d}{p}}.$$

Нехай тепер має місце випадок $1 \leq p < q < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_2(\mathbf{x}) = C_3\,\omega(2^{-n})2^{n\,d(\frac{1}{p}-1)}\,\upsilon_{n+1}(\mathbf{x}), \quad C_3 > 0.$$

Вище показано, что $f_2 \in \mathbf{B}^\omega_{p,1}$. Тому, згідно з (2.127) та (2.135), маємо

$$E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^\omega_{p,\theta})_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^\omega_{p,1})_\infty \geq E_{\square_{2^n}}(f_2)_q \asymp \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f_2)_q =$$

$$= ||f_2 - S_{\square_{2^n}}(f_2)||_q = ||f_2||_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n\,d(\frac{1}{p}-1)}||\upsilon_{n+1}||_q \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{n\,d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки знизу в (2.128) встановлено.

Теорему 2.9 доведено.

Теорема 2.10. *Нехай* $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > d\left(1/p - 1/q\right)_+$, *тоді*

$$\sup_{f \in \mathbf{B}^\omega_{p,\theta}} ||f - V_{2^{n-1}}(f)||_q \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \qquad (2.138)$$

Оцінка зверху в (2.138) наведена при доведенні теореми 2.9. Оцінка знизу слідує з очевидної нерівності $||f - V_{2^{n-1}}(f)||_q \geq E_{\square_{2^n}}(f)_q$ та співвідношення (2.128).

Теорема 2.11. *Нехай* $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p,q) \neq (1,1), (\infty,\infty)$, *а*

$\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > d\big(1/p - 1/q\big)_+$, *тоді*

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \tag{2.139}$$

Доведення. Для $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$ співвідношення (2.139) слідує з (2.128) внаслідок (2.127).

Оскільки $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta})_q \ge E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta})_q$, то для $1 < p \le \infty$, $q = 1$ і $1 \le p < \infty$, $q = \infty$ оцінки знизу вже встановлені в теоремі 2.9.

Встановимо оцінки зверху у випадках $1 < p \le \infty$, $q = 1$ та $1 \le p < \infty$, $q = \infty$.

Нехай спочатку $1 \le p < \infty$, $q = \infty$. Для деякого $p_* \in (p, \infty)$, використовуючи нерівність різних метрик Нікольського, будемо мати

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_\infty \le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||f_{(s)}||_\infty \le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||f_{(s)}||_{p_*} 2^{\frac{s}{p_*}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_{p_*} 2^{\frac{s}{p_*}} \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_p \, 2^{\frac{s}{p_*}} 2^{s(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_*})} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{\frac{s}{p}} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

У випадку $1 < p \le \infty$, $q = 1$ для деякого $p_{**} \in (1, p)$ одержуємо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_1 \le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||f_{(s)}||_1 \le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||f_{(s)}||_{p_{**}} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_{p_{**}} \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} ||\Phi_s(f)||_p \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}).$$

Оцінки зверху в (2.139) встановлено.

Теорему 2.11 доведено.

Зауваження 2.7. *При* $\omega(t) = t^r$ *і відповідних умовах на параметри* p, q *і* r *точні за порядком оцінки величин* $E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{r}_{p,\theta})_q$ *і* $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{r}_{p,\theta})_q$ *одержано в роботі [84].*

Теорема 2.12. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді*

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1 \asymp \omega(n^{-1}) \ln n. \tag{2.140}$$

Доведення. Доведемо спочатку оцінку зверху.

Відомо (див., наприклад, [71] (для $\theta = \infty$) та теорему 2.9 (для $1 \le \theta < \infty$)), що

$$E_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1 \asymp \omega(n^{-1}), \tag{2.141}$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Тому оцінка зверху в (2.148) випливає з нерівності Лебега (для $f \in L_1(\mathbb{T})$)

$$\mathcal{E}_n(f)_1 \le C \, \ln n \, E_n(f)_1$$

внаслідок (2.141). Таким чином, маємо

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1 \ll \ln n \, E_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1 \asymp \omega(n^{-1}) \ln n.$$

Відповідну оцінку знизу в (2.148) досить провести для $\theta = 1$, оскільки виконується вкладення $\mathbf{B}^{\omega}_{1,1} \subset \mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, і права частина (2.148) від θ не залежить.

Нехай $K_N(x)$ позначає ядро Фейєра порядку N:

$$K_N(x) = \sum_{|k| \le N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ikx}.$$

Розглянемо функції

$$\varphi(x) = e^{i(2^m + 2^{m+1})x} \, K_{2^m}(x) \tag{2.142}$$

та

$$g_1(x) = C_1 \, \omega(2^{-m}) \, \varphi(x), \quad C_1 > 0. \tag{2.143}$$

Покажемо тепер, що $g_1 \in B^{\omega}_{1,1}$. Врахувавши, що “номери” гармонік функцій φ та g_1 належать відрізку $[2^{m+1}; 2^{m+2}]$, а також те, що (див., напр., [192, Ch. 1]) $\|V_m\|_1 \le 3$ та $\|K_{2^m}(\cdot)\|_1 = 1$, одержуємо

$$\|g_1\|_{B^\omega_{1,1}} = \sum_s (\omega(2^{-s}))^{-1} \|\Phi_s(g_1)\|_1 \ll$$

$$\ll (\|V_{m+1} - V_m\|_1 + \|V_{m+2} - V_{m+1}\|_1) \|K_{2^m}(\cdot)\|_1 \ll 1. \tag{2.144}$$

Отже, з (2.144) робимо висновок про те, що $g_1 \in B^\omega_{1,1}$ при певному значенні $C_1 > 0$.

Розглянемо наближення функції φ (див. (2.142)) її частинною сумою Фур'є $S_n(\varphi)$ з $n = 3 \cdot 2^m$. За допомогою елементарних перетворень одержимо

$$\mathcal{E}_n(\varphi)_1 = \|\varphi - S_n(\varphi)\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) e^{i(k+2^m+2^{m+1})x} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \cos kx + i \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 \ge$$

$$\ge \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 . \tag{2.145}$$

Позначимо

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx$$

та розглянемо функцію

$$g_2(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Позначимо через $g_2^*(x)$ її 2π-періодичне продовження на дійсну вісь. Легко бачити, що майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$g_2^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} .$$

Нехай
$$\mathcal{I} = (\Phi, g_2^*).$$
Тоді внаслідок нерівності Гельдера можемо записати
$$\mathcal{I} \le \|\Phi\|_1 \|g_2^*\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1 \left\| \frac{\pi - x}{2} \right\|_\infty \ll$$
$$\ll \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kx \right\|_1. \tag{2.146}$$
Враховуючи (2.145) та (2.146), одержуємо
$$\mathcal{E}_n(\varphi)_1 \gg \mathcal{I} = (\Phi, g_2^*) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \asymp m \asymp \ln n. \tag{2.147}$$
Таким чином, беручи до уваги (2.142), (2.143), внаслідок (2.147) знаходимо
$$\mathcal{E}_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1 \gg \mathcal{E}_n(g_1)_1 \gg \omega(n^{-1}) \ln n.$$
Оцінку знизу встановлено.

Теорему 2.12 доведено.

Зауваження 2.8. *Теорема 2.12 у випадку* $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, *для* $\theta = \infty$ *доведена в [192, гл. 1], а для* $1 \le \theta < \infty$ *— в [89].*

Зауваження 2.9. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді [52]*
$$\mathcal{E}_n(\mathbf{B}^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \asymp \omega(n^{-1}) \ln n. \tag{2.148}$$

2.4. Висновки до розділу 2

Досліджено деякі апроксимаційні характеристики ізотропних класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних.

У підрозділі 2.1 встановлено точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Нікольського-Бєсова $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з малою ізотропною гладкістю. Ці результати доповнюють одержані Р.А. ДеВором та В.М. Темляковим (1995) точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних у випадку великої ізотропної гладкості. Також в даному підрозділі знайдено точні за порядком оцінки білінійного m-членного наближення ізотропних класів Бєсова $\mathbf{B}^r_{p,1}$ періодичних функцій багатьох змінних для критичного значення показника гладкості, які є новими навіть для в одновимірного випадку.

У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки низки апроксимаційних характеристик для класів типу Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з логарифмічною гладкістю. Також для класів типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел. Згадані результати доповнюють одержані Б.С. Кашиним та В.М. Темляковим (1999) точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів типу Нікольського періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю.

У підрозділі 2.3 встановлено точні за порядком оцінки величин найкращого наближення "кубічними" тригонометричними поліномами та наближення "кубічними" сумами Фур'є для класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою ізотропною гладкістю.

Основні результати розділу 2 опубліковано у роботах [101, 103, 107, 112, 114, 127, 190].

Розділ 3

Наближення класів функцій узагальненої мішаної гладкості тригонометричними поліномами з гармоніками з гіперболічних хрестів

3.1. Декомпозиційна норма для періодичних функцій багатьох змінних з простору $MB^{\Omega}_{p,\theta}$

Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p на кубі $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$ функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою, яка визначається рівністю:

$$||f||_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Додатково будемо вважати, що функції f належать до простору

$$L^0_p(\mathbb{T}^d) = \left\{ f\colon\ f \in L_p(\mathbb{T}^d),\ \int\limits_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) \, dx_j,\ j = 1, \dots, d \right\}.$$

Для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$ і для $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, \dots, d$, розглядатимемо мішаний модуль неперервності (порядку l)

$$\Omega_l(f, \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,d}} ||\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p,$$

де

$$\Delta_{h_j}^l f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + jh, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

— мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j.

Нехай $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $\mathbf{t} > \mathbf{0}$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ є неспадною за кожною зі змінних;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$.

Наведемо означення просторів $MB_{p,\theta}^{\Omega}$, розглянутих в роботі [191]. Для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і функції $\Omega(\mathbf{t})$ типу мішаного модуля неперервності порядку l простір $MB_{p,\theta}^{\Omega}$ визначається таким чином:

$$MB_{p,\theta}^{\Omega} := \{ f \in L_p^0(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB_{p,\theta}^{\Omega}} < \infty \},$$

де

$$||f||_{MB_{p,\theta}^{\Omega}} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{MB_{p,\infty}^{\Omega}} = \sup_{\mathbf{t} > \mathbf{0}} \frac{\Omega_l(f, \mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})}.$$

Для того, щоб розглянути декомпозиційне зображення норми функцій з простору $MB_{p,\theta}^{\Omega}$, яким будемо користуватися при встановленні оцінок апроксимаційних характеристик, означимо деякі додаткові величини.

Кожному вектору $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(\mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{k} \colon \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d), \ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, s_j \in \mathbb{N}, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, d \right\}. \tag{3.1}$$

Для $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

На функцію $\Omega(\mathbf{t})$ будемо накладати деякі додаткові умови (S^α) та (S_l) [13], які називають умовами Барі–Стєчкіна. Сформулюємо їх.

Будемо говорити, що функція $\varphi(\tau) \geq 0$ від однієї змінної задовольняє умову (S^α), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує константа $C_1 > 0$, яка не залежить від τ, така, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\beta$ майже спадає при деякому $0 < \beta < l$, тобто існує константа $C_2 > 0$, яка не залежить від τ, така, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\beta} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\beta}, \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо говорити, що $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при фіксованих змінних t_i, $i \neq j$.

Множину функцій $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$, для яких виконуються сформульовані вище умови 1 – 4, а також умови (S^α) та (S_l), будемо позначати через $\Phi_{\alpha,l}$.

В роботах [70, 191] встановлено, що при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ виконуються співвідношення:

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{\mathbf{s}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)||_p^\theta \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{3.2}$$

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}} \frac{\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}\,, \tag{3.3}$$

де $\Omega(2^{-\mathbf{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$.

Якщо $1 \le p \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, то

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}} \frac{\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}\,. \tag{3.4}$$

Зазначимо, що (3.2) встановлено в [191], а (3.3), (3.4) — в [70]. А у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = t_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{r_d}$, тобто для функцій із просторів $MB^r_{p,\theta}$, співвідношення (3.2)–(3.4) встановлено в [47].

Теорема 3.1. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Функція $f \in MB^{\Omega}_{p,\theta}$ тоді і лише тоді, коли*

$$\left\{ \sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

і в цьому випадку

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3.5}$$

Доведення. Зазначимо, що при доведенні теореми будемо використовувати деякі ідеї з роботи [191]. Встановимо для $||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}}$ оцінку зверху. В [191] показано, що

$$||f||^{\theta}_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \sum_{\mathbf{k}\ge\mathbf{0}} \Big(\Omega_l(f, 2^{-\mathbf{k}})_p \Big)^{\theta} (\Omega(2^{-\mathbf{k}}))^{-\theta} \tag{3.6}$$

де $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $2^{-\mathbf{k}} = (2^{-k_1}, \dots, 2^{-k_d})$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$.

Враховуючи, що (див., наприклад, [59, с. 304])

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}),$$

одержуємо

$$\Omega_l(f,2^{-\mathbf{k}})_p=\sup_{|\mathbf{h}|\le 2^{-\mathbf{k}}}||\Delta^l_{\mathbf{h}}f(\cdot)||_p\le\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}}\sup_{|\mathbf{h}|\le 2^{-\mathbf{k}}}||\Delta^l_{\mathbf{h}}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p. \tag{3.7}$$

Для проведення подальших міркувань розглянемо два випадки.

Якщо $|h_j|\le 2^{-s_j}$, то використаємо для оцінки $||\Delta^l_{h_j}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p$ нерівність (див., наприклад, [59, с. 166])

$$||\Delta^l_{h_j}g(\cdot)||_p\le|h_j|^l\left\|\frac{\partial^l g}{\partial x_j^l}\right\|_p$$

та нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів. Тоді

$$||\Delta^l_{h_j}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\le|h_j|^l\left\|\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\right\|_p\ll|h_j|^l2^{s_jl}||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p. \tag{3.8}$$

Якщо ж $|h_j|>2^{-s_j}$, то, використовуючи для оцінки $||\Delta^l_{h_j}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p$ нерівність Мінковського, маємо

$$||\Delta^l_{h_j}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\ll||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p \tag{3.9}$$

Беручи до уваги (3.7) та (3.9), робимо висновок, що

$$||\Delta^l_{\mathbf{h}}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\ll||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\prod_{j=1}^d\min\{1,|h_j|^l2^{s_jl}\},$$

а

$$\sup_{|\mathbf{h}|\le 2^{-\mathbf{k}}}||\Delta^l_{\mathbf{h}}A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\ll||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p\prod_{j=1}^d\min\{1,2^{l(s_j-k_j)}\}, \tag{3.10}$$

Далі, враховуючи (3.6), (3.10) та використовуючи ті ж самі міркування, що і в [191], доводимо, що

$$\sum_{\mathbf{k}\ge\mathbf{0}}\Big(\Omega_l(f,2^{-\mathbf{k}})_p\Big)^\theta(\Omega(2^{-\mathbf{k}}))^{-\theta}\ll\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}}||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^\theta(\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta}. \tag{3.11}$$

Об'єднуючи (3.6) і (3.11), одержуємо для (3.5) оцінку зверху.

Оцінка знизу встановлюється аналогічно до того, як це було зроблено в роботі [191], із заміною $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ на $A_{\mathbf{s}}(f)$. Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Оскільки $\Omega(\mathbf{t})$, $\Omega_l(f,\mathbf{t})_p$ задовольняють умови 1 – 4, (S^α) та (S_l), то при $\mathbf{0} < \mathbf{t_1} < \mathbf{t_2} < 2\mathbf{t_1}$ мають місце співвідношення

$$\Omega(\mathbf{t_1}) \asymp \Omega(\mathbf{t_2}), \quad \Omega_l(f,\mathbf{t_1})_p \asymp \Omega_l(f,\mathbf{t_2})_p. \tag{3.12}$$

У роботі [70] встановлено, що при $1 \le p \le \infty$ виконується нерівність

$$||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p \ll \Omega_l(f,2^{-\mathbf{s}})_p \tag{3.13}$$

Виходячи з (3.5) і враховуючи (3.12) та (3.13), одержуємо

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} > \left(\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \left(\frac{\Omega_l(f,\mathbf{t})_p}{\Omega(\mathbf{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} (\Omega_l(f,2^{-\mathbf{s}})_p)^{\theta} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \gg \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} ||A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 3.1 доведено.

Метою встановлення результату теореми 3.1 є подальше дослідження класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ (одиничних куль просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$) з апроксимаційної точки зору, яке дозволяє охопити "крайні" значення параметра p, тобто $p = 1$ та $p = \infty$. Можна констатувати, що співвідношення дало поштовх вивченню певних апроксимаційних характеристик класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, включаючи $\mathbf{MB}^{\Omega}_{1,\theta}$ та (або) $\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta}$, що призвело до появи робіт Г.А. Акішева [152], Ш.А. Балгімбаєвої та Т.І. Смірнова [12], О.В. Федуник [148], А.Ф. Конограя [42, 43], К.В. Соліч [99, 100], Н.В. Дерев'янко [28], О.В. Федуник-Яремчук та К.В. Соліч [149], К.В. Пожарської [64] та ін.

***Зауваження* 3.1.** *У випадку, коли* $\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, $j = 1,\dots,d$, *теорему 3.1 було доведено в [47].*

Зауваження 3.2. *Співвідношення (3.5) можна розглядати, як поширення встановленого М.М. Пустовойтовим [70] зображення норми функцій з простору* MH_p^Ω *з випадку* $\theta = \infty$ *на випадок* $1 \leq \theta < \infty$.

3.2. Наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій з узагальненою мішаною гладкістю поліномами зі спектром з рівномірних східчастих гіперболічних хрестів

3.2.1. Найкраще наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у метриці простору L_q. В даному пункті розв'язується задача наближення періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості з класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ у випадку, коли гладкісна функція Ω має вигляд

$$\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right) \tag{3.14}$$

(при таких $\Omega(\mathbf{t})$ будемо користуватись позначенням $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ замість $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$), а $\omega = \omega(\tau)$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S^{α}) та (S_l), тобто $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Якщо $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, то класи $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ збігаються з відомими класами Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ — одиничними кулями в просторі $MB^{r}_{p,\theta}$.

В [70, 191, 68, 115] були знайдені точні за порядком оцінки величин

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q := \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} E_{Q_n}(f)_q := \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \inf_{t \in T(Q_n)} ||f - t||_q \tag{3.15}$$

— найкращого наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів

$$Q_n := Q_n^1 := \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \rho(\mathbf{s}), \tag{3.16}$$

де $||\mathbf{s}||_1 := (\mathbf{s}, \mathbf{1}) = s_1 + \dots + s_d$, $\rho(\mathbf{s})$ задано формулою (3.1), а $T(Q_n)$ — множина тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з Q_n.

Метою даного пункту, є одержання слабкої асимптотики величин $E_{Q_n^1}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ при не розглянутих раніше співвідношеннях між параметрами p та q, а саме при "крайніх" значеннях параметрів p та q, тобто якщо вони обидва, або один з них приймає значення 1 або ∞.

Зазначимо, що в [68] для $\theta = \infty$ та в [115] при $1 \le \theta < \infty$ (див. теорему 3.9) встановлено, що при $1 \le q \le p \le \infty$ (за винятком випадків $p = q = \infty$ та $2 < p \le \infty$, $q = 1$) виконується порядкова рівність

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.17}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$.

Теорема 3.2. *Нехай $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді для $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $1 \le \theta \le 2$ або $p = q = \infty$, $\theta = 1$ виконується порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}). \tag{3.18}$$

Теорема 3.3. *Нехай $d = 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді справедливі співвідношення*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n}) n^{1-\frac{1}{\theta}}, & \text{якщо } p = q = \infty,\ 1 < \theta \le \infty, \\ \omega(2^{-n}) n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}, & \text{якщо } 2 < p \le \infty,\ q = 1,\ 2 < \theta \le \infty. \end{cases} \tag{3.19}$$

Доведення теорем 3.2 та 3.3. Доведення оцінок зверху в (3.18), (3.19) будемо проводити в d-вимірному ($d \ge 1$) випадку. Оцінка зверху в (3.18), (3.19) при $q = 1$ слідує з (3.17) внаслідок вкладення $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{2,\theta}$, $2 < p \le \infty$.

У випадку $p = q = \infty$ скориставшись нерівністю Гельдера та взявши до уваги, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$, для довільної функції $f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta}$ будемо мати

$$E_{Q_n}(f)_\infty \le \Bigg\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} A_{\mathbf{s}}(f) \Bigg\|_\infty \le \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_\infty \le$$

$$\le \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} (\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \left(\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1}} \right)^{\theta'} 2^{-\alpha\theta'||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} 2^{-\alpha\theta' ||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} n^{\frac{d-1}{\theta'}} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

де $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Оцінки зверху встановлено.

Доведення оцінок знизу в (3.18), (3.19) буде базуватися на побудові відповідних екстремальних функцій.

Розглянемо функції

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \sum_{s'_1=0}^{m} e^{i(4^{s'_1} x_1 + 4^{m-s'_1} x_2)}$$

та

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \sum_{s'_1=0}^{m} \cos 4^{s'_1} x_1 \cos 4^{m-s'_1} x_2,$$

а також

$$g_j(\mathbf{x}) = C_j\, \omega(2^{-n})\, n^{-1/\theta} \varphi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2.$$

При $\theta = \infty$ покладемо $\frac{1}{\theta} = 0$. Розглянемо множину $S(m) = \{\mathbf{s} : \mathbf{s} = 2\mathbf{s}', s'_1 + s'_2 = m\}$, де $\mathbf{s}' = (s'_1, s'_2) \in \mathbb{Z}^2_+$. Очевидно, що при $\theta = \infty$ та $\mathbf{s} \in S(m)$ виконуються порядкові нерівності

$$||A_{\mathbf{s}}(g_j)||_\infty \ll \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}), \quad j = 1, 2. \tag{3.20}$$

тому, враховуючи означення (3.5) норми в $MB^{\omega}_{\infty,\theta}$ та $\#S(m) \asymp m$, при $1 \leq \theta < \infty$ і $n = 2m$ маємо

$$||g_j||_{MB^{\omega}_{\infty,\theta}} \ll n^{-1/\theta} \left(\sum_{\mathbf{s} \in S(m)} (\omega^{-1}(2^{-||\mathbf{s}||_1})\, \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp 1. \tag{3.21}$$

З (3.20) і (3.21) робимо висновок, що згідно з (3.5), (3.4) $g_j \in \mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, при певному значенні $C_j > 0$, $j = 1, 2$.

В [192, гл. 3, § 3] доведено, що

$$E_{Q_{2m-1}}(\varphi_1)_1 \gg m^{1/2},$$

$$E_{Q_{2m-1}}(\varphi_2)_\infty \gg m,$$

тому

$$E_{Q_{n-1}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_1 \geq E_{Q_{2m-1}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta})_1 \geq E_{Q_{2m-1}}(g_1)_1 \gg$$
$$\gg \omega(2^{-n})n^{-1/\theta}E_{Q_{2m-1}}(\varphi_1)_1 \gg \omega(2^{-n})n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$$

для $2 < p \leq \infty$, $q = 1$, $2 < \theta \leq \infty$, а для $p = q = \infty$, $1 < \theta \leq \infty$ —

$$E_{Q_{n-1}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \geq E_{Q_{2m-1}}(g_1)_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{-1/\theta}E_{Q_{2m-1}}(\varphi_2)_\infty \gg \omega(2^{-n})n^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Таким чином, співвідношення (3.19) повністю доведено.

Встановимо тепер оцінку знизу в (3.18).

Розглянемо спочатку випадок $2 < p \leq \infty$, $q = 1$, $1 \leq \theta \leq 2$. В якості екстремальної виберемо таку функцію

$$g_3(\mathbf{x}) = C_3\,\omega(2^{-n})e^{i(2^{\tilde{s}_1}x_1+\cdots+2^{\tilde{s}_d}x_d)}, C_3 > 0,$$

де $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_d) \in \mathbb{N}^d$ і $||\tilde{\mathbf{s}}||_1 = n + 1$.

Легко перевірити, що $g_3 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ для деякого значення $C_3 > 0$. Таким чином, маємо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_1 \geq E_{Q_n}(g_3)_1 = ||g_3||_1 \asymp \omega(2^{-n}). \tag{3.22}$$

Нарешті, у випадку $p = q = \infty$, $\theta = 1$ аналогічно, як і в (3.22), одержуємо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,1})_\infty \geq E_{Q_n}(g_3)_\infty = ||g_3||_\infty \asymp \omega(2^{-n}).$$

Зазначимо, що відповідні оцінки знизу в (3.18), у зв'язку з незалежністю правої частини (3.18) від розмірності d, також випливають з одновимірного випадку (див., наприклад, [107], точніше, теорему 2.10).

Оцінки знизу в (3.18) встановлено.

Теореми 3.2 та 3.3 доведено.

На завершення наведемо деякі коментарі.

Зауваження 3.3. *При* $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, *теореми 3.2 і 3.3 містять відповідні результати і для класів* $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, *зокрема, випадки* $p = q = \infty$ *і* $p = \infty$, $q = 1$ *при* $d = 2$, $\theta = \infty$ *розглянуті в [192, гл. 3, § 3],* $1 \le \theta \le 2$, $q = 1$, $2 < p < \infty$ *— в [77],* $2 < \theta < \infty$, $2 < p \le \infty$ *— в [89], а* $p = q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *— в [83].*

Зауваження 3.4. *Той факт, що* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > (1/p - 1/q)_+$ *забезпечує вкладення* $\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta} \subset L_q(\mathbb{T}^d)$. *Надалі наявність в тексті нерівності* $\alpha > (1/p - 1/q)_+$ *буде означати, що* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > (1/p - 1/q)_+$.

3.2.2. Найкраще наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в L_{∞}. В даному пункті продовжуються дослідження пункту 3.2.1. Відмінність полягає лише в тому, що наближення здійснюється не в метриці простору L_q, $q<\infty$, якщо не брати до уваги випадок $p=q=\infty$ в теоремі 3.2, а в метриці простору L_{∞}.

Якщо $1\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $d\ge 1$, $\alpha>1/p-1/q$, то

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.23}$$

Оцінка (3.23) для $1<p<q<\infty$, $\theta=\infty$ встановлена в [70], для $1<p<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$ — в [191], а для $p=1$, $1<q<\infty$ — в [148].

Нами буде використана оцінка [192, гл. 3, § 3]

$$E_{Q_n}(\mathbf{MW}^{\rho}_{2})_{\infty} \asymp 2^{-n(\rho-\frac{1}{2})}, \tag{3.24}$$

де

$$\mathbf{MW}^{\rho}_{2}=\{f:\ f=\varphi*F_{(\rho)},\ \|\varphi\|_2\le 1\}, \tag{3.25}$$

$F_{(\rho)}=2^d\prod_{j=1}^{d}\sum_{k_j=1}^{\infty}(\cos k_jx_j)/k_j^{\rho},\ \ \rho>1/2.$

Нехай

$$S_{Q_n}(f):=f*\mathcal{D}_{Q_n}, \tag{3.26}$$

$$\mathcal{D}_{Q_n}(\mathbf{x}):=\sum_{\mathbf{k}\in Q_n}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де Q_n — східчастий гіперболічний хрест, що заданий формулою (3.16), а $S_{Q_n}(f)$ — східчасто-гіперболічна сума Фур'є функції f.

Для

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q=\sup_{f\in\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}}\|f-S_{Q_n}(f)\|_q \tag{3.27}$$

— величини наближення (в метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$) класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$, в [108, 148] одержана така оцінка

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \tag{3.28}$$

для $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, $\alpha > 1/p$ (випадок $1 < p < \infty$ розглянутий в [108], а $p = 1$ — в [148]).

Зазначимо, що згідно з означеннями (3.15) та (3.27) величини $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ пов'язані нерівністю

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q. \tag{3.29}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 3.4. *Нехай* $1 \le p \le 2$, $2 \le \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, *тоді для будь-якого* $d \ge 2$ *виконується порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{3.30}$$

Теорема 3.5. *Нехай* $2 < p < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, *тоді для будь-якого* $d \ge 2$ *виконується порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \begin{cases} \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{2}{p\theta'})}, & \text{якщо } 1 < \theta \le 2, \\ \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{p})}, & \text{якщо } 2 < \theta \le \infty, \end{cases} \tag{3.31}$$

де $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Теорема 3.6. *Нехай* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$, *або* $2 < p < \infty$, $\theta = 1$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, *тоді для будь-якого* $d \ge 1$ *виконується порядкова оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}}. \tag{3.32}$$

***Доведення теорем* 3.4, 3.5, 3.6.**

Наведемо спочатку доведення співвідношення (3.30) при $p = 2$, тобто для класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{2,\theta}$.

Для довільної функції $f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{2,\theta}$ позначимо

$$f_m = \sum_{||\mathbf{s}||_1 = m} \delta_{\mathbf{s}}(f)$$

(тоді легко бачити, що $f_m \in \mathbf{MB}^{\omega}_{2,\theta}$) і покажемо, що

$$||f_m||_2 \ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{3.33}$$

при $2 \leq \theta \leq \infty$.

Для $2 < \theta < \infty$, застосовуючи нерівність Гельдера (з показником $\theta/2 > 1$) та оцінку (див., наприклад, [145, вступ])

$$\sum_{||\mathbf{s}||_1 = m} 1 \asymp m^{d-1}, \tag{3.34}$$

одержимо

$$\|f_m\|_2^2 = \omega^2(2^{-m}) \sum_{\|s\|_1 = m} (\omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2)^2 \leq$$

$$\leq \omega^2(2^{-m}) \Bigg(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = m} (\omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2)^{\theta} \Bigg)^{\frac{2}{\theta}} \Bigg(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = m} 1 \Bigg)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega^2(2^{-m}) \Bigg(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = m} (\omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2)^{\theta} \Bigg)^{\frac{2}{\theta}} m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \leq$$

$$\leq \omega^2(2^{-m}) ||f_m||^2_{MB^{\omega}_{2,\theta}} m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \leq \omega^2(2^{-m}) m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})}.$$

У випадках $\theta = 2$ і $\theta = \infty$ маємо

$$\|f_m\|_2^2 \ll \omega^2(2^{-m}) \|f_m\|^2_{MB^{\omega}_{2,2}} \leq \omega^2(2^{-m})$$

і

$$\|f_m\|_2^2 \leq \omega^2(2^{-m}) \Bigg(\sup_{\mathbf{s}: \|\mathbf{s}\|_1 = m} \omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2 \Bigg)^2 \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = m} 1 \ll$$

$$\ll \omega^2(2^{-m}) \|f_m\|^2_{MB^{\omega}_{2,\infty}} m \leq \omega^2(2^{-m}) m,$$

відповідно.

Тепер розглянемо функцію

$$f_m^{(\rho)} := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=m} \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^{d} |k_j|^{\rho} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

для якої, враховуючи (3.33), маємо

$$\|f_m^{(\rho)}\|_2 = \Bigg(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1=m} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m^{(\rho)})\|_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \asymp \Bigg(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1=m} 2^{2\rho\|\mathbf{s}\|_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\rho m} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=m} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_m)\|_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} = 2^{\rho m} \|f_m\|_2 \ll \omega(2^{-m}) 2^{\rho m} m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \quad (3.35)$$

Оскільки $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha : \alpha > 1/2$, то, як показано в [191], можна вказати $\rho : \ 1/2 < \rho < \alpha$ і стверджувати, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha : \ \alpha > \rho > 1/2$. Доведемо, що для довільної функції $f \in \mathbf{MB}_{2,\theta}^{\omega}$ при вибраному значенні $\rho : \ 1/2 < \rho < \alpha$ має місце вкладення $C(\omega,\rho,d) f \in \mathbf{MW}_2^{\rho}$. Очевидно, що $f = f^{(\rho)} * F_{(\rho)}$, де $f^{(\rho)} = \sum_{m=d}^{\infty} f_m^{(\rho)}$. Покажемо, що $\|f^{(\rho)}\|_2 \ll 1$. З (3.35) та сказаного вище відносно значення ρ маємо

$$\|f^{(\rho)}\|_2^2 = \sum_{m=d}^{\infty} \|f_m^{(\rho)}\|_2^2 \ll \sum_{m=d}^{\infty} \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} 2^{-(\alpha-\rho)m} m^{\frac{d-1}{2}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-d})}{2^{-\alpha d}} \sum_{m=d}^{\infty} 2^{-(\alpha-\rho)m} m^{\frac{d-1}{2}} \asymp \frac{\omega(2^{-d})}{2^{-\alpha d}} 2^{-(\alpha-\rho)d} d^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-d}) 2^{\rho d} d^{\frac{d-1}{2}}. \quad (3.36)$$

Таким чином, нами показано, виходячи з (3.25) і (3.36), що $C(\omega,\rho,d) f \in \mathbf{MW}_2^{\rho}$ при певному значенні величини $C(\omega,\rho,d) > 0$.

Беручи до уваги (3.24), (3.35), одержимо

$$E_{Q_n}(f)_{\infty} \le \sum_{m=n+1}^{\infty} E_{Q_n}(f_m)_{\infty} \ll E_{Q_n}(\mathbf{MW}_2^{\rho})_{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \|f_m^{(\rho)}\|_2 \ll$$

$$\ll 2^{-n(\rho-\frac{1}{2})}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}2^{-(\alpha-\rho)m}m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\ll$$

$$\ll 2^{-n(\rho-\frac{1}{2})}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{m=n+1}^{\infty}2^{-(\alpha-\rho)m}m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{(\alpha-\rho+\frac{1}{2})n}2^{-(\alpha-\rho)n}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}=\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.37)$$

Таким чином оцінка (3.30) для $p=2$ доведена. Доведемо оцінку (3.30) для $1\leq p<2$.

Виходячи з (3.5) (з (3.4) — аналогічно) та застосовуючи нерівність різних метрик Нікольського, маємо

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}}=\left(\sum_{\mathbf{s}}(\omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\gg$$

$$\gg\left(\sum_{\mathbf{s}}(\omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_2)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\left(\sum_{\mathbf{s}}(\omega_1^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_2)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}=\|f\|_{MB^{\omega_1}_{2,\theta}}, \qquad (3.38)$$

де $\omega_1(\tau)=\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Внаслідок (3.38) робимо висновок, що для $1\leq p<2$ має місце вкладення

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}\subset\mathbf{MB}^{\omega_1}_{2,\theta}, \qquad (3.39)$$

а $\omega_1(\tau)=\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha_1=\alpha+1/2-1/p>1/2$ (оскільки $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha>1/p$).

Внаслідок вкладення (3.39) та оцінки (3.37) одержуємо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}\ll E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega_1}_{2,\theta})_{\infty}\ll$$

$$\ll\omega_1(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}=\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}, \qquad (3.40)$$

що й завершує доведення теореми 3.4.

А внаслідок вкладення $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_1}\subset\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_2}$, $1\leq\theta_1<\theta_2\leq\infty$, і (3.40) маємо для $1 \le \theta \le 2$ такі оцінки

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \le E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,2})_\infty \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Таким чином, оцінка зверху в (3.32) для $1 \le p, \theta \le 2$ встановлена.

Перейдемо тепер до доведення теореми 3.5.

Покажемо спочатку, що при виконанні умов теореми 3.5 має місце співвідношення

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \left(\sum_{\mathbf{s}} (\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g,\cdot)\|_{p'})^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}, \qquad (3.41)$$

де

$$T^\perp(Q_n)_1 = \{t : \|t\|_1 \le 1, \forall \varphi \in T(Q_n)\ (t,\varphi) = 0\},$$

а $2 \le p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$.

Дійсно, застосувавши теорему двоїстості Нікольського та нерівність Гельдера, маємо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty = \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} (f,g) =$$

$$= \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \sum_{\mathbf{s}} (\delta_{\mathbf{s}}(f), \delta_{\mathbf{s}}(g)) =$$

$$= \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{\mathbf{s}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, \|\delta_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'} \asymp$$

$$\asymp \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{\mathbf{s}} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p \, \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'} =$$

$$= \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{\mathbf{s}} \omega^{-1}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_p \, \omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'} =$$

$$= \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}} (\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'})^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= \sup_{g \in T^\perp(Q_n)_1} \left(\sum_{\mathbf{s}} (\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'})^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}.$$

Виходячи із співвідношення (3.41), доведених оцінок зверху величини $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$, $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, розглядаючи при цьому замість функції ω функцію $\omega^{1/2}$, для $p = 2$ маємо оцінку

$$\left(\sum_{\mathbf{s}} (\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_2)^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll \omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \qquad (3.42)$$

Скориставшись нерівністю (див., наприклад, [192, вступ, § 1]),

$$\|f\|_p \leq \|f\|_a^{\zeta} \, \|f\|_b^{1-\zeta}$$

де $1 \leq a < p < b \leq \infty$, $\zeta = (1/p - 1/b)/(1/a - 1/b)$, а потім нерівністю Гельдера з показником $p'/(2(p'-1)) > 1$ $(1 < p' < \infty)$, одержимо

$$\left(\sum_{\mathbf{s}} (\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_{p'})^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\mathbf{s}} ((\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_2^2)^{1-\frac{1}{p'}} (\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}))^{\frac{1}{p'}} \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_1^{\frac{2}{p'}-1})^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\mathbf{s}} \left(\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_2 \right)^{\theta'} \right)^{\frac{2}{\theta'}(1-\frac{1}{p'})} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mathbf{s}} \left(\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_1^{\theta'} \right)^{\frac{2-p'}{p'\theta'}}. \qquad (3.43)$$

Далі, оскільки $g \in T^{\perp}(Q_n)_1$, то $||A_{\mathbf{s}}(g)||_1 \ll 1$, а тому

$$\sum_{\mathbf{s}} \left(\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \|A_{\mathbf{s}}(g)\|_1^{\theta'} \ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq n-d} \left(\frac{\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})}{2^{-\alpha\|\mathbf{s}\|_1}} 2^{-\alpha\|\mathbf{s}\|_1} \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\omega(2^{-(n-d)})}{2^{-\alpha(n-d)}} \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \geq n-d} \left(2^{-\alpha\|\mathbf{s}\|_1} \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-(n-d)}) \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} (n-d)^{d-1} \asymp \left(\omega(2^{-n}) \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} n^{d-1}. \qquad (3.44)$$

Підставляючи (3.42) і (3.44) в (3.43), а потім (3.43) в (3.41), для $1 < \theta \le 2$ одержимо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \left(\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\left(\omega(2^{-n})\right)^{\frac{1}{2-p'}} n^{\frac{d-1}{\theta'}}\right)^{\frac{2-p'}{p'}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{2}{p\theta'})},$$

а для $2 < \theta \le \infty$ —

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{p})},$$

відповідно.

Таким чином, теорему 3.5 доведено.

Залишилось тепер лише в (3.32) встановити оцінку зверху для $2 < p < \infty$, $\theta = 1$, а також встановити оцінку знизу.

Для $1 \le p < \infty$, $\theta = 1$, враховуючи (3.29) і (3.28) маємо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1})_{\infty} \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Оскільки права частина (3.32) не залежить від розмірності d, то нижню оцінку в (3.32) можна встановити виходячи з одновимірного випадку, який міститься, наприклад, в [107].

Теорему 3.6 доведено.

На завершення наведемо деякі коментарі.

Зауваження 3.5. *Теореми 3.4–3.6 у випадку $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 1/p$ містять відповідні результати для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, які для $\theta = \infty$ встановлені в [192, гл. 3, § 3] (а для $1 \le p \le 2$, $\theta = \infty$ встановлені раніше в [144]), для $1 \le p \le 2$, $2 \le \theta < \infty$ — в [88], а для $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$ або $2 < p < \infty$, $1 < \theta < \infty$ — в [77].*

Зауваження 3.6. *Порівнюючи (3.30)–(3.32) з (3.28) приходимо до висновку, що при $1 \le p < \infty$, $d \ge 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$ мають місце* *співвідношення*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty = o\left(\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty\right), \qquad 1<\theta\le\infty,$$

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1})_\infty \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1})_\infty. \tag{3.45}$$

Зазначимо, що порядкова рівність (3.45), беручи до уваги (3.28) та (3.32), виконується для $d\ge 1$. *Крім того, з точки зору точних за порядком оцінок, відмінності між* $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty$ *та* $\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty$ *зникають при лише у випадку* $\theta=1$, *тобто на найвужчих класах Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду.*

Якщо ж $d=1$, *то при* $1\le p<\infty$, $q=\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>1/p$ *маємо (див., наприклад, [107], або підрозділ 2.3, а саме, теореми 2.10 та 2.12)*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Якщо ж $d=1$, $p=q=\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>0$, *то виконується така порядкова рівність (див. зауваження 2.9 та, наприклад, [107], або підрозділ 2.3, а саме, теорему 2.10)*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \asymp nE_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n})\,n.$$

3.2.3. Наближене відновлення класів $\mathbf{MH}_p^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних. Розглянемо такий оператор (див. [147]), який діє в $C(\mathbb{T}^1)$,

$$\Delta_0(f,x) = I_1(f,x), \quad \Delta_n(f,x) = I_{2^n}(f,x) - I_{2^{n-1}}(f,x), \quad n \in \mathbb{N},$$

де

$$I_m(f,x) = \frac{1}{8m}\sum_{j=0}^{8m-1} V_m(x - \frac{j\pi}{4m}) f(\frac{j\pi}{4m}).$$

Оператор $\Delta_{\boldsymbol{s}}(f,\mathbf{x})$, який діє в $C(\mathbb{T}^d)$, означаємо як суперпозицію одновимірних операторів:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \Delta_{s_1}(\Delta_{s_2}\ldots\Delta_{s_d}(f,\mathbf{x})\ldots),$$

де оператор Δ_{s_j} діє як одновимірний оператор на функцію, яка залежить від змінної x_j.

Нам будуть потрібні такі властивості оператора $\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})$ (див. [147]).

1. Нехай вектори $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_d)$ і $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d)$ такі, що для деякого j, для якого має місце нерівність $|k_j| \le 2^{s_j-1}$, $s_j \ge 1$, виконується умова $\Delta_{\mathbf{s}}(e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},\mathbf{x}) = 0$.

2. Нехай оператор $F_r(f)$ — згортка f з $F_r := F_r(\mathbf{x},\mathbf{0})$. Розглянемо оператор $\Delta_{\mathbf{s}}F_r$, який є суперпозицією операторів F_r і $\Delta_{\mathbf{s}}$. Позначимо через $\|\Delta_{\mathbf{s}}F_r\|_{p\to p}$ норму оператора $\Delta_{\mathbf{s}}F_r$, який діє з простору L_p в простір L_p. Тоді для $r > \frac{1}{p}$ має місце оцінка

$$\|\Delta_{\mathbf{s}}F_r\|_{p\to p} \le C_{r,d}\, 2^{-r\|\mathbf{s}\|_1}.$$

Теорема 3.7. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p}$. Тоді знайдеться система векторів $\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_m$ і лінійний неперервний оператор T_m такий, що $T_m(f)$ побудований по значеннях $f(\boldsymbol{\xi}_\mu)$, $\mu = 1,\ldots,m$, так, що*

$$\sup_{f\in\mathbf{MH}_p^\omega} \|f - T_m(f)\|_p \ll \omega(m^{-1}\log^{d-1} m)\log^{d-1} m.$$

Доведення. Враховуючи означення оператора $\Delta_n(f)$ і той факт, що $\|I_m\|_{\infty\to\infty} \le C$, для будь-якої неперервної функції f має місце зображення

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(f, \mathbf{x}). \tag{3.46}$$

Доведемо теорему для функцій $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$ за припущення, що f — довільний тригонометричний поліном. Як буде видно з подальших міркувань це припущення не зменшує загальності. Отже, нехай f — тригонометричний поліном. Тоді внаслідок (3.46) для f має місце зображення

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}} \Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}). \tag{3.47}$$

де $\mathbf{s}$ пробігає скінченну кількість векторів.

Візьмемо деяке натуралне число n і за цим числом побудуємо систему точок $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{|Q_n|}$ при

$$|Q_n| \le 2^n n^{d-1}, \tag{3.48}$$

а далі визначимо відповідний оператор T_{Q_n}.

Включимо в систему точок $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{|Q_n|}$ всі точки вигляду

$$\left(\frac{l_1\pi}{2^{s_1+2}}, \frac{l_1\pi}{2^{s_2+2}}, \ldots, \frac{l_1\pi}{2^{s_d+2}}\right), \ l_j = 0, 1, \ldots, 2^{s_j+3} - 1, \ j = 1, \ldots, d. \tag{3.49}$$

де вектори $\mathbf{s}$ задовольняють умову $||\mathbf{s}||_1 \le n, \ s_j = 0, 1, \ldots, \ j = 1, \ldots, d.$ Тоді для кількості таких точок $|Q_n|$ має місце оцінка

$$|Q_n| \le \sum_{||\mathbf{s}||_1 \le n} 2^{||\mathbf{s}||_1}. \tag{3.50}$$

Враховуючи (3.34) одержуємо оцінку

$$\sum_{||\mathbf{s}||_1 \le n} 2^{||\mathbf{s}||_1} = \sum_{j=d}^{n} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} 2^{||\mathbf{s}||_1} = \sum_{j=d}^{n} 2^j \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} 1 \asymp \sum_{j=d}^{n} 2^j j^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{3.51}$$

Перейдемо до побудови оператора T_{Q_n}. Для неперервної функції по-

кладемо
$$T_{Q_n}(f) = \sum_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}). \qquad (3.52)$$

Кожен оператор будуємо по значеннях в точках вигляду (3.49). Тому оператор T_{Q_n} побудовано по значеннях функції в точках $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{|Q_n|}$. Лінійність та неперервність оператора $T_{Q_n}(f)$ випливає з відповідних властивостей операторів $\Delta_{\mathbf{s}}(f)$.

Доведемо тепер, що для довільної функції $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$ має місце співвідношення
$$\|f - T_{Q_n}(f)\|_p \ll \omega(2^{-n}) n^{d-1}. \qquad (3.53)$$

Внаслідок зображення (3.47) та означення оператора (3.52) одержимо
$$\|f - T_{Q_n}(f)\|_p = \left\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \Delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot) \right\|_p \le \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_p. \qquad (3.54)$$

Оцінимо окремий доданок в (3.54). Для цього функцію $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$ зобразимо у вигляді
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}} A_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}).$$

Внаслідок властивості 1 оператора $\Delta_{\mathbf{s}}(f)$ для будь-якого вектора $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ такого, що хоча б для одного j виконана нерівність $\mu_j < s_j$, $j = 1, \dots, d$, будемо мати рівність
$$\Delta_{\mathbf{s}}(A_{\boldsymbol{\mu}}(f), \mathbf{x}) = 0,$$

а тому
$$\|\Delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_p \le \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}: \mu_j \ge s_j, \\ j = 1, \dots, d}} \|\Delta_{\mathbf{s}}(A_{\boldsymbol{\mu}}(f), \cdot)\|_p. \qquad (3.55)$$

Оцінимо окремо кожен доданок в (3.55). Нехай D_{ρ} позначає оператор, означений на тригонометричних поліномах, який є оберненим до оператора F_{ρ}. Очевидно, що це є оператор диференціювання (взагалі кажучи, дробового) порядку ρ. Тоді внаслідок нерівності Бернштейна

$$\|D_\rho A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p \ll 2^{\rho||\boldsymbol{\mu}||_1}\|A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p, \quad \rho > 0. \tag{3.56}$$

Далі, використовуючи властивість 2 оператора знаходимо для $\rho > \frac{1}{p}$:

$$\|\Delta_{\mathbf{s}}(A_{\boldsymbol{\mu}}(f))\|_p = \|\Delta_{\mathbf{s}} F_\rho D_\rho A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p \leq C_{\rho,d}\, 2^{-\rho||\mathbf{s}||_1}\|D_\rho A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p \tag{3.57}$$

Використовуючи (3.56), з (3.57) одержимо

$$\|\Delta_{\mathbf{s}}(A_{\boldsymbol{\mu}}(f))\|_p \ll 2^{-\rho||\mathbf{s}||_1}\|D_\rho A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-\rho||\mathbf{s}||_1} 2^{\rho||\boldsymbol{\mu}||_1}\|A_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_p \ll 2^{-\rho||\mathbf{s}||_1} 2^{\rho||\boldsymbol{\mu}||_1}\omega(2^{-||\boldsymbol{\mu}||_1}). \tag{3.58}$$

Нехай число ρ підібрано так, що $\frac{1}{p} < \rho < \alpha$, тоді із співвідношень (3.55) і (3.58) знайдемо

$$\|\Delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \leq \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}:\mu_j \geq s_j,\\ j=1,\ldots,d}} \|\Delta_{\boldsymbol{s}}(A_{\boldsymbol{\mu}}(f),\cdot)\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-\rho||\boldsymbol{s}||_1} \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}:\mu_j \geq s_j,\\ j=1,\ldots,d}} \frac{\omega(2^{-||\boldsymbol{\mu}||_1})}{2^{-\rho||\boldsymbol{\mu}||_1}} \ll 2^{-\rho||\boldsymbol{s}||_1}\frac{\omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1})}{2^{-\rho||\boldsymbol{s}||_1}} = \omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}). \tag{3.59}$$

Підставляючи оцінку (3.59) у співвідношення (3.53), із врахуванням (3.50), одержимо

$$\|f - T_{Q_n}(f)\|_p \leq \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 > n} \|\Delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 > n} \omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}) \ll \omega(2^{-n})n^{d-1}. \tag{3.60}$$

Нарешті, нехай задане число m. Знайдемо число n таке, щоб виконувались співвідношення

$$\|Q_n\| \leq m, \quad m \ll 2^n n^{d-1}. \tag{3.61}$$

В якості оператора T_m візьмемо оператор T_{Q_n}. Тоді потрібна оцінка норми $\|f - T_m(f)\|_p$ буде випливати з (3.60) і (3.61).

Теорему 3.7 доведено.

Зауваження 3.7. *Відомо низку робіт (див., наприклад, [96, 39, 97, 98]), в яких встановлюється оцінка похибки відновлення функції багатьох змінних по її значеннях у вузлах паралелепіпедальної теоретико-числової сітки. Порядки цих оцінок гірші, ніж порядки колмогоровських поперечників відповідних класів.*

Вище побудовано сітки, для яких похибки відновлення функцій з класів $\mathbf{MH}_p^{\omega}$ (при певних значеннях p) по значеннях у вузлах цих сіток не гірші, ніж порядки найкращих наближень $E_{Q_n}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_p$ [68] тригонометричними поліномами з номерами гармонік зі східчасто-гіперболічних хрестів. При умовах сформульованої вище теореми і $m \asymp 2^n n^{d-1}$ має місце оцінка (див. [68]):

$$\sup_{f\in\mathbf{MH}_1^{\omega}} \|f - T_m(f)\|_1 \ll E_{Q_n}(\mathbf{MH}_1^{\omega})_1 \asymp \omega(2^{-n}) n^{d-1} \asymp \omega(m^{-1}\log^{d-1} m)\log^{d-1} m,$$

де T_{Q_n} — множина тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчасто-гіперболічних хрестів Q_n.

Зауваження 3.8. *Нехай $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$. Тоді класи $\mathbf{MH}_p^{\omega}$ збігаються з класами $\mathbf{MH}_p^r$ і в такому випадку можемо записати*

$$\sup_{f\in\mathbf{MH}_p^r} \|f - T_m(f)\|_p \ll m^{-r}(\log m)^{(r+1)(d-1)}. \tag{3.62}$$

Оцінку (3.62) встановлено В.М. Темляковим в роботі [147].

3.3. Найкраще наближення класів функцій з узагальненою мішаною гладкістю поліномами з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів

3.3.1. Найкраще наближення класів $\mathrm{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у метриці простору L_q, $1 \leq q < \infty$. Спочатку означимо множини, в яких будуть міститись "номери" гармонік тригонометричних поліномів, які будуть використовуватись для наближення функцій. Для будь-якого натурального числа N покладемо

$$\kappa(N) = \kappa(\Omega, N) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \geq \frac{1}{N} \right\}, \tag{3.63}$$

$$Q(N) = Q(\Omega, N) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} \rho(\boldsymbol{s}). \tag{3.64}$$

Зазначимо, що множини $Q(N)$ породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\mathbf{t})$ і в тому випадку, коли $\Omega(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$, вони є східчастими гіперболічними хрестами.

Далі, позначимо

$$\kappa^{\perp}(N) = \{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) < \frac{1}{N} \}, \tag{3.65}$$

$$Q^{\perp}(N) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \rho(\boldsymbol{s}),$$

$$\Theta(N) = \kappa^{\perp}(N) \setminus \kappa^{\perp}(2^l N) \tag{3.66}$$

З (3.65) та (3.66) випливає, що $\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N)$ та

$$\frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) < \frac{1}{N}, \tag{3.67}$$

тобто

$$\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \asymp \frac{1}{N}, \tag{3.68}$$

де $\boldsymbol{s} \in \Theta(N)$.

В [71] показано, що $\Theta(N) \neq \varnothing$ та

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{3.69}$$

де $|\mathcal{M}|$ — кількість елементів множини $\mathcal{M}$.

Перейдемо тепер до означення апроксимаційних характеристик, які будуть досліджуватись.

Нехай $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ — деяка обмежена множина. Розглянемо таку множину:

$$Q(\Lambda) = \{\mathbf{k}: \ \mathbf{k} \in \rho(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s} \in \Lambda\} = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Lambda} \rho(\boldsymbol{s}).$$

Через $t_{Q(\Lambda)}(\mathbf{x})$ позначимо тригонометричний поліном зі спектром з $Q(\Lambda)$, тобто

$$t_{Q(\Lambda)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q(\Lambda)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де $c_{\mathbf{k}}$ — довільні числа, $(\mathbf{k},\mathbf{x}) = k_1x_1 + \cdots + k_dx_d$.

Тоді для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, величина

$$E_{Q(\Lambda)}(f)_p = \inf_{t_{Q(\Lambda)}} ||f(\cdot) - t_{Q(\Lambda)}(\cdot)||_p$$

— найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами зі спектром з множини $Q(\Lambda)$.

Якщо $F \subset L_p$ — деякий клас функцій, то покладаємо

$$E_{Q(\Lambda)}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q(\Lambda)}(f)_p.$$

Нехай $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ та $\widehat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{t})}\, d\mathbf{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Позначимо

$$\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}.$$

Наведемо одне з тверджень, яким будемо користуватись далі.

Теорема III.1 (Літтльвуда – Пелі, див., наприклад, [59, гл. 1]). *Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні числа $C_3(p)$, $C_4(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ виконуються співвідношення*

$$C_3(p)||f||_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_4(p)||f||_p \ . \tag{3.70}$$

Ця теорема є одним із узагальнень на багатовимірний випадок відомої теореми Літтльвуда – Пелі (див. [30, т. 2, гл. 15]).

З (3.70) легко одержується (див., наприклад, [192, гл. 1]) така нерівність

$$||f||_p \ll \left(\sum_s ||\delta_s(f, \cdot)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \tag{3.71}$$

де $p_0 = \min\{p;\ 2\}$.

Для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, розглянемо суму Фур'є вигляду

$$S_{Q(\Lambda)}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q(\Lambda)} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{s} \in \Lambda} \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) \tag{3.72}$$

та позначимо

$$\mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p = ||f(\cdot) - S_{Q(\Lambda)}(f, \cdot)||_p.$$

Для функціонального класу $F \subset L_p$ покладемо

$$\mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(F)_p = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p.$$

Як випливає з теореми III.1 для $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, суми Фур'є вигляду (3.72) реалізують порядок найкращого наближення тригонометричними поліномами зі спектром з множини $Q(\Lambda)$, тобто

$$E_{Q(\Lambda)}(f)_p \asymp \mathcal{E}_{Q(\Lambda)}(f)_p. \tag{3.73}$$

Тепер перейдемо до формулювання та доведення одержаних результатів.

Теорема 3.8. *Нехай* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *а для параметрів* p *і* q *виконана одна з таких умов:*

1) $1 \le q = p < \infty$;

2) $1 < q < p \le \infty,\ p \ge 2$;

3) $1 \le q < p \le 2$.

Тоді при $1 \le \theta < \infty$

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \frac{1}{N}\,(\log_2 N)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.74}$$

де $p_0 = \min\{p, 2\}$.

Доведення. Доведемо в (3.74) спочатку оцінки зверху, розглянувши послідовно всі випадки.

Наведемо лему, наслідком з якої будемо користуватися.

Лемма III.1 [71]. *Нехай функція* $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ *типу мішаного модуля неперервності порядку* l *задовольняє умову* (S^{α}). *Тоді для* $0 < p < \infty$

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^p \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^p. \tag{3.75}$$

Таким чином, враховуючи вкладення $\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N)$, внаслідок співвідношень (3.75), (3.68) і (3.69), можемо записати для $0 < p < \infty$

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^p \asymp \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^p \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^p \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^p |\Theta(N)| \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^p (\log_2 N)^{d-1}. \tag{3.76}$$

1) Нехай $q = p = 1$. Тоді скориставшись для $f \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{1,\theta}$ спочатку нерівностями Мінковського і Гельдера з показником $1 < \theta < \infty$ (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), а потім співвідношеннями (3.5) та

(3.76), будемо мати

$$E_{Q(N)}(f)_1 \le \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_1 \le \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} ||A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_1 =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-1} ||A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_1 \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_1^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \, \frac{1}{N} \Bigg(\log_2 N \Bigg)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll \frac{1}{N} \Bigg(\log_2 N \Bigg)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

2) Нехай тепер $1 < q = p < \infty$, $\theta > p_0 = \min\{p;2\}$. Тоді скориставшись для $f \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ спочатку співвідношенням (3.71), а потім нерівностями Гельдера (з показником θ/p_0) та співвідношеннями (3.2), (3.76), одержимо

$$E_{Q(N)}(f)_p \le \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_p \ll \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} ||\delta_s(f,\cdot)||_p^{p_0} \Bigg)^{1/p_0} =$$

$$= \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-p_0} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_p^{p_0} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{p_0} \Bigg)^{1/p_0} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\frac{p_0\theta}{\theta-p_0}} \Bigg)^{\frac{\theta-p_0}{\theta p_0}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \frac{1}{N} \Bigg(\log_2 N \Bigg)^{(d-1)\frac{\theta-p_0}{\theta p_0}} \ll \frac{1}{N} \Bigg(\log_2 N \Bigg)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.77)$$

3) Розглянемо тепер випадок $1 < q = p < \infty$, $1 \le \theta \le p_0$. Застосовуючи для $f \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ спочатку нерівності (3.71), (2.96), а потім формули (3.65)

і (3.2), одержимо

$$E_{Q(N)}(f)_p \leq \left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_p \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_p^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq \max_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)||_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \frac{1}{N}. \tag{3.78}$$

4) Нехай тепер $1 \leq q < p < \infty$. Внаслідок нерівності $||\cdot||_q \leq ||\cdot||_p$, $q < p$, а також доведених вище оцінок (3.77) і (3.78), можемо записати

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \leq E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_p \ll \frac{1}{N} \left(\log_2 N\right)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+} .$$

5) Розглянемо випадок $1 < q < \infty$, $p = \infty$. Оскільки, згідно з (3.5), має місце вкладення $\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{q+1,\theta}$, то використовуючи оцінки (3.77) і (3.78), одержимо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta})_q \leq E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{q+1,\theta})_{q+1} \ll \frac{1}{N} \left(\log_2 N\right)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} .$$

Таким чином, оцінки зверху в теоремі доведено.

Перейдемо до доведення в (3.74) оцінок знизу. Ці доведення будуть базуватися на побудові відповідних екстремальних функцій.

1) Нехай $2 \leq q = p < \infty$, $2 \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{N,\theta}(\mathbf{x}) = C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} e^{i(\mathbf{k_s},\mathbf{x})},\ C_5 > 0,$$

де $\mathbf{k_s} \in \rho(\boldsymbol{s})$ — деякий фіксований вектор. Покажемо, що функція $f_{N,\theta}$ при відповідному значенні сталої $C_5 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$. Дійсно, згідно із співвідношеннями (3.3), (3.68) і (3.69) маємо

$$||f_{N,\theta}||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_{N,\theta}, \cdot)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||e^{i(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}, \cdot)}||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} N \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} = (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} |\Theta(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1. \qquad (3.79)$$

Далі, оскільки внаслідок вибору функції $f_{N,\theta}$ виконується рівність

$$S_{Q(N)}(f_{N,\theta}, \cdot) = 0, \qquad (3.80)$$

то, використовуючи (3.73), (3.69), одержимо

$$E_{Q(N)}(f_{N,\theta})_p \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,\theta})_p = ||f_{N,\theta}||_p \geq ||f_{N,\theta}||_2 =$$

$$= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} ||e^{i(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}, \cdot)}||_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_5 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

2) Нехай $1 < q = p < 2$, $q \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{N,q,\theta}(\mathbf{x}) = C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (\frac{1}{q} - 1)} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \; C_6 > 0.$$

Покажемо, що $f_{N,q,\theta} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{q,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_6 > 0$. Для цього нам буде потрібне співвідношення

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \right\|_q \asymp 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1 - \frac{1}{q})}, \quad 1 < q < \infty, \qquad (3.81)$$

яке випливає з відповідного співвідношення в одновимірному випадку (див., наприклад, [31]).

Використовуючи (3.81), (3.68) і (3.69), одержимо

$$||f_{N,q,\theta}||_{MB^{\Omega}_{q,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_{N,q,\theta},\cdot)||_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{q}-1)\theta} \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} N \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} = (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} |\Theta(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Далі покладемо $\Delta_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} : 2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1}, j = 1, \ldots, d\}$. Зазначимо, що $\Delta_{\mathbf{s}} \cap \Delta_{\mathbf{s}'} = \varnothing$ при $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$. Тоді, беручи до уваги, що $S_{Q(N)}(f_{N,q,\theta},\cdot) = 0$, внаслідок (3.73) та теореми III.1, будемо мати

$$E_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q = ||f_{N,q,\theta}||_q \asymp$$

$$\asymp \Big\| \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} |\delta_{\mathbf{s}}(f_{N,q,\theta},\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \int_{\Delta_{\mathbf{s}}} |\delta_{\mathbf{s}}(f_{N,q,\theta},\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_6 \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 2^{||\mathbf{s}||_1(1-q)} \int_{\Delta_{\mathbf{s}}} \Big| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big|^q d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.82)$$

Оскільки (див., наприклад, [85])

$$\int_{\Delta_{\mathbf{s}}} \Big| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big|^q d\mathbf{x} \gg 2^{||\mathbf{s}||_1(q-1)},$$

то з (3.82) і (3.69), знаходимо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \gg \frac{1}{N}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 \Bigg)^{\frac{1}{q}} \asymp \frac{1}{N}(\log_2 N)^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

3) У випадку $1 < q = p < \infty$, $1 \le \theta < p_0 = \min\{p;2\}$ розглянемо функцію

$$g_{\Omega}(\mathbf{x}) = C_7\,\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}})\,e^{i(\mathbf{k}_{\tilde{\mathbf{s}}},\mathbf{x})},\ C_7>0,$$

де $\mathbf{k}_{\tilde{\mathbf{s}}} \in \rho(\tilde{\mathbf{s}})$, $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1,\ldots,\tilde{s}_d) \in \Theta(N)$.

Оскільки

$$||g_{\Omega}||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Bigg(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(g_{\Omega},\cdot)||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_7 \Bigg((\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}))^{-\theta}\,(\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}))^{\theta}\,||e^{i(\mathbf{k}_{\tilde{\mathbf{s}}},\cdot)}||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} = C_7, \tag{3.83}$$

то при відповідному значенні сталої $C_7 > 0$ $g_{\Omega} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$.

Враховуючи співвідношення (3.73), (3.68) і те, що $S_{Q(N)}(g_{\Omega},\cdot) = 0$, одержимо

$$E_{Q(N)}(g_{\Omega})_p \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(g_{\Omega})_p = ||g_{\Omega}||_p = C_7\;\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}})||e^{i(k_{\tilde{s}},\cdot)}||_p \asymp \frac{1}{N}. \tag{3.84}$$

4) $p = q = 1$. Побудуємо функцію, аналогічну до тієї, яку розглядав В.М. Темляков [139] при встановленні оцінки знизу апроксимативних характеристик класів Нікольського $\mathbf{MH}^r_p$ і яка пізніше використовувалась М.М. Пустовойтовим [71] при встановленні оцінки знизу величини найкращого наближення класів $\mathbf{MH}^{\Omega}_1$.

Оскільки функція $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умову (S_l), то функція $\Omega(\mathbf{t})/\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^l$

є майже спадною. Як наслідок

$$\Omega(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^l} \prod_{j=1}^{d} t_j^l \geq C_8 \Omega(1,\dots,1) \prod_{j=1}^{d} t_j^l, \quad C_8 > 0,$$

а тому знайдеться стала $C_9 > 0$ така, для якої буде виконуватись нерівність

$$\Omega(\mathbf{t}) \geq C_9 \prod_{j=1}^{d} t_j^l. \tag{3.85}$$

Розглянемо множину

$$\Theta'(N) = \{\mathbf{s} \in \Theta(N) : s_j > \frac{1}{2dl} \log_2(C_9 N),\ j = 1,\dots,d\}.$$

В роботі [71] показано, что для множини $\Theta'(N)$ має місце співвідношення

$$|\Theta'(N)| \asymp |\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}. \tag{3.86}$$

Покладемо $v = [|\Theta'(N)|^{1/d}]$ і розіб'ємо куб $\mathbb{T}^d$ на v кубів с ребром $2\pi/v$. Розглянемо множину $\bar{\Theta}(N) \subset \Theta(N)$ таку, що $|\bar{\Theta}(N)| = v^d$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною $\bar{\Theta}(N)$ та одержаною множиною кубів. Нехай $\mathbf{x}^{\mathbf{s}}$ означає центр відповідного куба для $\mathbf{s} \in \bar{\Theta}(N)$. Покладемо $u = 2^{[(\log_2 |\Theta(N)|)/d]}$. Зазначимо, що

$$u \asymp (\log_2 N)^{\frac{d-1}{d}}, \tag{3.87}$$

$$|\bar{\Theta}(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{3.88}$$

згідно з (3.69) і (3.86).

Розглянемо функцію

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \bar{\Theta}(N)} e^{i(\mathbf{k}^{\mathbf{s}}, \mathbf{x})} K_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathbf{s}}), \quad k_j^s = 2^{s_j} + 2^{s_j - 1}, \quad j = 1,\dots,d,$$

де $K_u(\mathbf{x}) = 2^d \prod\limits_{j=1}^{d} K_u(x_j)$, а $K_u(x_j)$ — ядро Фейєра порядку u. В [71] встановлено, що

$$E_{Q(N)}(\Psi)_1 \gg |\Theta(N)|, \tag{3.89}$$

а також показано, що функція $f_1(\mathbf{x}) = C_{10}\frac{1}{N}\Psi(\mathbf{x})$ при відповідному значенні сталої $C_{10} > 0$, належить до класу $\mathbf{MH}_1^{\Omega}$, тобто

$$||A_{\mathbf{s}}(f_1, \cdot)||_1 \ll \Omega(2^{-\mathbf{s}}). \tag{3.90}$$

Використовуючи останнє співвідношення, нескладно показати, що функція

$$f_2(\mathbf{x}) = C_{11}\frac{1}{N}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}}\Psi(\mathbf{x}),\ C_{11} > 0,$$

при відповідному значенні сталої $C_{11} > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\Omega}$.

Дійсно, згідно з (3.90) і (3.88) будемо мати

$$||f_2||_{MB_{1,\theta}^{\Omega}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f_2, \cdot)||_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_{11}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\mathbf{s}\in\bar{\Theta}(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f_1, \cdot)||_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\mathbf{s}\in\bar{\Theta}(N)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} = (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}}\,|\bar{\Theta}(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Таким чином, беручи до уваги (3.89) і (3.69), одержимо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\Omega})_1 \gg E_{Q(N)}(f_2)_1 = C_{11}\frac{1}{N}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} E_{Q(N)}(\Psi)_1 \gg$$

$$\gg \frac{1}{N}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}}\,|\Theta(N)| \asymp \frac{1}{N}(\log_2 N)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

5) $1 \le q < p \le 2$, $p < \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_3(\mathbf{x}) = C_{12}\frac{1}{N}(\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} u^{-d(1-\frac{1}{p})}\Psi(\mathbf{x}),\ C_{12} > 0.$$

Покажемо, що $f_3 \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$. Оскільки для ядра Фейєра однієї змінної має місце оцінка

$$||K_u(\tau)||_q \asymp u^{1-\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

то, використавши співвідношення (3.86), одержимо

$$||f_3||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s} > \mathbf{0}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f_3, \cdot)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} u^{-d(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \bar{\Theta}(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} (u^{1-\frac{1}{p}})^{d\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} N \left(\sum_{\mathbf{s} \in \bar{\Theta}(N)} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Як наслідок, враховуючи (3.89) і (3.87), будемо мати

$$E_{Q(N)}(f_3)_1 = C_{12} \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} u^{-d(1-\frac{1}{p})} E_{Q(N)}(\Psi)_1 \gg$$

$$\gg \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \left((\log_2 N)^{\frac{d-1}{d}} \right)^{-d(1-\frac{1}{p})} = \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}.$$

6) Якщо $1 \leq q < p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq p$, то встановлена вище оцінка зверху величини $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q$ не залежить від розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Тому шукану оцінку знизу досить одержати в одновимірному випадку, тобто при $d = 1$. Для цього варто повторити викладки, які використовувались при одержанні оцінки знизу величини $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q$ при $1 \leq q < p \leq 2$, $p < \theta < \infty$, за умови, що $d = 1$.

7) Нехай $1 < q < p \leq \infty$, $p \geq 2$. В цьому випадку в якості екстремальних функцій будемо брати розглянуті вище функції g_{Ω} і $f_{N,\theta}$ при $1 \leq \theta < 2$ та $2 \leq \theta < \infty$, відповідно. Покажемо, що при $p = \infty$ (випадок $1 < p < \infty$ розглянутий при встановленні оцінок знизу в 3) та 1) (див.

(3.83) і (3.79) відповідно)) $g_\Omega \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $f_{N,\theta} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta}$. Маємо

$$||g_\Omega||_{MB^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(g_\Omega, \cdot)||^{\theta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left((\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}))^{-\theta} \, (\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}))^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = 1,$$

$$||f_{N,\theta}||_{MB^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f_{N,\theta}, \cdot)||^{\theta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{-\theta} \, (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{\theta} ||A_{\mathbf{s}}(e^{i(\mathbf{k}^{\mathbf{s}},\mathbf{x})}, \cdot)||^{\theta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Тоді для $1 \le \theta < 2$, $2 \le p \le \infty$, аналогічно як і в (3.84) можна показати, що

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \gg ||g_\Omega||_q \asymp \frac{1}{N}.$$

Якщо ж $2 \le \theta < \infty$, $2 \le p \le \infty$, то, враховуючи (3.73), (3.80), теорему III.1, співвідношення (3.68) і (3.69), одержуємо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \ge \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,\theta})_q =$$

$$= ||f_{N,\theta}||_q \asymp \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}>\mathbf{0}} |\delta_{\mathbf{s}}(f_{\Omega,\theta}, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q =$$

$$= C_5 (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^2 |e^{i(\mathbf{k}_{\mathbf{s}},\cdot)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 3.8 доведено.

Припустимо, що функцію $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ задано формулою (3.14).

Беручи до уваги спеціальний вигляд функції $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$, що задана за допомогою (3.14), в якості апарата наближення будемо брати тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік з множини Q_n, заданої формулою (3.16), Зазначимо, що множина Q_n певним чином пов'язана з множиною $Q(N)$, про що більш детально буде сказано нижче.

Відомо (див., наприклад, [85],[88]), що підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з Q_n в багатьох випадках є оптимальним апаратом наближення для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, які одержуються з $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ при

$$\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r, \quad 0 < r < l.$$

Звернемо увагу, що число $n \in \mathbb{N}$, яке присутнє в означенні множини Q_n, згідно з (3.63)–(3.68), знаходиться зі співвідношення

$$\omega(2^{-n}) \asymp \frac{1}{N}. \tag{3.91}$$

Наведемо крім (3.91) ще одне співвідношення, яке пов'язує n та N і яке будемо використовувати нижче.

Оскільки $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$, то функція $\Omega(\mathbf{t})/\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{\alpha}$ є майже зростаючою за кожною змінною, а тому

$$\Omega(\mathbf{t}) = \frac{\Omega(\mathbf{t})}{\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{\alpha}} \prod_{j=1}^{d} t_j^{\alpha} \le C_{13}\, \Omega(1, \ldots, 1) \prod_{j=1}^{d} t_j^{\alpha}.$$

Іншими словами, знайдеться стала $C_{14} > 0$ така, що буде виконуватись нерівність

$$\Omega(\mathbf{t}) \le C_{14} \prod_{j=1}^{d} t_j^{\alpha}. \tag{3.92}$$

Як наслідок, згідно з нерівностями (3.85) і (3.92) можемо записати

$$C_9\, 2^{-l||\mathbf{s}||_1} \leq \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \leq C_{14}\, 2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1}. \tag{3.93}$$

Таким чином, беручи до уваги, що $s \in \Theta(N)$ і функція $\Omega(\mathbf{t})$ має вигляд (3.14), після елементарних перетворень з (3.67) і (3.93) одержимо

$$\log_2 N \asymp n. \tag{3.94}$$

Нарешті, скориставшись результатом теореми 3.8, внаслідок співвідношень (3.91) і (3.94) приходимо до такого твердження.

Теорема 3.9. *Нехай параметри p та q задовольняють умови теореми* 3.8, *а $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Тоді для $1 \leq \theta < \infty$ виконується порядкова рівність*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.95}$$

***Зауваження* 3.9.** *При виконанні умов теорем 3.8 та 3.9 (крім випадку $q = 1$) зі співвідношень (3.74) та (3.95), беручи до уваги (3.73), одержимо*

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \frac{1}{N}\,(\log_2 N)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.96}$$

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.97}$$

***Зауваження* 3.10.** *Оцінки (3.95) та (3.97) при деяких співвідношеннях між параметрами p та q встановлені раніше. А саме, при $1 < p = q < \infty$ — в роботі [191], а при $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$ — в роботі [120].*

***Зауваження* 3.11.** *Співвідношення, аналогічні до (3.74), (3.95)–(3.97) для випадку $\theta = \infty$, тобто коли $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\infty} = \mathbf{MH}^{\Omega}_p$, одержані М.М. Пустовойтовим в роботах [70, 71, 68].*

3.3.2. Колмогоровські поперечники класів $\mathrm{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. Наведемо позначення досліджуваних об'єктів, які в певних випадках збігаються з означеними в попередньому пункті. Спочатку розглянемо множини, в яких будуть міститись "номери" гармонік тригонометричних поліномів, які будемо використовувати для наближення функцій. Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, p, q, N) := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d : \ \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p-1/q)_+} \geq N^{-1}\},$$

$$Q(N) := Q(\Omega, p, q, N) := \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} \rho(\boldsymbol{s}). \tag{3.98}$$

Зазначимо, что множини $Q(N)$ породжуються поверхнями рівня функції

$$\Omega_1(\mathbf{t}) := \Omega(\mathbf{t}) / \prod_{j=1}^{d} t_j^{(1/p-1/q)_+}.$$

В тому випадку, коли $\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $(1/p - 1/q)_+ < r_j$, $j = 1, \ldots, d$, множини $Q(N)$ є східчастими гіперболічними хрестами. Множини $Q(N)$ будемо називати узагальненими східчастими гіперболічними хрестами.

Далі, позначимо

$$\kappa^{\perp}(N) := \mathbb{N}^d \setminus \kappa(N) = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d : \ \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p-1/q)_+} < N^{-1}\}, \tag{3.99}$$

$$Q^{\perp}(N) := \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \rho(\boldsymbol{s}),$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N) \setminus \kappa^{\perp}(2^l N). \tag{3.100}$$

З (3.99) та (3.100) одержуємо $(2^l N)^{-1} \leq \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p-1/q)_+} < N^{-1}$, тобто

$$\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p-1/q)_+} \asymp N^{-1}, \tag{3.101}$$

де $\boldsymbol{s} \in \Theta(N)$.

В [71] показано, що $\Theta(N) \neq \varnothing$ і

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{3.102}$$

де $|\mathcal{M}|$ — кількість елементів множини $\mathcal{M}$.

Тепер наведемо означення апроксимаційних характеристик, які будуть досліджуватися.

Покладемо

$$\mathcal{T}_{Q(N)} := \{t: \ t = \sum_{\mathbf{k} \in Q(N)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \ c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}\}.$$

Для $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, величина

$$E_{Q(N)}(f)_q := \inf_{t \in \mathcal{T}_{Q(N)}} ||f - t||_q \tag{3.103}$$

— найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами зі спектром з множини $Q(N)$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий клас функцій, то покладаємо

$$E_{Q(N)}(F)_q := \sup_{f \in F} E_{Q(N)}(f)_q. \tag{3.104}$$

Для $f \in L_q$ розглянемо суму Фур'є такого вигляду

$$S_{Q(N)}(f) := f * \mathcal{D}_{Q(N)},$$

де

$$\mathcal{D}_{Q(N)} := \sum_{\boldsymbol{k} \in Q(N)} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}.$$

Для $F \subset L_q$ визначимо величину

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(F)_q := \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q,$$

де

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q := ||f - S_{Q(N)}(f)||_q \tag{3.105}$$

— величина наближення функції $f \in L_q$ в метриці простору L_q сумою Фур'є $S_{Q(N)}(f)$.

Згідно з означеннями (3.103) та (3.105) величини $E_{Q(N)}(f)_q$ та $\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$ пов'язані нерівністю $E_{Q(N)}(f)_q \le \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$, $1 \le q \le \infty$, однак, насправді з теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі) при $1 < q < \infty$ випливає порядкове співвідношення (див., наприклад, [115; 73, гл. I, § 1.4])

$$E_{Q(N)}(f)_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q. \tag{3.106}$$

Зазначимо, що точні за порядком оцінки величин $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q$, зокрема, при $1 < q \le p < \infty$, були одержані в роботі [71] та теоремі 3.8 для класів $\mathbf{MH}^{\Omega}_p$ та $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, відповідно. Однак ідея, пов'язана з розглядом множин, які аналогічні до $Q(N)$, для побудови тригонометричних поліномів, напевно, бере початок з роботи [81]. В цій роботі А.С. Романюк, зокрема, розв'язував задачу про знаходження точних за порядком оцінок величин $E_{Q(N)}(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, $1 < p, q < \infty$, де класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ є узагальненням за гладкісним параметром класів $\mathbf{MW}^{r}_{\beta,p}$, а множина $Q(N)$ визначалась подібним чином через функцію (багатьох змінних) ψ. Встановлення порядкових оцінок величин (3.104) за певного вигляду множини $Q(N)$ для різноманітних класів функцій з мішаною гладкістю проводилось в роботах багатьох авторів (з більш детальною інформацією можна ознайомитись, наприклад, в монографіях [145, 73, 192]).

Наведемо декілька допоміжних тверджень, які потрібні в подальшому при доведенні результатів.

Лема III.2 [145, лема 3.1]. *Нехай $1 \le p < q < \infty$, тоді для $f \in L_p$ справджується таке співвідношення*

$$||f||_q^q \ll \sum_{\boldsymbol{s}} \left(||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1 (1/p - 1/q)} \right)^q. \tag{3.107}$$

Для $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $1 \le \theta < \infty$, має місце оцінка

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta})_\infty \ll N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}, \tag{3.108}$$

яка доводиться аналогічно до оцінки зверху в (3.74) у випадку $p = q = 1$.

Мають місце такі твердження.

Теорема 3.10. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, *а* $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/q}$, *де* $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді*

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega})_q \asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+}. \tag{3.109}$$

Метою наших подальших досліджень є обрунтування доцільності наближення класів $\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}$ сумами Фур'є $S_{Q(N)}(f)$ (або ж іншими тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із множини $Q(N)$). Для цього розв'яжемо задачу про знаходження порядкових оцінок колмогоровських поперечників $d_m(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$.

Теорема 3.11. *Якщо* $1 < p < 2$, $1 \leq \theta \leq 2$, $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/2}$, *а* $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, *то*

$$d_m(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}, L_2) \asymp N^{-1}, \tag{3.110}$$

де N *підібрано таким чином, щоб виконувалось співвідношення* $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.

Теорема 3.12. *Якщо* $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $q \neq \infty$, $1 \leq \theta \leq 2$ *або* $q = p = \infty$, $\theta = 1$, *а* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді*

$$d_m(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp N^{-1}, \tag{3.111}$$

де N *підібрано таким чином, щоб виконувалось співвідношення* $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp m$.

Перед тим як перейти до доведення одержаних результатів наведемо деякі коментарі.

Зауваження 3.12. *В теоремі 3.10 не розглядається випадок* $\theta = \infty$, *оскільки відповідний результат для класу* $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$ *одержується з [71, теорема 2] як наслідок.*

Зауваження 3.13. *У випадку, якщо функція* $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ *має ви-*

гляд (3.14), то для класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ *результати теорем 3.10–3.12 відомі, а саме, теореми 3.10 та 3.11 доведені в [191], а теорема 3.12 — в [120]* $(2 \le q \le p < \infty)$ *та в [44]* $(2 \le q < \infty,\ p = \infty)$.

***Зауваження* 3.14.** *У випадку* $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, *маємо* $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \equiv \mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ *і для класів* $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ *теореми 3.10 і 3.11 — доведені в [85], а теорема 3.12 — в [24]* $(p < \infty)$ *і [73, гл. IV, § 4.3]* $(p = \infty)$.

***Зауваження* 3.15.** *Нехай*

$$\Omega(\mathbf{t}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{d} t_j^r \,(\log_2 1/t_j)_+^{-b_j}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = 1, \dots, d, \\ \quad 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases} \tag{3.112}$$

де $(\log_2 1/t_j)_+ = \max\{1, \log_2 1/t_j\}$, $0 < r < l$, $b_j < r$, $j = 1, \dots, d$. *В [69, 66] М.М. Пустовойтовим встановлено, что при* $q < p$ *для* $|Q(\Omega, p, q, N)|$ *має місце співвідношення* $|Q(\Omega, p, q, N)| \asymp N^{1/r} (\log_2 N)^{-(b_1 + \dots + b_d)/r + d - 1}$, *де функція* $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ *задана формулою (3.112).*

В цьому випадку оцінка (3.111) при виконанні умов теореми 3.12 буде мати вигляд

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp m^{-r} (\log_2 m)^{r(d-1) - (b_1 + \dots + b_d)}. \tag{3.113}$$

Співвідношення (3.113) доповнює результати, які відносяться до оцінок величин $d_m(\mathbf{MH}^{\Omega}_p, L_q)$ *[67] у випадку, коли функція* $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ *задана формулою (3.112).*

Тепер перейдемо безпосередньо до доведення сформульованих вище тверджень.

***Доведення теореми* 3.10.** Наведемо спочатку в (3.109) доведення оцінки зверху. При цьому розглянемо декілька випадків в залежності від значень параметра θ.

Нехай $q < \theta < \infty$. Тоді скориставшись для $f \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ спочатку співвідношенням (3.107), а потім нерівністю Гельдера (з показником θ/q) та співвідношеннями (3.2), (3.76) для Ω_1, одержимо

$$E_{Q(N)}(f)_q \leq \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-q} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^q \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^{q\theta/(\theta-q)} \right)^{(\theta-q)/(\theta q)} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} N^{-1} |\Theta(N)|^{1/q-1/\theta} \leq N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)}. \qquad (3.114)$$

у випадку $\theta = q$ для $f \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,q}$ маємо

$$E_{Q(N)}(f)_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-q} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^q \right)^{1/q} \sup_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1/q)} \leq$$

$$\leq N^{-1} ||f||_{MB^{\Omega}_{p,q}} \leq N^{-1}. \qquad (3.115)$$

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, то, використовуючи вкладення

$$\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,1} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\infty}, \ 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \qquad (3.116)$$

та оцінку (3.115), одержуємо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \leq E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,q})_q \ll N^{-1}.$$

Таким чином, оцінку зверху в теоремі 3.10 встановлено.

Перейдемо до встановлення в (3.109) оцінки знизу, яке буде базуватися на побудові екстремальних функцій, які відповідають певним умовам.

Нехай спочатку $q \le \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{N,p,\theta} = C_3 |\Theta(N)|^{-1/\theta} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1)} \mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}, \ C_3 > 0,$$

де

$$\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})} = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{3.117}$$

Покажемо, що $f_{N,p,\theta} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ при певному виборі сталої $C_3 > 0$.

Дійсно, враховуючи (3.81), (3.117), одержимо

$$||f_{N,p,\theta}||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_{N,p,\theta})||_p^{\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= C_3 |\Theta(N)|^{-1/\theta} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1)\theta} ||\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}||_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp |\Theta(N)|^{-1/\theta} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 1 \right)^{1/\theta} = 1.$$

Далі покладемо $\Delta_{\boldsymbol{s}} = \{\mathbf{x} : 2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1}, j = 1, \ldots, d\}$. Зазначимо, що $\Delta_{\boldsymbol{s}} \cap \Delta_{\boldsymbol{s}'} = \varnothing$ при $\boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{s}'$. Тоді, беручи до уваги, що $S_{Q(N)}(f_{N,p,\theta}) = 0$, внаслідок (3.106) і теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі), будемо мати

$$E_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,q,\theta})_q = ||f_{N,q,\theta}||_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f_{N,q,\theta}, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \gg \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} \int\limits_{\Delta_{\boldsymbol{s}}} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f_{N,q,\theta}, \mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \right)^{1/q} =$$

$$= C_3 |\Theta(N)|^{-1/\theta} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1)} \right)^q \int\limits_{\Delta_{\boldsymbol{s}}} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q}. \tag{3.118}$$

Оскільки (див., наприклад, [145; 73, гл. 1, § 1.4; 85])

$$\int\limits_{\Delta_{\boldsymbol{s}}} \left| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right|^q d\mathbf{x} \gg 2^{||\boldsymbol{s}||_1(q-1)},$$

то з (3.118), (3.101) і (3.102), знаходимо

$$E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta})_q \gg |\Theta(N)|^{-1/\theta} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\, 2^{||\boldsymbol{s}||_1(1/p-1/q)} \Big)^q \Bigg)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

У випадку $1 \leq \theta < q$ розглянемо функцію

$$g_{\Omega} = C_4 \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\, 2^{||\tilde{\boldsymbol{s}}||_1(1/p-1)} \mathcal{D}_{\rho(\tilde{\boldsymbol{s}})},\ C_4 > 0,$$

де $\tilde{\boldsymbol{s}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_d) \in \Theta(N)$, а

$$||g_{\Omega}||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}>\mathbf{0}} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(g_{\Omega})||_p^{\theta} \Bigg)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{||\tilde{\boldsymbol{s}}||_1(1/p-1)} ||\mathcal{D}_{\rho(\tilde{\boldsymbol{s}})}||_p \asymp 1, \tag{3.119}$$

тому $g_{\Omega} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ при відповідному значенні сталої $C_4 > 0$.

Враховуючи співвідношення (3.106), (3.81), (3.101) й те, що $S_{Q(N)}(g_{\Omega}) = 0$, одержимо

$$E_{Q(N)}(g_{\Omega})_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(g_{\Omega})_q = ||g_{\Omega}||_p = C_4\, \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\, 2^{||\tilde{\boldsymbol{s}}||_1(1/p-1)} ||\mathcal{D}_{\rho(\tilde{\boldsymbol{s}})}||_q \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\, 2^{||\tilde{\boldsymbol{s}}||_1(1/p-1/q)} \asymp N^{-1}. \tag{3.120}$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 3.10 доведено.

***Доведення теореми* 3.11.** Оцінка зверху в (3.110) випливає з (3.109) при $q = 2$ та при N, що задовольняє співвідношення $|Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m$.

Перейдемо тепер до оцінок знизу, при встановленні яких будемо використовувати метод, який розроблений В.М. Темляковим [145] при одержанні порядкової оцінки знизу величини $d_m(\mathbf{MW}^r_{\beta,p}, L_q)$.

Нехай $\mathcal{P}_{Q(N)}$ — оператор ортогонального проектування на $\mathcal{T}_{Q(N)}$, тоді для $f \in L_2$ має місце оцінка $||\mathcal{P}_{Q(N)} f||_2 \leq ||f||_2$, внаслідок якої для $t \in \mathcal{T}_{Q(N)}$ одержуємо

$$||t - \mathcal{P}_{Q(N)} f||_2 = ||\mathcal{P}_{Q(N)}(t - f)||_2 \leq ||t - f||_2. \tag{3.121}$$

З нерівності $d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \geq d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2)$, яка випливає з означення колмогоровського поперечника, та (3.121) одержуємо

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \gg d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}). \tag{3.122}$$

За заданим числом m підберемо N таким чином, щоб виконувались співвідношення

$$|Q(\Omega, p, 2, N)| = K > 2m \quad \text{та} \quad |Q(\Omega, p, 2, N)| \asymp m. \tag{3.123}$$

Нехай $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{T}_{Q(N)}$ — m-вимірний лінійний підпростір, що породжений ортонормованою системою функцій $\{\varphi_j(\boldsymbol{\tau})\}_{j=1}^m$. Доповнимо цю систему до повної ортонормованої системи в $\mathcal{T}_{Q(N)}$ функціями $\varphi_{m+1}(\boldsymbol{\tau}), \ldots, \varphi_K(\boldsymbol{\tau})$.

Розглянемо для деякого $\mathbf{k} \in Q(N)$ функцію $e^{i(\mathbf{k},\boldsymbol{\tau})}$ і запишемо її розвинення за системою $\{\varphi_j(\boldsymbol{\tau})\}_{j=1}^K$, тобто

$$e_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau}) := e^{i(\mathbf{k},\boldsymbol{\tau})} = \sum_{j=1}^{K} \alpha^j_{\mathbf{k}} \varphi_j(\boldsymbol{\tau}),$$

де $\alpha^j_{\mathbf{k}}$ — коефіцієнти розкладу.

Зазначимо, що оскільки системи $\{\varphi_j(\boldsymbol{\tau})\}_{j=1}^K$ і $\{e_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})\}_{\mathbf{k}\in Q(N)}$ ортонормовані, то

$$\sum_{\mathbf{k}\in Q(N)} |\alpha^j_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{j=1}^{K} |\alpha^j_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \tag{3.124}$$

Для наближення $e_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})$ її m-ю сумою Фур'є в просторі L_2 мають місце рівності

$$||e_{\mathbf{k}}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\mathbf{k}}^{j} \varphi_j(\cdot)||_2^2 = ||\sum_{j=m+1}^{K} \alpha_{\mathbf{k}}^{j} \varphi_j(\cdot)||_2^2 = \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_{\mathbf{k}}^{j}|^2$$

і, внаслідок (3.124) і (3.123), одержуємо

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q(N)} ||e_{\mathbf{k}}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\mathbf{k}}^{j} \varphi_j(\cdot)||_2^2 = \sum_{\mathbf{k}\in Q(N)} \sum_{j=1}^{K} |\alpha_{\mathbf{k}}^{j}|^2 - \sum_{\mathbf{k}\in Q(N)} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{\mathbf{k}}^{j}|^2 =$$

$$= K - m \geq K/2 \asymp \sum_{\boldsymbol{s}\in \kappa(N)} 2^{||\boldsymbol{s}||_1}/2. \tag{3.125}$$

З (3.125) можна зробити висновок про існування вектора $\boldsymbol{s}^0 \in \kappa(N)$, для якого

$$\sum_{\mathbf{k}\in \rho(\boldsymbol{s}^0)} \left\| e_{\mathbf{k}}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\mathbf{k}}^{j} \varphi_j(\cdot) \right\|_2^2 = \sum_{\mathbf{k}\in \rho(\boldsymbol{s}^0)} \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_{\mathbf{k}}^{j}|^2 \geq 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1}/2. \tag{3.126}$$

Розглянемо функцію

$$g(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k}\in \rho(\boldsymbol{s}^0)} e_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau}), \quad \boldsymbol{s}^0 \in \kappa(N).$$

Згідно з (3.2), одержимо

$$||g||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0}))^{-1} ||\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s}^0)}||_p \asymp (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0}))^{-1} 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1(1-1/p)},$$

тому $g_{\Omega,\theta} = C_5\, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0})\, 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1(1/p-1)} g \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ для деякого значення сталої $C_5 > 0$.

На завершення розглянемо наближення функції $g(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{y})$ її m-ю сумою Фур'є (позначимо її через $S_m(g(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{y}), \varphi_j)$) за системою $\{\varphi_j(\boldsymbol{\tau})\}_{j=1}^{K}$. Беручи до уваги рівності

$$g(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{y}) - S_m(g(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{y}), \varphi_j) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s}^0)} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \sum_{j=1}^{K} \alpha_{\mathbf{k}}^{j}\varphi_j(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s}^0)} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\boldsymbol{s}}^{j}\varphi_j(\boldsymbol{\tau}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s}^0)} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \sum_{j=m+1}^{K} \alpha_{\mathbf{k}}^{j}\varphi_j(\boldsymbol{\tau}),$$

можемо записати

$$||g(\cdot+\mathbf{y}) - S_m(g(\cdot+\mathbf{y}),\varphi_j)||_2^2 = \sum_{j=m+1}^{K} \Bigg| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s}^0)} \alpha_{\mathbf{k}}^{j} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \Bigg|^2.$$

Звідси, враховуючи (3.126), одержуємо

$$(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} ||g(\cdot+\mathbf{y}) - S_m(g(\cdot+\mathbf{y}),\varphi_j)||_2^2\, d\mathbf{y} =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\boldsymbol{s}^0)} \sum_{j=m+1}^{K} |\alpha_{\mathbf{k}}^{j}|^2 \geq 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1}/2. \tag{3.127}$$

З (3.127) слідує існування такого $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{T}^d$, що для $g_{\Omega,\theta} \in \mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}$ має місце нерівність

$$||g_{\Omega,\theta}(\cdot+\mathbf{y}_0) - S_m(g_{\Omega,\theta}(\cdot+\mathbf{y}_0),\varphi_j)||_2 \geq \sqrt{C_5/2}\,\Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0})\, 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1(1/p-1/2)}.$$

Внаслідок (3.122) та останньої нерівності маємо потрібну оцінку знизу

$$d_m(\mathbf{MB}_{p,\theta}^{\Omega}, L_2) \gg \Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0})\, 2^{||\boldsymbol{s}^0||_1(1/p-1/2)} \geq N^{-1}.$$

Теорему 3.11 доведено.

***Доведення теореми* 3.12.** Оцінка зверху в (3.111) випливає з теореми 3.8 та оцінки (3.108) при N, що задовольняє співвідношення $|Q(\Omega,p,q,N)| \asymp m$.

Перейдемо до доведення оцінки знизу. Як і в попередній теоремі, за заданим числом m підберемо N таким чином, щоб виконувались співвідношення

$$|Q(\Omega, p, q, N)| = K > 2m \quad \text{і} \quad |Q(\Omega, p, q, N)| \asymp m. \tag{3.128}$$

Оскільки при $2 \le q \le p \le \infty$ маємо $Q(\Omega, p, q, N) \equiv Q(\Omega, \infty, 2, N)$, а права частина (3.111) від p, q і θ не залежить, то досить встановити оцінку знизу величини $d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1}, L_2)$, так як при вказаних в умові теореми значеннях p, q і θ мають місце такі нерівності (внаслідок (3.116) та монотонності L_q-норми):

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_2) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_2) \ge d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1}, L_2). \tag{3.129}$$

Подальші міркування будемо проводити за модифікованою схемою доведення попередньої теореми.

На основі (3.129) і (3.122) одержуємо

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}). \tag{3.130}$$

З (3.126) робимо висновок про існування такого вектора $\mathbf{k}^0 \in \rho(\boldsymbol{s}^0)$ ($\boldsymbol{s}^0 \in \kappa(N)$), для якого має місце нерівність

$$\left\| e_{\mathbf{k}^0}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \alpha^j_{\mathbf{k}^0} \varphi_j(\cdot) \right\|_2^2 \ge 1/2. \tag{3.131}$$

Розглянемо функцію $g_{N,\Omega}(\boldsymbol{\tau}) = C_6 \Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0}) e_{\mathbf{k}^0}(\boldsymbol{\tau})$, де $\mathbf{k}^0 \in \rho(\boldsymbol{s}^0)$, $\boldsymbol{s}^0 \in \kappa(N)$. Використовуючи (3.5), нескладно переконатися, що $g_{N,\Omega} \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1}$ при деякому значенні сталої $C_6 > 0$.

Далі, розмірковуючи як і при доведенні теореми 3.11, але з функцією $g_{N,\Omega}$ замість $g_{\Omega,\theta}$, та беручи до уваги нерівність (3.131), одержимо

$$d_m(\mathbf{MB}^{\Omega}_{\infty,1} \cap \mathcal{T}_{Q(N)}, L_2 \cap \mathcal{T}_{Q(N)}) \gg \Omega(2^{-\boldsymbol{s}^0}) \ge N^{-1}. \tag{3.132}$$

Порівнюючи (3.130) і (3.132), приходимо до потрібної оцінки знизу.

Теорему 3.12 доведено.

3.3.3. Наближення класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ у рівномірній метриці.

Покладемо

$$\mathcal{V}_{Q(N)}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}:\, \boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa(N)} A_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}),$$

$$V_{Q(N)}(f) = f * \mathcal{V}_{Q(N)}(\mathbf{x}).$$

$\mathcal{V}_{Q(N)}$ є аналогом ядра Валле Пуссена, а $V_{Q(N)}(f)$ — аналогом суми Валле Пуссена функції f (з "номерами" гармонік з множини $Q(N)$, яка задана формулою (3.98)).

Справедливе таке твердження.

Теорема 3.13. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) \cdot \prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p}$, *де* $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$, $l > [\frac{1}{p}]$, *тоді*

$$\sup_{f\in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}} ||f - V_{Q(N)}(f)||_\infty \asymp N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{3.133}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху в (3.133). Нехай $1 \le \theta < \infty$, тоді, застосовуючи нерівності Мінковського, різних метрик Нікольського, Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), одержимо

$$||f - V_{Q(N)(f)}||_\infty = \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} A_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_\infty \le \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} ||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} ||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, 2^{\frac{||\boldsymbol{s}||_1}{p}} = \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-1} ||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{\frac{||\boldsymbol{s}||_1}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} ||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{\frac{||\boldsymbol{s}||_1}{p}}\Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} N^{-1} |\Theta(N)|^{1-1/\theta} \ll N^{-1}(\log_2 N)^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{3.134}$$

Для випадку $\theta = \infty$, аналогічно як і в (3.134), маємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_\infty \ll \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{-1} ||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1/p} \le$$

$$\le \sup_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} \frac{||A_{\boldsymbol{s}}(f)||_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \sum_{\boldsymbol{s}-\mathbf{1}\in\kappa^\perp(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{||\boldsymbol{s}||_1/p} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} N^{-1} |\Theta(N)| \ll N^{-1} (\log_2 N)^{d-1}. \tag{3.135}$$

Виходячи з (3.134) та (3.135) робимо висновок, що оцінку зверху в (3.133) встановлено.

Перейдемо тепер до одержання в (3.133) відповідної оцінки знизу, яка буде досягатись на екстремальній функції, що побудована на основі “блоків” $A_{\boldsymbol{s}}$.

Покажемо, що на функції

$$g(\mathbf{x}, N) = C_1 |\Theta(N)|^{-1/\theta} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-1/p)} A_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x})$$

при певному значенні $C_1 > 0$ реалізується нижня оцінка в (3.133).

Переконаємось в тому, що $g(\cdot, N) \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ при певному значенні сталої $C_1 > 0$. Дійсно, враховуючи особливості функції Ω та “блоків” $A_{\boldsymbol{s}}$, нерівність для згортки, одержимо

$$||g(\cdot, N)||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp C_1 |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}':||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty \le 1} (\Omega(2^{-\mathbf{s}'}))^{-\theta} \times$$

$$\times \left\| \left(A_{\boldsymbol{s}'} * \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \, 2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})} A_{\boldsymbol{s}} \right) \right) \right\|_p^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_1 |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}':||s'-s||_\infty \le 1 \\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}'}))^{-\theta} \times$$

$$\times\left\|\left(A_{\boldsymbol{s}'} * \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s}\in\Theta(N)\\ ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})}A_{\boldsymbol{s}}\right)\right)\right\|_p^\theta\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le C_1|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1\\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}'}))^{-\theta}\times$$

$$\times\left(\|A_{\boldsymbol{s}'}\|_1 \sum_{\substack{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s}\in\Theta(N)\\ ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\boldsymbol{s}}\|_p\right)^\theta\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1\\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} \left(\|A_{\boldsymbol{s}'}\|_1 \sum_{\substack{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s}\in\Theta(N)\\ ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1}} 2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\boldsymbol{s}}\|_p\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1\\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s}\in\Theta(N)\\ ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1}} 1\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1\\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} 3^{d\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{j=-d}^{d}\sum_{\boldsymbol{s}'\in\Theta(2^{lj}N)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{j=-d}^{d}|\Theta(2^{lj}N)|\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1. \tag{3.136}$$

У випадку $\theta=\infty$, аналогічно, як і в (3.136), маємо

$$||g(\cdot,N)||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1} \frac{\left\|\left(A_{\boldsymbol{s}'} * \left(\sum\limits_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})}A_{\boldsymbol{s}}\right)\right)\right\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}'})} \ll$$

$$\ll \sup_{\substack{\boldsymbol{s}'\colon ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1\\ \boldsymbol{s}\in\Theta(N)}} \left(\|A_{\boldsymbol{s}'}\|_1 \sum_{\substack{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s}\in\Theta(N)\\ ||\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}||_\infty\le 1}} 2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-\frac{1}{p})}\|A_{\boldsymbol{s}}\|_p\right) \ll$$

$$\ll \sup_{\substack{s': ||s'-s||_\infty \le 1 \\ s \in \Theta(N)}} \left(\|A_{s'}\|_1 \sum_{\substack{s:\, s\in\Theta(N) \\ ||s'-s||_\infty \le 1}} 1 \right) \ll \sup_{\substack{s': ||s'-s||_\infty \le 1 \\ s \in \Theta(N)}} \|A_{s'}\|_1 \ll 1. \qquad (3.137)$$

На основі (3.136) та (3.137) робимо висновок, що $g(\cdot, N) \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, при деякому значенні $C_1 > 0$.

Покажемо, що нижня оцінка в (3.133) реалізується на екстремальній функції $g(\cdot, 2^{ld}N) \in \mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$. Дійсно, враховуючи, що $V_{Q(N)}(g(\cdot, 2^{ld}N)) = 0$, маємо

$$||g(\cdot, 2^{ld}N) - V_{Q(N)}(g(\cdot, 2^{ld}N))||_\infty = ||g(\cdot, 2^{ld}N)||_\infty \asymp$$

$$\asymp |\Theta(2^{ld}N)|^{-\frac{1}{\theta}} \left\| \sum_{s \in \Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-s}) 2^{-||s||_1 (1-\frac{1}{p})} A_s \right\|_\infty \ge$$

$$\ge |\Theta(2^{ld}N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{s \in \Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-s}) 2^{-||s||_1 (1-\frac{1}{p})} A_s(0) \asymp$$

$$\asymp |\Theta(2^{ld}N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{s \in \Theta(2^{ld}N)} \Omega(2^{-s}) 2^{||s||_1/p} \asymp$$

$$\asymp (2^{ld}N)^{-1} |\Theta(2^{ld}N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{s \in \Theta(2^{ld}N)} 1 \asymp N^{-1} (\log_2 N)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінку знизу в (3.133) встановлено.

Теорему 3.13 доведено.

3.4. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $\mathrm{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів

3.4.1. Найкраще наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $\mathrm{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ у метриці простору L_q при $1 \le p < q < \infty$

Перейдемо до розгляду гладкісних функцій $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$, що мають більш загальний, ніж (3.14), вигляд.

Нехай координати вектора $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ впорядковані за незростанням, тобто впорядковані таким чином

$$1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \dots \le \gamma_d.$$

Розглянемо функцію типу мішаного модуля неперервності порядку l такого вигляду:

$$\Omega(\mathbf{t}) = \omega\biggl(\prod_{j=1}^{d} t_j^{\gamma_j}\biggr), \tag{3.138}$$

де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$.

Зазначимо, що функція (3.138) по змінних t_j при $j > \nu$ є модулем неперервності більш високого, ніж l порядку. А саме, вона є модулем неперервності порядку $l\gamma_j$ по змінній t_j, $j > \nu$, якщо $l\gamma_j$ — ціле число, і модулем неперервності порядку $[l\gamma_j] + 1$, якщо $l\gamma_j$ — не є цілим числом.

Оскільки $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, то функція $\omega(\tau)$ задовольняє умови (S^α) і (S_l). В цьому випадку функція $\Omega(\mathbf{t})$ з (3.138) буде також задовольняти умову (S^α). Проте не можна гарантувати того, що функція (3.138) задовольняє умову (S_l). Але можна стверджувати, що функція (3.138) задовольняє умову (S_l) по змінних t_j, $j > \nu$, де

$$l_j = \begin{cases} l\gamma_j, , & \text{якщо } \ l\gamma_j \ \text{— ціле число,} \\ [l\gamma_j] + 1, & \text{якщо } \ [l\gamma_j] + 1 \ \text{— не ціле число,} \end{cases} \tag{3.139}$$

Клас функцій $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$, що визначається функцією (3.138) позначатимемо через $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$, тобто вважатимемо, що

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}) := \{f \in L^0_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \leq 1\}, \tag{3.140}$$

де

$$||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f, \mathbf{t})_p}{\omega(\prod_{j=1}^d t_j^{\gamma_j})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3.141}$$

причому при означенні $\Omega_l(f, t)_p$, беруться різниці порядку l_j по змінних x_j, а числа l_j визначені рівністю (3.139).

Відповідне (3.141) декомпозиційне зображення норми функцій класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$,$\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, враховуючи (3.138), матиме вигляд

$$||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \asymp \left\{ \sum_{\mathbf{s}} \omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)||_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.142}$$

згідно з (3.2).

При

$$\Omega(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}, \quad r_j = r\gamma_j, \quad 0 < r < l, \tag{3.143}$$

або ж при $\omega(\tau) = \tau^r$ (в (3.138)) класи $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ співпадають з класами Бєсова $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з нерівномірною (анізотропною) мішаною гладкістю, декомпозиційне зображення норм яких встановлено в роботі [47].

Поверхнями рівня функції (3.138) є множини

$$Q_n^{\boldsymbol{\gamma}} = \bigcup_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \leq n} \rho(\mathbf{s}).$$

Відомо (див., наприклад, [145, гл. III], [73, гл. IV]), що підпростори тригонометричних поліномів зі спектром із $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$ в ряді випадків є оптимальними в сенсі точних за порядком оцінок наближення анізотропних (за гладкісним параметром) класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю за допомогою довільних лінійних підпросторів (тобто в задачах про колмогоровський поперечник).

Через $E_{Q_n^\gamma}(f)$ будемо позначати найкращі наближення функції f тригонометричними поліномами зі спектром з множини Q_n^γ. Якщо F — деякий функціональний клас, то

$$E_{Q_n^\gamma}(F) = \sup_{f \in F} E_{Q_n^\gamma}(f)$$

— позначає найкраще наближення класу F тригонометричними поліномами зі спектром із множини Q_n^γ.

Нехай далі

$$S_{Q_n^\gamma}(f, \mathbf{x}) := \sum_{(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) \le n} \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})$$

— східчасто–гіперболічна сума Фур'є функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$. Величину

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_q := ||f - S_{Q_n^\gamma}(f)||_q$$

називають наближенням функції f за допомогою східчасто–гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n^\gamma}(f)$ в метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$. Для $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(F)_q := \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_q.$$

Теорема 3.14. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha, l}$ *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *тоді*

$$E_{Q_n^\gamma}(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} n^{(\nu - 1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{3.144}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху, скориставшись деякими положеннями з роботи [85]. Нехай $f \in \mathbf{MB}^\omega_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$. Тоді, застосувавши лему III.2, можемо записати

$$||f - S_n^{\gamma}(f)||_q = \Big\| \sum_{(\mathbf{s},\gamma)\geq n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{(\mathbf{s},\gamma)\geq n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^q \, 2^{q||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Bigg)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{(\mathbf{s},\gamma)\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\gamma)})^{-q} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^q \, \omega(2^{-(\mathbf{s},\gamma)})^q \, 2^{q||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Bigg)^{\frac{1}{q}} =: J_1. \qquad (3.145)$$

Для продовження оцінки (3.145) розглянемо два випадки: 1) $q < \theta < \infty$; 2) $1 \leq \theta \leq q$.

1) Нехай $\theta > q$. Оскільки згідно з умовою теореми функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то при $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) \geq n$ виконується нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\gamma)})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\gamma)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}. \qquad (3.146)$$

В [145, с. 11] показано, що

$$\sum_{(\mathbf{s},\gamma')\geq n} 2^{-\zeta(\mathbf{s},\gamma)} \asymp 2^{-\zeta n} n^{\nu-1}, \quad \zeta > 0, \qquad (3.147)$$

де $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, а $\gamma'_j = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu + 1, \ldots, d$.

Тоді, застосувавши до J_1 нерівність Гельдера з показником θ/q, будемо мати

$$J_1 \ll \Bigg(\sum_{(\mathbf{s},\gamma)\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\gamma)})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{(\mathbf{s},\gamma)\geq n} \left(\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\gamma)})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\gamma)}} \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\gamma)-||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))\frac{q\theta}{\theta-q}} \Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) - ||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} =: J_2.$$

Далі, поклавши $\tilde{\gamma}_j = (\alpha\gamma_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})/(\alpha\gamma_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})$, будемо мати $\gamma_j < \tilde{\gamma}_j$ при $j = \nu + 1, \ldots, d$, і, скориставшись співвідношеннями (3.147) та (3.140), продовжимо попередню оцінку величини J_2:

$$J_2 = ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})(\mathbf{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.148)$$

2) Якщо ж $1 \leq \theta < q$, то, використовуючи (2.96), а також (3.146) та (3.140), для J_1 можемо записати

$$J_1 \leq \sup_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} \left(\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) - ||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f,\cdot)||_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sup_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) - ||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \leq$$

$$\leq \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-(\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))n} ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \leq \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \qquad (3.149)$$

Об'єднуючи (3.148) і (3.149), одержуємо в (3.144) оцінку зверху.

Оцінки знизу проводяться аналогічно, як і в роботі [191].

Теорему 3.14 доведено.

Зауваження 3.16. *В теоремі 3.14 не враховано випадок $\theta = \infty$, оскільки він розглянутий в роботі [68] і одержується з (3.144) формаль-*

ною заміною $\frac{1}{\theta}$ *на* 0.

Зауваження 3.17. *Якщо* $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 1/p - 1/q$, *то в (3.144) міститься відповідний результат для класів* $\mathbf{MB}^{\mathbf{r}}_{p,\theta}$, *який встановлений А.С. Романюком в [85].*

Зауваження 3.18. *Якщо в (3.138) покладемо* $\gamma_j = 1$, $j = 1, \dots, d$, *то одержимо функцію* $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ *вигляду (3.14). В цьому випадку доведена теорема містить оцінку*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

яку встановлено раніше в [191].

Наведемо деякі додаткові позначення. Нехай

$$\rho^+(\mathbf{s}) := \rho(\mathbf{s}) \bigcap \mathbb{N}^d,$$

де $\rho(\mathbf{s})$ задано формулою (3.1), а

$$\rho^{\varepsilon}(\mathbf{s}) := \rho(\mathbf{s}) \bigcap \prod_{j=1}^{d} \varepsilon_j \mathbb{N}$$

для $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, d$, де $\varepsilon_j \mathbb{N} := \mathbb{N}$, якщо $\varepsilon_j = 1$, і $\varepsilon_j \mathbb{N} := \{-1, -2, \dots\}$, якщо $\varepsilon_j = -1$, $j = 1, \dots, d$.

Для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\delta^+_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \rho^+(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

$$\delta^{\varepsilon}_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \rho^{\varepsilon}(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}.$$

Теорема 3.15. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, *а функція* Ω *визначається рівністю* (3.138), *причому функція* $\omega(\tau)$ *типу модуля неперервності порядку* l *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, *а також* *умову* (S_l), *тоді*

$$E_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \quad (3.150)$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Нехай $f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$. Скориставшись лемою III.2 та нерівністю різних метрик Нікольського, одержимо при деякому $1 < q_0 < q$

$$||f - S_n^{\gamma}(f)||_q = \left\| \sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \geq n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \geq n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_{q_0}^q 2^{q||\mathbf{s}||_1 (\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \geq n} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_{q_0}^q 2^{q||\mathbf{s}||_1 (\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \geq n} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_1^q 2^{q||\mathbf{s}||_1 (1 - \frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} =: J_1. \quad (3.151)$$

Нехай $\theta \geq q$. Оскільки згідно з умовою теореми функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, то при $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) \geq n$ виконується нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}. \quad (3.152)$$

В [145, с. 11] показано, що

$$\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}) \geq n} 2^{-\zeta(\mathbf{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})} \asymp 2^{-\zeta n} n^{\nu-1}, \quad \zeta > 0, \quad (3.153)$$

де $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_d)$, а $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j = 1$, $j = 1, \ldots, \nu$, і $1 < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j$, $j = \nu + 1, \ldots, d$.

Тоді, застосувавши до J_1 з (3.151) нерівність Гельдера з показником

$\theta/q \geq 1$ і врахувавши (3.146), (3.147), будемо мати

$$J_1 = \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} (\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}))^{-q} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_1^q \, (\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}))^q 2^{q||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} \left(\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{q}))\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} (\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}))^{-\theta} ||A_{\mathbf{s}}(f)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})-||\overline{s}||_1(1-\frac{1}{q}))\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} ||f||_{MB^{\omega}_{1,\theta}(\boldsymbol{\gamma})} \leq$$

$$\leq \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{q}))\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n} 2^{-(\alpha-1+\frac{1}{q})(\mathbf{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_d)$, $\tilde{\gamma}_j = (\alpha\gamma_j - 1 + \frac{1}{q})/(\alpha - 1 + \frac{1}{q})$, $j = 1, \ldots, d$, при цьому, як бачимо, $\gamma_j < \tilde{\gamma}_j$ при $j = \nu + 1, \ldots, d$.

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, то, використовуючи вкладення

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,1}(\boldsymbol{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_1}(\boldsymbol{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta_2}(\boldsymbol{\gamma}) \subset \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\infty}(\boldsymbol{\gamma}), \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

і встановлену вище оцінку зверху для $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,q}(\boldsymbol{\gamma}))_q$, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_q \leq \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,q}(\boldsymbol{\gamma}))_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, оцінку зверху в (3.150) встановлено.

Для доведення в (3.150) оцінки знизу (для випадку $q \leq \theta < \infty$) покажемо, що ця оцінка реалізується на функції

$$f_1(\mathbf{x}) = C_4\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad C_4>0.$$

Спочатку переконаємось в тому, що $f_1 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_4>0$. Дійсно, використовуючи відповідну нерівність для згортки та враховуючи той факт, що $||A_{\mathbf{s}}||_1 \ll 1$ та (3.34) будемо мати

$$||f_1||_{MB^{\omega}_{1,\theta}} \asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}\Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}'||_1})\Big)^{-\theta}\times$$

$$\times\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'} * \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'} * \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}\Bigg\|\Bigg(A_{\mathbf{s}'} * \Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ ||\mathbf{s}||_1=n+1}} A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}||A_{\mathbf{s}'}||_1^{\theta}\Bigg\|\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ ||\mathbf{s}||_1=n+1}} A_{\mathbf{s}}\Bigg\|_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}||A_{\mathbf{s}'}||_1^{\theta}\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ ||\mathbf{s}||_1=n+1}} ||A_{\mathbf{s}}||_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{\mathbf{s}':\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1}||A_{\mathbf{s}'}||_1^{\theta}\sum_{\substack{\mathbf{s}:\,||\mathbf{s}'-\mathbf{s}||_\infty\le 1\\ ||\mathbf{s}||_1=n+1}} 1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{n+1-d\le||\mathbf{s}'||_1\le n+1+d}||A_{\mathbf{s}'}||_1^{\theta}\,3^d\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{n+1-d\le||\mathbf{s}'||_1\le n+1+d}1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}=n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{j=n+1-d}^{n+1+d}\sum_{||\mathbf{s}'||_1=j}1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\asymp 1.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу для величини $\mathcal{E}_{Q_n^{\mathbf{1}}}(f_1)_q$. Для $\mathbf{s}\in\mathbb{N}^d$ покладемо

$$\square_{2^{-\mathbf{s}}}:=\Big\{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d):2^{-s_j}\le x_j<2^{-s_j+1},j=1,\ldots,d\Big\}$$

і зауважимо, що $\square_{2^{-\mathbf{s}}}\cap\square_{2^{-\mathbf{s}'}}=\varnothing$ при $\mathbf{s}\neq\mathbf{s}'$. Тоді, взявши до уваги, що $S_{Q_n^{\mathbf{1}}}(f_1)=0$, і скориставшись теоремою Літтлвуда–Пелі, а також (3.34), можемо записати (аналогічно, як і в [145, гл. II, § 2] або [73, гл. I, § 1.4])

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\mathbf{1}}}(f_1)_q=||f_1||_q\asymp\Bigg\|\Bigg(\sum_{n+1\le||\mathbf{s}'||_1\le n+d+1}\ \sum_{||\boldsymbol{\varepsilon}||_1=d}|\delta_{\mathbf{s}'}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(f_1)|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_q\ge$$

$$\ge\Bigg\|\Bigg(\sum_{n+1\le||\mathbf{s}'||_1\le n+d+1}|\delta_{\mathbf{s}'}^{+}(f_1)|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_q\gg$$

$$\gg\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg\|\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}'||_1=n+1}\Bigg|\delta_{\mathbf{s}'}^{+}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_q\gg$$

$$\gg\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}'||_1=n+1}\ \int\limits_{\square_{2^{-\mathbf{s}'}}}\Bigg|\delta_{\mathbf{s}'}^{+}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}A_{\mathbf{s}}\Bigg)\Bigg|^q d\mathbf{x}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\ge$$

$$\ge\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}\ \int\limits_{\square_{2^{-\mathbf{s}}}}\Bigg|\prod_{j=1}^{d}\sum_{k_j=2^{s_j-1}+1}^{2^{s_j}-1}\Bigg(\frac{k_j}{2^{s_j-1}}-1\Bigg)\sin k_jx_j\Bigg|^q d\mathbf{x}\Bigg)^{\frac{1}{q}}>$$

$$>\frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}\ \prod_{j=1}^{d}2^{-s_j}\Bigg(\sin\frac{1}{2}\sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}\Bigg(\frac{k_j}{2^{s_j-1}}-1\Bigg)\Bigg)^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\asymp$$

$$\asymp\frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}\ \prod_{j=1}^{d}2^{s_j(q-1)}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\asymp\frac{\omega(2^{-n})}{n^{\frac{d-1}{\theta}}}2^{n(1-\frac{1}{q})}\Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1}1\Bigg)^{\frac{1}{q}}\asymp$$

$$\asymp\omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.154)$$

Таким чином, оцінка знизу в (3.150) для випадку $q \le \theta < \infty$ встановлена.

Зазначимо, що оцінка знизу величини $\mathcal{E}_{Q_n^{\mathbf{1}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q$ для випадку $1 \le \theta < q$ реалізується на функції

$$f_2(\mathbf{x}) = C_5 \omega(2^{-n}) A_{\mathbf{s}_*}(\mathbf{x}), \quad C_5 > 0,$$

де $\mathbf{s}_* : ||\mathbf{s}_*||_1 = n+1$. Переконаємось в тому, що $f_2 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ при деякому значенні сталої $C_5 > 0$. Дійсно, використовуючи відповідну нерівність для згортки, подібно як і при оцінці $||f_1||_{MB^{\omega}_{1,\theta}}$, будемо мати

$$||f_2||_{MB^{\omega}_{1,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) \Bigg(\sum_{\mathbf{s}' :\, ||\mathbf{s}' - \mathbf{s}_*||_\infty \le 1} \Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}'||_1}) \Big)^{-\theta} \|A_{\mathbf{s}'} * A_{\mathbf{s}_*}\|_1^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{\mathbf{s}' :\, ||\mathbf{s}' - \mathbf{s}_*||_\infty \le 1} ||A_{\mathbf{s}'}||_1^\theta \, ||A_{\mathbf{s}_*}||_1^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Далі, взявши до уваги, що $S_{Q_n^{\mathbf{1}}}(f_2) = 0$, аналогічно як і в (3.154), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\mathbf{1}}}(f_2)_q \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})},$$

звідки слідує оцінка знизу в теоремі для $\mathcal{E}_{Q_n^{\mathbf{1}}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q$ у випадку $1 \le \theta < q$.

Теорему 3.15 доведено.

Зауваження 3.19. *В теоремі 3.15 не розглянуто випадок* $\theta = \infty$, *оскільки точні за порядком оцінки величин* $E_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MH}^{\omega}_1(\boldsymbol{\gamma}))_q$ *і* $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MH}^{\omega}_1(\boldsymbol{\gamma}))_q$ *встановлено в роботі [68].*

Зауваження 3.20. *У випадку* $\omega(\tau) = \tau^r$, $1 - \frac{1}{q} < \alpha = r < l$, *результат теореми 3.15 відомий і доведений А. С. Романюком [83].*

Зауваження 3.21. *У випадку* $\gamma_j = 1$, $j = 1, \ldots, d$, *результат теореми 3.15 відомий і встановлений О. В. Федуник [148].*

3.4.2. Найкраще наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ у метриці простору L_p при $1<p<\infty$.

Як зазначалось в попередньому підрозділі, підпростори тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$ є в ряді випадків оптимальними для наближення анізотропних класів Бєсова $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ періодичних функцій мішаної гладкості, що показано, наприклад, в [145, гл. III], [85], [73, гл. IV]. Однак, для наближення класів $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ в метриці простору L_p при певних значеннях параметра θ вигідно брати тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік не з $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$, а з $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}$, де вектор $\boldsymbol{\gamma}'=(\gamma_1',\dots,\gamma_d')$ пов'язаний з вектором $\boldsymbol{\gamma}$ за допомогою наступних співвідношень

$$1=\gamma_1'=\dots=\gamma_\nu'<\gamma_{\nu+1}'\le\dots\le\gamma_d',\ \ 1<\gamma_j'<\gamma_j,\qquad j=\nu+1,\dots,d.$$

Слід зауважити, що хоча кількість точок в множинах $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}$ та $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$ співпадає за порядком, тобто (див., наприклад, [55]) $|Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}|\asymp|Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}|\asymp 2^n n^{\nu-1}$, проте тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік із $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}$ в деяких випадках дають наближення за порядком краще, ніж тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік із $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$, що було помічено С.О. Теляковським [134]. Множини $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}$ також з'явились в роботі С.О. Теляковського [134].

Справедливе таке твердження.

Теорема 3.16. *Нехай* $1<p<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, *тоді*

$$E_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_p\asymp\mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_p\asymp\omega(2^{-n})\,n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+},\qquad(3.155)$$

де $p_0=\min\{p;2\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху у випадку $p_0<\theta<\infty$. Але попередньо наведемо кілька співвідношень, які будуть потрібні далі.

Оскільки згідно з умовою теореми функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову

(S^{α}) з деяким $\alpha > 0$, то при $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) \geq n$ виконується нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}. \tag{3.156}$$

В [145, с. 11] показано, що

$$\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} 2^{-\zeta(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\zeta n} n^{\nu-1}, \quad \zeta > 0. \tag{3.157}$$

Нехай $f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$. Тоді, позначаючи через $S_{Q_n^{\gamma'}}(f, \mathbf{x})$ частинну суму ряду Фур'є функції $f(\mathbf{x})$ з "номерами" гармонік із множини $Q_n^{\gamma'}$, використовуючи наслідок з теореми Літтльвуда-Пелі, нерівність Гельдера та співвідношення (3.142), (3.156), (3.157), будемо мати:

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(f) \leq ||f - S_{Q_n^{\gamma'}}(f)||_p = \left\| \sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})^{-\theta} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \left(\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}) \right)^{\frac{p_0\theta}{\theta - p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\gamma)} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \left(\frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} 2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})} \right)^{\frac{p_0\theta}{\theta - p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} 2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})\frac{p_0\theta}{\theta - p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} n^{(\nu-1)(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) n^{(\nu-1)(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta})}.$$

Якщо ж $1 \leq \theta \leq p_0$, то, використовуючи наслідок з теореми Літтльвуда-Пелі, співвідношення (2.96), а також (3.142) і (3.156), одер-

жимо

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(f) \leq ||f - S_{Q_n^{\gamma'}}(f)||_p = \left\| \sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \frac{\omega(2^{-(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})})}{2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})}} 2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})} \ll$$

$$\ll ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}(\gamma)} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sup_{(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} 2^{-\alpha(\mathbf{s},\boldsymbol{\gamma})} \leq \omega(2^{-n}).$$

Оцінки зверху встановлено.

Тепер перейдемо до встановлення оцінок знизу, які досить провести для $\nu = d$. В цьому випадку, очевидно, що $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}' = (1, \ldots, 1)$, а замість вектора $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}'$ будемо писати $\mathbf{1}$ і, відповідно, Q_n — замість $Q_n^{\mathbf{1}}$.

При проведенні оцінок знизу будемо користуватися тим фактом, що для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ має місце порядкова рівність

$$E_{Q_n}(f)_p \asymp ||f - S_{Q_n}(f)||_p, \quad 1 < p < \infty,$$

яка є простим наслідком теореми Літтлвуда–Пелі.

1) Нехай $2 \leq p < \infty$, $2 \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{\omega,\theta}(\mathbf{x}) = C_6 \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} e^{i(\mathbf{k}^*_{\mathbf{s}}, \mathbf{x})}, \quad C_6 > 0,$$

де $\mathbf{k}^*_{\mathbf{s}} \in \rho(\mathbf{s})$. Покажемо, що ця функція при відповідному значенні сталої $C_6 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$. Дійсно

$$||f_{\omega,\theta}||_{\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f_{\omega,\theta})||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} ||e^{i(\mathbf{k}^*_{\mathbf{s}}, \cdot)}||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} 1 \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Далі, оскільки $S_{Q_n}(f_{\omega,\theta}) = 0$ внаслідок вибору функції $f_{\omega,\theta}$, то

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_p \asymp \sup_{f \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}} ||f - S_{Q_n}(f)||_p \geq ||f_{\omega,\theta} - S_{Q_n}(f_{\omega,\theta})||_p =$$

$$= ||f_{\omega,\theta}||_p \geq ||f_{\omega,\theta}||_2 = C_6 \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} 1 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

2) Нехай $1 < p < 2$, $p \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{\omega,p,\theta}(\mathbf{x}) = C_7 \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p} - 1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \ C_7 > 0.$$

Покажемо, що $f_{\omega,p,\theta} \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ при певному значенні сталої $C_7 > 0$. Використовуючи (3.81), (3.34) одержимо

$$||f_{\omega,p,\theta}||_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \asymp \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})^{-\theta} ||\delta_s(f_{\omega,p,\theta})||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_7 2^{n(\frac{1}{p} - 1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} \Bigg\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \Bigg\|_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} 1 \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1.$$

Далі покладемо $\Delta_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} : 2^{-s_j} \leq x_j < 2^{-s_j + 1}, j = 1, \ldots, d\}$. Зазначимо, що $\Delta_{\mathbf{s}} \cap \Delta_{\mathbf{s}'} \neq \varnothing$ при $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$. Тоді, беручи до уваги виконання рівності $S_{Q_n}(f_{\omega,p,\theta}, \cdot) = 0$, будемо мати

$$E_{Q_n}(f_{\omega,p,\theta})_p \asymp ||f_{\omega,p,\theta}||_p \asymp \Bigg\| \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = n} |\delta_{\mathbf{s}}(f_{\omega,p,\theta})|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg\|_p \gg$$

$$\gg \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n} \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} |\delta_{\mathbf{s}}(f_{\omega,p,\theta}, \mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_7 \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n} \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} \left| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.158)$$

Враховуючи, що (див., наприклад, [85])

$$\int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} \left| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right|^p d\mathbf{x} \gg 2^{||\mathbf{s}||_1(p-1)},$$

з (3.158) знаходимо

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_p \gg \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=n} 1 \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}.$$

3) У випадку $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < p_0$ розглянемо функцію

$$f_{\omega}(\mathbf{x}) = C_8 \omega(2^{-n}) e^{i(\mathbf{k}^*_{\tilde{\mathbf{s}}},\mathbf{x})}, \quad C_8 > 0,$$

де $\mathbf{k}^*_{\tilde{\mathbf{s}}} \in \rho(\tilde{\mathbf{s}})$, $||\tilde{\mathbf{s}}||_1 = n$.

Поскільки

$$||f_{\omega}||_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \asymp \omega(2^{-||\tilde{\mathbf{s}}||_1})^{-1} ||\delta_{\tilde{\mathbf{s}}}(f_{\omega}, \cdot)||_p \ll 1,$$

то $f_{\omega} \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ при відповідному значенні сталої $C_8 > 0$.

Враховуючи, що $S_{Q_n}(f_{\omega}) = 0$, одержимо

$$E_{Q_n}(f_{\omega})_p \asymp ||f_{\omega}||_p \gg \omega(2^{-n}).$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 3.16 доведено.

Зауваження 3.22. *Якщо в наведеній вище теоремі розглянути апроксимаційну характеристику* $E_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_p$ *і повторити міркування, аналогічні до наведених в ході доведення теореми 3.16, то легко пока-*

зати, що

$$E_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_p \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma}))_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (3.159)$$

Зауваження 3.23. *Якщо* $\omega(\tau) = \tau^r$, *то з (3.155) та (3.159) випливають встановлені А. С. Романюком [85] результати для класів* $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$.

Зауваження 3.24. *Якщо в (3.138) покладемо* $\gamma_j = 1$, $j = 1, \ldots, d$, *то одержимо функцію* $\Omega(\mathbf{t})$ *вигляду (3.14). В цьому випадку в доведеній теоремі міститься встановлений в роботі [191] результат*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_p \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

3.5. Наближення класів функцій багатьох змінних, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями з відповідними носіями.

В даному підрозділі одержано порядкові оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних, які визначені на $\mathbb{R}^d$, в метриці простору L_q за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$.

3.5.1. Означення та декомпозиційне нормування простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ та $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + ... + x_dy_d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, позначимо простір вимірних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначимо різницю l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, за змінною x_j з кроком h_j

$$\Delta^l_{h_j} f(\mathbf{x}) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ..., x_d)$$

та кратну різницю l-го порядку з векторним кроком $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_d)$:

$$\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}}...(\Delta^l_{h_1} f(\mathbf{x}))\big).$$

Тоді

$$\Omega_l(f,\mathbf{t})_q := \sup_{\substack{|h_j|\leqslant t_j,\\ j=1,\ldots,d,}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_q$$

— мішаний модуль неперервності (порядку l) функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Тут $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,d$, (далі будемо писати $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{0}$, $|\mathbf{h}| = (|h_1|, ..., |h_d|)$ та використовувати запис $|\mathbf{h}| \leqslant \mathbf{t}$, який означає, що $|h_j| \leqslant t_j$, $j = 1,\ldots,d$).

Нехай $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1,\ldots,t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, яка визначена та неперервна на $\mathbb{R}_+^d$ та задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $\mathbf{t} > \mathbf{0}$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ є неспадною за кожною зі змінних;

3) $\Omega(m_1t_1,\ldots,m_dt_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\ldots,d$.

Множину таких функцій $\Omega(\mathbf{t})$ позначимо через Ψ_l.

Додатково будемо вимагати, щоб функція $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняла умови (S^α) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [13]. Сформулюємо їх:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S^α) з $\alpha > 0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Будемо казати, що $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє умову (S^α) (відповідно (S_l)), якщо $\Omega(\mathbf{t})$ задовольняє цю умову за кожною змінною t_j при всіх фіксованих t_i, $i \neq j$, і вважати, що $\Omega(\mathbf{t})$ належить до множини S^α (відповідно S_l). Множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається рівністю $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$. Таке ж позначення $\Phi_{\alpha,l}$ будемо використовувати для аналогічно визначеної множини функцій однієї змінної.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{якщо } \ t_j > 0, \ j = 1, \ldots, d; \\ 0, & \text{якщо } \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1; \ \log \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$.

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, ..., d\}$, $d \in \mathbb{N}$, та $e := \{j_1, ..., j_m\}$, $m \leqslant d$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < ... ... < j_m \leqslant d$, $e \subset e_d$, $\mathbf{t}^e = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_m})$, $\bar{\mathbf{t}}^e := (\bar{t}_1^e, \ldots, \bar{t}_d^e)$, де

$$\bar{t}_i^e = \begin{cases} t_i, & i \in e, \\ 1, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)$, де $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ та $\Omega(\mathbf{t}) \in \Psi_l$, визначаються таким чином (див., наприклад, [119])

$$S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \ \|f\|_{S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_p + \sum_{\varnothing \neq e \subset e_d} \left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, \mathbf{t}^e)_p}{\Omega(\bar{\mathbf{t}}^e)} \right)^{\theta} \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad (3.160)$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$\|f\|_{S_{p,\infty}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_p + \sum_{\varnothing \neq e \subset e_d} \sup_{\boldsymbol{t}^e > 0} \frac{\Omega_{l^e}(f, \boldsymbol{t}^e)_p}{\Omega(\bar{\boldsymbol{t}}^e)}, \quad (3.161)$$

де

$$\Omega_{\mathbf{l}^e}(f,\mathbf{t}^e)_q := \sup_{|\mathbf{h}^e|\leqslant \boldsymbol{t}^e} \|\Delta_{\mathbf{h}^e}^{\mathbf{l}^e} f(\mathbf{x})\|_q, \quad \mathbf{h}^e := (h_{j_1},\ldots,h_{j_m}),$$

$$\Delta_{\mathbf{h}^e}^{\mathbf{l}^e} f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_{j_m}}^l \big(\Delta_{h_{j_{m-1}}}^l ...(\Delta_{h_{j_1}}^l f(\ldots,x_{j_1},\ldots,x_{j_m},\ldots))\big).$$

Простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням відомих просторів $S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і збігаються з ними у випадку $\Omega(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^{\mathbf{r}} = t^{r_1}\cdot\ldots\cdot t^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1,\ldots,d$. Нагадаємо, що простори $S^{\mathbf{r}}_p H(\mathbb{R}^d) = S^{\mathbf{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ були вперше розглянуті С. М. Нікольським [61], простори $S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ при $1 \leqslant \theta < \infty$ були введені Т. І. Амановим [5]. В подальшому будемо використовувати позначення $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B$, $S^{\mathbf{r}}_p H$ замість $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $S^{\mathbf{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$, відповідно.

Спочатку наведемо важливе твердження про еквівалентне нормування для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$. Одержана декомпозиційна норма функцій з просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ грає ключову роль в дослідженнях різноманітних апроксимаційних характеристик розглядуваних класів функцій. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [45]).

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом з усіма похідними швидше за будь-який степінь функції $|\mathbf{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [45; 20, гл. 2]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементи простору S' є узагальненими функціями повільного росту. Нехай $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення функціоналу $f \in S'$ на пробній функції $\varphi \in S$.

Пряме (обернене) перетворення Фур'є функції $\varphi \in S$ визначається за формулою:

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{t})} d\mathbf{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$$

$$\left((\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\mathbf{t}) \right).$$

Пряме (обернене) перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$

(для них ми зберігаємо такі ж позначення) визначаються за формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle, \ \ \varphi \in S$$

$$\Big(\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \ \ \varphi \in S \Big).$$

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для будь-якої $\varphi \in S$, що дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій перетворення узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Зазначимо, що для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S' і в цьому смислі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі, для кожного вектора $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, d$, розглянемо множину

$$Q^*_{2^{\mathbf{s}}} := Q^*(\boldsymbol{s}) := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \ j = 1, \ldots, d \Big\},$$

де $\eta(0) = 0$ та $\eta(t) = 1, \ t > 0$.

Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через $\chi_{\mathcal{A}}$ характеристичну функцію множини $\mathcal{A}$ і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1} \big(\chi_{Q^*_{2^{\mathbf{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f \big).$$

Сформулюємо твердження, яке буде використано при доведенні основних результатів.

Теорема III.2 (Літтлвуда–Пелі) (див., наприклад, [59, с. 81], а також [49, 48]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3 \|f\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{\mathbf{s} \geqslant 0} |\delta^*_{\mathbf{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant C_4 \|f\|_p.$$

А тепер сформулюємо твердження про еквівалентне нормування просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Теорема III.3 [189]. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$. *Функція* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *належить до простору* $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\{ \sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0}} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при цьому

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left\{ \sum_{\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3.162}$$

де $\Omega(2^{-\mathbf{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *належить до простору* $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{\mathbf{s} \geqslant 0} \frac{\|\delta^*_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} < \infty,$$

при цьому

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}} \frac{\|\delta^*_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})}. \tag{3.163}$$

В подальшому, під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ будемо розуміти множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leqslant 1$ і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті ж позначення, що й для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Зазначимо, що теорема III.3 є узагальненням на простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ теореми П. І. Лізоркіна та С. М. Нікольського для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ [47]. Твердження, що аналогічне до теореми III.3, для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних раніше встановлено М. М. Пустовойтовим [70] при $\theta = \infty$ та Sun Yongsheng, Wang Heping [191] при $1 \leqslant \theta < \infty$.

3.5.2. Означення апроксимаційних характеристик та допоміжні твердження.

Спочатку наведемо необхідні позначення.

Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, N) := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) : \ s_j \in \mathbb{Z}_+, \ \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \geqslant \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) =: Q(\Omega, N) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa(N)} Q^*(\mathbf{s}).$$

Зазначимо, що множини $Q(N)$ породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\mathbf{t})$ та у випадку, коли $\Omega(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Ці множини є східчастими гіперболічними хрестами.

Далі покладемо

$$\kappa^{\perp}(\Omega, N) := \kappa^{\perp}(N) := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) : \ s_j \in \mathbb{Z}_+, \ \Omega(2^{-\mathbf{s}}) < \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q^{\perp}(\Omega, N) := Q^{\perp}(N) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)} Q^{\perp}(\mathbf{s}),$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N) \backslash \kappa^{\perp}(2^l N).$$

З означення множини $\Theta(N)$ одержуємо, що

$$\Theta(N) \subset \kappa^{\perp}(N) \quad \text{та} \quad \frac{1}{2^l N} \leqslant \Omega(2^{-\mathbf{s}}) < \frac{1}{N},$$

тобто

$$\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \asymp \frac{1}{N}, \quad \mathbf{s} \in \Theta(N). \tag{3.164}$$

Зазначимо, що питання, пов'язані з наближенням тригонометричними поліномами зі спектром із множин $Q(N)$ для деяких класів періодичних функцій багатьох змінних, розглядались в роботах [81, 71, 115, 126].

Тепер визначимо апроксимативні характеристики, дослідженню яких присвячений даний пункт.

Нехай $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}_+^d$ — деяка скінченна множина. Покладемо

$$Q(\mathcal{L}) = \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathcal{L}} Q^*(\mathbf{s})$$

та позначимо

$$G\big(Q(\mathcal{L})\big) = \Big\{ f \in L_q(\mathbb{R}^d) : \ \mathrm{supp}\mathfrak{F}f \subseteq Q(\mathcal{L}) \Big\}.$$

Елементи $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$ є цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є в множині $Q(\mathcal{L})$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, розглянемо величину

$$E\Big(f, G\big(Q(\mathcal{L})\big)\Big)_q := E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q := \inf_{g\in G(Q(\mathcal{L}))} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_q,$$

яка називається найкращим наближенням функції f цілими функціями з множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q(\mathcal{L})}(F)_q = \sup_{f\in F} E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q.$$

Також для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, будемо розглядати функції вигляду

$$S_{Q(\mathcal{L})}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathcal{L}} \delta^*_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}),$$

де, як і раніше,

$$\delta^*_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*(\mathbf{s})} \cdot \mathfrak{F}f).$$

Позначимо

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q = \|f(\cdot) - S_{Q(\mathcal{L})}(f, \cdot)\|_q$$

та

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_q = \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q.$$

В [71] показано, що $\Theta(N) \neq \varnothing$ і, крім цього, має місце співвідношення

$$|\Theta(N)| \asymp \big(\log_2 N\big)^{d-1}, \tag{3.165}$$

де через $|A|$ позначено кількість елементів скінченної множини A.

На основі сказаного вище, враховуючи співвідношення (3.75) та (3.164), для $1 < p < \infty$ маємо

$$\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{p} \ll \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} (\Omega(2^{-\mathbf{s}}))^{p} \asymp$$

$$\asymp \left(\frac{1}{N}\right)^{p} \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 = \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|. \tag{3.166}$$

3.5.3. Порядкові оцінки апроксимаційних характеристик класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Перш ніж сформулювати одержаний результат, зазначимо, що у випадку $1 < q < \infty$ (див., наприклад, [47]) має місце порядкове співвідношення

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q \asymp E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q. \tag{3.167}$$

Зазначимо, що в якості $\mathcal{L}$ будемо розглядати вектори з множини $\kappa(N)$ та, відповідно, розглядати наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворення Фур'є в множині $Q(N)$.

Теорема 3.17. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тоді виконуються порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp E_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{3.168}$$

де $p_0 = \min\{p, 2\}$.

Доведення. Встановимо в (3.168) оцінку зверху.

Нехай $1 < p < \infty$. Скориставшись послідовно співвідношенням (3.167), теоремою III.2, нерівністю (2.96) та нерівністю Мінковського одержимо

$$E_{Q(N)}(f)_p \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \left\| f(\cdot) - \sum_{\mathbf{s}\in\kappa(N)} \delta^{*}_{\mathbf{s}}(f,\cdot) \right\|_p = \left\| \sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta^{*}_{\mathbf{s}}(f,\cdot) \right\|_p \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \right\|_p \asymp$$

$$\asymp \left(\left\| \sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)|^{p_0} \right\|_{\frac{p}{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left\| |\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)|^{p_0} \right\|_{\frac{p}{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}. \qquad (3.169)$$

Далі розглянемо два випадки залежно від співвідношень між параметрами p_0 та θ.

1) У випадку $p_0 < \theta < \infty$, застосовуючи до останньої суми у співвідношенні (3.169) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{p_0}$, а також співвідношення (3.166), продовжимо оцінку

$$E_{Q(N)}(f)_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{\frac{p_0\theta}{\theta-p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{\frac{p_0\theta}{\theta-p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}} \ll \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то

$$E_{Q(N)}(f)_p \ll \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \ll$$

$$\ll \sup_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-1} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \ll \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{p_0}}.$$

2) Нехай $1 \leqslant \theta \leqslant p_0$. Тоді скориставшись нерівністю (2.96), оцінку (3.169) продовжимо таким чином:

$$E_{Q(N)}(f)_p \leqslant \left(\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant \left(\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{\mathbf{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \ll \frac{1}{N}.$$

Оцінки зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього розглянемо декілька випадків залежно від значень параметрів p та θ і для кожного з них побудуємо такі функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, що оцінки знизу для $\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p$ збігаються за порядком з правою частиною співвідношення (3.168). Спочатку наведемо функцію, яка використовується при їх побудові.

Покладемо

$$D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j+1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1}.$$

В роботі [209] показано, що для перетворення Фур'є функції $D_{\mathbf{k}}$ має місце рівність

$$\mathfrak{F} D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j + 1, \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j + 1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1, \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Також будемо використовувати таке твердження.

Лема III.3 [209]. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для функції*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \geqslant 0} c_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j - 1}}(x_j),$$

виконується співвідношення

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{\mathbf{k} \geqslant \mathbf{0}} |c_{\mathbf{k}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що має місце оцінка [209]

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho_+(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\cdot) \right\|_p \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \tag{3.170}$$

де

$$\rho_+(\mathbf{s}) := \Big\{ \mathbf{k} = (k_1, ..., k_d) : \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant k_j < 2^{s_j}, \ k_j \in \mathbb{Z}_+, \ j = 1, \ldots, d \Big\}.$$

Далі розглянемо декілька випадків.

1) Нехай $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$. Тоді розглянемо функцію

$$f_{N,\theta}(\mathbf{x}) := C_7 \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\mathbf{s} \in \Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(x_j).$$

Покажемо, що $f_{N,\theta} \in S^{\Omega}_{p,\theta} B$ при певному значенні сталої $C_7 > 0$. Поскільки

$$\Big\|\prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j)\Big\|_p \ll \Big\|\prod_{j=1}^{d}\Big|\frac{\sin(x_j/2)}{x_j}\Big|\Big\|_p \ll 1, \qquad (3.171)$$

то, скориставшись (3.162) та (3.164), одержимо

$$\|f_{N,\theta}\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta}\|\delta^*_{\mathbf{s}}(f_{N,\theta},\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta}\Big\|\prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot)\Big\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} N\left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} = |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}|\Theta(N)|^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Далі, поскільки $S_{Q(N)}(f_{N,\theta},\cdot)=0$, то згідно з лемою III.3, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \geq \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,\theta})_p = \|f_{N,\theta}\|_p \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\Big\|\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)}\prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j)\Big\|_p \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{s\in\Theta(N)} 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

2) У випадку $2<p<\infty$, $\theta=\infty$ розглянемо функцію

$$f_N(\mathbf{x}) := C_8\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)}\prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j)$$

і покажемо, що вона належить до класу $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ при певному значенні сталої $C_8>0$.

Скориставшись (3.163), (3.164) та (3.171), будемо мати

$$\|f_N\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-1} \|\delta^*_{\mathbf{s}}(f_N,\cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \sup_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-1} \Big\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot) \Big\|_p \ll 1.$$

Використовуючи той факт, що $S_{Q(N)}(f_N,\cdot)=0$, та лему III.3, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\infty}B)_p \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_N)_p = \|f_N\|_p \gg \frac{1}{N} \Big\| \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot) \Big\|_p \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{2}}.$$

3) Нехай тепер має місце випадок $1<p<\infty$, $1\leqslant\theta<p_0$.

Покажемо, що функція

$$f_{\Omega}(\mathbf{x}) := C_9 \Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j-1}}(x_j), \quad \tilde{\mathbf{s}}\in\Theta(N), \quad C_9>0,$$

належить до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Дійсно, згідно з (3.162) та (3.171), маємо

$$\|f_{\Omega}\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\Big\| \Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j-1}}(\cdot) \Big\|_p^{\theta} \big(\Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Враховуючи, що $S_{Q(N)}(f_{\Omega},\cdot)=0$, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{\Omega})_p = \|f_{\Omega}\|_p = C_9 \Big\| \Omega(2^{-\tilde{\mathbf{s}}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j-1}}(\cdot) \Big\|_p \asymp \frac{1}{N}.$$

4) У випадку $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_{N,p,\theta}(\mathbf{x}) := C_{10}\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 2^{\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \sum_{\mathbf{k}\in\rho_+(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Спочатку покажемо, що $f_{N,p,\theta} \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ з деякою сталою $C_{10} > 0$. Беручи до уваги (3.170) та (3.164), одержуємо

$$\|f_{N,p,\theta}\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\mathbf{s}}(f_{N,p,\theta},\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta} 2^{\theta\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \Bigg\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho_+(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\cdot)\Bigg\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\big)^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} N \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Покладемо

$$\Delta(\mathbf{s}) = \Big\{\mathbf{x} : 2^{-s_j-1} \leqslant x_j < 2^{-s_j},\ j = 1,\dots,d\Big\},$$

та зазначимо, що $\Delta(\mathbf{s})\cap\Delta(\mathbf{s}') = \varnothing$, якщо $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$. Таким чином, взявши до уваги, що $S_{Q(N)}(f_{N,p,\theta},\cdot) = 0$, та скориставшись теоремою III.2, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q(N)}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_p \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,p,\theta})_p = \|f_{N,p,\theta}\|_p \gg$$

$$\gg \left\|\left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} |\delta^*_{\mathbf{s}}(f_{N,p,\theta},\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \geqslant \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \int\limits_{\Delta(\mathbf{s})} |\delta^*_{\mathbf{s}}(f_{N,p,\theta},\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.172}$$

Далі, поскільки

$$\int\limits_{\Delta(\mathbf{s})} |\delta_{\mathbf{s}}^{*}(f_{N,p,\theta},\mathbf{x})|^{p} d\mathbf{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \int\limits_{\Delta(\mathbf{s})} \Big| \sum_{\mathbf{k}\in\rho_{+}(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \Big|^{p} d\mathbf{x} \gg$$

$$\gg \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \int\limits_{\Delta(\mathbf{s})} 2^{p\|\mathbf{s}\|_1} d\mathbf{x} \gg$$

$$\gg \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} 2^{(p-1)\|\mathbf{s}\|_1} = \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|^{-\frac{p}{\theta}},$$

то (3.172) продовжимо таким чином:

$$\mathcal{E}_{Q(N)}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_p \gg \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \left(\frac{1}{N}\right)^{p} |\Theta(N)|^{-\frac{p}{\theta}} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}.$$

5) Нарешті у випадку $1 < p \leqslant 2$, $\theta = \infty$, розглянемо функцію

$$f_{N,p}(\mathbf{x}) := C_{11}\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} 2^{\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \sum_{\mathbf{k}\in\rho_{+}(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad C_{11} > 0,$$

для якої, скориставшись (3.170) та (3.164), маємо

$$\|f_{N,p}\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \frac{\|\delta_{\mathbf{s}}^{*}(f_{N,p},\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})} \ll 1.$$

Аналогічно, як і для функції $f_{N,p,\theta}$, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_{N,p})_p \gg \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінки знизу в (3.168) встановлено.

Теорему 3.17 доведено.

Скориставшись співвідношенням (3.165), на основі теореми 3.17 можна записати таке твердження

Теорема 3.17$'$. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *тоді виконуються порядкові оцінки*

$$E_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

На завершення зробимо деякі коментарі. Нехай $\omega(\tau)$ — функція однієї змінної, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, а мішаний модуль неперервності $\Omega = \Omega(\mathbf{t})$ порядку l задається формулою (3.14).

Розглянемо множину

$$\bar{Q}_n = \bigcup_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} Q(\mathbf{s}),$$

яку називають східчастим гіперболічним хрестом.

Якщо при цьому $n \in \mathbb{N}$ та N пов'язані співвідношенням

$$\omega(2^{-n}) \asymp \frac{1}{N},$$

то для $\mathbf{s} \in \Theta(N)$ одержуємо $\log_2 N \asymp n$, а оцінки величини $E_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_p$ встановлено в [119].

У випадку, коли $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, оцінки величин $E_{\bar{Q}_n}\big(S^{\mathbf{r}}_{p,\theta}B\big)_p$ встановлено в [209].

Лема III.4 [209]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_p$, *тоді*

$$||f||_q^q \ll \sum_{\mathbf{s}} \Big(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1/p-1/q)}\Big)^q. \qquad (3.173)$$

Теорема 3.18. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant q$, *а* $\Omega(\mathbf{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *тоді виконуються порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp E_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p \asymp \frac{1}{N}. \qquad (3.174)$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Врахувавши (3.167), лему III.4, а також (3.164), одержимо

$$E_{Q(N)}(f)_p \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_p = \left\| \sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta_{\mathbf{s}}^{*}(f,\cdot) \right\|_p \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega^{-1}(2^{-\mathbf{s}}) ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega^{-1}(2^{-\mathbf{s}}) ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \ll$$

$$\ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \sup_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \le$$

$$\le \sup_{\mathbf{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) \, 2^{||\mathbf{s}||_1(1/p-1/q)} \ll \frac{1}{N}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Оцінка знизу буде досягатись на функції

$$g(\mathbf{x}) = C_{12} \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{-||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})} \sum_{\mathbf{k}\in\rho_{+}(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Оскільки згідно з (3.170) маємо

$$\|g\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}\in\Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}}) \right)^{-\theta} \|\delta_{\mathbf{s}}^{*}(g,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_{12} \, 2^{\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1} \left\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho_{+}(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\cdot) \right\|_p \ll 1,$$

то звідси робимо висновок, що $g \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ при певному значенні $C_{12} > 0$.

Далі, взявши до уваги $S_{Q(N)}(g,\cdot)=0$ та (3.170), (3.164), одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(g)_q = \|g\|_q =$$

$$= C_{12}\,\Omega(2^{-\mathbf{s}})\,2^{\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\mathbf{s}\|_1}\Bigg\|\sum_{\mathbf{k}\in\rho_+(\mathbf{s})} D_{\mathbf{k}}(\cdot)\Bigg\|_q \gg \Omega(2^{-\mathbf{s}})2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp \frac{1}{N}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 3.18 доведено.

3.6. Висновки до розділу 3

Досліджено поведінку величини найкращого наближення класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з різними видами узагальненої мішаної гладкості тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, які пов'язані з виглядом гладкісної функції $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$, за допомогою якої визначаються ці класи.

У підрозділі 3.1 встановлено декомпозиційне зображення норми періодичних функцій багатьох змінних з просторів $MB^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, яке охоплює крайні значення параметра p, тобто $p = 1$ та $p = \infty$. Новизна встановленого декомпозиційного зображення полягає у поширенні значень параметра $p \in (1, \infty)$ на значення $p = 1$ та $p = \infty$. Це вдалося здійснити за рахунок використання двійкових "блоків" сум Валле Пуссена замість двійкових "блоків" сум Фур'є, використаних раніше Y. S. Sun та H. P. Wang (1997) при $p \in (1, \infty)$.

У підрозділі 3.2 встановлено порядкові оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних з класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з рівномірних східчастих гіперболічних хрестів в метриці простору L_q при певних значеннях параметрів p та q.

У підрозділі 3.3 одержано точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних з класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з відповідних множин, які залежать від поведінки функції $\Omega(\mathbf{t})$. Показано, що при певних співвідношеннях між параметрами p та q такі множини є оптимальними в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників.

У підрозділі 3.4 знайдено точні за порядком оцінки в просторі L_q найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних з класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}(\boldsymbol{\gamma})$ з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з нерівномірних східчастих гіперболічних хрестів.

В останньому підрозділі 3.5 встановлено точні за порядком оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних, заданих на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями з носіями їх перетворення Фур'є в узагальнених гіперболічних хрестах.

Основні результати розділу 3 опубліковано у роботах [102, 106, 109, 110, 111, 115, 117, 118, 124, 126, 151, 189].

Розділ 4

Найкращі тригонометричні наближення класів Нікольського–Бєсова функцій мішаної гладкості

4.1. Найкращі m-членні ортогональні тригонометричні наближення класів Нікольського–Бєсова функцій узагальненої мішаної гладкості

Перейдемо безпосередньо до означення величини, що буде досліджуватися в даному підрозділі.

Для функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d),\ 1 \le q \le \infty$, в якості наближаючого полінома за системою експонент $\{e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}\}_{j=1}^m$ будемо брати поліном

$$S_m(f) = S_m(f,\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{m} \hat{f}(\mathbf{k}^j) e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}$$

і розглядати величину

$$e_m^{\perp}(f)_q := \inf_{\{k^j\}_{j=1}^m} ||f(\cdot) - S_m(f,\cdot)||_q.$$

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий клас функцій, то покладаємо

$$e_m^{\perp}(F)_q := \sup_{f\in F} e_m^{\perp}(f)_q.$$

Величину $e_m^{\perp}(F)_q$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

Величини $e_m^{\perp}(F)_q$ для деяких класів функцій F вивчалися в роботах Е.С. Белінського [15], А.С. Романюка [75, 86] та інших.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > \max\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\}$, *тоді має місце оцінка*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_q \asymp \omega(m^{-1}\log^{d-1} m)\, m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \qquad (4.1)$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху для випадку $1 \leq \theta < q$. Нехай f — довільна функція із класу $\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}$ і задано достатньо велике число m. Будемо наближати f поліномом $S_m(f)$, який складається з частинної східчасто–гіперболічної суми Фур'є функції f та полінома Q:

$$S_m(f,\mathbf{x}) = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}),$$

причому $S_m(f)$ містить за порядком m гармонік і n пов'язане з m співвідношенням $m \asymp 2^n n^{d-1}$. Опишемо процедуру побудови полінома Q.

Нехай $l \in \mathbb{N}$ і $l \in [n, n_0)$, де $n_0 = n + (d-1)\log n$. Для $f \in \mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}$ покладемо

$$\widetilde{S}_l = \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = l} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1^{\theta}\, \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad (4.2)$$

і позначимо через $\alpha_i(f,l)$ числа $\|A_{\mathbf{s}}(f,\cdot)\|_1$, впорядковані за спаданням. Зазначимо, що індекс i змінюється в межах від 1 до K_l, де K_l — кількість векторів $\mathbf{s}$, що задовольняють умову $\|\mathbf{s}\|_1 = l$. Виходячи з рівності (4.2) будемо мати

$$\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = l} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1^{\theta} = \omega^{\theta}(2^{-l})\widetilde{S}_l^{\theta},$$

або

$$\sum_{i=1}^{K_l} \alpha_i^{\theta}(f,l) = \omega^{\theta}(2^{-l})\widetilde{S}_l^{\theta}.$$

З останнього співвідношення, враховуючи, що із зростанням індекса i

числа $\alpha_i(f,l)$ не зростають, знаходимо

$$\alpha_i(f,l) \le i^{-\frac{1}{\theta}} \omega(2^{-l}) \widetilde{S}_l. \tag{4.3}$$

Далі кожному числу $l \in [n, n_0),\ l \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність число m_l, що визначається за формулою:

$$m_l = [2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^\theta] + 1, \tag{4.4}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a. Зазначимо, що оскільки для $f \in \mathbf{MB}^\omega_{1,\theta}$ величина $\widetilde{S}_l$ не перевищує деякої абсолютної сталої, то для будь–якого $l \in \mathbb{N},\ \ l \in [n, n_0)$, будемо мати

$$m_l \le 2^n n^{d-1} 2^{-l} + 1 \ll n^{d-1}.$$

Іншими словами, числа m_l не перевищують за порядком кількості векторів $\mathbf{s}$, які задовольняють співвідношення $l = \|\mathbf{s}\|_1,\ l \in \mathbb{N},\ l \in [n, n_0)$.

Розглянемо поліном

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = l} \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) \tag{4.5}$$

і для кожного l візьмемо із внутрішньої суми (4.5) m_l "блоків" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ за тими $\mathbf{s}$, яким відповідають найбільші значення норми $\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1$. Одержаний в результаті так вибраних "блоків" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ поліном позначимо через Q.

Переконаємось спочатку, що кількість гармонік K, які містяться в $S_m(f)$, не перевищує за порядком m.

Згідно з (3.51), (4.4) і (4.2), враховуючи, що $n_0 = n + (d-1)\log n$, одержимо

$$K \ll \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} + \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^l m_l \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^l (2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^{\theta} + 1) \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} \left(1 + \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = l} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1^{\theta} \, \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \right) + 2^n n^{d-1} \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} \left(2 + \|f\|_{MB_{1,\theta}^{\omega}}^{\theta} \right) \ll 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Отже, кількість гармонік, які містяться в $S_m(f)$, не перевищує за порядком m.

Далі, нехай D_f позначає множину тих векторів $\mathbf{s} : n \leq \|\mathbf{s}\|_1 < n_0$, за якими "блоки" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ не містяться в Q. Тоді, якщо $S_m(f)$ — сума, що побудована описаним вище способом, то для $f \in \mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}$ будемо мати

$$\|f - S_m(f)\|_q = \left\| f - \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n_0} \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{\mathbf{s} \in D_f} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_q \leq$$

$$\leq \left\| f - \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n_0} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_q + \left\| \sum_{\mathbf{s} \in D_f} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_q =: I_1 + I_2. \tag{4.6}$$

Оцінимо кожен з доданків в (4.6).

Зауважимо, що в роботі [148] при $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, встановлена точна за порядком оцінка верхніх граней відхилень східчастих гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f) = \sum\limits_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f)$ класів $\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}$:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_q = \sup_{f \in \mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}} ||f - S_{Q_n}(f)||_q \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{4.7}$$

Використовуючи (4.7), значення n_0, а також той факт, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \max\{1 - \frac{1}{q};\ 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\} > 1 - \frac{1}{q}$, одер-

жимо

$$I_1 \ll \mathcal{E}_{Q_{n_0}}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_0})2^{n_0(1-\frac{1}{q})} = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}}2^{-n_0(\alpha-1+\frac{1}{q})} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}2^{-n(\alpha-1+\frac{1}{q})}n^{-(d-1)(\alpha-1+\frac{1}{q})} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{-(d-1)(\alpha-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}}\left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \tag{4.8}$$

Для отримання оцінки величини I_2 скористаємось спочатку лемою III.2 за умови $1 < q_o < q$, а потім нерівністю різних метрик (2.16). Таким чином, будемо мати

$$I_2 = \Big\|\sum_{\mathbf{s}\in D_f}\delta_{\mathbf{s}}(f)\Big\|_q \ll \left(\sum_{\mathbf{s}\in D_f}\left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{q_o} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\mathbf{s}\in D_f}\left(\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_{q_o} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left\{\sum_{\mathbf{s}\in D_f}\left(\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-\frac{1}{q_o})}2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{q_o}-\frac{1}{q})}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{\sum_{\mathbf{s}\in D_f}\left(\|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-\frac{1}{q})}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q}\sum_{i>m_l}\alpha_i^{\theta}(f,l)\,\alpha_i^{q-\theta}(f,l)\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{4.9}$$

Скориставшись для оцінки $\alpha_i^{q-\theta}(f,l)$ співвідношенням (4.3) і підставивши замість m_l його значення (4.4), продовжимо (4.9)

$$I_2 \ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f,l) \left(i^{-\frac{1}{\theta}} \omega(2^{-l}) \widetilde{S}_l \right)^{q-\theta} \right\}^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q-\theta} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1^\theta \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q}(2^{-l}) m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{l(1-\frac{1}{q})q} \omega^{q}(2^{-l}) (2^n n^{d-1} 2^{-l} \widetilde{S}_l^\theta)^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \widetilde{S}_l^{q} \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \left(\frac{\omega(2^{-l})}{2^{-\alpha l}} 2^{-\alpha l} \right)^q 2^{lq(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta})} \widetilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.10)$$

Враховуючи, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\} = 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, а також формулу (4.2), продовжимо оцінку (4.10)

$$I_2 \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lq(\alpha-(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}))} \widetilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{n(\alpha-(1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}))} \left\{ \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \widetilde{S}_l^\theta \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \times$$

$$\times \left\{ \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\|s\|_1=l} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{q}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \|f\|_{MB_{1,\theta}^\omega}^{\frac{\theta}{q}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \qquad (4.11)$$

Нарешті, повертаючись до співвідношення (4.6), з урахуванням одержаних оцінок (4.8), (4.11), приходимо до потрібної оцінки зверху у випадку $1 \leq \theta < q$:

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q \ll \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки зверху у випадку $q \leq \theta \leq \infty$. Зауважимо, що при зазначених значеннях θ умова $\alpha > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\}$ рівносильна умові $\alpha > 1-\frac{1}{q}$.

Підберемо за заданим $m \in \mathbb{N}$ число n із співвідношення $m \asymp 2^n n^{d-1}$ і нагадаємо, що $Q_n \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m$. Тоді, враховуючи (4.7), будемо мати

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q \ll \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінки зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. За даним числом m підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $m \asymp 2^n n^{d-1}$, $2^n n^{d-1} \geq 2m$, і розглянемо функції

$$f_1(\mathbf{x}) = C_5 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq \|\mathbf{s}\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \quad C_5 > 0,$$

та

$$f_2(\mathbf{x}) = C_6 \sum_{n \leq \|\mathbf{s}\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \quad C_6 > 0.$$

Покажемо, що $f_1 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та $f_2 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{1,\infty}$ при відповідних значеннях сталих C_5 та C_6.

Дійсно,

$$\|f_1\|_{MB^{\omega}_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})\|A_{\mathbf{s}}(f_1)\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})\omega^{\theta}(2^{-\|\mathbf{s}\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

$$\|f_2\|_{MB^{\omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} \frac{\|A_{\mathbf{s}}(f_2)\|_1}{\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})} \ll \sup_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} \frac{\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})}{\omega(2^{-\|\mathbf{s}\|_1})} = 1.$$

Далі, нехай Ω_m — довільна множина, що містить m d–вимірних векторів $\{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^m$ з цілочисловими координатами, і $S_m(f)$ — поліном, отриманий в результаті ортогонального проектування f на підпростір тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік з Ω_m. Тоді згідно з наслідком Д1.2 [38, с. 392] можна записати

$$\|f(\cdot) - S_m(f,\cdot)\|_q = \sup_{g:\ \|g\|_{q'}\le 1} \left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f(\mathbf{x}) - S_m(f,\mathbf{x}))\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right|, \qquad (4.12)$$

де $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

В якості функції g, яка фігурує в рівності (4.12), виберемо функцію вигляду

$$g(\mathbf{x}) = C_7 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} \sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} =$$

$$= C_7 2^{-\frac{n}{q}} n^{-\frac{d-1}{q'}} D_{n+d}(\mathbf{x}), \quad C_7 > 0.$$

Покажемо, що $\|g\|_{q'} \le 1$ при певному значенні сталої $C_7 > 0$.

Нехай спочатку $q' \in (1, 2]$. Тоді згідно з теоремою III.1 можна записати

$$\|D_{n+d}\|_{q'} \ll \left\| \left(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1\le n+d} |\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} =$$

$$= \left\| \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} |\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})|^2 \right)^{\frac{q'}{2}} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} = I_3. \qquad (4.13)$$

Для подальшої оцінки величини I_3 скористаємося відомим співвідношенням (3.81). Таким чином, для $\mathbf{s}$ таких, що $n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d$, згідно з (3.81) будемо мати

$$\|\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})\|_p = \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \right\|_p \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1 (1-\frac{1}{p})}, \quad 1 < p < \infty. \qquad (4.14)$$

Скориставшись одержаним співвідношенням, а також нерівністю

$$|a+b|^\alpha \le |a|^\alpha + |b|^\alpha, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

продовжимо оцінку (4.13):

$$I_3 \le \left\| \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} |\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})|^{q'} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} \le \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} \|\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})\|_{q'}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} 2^{\|\mathbf{s}\|_1 (1-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \qquad (4.15)$$

Нехай тепер $q' \in (2, \infty)$. Тоді згідно з лемою III.2 та співвідношенням (4.14), знаходимо

$$\|D_{n+d}\|_{q'} \ll \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} \|\delta_{\mathbf{s}}(D_{n+d})\|_2^{q'} 2^{\|\mathbf{s}\|_1 (\frac{1}{2}-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 \le n+d} 2^{\|\mathbf{s}\|_1 (1-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}. \qquad (4.16)$$

Об'єднуючи (4.13) – (4.16), приходимо до оцінки

$$\|D_{n+d}\|_{q'} \ll 2^{\frac{n}{q}} n^{\frac{d-1}{q'}}, \quad 1 < q' < \infty. \qquad (4.17)$$

Таким чином, з (4.17) слідує, що функція g з відповідною сталою $C_7 > 0$ задовольняє умову $\|g\|_{q'} \le 1$.

Тепер, враховуючи співвідношення (4.12) для побудованих функцій f_1 і g, одержуємо для випадку $1 \le \theta < \infty$

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_q \ge e_m^{\perp}(f)_q = \inf_{S_m} \|f_1 - S_m(f_1)\|_q =$$

$$= \inf_{S_m} \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f_1(\mathbf{x}) - S_m(f_1, \mathbf{x}))\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \gg$$

$$\gg \inf_{S_m} \left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f_1(\mathbf{x}) - S_m(f_1, \mathbf{x}))\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)(\frac{1}{q'} + \frac{1}{\theta})} \inf_{S_m} \left| \|D_{n+d}\|_2^2 - \|S_m(D_{n+d})\|_2^2 \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{q}} n^{-(d-1)(\frac{1}{q'} + \frac{1}{\theta})} (2^n n^{d-1} - m) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1} \log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Аналогічним чином, беручи до уваги співвідношення (4.12) для функцій f_2 і g, легко довести, що має місце наступна така нерівність

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\infty})_q \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1} \log^{d-1} m\right) m^{1-\frac{1}{q}} \left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 4.1 доведено.

Наведемо два зауваження, що стосуються найкращих m–членних ортогональних тригонометричних наближень класів $\mathbf{MH}^{\omega}_1$ та $\mathbf{MB}^{r}_{1,\theta}$ в просторі L_q, і які є наслідком результату теореми 4.1.

***Зауваження* 4.1.** *Покладаючи в теоремі 4.1 $\theta = \infty$ отримаємо поряд-*

кову рівність

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MH}_1^{\omega})_q \asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right)\, m^{1-\frac{1}{q}}\left(\log^{d-1} m\right)^{-1+\frac{2}{q}}.$$

Зауваження 4.2. *Якщо* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, *де* $r_1 > \max\{1-\frac{1}{q};\ 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\}$, *то має місце оцінка*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{r})_q \asymp m^{-(r_1-1+\frac{1}{q})}\left(\log^{d-1} m\right)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

яка встановлена в роботі [75], та яку одержуємо з (4.1) при $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$.

Теорема 4.2. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > 1$, *тоді має місце оцінка*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_\infty \asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right)\, m\left(\log^{d-1} m\right)^{-\frac{1}{\theta}}. \tag{4.18}$$

Доведення. Оцінка зверху в (4.18) випливає з результатів роботи [148], в якій встановлено точні за порядком оцінки верхніх граней відхилень східчастих гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f)$ функцій з класів $\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega}$ в метриці простору L_∞:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{4.19}$$

Підберемо за заданим $m \in \mathbb{N}$ число n із співвідношення $m \asymp 2^n n^{d-1}$, тоді, враховуючи (4.19), будемо мати

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_\infty \ll \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{\omega})_\infty \ll \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right)\, m\left(\log^{d-1} m\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

За заданим $m \in \mathbb{N}$ підберемо число n із співвідношень $m \asymp 2^n n^{d-1}$,

$2^n n^{d-1} \geq 4m$ і розглянемо функції

$$f_3(\mathbf{x}) = C_8\,\omega(2^{-n})\,n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad C_8 > 0,$$

та

$$f_4(\mathbf{x}) = C_9\,\omega(2^{-n}) \sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad C_9 > 0,$$

де

$$f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j)).$$

Оскільки (див., наприклад, [145, с. 66])

$$||f_{\mathbf{s}}||_p \asymp 2^{||\mathbf{s}||_1(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

то неважко перевірити, що при відповідних значеннях сталих C_8 і C_9 функції f_3 та f_4 належать до класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\infty}$ відповідно.

Нехай $S_m(f_3)$ — частинна сума, яка складається з m довільних гармонік ряду Фур'є функції f_3. Оскільки (див., наприклад, [145, с. 66])

$$\Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1=n+1} f_{\mathbf{s}} \Big\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

то

$$||f_3 - S_m(f_3)||_\infty \geq ||f_3||_\infty - ||S_m(f_3)||_\infty \gg$$
$$\gg \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} (2^n n^{d-1} - m) \gg$$
$$\gg \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n}) 2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$
$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right)\, m \left(\log^{d-1} m\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Аналогічно, можна показати, що

$$||f_4 - S_m(f_4)||_\infty \gg \omega(2^{-n})\, 2^n\, n^{d-1} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 4.2 доведено.

Зауваження 4.3. *При виконанні умов теореми 4.2 для* $\theta = \infty$ *має місце наступна порядкова рівність*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MH}_1^{\omega})_{\infty} \asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right) m.$$

Зауваження 4.4. *Якщо* $\Omega(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$*, де* $r_1 > 1$*, то при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *має місце оцінка*

$$e_m^{\perp}(\mathbf{MB}_{1,\theta}^{r})_{\infty} \asymp m^{-r_1+1}\left(\log^{d-1} m\right)^{r_1-\frac{1}{\theta}},$$

яку встановлено в роботі [78], та яку одержуємо з (4.18) при $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$*.*

4.2. Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів Нікольського–Бєсова функцій узагальненої мішаної гладкості

В даному підрозділі вивчаються питання, які пов'язані з одержанням як порядкових оцінок (у випадку наближення в метриці простору суттєво обмежених функцій), так і точних за порядком оцінок (у випадку наближення в інтегральній метриці) для найкращих m-членних тригонометричних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних, які близькі до класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду. Зазначимо, що одержані оцінки зверху реалізуються конструктивними методами, які базуються на використанні ґріді (greedy) алгоритмів, і в той же час є конструктивними оцінками зверху для найкращих m-членних тригонометричних наближень згаданих класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду.

Поряд з просторами $MB^{\omega}_{p,\theta}$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, розглянемо простори $MH^{\omega}_{p,\theta}$, які визначаються таким чином:

$$MH^{\omega}_{p,\theta} = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} < \infty \Big\}, \tag{4.20}$$

де

$$||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} := \sup_k \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\Big)^{-\theta} \ ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.21}$$

При $\theta = \infty$ покладемо $MH^{\omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\omega}_p$, а $||f||_{MH^{\omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\omega}_p}$.

Через $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ будемо позначати одиничні кулі просторів $MH^{\omega}_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in MH^{\omega}_{p,\theta} : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \leq 1 \Big\}. \tag{4.22}$$

Для означених вище функціональних класів, виходячи з означень

(3.2), (3.3), враховуючи (3.14), та (4.20), (4.21), (4.22), мають місце такі вкладення:

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta_2}, \quad 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty. \tag{4.24}$$

Класи $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ при $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, розглядались в роботі [135] з точки зору встановлення для них точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик, зокрема, найкращого m-членного тригонометричного наближення (див. означення (4.26)). А в роботі [125] для класів $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > \frac{1}{p}$ (в означенні (4.21) "блоки" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ замінюються на відповідні двійкові "блоки" ряду Фур'є функції f за тензорною системою Хаара), встановлено точні за порядком оцінки їх найкращого m-членного наближення поліномами за тензорною системою Хаара.

Нехай Θ_m — набір із m точок із цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$P(\Theta_m, x) := \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i(n_k, x)}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ розглянемо величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q, \tag{4.25}$$

яка називається найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції f в метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Для функціонального класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \tag{4.26}$$

З детальним оглядом досліджень величин (4.25) та (4.26) можна ознайомитись, наприклад, в монографії [73, гл. III], а також в роботах [190, 168]. Стосовно дослідження поведінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ і знаходження їх порядкових оцінок відмітимо роботи [123, 108, 41].

Наведемо необхідні для подальшого означення та твердження.

Нехай

$$\Pi(\boldsymbol{N}, d) := \{(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d : \, |a_j| \leq N_j, \, N_j \in \mathbb{Z}_+, \, j = 1, \dots, d\},$$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{N}, d) := \Big\{ t : \, t = \sum_{\mathbf{k} \in \Pi(\boldsymbol{N}, d)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \Big\},$$

тоді

$$\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{N}, d) = \prod_{j=1}^{d} (2N_j + 1) =: \vartheta(\boldsymbol{N}). \tag{4.27}$$

Далі, позначимо

$$||f||_A := \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{T}^d := \Big\{ e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \Big\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}, \quad \overline{m} := \max\{1, m\}.$$

Теорема IV.1 [135]. *Існують конструктивні методи наближення типу ґріді (greedy) $G_m^q(\cdot)$, які приводять до m-членних поліномів за системою $\mathcal{T}^d$ з такими властивостями: для $2 \leq q < \infty$ виконується нерівність*

$$||f - G_m^q(f)||_q \leq C_1(d)(\overline{m})^{-1/2} q^{1/2} ||f||_A, \tag{4.28}$$

де $||G_m^q(f)||_A \leq C_2(d)||f||_A$, а для $q = \infty$ та $f \in \mathcal{T}(\boldsymbol{N}, d)$ виконується така нерівність

$$||f - G_m^\infty(f)||_\infty \leq C_3(d)(\overline{m})^{-1/2} (\ln \vartheta(\boldsymbol{N}))^{1/2} ||f||_A, \tag{4.29}$$

де $||G_m^q(f)||_A \leq C_4(d)||f||_A$.

Теорема IV.2 [123, 108]. *Нехай $1 < p < q \leq \infty$, $q > 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\{1/p; 1/2\}$, тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \tag{4.30}$$

для $2 < q < \infty$, *а*

$$\omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll$$
$$\ll \sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll$$
$$\ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)_++1/2}. \quad (4.31)$$

Зазначимо, що (4.30) та (4.31) встановлені в [123] та [108], відповідно.

Встановлення оцінок зверху в (4.30) та (4.31) базувалось на використанні двох лем Е.С. Белінського [15, 155], які мають неконструктивний характер (більш детально про це мова буде йти далі).

Наведемо означення ще одного функціонального класу, який тут досліджується з точки зору апроксимації, а також з точки зору вкладень.

При $f \in L_1$ покладемо

$$f_j := \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

та розглянемо клас функцій

$$\mathbf{MW}^{\lambda,b}_A := \{f : ||f_j||_A \le \lambda(2^{-j}) j^{(d-1)b}\},$$

де $\lambda \in \Phi_{\alpha,l}$, $b \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що у випадку $\lambda(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, класи $\mathbf{MW}^{\lambda,b}_A$ збігаються з класами $\mathbf{MW}^{r,b}_A$, запропонованими для розгляду В.М. Темляковим [135].

Мають місце такі твердження.

Лема 4.1. *Нехай* $2 \le q \le \infty$, $\lambda \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > \mu > 0$, *тоді є конструктивний метод* $A_m(\cdot, q, \mu)$, *який базується на гдіді (greedy) алгоритмах, які для* $f \in \mathbf{MW}^{\lambda,b}_A$ *приводять до оцінки*

$$||f - A_m(f,q,\mu)||_q \ll \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)b}, \quad 2 \le q < \infty, \quad (4.32)$$

$$||f - A_m(f, \infty, \mu)||_\infty \ll \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)b+1/2}. \qquad (4.33)$$

Теорема 4.3. *Нехай* $1 < p < q \leq \infty$, $q > 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\{1/p; 1/2\}$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \qquad (4.34)$$

для $2 < q < \infty$, *а*

$$\omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll$$

$$\ll \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_\infty \ll$$

$$\ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+1/2}. \qquad (4.35)$$

Оцінки зверху забезпечуються конструктивним методом $A(\cdot, q, \mu)$, *що базується на гдіді (greedy) алгоритмах.*

На завершення сформульованих результатів наведемо деякі коментарі.

***Зауваження* 4.5.** *У випадках* $\lambda(\tau) = \tau^r$, $r > \mu > 0$ *та* $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$ *лема 4.1 для класів* $\mathbf{MW}^{r,b}_A$ *та теорема 4.3 для класів* $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ *встановлені В.М. Темляковим [135].*

***Зауваження* 4.6.** *Порівнюючи результати теореми 4.3 з результатами теореми IV.2, внаслідок вкладення (4.23) можемо записати*

$$\omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll$$

$$\ll \sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q \leq \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \ll$$

$$\ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+[1-1/q]/2}, \quad (4.36)$$

де $2 < q \leq \infty$, *а* $[a]$ *— ціла частина числа* a.

З (4.36) робимо висновок про співпадання точних за порядком оцінок величини $\sigma_m(F)_q$ на класах $F = \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ та $F = \mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ при $2 < q < \infty$.

У випадку $q = \infty$ верхня та нижня оцінки в (4.36) вже не співпадають за порядком (відрізняються на множник $(\log m)^{1/2}$). Крім того, при $1 \le \theta < 2$ вдалося досягнути покращення оцінки зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_\infty$ (див. (4.36)) в порівнянні зі встановленою раніше оцінкою (4.31).

Зауваження 4.7. *Теорема 4.3 доповнює теорему IV.2 в тому розумінні (див. (4.36)), що для $\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q$ вона дає оцінки зверху, які є конструктивними, в той час, як одержані в теоремі IV.2 оцінки зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q$ не були конструктивними, поскільки побудова наближуючого m-членного тригонометричного полінома для реалізації оцінок зверху в (4.30) і (4.31) базувалась на застосуванні неконструтивних лем Е.С. Белінського [15, 155].*

Доведення результатів.

***Доведення леми* 4.1.** Нехай

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{4.37}$$

і $f \in \mathbf{MW}^{\lambda,b}_A$. Доведемо спочатку (4.33). Згідно з теоремою IV.1 для $q = \infty$, враховуючи (4.27), маємо

$$||f_j - G^\infty_{m_j}(f_j)||_\infty \ll (\overline{m}_j)^{-1/2}(\ln 2^j)^{1/2}||f_j||_A \ll$$

$$\ll (\overline{m}_j)^{-1/2} j^{1/2}\lambda(2^{-j}) j^{(d-1)/b}. \tag{4.38}$$

Покладемо

$$m_j := [2^{n-\mu(j-n)} j^{d-1}], \quad j = n, n+1, \ldots, \tag{4.39}$$

$$A_m(f, q, \mu) := S_{Q_n}(f) + \sum_{j>n} G^q_{m_j}(f_j), \quad 2 \le q \le \infty, \tag{4.40}$$

де $S_{Q_n}(f)$ задано формулою (3.26).

Переконаємось, що наближуючий поліном $A_m(f, q, \mu)$ в дійсності містить за порядком не більше, ніж m гармонік. Внаслідок умови $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$, співвідношень (4.39) та (4.37) маємо

$$\dim A_m(f,q,\mu) = \#Q_n + \sum_{j>n} m_j \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + 2^{n+\mu n} \sum_{j>n} 2^{-\mu j} j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Враховуючи (4.40), (4.38), (4.39), $\lambda \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \mu > 0$, а також (4.37), одержимо

$$||f - A_m(f,\infty,\mu)||_\infty \le \sum_{j>n} ||f_j - G^\infty_{m_j}(f_j)||_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{j>n} (\overline{m}_j)^{-1/2} \lambda(2^{-j}) j^{(d-1)b+1/2} \le$$

$$\le 2^{-(n+\mu n)/2} \sum_{j>n} \frac{\lambda(2^{-j})}{2^{-\alpha j}} 2^{-(\alpha-\mu/2)j} j^{(d-1)(b-1/2)+1/2} \ll$$

$$\ll 2^{-(n+\mu n)/2} \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{j>n} 2^{-(\alpha-\mu/2)j} j^{(d-1)(b-1/2)+1/2} \asymp$$

$$\asymp \lambda(2^{-n}) 2^{-n/2} n^{(d-1)(b-1/2)+1/2} \asymp \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)b+1/2}.$$

Доведення (4.32) є аналогічним до доведення (4.33) і, по суті, містить ті ж кроки. Відмінність полягає лише в тому, що замість нерівності (4.29), яка використовувалась для оцінки m_j-членного наближення до $f_j \in L_\infty$, ми скористаємось нерівністю (4.28) для оцінки m_j-членного наближення до $f_j \in L_q$, $2 \le q < \infty$.

Лему 4.1 доведено.

Доведення теореми **4.3.** Спочатку покажемо, що при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\lambda(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-1/p}$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > 1/p$ має місце вкладення

$$\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta} \subset \mathbf{MW}^{\lambda,1-1/\theta}_A. \tag{4.41}$$

Внаслідок елементарних перетворень, врахувавши (3.3) та (3.34), для $\theta=\infty$ маємо

$$||f_j||_A \le \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_A \ll \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 2^{||\boldsymbol{s}||_1/p}||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_p =$$

$$= \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_p \le \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_p} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 1 \le$$

$$\le \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 1 \asymp \omega(2^{-j})2^{j/p}j^{d-1}. \qquad (4.42)$$

Далі, згідно з (4.21), для $\theta=1$ одержуємо

$$||f_j||_A \ll \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_p \le$$

$$\le \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_{p,1}} \le \omega(2^{-j})2^{j/p}. \qquad (4.43)$$

Для $1<\theta<\infty$ внаслідок нерівності Гельдера, а також (4.21), (3.34) маємо

$$||f_l||_A \ll \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_p \le$$

$$\le \omega(2^{-j})2^{j/p}\Bigg(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} ((\omega(2^{-||\boldsymbol{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\boldsymbol{s}}(f_j)||_p)^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}\Bigg(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 1\Bigg)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}}\Bigg(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 1\Bigg)^{1/\theta'} \asymp \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} j^{(d-1)/\theta'} \le$$

$$\le \omega(2^{-j})2^{j/p}j^{(d-1)(1-1/\theta)}, \qquad (4.44)$$

де $1/\theta+1/\theta'=1$.

З (4.42) – (4.44) робимо висновок про справедливість вкладення (4.41).

Далі, у випадках $1<p\le 2<q<\infty$ та $1<p\le 2$, $q=\infty$, застосовуючи лему 4.1 з $\lambda(\tau)=\omega(\tau)\tau^{-1/p}$, $b=1-1/\theta$, внаслідок вкладення (4.41),

для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ одержуємо відповідно

$$\sigma_m(f)_q \leq ||f - A_m(f,q,\mu)||_q \ll \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)b} =$$

$$= \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{1/p-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \qquad (4.45)$$

і

$$\sigma_m(f)_\infty \leq ||f - A_m(f,q,\mu)||_\infty \ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)^{-1/p} \times$$

$$\times m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1/2} =$$

$$= \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{1/p-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+1/2}. \qquad (4.46)$$

Оцінки зверху у випадках $2 < p < q < \infty$ та $2 < p < \infty$, $q = \infty$ одержуємо скориставшись вкладенням $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^{\omega}_{2,\theta}$, $p > 2$, та доведеними вище оцінками (4.45) та (4.46) при $p = 2$.

Оцінки знизу в (4.34) і (4.35) одержуємо (див. (4.36)), застосувавши теорему IV.2 з урахуванням вкладення (4.23).

Теорему 4.3 доведено.

4.3. Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів Нікольського–Бєсова функцій узагальненої малої мішаної гладкості

Шкала просторів $MB^{\omega}_{p,\theta}$ є природним узагальненням за гладкісним параметром r шкали просторів Нікольського – Бєсова $MB^r_{p,\theta}$, $r=(r_1,\ldots,r_1)$, $r_1>0$, періодичних функцій мішаної гладкості (див., наприклад, [47]) і $MB^{\omega}_{p,\theta}\equiv MB^r_{p,\theta}$ при $\omega(\tau)=\tau^{r_1}$, $0<r_1<l$. Зазначимо, що при $\theta=\infty$ $MB^r_{p,\theta}$ — простори Нікольського MH^r_p, тобто $MB^r_{p,\infty}\equiv MH^r_p$, а також $MB^{\omega}_{p,\infty}\equiv MH^{\omega}_p$.

Зазначимо, що у випадку $1<p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ (при $\theta=\infty$ в [70], а при $1\le\theta<\infty$ в [191]), $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, встановлена порядкова рівність

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q\asymp\omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},\tag{4.47}$$

де $a_+:=\max\{a;0\}$,

$$E_{Q_n}(F)_q:=\sup_{f\in F}\inf_{t\in\mathcal{T}_{Q_n}}\|f-t\|_q,\tag{4.48}$$

$\mathcal{T}_{Q_n}:=\{t:t=\sum\limits_{k\in Q_n}c_ke^{i(k,x)},c_k\in\mathbb{C}\}$,

$$\mathcal{E}_{Q_n}(F)_q:=\sup_{f\in F}\|f-S_{Q_n}(f)\|_q,\tag{4.49}$$

$S_{Q_n}(f):=f*\mathcal{D}_{Q_n}:=f*\sum\limits_{||s||_1<n}\mathcal{D}_{\rho(s)}$,

$$Q_n:=\{k:k\in\rho(s),||s||_1<n\},\tag{4.50}$$

при цьому

$$\#Q_n\asymp2^nn^{d-1}.\tag{4.51}$$

Згідно з (4.48) та (4.49) має місце нерівність

$$E_{Q_n}(F)_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(F)_q. \tag{4.52}$$

Наша мета полягає у встановленні точних за порядком оцінок величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ (а також $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$) для не розглянутих раніше співвідношень між параметрами ω, p, q, θ, а саме при $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деякими α: $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ та γ: $\gamma < \frac{1}{p}$. Зазначимо, що функція $\omega = \omega(\tau)$, яка присутня в означенні класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ та $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, які нами розглядаються, характеризує ці класи як такі, що складаються з функцій, що мають узагальнену малу мішану гладкість спеціального вигляду. Зазначимо також, що точні за порядком оцінки величин (4.26) для деяких класів періодичних функцій малої гладкості встановлені в [14, 15, 79, 114, 190, 195, 65].

Іншою особливістю розглянутої нами ситуації є те, що поведінка $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ характеризується (як, наприклад, в роботі [129]) в термінах величини m, на відміну від робіт [191, 123, 131, 108, 102, 41, 167], в яких поведінка досліджуваних там апроксимаційних характеристик класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ виражалась в термінах величини n, яка пов'язана з m співвідношенням $m \asymp \#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наведемо декілька допоміжних тверджень та співвідношень.

Надалі від функції $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, будемо вимагати, щоб вона в певних випадках задовольняла умову (S_l) з деяким γ: $\gamma < \frac{1}{p}$, або $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, а тому згідно з (2.120) мають місце нерівності

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}\,, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2, \tag{4.53}$$

$$\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\gamma||\mathbf{s}||_1}} \ll \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}, \quad ||\mathbf{s}||_1 < n_1. \tag{4.54}$$

Співвідношення (4.53) і (4.54) одержуємо з (1.23) за умови, якщо будемо вимагати, щоб функція $\omega(\tau)/\tau^{\gamma}$, а не $\omega(\tau)/\tau^{l-\gamma}$, була майже спадною. Зазначене припущення не зменшує загальності, а пропонується з міркувань зручності опису поведінки функції ω.

Теорема 4.4. *Нехай* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *та* $\gamma < \frac{1}{p}$.

Якщо $1 < \theta \le \infty$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \max\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\}$ *та* $\gamma < \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{4.55}$$

Якщо ж $1 \le \theta < q$, *а* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *та* $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.56}$$

Доведення. Розпочнемо зі встановлення в (4.55) та (4.56) оцінок зверху для класів $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, зважаючи на вкладення (4.23) та (4.24).

За заданим $m \in \mathbb{N}$ підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались умови $m > \#Q_n$ і

$$m \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{4.57}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $q \le \theta \le \infty$, а, відповідно, $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Побудуємо поліном, який буде реалізувати для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, у вигляді

$$P(\Theta_m) = \sum_{||\mathbf{s}||_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}}), \tag{4.58}$$

де $P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})$ — поліноми, які наближають “блоки” $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ згідно з лемою II.1, а

$$n_1 = \frac{qn}{2} - (\frac{q}{2} - 1)(d-1)\log n, \tag{4.59}$$

$$N_{\mathbf{s}} = [2^{n + (||\mathbf{s}||_1 - n_1)/p} \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})/\omega(2^{-n_1})] + 1. \tag{4.60}$$

Переконаємось, що поліном $P(\Theta_m)$ містить за порядком не більше, ніж m гармонік.

Покажемо спочатку, що

$$\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})2^{||\mathbf{s}||_1/p}\right)^{\mu}\ll\left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}\right)^{\mu}n_1^{d-1},\quad \mu>0. \tag{4.61}$$

Дійсно, враховуючи нерівність (4.54) та співвідношення

$$\sum_{||s||_1<n}2^{\varrho||s||_1}\asymp 2^{\varrho n}n^{d-1},\quad \varrho>0, \tag{4.62}$$

маємо

$$\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})2^{||\mathbf{s}||_1/p}\right)^{\mu}=\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}\left(\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\gamma||\mathbf{s}||_1}}2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\gamma)}\right)^{\mu}\ll$$

$$\ll\left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}\right)^{\mu}\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}2^{\mu||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\gamma)}\asymp$$

$$\asymp\left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}\right)^{\mu}2^{\mu n_1(\frac{1}{p}-\gamma)}n_1^{d-1}=\left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}\right)^{\mu}n_1^{d-1},$$

що й доводить (4.61).

Враховуючи (4.51), (4.59)–(4.61) та (4.57), одержимо

$$\#\Theta_m=\#Q_n+\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}N_{\mathbf{s}}\ll 2^n n^{d-1}+\frac{2^{n-n_1/p}}{\omega(2^{-n_1})}\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})2^{||\mathbf{s}||_1/p}\ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1}+\frac{2^{n-n_1/p}}{\omega(2^{-n_1})}\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}n_1^{d-1}\asymp 2^n n^{d-1}\asymp m,$$

що підтверджує той факт, що заданий формулою (4.58) поліном $P(\Theta_m)$ містить за порядком не більше, ніж m гармонік.

Беручи до уваги (4.58), можемо записати

$$||f-P(\Theta_m)||_q\le\Bigg\|\sum_{n\le||\mathbf{s}||_1<n_1}(\delta_{\mathbf{s}}(f)-P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}}))\Bigg\|_q+\Bigg\|\sum_{||\mathbf{s}||_1\ge n_1}\delta_{\mathbf{s}}(f)\Bigg\|_q=:J_1+J_2. \tag{4.63}$$

Подальше оцінювання двох доданків правої частини (4.63) розпочнемо з J_2.

Для цього покажемо спочатку, що для $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{4.64}$$

У випадку $q < \theta < \infty$ для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ згідно з лемою III.2, нерівністю Гельдера та співвідношеннями (4.21), (4.22), (3.34), (1.22) будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q = \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 \ge n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q \ll \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 \ge n} \left(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \, 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \right)^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{q}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} \Bigg)^{\frac{\theta - q}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \left(\omega(2^{-j}) 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^q \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} 1 \Bigg)^{\frac{\theta - q}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\alpha j}} 2^{-j(\alpha - (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \right)^q j^{(d-1)\frac{\theta - q}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-jq(\alpha - (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} j^{(d-1)\frac{\theta - q}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{4.65}$$

У випадку $\theta = q$, враховуючи лему III.2, а також співвідношення

(4.21), (4.22) та (1.22), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q \ll \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \bigg(\Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \Big)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \bigg)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq ||f||_{MH^{\omega}_{p,q}} \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} \Big(\omega(2^{-j}) 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-jq(\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.66}$$

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, то внаслідок (4.24) та (4.66) одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,q})_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.67}$$

Співставивши (4.65) – (4.67) приходимо до (4.64).

Враховуючи (4.47), (4.64), (4.59) і (4.57), одержимо

$$J_2 \leq \mathcal{E}_{Q_{n_1}}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)((1-\frac{q}{2})(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{4.68}$$

Скориставшись наслідком з теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі), лемою II.1, нерівністю різних метрик Нікольського, (4.60), нерівністю Гельдера, (4.53), (4.59) та (4.57), для $q \leq \theta < \infty$ маємо

$$J_1 \ll \Bigg(\sum_{n \leq ||\mathbf{s}||_1 < n_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f) - P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})\|_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll \Bigg(\sum_{n \leq ||\mathbf{s}||_1 < n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{n \leq ||s||_1 < n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{2||\mathbf{s}||_1/p} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \Bigg(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \sum_{n \leq ||\mathbf{s}||_1 < n_1} \bigg(\Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \Big)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \bigg)^2 \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{n\le j<n_1} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \left(\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^2 \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\le j<n_1} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \left(\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) \right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{2}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \right)^{\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} j^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\le j<n_1} \frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\gamma j}} 2^{-(\gamma-\frac{1}{p})j} j^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}} \sum_{n\le j<n_1} 2^{-(\gamma-\frac{1}{p})j} j^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n_1}) 2^{-\frac{n}{2}+\frac{n_1}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}\right) 2^{-\frac{n}{2}+\frac{qn}{2p}} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{q}{2p})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}\right) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \qquad (4.69)$$

Зауважимо, що в процесі встановлення (4.69) можна простежити за виконанням такого співвідношення

$$\sum_{n\le j<n_1}\left(\omega(2^{-j})2^{\frac{j}{p}}\right)^{\vartheta} j^{(d-1)\lambda} \ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{\frac{n_1}{p}}\right)^{\vartheta} n_1^{(d-1)\lambda}, \quad \vartheta>0, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{4.70}$$

якщо $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\gamma<\frac{1}{p}$.

Нехай $\theta=\infty$. Тоді, враховуючи (4.61), (4.59) та (4.57), для J_1 будемо мати

$$J_1 \ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\sum_{n\le||s||_1<n_1}\left(\left(\omega(2^{-||s||_1})\right)^{-1}||\delta_s(f)||_p\right)^2\omega(2^{-||s||_1})2^{||s||_1/p}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \max_{n\le||s||_1<n_1}\left(\left(\omega(2^{-||s||_1})\right)^{-1}||\delta_s(f)||_p\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{n\le||s||_1<n_1}\omega(2^{-||s||_1})2^{||s||_1/p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}||f||_{MH^{\omega}_{p,\infty}}\left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}n_1^{d-1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1}\right)m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{1+\frac{1-q}{p}}. \tag{4.71}$$

Таким чином, підставляючи (4.68), (4.69), (4.71) в (4.63), одержуємо оцінку зверху в (4.55) для $q\le\theta\le\infty$.

Перейдемо тепер до розгляду випадків $1<\theta<q$, якщо $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ з деякими $\alpha>\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q};\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\}=\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, $\gamma<\frac{1}{p}$ та $1\le\theta<q$, якщо $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$ з деякими $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $\gamma<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$. Зауважимо, що в першому з розглядуваних випадків, який відповідає встановленню оцінки зверху в (4.55), більш суттєвою умовою, яку будемо брати до уваги, є $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$. А в другому з розглядуваних на даному етапі доведення випадків, який відповідає встановленню оцінки зверху в (4.56), більш суттєвою умовою, яку будемо брати до уваги, є $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\gamma<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$.

Поліном, що буде реалізувати для $f\in\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, зобразимо у вигляді

$$P(\Theta_m) = \sum_{||\mathbf{s}||_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} P_1(\Theta_{K_{\mathbf{s}}}) + \sum_{n_1 \le k < n_2} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}}), \quad (4.72)$$

де $P_1(\Theta_{K_{\mathbf{s}}})$, $P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})$ — поліноми, які побудовані у відповідності до "блоків" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ згідно з лемою II.1, і

$$n_1 = \frac{qn}{2} - (\frac{q}{2} - 1)(d-1)\log n,$$

$$n_2 = \frac{qn}{2} + \frac{q}{2}(d-1)\log n, \quad (4.73)$$

$$K_{\mathbf{s}} = \left[(\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n+(||\mathbf{s}||_1 - n_1)/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\right] + 1, \quad (4.74)$$

а

$$M_{\mathbf{s},k} = \left[(\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n_1(\frac{q'}{q\theta'} - \frac{1}{p})} (2^n n^{d-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} 2^{\frac{k}{2}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2\right] + 1 \quad (4.75)$$

у випадку $1 < \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, та

$$M_{\mathbf{s},k} = \left[(\omega(2^{-n_2}))^{-1} 2^{n_2(\frac{q'}{q\theta'} - \frac{1}{p})} (2^n n^{d-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} 2^{\frac{k}{2}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2\right] + 1 \quad (4.76)$$

у випадку $1 \le \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$.

Нижче буде встановлено, що кількість гармонік полінома $P(\Theta_m)$, який заданий формулою (4.72), не перевищує за порядком m.

Покажемо спочатку, що для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ має місце співвідношення

$$\sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}}, \quad (4.77)$$

яке нам буде потрібне для проведення подальших міркувань.

Дійсно, скориставшись нерівністю Гельдера, співвідношеннями (3.34) та (4.70), при $1 < \theta < q$ будемо мати

$$\sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} =$$

$$= \sum_{n \le j < n_1} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \le$$

$$\le \sum_{n \le j < n_1} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}) 2^{||\mathbf{s}||_1/p}\right)^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \le$$

$$\le ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{n \le j < n_1} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \sum_{n \le j < n_1} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} j^{\frac{d-1}{\theta'}} \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}}.$$

Відповідна оцінка при $\theta = 1$, враховуючи (4.70), матиме вигляд

$$\sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} =$$

$$= \sum_{n \le j < n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \left(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\right)^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \le$$

$$\le ||f||_{MH^{\omega}_{p,1}} \sum_{n \le j < n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p}.$$

Покажемо, що кількість гармонік полінома

$$\sum_{n \le ||\mathbf{s}||_1 < n_1} P_1(\Theta_{K_{\mathbf{s}}})$$

не перевищує за порядком m. Враховуючи (4.74), (3.34), (4.77) та (4.57), одержуємо

$$\sum_{n\le ||\mathbf{s}||_1<n_1} K_{\mathbf{s}} \ll n_1^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n\le ||\mathbf{s}||_1<n_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \ll$$

$$\ll n_1^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}} \ll 2^n n^{d-1} \asymp m. \quad (4.78)$$

Тепер перейдемо до оцінки зверху величини $||f - P(\Theta_m)||_q$. Маємо

$$||f - P(\Theta_m)||_q \le \Bigg\| \sum_{n\le ||\mathbf{s}||_1<n_1} (\delta_{\mathbf{s}}(f) - P_1(\Theta_{K_{\mathbf{s}}})) \Bigg\|_q +$$

$$+ \Bigg\| \sum_{n_1\le k<n_2} \sum_{||\mathbf{s}||_1=k} (\delta_{\mathbf{s}}(f) - P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})) \Bigg\|_q + \Bigg\| \sum_{||\mathbf{s}||_1\ge n_2} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Bigg\|_q =: J_3 + J_4 + J_5. \quad (4.79)$$

Оцінимо послідовно кожну із величин J_3, J_4 та J_5 в (4.79). Враховуючи наслідок з теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі), лему II.1, (4.77), (4.59) та (4.57), аналогічно, як і при оцінці J_1, одержимо

$$J_3 \ll \left(\sum_{n\le ||\mathbf{s}||_1<n_1} K_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{2||\mathbf{s}||_1/p} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left((\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\le ||\mathbf{s}||_1<n_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\ll \left((\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n_1}) 2^{-\frac{n}{2}+\frac{n_1}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \quad (4.80)$$

Покажемо, що

$$J_3 \ll \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

у випадку $1 \le \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$. Дійсно, враховуючи

(4.80), умову (4.53) для $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, будемо мати

$$J_3 \ll \frac{\omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1})}{\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}\right)^{\gamma}} \left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}\right)^{\gamma} m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(m^{-\frac{q}{2}})}{\left(m^{-\frac{q}{2}}\right)^{\gamma}} \left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}\right)^{\gamma} m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} <$$

$$< \omega(m^{-\frac{q}{2}}) \left(\log^{d-1} m\right)^{(q-1)(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} =$$

$$= \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.81}$$

Переходячи до оцінки доданка J_4, попередньо виконаємо такі дії, які спрямовані на опис побудови поліномів $P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})$ для $k \in \mathbb{N}$, $n_1 \le k < n_2$, та $\mathbf{s}\colon ||\mathbf{s}||_1 = k$. Кожному числу $k \in \mathbb{N}$, $k \in [n_1, n_2)$, поставимо у відповідність числа

$$S_k = \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \left((\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{4.82}$$

$$m_k = \left[2^{-\frac{kq'}{q}} S_k^{\theta} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2}} \right] + 1. \tag{4.83}$$

Нехай

$$\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \delta_s(f) = \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}'' \delta_{\mathbf{s}}(f), \tag{4.84}$$

де перша сума в правій частині (4.84) містить m_k "блоків" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ за тими векторами $\mathbf{s}$, яким відповідають найбільші значення норм $||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p$, а друга — решту "блоків" $\delta_{\mathbf{s}}(f)$. Поліноми $P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})$ будемо будувати у відповідності з лемою II.1, але тільки для тих блоків $\delta_{\mathbf{s}}(f)$, що містяться під знаком першої суми в правій частині (4.84).

Таким чином, згідно з прийнятими позначеннями можемо записати

$$J_4 \le \left\| \sum_{n_1 \le k < n_2} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' (\delta_{\mathbf{s}}(f) - P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})) \right\|_q +$$

$$+\Big\| \sum_{n_1 \le k < n_2} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}'' \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q =: I_1 + I_2. \tag{4.85}$$

Для того, щоб проводити подальші оцінки, а також, щоб переконатись в тому, що кількість гармонік полінома

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})$$

не перевищує за порядком m, покажемо спочатку, що виконуються співвідношення

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2 \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \tag{4.86}$$

для $1 < \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$ та

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2 \ll \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \tag{4.87}$$

для $1 \le \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$.

Використовуючи нерівності різних метрик Нікольського та Гельдера, а також враховуючи (4.82), (4.83) та той факт, що $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, одержимо

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2 \ll \sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{\frac{k}{p}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p =$$

$$= \sum_{n_1 \le k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' (\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1} ||\delta_s(f)||_p \le$$

$$\le \sum_{n_1 \le k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' \Big((\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}{}' 1 \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \le$$

$$\le \sum_{n_1 \le k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} S_k m_k^{\frac{1}{\theta'}} \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \le k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} S_k^{1 + \frac{\theta}{\theta'}} =$$

$$= \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \le k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\alpha k}} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} S_k^\theta \le$$

$$\le \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} ||f||^\theta_{MH^\omega_{p,\theta}} \sum_{n_1 \le k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\alpha k}} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\alpha n_1}} \sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \asymp$$

$$\asymp \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\alpha n_1}} 2^{-n_1(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} = \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}}. \quad (4.88)$$

Аналогічно, як і при встановленні (4.88), взявши до уваги той факт, що $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, з (4.88) будемо мати

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} {\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2 \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \le k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} S_k^\theta \le$$

$$\le \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} ||f||^\theta_{MH^\omega_{p,\theta}} \sum_{n_1 \le k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\gamma k}} 2^{-k(\gamma - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_2})}{2^{-\gamma n_2}} \sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{-k(\gamma - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}}. \quad (4.89)$$

Зауважимо, що в процесі встановлення (4.88) та (4.89) можна простежити, що мають місце співвідношення

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q S_k^\theta \ll \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q, \quad (4.90)$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$, та

$$\sum_{n_1 \le k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q S_k^\theta \ll \left(\omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q, \quad (4.91)$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 \le \theta < q$, відповідно.

Переконаємось тепер, що кількість гармонік полінома

$$\sum_{n_1\le k<n_2}\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})$$

не перевищує за порядком m. Беручи до уваги (4.75), (4.86), (4.73) та (4.57), одержимо

$$\sum_{n_1\le k<n_2}{\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' M_{\mathbf{s},k} \ll n_2^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1}2^{n_1(\frac{q'}{q\theta'}-\frac{1}{p})}(2^n n^{d-1})^{1-\frac{q'}{2\theta'}}\times$$

$$\times \sum_{n_1\le k<n_2} 2^{\frac{k}{2}} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2 \ll n_2^d + 2^n n^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m \tag{4.92}$$

у випадку $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, $1<\theta<q$.

Аналогічно, беручи до уваги (4.76), (4.87), (4.73) та (4.57), будемо мати

$$\sum_{n_1\le k<n_2}{\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' M_{\mathbf{s},k} \ll m \tag{4.93}$$

у випадку $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\gamma<\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, $1\le\theta<q$.

Таким чином, врахувавши (4.51), (4.57), (4.78), (4.92), (4.93), переконуємось, що кількість гармонік побудованого полінома $P(\Theta_m)$, який заданий формулою (4.72), не перевищує за порядком m.

Для випадку $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}$, $1<\theta<q$, згідно з наслідком з теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі), лемою II.1, співвідношеннями (4.75), (4.86), (4.59) і (4.57), можемо записати

$$I_1 \le \Bigg(\sum_{n_1\le k<n_2}{\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)-P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})||_q^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{n_1\le k<n_2}{\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' M_{\mathbf{s},k}^{-1}2^{||\mathbf{s}||_1}||\delta_s(f)||_2^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1})\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n_1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}(2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{4\theta'}-\frac{1}{2}}\Biggl(\sum_{n_1\le k<n_2} 2^{\frac{k}{2}} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2\Biggr)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n_1})2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}(2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2\theta'}-\frac{1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)})2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)((1-\frac{q}{2})(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}-\frac{q-1}{p}}. \tag{4.94}$$

Якщо ж $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 \le \theta < q$, то згідно з наслідком з теореми III.1 (Літтльвуда–Пелі), лемою II.1, співвідношеннями (4.76), (4.87), (4.73) і (4.57), аналогічно, як і при встановленні (4.94), будемо мати

$$I_1 \le \Biggl(\sum_{n_1\le k<n_2} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f) - P_2(\Theta_{M_{\mathbf{s},k}})||_q^2\Biggr)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_2})\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n_2}{2}(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}(2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{4\theta'}-\frac{1}{2}}\Biggl(\sum_{n_1\le k<n_2} 2^{\frac{k}{2}} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_2\Biggr)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n_2})2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}(2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2\theta'}-\frac{1}{2}} = \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}}\right)(2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.95}$$

Перейдемо до оцінки доданка I_2. Згідно з лемою III.1 маємо

$$I_2 = \Biggl\|\sum_{n_1\le k<n_2} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}'' \delta_{\mathbf{s}}(f)\Biggr\|_q \ll \Biggl(\sum_{n_1\le k<n_2} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}'' \left(2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\right)^q\Biggr)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Biggl(\sum_{n_1\le k<n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} {\sum_{||\mathbf{s}||_1=k}}'' ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^q\Biggr)^{\frac{1}{q}} := I_3. \tag{4.96}$$

Далі, пронумеруємо величини $||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p$, що містяться в I_3 для кожного k: $n_1 \le k < n_2$, розташувавши їх в порядку спадання і позначивши їх через $a_i(f,k)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тоді, взявши до уваги означення (4.82), можемо записати

$$a_i(f,k) \ll k^{-\frac{1}{\theta}}\omega(2^{-k})S_k. \tag{4.97}$$

Скориставшись співвідношенням (4.97) та врахувавши (4.82), (4.83), (4.90), (4.59) і (4.57), маємо

$$I_3 = \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \sum_{i>m_k} a_i^{q-\theta}(f,k) a_i^{\theta}(f,k) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q-\theta} S_k^{q-\theta} \sum_{i>m_k} i^{-\frac{q-\theta}{\theta}} a_i^{\theta}(f,k) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q-\theta} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \sum_{i>m_k} (\omega(2^{-k}))^{-\theta} a_i^{\theta}(f,k) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q-\theta} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \Big((\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{\theta} \Big(2^{-\frac{kq'}{q}} \big(2^n n^{d-1}\big)^{\frac{q'}{2}} \Big)^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \big(2^n n^{d-1}\big)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} \Big(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} \Big)^{q} S_k^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \big(2^n n^{d-1}\big)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}-\frac{q-1}{p}} \tag{4.98}$$

у випадку $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$.

Якщо ж $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 \le \theta < q$, то, аналогічно, як і при встановленні (4.98), враховуючи (4.91), (4.73) і (4.57), з (4.98) будемо мати

$$I_3 \ll \big(2^n n^{d-1}\big)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \Bigg(\sum_{n_1 \le k < n_2} \Big(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} \Big)^{q} S_k^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} = \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}}\right) (2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.99}$$

Нарешті перейдемо до оцінки останнього доданка в правій частині (4.79).

Згідно з (4.64), (4.67), (4.73) та (4.57), одержимо

$$J_5 \le \mathcal{E}_{Q_{n_2}}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} = \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}}\right) (2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.100}$$

З іншого боку, згідно з (4.64), (4.73), (1.22), враховуючи умову $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$, та (4.57), одержимо

$$J_5 \le \mathcal{E}_{Q_{n_2}}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}})}{\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^{\alpha}} \left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^{\alpha} 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)})}{\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}\right)^{\alpha}} \left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^{\alpha} 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} <$$

$$< \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) (n^{(d-1)(1-q)})^{\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}} 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)((\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(1-\frac{q}{2})+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{4.101}$$

Насамкінець, підставляючи (4.98) в (4.96), далі (4.94), (4.96) в (4.85), і, нарешті, (4.80), (4.85) та (4.101) в (4.79), одержимо оцінку зверху в (4.55) для $1 < \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $\gamma < \frac{1}{p}$.

У випадку $1 \le \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\gamma < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, підставляючи (4.100) в (4.96), далі (4.95), (4.96) в (4.85), і, на завершення, (4.81), (4.85) та (4.100) в (4.79), одержимо оцінку зверху в (4.56).

Таким чином, оцінки зверху в (4.55) та (4.56) встановлені.

Тепер перейдемо до встановлення в (4.55) та (4.56) відповідних оцінок знизу, які, враховуючи вкладення (4.23), будемо проводити для класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$. Для цього скористаємося співвідношенням двоїстості(див., напр., [38, гл. I, § 1.4, п. 2]):

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Theta_m) \\ ||P||_{q'} \leq 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{P(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right|, \tag{4.102}$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, ортогональних підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини Θ_m.

Спочатку встановимо оцінку знизу в (4.55). Для цього покладемо

$$j_1 = \frac{q}{2} \log m - (q-1)(d-1) \log \log m \tag{4.103}$$

і побудуємо функцію P_1, що задовольняє умови $P_1 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $||P_1||_{q'} \leq 1$.

Нехай

$$v_1 = \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}(\mathbf{x}) = \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

а Θ_m — довільна множина векторів $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ з $\mathbb{Z}^d$ така, що $\#\Theta_m = m$.

Позначимо

$$u_1 = \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m \cap \{\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s}), ||\mathbf{s}||_1 = j_1\}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

і покладемо

$$w_1 = v_1 - u_1. \tag{4.104}$$

Оцінимо $||v_1||_{q'}$ та $||u_1||_{q'}$ для $1 < q' < 2$. Згідно з (3.71) та співвідношеннями (3.81), (3.34), будемо мати

$$||v_1||_{q'} \ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_{q'}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} 2^{||\mathbf{s}||_1 (1 - \frac{1}{q'}) q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{j_1}{q}} j_1^{\frac{d-1}{q'}}, \tag{4.105}$$

а враховуючи (4.103), для $||u_1||_{q'}$ одержимо

$$||u_1||_{q'} \leq ||u_1||_2 \leq \sqrt{m} \asymp 2^{\frac{j_1}{q}} j_1^{\frac{d-1}{q'}}. \qquad (4.106)$$

Тоді, беручи до уваги (4.104)–(4.106), робимо висновок, що функція

$$P_1 = C_5 2^{-\frac{j_1}{q}} j_1^{-\frac{d-1}{q'}} w_1 \qquad (4.107)$$

буде задовольняти умови $P_1 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $||P_1||_{q'} \leq 1$ при деякому значенні $C_5 > 0$.

Покажемо тепер, що функція

$$g_1 = C_6 \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} v_1 =$$

$$= C_6 \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{||s||_1 = j_1} \mathcal{D}_{\rho(s)}(\mathbf{x}) \qquad (4.108)$$

при деякому значенні $C_6 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$. Враховуючи (3.2), (3.3), а також (3.81), будемо мати

$$||g_1||_{MB^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} \Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\Big)^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(g_1)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j_1} 2^{||\mathbf{s}||_1 (1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1 \qquad (4.109)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ та

$$||g_1||_{MB^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{\mathbf{s}:||\mathbf{s}||_1 = j_1} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(g_1)||_p}{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})} = C_6 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} \sup_{\mathbf{s}:||\mathbf{s}||_1 = j_1} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \ll 1 \quad (4.110)$$

при $\theta = \infty$.

Таким чином, з (4.109), (4.110) слідує, що $g_1 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ при деякому значенні $C_6 > 0$.

Тепер, прийнявши до уваги (4.102), (4.103), (4.107), (4.108), (4.50) та (4.51), будемо мати

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \geq \sigma_m(g_1)_q \geq \inf_{\Theta_m} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} g_1(\mathbf{x}) \overline{P_1(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} \inf_{\Theta_m} \left(||v_1||_2^2 - ||u_1||_2^2 \right) =$$

$$= \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} \inf_{\Theta_m} \left\| \sum_{\mathbf{k} \in Q_{j_1+1} \setminus Q_{j_1} \setminus \Theta_m} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \right\|_2^2 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} (2^{j_1} j_1^{d-1} - m) \asymp \omega(2^{-j_1}) 2^{j_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}.$$

Оцінка знизу в (4.55) встановлена.

Тепер перейдемо до встановлення оцінки знизу в (4.56). Для цього покладемо

$$j_2 = \frac{q}{2} \log m \tag{4.111}$$

та представимо функцію P_2, що задовольняє умови $P_2 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $||P_2||_{q'} \leq 1$, у вигляді

$$P_2 = C_7 2^{-\frac{j_2}{q}} (v_2 - u_2), \tag{4.112}$$

де

$$v_2 = \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s}^*)}(\mathbf{x}), \tag{4.113}$$

$$u_2 = \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m \cap \rho(\mathbf{s}^*)} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{4.114}$$

а Θ_m — довільна множина векторів $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ з $\mathbb{Z}^d$ така, що $\#\Theta_m = m$ і $\mathbf{s}^* : ||\mathbf{s}^*||_1 = j_2$.

В якості екстремальної розглянемо таку функцію

$$g_2 = C_8 \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p})} v_2 = C_8 \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p})} \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s}^*)}(\mathbf{x}), \ C_8 > 0, \tag{4.115}$$

яка при деякому значенні $C_8 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$.

Далі, враховуючи (4.102), (4.111)–(4.115), будемо мати

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \geq \sigma_m(g_2)_q \geq \inf_{\Theta_m} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} g_2(\mathbf{x}) \overline{P_2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \inf_{\Theta_m} (||v_2 - u_2||_2^2) =$$

$$= \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \inf_{\Theta_m} \left\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s}^*)\setminus\Theta_m} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \right\|_2^2 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (2^{j_2} - m) \asymp \omega(2^{-j_2}) 2^{j_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу в (4.56) встановлено.

Теорему 4.4. доведено.

Зауваження 4.8. *При $\omega(\tau) = \tau^r$, $r = \alpha$, результат теореми для класів $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ відомий і встановлений А.С. Романюком [79].*

Зауваження 4.9. *Якщо $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то має місце оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \qquad (4.116)$$

яка випливає з (4.47) та (4.64), враховуючи вкладення (4.23) та нерівність (4.52).

Зауваження 4.10. *Порівнюючи при $m \asymp 2^n n^{d-1}$ оцінки (4.47) та (4.116) з (4.55) та (4.56) бачимо, що при виконанні умов доведеної теореми оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ є кращими за порядком, ніж оцінки $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $E_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$.*

4.4. Конструктивне розріджене тригонометричне наближення класів Нікольського–Бєсова функцій для критичного значення показника гладкості

В даному підрозділі вивчаються питання, що пов'язані з одержанням точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення класів функцій, які близькі та тісно пов'язані з класами Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю, для показника гладкості $r = \frac{1}{p}$, який називають критичним показником гладкості. Одержана точна за порядком оцінка найкращого m-членного тригонометричного наближення згаданих класів є конструктивною, оскільки верхня оцінка реалізується конструктивним методом, що базується на ґріді (greedy) алгоритмі. Крім того, встановлені в підрозділі оцінки відрізняються за порядком від одержаних А.С. Романюком [79] точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Бєсова мішаної гладкості при тих же значеннях відповідних параметрів. Зазначимо, що в роботах [79], [135], [195], [116] як розглядувані тут класи, так і класи Бєсова не розрізняються з точки зору їх найкращого m-членного тригонометричного наближення. Іншими словами, в раніше розглянутих в [135], [195], [116] ситуаціях, у випадку як великої, так і малої гладкості, порядкові оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення обох класів збігаються, про що більш детально буде йти мова в коментарях до результатів даного підрозділу.

Наведемо означення ще одного функціонального класу.

Для $f \in L_1$ покладемо

$$f_j := \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

та розглянемо клас функцій

$$\mathbf{MW}_p^{r,b} := \{f : ||f||_{MW_p^{r,b}} \leq 1\},$$

де

$$||f||_{MW_p^{r,b}} := \sup_j ||f_j||_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)b}, \tag{4.117}$$

$$MW_p^{r,b} := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) : ||f||_{MW_p^{r,b}} < \infty\},$$

а $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\bar{j} := \max\{1; j\}$.

Для $r > 0$, $1 < p \leq 2$, $p \leq \theta \leq \infty$ має місце вкладення

$$\mathbf{MH}_{p,\theta}^r \subset \mathbf{MW}_p^{r,1/p-1/\theta}, \tag{4.118}$$

встановлення якого випереджає доведення основного результату, яке базується на використанні (4.118) та теореми IV.3.

Для класів $\mathbf{MW}_p^{r,b}$ В.М. Темляковим [135] встановлено таке твердження.

Теорема IV.3 [135, теорема 3.5]. *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$ та $r = 1/p$. Тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MW}_p^{r,b})_q \asymp m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)(b+1-1/p)+1}. \tag{4.119}$$

Оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, що базується на ґріді (greedy) алгоритмі.

Сформулюємо тепер основний результат даного підрозділу.

Теорема 4.5. *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $p \leq \theta \leq \infty$ та $r = 1/p$. Тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_{p,\theta}^r)_q \asymp m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}. \tag{4.120}$$

Оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.

Перш ніж перейтидо доведення оцінки (4.120), наведемо деякі коментарі.

Зауваження 4.11. *Точні за порядком оцінки величини* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ *при* $1 < p \leq 2 < q < \infty$ *встановлені в [135], [195], [116]. А саме, в [135] розглянутий випадок* $r > 1/p$, $1 \leq \theta \leq \infty$, *в [195] —* $1/p - 1/q < r < 1/p$, $\theta = \infty$, *а в [116] —* $\max\{1/p - 1/q; 1/p - q'/(q\theta')\} < r < 1/p$, $1 < \theta < \infty$ *і* $1/p - 1/q < r < 1/p$, $1 \leq \theta < q$, *де* $a : 1/a + 1/a' = 1$. *Тому дана теорема доповнює результати робіт [135], [195], [116] (див. також [168]), які стосуються точних за порядком оцінок величин* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, *які збігаються за порядком з оцінками величин* $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, *які встановленні А.С. Романюком [79]. В згаданих роботах [135], [195] оцінки зверху для* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ *забезпечуються конструктивними методами, що базуються на ґріді (greedy) алгоритмах.*

Зауваження 4.12. *Ще однією особливістю результату теореми 4.5, в порівнянні з результатами робіт [135, 195, 116], є те, що точні за порядком оцінки* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ *гірші (за винятком лише випадку, коли* $\theta = \infty$, *тобто* $\mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p$*), ніж* $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ *(див. [79, Теорема 2.1]), а саме, за умов теореми 4.5 має місце оцінка*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{1/\theta} \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

Зауваження 4.13. *Напевно, вперше відмінність в точних за порядком оцінках величин* $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ *(див. [79, Теорема 3.1]) і* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ *(див. [11, Теорема 6.1]) була виявлена Д.Б. Базархановим [11], зокрема, при розгляді випадку* $1 < p \leq q \leq 2$, $1 \leq \theta < q$, $r = 1/p - 2/q + 1/\theta$ *маємо*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log\log m)^{1/\theta} \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

Доведення теореми 4.5.

Спочатку покажемо, що $\mathbf{MH}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MW}^{r,1/p-1/\theta}_p$ при $r > 0$, $1 < p \leq 2$, $p \leq \theta \leq \infty$

Розглянемо послідовно випадки $\theta = p$, $\theta = \infty$, $p < \theta < \infty$.

При $\theta = p$ згідно з (4.117), наслідком до теореми Літтльвуда–Пелі, який виражається співвідношенням

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p \le 2, \tag{4.121}$$

та (4.21) маємо

$$||f||_{MW_p^{r,0}} = \sup_j \left\| \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \cdot 2^{rj} \ll$$

$$\ll \sup_j \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{r||\boldsymbol{s}||_1} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \right)^p \right)^{1/p} = ||f||_{MH^r_{p,p}}, \tag{4.122}$$

звідки бачимо, що $\mathbf{MH}^r_{p,p} \subset \mathbf{MW}^{r,0}_p$.

Внаслідок (4.117), (4.121), (4.21) та (3.34) для $\theta = \infty$ одержуємо

$$||f||_{MW_p^{r,1/p}} = \sup_j \left\| \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-\frac{d-1}{p}} \ll$$

$$\ll \sup_j \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{r||\boldsymbol{s}||_1} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \right)^p \right)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-\frac{d-1}{p}} \le$$

$$\le \sup_{j : ||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{r||\boldsymbol{s}||_1} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \right) \cdot \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} 1 \right)^{1/p} (\bar{j})^{-\frac{d-1}{p}} \ll ||f||_{MH^r_p}, \tag{4.123}$$

звідки робимо висновок про те, що $\mathbf{MH}^r_p \equiv \mathbf{MH}^r_{p,\infty} \subset \mathbf{MW}^{r,1/p}_p$.

Для $p < \theta < \infty$, враховуючи (4.117), (4.121), нерівність Гельдера, а також (4.21) та (3.34), виводимо

$$||f||_{MW_p^{r,1/p-1/\theta}} = \sup_j \left\| \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll \sup_j \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{r||\boldsymbol{s}||_1} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \right)^p \right)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \le$$

$$\leq \sup_j \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{r||\boldsymbol{s}||_1} \, ||\delta_{\boldsymbol{s}}(f)||_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} 1 \right)^{1/p - 1/\theta} (\bar{j})^{-(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \ll ||f||_{MH^r_{p,\theta}}, \qquad (4.124)$$

що вказує на справедливість вкладення (4.118) для $p < \theta < \infty$.

Беручи до уваги (4.122)–(4.124), робимо висновок про те, що вкладення (4.118) є встановленим.

Тепер перейлемо безпосередньо до доведення (4.120).

Доведення теореми 4.5 в частині, яка стосується, перш за все, встановлення для (4.120) оцінки зверху базується на використанні доведеного вище вкладення (4.118) і теореми IV.3.

Тепер перейдемо до встановлення в (4.120) оцінки знизу. Для заданого m виберемо N та n із співвідношень

$$2^N \asymp m^{q/2} (\log m)^{(d-1)(1-q)} \qquad (4.125)$$

та

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \qquad (4.126)$$

відповідно.

Розглянемо функцію

$$g(\mathbf{x}) := C_1 N^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n < j \leq N} 2^{-j} \sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}(\mathbf{x}).$$

Покажемо, що $g \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ для $1 \leq \theta \leq \infty$.

Поскільки

$$||\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}||_p \asymp 2^{||s||_1 (1 - \frac{1}{p})}, \quad 1 < p < \infty, \qquad (4.127)$$

то, згідно з (4.21) та (3.34), для $1 \leq \theta < \infty$ маємо

$$||g||_{MH^{1/p}_{p,\theta}} = \sup_j \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1 = j} \left(2^{||\boldsymbol{s}||_1 / p} ||\delta_{\boldsymbol{s}}(g)||_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_1 N^{-\frac{d-1}{\theta}} \sup_{j\colon n<j\leq N} \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} \left(2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-1/p)} ||\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}||_p\right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{d-1}{\theta}} \sup_{j\colon n<j\leq N} \left(\sum_{||\boldsymbol{s}||_1=j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp N^{-\frac{d-1}{\theta}} \sup_{j\colon n<j\leq N} j^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то, беручи до уваги (4.21), одержуємо

$$||g||_{MH_p^{1/p}} \ll \sup_{\boldsymbol{s}\colon n<||\boldsymbol{s}||_1\leq N} 2^{-||\boldsymbol{s}||_1(1-1/p)} ||\mathcal{D}_{\rho(\boldsymbol{s})}||_p \asymp 1.$$

Далі, візьмемо довільну множину K_m, яка складається з m векторів $\mathbf{k}$. Розглянемо функцію

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

де

$$\Delta(n,N) := \bigcup_{\boldsymbol{s}\colon n<||\boldsymbol{s}||_1\leq N} \rho(\boldsymbol{s}). \tag{4.128}$$

Для довільного тригонометричного полінома t з “номерами” гармонік з K_m, з одного боку, маємо

$$\langle g - t, h\rangle \ \leq ||g-t||_q \cdot ||h||_{q'}. \tag{4.129}$$

Але в той же час, з іншого боку,

$$\langle g - t, h\rangle \ = \ \langle g, h\rangle \ = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}). \tag{4.130}$$

Взявши до уваги (4.125), (4.126), (4.128), маємо

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}) \gg (N-n) N^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{4.131}$$

Далі, враховуючи (4.125), (4.126), (4.128), одержуємо

$$||h||_{q'} \le \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_{q'} + \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\cap K_m} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_{q'} \ll$$

$$\ll 2^{N(1-\frac{1}{q'})} N^{\frac{d-1}{q'}} + \Big\| \sum_{\mathbf{k}\in K_m} e^{i(\mathbf{k},\cdot)} \Big\|_2 \ll 2^{\frac{N}{q}} N^{\frac{d-1}{q'}} + m^{1/2} \asymp m^{1/2}. \qquad (4.132)$$

Далі, виходячи з (4.130) – (4.132), (4.125), (4.126), одержуємо

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^{1/p}_{p,\theta})_q \ge \sigma_m(g)_q \gg (N-n) N^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} m^{-1/2} \asymp$$

$$\asymp m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})+1}.$$

Оцінку знизу в (4.120) встановлено.

Теорему 4.5 доведено.

4.5. Розріджене тригонометричне наближення класів Нікольського–Бєсова функцій з малою мішаною гладкістю

Далі розглянемо задачі, які стосуються знаходження точних за порядком оцінок такого разрідженого тригонометричного наближення, як найкраще m-членне тригонометричне наближення $\sigma_m(F)_q$, де в якості класів F розглядаються як класи Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ функцій мішаної гладкості, так і близькі до них функціональні класи. Приділяється увага тим співвідношенням між параметрами p та q, коли $1 < p < q < \infty$, $q > 2$. А. С. Романюком (2003) були знайдені точні за порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le \theta \le \infty$ (оцінки зверху при цьому є неконструктивними), коли $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r > 1/p - 1/q$ або $2 < p < q < \infty$, $r > 1/2$. В доповнення до досліджень А. С. Романюка недавно В. М. Темляков одержав конструктивні оцінки зверху (які забезпечуються конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі) величини $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le \theta \le \infty$ у випадку більшої гладкості, тобто при $1 < p < q < \infty$, $q > 2$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$, розглянувши при цьому більш широкі класи $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ ($\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_p$, $1 \le \theta < \infty$). Менше уваги було приділено конструктивним оцінкам зверху величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ у випадку малої гладкості, тобто при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \le 1/p$. Для $1 < p \le 2 < q < \infty$ В. М. Темляковим була знайдена конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, якщо $\theta = \infty$, $1/p - 1/q < r < 1/p$ або $\theta = p$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, де $1/q + 1/q' = 1$, а автором — конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, якщо $r = 1/p$, $p \le \theta \le \infty$, при цьому виявилось, що $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q (\log m)^{1/\theta}$, $r = 1/p$, $p \le \theta < \infty$. В даному підрозділі встановлюється конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (або $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$), $1 < p \le 2 < q < \infty$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, коли $p < \theta < \infty$ (або $p \le \theta < \infty$), а також точні за порядком (хоча й неконструктивні зверху) оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $2 < p < q < \infty$, $\theta = 1$, $r = 1/2$, та $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta < p$, $r = 1/p$, які доповнюють відповідно результати А. С. Романюка та недавні дослідження автора.

Даний підрозділ присвячений питанням, що пов'язані з одержанням точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення $\sigma_m(F)$, що є одним із видів розрідженого тригонометричного наближення, де в якості класів F розглядаються класи Бєсова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ (періодичних функцій з малою мішаною гладкістю), або близькі до них функціональні класи.

Увага буде приділена тим співвідношенням між параметрами p та q, коли $1 < p \le 2 < q < \infty$.

Опишемо коротко історію досліджуваних тут питань, підсумовуючи, таким чином, деякі з результатів, що викладені у попередніх підрозділах.

А. С. Романюком [79] були знайдені точні за порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, коли $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r > 1/p - 1/q$, або $2 < p < q < \infty$, $r > 1/2$.

При цьому одержані оцінки зверху є неконструктивними, оскільки побудова наближаючого m-членного тригонометричного поліному базувалась на викорстанні леми Белінського (див. [14], або [79, лема 2.1]), яка має неконструктивний характер.

В. М. Темляковим [135] для введених ним більш ширших класів $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, ніж класи Бєсова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, були знайдені точні за порядком оцінки $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, коли $1 < p < q < \infty$, $q > 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$, тобто у випадку великої гладкості. Згадані оцінки зверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ є конструктивними та реалізуються конструктивним методом, що базується на ґріді (greedy) алгоритмі, який запропонований та розроблений В. М. Темляковим [135].

У випадку $1 < p \le q \le 2$, $r > 1/p - 1/q$ точні за порядком (до того ж конструктивні) оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ встановлені, відповідно, А. С. Романюком [79] та Д. Б. Базархановим [11], при цьому $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ за винятком випадку $1 \le \theta < q$,

$r = 1/p - 2/q + 1/\theta$, коли $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q (\log\log m)^{1/\theta}$.

Менше уваги було приділено конструктивним оцінкам зверху величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ у випадку малої гладкості, зокрема, коли $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq 1/p$. Для $1 < p \leq 2 < q < \infty$ В. М. Темляковим [195] була встановлена конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, якщо $\theta = \infty$, $1/p - 1/q < r < 1/p$, або $\theta = p$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, де $1/q + 1/q' = 1$, а в роботі [104] — конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, якщо $r = 1/p$, $p \leq \theta \leq \infty$, при цьому виявилось, що $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q (\log m)^{1/\theta}$, $r = 1/p$, $p \leq \theta < \infty$.

В роботі [116] також були знайдені точні за порядком оцінки (при цьому оцінки зверху не є конструктивними і базуються на використанні згаданої леми Белінського) для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, коли $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r \in (1/p - 1/q; 1/p)\backslash\{1/p - q'/(q\theta')\}$, які збігаються зі встановленими А. С. Романюком [79] оцінками для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ при таких же обмеженнях на параметри p, q, r та θ.

В даному підрозділі встановлюється конструктивна оцінка зверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (або $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$), $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, коли $p < \theta < \infty$ (або $p \leq \theta < \infty$), а також точні за порядком (хоча й неконструктивні зверху) оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $2 < p < q < \infty$, $\theta = 1$, $r = 1/2$.

Використовуючи неконструктивний (з точки зору одержання верхніх оцінок) підхід А.С. Романюка [79], ми також одержали точні за порядком оцінки величини $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $r = 1/p$ у відсутньому (див. теорему 4.5) випадку $1 \leq \theta < p$, хоча насправді одержані в наведеній нижче теоремі 4.8 точні за порядком оцінки справджуються для всіх скінченних значень параметра θ, тобто для $1 \leq \theta < \infty$. Що ж до, в даному контексті, параметра $\theta = \infty$, то точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MH}^r_p = \mathbf{MB}^r_{p,\infty} = \mathbf{MH}^r_{p,\infty}$ встановлено А.С. Романюком [79] з використанням для оцінки зверху техніки, пов'язаної з лемою Е.С. Белінського (див. лему II.1) неконструктивного типу, а пізніше — В.М. Темляковим [195] з використанням для оцінки зверху техніки, пов'язаної з побудовою конструктивного методу, що базується на ґріді (greedy) алгоритмі.

Мають місце такі твердження.

Теорема 4.6. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $p \leq \theta < \infty$ *і* $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}. \tag{4.133}$$

Оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, що базується на ґріді (greedy) алгоритмі.

Теорема 4.7. *Нехай* $2 < p < q < \infty$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{1/2}_{p,1})_q \asymp m^{-1/2}. \tag{4.134}$$

Теорема 4.8. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ *і* $r = 1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \tag{4.135}$$

На завершення сформульованих результатів наведемо деякі коментарі.

Зауваження 4.14. *Питання про конструктивні оцінки зверху для* $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ *та* $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ *у випадку, коли* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, *а* $p \leq \theta < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq (1/p - 1/q)q'$, *або* $1 \leq \theta < p$, $1/p - 1/q < r < 1/p$, *залишається, напевно, відкритим.*

Зауваження 4.15. *У випадку* $d = 1$ *теорема 4.7 доведена в [190] (див. теорему 2.4).*

Зауваження 4.16. *За умов теореми 4.8 має місце оцінка*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

Доведення результатів.

Доведення теореми 4.6.

Оцінка зверху базується на використанні вкладення (4.118), а також

(4.119) (для $b = 1/p - 1/\theta$), згідно з якими маємо

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \leq \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \leq \sigma_m(\mathbf{MW}^{r,1/p-1/\theta}_p)_q \asymp$$

$$\asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(1/p-1/\theta+(q-1)(r-(1/p-1/q)q')} =$$

$$= m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}.$$

Нижня оцінка в (4.133) випливає з вкладення $\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ та співвідношення (4.55) у випадку $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$.

***Доведення теореми* 4.7.**

Оцінка зверху в (4.134) слідує з роботи [79] (див. теорему I.6) за рахунок вкладення $\mathbf{MB}^{1/2}_{p,1} \subset \mathbf{MB}^{1/2}_{2,1}$, $p > 2$.

При знаходженні оцінки знизу в (4.134) та побудові функції, на якій ця оцінка реалізується, будемо використовувати поліноми Рудіна – Шапіро (2.26).

Отож, виберемо за заданим $m \in \mathbb{N}$ число $n \in \mathbb{N}$ таке, щоб виконувались співвідношення

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{4.136}$$

$$\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} \geq 2m, \tag{4.137}$$

і розглянемо функцію

$$g(\mathbf{x}) := C_1 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j). \tag{4.138}$$

Зазначимо, що згідно з (2.27) маємо

$$\Big\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(\cdot) \Big\|_p = \prod_{j=1}^{d} \|R_{s_j}(\cdot)\|_p \leq \prod_{j=1}^{d} \|R_{s_j}(\cdot)\|_\infty \ll 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2}. \tag{4.139}$$

Переконаємось, що $g \in \mathbf{MB}^{1/2}_{p,1}$ при відповідному значенні $C_1 > 0$.

Дійсно, беручи до уваги (4.139) та (3.34), одержуємо

$$\|g\|_{MB^{1/2}_{p,1}} = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2} \|\delta_{\mathbf{s}}(g)\|_p = C_1 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2} \Big\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(\cdot) \Big\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} = n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} 1 \asymp 1.$$

Далі, візьмемо будь-яку множину K_m, яка містить m векторів $\mathbf{k}$. Розглянемо додаткову функцію

$$h = v - u, \tag{4.140}$$

де

$$v = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \tag{4.141}$$

$$u = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n}^{*} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \tag{4.142}$$

а символ “$*$” у верхньому індексі суми в u означає, що поліном u містить тільки ті гармоніки функції v, які мають номери з множини K_m. А тому, враховуючи (4.136) та (4.137), маємо

$$\|h\|_{q'} \le \|v - u\|_2 \le \|v\|_2 + \|u\|_2 \le$$

$$\le (\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\})^{1/2} + m^{1/2} \ll m^{1/2}. \tag{4.143}$$

Для будь-якого тригонометричного полінома t з гармоніками з K_m, з одного боку, маємо для (4.140), взявши до уваги (4.141) та (4.142), таку оцінку

$$\langle g - t, h \rangle \le \|g - t\|_q \cdot \|h\|_{q'}. \tag{4.144}$$

З іншого боку, беручи до уваги (4.136)–(4.138), одержуємо

$$\langle g - t, h \rangle = \langle g, h \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} \setminus K_m} |\hat{g}(\mathbf{k})| \gg$$

$$\gg 2^{-n}n^{-d+1}(\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} - m) \geq 2^{-n}n^{-d+1}(2^n n^{d-1} - m) \asymp 1. \tag{4.145}$$

Таким чином, виходячи з (4.143)–(4.145), маємо

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{1/2}_{p,1})_q \geq \sigma_m(g)_q \gg m^{-1/2}.$$

Нижня оцінка в (4.134) встановлена.

***Доведення теореми* 4.8.**

Встановимо в (4.135) спочатку оцінку зверху.

За заданим $m \in \mathbb{N}$ виберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались умови $m > \#Q_n$ та (4.136), де $Q_n := \{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 < n\}$, а $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Внаслідок вкладення $\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ побудуємо поліном, який буде реалізовувати для $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, у вигляді

$$P(\Theta_m) = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{n \leq \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}}), \tag{4.146}$$

де $P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})$ — поліноми, які наближують “блоки” $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ згідно з лемою Белінського, а

$$n_1 = \frac{(n + (d-1)\log n)q}{2}, \tag{4.147}$$

$$N_{\mathbf{s}} = [2^n n^{(d-1)/\theta - 1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p] + 1. \tag{4.148}$$

Покажем спочатку, що

$$\sum_{n \leq \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \ll n^{(d-1)/\theta' + 1}. \tag{4.149}$$

Дійсно,використовуючи нерівність Гельдера, а також враховуючи (3.34), (4.147), маємо

$$\sum_{n \leq \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p = \sum_{n \leq j < n_1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{n \leq j < n_1} \Big(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} (2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p)^\theta \Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} 1 \Big)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll \|f\|_{MH^{1/p}_{p,\theta}} \sum_{n\le j<n_1} j^{(d-1)/\theta'} \le n_1^{(d-1)/\theta'} \sum_{n\le j<n_1} 1 \asymp n^{(d-1)/\theta'+1}.$$

Переконаємось тепер, що поліном $P(\Theta_m)$ містить за порядком не більше ніж m гармонік.

Поскільки $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$, то внаслідок (4.148), (4.149) та (4.136) переконуємось, що

$$\#\Theta_m = \#Q_n + \sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} N_{\mathbf{s}} \ll 2^n n^{d-1} + n^d +$$

$$+ 2^n n^{(d-1)/\theta-1} \sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \ll 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Беручи до уваги (4.146), маємо

$$\|f - P(\Theta_m)\|_q \le \Big\| \sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} (\delta_{\mathbf{s}}(f) - P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})) \Big\|_q + \Big\| \sum_{\|\mathbf{s}\|_1\ge n_1} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q =: J_1 + J_2. \tag{4.150}$$

Скориставшись наслідком до теореми Літтльвуда—Пелі, лемою Белінського, нерівністю різних метрик Нікольского, а також врахувавши (4.148), (4.149) та (4.136), одержимо

$$J_1 \ll \Big(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f) - P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})\|_q^2 \Big)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_2^2 \Big)^{1/2} \ll \Big(\sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{2\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \Big(2^{-n} n^{1-(d-1)/\theta} \sum_{n\le\|\mathbf{s}\|_1<n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \Big)^{1/2} \ll \Big(2^{-n} n^{2-(d-1)/\theta+(d-1)/\theta'} \Big)^{1/2} =$$

$$= \Big((2^n n^{d-1})^{-1} n^{2d(1-1/\theta)+2/\theta} \Big)^{1/2} \asymp m^{-1/2} (\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \tag{4.151}$$

Враховуючи (4.147) та (4.136), виводимо

$$J_2 \le \mathcal{E}_{Q_{n_1}}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll 2^{-(r-1/p+1/q)n_1} n_1^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} =$$

$$= 2^{-(n+(d-1)\log n)/2} n_1^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} \ll$$

$$\ll m^{-1/2}(\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \qquad (4.152)$$

Підставляючи (4.151), (4.152) в (4.150), одержуємо в (4.135) потрібну оцінку зверху.

У випадку $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r = 1/p$ оцінка знизу в (4.135) міститься в теоремі 4.5 та має місце для всіх скінченних значень θ, тобто для $1 \leq \theta < \infty$.

Таким чином, теорему 4.8 доведено.

Проаналізувавши результати та доведення теорем 4.4 і 4.6, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 4.4′. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < \frac{1}{p}$. *Якщо* $1 < \theta < \infty$, $\max\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\} < r < \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}.$$

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, *то*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}.$$

У випадку $p \leq \theta < \infty$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

Проаналізувавши результати та доведення теорем 4.5 і 4.8, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 4.5′. *Нехай* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r = 1/p$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}.$$

У випадку $p \leq \theta < \infty$ *оцінка зверху забезпечується конструктивним методом, який базується на ґріді (greedy) алгоритмі.*

4.6. Висновки до розділу 4

Досліджено два види розрідженого тригонометричного наближення, такі як найкраще m-членне ортогональне тригонометричне наближення та найкраще m-членне тригонометричне наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з різними типами мішаної гладкості у просторі L_q.

Зокрема, в підрозділі 4.1 знайдено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного ортогонального тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю спеціального вигляду у просторі L_q, $1 < q \leq \infty$.

У підрозділі 4.2 встановлено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бєсова $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю спеціального вигляду в метриці простору L_q, для значень параметрів p та q, що задовольняють нерівність $1 < p \leq 2 < q < \infty$, або $2 < p < q < \infty$. При цьому оцінки зверху забезпечуються конструктивним методом, що базується на ґріді (greedy) алгоритмах.

У наступному підрозділі, тобто в підрозділі 4.3, знайдено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного тригонометричного наближення, як класів Нікольського-Бєсова $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$, так і класів типу Нікольського–Бєсова $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю спеціального вигляду в метриці простору L_q, для значень параметрів p та q, що задовольняють нерівність $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

У двох останніх підрозділах 4.4 та 4.5 встановлено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю у просторі L_q, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, у випадку малої гладкості

($\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < \frac{1}{p}$) та "критичного" значення показника гладкості ($r = \frac{1}{p}$).

Варто зазначити, що у випадку малої гладкості величини найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ і $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ збігаються за порядком. Що стосується критичного показника гладкості $r = \frac{1}{p}$, то в оцінках згаданої апроксимаційної характеристики на цих класах виявлено відмінності в логарифмічний шкалі.

Основні результати розділу 4 опубліковано у роботах [40, 41, 104, 105, 116, 130].

Розділ 5

Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара

5.1. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду східчасто–гіперболічними сумами Фур'є–Хаара

Нехай $L_p := L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 1-періодичних за кожною зі змінних та сумовних у степені p на кубі $[0,1]^d$ функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ з нормою, яка визначається таким чином:

$$||f||_p := ||f||_{L_p} := \left(\int\limits_{[0,1]^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Будемо вважати, що простір $L_\infty([0,1]^d)$ складається з 1-періодичних за кожною зі змінних та неперервних на $[0,1]^d$ функцій та наділений звичайною рівномірною нормою.

Скрізь нижче будемо припускати, що для функцій $f \in L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, виконується умова

$$\int\limits_0^1 f(\mathbf{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Наведемо означення класів функцій $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$, розглянутих в роботі [70].

Для $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ та $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_d)$ визначимо мішану різницю $\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$ за допомогою рівності

$$\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_d} \ldots \Delta_{h_1} f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_d}(\ldots(\Delta_{h_1} f(\mathbf{x}))\ldots),$$

де

$$\Delta_{h_j} f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(\mathbf{x}),\ j = 1, \ldots, d.$$

Для $f \in L_p([0,1]^d)$ та для $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$, розглянемо мішаний модуль неперервності

$$\Omega(f, \mathbf{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1,\ldots,d}} ||\Delta_{\mathbf{h}} f(\cdot)||_p. \tag{5.1}$$

Нехай $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0,\ \ t_j > 0,\ \ j = 1, \ldots, d;\ \ \Omega(\mathbf{t}) = 0,\ \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0;$

2) $\Omega(\mathbf{t})$ зростає за кожною зі змінних;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq \prod\limits_{j=1}^{d} m_j\, \Omega(\mathbf{t}),\ \ m_j \in \mathbb{N},\ \ j = 1, \ldots, d;$

4) $\Omega(\mathbf{t})$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$.

Для заданої функції $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності визначимо клас функцій

$$\mathbf{MH}_p^{\Omega} = \{f \in L_p([0,1]^d):\ \Omega(f, \mathbf{t})_p \leq \Omega(\mathbf{t})\}. \tag{5.2}$$

На функцію $\Omega(\mathbf{t})$ будемо накладати деяку додаткову умову (S^{α}), яку називають умовою Барі–Стєчкіна [13] та яку було наведено раніше.

Нижче будемо вважати, що функція $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє умову (S^{α}), якщо вона задовольняє цю умову за кожною змінною t_i при фіксованих значеннях інших змінних t_j, $j \neq i$.

Зазначимо, що в даному та наступному підрозділах будуть розглядатись класи $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$ з мажорантами спеціального вигляду:

$$\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d), \tag{5.3}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності, яка задовольняє умову (S^{α}). Зрозуміло, що в такому разі функція $\Omega(\mathbf{t})$, задана формулою (5.3), буде задовольняти сформульовані вище умови 1–4 та (S^{α}).

У випадку, якщо $\Omega(\mathbf{t})$ матиме вигляд (5.3), будемо використовувати позначення $\mathbf{MH}_p^{\omega}$ замість $\mathbf{MH}_p^{\Omega}$.

Перейдемо тепер до означення тензорної системи Хаара.

Але спочатку наведемо означення системи Хаара для випадку функції однієї змінної.

Нехай D_s, $s \geq 0$, позначає множину всіх двійкових інтервалів на відрізку $[0,1]$ вигляду $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$.

Покладемо для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$,

$$H_I(t) = |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad t \in [j2^{-s}, (j+\frac{1}{2})2^{-s}), \\ -1, & \text{якщо} \quad t \in [(j+\frac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}), \\ 0, & \text{якщо} \quad t \notin I, \end{cases}$$

де $|I| = 2^{-s}$ — довжина двійкового інтервалу I.

Для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ означимо

$$\mathcal{D}_{\mathbf{s}} := \{I = I_1 \times \dots \times I_d,\ I_j \in D_{s_j},\ j = 1, \dots, d, \}$$

і

$$Q_n := \bigcup_{||\mathbf{s}||_1 \leq n} \mathcal{D}_{\mathbf{s}}.$$

Множина Q_n є східчастим гіперболічним хрестом. Для кількості елементів Q_n має місце співвідношення (див., наприклад, [55])

$$\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{5.4}$$

В d-вимірному випадку для $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ позначимо

$$H_I(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{d} H_{I_j}(x_j)$$

і

$$\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} c_I(f) H_I(\mathbf{x}),$$

де

$$c_I(f) := (f, H_I) := \int\limits_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) H_I(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

В роботі [6] встановлено, що для будь-якої функції $f \in L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, має місце нерівність

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \le 2^{d(\frac{1}{p}-1)} ||\Delta_{2^{-(s_1+1)}} \ldots \Delta_{2^{-(s_d+1)}} f||_p, \ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^d. \tag{5.5}$$

Таким чином, для $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$ згідно з (5.1)–(5.3) та (5.5) одержуємо

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \ll \Omega(f, 2^{-(\mathbf{s}+\mathbf{1})})_p \le \Omega(2^{-(\mathbf{s}+\mathbf{1})}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} 2^{-(s_j+1)}\right) \le \omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}), \tag{5.6}$$

де під співвідношенням

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \ll \Omega(f, 2^{-(\mathbf{s}+\mathbf{1})})_p$$

в (5.6) будемо розуміти нерівність

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \le C(p,d) \Omega(f, 2^{-(\mathbf{s}+\mathbf{1})})_p$$

з деякою сталою $C(p,d)$, яка від $\mathbf{s}$ та f не залежить.

Наведемо ще деякі співвідношення, якими будемо користуватись.

Теорема V.1 (Літтльвуда–Пелі) (див., наприклад, [36, Гл. 3, с. 85]). *Для будь-якої функції* $f \in L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, *має місце співвідношення*

$$C_1(p)||f||_p \leq \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\delta_s(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2(p)||f||_p. \tag{5.7}$$

З (5.7) слідують такі нерівності (див., наприклад, [204])

$$||f||_p \leq C_3(p) \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} ||\delta_s(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}, \tag{5.8}$$

$$||f||_p \geq C_4(p) \left(\sum_{s} ||\delta_s(f)||_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 < p \leq 2, \tag{5.9}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$. Зазначимо, що аналогічні до (5.8), (5.9) нерівності для тригонометричної системи також відомі (див., наприклад, [192, с. 37]).

Нехай $1 \leq p < q < \infty$, тоді для $f \in L_p([0,1]^d)$ має місце нерівність [202]

$$||f||_q \leq C(p,q,d) \left(\sum_{\mathbf{s}} \left(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{||\mathbf{s}||_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.10}$$

Враховуючи, що функція $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$, для $||\mathbf{s}||_1 > n$ можна записати співвідношення

$$\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}. \tag{5.11}$$

Визначимо величини, які будуть досліджуватись нижче. Позначимо

$$H(Q_n) := \left\{ t = \sum_{I \in Q_n} a_I H_I, a_I \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

— множина поліномів за тензорною системою Хаара з номерами індексів з множини Q_n. Тоді величина

$$E_{H(Q_n)}(f)_q := \inf_{t \in H(Q_n)} ||f - t||_q \tag{5.12}$$

позначає найкраще наближення функції f в метриці простору L_q поліномами з множини $H(Q_n)$. Сформулюємо одержану нами теорему, в якій встановлені точні за порядком оцінки величини

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q := \sup_{f\in\mathbf{MH}_p^{\omega}} E_{H(Q_n)}(f)_q. \tag{5.13}$$

Теорема 5.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < \alpha < 1$, *тоді*

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}, & 1 \le p < q < \infty, \\ \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{p_0}}, & 1 < q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (\infty,\infty), \end{cases} \tag{5.14}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Доведення. Доведемо спочатку оцінку зверху у випадку $1 \le p < q < \infty$. Будемо наближувати функцію $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$ частинними сумами Фур'є–Хаара, які складаються з доданків з індексами з Q_n:

$$S_{Q_n}(f) := S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{I\in Q_n} c_I(f)H_I =$$

$$= \sum_{|I|\ge 2^{-n}} (f, H_I)H_I = \sum_{||\mathbf{s}||_1\le n} \delta_{\mathbf{s}}(f). \tag{5.15}$$

В такому разі, беручи до уваги (5.10), (5.6), (5.11), можемо записати для $f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}$

$$E_{H(Q_n)}(f)_q \le ||f - S_{H(Q_n)}(f)||_q = \left\| \sum_{||\mathbf{s}||_1>n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1>n} \left(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||\mathbf{s}||_1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \left(\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1}} \, 2^{(-\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})||\mathbf{s}||_1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} 2^{-(\alpha - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))q||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \, 2^{-(\alpha - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))n} \, n^{\frac{d-1}{q}} = \omega(2^{-n}) \, 2^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})n} \, n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Нехай тепер $1 < q = p < \infty$. Використовуючи послідовно (5.8), (5.6), (5.11), одержуємо

$$E_{H(Q_n)}(f)_p \leq \left\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p \ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \left(\frac{\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})}{2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1}} \, 2^{-\alpha||\mathbf{s}||_1} \right)^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} 2^{-\alpha p_0 ||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{1}{p_0}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) \, n^{\frac{d-1}{p_0}}. \tag{5.16}$$

При $1 < q < p < \infty$ потрібна оцінка слідує з (5.16) внаслідок монотонності L_q-норми:

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q \leq E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_p \ll \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p_0}}.$$

Якщо ж $p = \infty$, $1 < q < \infty$, то, внаслідок вкладення $\mathbf{MH}_{\infty}^{\omega} \subset \mathbf{MH}_q^{\omega}$, $1 < q < \infty$, і (5.16), будемо мати

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_{\infty}^{\omega})_q \leq E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_{q+1} \leq E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_{q+1}^{\omega})_{q+1} \ll \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінки зверху встановлені.

Переходячи до одержання оцінок знизу, зазначимо, що вони є наслідком оцінок Фур'є-поперечників $d_m^{\perp}(\mathbf{MH}_p^{\omega}, L_q)$, встановлених в [148, 102], які визначаються формулою (див., наприклад, [141])

$$d_m^{\perp}(F, L_q) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m} \sup_{f\in F} ||f(\cdot) - \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i(\cdot)||_q,$$

де inf знаходиться за всіма ортогональними системами з m элементів. Зокрема, якщо функція $\Omega(\mathbf{t})$ задана формулою (5.3), а $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, то при $1 \le p < q < \infty$ [148]

$$d_m^{\perp}(\mathbf{MH}_p^{\omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})\, 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}, \tag{5.17}$$

а при $1 < q \le p \le \infty$ $((p,q) \ne (\infty, \infty))$ [102]

$$d_m^{\perp}(\mathbf{MH}_p^{\omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})\, n^{\frac{d-1}{p_0}}, \tag{5.18}$$

де $m \asymp 2^n n^{d-1}$.

Оскільки ми наближаємо функції з класу $\mathbf{MH}_p^{\omega}$ їх частинними сумами ряду Фур'є-Хаара, то користуючись (при $1 < q < \infty$) обмеженістю оператора ортогонального проектування на множину $H(Q_n)$ можемо записати

$$E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^{\omega})_q \asymp \sup_{f\in \mathbf{MH}_p^{\omega}} ||f - S_{H(Q_n)}(f)||_q \gg d_m^{\perp}(\mathbf{MH}_p^{\omega}, L_q), \tag{5.19}$$

де, згідно з (5.4), $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m$. Враховуючи (5.19), (5.17) і (5.18), одержуємо для (5.14) потрібні оцінки знизу.

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 5.1 доведено.

Коментарі до доведеної теореми 5.1 будуть зроблені наприкінці наступного підрозділу.

5.2. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара

Перейдемо до розгляду іншої апроксимаційної характеристики, яка визначає один з видів нелінійного наближення.

Нагадаємо, що для заданої множини $\mathcal{D}$ функцій з простору $L_q := L_q([0,1]^d)$ найкращим m-членним наближенням функції $f \in L_q([0,1]^d)$ за системою $\mathcal{D}$ називається величина (див., наприклад, [6])

$$\sigma_m(f,\mathcal{D})_q := \sigma_m(f,\mathcal{D})_{L_q} := \inf_{g_j \in \mathcal{D}, a_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \right\|_{L_q}, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{5.20}$$

Для $F \subset L_q([0,1]^d)$ покладаємо

$$\sigma_m(F,\mathcal{D})_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f,\mathcal{D})_q. \tag{5.21}$$

Розглядаючи в (5.21) в якості $\mathcal{D}$ тензорну систему Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$, сформулюємо і доведемо у випадку $F = \mathbf{MH}_p^{\omega}$, тобто для

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_p^{\omega},\mathcal{H})_q := \sup_{f \in \mathbf{MH}_p^{\omega}} \sigma_m(f,\mathcal{H})_q \tag{5.22}$$

такий результат.

Теорема 5.2. *Нехай* $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega \in S^{\alpha}$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, *тоді*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_p^{\omega},\mathcal{H})_q \asymp \omega\left(m^{-1}\log^{d-1} m\right)\left(\log^{d-1} m\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.23}$$

Доведення. Встановимо спочатку в (5.23) оцінку зверху для випадку

$1 < p, q < \infty$. За заданим m підберемо $n \in \mathbb{N}$, яке задовольняє співвідношення $m \asymp 2^n n^{d-1}$. Введемо такі позначення

$$\Delta Q_k := Q_k \backslash Q_{k-1},$$

$$N_k := \#\{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d, ||\mathbf{s}||_1 = k\},\ k \in \mathbb{N},$$

$$m_k := [\#\{\Delta Q_n\} 2^{-\kappa(k-n)}],\quad k = n+1, \ldots,\quad \kappa > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що

$$N_k \asymp k^{d-1}, \tag{5.24}$$

а

$$m_k \asymp 2^n n^{d-1} 2^{-\kappa(k-n)}, \tag{5.25}$$

згідно з (5.4).

Подамо $f \in \mathbf{MH}_p^\omega$ у вигляді

$$f = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \delta_s(f) = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} c_I(f) H_I =$$

$$= S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \sum_{I \in \mathcal{D}_s} c_I(f) H_I, \tag{5.26}$$

Побудуємо для функції f наближуючий поліном P, здійснивши певну процедуру вибору індексів.

Для кожного $\mathbf{s}, ||\mathbf{s}||_1 = k$, візьмемо $\left[m_k/N_k\right]$ найбільших за модулем коефіцієнтів (f, H_I), $H_I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$.

Оскільки $f \in \mathbf{MH}_p^\omega$, то беручи до уваги співвідношення (5.6), для будь-якого $\mathbf{s}$, $||\mathbf{s}||_1 = k$, можемо записати

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \ll \omega(2^{-k}). \tag{5.27}$$

Відомо (див., наприклад, [27, Гл. 10, с. 210]), що для будь-якого $p \in (1; \infty)$ та будь-яких дійсних a_{I_j}, $|I_j| = 2^{-m_j}$, $m_j = 0, 1, \ldots$, має місце рівність

$$\Big\| \sum_{|I_j|=2^{-m_j}} a_{I_j} H_{I_j} \Big\|_p = 2^{m_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Bigg(\sum_{|I_j|=2^{-m_j}} |a_{I_j}|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Тому для $||\mathbf{s}||_1 = k$

$$||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p = 2^{||\mathbf{s}||_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \Bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_{\mathbf{s}}} |(f, H_I)|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} = \Bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_{\mathbf{s}}} |(f, H_I)|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} 2^{-k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}. \tag{5.28}$$

Зі співвідношення (5.28), беручи до уваги (5.27), одержуємо

$$\Bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_{\mathbf{s}}} |(f, H_I)|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \ll \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}, \tag{5.29}$$

де $||\mathbf{s}||_1 = k$, а в лівій частині (5.29) міститься 2^k доданків. Зазначимо, що якщо ми видалимо $\big[m_k/N_k\big]$ найбільших доданків $|(f, H_I)|^p$ з суми в (5.29), то кожен з доданків, що залишились, внаслідок співвідношення

$$[m_k/N_k] |(f, H_I)|^p \ll \omega^p(2^{-k}) 2^{-k(1-\frac{p}{2})}$$

буде задовольняти нерівність

$$|(f, H_I)| \ll \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(\frac{N_k}{m_k} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.30}$$

Таким чином, нами побудовано поліном P, який містить всі видалені доданки, а також ті, які містяться в сумі $S_{H(Q_n)}(f)$. Оскільки, згідно з (5.4) і (5.25),

$$\#Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} m_k \asymp 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\kappa(k-n)} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m,$$

то звідси робимо висновок, що кількість індексів, за якими побудовано поліном P, дорівнює за порядком m.

Далі, відштовхуючись від теореми Літтльвуда-Пелі та враховуючи

(5.26), (5.30), (5.24), (5.25), одержимо

$$||f-P||_q \asymp \left\| \left(\sum_I |(f-P,H_I)|^2 \, |H_I|^2(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} \omega^2(2^{-k}) \, 2^{2k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(\frac{N_k}{m_k} \right)^{\frac{2}{p}} H_I^2(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) \, 2^{2k(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(\frac{k^{d-1}}{m_k} \right)^{\frac{2}{p}} 2^k \sum_{I \in \Delta Q_k} \chi_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) \, 2^{\frac{2k}{p}} \left(\frac{k^{d-1}}{m_k} \right)^{\frac{2}{p}} k^{d-1} \chi_{[0,1]^d} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) \, 2^{\frac{2k}{p}} \left(\frac{k^{d-1}}{m_k} \right)^{\frac{2}{p}} k^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) \, 2^{\frac{2k}{p}} 2^{k\kappa\frac{2}{p}-(\kappa+1)\frac{2n}{p}} n^{-\frac{2}{p}(d-1)} k^{\frac{2}{p}(d-1)} k^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.31)$$

Оскільки $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким α, таким що $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, то існує $\kappa > 0$, для якого $\alpha - \frac{1}{p} - \frac{\kappa}{p} > 0$, а тому з (5.31) знаходимо

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_p^{\omega}, \mathcal{H})_q \ll 2^{-(\kappa+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\alpha k}} \right)^2 2^{2k(-\alpha+\frac{1}{p}+\frac{\kappa}{p})} k^{(\frac{2}{p}+1)(d-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{-(\kappa+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2m(\alpha-\frac{1}{p}-\frac{\kappa}{p})} k^{(\frac{2}{p}+1)(d-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{-(\kappa+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(2^{-2n(\alpha-\frac{1}{p}-\frac{\kappa}{p})} n^{(\frac{2}{p}+1)(d-1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m} \right) \left(\log^{d-1} m \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінка зверху у випадку $1 < p, q < \infty$ встановлена.

Якщо ж $p = \infty$, $1 < q < \infty$, то потрібну оцінку зверху в (5.23) одержуємо з (5.14) та співвідношення $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{\infty}, \mathcal{H})_q \ll E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}^{\omega}_{\infty})_q$, яке слідує з означень (5.22) і (5.13) при $m \asymp 2^n n^{d-1} \asymp \#Q_n$.

Перейдемо до одержання оцінки знизу. При цьому наші міркування будуть базуватися на використанні деяких спеціальних функцій.

Для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, у випадку $d = 1$ покладемо

$$N_I(t) = \begin{cases} (t - j2^{-s})2^{s+1}, & \text{якщо } t \in [j2^{-s}, (j+\frac{1}{2})2^{-s}), \\ ((j+1)2^{-s} - t)2^{s+1}, & \text{якщо } t \in [(j+\frac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}), \\ 0, & \text{якщо } t \notin I. \end{cases}$$

В d-вимірному випадку для $I = \prod\limits_{i=1}^{d} I_i$, $I_i \in D_{s_i}$, $s_i \geq 0$, визначимо функції

$$N_I(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} N_{I_i}(x_i), \qquad g(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=2^{-n}} N_I(\mathbf{x}).$$

В роботі [6] показано, що

$$||\Delta_{\mathbf{h}} g||_p \ll C_2, \tag{5.32}$$

де $C_2 > 0$ — деяка стала.

Розглянемо функцію $f(\mathbf{x}) = C_3\, \omega(2^{-n}) g(\mathbf{x})$, $C_3 > 0$. Використовуючи співвідношення (5.32), для векторів $\mathbf{s}$, що задовольняють умову $||\mathbf{s}||_1 = n$, будемо мати

$$||\Delta_{2^{-(s_1+1)}} \dots \Delta_{2^{-(s_d+1)}} f||_p = C_3\, \omega(2^{-n}) ||\Delta_{2^{-(s_1+1)}} \dots \Delta_{2^{-(s_d+1)}} g||_p \ll \omega(2^{-n}).$$

Звідси робимо висновок, що при певному виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить до класу $\mathbf{MH}^{\omega}_p$.

Для проведення подальших міркувань нам потрібно знати коефіцієнти

Фур'є-Хаара функції f, для обчислення яких використаємо нижченаведене допоміжне твердженння.

Лема V.1 [6]. *Нехай* $J = J_1 \times \cdots \times J_d$, $J_i \in D_{t_i}$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, d$, *і* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ *такі, що нерівність* $s_{i_0} \geq t_{i_0}$ *виконується для деякого* $1 \leq i_0 \leq d$. *Тоді*

$$\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} (N_I, H_I) = 0. \tag{5.33}$$

З (5.33) слідує, що для будь-яких J і $\mathbf{s}$, $||\mathbf{s}||_1 = n$, існує i_0, $1 \leq i_0 \leq d$, для якого виконується нерівність $s_{i_0} \geq t_{i_0}$.

Обчислимо (f, H_J) для J, $|J| = 2^{-(n+d)}$. Якщо $J \in \mathcal{D}_{\mathbf{t}}$, де принаймні одна компонента вектора $\mathbf{t}$ дорівнює 0, а тому, згідно з лемою V.1 маємо $(f, H_J) = 0$. Нехай S позначає множину всіх векторів $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, таких що $||\mathbf{t}||_1 = n + d$, $t_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$. Зазначимо, що $\#S \asymp n^{d-1}$. Тоді для $[0,1]^d$ єдиним розбиттям паралелепіпедами з $\mathcal{D}_{\mathbf{s}}$, $||\mathbf{s}||_1 = n$, для якого $\sum\limits_{I \in \mathcal{D}_s} (N_I, H_I) \neq 0$, згідно з лемою V.1, є розбиття з $s'_j = t_j - 1$, $j = 1, \ldots, d$. Окрім цього, оскільки $s'_j < t_j$, $j = 1, \ldots, d$, то J міститься лише в одному паралелепіпеді I^J з $\mathcal{D}_{\mathbf{s}'}$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_d)$, а тому, безпосередньо обчислюючи, одержимо

$$(f, H_J) = C_3\, \omega(2^{-n})(N_{I^J}, H_J) = \pm C_3\, \omega(2^{-n}) 2^{-(\frac{n}{2} + \frac{5d}{2})}. \tag{5.34}$$

Далі, за заданим m підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $m \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість елементів у множині $F_n = \bigcup_{\mathbf{t} \in S} \mathcal{D}_{\mathbf{t}}$ була б більшою, ніж $4m$. Це завжди можливо здійснити, оскільки $\#F_n \asymp 2^n n^{d-1}$. Нехай T — довільна множина, яка містить m векторів. Розглянемо множини $T \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in S$. Тоді множина $\mathcal{P}$ векторів $\mathbf{t}$ таких, що $\mathbf{t} \in S$ і $\#\{T \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{t}}\} \leq \frac{1}{2} \#\{\mathcal{D}_{\mathbf{t}}\}$, містить принаймні половину всіх $\mathbf{t}$ з множини S, а тому $\#\mathcal{P} = n^{d-1}$. Нехай p_m — довільний поліном, що побудований за тензорною системою Хаара, зі спектром в T. Тоді для $1 < q \le 2$ згідно з (5.9), (5.34) будемо мати

$$||f - p_m||_q \gg \Bigg(\sum_{||\mathbf{t}||_1 = n+d} ||\delta_{\mathbf{t}}(f - p_m)||_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \ge$$

$$\ge \Bigg(\sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{P}} ||\delta_{\mathbf{t}}(f - p_m)||_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2} - \frac{5d}{2}} (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}} \asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m} \right) \left(\log^{d-1} m \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку $2 \le q < \infty$ внаслідок монотонності L_q-норми одержуємо

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_p, \mathcal{H})_q \ge \sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_p, \mathcal{H})_2 \asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m} \right) \left(\log^{d-1} m \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 5.2 доведено.

На завершення підрозділу 5.2 наведемо деякі коментарі.

***Зауваження* 5.1.** *Якщо покласти $\omega(\tau) = \tau^r$, то відповідні до (5.14) і (5.23) точні за порядком рівності для класів Нікольського $\mathbf{MH}^r_p$ одержано А.В. Андріановим [6].*

***Зауваження* 5.2.** *Порівнюючи результати теорем 5.1 та 5.2, робимо висновок, що при $m \asymp 2^n n^{d-1}$ порядки найкращого (класичного) наближення та найкращого m-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, співпадають тільки у випадку $1 < q \le p \le \infty$, $q < \infty$, $p \ge 2$, а в решті випадків точні за порядком оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_p, \mathcal{H})_q$ є кращими, ніж для $E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}^{\omega}_p)_q$, $m \asymp 2^n n^{d-1}$.*

5.3. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара

В даному підрозділі вивчається лінійне наближення деяких гладкісних класів, близьких до класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю, поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара. Для функцій з цих класів, які назвемо "розширеними" класами типу Бєсова, одержані порядкові оцінки зверху для наближення східчасто–гіперболічними сумами Фур'є–Хаара.

Для $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ визначимо простори $MB^r_{p,\theta}$, які є аналогами просторів Нікольского-Бесова (див. попередній розділ) періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю, таким чином:

$$MB^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d) \colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

де

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d_+} (2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{5.35}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p} := \sup_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p}{2^{-r||\mathbf{s}||_1}}. \tag{5.36}$$

Зазначимо, що надалі означені вище аналоги просторів Нікольського-Бесова періодичних функцій мішаної гладкості будемо називати просторами типу Нікольського-Бесова періодичних функцій мішаної гладкості з огляду на те, що норму в цих просторах ми означаємо не "класичну", тобто за допомогою мішаного модуля неперервності функції, а за аналогією з періодичним випадком, розглянутим у двох попередніх розділах, так звану декомпозиційну.

Зауважимо також, що зображення (5.35) та (5.36) у випадку функцій однієї змінної містяться в [157].

Далі, через $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ позначимо одиничну кулю простору $MB^r_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} := \{f \in MB^r_{p,\theta}\colon \; ||f||_{MB^r_{p,\theta}} \leq 1\}. \tag{5.37}$$

Множини $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ будемо називати класами.

Для $r > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ визначимо простори $MH^r_{p,\theta}$, які є "розширеними" аналогами просторів типу Нікольського-Бєсова $MB^r_{p,\theta}$ функцій мішаної гладкості, таким чином:

$$MH^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d)\colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

де

$$||f||_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_k \left(\sum_{||s||_1 = k} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{5.38}$$

Далі, через $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ позначимо одиничні кулі просторів $MH^r_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbf{MH}^r_{p,\theta} := \{f \in MH^r_{p,\theta}\colon \; ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \leq 1\}. \tag{5.39}$$

Множини $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ будемо називати класами.

Зазначимо, що аналогічні до $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ класи періодичних функцій багатьох змінних, що визначаються за допомогою L_p-норми відповідних двійкових "блоків" рядів Фур'є функції за кратною тригонометричною системою, розглядались В.М. Темляковим [193] з точки зору встановлення для цих класів точних за порядком оцінок найкращих m-членних наближень поліномами, що побудовані за кратною тригонометричною системою.

Згідно з означеннями (5.35)–(5.39) мають місце вкладення

$$\mathbf{MB}^r_{p,1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \;\; 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

$$\mathbf{MH}^r_{p,1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \;\; 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \tag{5.40}$$

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \;\; 1 \leq \theta < \infty. \tag{5.41}$$

Нагадаємо, що наявність великої літери M, або $\mathbf{M}$ в позначенні просторів, або класів вказує на те, що маємо справу з періодичними функціями багатьох змінних з мішаною гладкістю, оскільки англійське слово "mixed", звідки й взято M та $\mathbf{M}$, означає "мішаний".

Якщо $d = 1$, то букву $\mathbf{M}$ в позначеннях класів не будемо зазначати. Крім цього, в одновимірному випадку вкладення (5.40) можна уточнити. Таким чином, згідно з означеннями (5.36), (5.38), (5.39) маємо

$$\mathbf{H}^r_{p,\theta} \equiv \mathbf{H}^r_p, \quad 1 \le \theta < \infty, \quad d = 1. \tag{5.42}$$

Сформулюємо та доведемо теорему, в якій встановлені порядкові оцінки зверху для величини

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q := \sup_{f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}} \mathcal{E}_{Q_n}(f)_q.$$

Теорема 5.3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1$, *тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le p < q < \infty, \\ 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le q \le p \le \infty,\ p \ne 1, \end{cases}$$

де $p_0 = \min\{p; 2\}$, $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Для $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ при $1 \le p < q < \theta < \infty$ використовуючи нерівності (5.10), Гельдера (з показником θ/q), а також співвідношення

$$\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} 1 \asymp k^{d-1}, \tag{5.43}$$

одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q = \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q \ll \Bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} \Big(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||s||_1} \Big)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^q\, 2^{-q||\mathbf{s}||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} 2^{r||\mathbf{s}||_1\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{q}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} 2^{-||\mathbf{s}||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} 1 \right)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} 1 \right)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} k^{(d-1)\frac{\theta-q}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (5.44)$$

Якщо ж $1 \leq p < q < \infty$, $\theta = q$, то будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q \ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1>n} \left(||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||s||_1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1=k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^q 2^{-q||\mathbf{s}||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \sum_{||\mathbf{s}||_1=k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \sup_k \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= ||f||_{MH^r_{p,q}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}. \qquad (5.45)$$

З (5.44), (5.45) робимо висновок, що ряд (5.26) збігається до функції f

у просторі $L_q([0,1]^d)$ і

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 \le p < q \le \theta < \infty. \qquad (5.46)$$

Якщо ж $1 \le p < q < \infty$, а $1 \le \theta < q$, то з (5.46), враховуючи вкладення (5.40), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,q})_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Нехай тепер $1 < q = p < \infty$. У випадку $\theta > p_0 = \min\{p, 2\}$, використовуючи нерівності (5.8), Гельдера (з показником θ/p_0) та співвідношення (5.43), маємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_p \ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{p_0} 2^{-rp_0||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{1}{p_0}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} 2^{r||\mathbf{s}||_1\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{p_0}{\theta}} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} 2^{-r\frac{\theta p_0}{\theta - p_0}||\mathbf{s}||_1} \right)^{\frac{\theta - p_0}{\theta}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \le$$

$$\le ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0 kr} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = k} 1 \right)^{\frac{\theta - p_0}{\theta}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0 kr} k^{(d-1)\frac{\theta - p_0}{\theta}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \asymp 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (5.47)$$

У випадку $1 < q = p < \infty$, $\theta = p_0 = \min\{p, 2\}$ будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_p \ll \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 > n} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-rkp_0} \sum_{||\mathbf{s}||_1=k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-rkp_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \sup_k \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1=k} \left(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \right)^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$= ||f||_{MH^r_{p,p_0}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-rkp_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-rkp_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \asymp 2^{-rn}. \qquad (5.48)$$

З (5.47), (5.48), беручи до уваги зауваження, зроблені при одержанні нерівності (5.46), приходимо до висновку, що

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}, \ \ 1 < q = p < \infty, \ \theta \geq p_0. \qquad (5.49)$$

Якщо ж $1 < q = p < \infty$ і $1 \leq \theta < p_0$, то, з (5.49), враховуючи вкладення (5.40), одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,p_0})_q \ll 2^{-rn}. \qquad (5.50)$$

Для випадку $1 \leq q < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, внаслідок нерівності $|| \cdot ||_q \leq || \cdot ||_p$ та доведених вище оцінок (5.49) і (5.50), маємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Нарешті, при $1 < q < \infty$, $p = \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, внаслідок вкладення $\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{q+1,\theta}$, а також оцінок (5.49) та (5.50), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_{q+1} \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{q+1,\theta})_{q+1} \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Теорему 5.3 доведено.

Сформулюємо тепер зауваження та коментарі до одержаних результатів для аналогів класів типу Бєсова функцій мішаної гладкості.

***Зауваження* 5.3.** *У випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbf{MH}^r_p$, твердження, аналогічне до теореми 5.3, раніше доведене А. В. Андріа-*

новим [6].

Зауваження 5.4. *При* $d = 1$, *внаслідок співвідношення* (5.42), *встановлені в теоремі 5.3 результати збігаються з результатами А. В. Андріанова [6].*

Зауваження 5.5. *Внаслідок вкладення* (5.41) *теорема 5.3 матиме місце і для класів* $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$.

5.4. Висновки до розділу 5

Вивчено деякі величини наближення періодичних функцій багатьох змінних з класів типу Нікольського–Бєсова мішаної гладкості поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара.

У підрозділі 5.1 встановлено точні за порядком оцінки наближення класів $\mathbf{MH}_p^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара.

У підрозділі 5.2 знайдено точні за порядком оцінки найкращого m–членного наближення класів $\mathbf{MH}_p^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара.

У підрозділі 5.3 одержано порядкові оцінки зверху для наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара класів типу Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю.

Основні результати розділу 5 опубліковано в роботах [125, 129, 128].

Висновки

Дослідження спрямовані на вдосконалення старих і відшукання нових підходів до встановлення точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників таких важливих у теорії наближення класів гладких функцій, як ізотропні класи (періодичних функцій однієї та багатьох дійсних змінних) Нікольського–Бєсова логарифмічної гладкості або класи Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю. Отримані точні за порядком оцінки зазначених вище величин доповнюють та розповсюджують результати Б.С. Кашина, В.М. Темлякова та А.С. Романюка. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій із логарифмічною гладкістю доповнюють точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів типу Нікольського періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю, які 1999 року встановили Б.С. Кашин і В.М. Темляков.

Другий і четвертий розділи дисертації містять результати, які стосуються точних за порядком оцінок найкращого m-членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова функцій із малою ізотропною гладкістю (2-й розділ) або малою мішаною гладкістю (4-й розділ). Точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення періодичних функцій багатьох змінних із малою ізотропною гладкістю з класів Нікольського–Бєсова доповнюють відповідні результати Р.А. ДеВора й В.М. Темлякова (1995) стосовно найкращого m-членного тригонометричного наближення ізотропних класів Нікольського–Бєсова, де випадок малої гладкості не був розглянутий. А точні за порядком оцінки найкращого m-членного тригонометричного наближення узагальнених класів Бєсова функцій малої мішаної гладкості доповнюють результати найкращого m-членного тригонометричного наближення тригонометричного наближення класів Нікольського–Бєсова мішаної гладкості, які В.М. Темляков і А.С. Романюк одержали впродовж минулих двох десятиріч.

У третьому розділі встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення періодичних функцій багатьох змінних із класів Нікольського–Бєсова узагальненої мішаної гладкості тригонометричними поліномами з номерами гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, які тісно пов'язані з гладкісною функцією, яка присутня в означенні класів. З'ясовано питання стосовно оптимальності (в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників) таких областей, як узагальнені східчасті гіперболічні хрести.

Завершальний п'ятий розділ присвячений встановленню порядкових оцінок наближення у просторі Лебега функціональних класів типу Нікольського узагальненої мішаної гладкості східчасто-гіперболічними сумами Фур'є–Хаара. В цьому розділі також знайдено точні за порядком оцінки величини найкращого m-членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, для періодичних функцій багатьох змінних із класів типу Нікольського узагальненої мішаної гладкості.

1. **Акишев Г. А.** О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца / Г. А. Акишев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 13–28.

2. **Акишев Г. А.** Оценки колмогоровских поперечников классов Никольского–Бесова–Аманова в пространстве Лоренца / Г. А. Акишев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 3–13.

3. **Акишев Г. А.** Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца / Г. А. Акишев // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.

4. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной / Т. И. Аманов // Алма-Ата: Наука, 1976.

5. **Аманов Т. И.** Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\, j = 1, \ldots, n)$ / Т. И. Аманов // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1965. — Т. 77. — С. 5–34.

6. **Андрианов А. В.** Приближение функций из классов MH^r_p полиномами Хаара / А. В. Андрианов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 3. — С. 323–335.

7. **Бабенко В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов // К.: Наук. думка, 2003.

8. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами / Бабенко К. И. // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 132, № 5. — С. 982–985.

9. **Бабенко К.И.** О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами / Бабенко К. И. // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 132, № 2. — С. 247–250.

10. **Базарханов Д. Б.** Нелинейные приближения классов периодических функций многих переменных / Д. Б. Базарханов // Тр. Матем. ин-та РАН. — 2014. — Т. 284. — С. 8–37.

11. **Базарханов Д. Б.** Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных / Д. Б. Базарханов // Тр. Матем. ин-та РАН. — 2016. — Т. 293. — С. 8–42.

12. **Балгимбаева Ш. А.** Оценки поперечников Фурье классов периодических функций со смешанным модулем гладкости / Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 78–94.

13. **Бари Н. К.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1956. — Т. 5. — С. 483–522.

14. **Белинский Э. С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций / Э. С. Белинский // Матем. сб. — 1987. — Т. 132 (174), № 1. — С. 20—27.

15. **Белинский Э. С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной / Э. С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав. гос. ун-т, 1988. — С. 16–33.

16. **Бернштейн С. Н.** Собрание сочинений: в 4 т./ С. Н. Бернштейн // М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2: Конструктивная теория функций (1931-1953). 626 с.

17. **Бесов О. В.** Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения / О. В. Бесов // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1961. — Т. 60. — С. 42–61.

18. **Бугров Я.С.** Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной / Я. С. Бугров // Матем. сб. — 1964. — Т. 64(106), №. 3. — С. 410–418.

19. **Вакарчук С. Б.** Оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 полиномами и частными суммами рядов по системам Хаара и Фабера–Шаудера / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 45–76.

20. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики / Владимиров В. С. // М.: Наука, 1967.

21. **Власик Г. М.** Колмогоровські поперечники класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 76–92.

22. **Галеев Э. М.** Оценки поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных малой гладкости / Э. М. Галеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. — 1987. — № 1. — С. 26–30.

23. **Галеев Э. М.** Поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ / Э. М. Галеев // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 5. — С. 656–665.

24. **Галеев Э. М.** Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными / Э. М. Галеев // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 2. — С. 197–212.

25. **Галеев Э. М.** Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами / Э. М. Галеев // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47, № 3. — С. 32 – 41.

26. **Голубов Б. И.** Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша / Б. И. Голубов // Матем. сб. — 1972. — Т. 87 (129), № 2. — С. 254–274.

27. **Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.** Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов и В. А. Скворцов // Наука (Москва, 1987).

28. **Дерев'янко Н. В.** Наближення класів H_p^Ω періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / Н. В. Дерев'янко // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 5. — С. 634–644.

29. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т 1. – 615 с; Т 2. – 537 с.

30. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды / А. Зигмунд // Мир, М., 1965.

31. **Исмагилов Р. С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами / Р. С. Исмагилов // Успехи матем. наук. — 1974. — Т. 29, № 3. — С. 161–178.

32. **Кашин Б. С.** О поперечниках классов Соболева малой гладкости / Б. С. Кашин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. — 1981. — № 5. — С. 50–54.

33. **Кашин Б. С.** Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем / Б. С. Кашин // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1985. — Т. 172. — С. 187–191.

34. **Кашин Б. С.** О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, № 5. — С. 57–86.

35. **Кашин Б. С.** Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков // Теория функций, СМФН. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. — Т. 25. — С. 58–79.

36. **Кашин Б. С.** Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян // М.: АФЦ, 1999.

37. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближений / Н. П. Корнейчук // М.: Наука, 1976.

38. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук // М.: Наука, 1987.

39. **Коробов Н. М.** Теоретикочисловые методы в приближенном анализе / Н. М. Коробов // М.: Физматгиз, 1963.

40. **Конограй А. Ф.** Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 1. — С. 151–171.

41. **Конограй А. Ф.** Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2008. — Т. 60, № 9. — С. 1206–1224.

    Konohrai A. F. Best M-term trigonometric approximations of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q / A. F. Konohrai, S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2008. — V. 60, № 9. — P. 1396–1417.

42. **Конограй А. Ф.** Оценки аппроксимативных характеристик классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности / А. Ф. Конограй // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, № 5. — С. 734–749.

43. **Конограй А. Ф.** Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних з заданою мажорантою мі-

шаних модулів неперервності / А. Ф. Конограй // Укр. матем. журн. — 2011. — Т. 63, № 2. — С. 176–186.

44. **Конограй А. Ф.** Поперечники класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох / А. Ф. Конограй // Матем. Студії. — 2008. — Т. 29, № 2. — С. 192–206.

45. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций / П. И. Лизоркин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1969. — Т. 105. — С. 89–167.

46. **Лизоркин П. И.** Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_{p}$ / П. И. Лизоркин // Сиб. матем. журн. — 1968. — Т. 9, № 5. — С. 1127–1152.

47. **Лизоркин П. И.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения / П. И. Лизоркин, С. М. Никольский // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 187. — С. 143–161.

48. **Лизоркин П. И.** Свойства функций из пространств $\Lambda^{r}_{p,\theta}$ / П. И. Лизоркин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1974. — Т. 131. — С. 158–181.

49. **Лизоркин П. И.** Теорема типа Литтльвуда–Палея для кратных интегралов Фурье / П. И. Лизоркин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1967. — Т. 89. — 214–230.

50. **Майоров В. Е.** О линейных поперечниках соболевских классов / В. Е. Майоров // ДАН СССР. — 1978. — Т. 243, № 5. — С. 1127–1130.

51. **Майоров В. Е.** О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств / В. Е. Майоров // Матем. сб. — 1980. — Т. 113 (165), № 3 (11). — С. 437–463.

52. **Миронюк В. В.** Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Фур'є у просторі L_p при $p = 1, \infty$ / В. В. Миронюк // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 9. — С. 1204–1213.

53. **Митягин Б. С.** Приближение функций в пространствах L_p и C на торе / Б. С. Митягин // Матем. сб. — 1962. — Т. 58(100), № 4. — С. 397–414.

54. **Никольская Н. С.** Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p / Н. С. Никольская // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, № 6. — С. 1282–1285.

55. **Никольская Н. С.** Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p / Н. С. Никольская // Сиб. матем. журн. — 1974. — Т. 15. № 2. — С. 395–412.

56. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных / С. М. Никольский // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 244–278.

57. **Никольский С. М.** О граничных свойствах дифференцируемых функций многих переменных / С. М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 146, № 3. — С. 542–545.

58. **Никольский С. М.** Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных / С. М. Никольский // Матем. сб. — 1963. — Т. 61(103), № 2. — С. 224—252.

59. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский // М.: Наука, 1969.

60. **Никольский С. М.** Теорема о представлении одного класса дифференцируемых функций многих переменных посредством целых функций экспоненциального типа / С. М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 3. — С. 484-–487.

61. **Никольский С. М.** Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера / С. М. Никольский // Сиб. матем. журн. — 1963. — Т. 4, № 6. — С. 1342–1364.

62. **Освальд П.** Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах / П. Освальд // Теория функций, СМФН. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 137–163.

63. **Пич А.** Операторные идеалы: Пер. с англ. — М.: Мир. — 1982. — 536 с.

64. **Пожарська К. В.** Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. матем. журн. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1249–1263.

65. **Пожарська К. В.** Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q / К. В. Пожарська // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 293–318.

66. **Пустовойтов Н. Н.** О наилучших приближениях аналогами "своих" и "не своих" гиперболических крестов / Н. Н. Пустовойтов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 3. — С. 466–476.

67. **Пустовойтов Н. Н.** О поперечниках по Колмогорову классов функций с заданным смешанным модулем непрерывности / Н. Н. Пустовойтов // Anal. Math. — 2012. — Т. 38, № 1. — P. 41–64.

68. **Пустовойтов Н. Н.** О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида / Н. Н. Пустовойтов // Anal. Math. — 2003. — Т. 29, № 3. — P. 201 – 218.

69. **Пустовойтов Н. Н.** Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители / Н. Н. Пустовойтов // Anal. Math. — 2008. — Т. 34, № 3. — P. 187–224.

70. **Пустовойтов Н. Н.** Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности / Н. Н. Пустовойтов // Anal. Math. — 1994. — Т. 20, № 1. — P. 35 – 48.

71. **Пустовойтов Н. Н.** Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности / Н. Н. Пустовойтов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 107–117.

72. **Романюк А. С.** Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 513–523.

73. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Київ: Інститут математики НАН України, 2012. Т. 92. Праці Інституту математики НАН України. 353 с. Т. 92. Праці Інституту математики НАН України. 353 с.

74. **Романюк А. С.** Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 4. — С. 536–551.

75. **Романюк А. С.** Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 69–98.

76. **Романюк А.С.** Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова / А. С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — Т. 6, № 1. — С. 222–236.

77. **Романюк А.С.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 2. — С. 93—114.

78. **Романюк А. С.** Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике / А. С. Романюк // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 247–261.

79. **Романюк А. С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 61–100.

80. **Романюк А. С.** О колмогоровских поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных малой гладкости в пространстве L_q / А. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 1994. — Т. 46, № 7. — С. 915–926.

81. **Романюк А.С.** О приближении классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 1992. — Т. 44, № 5. — С. 662–672.

82. **Романюк А. С.** Оценки энтропийных чисел и ε-энтропии классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 196–213.

83. **Романюк А. С.** Поперечники и наилучшее приближение классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Anal. Math. — 2011. — Т. 37, № 3. — P. 181 – 213.

84. **Романюк А. С.** Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q / А. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 263–278.

85. **Романюк А. С.** Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q / А. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 1991. — Т. 43, № 10. — С. 1398–1408.

86. **Романюк А. С.** Приближение классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 1. — С. 109–121.

87. **Романюк А. С.** Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов / А. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 1996. — Т. 48, № 1. — С. 80–89.

88. **Романюк А. С.** Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения / А. С. Романюк // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 2. — С. 91—116.

89. **Романюк А. С.** Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных / А. С. Романюк // Матем. заметки — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 429—442.

90. **Романюк А. С.** Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных /

А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2009. — Т. 61, № 10. — С. 1348–1366.

91. **Романюк В. С.** Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах / В. С. Романюк // Препр. Ин-т математики НАН Украины; К.: Інститут математики НАН України, (2012), 1–44.

92. **Романюк В. С.** Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2017. — Т. 69, № 5. — С. 682–694.

93. **Романюк В. С.** Конструктивная характеристика классов Гельдера и m-членные приближения по кратному базису Хаара / В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 3. — С. 349–360.

94. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара и m–членные приближения функций из классов Бесова. I / В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2016. — Т. 68, № 4. — С. 551–562.

95. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара и m–членные приближения функций из классов Бесова. II / В. С. Романюк // Укр. матем. журн. — 2016. — Т. 68, № 6. — С. 816–825.

96. **Рябенький В. С.** О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса / В. С. Рябенький // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 5. — С. 1025 – 1027.

97. **Смоляк С. А.** Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α / С. А. Смоляк // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, № 5. — С. 1028–1031.

98. **Смоляк С. А.** Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций / С. А. Смоляк // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 5. — С. 1042 – 1045.

99. **Соліч К. В.** Найкращі білінійні наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних / К. В. Соліч // Укр. матем. журн. — 2011. — Т. 63, № 6. — С. 809–826.

100. **Соліч К. В.** Оцінки білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних / К. В. Соліч // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 8. — С. 1106–1120.

101. **Стасюк С. А.** Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 493–499.

Stasyuk S. A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2014. — V. 66, № 4. — P. 553–560.

102. **Стасюк С. А.** Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк, О. В. Федуник // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 5. — С. 692 – 704.

Stasyuk S. A. Approximation characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables / S. A. Stasyuk, O. V. Fedunyk // Ukr. Math. J. — 2006. — V. 58, № 5. — P. 779–793.

103. **Стасюк С. А.** Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2015. — Т. 67, № 11. — С. 1640–1645.

Stasyuk S. A. Kolmogorov widths for analogs of the Nikol'skii–Besov classes with logarithmic smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2016. — V. 67, № 11. — P. 1786–1792.

104. **Стасюк С. А.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для классов функций с небольшой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 247–253.

105. **Стасюк С. А.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для функций обобщенной смешанной гладкости / С. А. Стасюк // Укр. мат. вісн. — 2016. — Т. 13, № 3. — С. 408–420.

Stasyuk S. A. Constructive sparse trigonometric approximations for the functions with generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2017. — V. 222, № 6. — P. 787–796.

106. **Стасюк С. А.** Наближене відновлення класів H_p^{Ω} періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 1, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — 428 с. — С. 349-359.

107. **Стасюк С.А.** Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях / С. А. Стасюк // Матем. Студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 66–73.

108. **Стасюк С. А.** Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2002. — Т. 54, № 11. — С. 1551–1559.

109. **Стасюк С. А.** Наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}(\bar{\gamma})$ / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 228–240.

110. **Стасюк С. А.** Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $M\,B^{\omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 1. — С. 140–144.

Stasyuk S. A. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2012.

— V. 64, № 1. — P. 156–161.

111. **Стасюк С. А.** Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 258–266.

112. **Стасюк С. А.** Наилучшее m-членное билинейное приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 206–215.

113. **Стасюк С. А.** Наилучшее m-членное приближение классов $B^r_{\infty,\theta}$ функций многих переменных полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2011. — Т. 63, № 4. — С. 549–555.

114. **Стасюк С. А.** Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов $B^r_{p,\theta}$ функций малой гладкости / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 1. — С. 104–111.

Stasyuk S. A. Best m-term trigonometric approximation for the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of low smoothness / S. A. Stasyuk // Ukr. Math. J. — 2010. — V. 62, № 1. — P. 114–122.

115. **Стасюк С.А.** Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 108–121.

Stasyuk S. A. Best approximations of periodic functions of several variables from the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / S. A. Stasyuk // Math. Notes. — 2010. — V. 87, № 1. — P. 102–114.

116. **Стасюк С. А.** Найкраще m-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу

Нікольського–Бєсова / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 983–1003.

Stasyuk S. A. Best m-term trigonometric approximation for periodic functions with low mixed smoothness from the Nikol'skii–Besov type classes / S. A. Stasyuk // Ukr. Mat. J. — 2016. — V. 68, № 7. — P. 1121–1145.

117. **Стасюк С. А.** Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ в метриці простору L_q / С. А. Стасюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 258-267.

118. **Стасюк С. А.** Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p / С. А. Стасюк // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 3, № 4. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 255 – 265.

Стасюк С. А. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\gamma)$ періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_p / С. А. Стасюк // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 255–265.

119. **Стасюк С. А.** Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ / С. А Стасюк, С. Я. Янченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 367–384.

120. **Стасюк С. А.** Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // // Укр. матем. журн. — 2004. — Т. 56, № 11. — С. 1557–1568.

121. **Стасюк С. А.** Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Математика та її застосування. Праці IМ НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2002. — Т. 35. — С. 172–194.

122. **Стасюк С. А.** Найкращі тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / С. А. Стасюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — Т. 46. — С. 265–275.

123. **Стасюк С. А.** Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2002. — Т. 54, № 3. — С. 381–394.

124. **Стасюк С. А.** Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике / С. А. Стасюк // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 308–317.

125. **Стасюк С. А.** Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 251–260.

126. **Стасюк С. А.** Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 247–257.

127. **Стасюк С. А.** Приближение суммами Фурье классов $B^{\omega}_{1,\theta}$ периодических функций в пространстве L_1 // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. —

Київ: Ін-т математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 338–344.

128. **Стасюк С.А.** Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 97–109.

    Stasyuk S. A. Approximations of the classes $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by polynomials according to the Haar system / S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2015. — V. 210, № 1. — P. 76–85.

129. **Стасюк С. А.** Приближение функций многих переменных классов H^{Ω}_p полиномами по системе Хаара / С. А. Стасюк // Anal. Math. — 2009. — V. 35, № 4. — P. 257–271.

130. **Стасюк С. А.** Разреженное тригонометрическое приближение классов Бесова функций с малой смешанной гладкостью / С. А. Стасюк // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 3. — С. 244–252.

131. **Стасюк С. А.** Тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Укр. матем. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 700 – 705.

132. **Степанец А.И.** Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец // Киев: Наук. думка, 1987.

133. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, №. 2. — С. 37–40.

134. **Теляковский С. А.** Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами / С. А. Теляковский // Матем. сб. — 1964. — Т. 63. — С. 426–444.

135. **Темляков В. Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной глад-

кости / В. Н. Темляков // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 11. — С. 131—160.

136. **Темляков В. Н.** О приближении периодических функций многих переменных / В. Н. Темляков // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 301–305.

137. **Темляков В. Н.** О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью / В. Н. Темляков // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 253, № 3. — С. 544–548.

138. **Темляков В. Н.** Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью / В. Н. Темляков // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 301, № 2. — С. 288–291.

139. **Темляков В. Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной / В. Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Т. 189. — С. 138–168.

140. **Темляков В. Н.** Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций / В. Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 250–267.

141. **Темляков В. Н.** Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных / В. Н. Темляков // ДАН СССР. — 1982. — Т. 267, № 2. — С. 314–317.

142. **Темляков В. Н.** Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных / В. Н. Темляков // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1986. — Т. 173. — С. 187–191.

143. **Темляков В. Н.** Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью / В. Н. Темляков // Матем. сб. — 1980. — Т. 113(155), № 1(9). — С. 65–80.

144. **Темляков В. Н.** Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций / В. Н. Темляков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1985. — Т. 49, № 5. — С. 986–1030.

145. **Темляков В. Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В. Н. Темляков // Тр. МИАН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

146. **Темляков В. Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций / В. Н. Темляков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 171–186.

147. **Темляков В. Н.** Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных / В. Н. Темляков // Матем. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 2(10). — С. 256–268.

148. **Федуник О. В.** Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q / О. В. Федуник // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 268–294.

149. **Федуник-Яремчук О. В.** Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у просторі L_∞ / О. В. Федуник-Яремчук, К. В. Соліч // Укр. матем. вісн. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 345–360.

150. **Харди Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа // М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

151. **Янченко С. Я.** Апроксимативні характеристики функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності /

С. Я. Янченко, С. А. Стасюк // Укр. матем. вісн. — 2018. — Т. 15, № 1. — С. 132–148.

Yanchenko, S. Ya. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of mixed moduli of continuity / S. Ya. Yanchenko, S. A. Stasyuk // J. Math. Sci. (New York, USA). — 2018. — V. 235, № 1. — P. 103–115.

152. **Akishev G.** On orders of approximation of the generalized Nikol'skii–Besov class in Lorentz spaces / G. Akishev // CRM preprint. — 2016. — № 1222. — P. 1–18.

153. **Andrianov A. V.** Nonlinear Haar approximation of functions with bounded mixed derivative / A. V. Andrianov // Lecture notes in pure and applied mathematics. Wavelet analysis and multiresolution methods. — 2000. — V. 212. — P. 27–47.

154. **Andrianov A. V.** Best m-term approximation of functions from classes $MW^r_{q,\alpha}$ / A. V. Andrianov, V. N. Temlyakov // Approx. Theory IX. — 1998. — V. 1. — P. 7–14.

155. **Belinskii E. S.** Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ε-entropy / E. S. Belinskii // Anal. Math. — 1989. — V. 15, № 2, P. 67–74.

156. **Byrenheid G.** Byrenheid Sparse representation of multivariate functions based on discrete point evaluations / G. Byrenheid // Dissertationes Math. — 2018. — P. 1–180.

157. **Chiesielski B.** Image compression with Schauder bases / B. Chiesielski, Z. Chiesielski // Appl. Math. — 2001. — V. 28, № 4. — P. 367–390.

158. **Cobos F.** Approximation and entropy numbers of embeddings between approximation spaces / F. Cobos, O. Dominguez, T. Kühn // Constr. Approx. — 2018. — T. 47, № 3. — P. 453-486.

159. **Cobos F.** Characterizations of logarithmic Besov spaces in terms of differences, Fourier-analytical decompositions, wavelets and semi-groups / F. Cobos, O. Dominguez, H. Triebel // J. Funct. Anal. — 2016. — V. 270, № 12. — P. 4386–4425.

160. **Cobos F.** On the relationship between two kinds of Besov spaces with smoothness near zero and some other applications of limiting interpolation / F. Cobos, O. Dominguez // J. Fourier Anal. Appl. — 2016. — V. 22, № 5. — P. 1174-1191.

161. **DeVore R. A.** Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorents // Berlin: Springer-Verlag, 1993.

162. **De Vore R. A.** Nonlinear approximation by trigonometric sums / R.A. De Vore, V. N. Temlyakov // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V. 2, № 1. — P. 29–48.

163. **De Vore R. A.** Optimal nonlinear approximation / R.A. De Vore, R. Howard, C. Micchelli // Manuscripta Math. — 1989. — V. 63, № 4. — P. 469–478.

164. **De Vore R. A.** Wavelet compression and nonlinear n-widths / R. A. De Vore, G. Kyriazis, D. Leviatan, V. M.Tikhomirov // Adv. in Comput. Math. — 1993. — V. 1. — P. 197–214.

165. **Dirksen S.** Gelfand numbers related to structured sparsity and Besov space embeddings with small mixed smoothness / S. Dirksen, T. Ullrich // J. Complexity. — 2018. — V. 48. — P. 69–102.

166. **Dominguez O.** Function spaces of logarithmic smoothness: embeddings and characterizations / O. Dominguez, S. Tikhonov // arXiv: math1811.06399v2 [math.FA] 26 Dec 2018, p. 1–162.

167. **Duan L.** The best m-term approximations on generalized Besov classes $MB^{\Omega}_{q,\theta}$ with regard to orthogonal dictionaries / L. Duan // J. Approx. Theory. — 2010. — V. 162. — P. 1964-1981.

168. **Dũng D.** Hyperbolic cross approximation / D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich // Based on advanced courses given at the Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Spain. Edited by Sergey Tikhonov. Advanced Courses in Mathematics – CRM Barcelona. Basel: Birkhäuser/Springer, 232 p. (2018).

169. **Dung D.** Continuous algorithms in n-term approximation and non-linear widths / D. Dung // J. Approx. Theory. — 2000. — V. 102, No. 2. — P. 217–242.

170. **Dung D.** On nonlinear n-widths / D. Dung, V.Q. Thanh // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V. 124, № 9. — P. 2757–2765.

171. **Dung D.** On nonlinear n-widths and n-term approximation / D. Dung // Vietnam J. Math. — 1998. — V. 26, № 2. — P. 165–176.

172. **Dung D.** Optimal recovery of periodic functions using wavelet decompositions / D. Dung, M.X. Thao // Vietnam J. Math. — 2002. — V. 30, № 3. — P. 295–298.

173. **Dzyadyk V. K.** Theory of uniform approximation of functions by polynomials / V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk // Berlin: de Gruyter, 2008.

174. **Hansen M.** Best m-term approximation and Lizorkin–Triebel spaces / M. Hansen, W. Sickel // J. Approx. Theory. — 2011. — V. 163, № 8. — P/ 923–954.

175. **Hansen M.** Best m-term approximation and Sobolev–Besov spaces of dominating mixed smoothness – the case of compact embeddings / M. Hansen, W. Sickel // Constr. Approx. — 2012. — V. 36, № 1, — P. 1–51.

176. **Hansen M.** Best m-term approximation and tensor product of Sobolev and Besov spaces — the case of non-compact embeddings / M. Hansen, W. Sickel // East J. Approx. — 2010. — V. 16, № 4. — P. 345–388.

177. **Jakson D.** Certain problem of closest approximation / D. Jakson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — V. 39. — P. 889–906.

178. **Jiang Y., Liu Y.** Average widths and optimal recovery of multivariate Besov classes in $L_p(R^d)$ / Y. Jiang, Y. Liu // J. Approx. Theory. — 2000. — V. 102, № 1. — P. 155-170.

179. **Konyagin S. V.** Convergence of greedy approximation. II. The trigonometric system / S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov // Studia Math. — 2003. — V. 159, № 2. — P. 161–184.

180. **Konyagin S. V.** Convergence of greedy approximation for the trigonometric system / S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov // Anal. Math. — 2005. — V. 31, № 2. — P. 85–115.

181. **Liu Y.** The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes / Y. Liu, G. Xu // J. Complexity. — 2002. — V. 18, № 3. — P. 815–832.

182. **Macovoz G. Y.** On trigonometric n-widths and their generalization / G. Y. Macovoz // J. Approx. Theory. — 1984. — V. 41, № 4. — P. 361–366.

183. **Nguyen V. K.** Weyl numbers of embeddings of tensor product Besov spaces / V. K. Nguyen, W. Sickel // J. Approx. Theory. — 2015. — V. 200. — P. 170–220.

184. **Potapov M. K.** Mixed moduli of smoothness in L_p: a survey / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Surveys in Approximation Theory. — 2013. — V. 8. — P. 1–57.

185. **Sawano Y.** Theory of Besov spaces / Y. Sawano // Developments in Mathematics. — V. 56. — Singapore: Springer. — 945 p. (2018).

186. **Schmeisser H.-J.** Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness / H.-J. Schmeisser // Nonli-

near analysis, function spaces and applications. Vol. 8. Proceedings of the spring school, NAFSA 8, Prague, Czech Republic, May 30–June 6, 2006. Prague: Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute. P. 145-204 (2007).

187. **Schmeisser H.-J.,** Topics in Fourier analysis and function spaces / H.-J. Schmeisser, H. Triebel // Chichester: John Wiley Sons. 300 p. (1987).

188. **Seeger A.** Low regularity classes and entropy numbers / A. Seeger, W. Trebels // Arch. Math. — 2009. — V. 92, № 2. — P. 147–157.

189. **Stasyuk S.A.** Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness / S. A. Stasyuk, S. Ya. Yanchenko // Anal. Math. — 2015. — V. 41, № 4. — P. 311–334.

190. **Stasyuk S. A.** Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii-Besov classes for small smoothness / S. A. Stasyuk // J. Approx. Theory. — 2014. — V. 177. — P. 1–16.

191. **Sun Y. S.** Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness / Y. S. Sun, H. P. Wang // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — V. 219. — С. 356–377.

192. **Temlyakov V. N.** Approximation of periodic functions / V. N. Temlyakov // Computational Mathematics and Analysis Series. Commack, New York: Nova Science Publishers, Inc., 1993. 419 p.

193. **Temlyakov V. N.** Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness, arXiv: 1412.8647v1 [math.NA] 24 Dec 2014, 1–37.

194. **Temlyakov V. N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness, arXiv: 1503.00282v1 [math.NA] 1 Mar 2015, 1–30.

195. **Temlyakov V. N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 2017. — V. 45, № 3. — P. 467–495.

196. **Temlyakov V. N.** Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 1998. — V. 14, № 4. — P. 569–587.

197. **Temlyakov V. N.** Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 2000. — V. 16, № 3. — P. 399–425.

198. **Temlyakov V.** Greedy approximation / V. Temlyakov // Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 20. Cambridge: Cambridge University Press, 418 p. (2011).

199. **Temlyakov V.** Multivariate Approximation / V. Temlyakov // Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 32. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

200. **Temlyakov V. N.** Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system / V. N. Temlyakov // East J. Appr. — 1998. — V. 4, № 1. — P. 87–106.

201. **Temlyakov V. N.** Nonlinear methods of approximation / V. N. Temlyakov // Found. Comput. Math. — 2003. — V. 3, № 1. — P. 33–107.

202. **Temlyakov V. N.** Some inequalities for multivariate Haar polynomials / V. N. Temlyakov // East J. Appr. — 1995. — V. 1, № 1. — P. 61–72.

203. **Temlyakov V.** Sparse approximation with bases / V. Temlyakov // Based on advanced courses given at the Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Spain. Edited by Sergey Tikhonov. Advanced Courses in Mathematics – CRM Barcelona. Basel: Birkhäuser/Springer, 261 p. (2015).

204. **Temlyakov V. N.** The best m-term approximation and greedy algorithms / V. N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 1998. — V. 8, № 3. — P. 249–265.

205. **Triebel H.** Function spaces with dominating mixed smoothness / H. Triebel // EMS Series of Lectures in Mathematics. Zürich: European Mathematical Society (EMS). — 202 p. (2019).

206. **Triebel H.** Theory of function spaces / H. Triebel // Monographs in Mathematics, V. 78, Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1983.

207. **Trigub R. M.** Fourier analysis and approximation of functions / R. M. Trigub, E. S. Belinsky // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 585 p. (2004).

208. **Vybíral J.** Function spaces with dominating mixed smoothness / J. Vybìral // Dissertationes Math. — 2006. — V. 436. — P. 1–73.

209. **Wang H. P.** Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions / H. P. Wang, Y. S. Sun // Northeast. Math. J. — 1995. — V. 11, № 4. — P. 454–466.

210. **Xu G.** The n-widths for a generalized periodic Besov classes / G. Xu // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. — 2005. — V. 25, № 4. — P. 663–671.