НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Дзюбенко Герман Анатолійович

УДК 517.5

ФОРМОЗБЕРІГАЮЧЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
САМОЙЛЕНКО Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
БОДНАР Дмитро Ількович,
Тернопільський національний економічний університет, професор кафедри економічної кібернетики та інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей;

доктор фізико-математичних наук, доцент
ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович,
Державний вищий навчальний заклад "Донбаський державний педагогічний університет", проректор із науково-педагогічної роботи.

Захист відбудеться «10» вересня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «29» липня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При наближенні заданої на відрізку функції алгебраїчними многочленами навіть інтуїтивно видається, що було б зовсім не зайвим зберегти у наближаючих її многочленів певні геометричні властивості цієї функції, наприклад, зміну знаку, або її монотоність, опуклість, кускову опуклість тощо – більш коротко – зберігти її *форму.* Крім того, скажімо, опуклі функції навіть зовні виглядають "краще" монотонних, а ті – довільних (можливо, тому, що опукла функція, визначена на інтервалі, обов'язково локально абсолютно неперервна на ньому). Також таке *формозберігаюче наближення* (далі ФЗН) відіграє, згідно ДеВору, важливу роль у комп'ютерному промисловому дизайні і є корисним також в інших галузях знань.

Першу задачу з ФЗН розв'язав Чебишев у 1873 році, знайшовши для кожного $n \geq 2$ два *зростаючі* многочлени $p_{\pm}(x) = \pm x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ з мінімальною рівномірною нормою на $[-1, 1]$ серед усіх зростаючих многочленів такої ж форми. Бернштейн у 1927 році зробив те ж саме, тільки для опуклих (2-монотонних) та q-монотонних ($q > 2$) многочленів, $n \geq q + 1$. А Лоренц у 1953 році помітив, що поліноміальні оператори Бернштейна зберігають монотонність, опуклість та взагалі q-монотонність ($q > 2$) функції, тобто аналог теореми Вейєрштрасса про наближення многочленами справджується і для q-монотонного ($q > 0$) ФЗН. Він разом із Целлером також зазначив, що ФЗН, принаймні монотонне, не зводиться до наближення без обмежень, оскільки існує неспадна функція $f \in C^1[-1, 1]$, для якої $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty$, де E_n ($E_n^{(1)}$) – величина найкращого рівномірного наближення f будь-якими (тільки монотонними) многочленами степеня $\leq n$. Згодом Шевчук виявив, що ФЗН навіть ще "гірше", оскільки замість відомої нерівності $E_n(f) < \frac{c}{n} E_{n-1}(f')$ існує неспадна f, для якої $E_n^{(1)}(f) > \frac{1}{200} E_{n-1}(f')$.

Таким чином, основним питанням ФЗН виявилось таке питання: *з якими швидкостями наближення можливо будувати наближаючі елементи у ФЗН?* Тобто чи можливо досягти таких самих порядків наближень (найкращих), як і у вже побудованих класичних теоріях наближень без обмежень Джексона-Зігмунда-Ахієзера-Стечкіна, Нікольського-Тімана-Дзядика-Фройда-Брудного та інших.

Більше 30-ти авторів, серед яких Бітсон, Бондаренко, Венц, Ву, Гілевич, Гонска, ДеВор, Залізко, Ілієв, Коновалов, Копотун, Левіатан, Мхаскар, Нісім, Ньюмен, Пал, Плєшаков, Попов, Примак, Раймон, Роульє, Ху, Шадрін, Швєдов, Шевчук, Манія, Цу, Ю, Ющенко та інші, почали з'ясовувати це питання і виявилось, що в одних випадках (формах, гладкостях, наближаючих елементах) досягти таких порядків можливо, в інших – ні. Їх результати і результати кандидатської дисертації автора склали завершені, або майже завершені теорії монотонного, опуклого, кусково монотонного і q-монотонного $(q > 2)$ ФЗН алгебраїчними многочленами і сплайнами.

Тим часом у кусково опуклому, у *майже* ФЗН (тобто коли наближаючі елементи можуть не зберігати форму функції на "маленькій" множині) і частково у кусково q-монотонному ФЗН $(q = 1,\ q > 2)$ було досліджено лише рівномірне (не поточкове) наближення на відрізку; а у ФЗН періодичних функцій – були отримані лише перші оцінки похибок наближень, які за порядками були далекі від найкращих, і було зовсім не досліджено їх майже ФЗН.

Саме отриманню найкращих за порядком оцінок (поточкових і рівномірних) в цих видах ФЗН і доведенню випадків, де це неможливо, а отже – завершенню та побудові цих теорій і присв'ячена дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь", номер державної реєстрації 0116U003121; "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U002119.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є побудова алгебраїчних многочленів, тригонометричних поліномів і сплайнів, які забезпечують найкраще за порядком поточкове і рівномірне наближення неперервних на відрізку і на дійсній осі функцій різної гладкості і при цьому зберігають такі їх властивості, як кускову позитивність, монотонність, опуклість тощо, а також побудова контрприкладів у випадках, де такі наближаючі елементи не існують.

Об'єктом дослідження є формозберігаюче наближення алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами та сплайнами.

Предметом дослідження є конструкції кусково позитивних, монотонних, опуклих, q-монотонних ($q > 2$) многочленів, поліномів і сплайнів та приклади функцій такої ж форми, що "погано" ними наближуються.

Завдання дослідження.

1. Довести для наближення алгебраїчними многочленами класичні за формою поточкові оцінки кусково опуклого ФЗН, інтерполяційну (на кінцях відрізку) поточкову оцінку кусково монотонного ФЗН і поточкові оцінки кусково позитивного, кусково монотонного та кусково опуклого майже ФЗН.
2. Довести для наближення тригонометричними поліномами класичні за формою рівномірні оцінки ФЗН, посилити відомі оцінки та започаткувати майже ФЗН.
3. Знайти сплайни, що забезпечують найкращі за порядком локальні і глобальні оцінки 3-монотонного наближення з різними модулями гладкості і в різних метриках.
4. Побудувати контрприклади у випадках, де відповідні класичні за формою оцінки хибні та у випадках, де покращення характеру залежності сталих від основних параметрів в отриманих оцінках неможливе.

Методи дослідження. Використовуються методи математичного аналізу і теорії функцій, зокрема, інтерполяція, поліноміальні ядра типу Джексона, Дзядика і ядра, запропоновані в дисертації, проміжне наближення сплайнами, нерівності Уітні, Маршо, Дзядика, апарат скінченних і розділених різниць, відомі і запропоновані в дисертації представлення сплайнів, класичні прямі та обернені теореми, теореми спільного наближення функції та її похідних, ідея ДеВора представлення похідної сумою "великої" і "малої" функцій, "монотонноне" розбиттяі одиниці ДеВора і Ю та Шевчука, метод "горбу, що ковзає" при доведенні контрприкладів та інші.

Наукова новизна одержаних результатів.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

1. Встановлено для *кусково опуклого* (далі *коопуклого*) наближення многочленами та сплайнами поточкові оцінки типу Нікольського-Тімана-Дзядика-Фройда-Брудного через k-й модуль неперервності r-ї похідної функції для всіх k та r, для яких вони справджуються.
2. Доведено для *кусково монотонного* (далі *комонотонного*) та *коопуклого* наближень аналог інтерполяційної оцінки ДеВора ($r = 0,\ k = 2$).

3. Одержано для 3-*монотонного* наближення сплайнами степеня $\geq$ 3 мінімального дефекту з рівномірними та чебишевськими вузлами рівномірні оцінки наближення через "звичайний" 4-й модуль гладкості та, відповідно, 4-й модуль гладкості Діціана-Тотіка, які хибні вже для 5-го модуля гладкості. Доведено, що обидві оцінки не справджуються в інтегральних метриках L_p, $p < \infty$, однак показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність контрольована, на відміну від сплайнів з вільними вузлами.
4. Доведено для *майже коопуклого* наближення (тобто коли многочлен/сплайн може не зберігати коопуклість функції в "маленьких" околах точок перегину) оцінку типу Брудного з $k = 4$, яка є хибною для $k > 4$, а для "чисто" коопуклого наближення вона хибна навіть для $k > 3$.
5. Одержано для *майже копозитивного* наближення оцінку типу Нікольського з довільним $k \in \mathbb{N}$ (для "чисто" копозитивного наближення вона хибна з $k > 3$).
6. Встановлено для *копозитивного* наближення тригонометричними поліномами оцінку типу Джексона з $k = 3$ (для $k > 3$ вона хибна).
7. Доведено для *комонотонного* наближення періодичних функцій гладкості r оцінку типу Джексона з $r = 0,\ k = 2$, з $r = 1,\ k = 3$, з $r \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ (для всіх інших пар, тобто $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, вона хибна).
8. Доведено для *майже комонотонного* та *майже коопуклого* наближень неперервних періодичних функцій оцінку типу Джексона через модулі неперервності порядку $k = 3$ та $k = 4$, відповідно (для "чистих" видів цих ФЗН вона справджується з меншими k).
9. Одержано низку контрприкладів про неможливість підвищення порядків в отриманих оцінках, про неможливість "покращення" характеру залежності сталих в них від основних параметрів та про нові явища у ФЗН.
10. Знайдено нове і просте представлення кусково-поліноміальних функцій (сплайнів), модифікації якого є хорошим методом отримання оцінок ФЗН; також це представлення має потенціал чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі.
11. Запропоновано нове строго додатнє поліноміальне ядро, використання якого, зокрема, уможливлює побудову тригонометричних поліномів з найкращими порядками ФЗН.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Конструктивні доведення більшості її тверджень і особливо деякі представлення наближаючих елементів можуть слугувати основою для їх чисельної реалізації. Також результати дисертації мають значення в теорії наближень і можуть бути використані в теоретичних дослідженнях з математичного аналізу та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Тематика визначена науковим консультантом здобувача, всі результати отримано здобувачем самостійно, а в роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів рівноцінний.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Third international conference “Curves and Surfaces”, 27 June- 3 July 1996, Chamonix Mont Blanc, France;

— міжнародній науковій конференції “Теорія наближення функцій та її застосуваня, присв’ячена пам’яті В.К.Дзядика”, 27-31 травня 1999, Київ, Ін-т математики НАН України;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approx. Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics” (FM2001), 19-22 October 2001, Kyiv, Ukraine;

— міжнародній науковій конференції пам’яті В.Я.Буняковского (1804-1889) “Bunyakovsky Intern. Conf.”, August 16-21, 2004, Kyiv, Ukraine;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and statistics II, dedicated to the memory of A.Ya. Dorogovtsev (1935-2004)” (FM2004), October 1-5, 2004, Kyiv, Ukraine;

— MITACS 2007 Joint Conference of Canadian Mathematical Society, May 31-June 3, Winnipeg, Manitoba, Canada;

— 9th Conference on “Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications”, July 2-6, 2007 – Marseille, France;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III, dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk (1919-1998)” (FM2009), August 22-26, 2009, Camp Hart, Village Svityaz, Shatskyi Region, Volyn, Ukraine;

— Canadian Mathematical Society Summer Meeting, The Delta Winnipeg, Manitoba, Canada – 2014 June 6-9, cms.math.ca;

— Final AMMODIT Conference "Mathematics for Life Sciences", March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine;

— семінарах Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, Marseille, France, (керівник семінару Prof. $\boxed{\text{J. Gilewicz}}$);

— семінарі Université de Toulon et du Var, Toulon, France, (керівник семінару Prof. P. Penel);

— семінарах University of Manitoba, Winnipeg, Canada, (керівник семінару Prof. K. Kopotun);

— семінарі Universidad Autónoma de Madrid, Madrid UAM, Spain, (керівник семінару Prof. K. S. Kazarian);

— засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України, 16 травня 2017;

— семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 20 березня 2019 (керівники семінару проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко, проф. І. О. Шевчук);

— семінарі відділу теорії функцій в Інституті математики НАН України, 29 березня 2019 (керівник семінару проф. А. С. Романюк);

— міжвузівському семінарі з теорії функцій в Дніпропетровському національному університеті ім. Олеся Гончара, 10 квітня 2019 (керівник семінару чл.-кор. НАН України В. П. Моторний);

— семінарі з теорії функцій в Одеському національному університеті ім. І.І. Мечникова, 15 квітня 2019 (керівник семінару проф. А. А. Кореновський);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 26 квітня 2019 (керівники семінару ак. НАН України Ю. М. Березанський, ак. НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань в Інституті математики НАН України, 6 травня 2019 (керівник семінару ак. НАН України А. М. Самойленко).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 35 наукових публікаціях, із яких 22 статті [1–22] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук (12 — у співавторстві і 10 — самостійно), 18 із них [1–10], [12–15], [17], [20–22] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Усі твердження, які увійшли до дисертації і не належать автору, наведено з зазначенням авторства і відповідним посиланням на джерело.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до розділів та списку використаних джерел, що містить 178 найменувань. Повний обсяг роботи становить 308 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **першому розділі** дано огляд літератури за тематикою – про класичне (без обмежень) та формозберігаюче наближення поліномами дійснозначних функцій на відрізку і періодичних функцій на дійсній осі.

У **розділі 2** доведено п'ять непокращуваних (за порядком k модуля гладкості) оцінок **комонотонного наближення** (2), (8), (11), (12), (15) та запропоновано поліноміальне ядро (16), (17), що уможливлює ФЗН періодичних функцій з найкращими порядками.

2.1 *Поточкове наближення неперервних функцій з інтерполяцією на кінцях відрізку*

Позначимо

$$\rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n.$$

Нагадаємо класичну поточкову оцінку типу Нікольського наближення без обмежень, встановлену Тіманом (для $k=1$), Дзядиком ($k=2$), Фройдом ($k=2$) та Брудним ($k \ge 3$): *Якщо функція $f \in C$, то для кожного натурального $n \ge k-1,\ k \in \mathbb{N}$, знайдеться многочлен P_n степеня $\le n$, такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(k)\,\omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{1}$$

де $c(k)$ – стала, яка залежить тільки від k, і $\omega_k(f,\cdot)$ – k-й модуль неперервності f.

Тепер нехай $Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s$ – набір з $s,\ s \in \mathbb{N}$, фіксованих точок y_i : $-1 < y_s < \cdots < y_2 < y_1 < 1$, і $\Delta^{(1)}(Y_s)$ – множина всіх неперервних на $[-1,1]$ функцій, що не спадають на $[y_1,1]$, не зростають на $[y_2,y_1]$, не спадають на $[y_3,y_2]$ і т.д. Такі функції називаються *комонотонні* (між собою).

Теорема 2.1.1. *Якщо функція $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то існує стала $N(Y_s)$, яка залежить тільки від мінімальної відстані між y_i-ми, така, що для кожного $n \ge N(Y_s)$ знайдеться алгебраїчний многочлен P_n степеня $\le n$, такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(1)}(Y_s),$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(s)\, \omega_2(f, \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1, 1], \tag{2}$$

де $c(s)$ *– стала, яка залежить тільки від* s.

В наближенні *без обмежень* така інтерполяційна (в точках ± 1) оцінка (2) доведена Тєляковскім для ω_1 та ДеВором для ω_2, а Ю та Венц, Гонска, Левіатан і Шевчук довели, що для $k > 2$ вона хибна.

Випадок $s = 0$ теореми 2.1.1 (тобто "чисто" монотонні функції на всьому проміжку) належить ДеВору і Ю. Швєдов довів, що у цьому випадку (2) хибна з $\omega_k,\ k > 2$, наіть з $1/n$ замість поточкового аргумента, а Ву і Цу узагальнили це для всіх $s > 0$.

Наслідками попередньої теореми 2.1.1 є нерівності для $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \ c(s)\ \ \omega_2(f, \rho_n(x)), \quad n \geq N(Y_s), \tag{3}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C(Y_s)\, \omega_2(f, \rho_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

та їх рівномірні аналоги

$$\|f - P_n\| \leq \ c(s)\ \ \omega_2\left(f, 1/n\right), \quad n \geq N(Y_s), \tag{5}$$

$$\|f - P_n\| \leq C(Y_s)\, \omega_2\left(f, 1/n\right), \ n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де $C(Y_s)$ – стала, що залежить тільки від Y_s.

Завдяки нерівності Уітні, в багатьох оцінках ФЗН є можливість переносити залежність від Y_s між сталими $c(s),\ N(Y_s)$ та $C(Y_s),\ k-1$, відповідно, однак позбутися цієї залежності, взагалі кажучи, неможливо [Швєдов, інші].

Оцінки (3) і (4) – це комонотонні аналоги оцінки (1) Дзядика-Фройда наближення без обмежень.

Оцінку (6) раніше довели Швєдов і, незалежно, Ю.

2.2 *Наближення неперервних періодичних функцій*

Нехай C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $\mathbb{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів порядку $\leq n \in \mathbb{N}$, і

$$E_n(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{T}_n} \|f - P_n\|$$

— величина найкращого наближення без обмежень.

Нагадаємо класичну оцінку Джексона (з $k = 1$)-Зігмунда ($k = 2,\ \omega_2(f, t) \leq t$), Ахієзєра ($k = 2$)-Стєчкіна ($k \geq 3$): *Якщо* $f \in C$, *то*

$$E_n(f) \leq c(k)\, \omega_k\left(f, \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де $c(k)$ *– стала, що залежить тільки від* k.

Дємідовіч і Конягін 20 років тому поставили питання: *чи справджується комонотонний аналог (7)?* Для $k=1$ ствердну відповідь надав Плєшаков. Він же показав, що при $k>2$ такий аналог хибний. Для $k=1$ був відомий ствердний результат Лоренца і Целлера, але для дзвоноподібних (тобто парних і незростаючих на $[0,\pi]$) функцій.

Випадок $k=2$ теж виявився ствердним. Нехай на $[-\pi,\pi)$ є $2s$ фіксованих точок $y_i:\ -\pi\le y_{2s}<y_{2s-1}<\cdots<y_1<\pi$, а для решти $i\in\mathbb{Z},\ y_i$ визначаються періодично $y_i=y_{i+2s}+2\pi$ (тобто $y_0=y_{2s}+2\pi,...,y_{2s+1}=y_1-2\pi,...)$, $Y_s:=\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\Delta^{(1)}(Y_s)$ – множина всіх неперервних f, що не спадають на $[y_1,y_0]$, не зростають на $[y_2,y_1]$ і т.д., та

$$E_n^{(1)}(f):=\inf_{P_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y_s)}\|f-P_n\|$$

— величина найкращого *комонотонного* наближення.

Теорема 2.2.1. *Якщо $f\in\Delta^{(1)}(Y_s)$, то*

$$E_n^{(1)}(f)\le\ c(s)\ \omega_2\left(f,\pi/n\right),\quad n\ge N(Y_s),\tag{8}$$

$$E_n^{(1)}(f)\le C(Y_s)\,\omega_2\left(f,\pi/n\right),\quad n\in\mathbb{N},\tag{9}$$

де $N(Y_s),C(Y_s)$ – сталі, що залежать тільки від мінімальної відстані між y_i-ми а $c(s)$ – тільки від s.

Оцінка (9) є наслідком (8) і нерівності Уітні $\|f-f(0)\|\le\omega_2(f,2\pi)$.

2.3 *Наближення диференційовних періодичних функцій*

Нагадаємо, якщо $f\in C^r:=\{f:\ f^{(r)}\in C\},\ r\in\mathbb{N}$, то наслідком нерівності Джексона-Стєчкіна (7) є

$$E_n(f)\le\frac{c(r,k)}{n^r}\,\omega_k(f^{(r)},\pi/n),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{10}$$

Доведено її комонотонний аналог (13).

Теорема 2.3.1. *Якщо $f\in\Delta^{(1)}(Y_s)$ і якщо $f\in C^1$, то*

$$E_n^{(1)}(f)\le\frac{c(s)}{n}\,\omega_3(f',\pi/n),\quad n\ge N(Y_s),\tag{11}$$

а якщо $f\in C^2$, то

$$E_n^{(1)}(f)\le\frac{c(s,k)}{n^2}\,\omega_k(f'',\pi/n),\quad n\ge N(Y_s,k),\tag{12}$$

отже, для $f\in C^r,\ r\ge 2$,

$$E_n^{(1)}(f)\le\frac{c(s,r,k)}{n^r}\,\omega_k(f^{(r)},\pi/n),\quad n\ge N(Y_s,r+k),\tag{13}$$

де $N(Y_s)$ і $N(Y_s,k)$ – сталі, які залежать тільки від $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i-y_{i+1}\}$ і k, а $c(s)$ і $c(s,k)$ – сталі, які залежать тільки від s і k, відповідно.

Плєшаков довів частинний випадок цієї теореми: *Якщо* $f \in W^r \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$ *(де* W^r *– множина функцій* g *з абсолютно неперервними* $g^{(r-1)}$ *і з* $|g^{(r)}(x)| \le 1$ *м. с. на* $\mathbb{R}$*), то*

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{C(Y_s, r)}{n^r}, \quad n \in \mathbb{N}, \ r \ge 2. \tag{14}$$

2.4 *Майже комонотонне наближення неперервних періодичних функцій*

Як вже зазначалось, для $k > 2$ комонотонний аналог нерівності Джексона-Стєчкіна (7) хибний, але з результатів наближення на відрізку відомо, що *якщо для многочленів послабити умову комонотонності в маленьких околах точок її зміни у функції, то можна отримати додатковий порядок наближення* [Лєвіатан, Шевчук 1998] *і не більш як один порядок* [Лєвіатан, Шевчук 2000].

Доведено тригонометричний аналог цього алгебраїчнго результату Левіатана і Шевчука, 1998 – теорему 2.4.1. Нехай

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y_s) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \tfrac{1}{2}(x - y_i).$$

Теорема 2.4.1. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$*, то існує стала* $N(Y_s)$*, яка залежить тільки від мінімальної відстані між* y_i*-ми, така, що для кожного* $n \ge N(Y_s)$ *знайдеться поліном* $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$*, такий, що*

$$P_n'(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} \left(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n\right),$$

$$\|f - P_n\| \le c(s)\, \omega_3(f, \pi/n), \tag{15}$$

де c *і* $c(s)$ *– сталі, які залежать тільки від* s*.*

Наступна теорема 2.4.2 є наслідком теореми 2.4.1 і нерівності Уітні $\|f - f(0)\| \le 2\,\omega_3(f, 2\pi)$.

Теорема 2.4.2. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$*, то для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *існує поліном* $P_n \in \mathbb{T}_n$*, такий, що*

$$P_n'(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} \left(y_i - c/n, y_i + c/n\right),$$

$$\|f - P_n\| \le C(Y_s)\, \omega_3(f, \pi/n),$$

де c *– стала, що залежить тільки від* s*, а* $C(Y_s)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$*.*

Всі оцінки ФЗН періодичних функцій в дисертації отримано за допомогою запропонованого строго додатнього поліноміального ядра з $\mathbb{T}_{b(n-1)}$, $n, b \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $x_j = -j\pi/n$,

$$\left(\left(\frac{\sin \frac{n(x - x_j)}{2}}{\sin \frac{x - x_j}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{n(x - x_{j-1})}{2}}{\sin \frac{x - x_{j-1}}{2}} \right)^2 \right)^b, \tag{16}$$

тобто суми двох "сусідних" ядер типу Джексона, та його більш простого аналога

$$\left(\frac{\sin\frac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\frac{x-x_j}{2}}\right)^{2b}+\left(\frac{\sin\frac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\frac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^{2b}. \qquad (17)$$

У **розділі 3** доведено сім непокращуваних (за порядком k модуля гладкості) оцінок **коопуклого наближення** (18)–(22), (24), (25), зроблено їх порівняння з рівномірними аналогами та запропоновано представлення кусково поліноміальної функції (сплайна) (26), (27), "модифікації" якої, зокрема, уможливили отримання ряду (непокращуваних за порядком k) локальних оцінок ФЗН.

3.1 *Поточкове наближення неперервних функцій з інтерполяцією на кінцях відрізку*

Нехай $Y_s := \{y_i : \ -1 < y_s < \cdots < y_2 < y_1 < 1\}$, $\Delta^{(2)}(Y_s)$ – множина всіх неперервних на $[-1,1]$ функцій, що опуклі донизу на $[y_1,1]$, опуклі догори на $[y_2,y_1]$ і т.д. (випадок $s=0$ з $Y_0 := \{\emptyset\}$ – це опуклі на всьому $[-1,1]$ функції).

Теорема 3.1.1. *Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, то для кожного $n \ge N(Y_s)$ існує алгебраїчний многочлен P_n степеня $\le n$, такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s),$$

$$|f(x)-P_n(x)| \le c(s)\,\omega_2(f,\sqrt{1-x^2}/n), \quad x\in[-1,1], \qquad (18)$$

де $N(Y_s)$ – стала, що залежить тільки від $\min_{i=1,\dots,s-1}\{y_i-y_{i+1}\}$, якщо $s>1$, і $N(Y_1)=1$, а $c(s)$ – стала, що залежить тільки від s.

Нерівність (18) (Тєляковського-ДеВора) хибна з ω_k, $k>2$, навіть у наближенні без обмежень [Ю і Гонска, Левіатан, Шевчук, Венц]. При $s=0$ теорема 3.1.1 належить Левіатану, а Копотун, Левіатан і Шевчук довели її з $\omega_3(f,1/n)$ в (18). Якщо $s>1$, то сталу $N(Y_s)$ неможливо замінити сталою, що не залежить від Y_s [Левіатан, Шевчук].

3.2 *Поточкове наближення неперервних функцій, які мають більше однієї точки перегину*

Теорема 3.2.1. *Якщо $s>1$ і $f\in\Delta^{(2)}(Y_s)$, то для кожного $n\ge 2$ існує алгебраїчний многочлен P_n степеня $\le n$, такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s),$$

$$|f(x) - P_n(x)| \le C(Y_s)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{19}$$

де $C(Y_s)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min_{i=1,\dots,s-1}(y_i - y_{i+1})$.

Оцінка типу Нікольського (19) (Брудного) хибна з $s = 1$ [розділ 6 Контрприклади], хибна з $\omega_k,\ k > 3$, навіть з $1/n$ [Ву, Цу] і хибна з $c(s)$ і $n \ge N(Y_s)$ замість $C(Y_s)$ і $n \ge 2$ [розділ 6 Контрприклади].

3.3 *Поточкове наближення функцій з множини* W^r *(з абсолютно неперервними* $r-1$*-ми і обмеженими* r*-ми похідними) і більше ніж однією точкою перегину*

Теорема 3.3.1. *Якщо* $r > 3$, $s > 1$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, *то для кожного натурального* $n > N(Y_s, r)$ *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\le n$, *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s),$$

$$\Big|f(x) - P_n(x)\Big| \le C(Y_s, r)\,\rho_n^r(x), \quad x \in [-1,1], \tag{20}$$

де $N(Y_s, r)$ *і* $C(Y_s, r)$ *– сталі, що залежать тільки від* $\min_{i=1,\dots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* r.

Для $r = 1, 2$ і 3 ця теорема (тобто поточковий аналог оцінок Тімана) теж вірна і випливає з попередніх двох теорем, відповідно, тому разом з результатами Плєшакова і Шаталіної (для "малих" n) в ній можно замінити $r > 3$ на $r \in \mathbb{N}$ і $n > N(Y_s, r)$ на $n \ge r$.

Для $s = 1,\ r > 2$, твердження теореми, взагалі кажучи, невірне [розділ 6 Контрприклади].

Зауважимо, що теореми 3.2.1 і 3.3.1 – це, зокрема, ствердні частини двох нових явищ у ФЗН, а саме: 1) оцінки в цих теоремах справджуються зі сталими $C = C(Y_s)$ і $N \ne N(Y_s)$, і не справджуються зі сталими $c = c(s)$ і $N = N(Y_s)$, відповідно; 2) для $s = 1$ обидві оцінки зі сталими, вказаними в теоремах, хибні. В інших видах ФЗН цих явищ нема.

3.4-6 *Поточкове наближення сплайнами і многочленами гладких функцій з однією точкою перегину і неперервних функцій з* s *точками перегину*

Нехай $\Sigma_{k,n}(Y_s)$ – множина всіх неперервних на $[-1,1]$ кусково-поліноміальних функцій (сплайнів) степеня $< k$ з чебишовськими вузлами, що в кожному околі $(y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i))$ точок y_i є одним поліномом.

Теорема 3.4.1-2. *Нехай або* $r = 2$ *і* $k = 1, 2, 3$, *або* $r > 2$ *і* $k \in \mathbb{N}$. *Нехай* $y \in (-1,1)$, $Y_1 = \{y\}$ *і* $m = k + r$. *Якщо* $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r$, *то існує стала* $N = N(f, k, r, Y_1)$, *така, що для кожного* $n \ge N$

знайдеться сплайн $S \in \Sigma_{m,n}(Y_1) \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$ *і многочлен* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_1)$ *степеня* $\le n$, *такі, що для* $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x)| &\le c(k,r)\rho_n^r(x)\,\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \\ |f(x) - P_n(x)| &\le c(k,r)\rho_n^r(x)\,\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \end{aligned} \tag{21}$$

де $c(k,r)$ *– стала, що залежить тільки від* k *і* r.

Теорема 3.5.1-2. *Якщо* $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, *то існує стала* $N = N(f, Y_s)$, *така, що для кожного* $n \ge N$ *знайдеться сплайн* $S \in \Sigma_{3,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ *і многочлен* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ *степеня* $\le n$, *такі, що для* $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x)| &\le c\omega_3(f, \rho_n(x)), \\ |f(x) - P_n(x)| &\le c\omega_3(f, \rho_n(x)), \end{aligned} \tag{22}$$

де c *– абсолютна стала* або *стала, що залежить тільки від* s.

Коли $r = 2$, оцінки (21) хибні з $k > 3$ навіть з обома сталим c і N, залежними від f [Гілевіч, Ющенко]. Для $r = 0$, або $r = 1$ мають місце три випадки: якщо $k + r \le 2$, то оцінки (21), згідно з теоремою 3.1.1, вірні з абсолютними c і N; якщо $k + r \ge 4$, то (21) (і (22) теж) хибні навіть з c і N, залежними від f [Ву, Цу]; якщо $k + r = 3$, то (21) хибні з обома сталими, що не залежать від f [розділ 6 Контрприклади], хоч і вірні з абсолютною c і $N = N(f, Y_1)$, як частинний ($s = 1$) випадок оцінок (22).

Зазначимо, що доведення обох теорем громіздкі (включаючи перехід до многочленів), хоч вони і спираються на більш-меньш "стандартну" у ФЗН техніку, що грунтується на ідеї ДеВора представлення похідної (тут f'') сумою "великої" і "малої" функцій, на поліноміальні ядра типу Дзядика, на "монотонне" розбиття одиниці ДеВора, Ю і Шевчука та інше.

3.7 *Порівняння рівномірних і поточкових оцінок коопуклого наближення многочленами*

Порівняємо набори параметрів k, r і s, при яких справедливі оцінки

$$\|f - P_n\|_{C[-1,1]} \le c\, n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, 1/n), \qquad n \ge N,$$

$$|f(x) - P_n(x)| \le c\,\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad n \ge N,$$

де $x \in [-1,1]$. Оскільки $\rho_n(x) = 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n \le \frac{2}{n}$, то друга тягне першу.

Представимо у таблицях для яких трійок (k,r,s) ці нерівності вірні для кожної функції $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k=0$) з деяким алгебраїчним многочленом $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ степеня $\le n$, а для яких – ні. Будемо писати:

$(k,r,s) \in$ "$+$" – **"сильний позитивний випадок"**, якщо нерівність справджується з $c = c(k,r,s)$ і $N = k+r$;

$(k,r,s) \in$ "$\oplus$" – **"слабкий позитивний випадок"**, якщо нерівність справджується з $c = c(k,r,Y_s)$ і $N = k+r$, а також з $c = c(k,r,s)$ і $N = N(k,r,Y_s)$, але не справджується з обома c і N, незалежними від Y_s;

$(k,r,s) \in$ "$\oslash$" – **"ще позитивний випадок"**, якщо нерівність справджується з $c = c(k,r,Y_s)$ і $N = k+r$, а також з $c = c(k,r,s)$ і $N = N(k,r,Y_s,f)$, але не справджується з $c = c(k,r,s)$ і N, незалежним від f;

$(k,r,s) \in$ "$\ominus$" – **"слабкий негативний випадок"**, якщо нерівність справджується з $c = c(k,r,s)$ і $N = N(k,r,Y_s,f)$, але невірна для жодного Y_s, з обома c і N, незалежними від f;

$(k,r,s) \in$ "$-$" – **"сильний негативний випадок"**: нерівність не справджується навіть, якщо дозволити обом сталим c і N залежити від всіх параметрів k, r, Y_s і f.

В таблицях нижче поточкові оцінки отримані в розділі 3 крім випадку $s=0$ і випадків $(k,r,s) \in$ "$-$". Загалом над усіма випадками в цих таблицях працювало понад десять авторів.

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s=0$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рівномірні, $s=0$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\cdots$
3	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\cdots$
2	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s=1$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рівномірні, $s=1$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\cdots$
3	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\cdots$
2	$\oplus$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$\oplus$	$\oplus$	$\oslash$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$\oplus$	$\oplus$	$\oslash$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s \geq 2$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\cdots$
3	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\cdots$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рівномірні, $s \geq 2$

Зауважимо, що "Рівномірні" таблиці не містять “ще позитивний випадок” “$\oslash$”.

3.8 *Майже коопукле поточкове наближення неперервних на відрізку функцій*

Позначимо

$$O_n(c, Y_s) = [-1, -1 + c^2/n^2) \cup (1 - c^2/n^2, 1] \cup [\bigcup_{i=1}^{s} (y_i - c\rho_n(y_i), y_i + c\rho_n(y_i))].$$

Теорема 3.8.1. *Якщо $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, то для кожного $n \geq 3$ існує многочлен P_n степеня $\leq n$, такий, що*

$$P_n \text{ коопуклий з } f \text{ скрізь, окрім, можливо, множини } O_n(c, Y_s), \tag{23}$$

та

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(s)\,\omega_4\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in [-1, 1], \tag{24}$$

де c і $c(s)$ – сталі, що залежать тільки від s.

Це поточковий аналог рівномірної оцінки Левіатана і Шевчука (з $1/n$ замість ρ_n). Вони також показали, що неможливо "зменшити" сталу c, скажімо, до 1 у (23) за рахунок збільшення $c(s)$ у (24) навіть у випадку з $1/n$ замість ρ_n.

3.9 *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій*

Теорема 3.9.1. *Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, то існує стала $N(Y_s)$, яка залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, така, що для кожного $n \geq N(Y_s)$ знайдеться поліном T_n порядку $\leq n$, такий, що*

$T_n(x)$ коопуклий з f скрізь, окрім, можливо, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(y_i - c/n, y_i + c/n)$,

та

$$\|f - T_n\| \leq c(s)\,\omega_4(f, \pi/n), \tag{25}$$

де c і $c(s)$ – сталі, які залежать тільки від s.

Попов і Залізко довели "чисто" коопуклі аналоги (25) з ω_2 і ω_3, відповідно, і Залізко довів, що для $\omega_k,\ k > 3$, такого "чисто" коопуклого аналогу не існує.

Ряд оцінок у дисертації отримано за допомогою запропонованого представлення кусково поліноміальних функцій

$$L_q(x, a_n, g) + \sum_{j=q}^{n-1} [a_{j+1}, a_j, ..., a_{j-q}, g](a_{j-q} - a_{j+1})\Psi_q(x, a_j), \qquad (26)$$

або, що те саме,

$$L_{q-1}(x, a_n, g) + \sum_{j=q}^{n} [a_j, ..., a_{j-q}, g] \left(\Psi_q(x, a_j) - \Psi_q(x, a_{j-1})\right), \qquad (27)$$

де $[\cdot]$ – розділені різниці функції g, що визначена в кожній точці набору $A_n = \{a_j\}_{j=0}^n$ з $n+1$ фіксованих точок $a_j :\ -1 = a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0 = 1,\ \ n \in \mathbb{N}$, $L_q(x, a_j, g)$ – многочлен Лагранжа степеня $\le q$, що інтерполює g в $a_j, ..., a_{j-q}$ з $j = q, ..., n,\ q \in \mathbb{N},\ q \le n$, і для $j = q, \ldots, n$,

$$\Psi_q(x, a_j) := \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le a_j, \\ \displaystyle\prod_{k=j-q+1}^{j} (x - a_k), \text{ якщо } x > a_j, \end{cases} \qquad \Psi_q(x, a_{q-1}) :\equiv 0.$$

Для $q = 1$ рівності (26) і (27) можна знайти у книжці Шевчука, с. 143.

У **розділі 4** доведено чотири непокращувані (за порядком k модуля гладкості) оцінки **3-монотонного наближення** сплайнами (31)–(34).

Для $r \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$ і будь-якої 3-монотонної на $[-1, 1]$ функції $f \in \Delta^{(3)}$ (тобто її третя розділена різниця для всіх наборів з чотирьох різних точок $(-1, 1)$ невід'ємна або, що еквівалентно, f має опуклу на $(-1, 1)$ похідну) знайдено сплайн S степеня r, мінімального дефекту (тобто $S \in C^{r-1}[-1, 1]$) з $n-1$ рівновіддаленими вузлами на $(-1, 1)$, який теж 3-монотонний (як f) і такий, що

$$\|f - S\|_{L_\infty[-1,1]} \le c\,\omega_4(f, 1/n, [-1, 1])_\infty, \qquad (28)$$

де c – абсолютна стала, а $\omega_4(f, t, \cdot)_\infty$ – 4-й модуль гладкості f у рівномірній нормі (див. теореми 4.1.2 й 4.1.3).

Оцінка (28) дає ствердну відповідь на питання Левіатана і Примака про єдиний недоведений випадок в оцінках типу Джексона для

3-монотонного наближення сплайнами з рівномірними вузлами. В розділі 6 Контрприклади показано, що (28) хибна з $\omega_k,\ k > 4$.

Доведена аналогічна оцінка з 4-м модулем Діціана-Тотіка (тобто з вагою кроку різниці $\varphi = \sqrt{1-x^2}$) для сплайна з чебишевськими вузлами

$$\|f - S\|_{L_\infty[-1,1]} \le c\,\omega_4^\varphi(f, 1/n, [-1,1])_\infty \tag{29}$$

(див. теорему 4.1.4).

Коновалов, Левіатан (а також Бондаренко, Примак) довели, що (28) і (29) хибні в L_p нормі з $p < \infty$ навіть з ω_3 замість ω_4. У розділі 4 доведено, що вони можуть бути вірні, якщо дозволити вузлам сплайна залежати від f, причому ця залежність, на відміну від наближень сплайнами з вільними вузлами, контрольована, тобто вузли не злипаються (див. теорему 4.1.1).

Доведення (28) і (29) спираються на знайдений кубічний сплайн 3-монотонного найкращого (за порядком модуля гладкості) *локального* ("більш точного") наближення з "правильними" вузлами (що, втім, можуть залежати від f, їх означення дещо громіздке) і

$$\textit{з локальною оцінкою в } L_p,\ 0 < p \le \infty,\ \textit{з}\ \ \omega_4 \tag{30}$$

(див. теорему 4.1.1).

Для будь-якої 3-монотонної на $[-1,1]$ функції f знайдено кубічний 3-монотонний сплайн S з $n-1$ "майже" рівновіддаленими вузлами a_j, такий, що

$$\|f - S\|_{C[a_j, a_{j-1}]} \le c\,\omega_4(f, 1/n, [a_{j+4}, a_{j-5}] \cap [-1,1]),\ j = 1, ..., n. \tag{31}$$

На відміну від сплайна (30), він простіший (представлен сумою зрізаних степеневих функцій), може бути використаний для означення 3-монотонного многочлена, що наближатиме f з найкращим порядком, і він більш придатний для чисельної реалізації (див. теорему 4.2.1).

Коротка історія 3-монотонного наближення така.

Для $f \in \Delta^{(3)} \cap C^2$ Коновалов і Левіатан перші побудували квадратичний сплайн $S \in \Delta^{(3)}$ з $n-1$ рівномірними вузлами, такий, що

$$\|f - S\| \le c\,n^{-2}\omega_1(f'', 1/n).$$

Для $f \in \Delta^{(3)}$ Примак знайшов квадратичний сплайн $S \in \Delta^{(3)}$ з $n-1$ довільними фіксованими вузузлами, який з рівномірними вузлами реалізує оцінку

$$\|f - S\| \le c\,\omega_3(f, 1/n).$$

З результатів Шевчука і Левіатана з Примаком випливає існування двох сплайнів $s_1, s_2 \in \Delta^{(3)} \cap C^3$ степеня ≤ 4 з $n-1$ рівномірними вузлами, для яких виконуються нерівності

$$\|f - s_1\| \le c\, n^{-3} \omega_2(f''', 1/n), \quad n > 4, \quad f \in \Delta^{(3)} \cap C^3,$$

$$\|f - s_2\| \le c\, n^{-1} \omega_4(f', 1/n), \quad n > N(f), \quad f \in \Delta^{(3)}\ (\subset C^1),$$

де остання нерівність хибна для $n > 4$.

Бондаренко, Левіатан і Примак для $f \in \Delta^{(3)}$ довели першу поточкову нерівність

$$|f(x) - S(x)| \le c\, \omega_3(f, 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1, 1],$$

де S – 3-монотонний кубічний сплайн з чебишовськими вузлами а також S – 3-монотонний многочлен степеня $\le n$.

Зазначимо, що 3-монотонне наближення – це межевий випадок між монотонним і опуклим наближеннями (де багато "позитивних" результатів) та q-монотонним наближенням з $q > 3$ (де майже все "негативне"). Тут поточкова оцінка з ω_4 для сплайна не доведена, а для многочлена не доведений навіть її рівномірний аналог (здається, що обидві оцінки будуть хибні, а функція $x^2 \mathrm{sign}(x) \in \Delta^{(3)}$ буде контрприкладом, хоча ми цього не доводимо).

У **розділі 5** доведено дві найкращі (за порядком k модуля гладкості) оцінки (35) і (36) у **копозитивному наближенні**.

5.1 *Майже копозитивне поточкове наближення неперервних на відрізку функцій*

Зауважимо, що у копозитивному наближенні (функцій з $\Delta^{(0)}(Y_s)$, що невід'ємні на $[y_1, 1]$, недодатні на $[y_2, y_1]$ і т.д.) *при послабленні умови зберігання знаку для многочлена у маленьких околах точок зміни знаку фінкції* порядок наближення зріс не на одиницю (як у комонотонному і коопуклому наближеннях), а як завгодно – як при наближенні без обмежень.

Теорема 5.1.2. *Якщо* $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, $s \in \mathbb{N}$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *що більше деякої сталої* $N(k, Y_s)$, *яка залежить тільки від* $k \in \mathbb{N}$ *і* $\min_{i=1,\dots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, *існує многочлен* P_n *степеня* $\le 4n$, *такий, що*

$$P_n \text{ копозитивний з } f \text{ м. с. на } [-1,1]$$
$$\text{окрім, можливо, на } \cup_{i=1}^{s} (y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)),$$

$P_n(y_i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, *і*

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(k, s)\, \omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \tag{32}$$

де $c(k,s)$ – стала, яка залежить тільки від k і s.

Для "чисто" копозитивного наближення оцінку (32) з ω_3 замість ω_k довів Копотун, а Цу побудував $f \in \Delta^{(0)}(Y_1)$ (яка ще й з C^1), таку, що (32) хибна з ω_4 і вище.

5.2 *Наближення неперервних періодичних функцій*

Теорема 5.2.1. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, то для кожного $n \ge N(Y_s)$ існує тригонометричний поліном T_n порядку $\le n$, такий, що*

$$T_n \in \Delta^{(0)}(Y_s),$$

$$E_n^{(0)}(f) := \inf_{R_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(0)}(Y_s)} \|f - R_n\| \le \|f - T_n\| \le c(s)\,\omega_3(f, \pi/n), \quad (33)$$

де стала $N(Y_s)$ залежить тільки від $\min_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, а $c(s)$ – тільки від s.

Плєшаков і Попов довели оцінку (33) з ω_1 замість ω_3, а Попов довів, що (33) хибна з ω_4 і вище.

У **розділі 6** доведено сім **контрприкладів**.

1) Якщо функція f з неперервною на $[-1,1]$ похідною не спадає на $[y_1, 1]$, не зростає на $[y_2, y_1]$ і т.д. з фіксованими y_i : $-1 < y_s < \dots < y_1 < 1$, $s \in \mathbb{N}$, то в нерівності

$$\|f - P_n\| \le C(y_i)\, n^{-1}\, \omega_3(f', 1/n), \quad n \ge 3,$$

з алгебраїчними многочленами P_n степеня $\le n$, що змінють свою монотонність теж в y_i-х, як f, і сталою $C(y_i)$, що залежить тільки від y_i-х, неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k > 3$ (див. теорему 6.1.2).

2) Якщо f – неперервна, 2π періодична і на кожному періоді змінює монотонність в y_i-х : $-\pi < y_{2s} < \dots < y_1 < \pi$, $s \in \mathbb{N}$, то в нерівності

$$\|f - T_n\| \le C(y_i)\, \omega_2(f, \pi/n), \quad n \in \mathbb{N},$$

з тригонометричними поліномами T_n порядку $\le n$, що змінють свою монотонність теж в y_i-х, як f, і сталою $C(y_i)$, що залежить тільки від y_i-х, неможливо замінити ω_2 на ω_k з $k > 2$ (див. теорему 6.2.1).

3) Для кожного натурального q знайдено неперервну періодичну q-комонотонну функцію, для якої, при наближенні її q-комонотонними поліномами, (на відміну від наближення без обмежень) не справджуються оцінка Джексона-Стєчкіна з модулем гладкості порядку $\ge q + 2$ (див. теорему 6.6.1).

4) Для кожних $r > 2$ і $n \in \mathbb{N}$ знайдено кусково-опуклу функцію f з однією довільно фіксованою точкою перегину $y \in [-1,1]$ і з абсолютно неперервною $r-1$-шою і обмеженою r-ю похідною, таку, що для кожного алгебраїчного многочлена P_n степеня $\le n$ і з тією самою єдиною точкою перегину y (на відміну від наближення без обмежень) знайдеться точка $x \in [-1,1]$, така, що

$$|f(x) - P_n(x)| > C(y,r)\, n^{r-2} \rho_n^r(x), \quad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,$$

де $C(y,r)$ – стала, яка залежить тільки від y і r (див. теорему 6.3.1). Якщо f має більше однієї точки перегину, то такої x не існує.

5) Знайдено функцію g з однією точкою перегину і неперервною похідною, для якої неможливо отрмимати водночас дві поточкові оцінки з інтерполяцією в $-1, 1$ (навіть з ω_1) для сумісного наближення g многочленами P_n з тією самою точкою перегину і g' похідними P_n' (див. теорему 6.3.3).

6) Для кожних $k \ge 1$ і $r \ge 0$ таких, що $k + r > 2$, знайдено кусково-опуклу функцію $f \in C^r[-1,1]$ з певним набором $Y_s,\ s \ge 2$, з двох і більше точок перегину, таку, що при наближенні її кусково-опуклими алгебраїчними многочленами P_n степеня $\le n$ з тими самими точками перегину Y_s неможливо отримати поточкові оцінки типу Нікольського для $x \in [-1,1]$

$$|f(x) - P_n(x)| \le C(k,r,s)\, \rho_n^r(x)\, \omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad n \ge N(k,r,Y_s),$$

зі сталими $C(k,r,s)$ і $N(k,r,Y_s)$, що залежать тільки від параметрів у дужках (див. теорему 6.4.1). Це можливо лише зі сталими $C(k,r,Y_s)$ і $N(k,r,s)$. Таке явище непритаманне відповідним поточковим оцінкам комонотонного наближення. Його також немає в рівномірному коопуклому наближенні, тобто в оцінках типу Джексона-Стєчкіна (з $1/n$ замість ρ_n). Для однієї точки перегину ці оцінки (тобто з $k + r > 2$) коопуклого поточкового наближення не справджуються навіть з $C(k,r,Y_1)$ і $N(k,r,Y_1)$, а тільки з $C(k,r)$ і $N(f,k,r,Y_1)$, і то не для відомих негативних випадків ($k > 3,\ r < 3$, де вони зовсім хибні навіть з обома сталими, що залежать від f).

7) Знайдено дві q-монотонні функції $f_1 \in C^q[-1,1],\ q \in \mathbb{N}$, і $f_2 \in C^{q-2}[-1,1],\ q \ge 4$, (тобто їх q-ті розділені різниці невід'ємні для всіх наборів з $q+1$ точок відрізку $[-1,1]$), при наближенні яких q-монотонними сплайнами степеня $r,\ r \in \mathbb{N}$, з будь-якими вузлами неможливо отримати оцінки похибок а ні локального, а ні глобального наближень, що містили б ω_k з $k \ge q+2$ і $k = 3$ (див. теореми 6.5.1 і 6.5.2), відповідно.

ВИСНОВКИ

Для *ко-* (тобто *кусково*) *монотонного* і *коопуклого* наближень доведено інтерполяційний (на кінцях відрізку) аналог оцінки Нікольського другого порядку (тобто аналог оцінок Тєляковського, Гопенгауза і ДеВора). Для більших порядків він хибний навіть у наближенні без обмежень.

Для *коопуклого* наближення неперервних на відрізку функцій з більше ніж однією точкою перегину доведено оцінку Нікольського з модулем гладкості третього порядку (для більших порядків вона хибна), а для функцій з класу Соболєва W^r (тобто з абсолютно неперервними $r-1$-ми і обмеженими r-ми похідними) цю оцінку доведено для всіх r, тимчасом як для функцій з однією точкою перегину її встановлено лише зі сталою, що залежить від розташування цієї точки, і доведено, що позбутися такої залежності неможливо.

Для *коопуклого* наближення многочленами і сплайнами встановлено всі можливі оцінки типу Нікольського для функцій будь-якої скінченної гладкості. Зроблено огляд і порівняння цих оцінок з їх рівномірними аналогами.

Для *майже коопуклого* наближення многочленами і кубічними сплайнами (тобто коли многочлен/сплайн може не зберігати коопуклість функції в "маленьких" околах точок перегину) доведено оцінку Брудного з четвертим модулем гладкості (з п'ятим модулем вона є хибною, а для "чисто" *коопуклого* наближення вона хибна навіть з четвертим модулем).

Для *3-монотонного* (тобто 3-тя розділена різниця f невід'ємна у будь-яких чотирьох точках, або, що те саме, f' опукла на інтервалі) наближення сплайнами степеня $r \ge 3$ мінімального дефекту (тобто $r-1$-ша похідна неперервна) з рівномірними та чебишевськими вузлами доведено дві рівномірні оцінки (з модулем гладкості Діціана-Тотіка, включно) четвертого порядку, які для п'ятого порядку вже є хибними. Ці дві оцінки також не справджуються в інтегральних метриках L_p, $p < \infty$, однак показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність контрольована на відміну від сплайнів з вільними вузлами, тобто вузли не злипаються.

Для *майже копозитивного* наближення доведено оцінку Нікольського з модулем гладкості довільного порядку (для "чисто" копозитивного наближення вона хибна вже з четвертим модулем). На відміну від комонотонного і коопуклого випадків, де таке послаблення на форму не дає більше одного додаткового порядку (див.

контрприклади в роботах ДеВора, Ву, Левіатана, Цу, Шевчука), тут порядок зріс до довільного, як у наближенні без обмежень.

Для *копозитивного* наближення тригонометричними поліномами доведено оцінку типу Джексона з модулем гладкості третього порядку (для більших порядків вона хибна).

У *комонотонному* наближенні періодичних функцій гладкості r і k-м модулем гладкості (r-ї похідної) доведено оцінку типу Джексона з $r = 0,\ k = 2$, з $r = 1,\ k = 3$ та з $r \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ (для всіх інших пар, тобто $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, вона хибна).

У *майже комонотонному* і *майже коопукломуому* наближеннях неперервних періодичних функцій доведено оцінку типу Джексона через модулі неперервності порядку $k = 3$ та $k = 4$, відповідно (для "чистих" видів цих ФЗН вона справджується з меншими k).

Доведено сім контрприкладів про неможливість підвищення порядків в отриманих оцінках, про неможливість "покращення" залежності сталих в них від основних параметрів та про нові явища у ФЗН.

Запропоновано нове просте представлення інтерполяційних сплайнів, перспективне для чисельної реалізації з миттєвою швидкодією і модифікації якого є хорошим методом ФЗН, та нове строго додатнє поліноміальне ядро, що, зокрема, уможливлює побудову тригонометричних поліномів з найкращими порядками ФЗН.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A., *Piecewise monotone pointwise approximation,* Constr. Approx., **14** (1998), 311-348.
2. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Nearly coconvex pointwise approximation,* East J. Approxim., **6** (2000), 357-383.
3. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A., *Coconvex pointwise approximation,* Укр. мат. журн., **54** (2002), 1200-1212.
4. Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д., *Коопукле наближення функцій, які мають більше однієї точки перегину,* Укр. Мат. Журн., **56** (2004), №3, 352-365.
5. Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д., *Поточкові оцінки коопуклого наближення диференційовних функцій,* Укр. мат. журн., **57** (2005), №1, 47-59.
6. Dzyubenko G. A. , Gilewicz J., Shevchuk I. A., *New phenomena in coconvex approximation,* Analysis Mathematica, **32** (2006), 113-121.

7. Dzyubenko G. A., *Comonotone approximation with interpolation at the ends of an interval,* Analysis in Theory and Application, **22** (2006), №3, 233-245.
8. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Nearly coconvex pointwise approximation by cubic splines and polynomials,* East J. Approxim. **12** (2006), №4, 417-439.
9. Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г., *Комонотонное приближение периодических функций,* Мат. заметки, **83** (2008), вып. 2, 199-209.

9a. Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г., *Комонотонное приближение периодических функций,* Мат. заметки, **84** (2008), вып. 5, 713-723.

10. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Copositive approximation of periodic functions,* Acta Math. Hungar., **120** (2006), №4, 301-314.
11. Дзюбенко Г. А., *Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2008, том 5, №1, 113-123.
12. Дзюбенко Г. А., *Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій,* Укр. мат. журн., **61** (2009), №4, 435-451.
13. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Nikolskii-type estimates for coconvex approximation of functions with one inflection point,* Jaen J. Approx., **2** (2010), №1, 51-64.
14. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Coconvex pointwise approximation,* RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO Serie II, Suppl. **82** (2010), 359-374.
15. Dzyubenko G. A., Kopotun K. A., Prymak A. V., *Three-monotone spline approximation,* J. Approx. Theory, **162** (2010), 2168-2183.
16. Дзюбенко Г. А., *Порядки комонотонного наближення періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України "Теорія функцій та суміжні питання", **10** (2013), №1, 110 - 125.
17. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Pointwise estimates of coconvex approximation,* Jaen J. Approx., **6** (2014), №2, 261–295.
18. Дзюбенко Г. А., *Обмеження порядку q-монотонного наближення періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, Т. 12, №4, 186–197: "Теорія функцій та суміжні питання"/ Відп. ред.: А.С.Романюк – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – 329 с.
19. Дзюбенко Г. А., *Кубічний сплайн три-монотонного наближення,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **13** (2016), №2, 1-14.

20. Dzyubenko G. A., *Nearly comonotone approximation of periodic functions,* Anal. Theory Appl., **33** (2017), №1, 74-92.
21. Дзюбенко Г. А., *Поточкова оцінка майже копозитивного наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами,* Укр. мат. журн., **69** (2017), №5, 641-649.
22. Дзюбенко Г. А., *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій,* Укр. мат. журн., **71** (2019), №3, 353-367.

23. Dzyubenko G. A., Pointwise estimates for coapproximation // Abstracts. Third Int. Conf. Curves and Surfaces, 27 June- 3 July 1996, Chamonix Mont Blanc, France. 65 p., p. 17.
24. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Pointwise estimate of nearly coconvex polynomial approximation // Тез. доп. Міжнар. конф. “Теорія наближення функцій та її застосуваня, присв'ячена пам'яті В.К.Дзядика”, 27-31 Травень 1999. – Київ: Ін-т математики НАН України, с. 23.
25. Дзюбенко Г. А., Залізко В.Д., Поточкові оцінки коопуклого наближення диференційовних функцій // Тези доп. Міжнар. конф. пам. В.Я.Буняковского (1804-1889), 16-21 серпня 2004. – Київ: Ін-т математики НАН України, с. 54.
26. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Coconvex approximation with interpolation at the ends of an interval // Abstracts. Conf. "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and statistics II dedicated to the memory of A.Ya. Dorogovtsev (1935-2004) (FM2004), October 1-5, 2004, Kyiv, Ukraine.
27. Dzyubenko G. A., Shape preserving approximation of periodic functions // Abstracts. Canadian Math. Soc.- MITACS 2007 Joint Conference, May 31-June 3, Winnipeg, Manitoba, Canada, p. 94.
28. Dzyubenko G. A., Jackson type estimates of q-monotone approximation // Abstracts. 9th Conference on Orthogonal Polynomials Special Functions and Applications July, 2nd-6th 2007 – Marseille, France, p. 25.
29. Дзюбенко Г. А., Оцінка Джексона-Стечкіна при знакозберігаючому наближенні // Тези доп. Конф. Боголюбовськи читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка, 16-21 червня 2008 р., Мелітополь, с. 44.

30. Dzyubenko G. A., Comonotone analogue of Jackson-Stechkin's inequality // Abstracts. Conf. Math. Analysis Differential Equations and their Appl. Famagusta, North Cyprus, Sept. 12-15, 2008, p. 20-21.
31. Dzyubenko G. A., The orders of the best shape preserving approximation of periodic functions // Abstracts. Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III, dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk (1919-1998) (FM2009), August 22-26, 2009, Camp Hart, Village Svityaz, Shatskyi Region, Volyn, Ukraine, p. 35-36.
32. Dzyubenko G. A., Nearly comonotone approximation of periodic functions // Abstracts. CMS Summer Meeting, The Delta Winnipeg, Manitoba, Canada – 2014 June 6-9, cms.math.ca.
33. Dzyubenko G. A., Nikolskii-type estimate for nearly copositive approximation of continuous on an interval functions // Abstracts. 4th AMMODIT Conference (Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools), March 19-23, 2018, Malekhiv (Lviv region), Ukraine.
34. Dzyubenko G. A., Degrees of comonotone approximation of periodic functions // Abstracts. Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8, Bishkek - Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018.
35. Dzyubenko G. A., One estimate of three-monotone spline approximation // Abstracts. Final AMMODIT Conference "Mathematics for Life Sciences" , March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine, p. 16.

АНОТАЦІЇ

Дзюбенко Г. А. Формозберігаюче наближення функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

В дисертації встановлено ряд класичних за виглядом оцінок формозберігаючого наближення (ФЗН) функцій алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами та сплайнами на відрізку і на дійсній осі, описано місце цих оцінок серед інших досягнень в теорії ФЗН і в класичній теорії наближення без обмежень, доведено низку прикладів, що свідчать про неможливість покращення вказаних результатів (за порядком наближення тощо) і зроблено стислий огляд тематики за останні тридцять років.

Під "формою" розуміється зміна знаку, або зміна монотонності, або опуклості, або q-монотонності (на відрізку/періоді) у функції, а під "формозбереженням" – і у наближаючого її многочлена/полінома/сплайна. Тобто на відміну від класичного наближення без обмежень у ФЗН наближаючі многочлени/поліноми/сплайни не осцилюють як завгодно, а зберігають вказані геометричні властивості функції.

Відомо, що наблизити монотонну, опуклу, або q-монотонну функцію ($q > 2$) алгебраїчними многочленами, які збережуть її форму, цілком можливо (тобто теорема Вейєрштрасса про наближення многочленами справджується для ФЗН). В той же час, в деяких випадках порядки (або швидкості) ФЗН значно "гірші" за порядки найкращих наближень без обмежень, тоді як в інших вони "майже такі самі". Також в певних випадках класичні за формою оцінки наближення без обмежень зберігаються у ФЗН – в інших ні.

В дисертації, зокрема, з'ясовані ці випадки, тобто представлено результати про справджуваність і хибність рівномірних і поточкових оцінок похибок ФЗН в термінах різних модулей гладкості.

А саме:

У наближенні алгебраїчними многочленами отримано поточкові оцінки (типу Нікольського) кусково опуклого ФЗН, інтерполяційну (на кінцях відрізку) поточкову оцінку кусково монотонного ФЗН і всі можливі поточкові оцінки майже ФЗН (тобто коли наближаючі елементи можуть не зберігати форму функції на "маленькій" множині розміру приблизно $\frac{1}{n}$).

У наближенні тригонометричними поліномами отримано, або посилено рівномірні оцінки ФЗН (типу Джексона) та започатковано майже ФЗН, де теж отримано основні оцінки.

У наближенні сплайнами отримано найкращі (за порядком) локальні і глобальні оцінки 3-монотонного наближення з різними модулями гладкості та в різних метриках.

Побудовані контрприклади у випадках, коли відповідні оцінки наближення многочленами, тригонометричними поліномами, або сплайнами не справджуються, а також контрприклади, що свідчать про неможливість покращення характеру залежності сталих в доведених оцінках від основних параметрів.

Ключові слова: формозберігаюче наближення (ФЗН); порядок наближення алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами і сплайнами; оцінки типу Джексона–Стєчкіна і Нікольського; модулі гладкості і модулі гладкості Дітціана–Тотіка; кус-

кова позитивність, монотонність, опуклість і q-монотонність.

Дзюбенко Г. А. Формосохраняющее приближение функций. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

В диссертации доказано ряд классических по виду оценок формосохраняющего приближения (ФСП) функций алгебраическими многочленами, тригонометрическими полиномами и сплайнами на отрезке и действительной оси, описано место этих оценок среди других достижений в теории ФСП и в классической теории приближения без ограничений, доказано ряд примеров, которые свидетельствуют о невозможности улучшения указанных результатов (по порядку приближения и т.п.), и сделан сжатый обзор тематики за последние тридцать лет.

Под "формой" понимается смена знака, или смена монотонности, или выпуклости, или q-монотонности (на отрезке/периоде) у функции, а под "формосохранением" – и у приближающего ее многочлена/полинома/сплайна. То есть, в отличие от классического приближения без ограничений в ФСП приближающие многочлены/полиномы/сплайны не осциллируют как угодно, а сохраняют указанные геометрические свойства функций.

Известно, что приблизить монотонную, выпуклую, или q-монотонную функцию ($q > 2$) алгебраическими многочленами, которые сохранят ее форму, вполне возможно (то есть, теорема Вейерштрасса о приближении многочленами имеет место и для ФСП). В то же время, в некоторых случаях порядки (или скорость) ФСП значительно "хуже", чем порядки наилучших приближений без ограничений, тогда как в других – они "почти такие же". Также, в определенных случаях классические по форме оценки приближения без ограничений сохраняются в ФСП – в других нет.

В диссертации, в частности, выяснены эти случаи, то есть указано, какие равномерные и поточечные оценки погрешности приближения в терминах разных модулей гладкости выполняются для ФСП, а какие – нет.

А именно:

В приближении алгебраическими многочленами получены все возможные поточечные оценки (типа Никольського) кусочно выпуклого ФСП, интерполяционную (на концах отрезка) поточечную оценку кусочно монотонного ФСП и все возможные поточечные оценки почти ФСП (то есть, когда приближающие элементы могут не сохранять форму функции на "маленьком" множестве размера приблизительно $\frac{1}{n}$).

В приближении тригонометрическими полиномами получены, или усилены все возможные равномерные оценки ФСП (типа Джексона) и положено начало почти ФСП, где тоже получены основные оценки.

В приближении сплайнами получены наилучшие (по порядку) локальные и глобальные оценки 3-монотонного приближения с разными модулями гладкости и в разных метриках.

Построены контрпримеры в случаях, когда соответствующие оценки приближения многочленами, тригонометрическими полиномами, или сплайнами неверны, а также контрпримеры, которые свидетельствуют о невозможности улучшения характера зависимости констант в доказанных оценках от основных параметров.

Ключевые слова: формосохраняющее приближение (ФСП); порядок приближения алгебраическими многочленами, тригонометрическими полиномами и сплайнами; оценки типа Джексона–Стечкина и Никольського; модули гладкости и модули гладкости Дитциана–Тотика; кусочная позитивность, монотонность, выпуклость и q-монотонность.

Dzyubenko G. A. Shape Preserving Approximation of Functions. — Manuscript.

Thesis for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

In the thesis a number of classical in form estimates of Shape Preserving Approximation (SPA) of functions by algebraic polynomials, trigonometric polynomials and splines on a finite interval and on the real axe are proved, the place of each of these results among other achievements in the theory of SPA and the classical approximation theory without restrictions is described, a number of examples is proved to show that it is not possible to improve the indicated estimates (in the sense of order of approximation, etc.), and a brief overview of the topic over the last thirty years is made.

"Shape" refers to changes of sign, or monotonicity, or convexity, or q-monotonicity (on an interval/period) of a function, whereas "preservation of the shape" – also of polynomials/splines that

approximate this function. That is, in contrast to the classical approximation without restrictions, in SPA, the approaching polynomials /splines do not oscilate arbitrarily, but preserve the specified geometric properties of the function.

It is known that it is quite possible to approximate a monotone, or convex, or q-monotone function ($q > 2$) by algebraic polynomials which will preserve its shape (i.e., the Weierstrass theorem on approximation by polynomials is true for SPA). At the same time, in some cases, the degrees (or speeds) of SPA are much "worse" than the best approximations without restrictions, while in the others – they are "almost the same". Also, in certain cases, the classical in form estimations of approximation without restrictions is stored in the SPA – in others no.

In the thesis, in particular, these cases have been clarified, that is the results on validity and invalidity of uniform and pointwise estimates of errors of SPA in terms of different moduli of smoothness are presented.

Namely:

The second order interpolating (at the ends of an interval) analogue of Nikolskii-type estimate is proved for *piecewise* (further *co-*) *monotone* and *coconvex* approximations, respectively (i.e., an analogue of the estimates of Telyakovsky, Gopenhauz and DeVore). For higher orders, it is false even in the approximation without restrictions.

For *coconvex* approximation of continuous on an interval functions with more than one inflection point, the Nikolskii-type estimate with the third order modulus of smoothness is proved (for higher orders it is false), and for functions from Sobolev class W^r (with absolutely continuous $r-1$-ths and bounded r-th derivatives) this estimate is proved for all r, whereas for functions with one inflection point it is only proved with a constant depending on the location of this point and it is proved that to get rid of such dependence is impossible.

For *coconvex* approximation by polynomials and splines, all possible Nikolskii-type estimates for functions of any finite smoothness are established and compared with their uniform analogous.

For *3-monotone* (i.e., the 3-th divided difference of f is nonnegative at any four points or, equivalently, f' is convex on an interval) approximation by splines of degree $r > 3$ of minimal defect (i.e., $r-1$-th derivative is continuous) with uniform and Chebyshev knots, two uniform estimates (with Ditsian-Totic modulus of smoothness, incl.) of the fourth order are proved. They are false with higher orders and also not valid in integral metrics L_p, $p < \infty$, but it is shown that they can be valid if the spline knots are allowed to depend on the function and this dependence is controlled unlike splines with free knots.

For *nearly coconvex* approximation by polynomials and cubic splines (i.e., when the polynomial/spline can not preserve the function's convexity in "small" neighborhoods of the inflection points), the Brudnyi-type estimate with the fourth order modulus of smoothness is proved (for the fifth order it is not valid, and for "pure" *coconvex* approximation it is not valid even for the fourth order).

For *nearly copositive* approximation, the Nikolskii-type estimate with the arbitrary order modulus of smoothness is proved (for "purely" copositive approximation it is false already with the fourth order). Unlike the comonotone and coconvex cases, where such relaxation on the form does not give more than one additional order, the order here has grown to arbitrary, like in the approximation without restrictions.

For *copositive* approximation by trigonometric polynomials, the Jackson-type estimate with the third order modulus of smoothness is proved (for the higher orders it is false).

For *comonotone* approximation of periodic functions of smoothness r and the k-th order modulus of smoothness (of r-th derivative), the Jackson-type estimate is proved with $r = 0,\ k = 2$, with $r = 1,\ k = 3$ and with $r \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ (for all other pairs, i.e. $r = 0,\ k > 2$ and $r = 1,\ k > 3$, it is false).

For *nearly comonotone* and *nearly copositive* approximations of continuous periodic functions the Jackson-type estimate with the k-th order modulus of smoothness is proved for $k = 3$ and, respectively, for $k = 4$ (for "pure" types of these SPA it holds with smaller k-s).

We also prove several counterexamples about the impossibility of increasing of the orders in the obtained estimates, the impossibility of "improving" the dependence of the constants in them on the main parameters, about a new phenomena in SPA and propose a new representation of interpolating splines, promising for numerical realization with instantaneous performance and modifications of which are a good method of SPA, as well as a new strictly additional polynomial kernel, which, in particular, enables constructing trigonometric polynomials with the best orders of SPA.

Keywords: Shape Preserving Approximation (SPA); degree of approximation by algebraic and trigonometric polynomials and splines; Jackson-Stechkin and Nikolskii type estimates; moduli of smoothness and Ditzian–Totik moduli of smoothness; piecewise positivity, monotonicity, convexity and q-monotonicity.

Підп. до друку 12. 06. 2019. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,9. Ум. друк. арк. 1,7. Тираж 100 пр. Зам. 37.

Інститут математики НАН України
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3