Відгук
офіційного опонента
на дисертаційну роботу Стасюка Сергія Андрійовича
"Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних", поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз
111 — Математика

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження. Теорія наближення функцій, фундамент якої було закладено в класичних роботах П.Л.Чебишева, К.Вейєрштрасса, Д.Джексона, С.Н.Бернштейна, Н.І.Ахієзера та інших, сьогодні є однією з областей математики, яка інтенсивно розвивається. Задачі, які досліджуються в рамках цієї теорії, пов'язані з наближенням як індивідуальних функцій, так і їх класів. При цьому певний інтерес представляє вивчення найкращих поліноміальних наближень тим чи іншим чином заданих класів функцій, а також обчислення їх поперечників. В даному напрямі особливе місце займають задачі, пов'язані з наближенням класів періодичних функцій багатьох змінних, започатковані в роботах К.І.Бабенка. Зокрема, при наближенні класів Соболєва ним було запропоновано у якості апарату апроксимації тригонометричні поліноми з "номерами" гармонік з так званих гіперболічних хрестів. В подальшому вказані дослідження було продовжено в роботах Я.С.Бугрова, Н.С.Нікольської, Дінь Зунга, Б.С.Кашина, Е. М.Галєєва, В.М.Темлякова, Е.С.Белінського, А.С.Романюка та інших.

Що ж стосується аналогічних класів функцій багатьох змінних, заданих на $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$, то для їх наближення в роботах Я.С.Бугрова, Г.Г.Магаріл-Ільяєва, В.М.Тихомірова, Дінь Зунга та інших були використані цілі функції зі спектром у східчастому гіперболічному хресті.

Наприкінці минулого сторіччя в роботах М.Л.Гольдмана та Г.А.Калябіна досліджувались певні узагальнення ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\omega}_{p,\theta}$. Класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, близькі за своїм означенням до класів $B^{\omega}_{p,\theta}$, досліджувались у XX-му сторіччі в роботах китайських математиків Li Yongping та Xu Giuqiao. У 1997 році Sun Yongsheng та Wang Heping розглянули класи періодичних функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, які при певному виборі Ω співпадають з аналогами класів Нікольського–Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$. З моменту своєї появи класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ привертають увагу багатьох математиків стосовно вивчення таких їх апроксимаційних характеристик, як найкращі m-членні тригонометричні наближення, як наближення гіперболічними сумами Фур'є, як найкращі m-членні ортогональні тригонометричні наближення тощо.

Вперше m-членне наближення (або розріджене наближення) з'явилось у роботі С.Б.Стєчкіна "Об абсолютной сходимости ортогональных рядов", надрукованій у журналі "Доклады АН СССР", 1995, Т.102, №2, С. 37-40. Цей напрямок теорії апроксимації отримав свій подальший розвиток у роботах В.М.Темлякова, Б.С.Кашина, ДеВора, Е.С.Белінського, А.В.Андріанова, О.І.Степанца, А.С.Романюка, А.І.Шидліча, Д.Б.Базарханова, М.Хансена, Т.Ульріха та інших. Було отримано багато завершених результатів, але в той же час, залишилась низка важливих питань, пов'язаних із знаходженням оцінок найкращих m-членних наближень класів Нікольського–Бєсова та різноманітних їх узагальнень.

Одне з важливих питань теорії апроксимації пов'язане з тим, які скінченновимірні підпростори є найкращими з точки зору наближення досліджуваних класів функцій у обраних метриках. У зв'язку з цим у 1936 році А.М.Колмогоров запропонував поняття n-поперечника центрально-симетричної множини в банаховому просторі. Стосовно еволюції задачі про обчислення поперечників за Колмогоровим слід зазначити вагомий внесок, зроблений у подальшому У.Рудіним, С.Б.Стєчкіним, В.М.Тихомировим. Саме В.М.Тихомирову вдалося запропонувати ефективний метод отримання оцінок знизу колмогоровських поперечників, який був заснований на топологічній теоремі К.Борсука. За його допомогою В.М.Тихомирову, М.І.Черних, Л.В.Тайкову, Ю.М.Субботіну, В.П.Моторному, В.І.Рубану, А.Пінкусу, А.О.Лигуну та іншим вдалося отримати точні значення колмогоровських поперечників для певного кола функціональних класів. Однак, в переважній більшості випадків, для широкого кола класів досі є відомими або точні за порядком оцінки зазначених поперечників, або асимптотичні оцінки. У багатовимірному випадку В.Е.Майоровим було отримано точні порядкові оцінки колмогоровських n-поперечників одиничних куль з просторів С.Л.Соболєва – Л.М.Слободецького та одиничних куль з просторів функцій з домінуючою мішаною похідною. Також було знайдено точні порядкові оцінки ε-ентропії вказаних функціональних множин. Слід зазначити, що й на сьогоднішній день менш дослідженою залишається задача про точні за порядком оцінки колмогоровських n-поперечників деяких класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю.

Оскільки в дисертаційній роботі досліджуються, зокрема, найкращі тригонометричні наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з малою ізотропною гладкістю та з логарифмічною гладкістю; обчислюються точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників вказаних класів; встановлюються точні за порядком оцінки наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є в східчастих гіперболічних хрестах тощо, **вважаю тему дисертаційних досліджень актуальною**.

2. Основний зміст дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами; списку публікацій здобувача; змісту; переліку умовних позначень; вступу; з п'яти розділів, чотири з яких мають висновки; загальних висновків та списку використаних джерел з 210 найменувань. Загальний об'єм дисертації складає 332 сторінки машинописного тексту.

У вступі зазначається актуальність обраної теми дисертаційного дослідження, вказуються мета і завдання дослідження, підкреслюється наукова новизна отриманих результатів та їх практичне значення, вказуються особистий внесок здобувача та апробація результатів дисертації тощо.

У першому розділі дисертації наведено огляд літератури та результатів інших авторів за основними напрямами досліджень. Зокрема, розглянуто такі питання, як розріджене тригонометричне наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з ізотропною гладкістю, як колмогоровські поперечники класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій з логарифмічною гладкістю, як наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів, як найкраще m-членне тригонометричне наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю та наближення класів Нікольського–Бєсова поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара, в $L_p([0,1]^d)$.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню апроксимаційних характеристик класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій з ізотропною гладкістю. На початку розділу надаються означення просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; модуля неперервності k-порядку $\omega_k(f,t)_p$, $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$; просторів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, норма в яких визначається за допомогою ω_k, $k > r$, а також надається інформація про декомпозицію норм в просторах Бєсова $B^r_{p,\theta}$ при $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $r > 0$ (формули (2.7)–(2.8)) та при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r > 0$ (формули (2.13)–(2.14)). Зазначена декомпозиція відіграє важливу роль при отриманні точних порядкових оцінок досліджуваних далі апроксимаційних характеристик класів Нікольського–Бєсова.

В теоремі 2.1 отримано точні порядкові оцінки найкращих m-членних білінійних наближень класів $\mathbf{B}^r_{p,1}$ в просторах $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^d)$ зі скінченною мішаною нормою, коли $1 \leqslant p < q_1 < \infty$, $q_1 > 2$, $1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$, $r = \max\{d/p, d/2\}$. Зазначимо, що цей результат доповнює дослідження величин $\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, проведене раніше А.С.Романюком. Здобувачем також вказано низку випадків, коли питання про точні порядки величини $\tau_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ залишається відкритим, навіть, в одновимірному випадку.

В теоремі 2.2 обчислено точні порядкові значення m-членних тригонометричних класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості при $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $d(1/p-1/q) < r < d/p$. У випадку $d=1$ результат цієї теореми був отриманий Е.С.Белінським у 1987 році. В той же час при $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r > d/p$ точний порядок величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})$ було отримано ДеВором та В.М.Темляковим у 1995 році.

В теоремі 2.3 встановлено цікавий факт, який полягає в тому, що при переході гладкісного параметра r через критичне значення d/p спостерігається відмінність порядкових оцінок досліджуваних апроксимаційних характеристик, а саме, спостерігається "стрибок" за рахунок логарифмічного множника. При "критичному" значенні показника гладкості $r = d/p$ порядкова оцінка величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ залежить від параметра θ, що у випадках великої гладкості $r > d/p$ та малої гладкості $d(1/p-1/q) < r < d/p$ не спостерігається.

В наступній теоремі 2.4 встановлено точний порядок величини розрідженого наближення $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,1})_q$ при $2 < p < q < \infty$, $r = d/2$. Доведення теорем 2.2, 2.3 носить нетривіальний характер і значна його частина присвячена отриманню оцінок знизу досліджуваних апроксимаційних характеристик. Результати теорем 2.3 і 2.4 доповнюють відомі оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$, встановлені раніше ДеВором та В.М.Темляковим (1995р.). Окрім цього порівняння отриманих в теоремах 2.3 та 2.4 співвідношень з одержаним А.С.Романюком (2009р.) точним порядком m-членного ортогонального тригонометричного наближення класів $\mathbf{B}^r_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ показало, що величини $\sigma_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ та $e^{\perp}_m(\mathbf{B}^r_{p,\theta})_q$ при $m \to \infty$ поводять себе по різному.

Обчисленню в $L_q(\mathbb{T}^d)$ точних порядкових значень величин $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$, $E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$, $e^{\perp}_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$, $e_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$, де $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ — одиничні кулі просторів $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$, які є просторами типу Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з логарифмічною гладкістю, присвячено терему 2.5. В ній обчислено точні порядкові оцінки колмогоговського, лінійного та ортопроекційного n-поперечників класів $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, коли $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $p > 1$, $q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \min(2,p)$.

В теоремі 2.6 при $1 \leqslant \theta < \infty$ і $r > 1 - 1/\theta$ знайдено точні порядки колмогоровського m-поперечника класу $\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}$ в метриці простору $L_\infty(\mathbb{T}^d)$. Також обчислено точний порядок m-го ентропійного числа для $\mathbf{B}^{0,r}_{\infty,\theta}$. При дещо інших обмеженнях на параметри p,q,r,θ у теремі 2.7 знайдено точні порядкові оцінки величин $d_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}; L_q)$ та $\varepsilon_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}; L_q)$. Слід зазначити, що результати цих двох теорем доповнюють результати Б.С.Кашина і В.М.Темлякова (1999р).

В наступних теоремах досліджуються найкращі наближення класів $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з кубічних областей. Тут ω — функція типу модуля неперервності l-го порядку. Зазначимо, що класи $\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta}$ визначаються не "класичним" чином за допомогою модуля неперервності l-го порядку $\omega_l(f)_p$, а через певну декомпозиційну норму (2.121)–(2.122) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ або ж (2.123)–(2.124) при $1 < p < \infty$. В теоремі 2.9 знайдено точний порядок величини $E_{\square_{2^n}}(\mathbf{B}^{\omega}_{p,\theta})_q$ при $1 \leqslant p, q, \theta \leqslant \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > d(1/p - 1/q)_+$. У випадку, коли $1 \leqslant p, q, \theta \leqslant \infty$, $(p,q) \neq (1,1), (\infty,\infty)$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з тим же обмеженням на α, у теоремі 2.11 також встановлено точні порядкові оцінки для вищевказаної величини $\mathcal{E}$. Остання теорема 2.12 цього розділу присвячена обчисленню точного порядку величини $\mathcal{E}_n(\mathbf{B}^{\omega}_{1,\theta})_1$ при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Окремий випадок $\omega(t) = t^r$, де $0 < r < l$ і $\theta = \infty$ містить результат, отриманий В.М.Темляковим (1993р.); якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, то маємо один з результатів А.С.Романюка (2010р.).

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню найкращих наближень класів функцій узагальненої мішаної гладкості тригонометричними поліномами зі спектром з східчастих гіперболічних хрестів. На початку розділу доведено теорему 3.1 щодо декомпозиції норми в просторі $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Метою отримання теореми 3.1 стало подальше дослідження класів $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ з апроксимаційної точки зору, яке дозволило охопити "крайні" значення параметра p, а саме $p = 1$ та $p = \infty$. Слід відмітити, що в окремому випадку, коли $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, теорему 3.1 було отримано П.І.Лізоркіним і С.М.Нікольським у 1989 році.

За допомогою теореми 3.1 у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$, обчислено точні порядкові значення найкращих наближень класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів Q_n, коли $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $2 < p \leqslant \infty$, $q = 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ або $p = q = \infty$, $\theta = 1$ (теорема 3.2). Це ж питання досліджується у теоремі 3.3, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $d = 2$ та $p = q = \infty$, $1 < \theta \leqslant \infty$ або $2 < p \leqslant \infty$, $q = 1$, $2 < \theta \leqslant \infty$. Відмітимо, що у випадку $\omega(t) = t^r$, $r > 0$, вказані загальні теореми містять низку результатів для класів $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$, отриманих В.М.Темляковим (1993р.) та А.С.Романюком (2008, 2010, 2011 рр.).

Найкращі поліноміальні наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій з узагальненою мішаною гладкістю поліномами зі спектром з рівномірних східчастих гіперболічних хрестів в метриці простору $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ досліджуються у теоремах 3.4 та 3.5. В них отримано порядкові оцінки зверху величин $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty$, коли $1 \leqslant p \leqslant 2$, $2 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, $d \geqslant 2$ (теорема 3.4) та коли $2 < p < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, $1 < \theta \leqslant \infty$, $d \geqslant 2$ (теорема 3.5).

Точні порядкові оцінки величин $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ або при $2 < p < \infty$, $\theta = 1$ та $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$, $d \geqslant 1$ встановлено в теоремі 3.6.

Теореми 3.4 – 3.6, коли $\omega(t) = t^r$, $r > 1/p$, містять відповідні результати для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$. В цьому окремому випадку зазначені твердження при певних обмеженнях на p, θ включають в себе низку результатів В.М.Темлякова (1985, 1993 рр.) та А.С.Романюка (2004, 2008 рр.).

Теорема 3.7 присвячена наближеному відновленню класів $\mathbf{MH}^\omega_p$ періодичних функцій багатьох змінних, де $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$. Зокрема, в ході її доведення було побудовано сітки, для яких похибки відновлення функцій з класів $\mathbf{MH}^\omega_p$ (при певних p) по значеннях у вузлах цих сіток не гірші, ніж порядки найкращих наближень класів $\mathbf{MH}^\omega_p$ в метриці $L_p(\mathbb{T}^d)$, тригонометричними поліномами з номерами гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів Q_n. Зазначимо, що у випадку $\omega(t) = t^r$, $r > 0$, з теореми 3.7 слідує один результат для класів $\mathbf{MH}^r_p$, отриманий В.М.Темляковим у 1985 році.

Далі у розділі досліджуються питання найкращого поліноміального наближення класів функцій з узагальненою мішаною гладкістю поліномами з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів $Q(N)$. У випадку, коли $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, множини $Q(N)$ є східчастими гіперболічними хрестами. В теоремі 3.8 обчислено точні порядкові оцінки величин $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta})_q$ при різних співвідношеннях між параметрами p, q та при $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ і $1 \leqslant \theta < \infty$. Доведення теореми є потужним. Більша його частина присвячена отриманню оцінок знизу досліджуваних апроксимаційних характеристик класів $\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}$. Як наслідок, отримано теорему 3.9, в якій знайдено точний порядок величини $E_{Q_n}(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_p$, де $1 \leqslant \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$. При певних співвідношеннях між p та q дана теорема містить відповідні результати Sun Yongsheng та Wang Heping (1997 р.). При $\theta = \infty$, тобто коли $\mathbf{MB}^\Omega_{p,\infty} = \mathbf{MB}^\Omega_p$, вона містить також низку результатів, отриманих М.М.Пустовойтовим (1994, 1999, 2003 рр.)

Метою подальших досліджень розділу стало обґрунтування доцільності наближення класів $\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}$ сумами Фур'є $S_{Q(N)}(f)$ або ж іншими тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік із множини $Q(N)$. Для цього спершу було обчислено точні порядки величин $E_{Q(N)}(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta})_q$ де $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $\Omega(t) = \Omega_1(t) \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/q}$, $\Omega_1 \in \Phi_{\alpha,l}$ (теорема 3.10), а потім знайдено точні порядкові оцінки колмогоровських поперечників $d_m(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}; L_2)$ при $1 < p < 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ (теорема 3.11) та $d_m(\mathbf{MB}^\Omega_{p,\theta}; L_q)$, коли $2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $q \neq \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ або ж $p = q = \infty$, $\theta = 1$, та $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ (теорема 3.12). У випадку, коли $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, теореми 3.10–3.12 містять, як окремий випадок, при певних обмеженнях на p та q результати Sun Yongsheng і Wang Heping

(1997р.) та А.Ф.Конограя (2008р.). Якщо ж покласти $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$ (тобто $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \equiv \mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$), то теореми 3.10 та 3.11 містять результати А.С.Романюка (1991р.).

Закінчується розділ вивченням в метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ поведінки найкращих наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних, які визначені на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, що породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(t)$. Важливе значення в ході досліджень відіграє теорема III.3 про декомпозиційне нормування просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Ця теорема є узагальненням на простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ теореми П.І.Лізоркіна та С.М.Нікольського для просторів $S^{r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ (1989р.). В теоремі 3.17 при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$ отримано точні порядкові оцінки апроксимаційних характеристик $\mathcal{E}_{Q(N)}$ та $E_{Q(N)}$ класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ в метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$. Важливу роль в ході доведення також відіграє теорема III.3. У випадку, коли $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$, $0 < r < l$, ця теорема містить, як окремий випадок, точні порядкові оцінки величин $E_{\overline{Q}_n}(S^{r}_{p,\theta}B)_p$, встановлені Sun Yongsheng і Wang Heping у 1995 році.

Четвертий розділ дисертації присвячений дослідженню найкращих m-членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бєсова функцій мішаної гладкості. На його початку отримано теорему 4.1, в якій знайдено точний порядок найкращого m-членного ортогонального тригонометричного наближення класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta}$ в метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$ при $1 < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > \max\{1 - 1/q; 1 - 2/q + 1/\theta\}$. Даний результат є певним узагальненням відповідного результату А.С.Романюка (2003р.), якщо в теоремі 4.1 покласти $\omega(t) = t^{r_1}$. В наступній теоремі 4.2 отримано точний порядок величини $e^{\perp}_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{1,\theta})_\infty$, коли $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, а $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > 1$. Як окремий випадок вказана теорема також містить один з результатів А.С.Романюка (2007р.), коли $\omega(t) = t^{r_1}$, $r_1 > 1$.

Дослідженню поведінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних присвячено теорему 4.3. У якості наближуваних класів в ній розглядаються одиничні кулі просторів $MH^{\omega}_{p,\theta}$, в яких використовується декомпозиційна норма. Слід зазначити, що оцінки зверху величин $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ забезпечуються конструктивним методом $A(f,q,\mu)$, який базується на гріді (greedy) алгоритмах. Доведенню існування вказаного методу та обчисленню норм похибок апроксимації ним функцій $f \in \mathbf{MW}^{\lambda,b}_{A}$ присвячено лему 4.1.

Вивченню поведінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бєсова функцій багатьох змінних узагальненої малоїмішаної гладкості присвячено теорему 4.4. Метою отримання цього результату стало встановлення точних за порядком оцінок величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$, а також $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ для не розглянутих раніше співвідношень між параметрами ω, p, q, θ, а саме коли $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ та $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > 1/p - 1/q$ і $\gamma < 1/p$. Функція ω характеризує вказані класи як такі, що мають узагальнену малу мішану гладкість спеціального вигляду. Особливістю приведених в теоремі 4.4 результатів є те, що поведінка розглянутих в ній апроксимаційних характеристик σ_m виражається в термінах величини m, а не в термінах величини n, яка пов'язана з m певним співвідношенням. Доведення вказаної теореми є потужним та нетривіальним. При його проведенні здобувач проявив свій хист та майстерність. Слід зазначити, що при $\omega(t) = t^r$ теорема 4.4 містить відповідний результат А.С.Романюка для класів $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ (2003р.). Також важливо зазначити, що для $m \asymp 2^n n^{d-1}$ отримані в теоремі 4.4 оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ є кращими за порядком, ніж оцінки величин $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $E_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$.

У двох останніх підрозділах 4.4 та 4.5 встановлено точні за порядком оцінки величин найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю у просторі L_q, $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, у випадку малої гладкості $(1/p - 1/q < r < 1/p)$ та "критичного" значення показника гладкості ($r = 1/p$). Варто зазначити, що у випадку малої гладкості величини найкращого m-членного тригонометричного наближення класів $\mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$ і $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ збігаються за порядком. Що стосується "критичного" показника гладкості $r = 1/p$, то в оцінках згаданої апроксимаційної характеристики на цих класах виявлено відмінності в логарифмічній шкалі.

П'ятий розділ дисертації присвячений наближенню класів періодичних функцій багатьох змінних поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара. В теоремі 5.1 отримано точні порядки величин $E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p})_q$ — найкращих наближень класів функцій $\mathbf{MH}^{\omega}_{p}$ в метриці простору $L_q([0,1]^d)$ поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара з номерами індексів з множини Q_n — східчастого гіперболічного хреста. При цьому $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$, ω — функція типу модуля неперервності, яка задовольняє умову (S^{α}) з деяким α таким, що $(1/p - 1/q)_+ < \alpha < 1$.

В теоремі 5.2 одержано точні порядкові оцінки величин найкращих m-членних наближень класів функцій $\mathbf{MH}^{\omega}_{p}$ поліномами, побудованими за тензорною системою Хаара, в метриці простору $L_q([0,1]^d)$. Тут $1 < p \leqslant \infty$, $1 < q < \infty$, ω — функція типу модуля неперервності, яка задовольняє мову (S^{α}), де $1/p < \alpha < 1$. В окремому випадку $\omega(t) = t^r$ теореми 5.1 та 5.2 містять результати, одержані А.В.Андріановим (1999р.).

Відзначимо наступне цікаве спостереження. При $m \asymp 2^n n^{d-1}$ порядки найкращого класичного наближення (теорема 5.1) та найкращого m-членного наближення (теорема 5.2) поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, співпадають тільки у випадку $1 < q \leqslant p \leqslant \infty$, $q < \infty$, $p \geqslant 2$. В решті ж випадків точні за порядком оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MH}_p^\omega, \mathcal{H})_q$ є кращими, ніж для $E_{H(Q_n)}(\mathbf{MH}_p^\omega)_q$.

Закінчується розділ теоремою 5.3, в якій одержано порядкові оцінки зверху для наближення східчастими гіперболічними сумами Фур'є–Хаара класів типу Бєсова $\mathbf{MH}_{p,\theta}^r$ періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю в метриці простору $L_q([0,1]^d)$. Зазначимо, що теорема типу 5.3 матиме місце і для класів $\mathbf{MB}_{p,\theta}^r$. В окремому випадку $d = 1$ встановлені в теоремі 5.3 результати співпадають з результатами А.В.Андріанова, отриманими у 1999 році.

3. Наукова новизна одержаних результатів, їх ступінь обґрунтованості та достовірність. Основні результати дисертаційної роботи є новими, досконально обґрунтованими та достовірними. Вони полягають у наступному.

1) Знайдено точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень ізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з малою гладкістю, а також класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з малою рівномірною мішаною гладкістю. В останьому випадку з'ясовано, в яких ситуаціях оцінки зверху реалізуються конструктивним методом, який базується на використанні гріді (greedy) алгоритму.

2) Для класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій як однієї так і багатьох змінних з логарифмічною гладкістю отримано точні порядкові оцінки низки їх апроксимаційних характеристик.

3) Для класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. Встановлено випадки, коли поліноми такого виду є оптимальними в сенсі точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників досліджуваних класів.

4) Отримано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова, визначених на $\mathbb{R}^d$, цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є в східчастих гіперболічних хрестах.

5) Для періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості з класів типу Нікольського встановлено точні за порядком оцінки найкращих m-членних наближень поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара.

4. Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, викладені в дисертації, мають теоретичний характер та доповнюють важливі розділи математичного аналізу, такі як теорія функцій та теорія наближень. Низка отриманих здобувачем результатів може мати й практичне застосування у таких галузях науки, як біологія, інженерія, медицина, математична фізика тощо.

5. Аналіз публікацій та повнота відображення результатів в авторефераті дисертації. За результатами досліджень опубліковано 48 наукових праць, з яких 28 статей у наукових фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук (15 статей надруковано у наукових періодичних виданнях, що входять до наукометричної бази SCOPUS) та 20 тез на міжнародних конференціях. Наведений в дисертації перелік публікацій та їх зміст відповідають темі дисертації. В авторефераті у повній мірі відображені основні положення та необхідні висновки дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи мають широку апробацію і багато разів доповідались на міжнародних конференціях та на наукових семінарах в українських та закордонних університетах та наукових установах.

6. Відповідність дисертації встановленим вимогам, оцінка змісту дисертації та її завершеності. Структура дисертації, її обсяг та оформлення відповідають вимогам, що висуваються до докторських дисертацій. Дисертаційне дослідження С.А.Стасюка є завершеною науковою роботою, виконаною за актуальною темою. Робота написана лаконічною чіткою мовою з логічним та послідовним представленням матеріалу. Це, на мою думку, в достатній мірі характеризує загальний високий науковий рівень здобувача.

7. Зауваження щодо змісту дисертації.

1) В дисертаційній роботі є певна кількість повторів.

— Означення простору $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, наведено у першому абзаці підрозділу 1.1 (стор. 41), у першому абзаці підпункту 2.1.1 (стор. 64), у першому абзаці підпункту 3.1 (стор. 124).

— Поняття функції типу мішаного модуля неперервності порядку l наведено на сторінках: 51–52, 125, 199, 282 ($l=1$).

— Означення умов Барі–Стєчкіна (S^{α}) та (S_l) та множини $\Phi_{\alpha,l}$ наведені на сторінках 51–52, 111–112, 126,199–200.

— Означення множини $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ та найкращого m-членного білінійного наближення порядку m, а саме $\tau_m(g)_{q_1,q_2}$ дається на сторінках 67 і 96.

2) Не зовсім вдало визначено систему Хаара (дивись стор. 60 та стор. 283). Доцільно було б скористатись її класичним означенням, наведеним у роботі Б.І.Голубова, надрукованій у журналі "Известия АН СССР. Серия математи-

ческая", 1964, Т.28, №6, С. 1271–1296.

3) На стор. 51 (6-й рядок знизу) при означенні мішаного модуля неперервності порядку l треба у j-му аргументу функції f замість $..., x_j + jh, ...$ записати $..., x_j + nh_j, ...$. Також перед цим треба вказати, що означає символ $\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$, тобто навести формулу

$$\Delta^l_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \Delta^l_{h_d} ... \Delta^l_{h_1} f(\mathbf{x}) = \Delta^l_{h_d}(...(\Delta^l_{h_1} f(\mathbf{x}))...), \quad \mathbf{h} = (h_1, ..., h_d).$$

Аналогічна ситуація має місце і на стор. 124–125, де ще раз дано означення величини $\Omega_l(f,t)_p$.

4) По тексту дисертації зустрічаються записи $\log m$ та $\log_2 m$ Доцільно було б обрати один з них і користатися ним надалі.

5) На стор. 67 (4-й рядок знизу) при означені множини $\square_{2^s}$ запис $s \in \mathbb{Z}_+$ треба зробити за фігурними дужками.

Це ж стосується і множини $\square_N$ (стор. 92, 7-й рядок зверху): символи $N \in \mathbb{N}$ треба записати за знаком фігурних дужок.

6) На стор. 72 (7-й рядок зверху) слова "оцінку знизу" треба замінити на "оцінку зверху". Це ж має місце і на стор. 215 (8-й рядок зверху).

7) Не зрозуміло, навіщо у формулі (стор. 93, 2-й рядок зверху) присутній множник $(s+1)^0$.

8) В різних місцях дисертації колмогоровський поперечник позначається по різному. Наприклад, $d_m(\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$ (стор. 98, 1-й рядок зверху) та $d_m(\mathbf{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ (формула (2.108)). У формулі (2.88) записано $d_m(F)_q$, хоча, згідно з переліком умовних позначень, повинно бути $d_m(F, L_q)$ (дивись стор. 28, 7-й рядок зверху).

9) На стор. 120 (12-й рядок зверху) замість посилання на формулу (2.148) треба послатися на формулу (2.140). Це ж треба зробити і у 10-му рядку знизу на цій же сторінці.

10) На стор. 234 (8-й рядок зверху) при означені норми $\|f\|_A$ замість символу $\widehat{f}(k)$ треба писати $|\widehat{f}(k)|$.

11) У формулюванні теореми 2.8 (стор. 46, 102) наведена у першому рядку подвійна нерівність $\max\{q,2\} \leqslant p \leqslant \infty$ є зайвою, оскільки далі чітко визначено межі зміни параметру p, за яких співвідношення (1.14) та (2.110) мають місце.

12) При користуванні формулою для ядер Валле–Пуссена $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, наведеною на стор. 47 (7-8 рядки зверху) доцільно було б вказати, що буде у випадку $l = 1$.

Це ж стосується і аналогічної формули для $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, на стор. 112 (11-й рядок зверху). Зазначимо, що верхня межа другої суми у цій формулі повинна бути $2m-1$, а не $2m$.

ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК. Не зважаючи на зроблені зауваження, одержані в дисертації результати та зроблені автором висновки є **правиль-**

ними і обґрунтованими. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто її автором і досить повно викладені в надрукованих ним роботах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Стасюка Сергія Андрійовича "Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних" задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо докторських дисертацій, а її автор **Стасюк Сергій Андрійович заслуговує** на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз, 111 — математика.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор
професор кафедри інформаційних технологій
Університету імені Альфреда Нобеля, Дніпро С.Б.Вакарчук
10.06.2019

Підпис засвідчую
Вчений секретар, доктор педагогічних наук,
професор С.П.Кожушко