

ВІДГУК
офіційного опонента
про дисертацію Стасюка Сергія Андрійовича
“Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних”,
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз
111 – математика

Тематика роботи пов'язана із задачами дослідження апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних з різними видами гладкості у просторах Лебега та у просторах суттєво обмежених функцій, встановлення точних за порядком оцінок цих характеристик на класах функцій Нікольського-Бесова.

Головними прикладами апроксимаційних характеристик, що розглядаються у роботі є найкраще m -членне (або розріджене) тригонометричне наближення, наближення тригонометричними поліномами з гармоніками зі східчастих (та узагальнених східчастих) гіперболічних хрестів, ентропійні числа, колмогоровські n -поперечники, та інші. При цьому розглядається широкий діапазон гладкості функцій, таких як ізотропна гладкість, логарифмічна гладкість, мішана (та узагальнена мішана) гладкість.

Поняття найкращого m -членного наближення було запроваджено С.Б. Стечкиним в його роботі по відшукуванню критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом ця апроксимаційна характеристика стала предметом досліджень багатьох математиків, зокрема, Е.С. Белінського, Р. ДеВора, Р.С. Ісмагілова, Б.С. Кашина, В.С. Майорова, В.М. Темлякова, О.І. Степанця, А.С. Романюка та багатьох інших.

Дослідження за тематикою, якій присвячена дисертація, проводяться у багатьох наукових центрах різних країн світу. Вагомі досягнення з цієї проблематики отримано в Інституті математики НАН України. Дана дисертаційна робота виконувалась саме в цьому закладі згідно з планами наукових досліджень відділу теорії функцій. Тему дисертаційної роботи “Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних” вважаю актуальною.

Дисертація загальним обсягом 332 сторінки складається зі списку публікацій здобувача, переліку умовних позначень, вступу, 5 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 210 найменувань.

У вступі характеризується актуальність обраної теми, визначаються мета і завдання, а також об'єкт і предмет досліджень автора роботи. Вказано на зв'язок дисертації з науковими програмами і темами, що виконувались у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України. Наведено перелік основних завдань і методів дослідження, а також результатів роботи, що виносяться на захист. Охарактеризовано ступінь наукової новизни отриманих результатів та їх практичне значення, наведено кількість фахових видань та видань, що входять

до міжнародних наукометричних баз даних, де ці результати опубліковано. Вказано на особистий внесок здобувача у спільні результати. Вступ містить перелік конференцій і наукових семінарів, на яких доповідались основні результати.

У першому розділі наведено огляд відомих результатів та літератури з тематики даної роботи, викладено основні положення дисертації з відповідними коментарями, дано означення основних величин, зокрема поняття найкращого m -членного наближення.

У другому розділі досліджуються апроксимаційні характеристики класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з ізотропною гладкістю, зокрема, m -членні наближення, колмогоровські n -поперечники, ентропійні числа, наближення тригонометричними поліномами з гармоніками з кубічних областей.

У підрозділі 2.1 знайдено точні порядкові оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з малою ізотропною гладкістю, які доповнюють відомі результати Р. ДеВора і В.М. Темлякова для цих класів з великою ізотропною гладкістю. Виявлено деякі якісні особливості поведінки цих оцінок при переході через критичний показник гладкості.

Крім того, отримано точні за порядком оцінки білінійного m -членного наближення класів Бесова періодичних функцій багатьох змінних з критичним показником гладкості. Такого типу оцінки для білінійного m -членного наближення цих класів функцій з критичним показником гладкості є новими навіть в одновимірному випадку. Вони доповнюють результати досліджень В.М. Темлякова, А.С. Романюка, що стосуються точних порядкових оцінок білінійного m -членного наближення класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних як з ізотропною, так і з мішаною гладкістю.

У підрозділі 2.2 знайдено точні порядкові оцінки найкращого m -членного ортогонального та m -членного тригонометричного наближення класів типу Бесова періодичних функцій багатьох змінних логарифмічної гладкості. В одновимірному випадку також одержано точні порядкові оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів типу Нікольського-Бесова і ці оцінки доповнюють результати досліджень Б.С. Кашина та В.М. Темлякова цих апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського функцій однієї змінної логарифмічної гладкості.

У підрозділі 2.3 знайдено точні порядкові оцінки найкращого наближення “кубічними” тригонометричними поліномами і наближення “кубічними” сумами Фур’є класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою ізотропною гладкістю.

У третьому розділі досліджується асимптотична поведінка найкращого наближення класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості східчасто-гіперболічними тригонометричними поліномами.

У підрозділі 3.1 отримано декомпозиційне зображення норми періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості просторів

Нікольського-Бесова для параметрів метрики $p \in [1, \infty]$ тоді як раніше воно було відоме лише для параметрів $p \in (1, \infty)$. Поширення відомого декомпозиційного зображення на крайні значення параметрів метрики стало можливим завдяки використанню “двійкових” блоків сум Валле-Пуссена замість “двійкових” блоків сум Фур’є.

У підрозділі 3.2 знайдено точні порядкові оцінки найкращого наближення класів $MB_{p,\theta}^\omega$ Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік з рівномірних східчастих гіперболічних хрестів в метриці простору L_q у випадку коли один (оба обидва) параметри p, q приймають значення 1 або ∞ . Це стало можливим саме завдяки отриманому у попередньому підрозділі декомпозиційному зображенні норми періодичних функцій для цих крайніх значень параметрів метрики.

У підрозділі 3.3 знайдено точні за порядком оцінки найкращого наближення класів $MB_{p,\theta}^\Omega$ Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних в метриці простору L_q тригонометричними поліномами з гармоніками у множинах, що залежать від функції $\Omega(\mathbf{t})$, зокрема, у множинах породжених поверхнями рівня цієї функції. Показано, що такі множини (при деяких співвідношеннях між параметрами p та q) реалізують колмогоровські поперечники класів $MB_{p,\theta}^\Omega$ у сенсі точності за порядком.

У підрозділі 3.4 знайдено точні порядкові оцінки найкращого наближення в метриці простору L_q класів $MB_{p,\theta}^\omega(\gamma)$ Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з гармоніками в нерівномірних східчастих гіперболічних хрестах.

В останньому підрозділі 3.5 знайдено точні за порядком оцінки наближення в метриці простору L_q класів $S_{p,\theta}^\Omega B(R^d)$ функцій багатьох змінних, що визначені на R^d , з узагальненою мішаною гладкістю цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур’є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\mathbf{t})$.

У четвертому розділі досліджується асимптотична поведінка найкращого m -членного ортогонального тригонометричного наближення та найкращого m -членного тригонометричного наближення класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з різними типами мішаної гладкості в метриці простору L_q .

Зокрема, у підрозділі 4.1 знайдено точні порядкові оцінки найкращого m -членного ортогонального тригонометричного наближення класів $MB_{1,\theta}^\omega$ Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду в метриці простору L_q , $1 < q \leq \infty$. Функція, яка характеризує узагальнену мішану гладкість, описується в термінах умов Барі-Стечкіна.

У підрозділі 4.2 отримано точні порядкові оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу $MN_{p,\theta}^\omega$ Нікольського-Бесова

періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю спеціального вигляду в метриці простору L_q , $1 < p \leq 2 < q < \infty$, або $2 < p < q < \infty$. При цьому оцінки зверху доведено конструктивним методом за допомогою greedy алгоритмів.

У підрозділі 4.3 знайдено точні порядкові оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів $MB_{p,\theta}^\omega$ Нікольського-Бесова, а також класів $MN_{p,\theta}^\omega$ такого типу періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю спеціального вигляду в метриці простору L_q , $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

У підрозділах 4.4 і 4.5 знайдено точні порядкові оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів $MN_{p,\theta}^r$ періодичних функцій багатьох змінних малої мішаної гладкості ($1/p - 1/q < r < 1/p$) в метриці простору L_q , $1 < p \leq 2 < q < \infty$, а також для критичного показника гладкості ($r = 1/p$). З'ясовано, що для функцій малої гладкості точні порядки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів $MN_{p,\theta}^r$ і класів $MB_{p,\theta}^r$ збігаються, але для критичного показника гладкості в оцінках зазначених апроксимаційних характеристик цих класів виявлено відмінності за логарифмічною шкалою.

У п'ятому розділі досліджується асимптотична поведінка наближення періодичних функцій багатьох змінних класів Нікольського-Бесова мішаної гладкості поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара.

У підрозділі 5.1 отримано точні порядкові оцінки наближення класів MN_p^ω періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду східчасто-гіперболічними сумами Фур'є-Хаара.

У підрозділі 5.2 отримано точні порядкові оцінки наближення класів MN_p^ω періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності спеціального вигляду поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара. З'ясовано у яких випадках порядкові оцінки найкращого наближення та найкращого m -членного наближення поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара збігаються, а у яких – відрізняються.

У підрозділі 5.3 отримано порядкові оцінки зверху для наближення класів типу Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю східчасто-гіперболічними сумами Фур'є-Хаара.

Таким чином, ядро дисертації утворюють результати по відшукуванню точних порядкових оцінок важливих апроксимаційних характеристик на класах періодичних функцій однієї та багатьох змінних з різними типами гладкості у просторах Лебега та у просторах суттєво обмежених функцій. При цьому методи дослідження, технічні прийоми та отримані результати є дуже нетривіальними і становлять безумовний науковий інтерес для фахівців в галузі аналізу і теорії наближення.

Всі основні результати дисертації є новими. Вони з достатньою повнотою викладені і доведені, як в самій роботі, так і у відповідних публікаціях автора. Автореферат об'єктивно відображає основні положення дисертаційної роботи.

Вважаю, що дисертація є завершеною працею, в якій отримано вагомі результати теоретичного характеру, що дають розв'язок ряду важливих екстремальних задач теорії наближення і нові підходи до розв'язання таких задач.

Науковий рівень дисертації вважаю високим. Найбільш вагомими, на мій погляд є розділи 2–4, а найважливіші результати містяться в теоремах 2.3, 2.7, 2.8, 3.8, 3.10, 4.4, 4.4', 4.5', 5.2.

Результати роботи і запропоновані в ній методи можуть бути використані для подальших досліджень екстремальних задач теорії наближення, а також у теоретичних дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики. Крім того, отримані в дисертації результати можуть бути основою для побудови оптимальних чисельних алгоритмів наближення функцій.

Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. В роботах, які опубліковані у співавторстві, або внесок усіх авторів є рівноцінним, або точно вказано на результати, які належать автору дисертації. Основні результати достатньо повно викладені в 28 наукових публікаціях у фахових виданнях, з них 23 роботи належать здобувачу особисто, а 17 – надруковано у виданнях, що входять до наукометричних баз даних. Виходячи з цього можна оцінити сумарний внесок здобувача як цілком достатній для вирішення питання про його докторську кваліфікацію.

Помилка принципового характеру в дисертації немає. В роботі й авторефераті є ряд неточностей, повторів та друкарських помилок, відповідний перелік яких наведено нижче.

1. У формулі на стор. 43¹² відсутнє пояснення змісту позначення $\mathbf{n}_k$.
2. В роботі на стор. 72⁷ замість слів “оцінку знизу” мають бути слова “оцінку зверху”.
3. В роботі на сторінках 111 і 112 наведено означення умов Барі-Стєчкіна. А потім ці ж означення наведені ще й на стор. 126.
4. В роботі на стор. 123¹⁴ замість “для в” має бути “для”.
5. В роботі на стор. 144⁶ замість “зникають при лише” має бути “зникають лише”.
6. В роботі на стор. 181₁ замість “якщо $[l_{\gamma_j}] + 1$ – не ціле число” має бути “якщо l_{γ_j} – не ціле число”.
7. В роботі на стор. 198⁷ сказано, що апаратом наближення класів $S_{p,\theta}^{\Omega} B(R^d)$ у підрозділі 3.5 є цілі функції експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(t)$, з іншого боку на стор. 218⁶⁻⁷ сказано, що таким апаратом наближення є цілі функції з носіями їх перетворень Фур'є в узагальнених гіперболічних хрестах, а на стор. 204⁹ ці ж

множини, які містять перетворення Фур'є таких цілих функцій названо східчастими гіперболічними хрестами.

8. Можливо, в роботі на стор. 241⁴ символ $MB_{p,\theta}^\omega$ простору Нікольського-Бесова потрібно замінити символом простору, що є узагальненням цього простору.

Наведені зауваження не впливають суттєво на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи, а зроблені автором висновки є строго обґрунтованими і їх достовірність не викликає сумніву. Вважаю, що робота “*Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних*” відповідає встановленим вимогам до докторських дисертацій за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, а її автор С. А. Стасюк заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Офіційний опонент,
професор кафедри математичного аналізу і теорії
функцій Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара
д.ф.-м. н., професор

В. О. Кофанов

Затверджую,
Вчений секретар Дніпровського
національного університету імені Олеся Гончара
к.ф.-м.н., доцент

Т. В. Ходанен

