

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Стасюка Сергія Андрійовича

“Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних”

подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних, а саме, встановленню точних за порядком оцінок цих характеристик для класів типу Нікольського–Бесова функцій як однієї так і багатьох змінних з широким діапазоном гладкостей. Поза сумнівом, окреслені в дисертації напрямки є актуальними, а представлені результати доповнюють дослідження, що проведені впродовж останніх десятиліть такими відомими фахівцями з теорії наближення, як В.М. Темляков, Б.С. Кашин, R.A. DeVore, Е.С. Белінський, Дінь Зунг, А.С. Романюк, Е.М. Галєєв, М.М. Пустовойтов, Sun Yongsheng, Wang Heping, Д.Б. Базарханов.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 210 найменувань. Повний обсяг роботи становить 332 сторінки.

Основні положення дисертаційної роботи з відповідними коментарями та результатами попередників висвітлені в її першому розділі.

Найбільш вагомими результатами другого розділу є точні за порядком оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з малою ізотропною гладкістю. Встановлені дисертантом оцінки доповнюють одержані Р.А. Де Вором та В.М. Темляковим (1995) точні за порядком оцінки згаданих апроксимаційних характеристик зазначених класів, де випадок малої гладкості не був розглянутий.

Крім того, в другому розділі розв'язано задачу про знаходження точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних

чисел класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю. Зазначені результати доповнюють відповідні результати Б.С. Кашина та В.М. Темлякова (1999), які стосуються точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів типу Нікольського періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю. Виявилось, що точні за порядком оцінки, як колмогоровських поперечників, так і ентропійних чисел класів $B_{p,\theta}^{0,r}$ типу Нікольського–Бесова періодичних функцій однієї змінної з логарифмічною гладкістю окрім того, що залежать від параметра θ , ще й збігаються за порядком.

Третій розділ присвячений встановленню точних за порядком оцінок найкращого наближення класів Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, конструкція яких тісно пов’язана з виглядом гладкісних функцій, які присутні в означенні досліджуваних класів. Оптимальність (в сенсі точних за порядком оцінок відповідних колмогоровських поперечників) вибору таких тригонометричних поліномів для наближення класів Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю у деяких випадках підтверджена знайденими точними за порядком оцінками колмогоровських поперечників цих класів. Одержані в цьому розділі точні за порядком оцінки апроксимаційних характеристик класів Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю доповнюють та поширюють відповідні результати Я.С. Бугрова, Н.С. Нікольської, В.М. Темлякова, Е.М. Галеева, Дінь Зунга, А.С. Романюка, М.М. Пустовойтова, Sun Yongsheng та Wang Heping, які стосуються наближення певних класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік з відповідних гіперболічних хрестів.

А зараз перейдемо до більш детального опису вмісту третього розділу. Установленням декомпозиційного зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів Бесова $MB_{p,\theta}^{\Omega}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, де функція $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ задовольняє так звані умови Барі–Стечка, розпочинається виклад ре-

зультатів третього розділу. Новизна встановленого декомпозиційного зображення полягає у тому, що крім значень параметра $p \in (1, \infty)$ охоплено його “крайні” значення $p = 1$ та $p = \infty$. Це вдалося здійснити за рахунок залучення до розгляду двійкових “блоків” сум Валле Пуссена замість двійкових “блоків” сум Фур’є, які раніше використовувались Sun Yongsheng та Wang Heping (1997) при встановленні ними декомпозиційного зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів $MB_{p,\theta}^\Omega$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Інша особливість одержаного тут результату полягає в тому, що з випадку $\theta = \infty$ на випадок $1 \leq \theta < \infty$ вдалось поширити відповідне декомпозиційне зображення для норми періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю з просторів Нікольського $MH_p^\Omega = MB_{p,\infty}^\Omega$, яке встановлене М.М. Пустовойтовим (1994).

Одержане декомпозиційне зображення дало поштовх для дослідження та встановлення порядкових оцінок апроксимаційних характеристик класів $MB_{p,\theta}^\Omega$ (одиночних куль просторів $MB_{p,\theta}^\Omega$) періодичних функцій багатьох змінних з різними видами узагальненої мішаної гладкості для “крайніх” значень параметра p ($p = 1$ та (або) $p = \infty$).

У другій частині третього розділу містяться результати, які стосуються точних за порядком оцінок найкращого наближення класів Нікольського-Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною узагальненою гладкістю тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік з відповідних східчастих гіперболічних хрестів, які, в залежності від розглядуваних параметрів мають різну структуру (так звані “власні” та “невласні” гіперболічні хрести). Вперше “невласні” гіперболічні хрести з’явилися у роботі С.О. Теляковського (1964), в якій було показано їх апроксимаційні переваги над “власними” гіперболічними хрестами.

В завершальному підрозділі третього розділу встановлено точні за порядком оцінки наближення класів Нікольського-Бесова $S_{p,\theta}^\Omega B$ функцій багатьох змінних, визначених на \mathbb{R}^d , цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур’є в множинах, обмежених поверхнями рівня функції Ω .

У четвертому розділі дисертації вивчаються такі види розрідженого тригонометричного наближення, як найкраще m -членне тригономет-

ричне наближення та найкраще m -членне ортогональне тригонометричне наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості. Одержані оцінки поширюють та доповнюють відповідні результати В.М. Темлякова, А.С. Романюка, Д.Б. Базарханова стосовно найкращих m -членних тригонометричних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості.

Дисертантом встановлено точні за порядком оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю. Для деяких співвідношень між параметрами верхні оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю досягаються за допомогою конструктивного гріді (greedy) алгоритму, запропонованого і розробленого В.М. Темляковим для дослідження найкращого m -членного тригонометричного наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю. Для певних же співвідношень між параметрами верхні оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною гладкістю досягаються через застосування неконструктивного підходу (з використанням леми Е.С. Белінського), запропонованого і розробленого А.С. Романюком для вивчення найкращого m -членного тригонометричного наближення класів Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю з подальшою адаптацією до класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з різними типами мішаної гладкості.

На мій погляд, одним із найскладніших результатів, як четвертого розділу, так і дисертаційної роботи в цілому, стосується встановлення точних за порядком оцінок найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу Нікольського–Бесова $\mathbf{MB}_{p,\theta}^\omega$ і $\mathbf{MH}_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних з малою мішаною узагальненою гладкістю.

Заклучна частина четвертого розділу містить точні за порядком оцінки найкращого m -членного тригонометричного наближення класів типу

Нікольського–Бесова $M\mathcal{H}_{p,\theta}^r$ періодичних функцій багатьох змінних (з мішаною гладкістю) в метриці простору L_q для $1 < p \leq 2 < q < \infty$ у випадку малої гладкості, тобто для значень параметра r , що задовольняє нерівність $1/p - 1/q < r \leq 1/p$.

П'ятий розділ присвячений наближенню класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара. Зокрема, встановлено порядкові оцінки наближення згаданих класів функцій східчато–гіперболічними сумами Фур'є–Хаара. Крім цього знайдено точні за порядком оцінки найкращого наближення m -членними поліномами, що побудовані за тензорною системою Хаара, класів типу Нікольського періодичних функцій багатьох змінних з узагальненою мішаною гладкістю.

3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації. Дисертаційна робота С.А. Стасюка виконана на високому науковому рівні. Її результати є актуальними, новими та строго математично обґрунтованими. Всі твердження супроводжуються повними доведеннями.

4. Публікації та апробація результатів. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 28 журнальних статтях, що відповідають вимогам до публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико–математичних наук, 17 із них надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз таких, як Web of Science, Scopus. Основні положення дисертації неодноразово доповідались та обговорювались на наукових семінарах у провідних наукових центрах України та за її межами, а також пройшли апробацію на численних міжнародних наукових конференціях, що проходили як в Україні так і за її межами.

Автореферат правильно відображає зміст дисертаційної роботи.

5. Практичне значення результатів. Дисертаційна робота С.А. Стасюка містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати в значній мірі доповнюють важливі розділи сучасної теорії наближення функцій багатьох змінних. Більшість одержаних результатів є завершеними у тих постановках задач, що наведені в дисертації. Нові розроблені методи можуть знайти подальше застосування в окреслених у дисертації напрямках теорії наближення.

6. Зауваження. Після ознайомлення зі змістом дисертації змушений

константувати, що її оформлення не є бездоганим. До дисертаційної роботи є такі зауваження та побажання.

1) У вступі мова йде про гладкий гіперболічний хрест, а в дисертації розглядається східчастий гіперболічний хрест і не зауважено, що, по суті, результати для цих “різних” гіперболічних хрестів не відрізняються.

2) Не з’ясована необхідність умов Барі–Стєчка.на.

3) В дисертації зустрічаються друкарські помилки та дрібні неакуратності, на які вказано автору. Наприклад, на стор. 33 слід було б замість a_j написати $a_j \in \mathbb{C}$, на стор. 47 (між формулами (1.15) та (1.16)) пояснити, що літера “M” означає “mixed” (див. також стор. 53, 61, 125, 282).


4) Для ілюстрацій в дисертації та в авторефераті не використано квадрат Тихомирова.

Наведені вище зауваження не мають принципового характеру, не зменшують цінність викладених у роботі результатів і, загалом, не впливають на позитивне враження від дисертації.

7. Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота “Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних” задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12–14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Стасюк Сергій Андрійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Завідувач кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
доктор фіз.-мат. наук, професор

 **І. О. Шевчук**

Надійшло
визначено
18.08.2019 р.
Секретар ради 

ПІЛІС
ВЧЕНИЙ
КАРАУЛ
13.08



