НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Дзюбенко Герман Анатолійович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ФОРМОЗБЕРІГАЮЧЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ___________ Г. А. Дзюбенко

Науковий консультант
Самойленко Анатолій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, академік НАН України

Київ — 2019

АНОТАЦІЯ

Дзюбенко Г. А., Формозберігаюче наближення функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

В дисертації доведено ряд класичних за виглядом оцінок формозберігаючого наближення (ФЗН) функцій алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами та сплайнами на відрізку і на дійсній осі, описано місце цих оцінок серед інших досягнень в теорії ФЗН і в класичній теорії наближення без обмежень, доведено низку прикладів, що свідчать про неможливість покращення вказаних результатів (за порядком наближення, тощо), і зроблено стислий огляд тематики за останні тридцять років.

Під "формою" розуміється зміна знаку, або зміна монотонності, або опуклості, або q-монотонності (на відрізку/періоді) у функції, а під "формозбереженням" – і у наближаючого її многочлена/полінома/сплайна. Тобто, на відміну від класичного наближення без обмежень, у ФЗН наближаючі многочлени/поліноми/сплайни не осцілюють як завгодно, а зберігають вказані геометрічні властивості функції.

Відомо, що наблизити монотонну, опуклу, або q-монотонну функцію ($q > 2$) алгебраїчними многочленами, які збережуть її форму цілком можливо (тобто, теорема Вейєрштрасса про наближення многочленами справджується для ФЗН). В той же час, в деяких випадках порядки (або швидкості) ФЗН значно "гірші" за порядки найкращих наближень без обмежень, тоді як в інших – вони "майже такі самі". Також, в певних випадках класичні за формою оцінки наближення без обмежень зберігаються у ФЗН – в інших ні.

В дисертації, зокрема, з'ясовані ці випадки, тобто представлено результати про справджуваність і хибність рівномірних і поточкових оцінок похибок ФЗН в термінах різних модулей гладкості.

А саме:

- у наближенні алгебраїчними многочленами отримано поточкові оцінки (типу Нікольського) кусково опуклого ФЗН, інтерполяційну (на

кінцях відрізку) поточкову оцінку кусково монотонного ФЗН і всі можливі поточкові оцінки майже ФЗН (тобто, коли наближаючі елементи можуть не зберігати форму функції на "маленькій" множині розміру приблизно $\frac{1}{n}$);

- у наближенні тригонометричними поліномами отримано, або посилено рівномірні оцінки ФЗН (типу Джексона) та започатковано майже ФЗН, де теж отримано основні оцінки;

- у наближенні сплайнами отримано найкращі (за порядком) локальні і глобальні оцінки 3-монотонного наближення з різними модулями гладкості та в різних метриках;

- побудовані контрприклади у випадках, коли відповідні оцінки наближення многочленами, тригонометричними поліномами, або сплайнами не справджуються, а також контрприклади, що свідчать про неможливість покращення характеру залежності сталих в доведених оцінках від основних параметрів.

Більш детально.

У підрозділах 2.1 та 3.1 для *кусково* (далі *ко-*) *монотонного* та, відповідно, *коопуклого* наближень доведено інтерполяційний (на кінцях відрізку) аналог оцінки Нікольського другого порядку ($k = 2$), тобто аналог оцінок Тєляковського ($k = 1$), Гопенгауза ($k = 1$) та ДеВора ($k = 2$) класичного наближення без обмежень. Для більших порядків він хибний навіть у наближенні без обмежень, що встановлено Ю і Венцом, Гонски, Левиатаном та Шевчуком (пізніше Левіатан і Шевчук довели, що такий інтерполяційний аналог все ж таки може справджуватись в наближенні без обмежень, але якщо дозволити степеню многочлена залежити від функції). Для "чисто" монотонного наближення (тобто функції монотонні на всьому відрізку) така оцінка належить ДеВору та Ю, для "чисто" опуклого – Левіатану, а її рівномірні аналоги – Швєдову та, незалежно, Ю.

У підрозділі 3.2 для *коопуклого* наближення неперервних на відрізку функцій з більше ніж однією точкою перегину доведено оцінку Нікольського з модулем гладкості третього порядку (тобто *коопуклий* аналог оцінки Брудного наближення без обмежень), для більших порядків не справджується навіть її рівномірний аналог (доведено Ву і Цу), а у підрозділі 3.3 для функцій з класу Соболєва W^r (тобто, з абсолютно неперервними $r-1$-ми і обмеженими r-ми похідними) цю оцінку доведено для всіх r (це поточковий аналог оцінок Тімана), в той час як для функцій з однією точкою перегину її встановлено лише зі сталою, що залежить від розташування цієї точки (див. підрозділ 3.6), і доведено, що позбутись такої залежності неможливо (див. підрозділ 6.3).

У підрозділах 3.4, 3.5 та 3.6 для *коопуклого* наближення сплайнами та, відповідно, многочленами встановлено всі можливі (тобто, крім відомих і доведених в розділі 6 неможливих випадків) оцінки Нікольського для функцій будь-якої скінченної гладкості з однією точкою перегину і для просто неперервних функцій з баготьма точками перегину. Відповідні оцінки в наближенні без обмежень доведені Тіманом, Дзядиком, Фройдом та Брудним. У підрозділі 3.7 зроблено огляд та порівняння цих оцінок з їх рівномірними аналогами.

У підрозділі 3.8 для *майже коопуклого* наближення многочленами і кубічними сплайнами (тобто, коли многочлен/сплайн може не зберігати коопуклість функції в "маленьких" околах точок перегину) доведено оцінку Брудного з четвертим модулем гладкості (вже з п'ятим модулем вона хибна навіть у рівномірному наближенні, що доведено Левіатаном і Шевчуком, а для "чисто" *коопуклого* наближення вона, як вже зазначалось, хибна навіть з четвертим модулем). Ця оцінка є поточковим аналогом рівномірного результату Левіатана і Шевчука.

У підрозділі 4.1 для *3-монотонного* (тобто 3-тя розділена різниця функції f невід'ємна у будь-яких чотирьох точках, або, що те саме, f' опукла на інтервалі) наближення сплайнами степеня $r \geqslant 3$ мінімального дефекту (тобто $r-1$-ша похідна неперервна) з рівномірними та чебишевськими вузрами доведено дві рівномірні оцінки (з модулем гладкості Діціана-Тотіка, включно) четвертого порядку, які для п'ятого порядку вже хибні (див. підрозділ 6.5). Ці дві оцінки також не справджуються в інтегральних метриках L_p, $p < \infty$ (навіть з третім модулем гладкості, що доведено Коноваловим та Левіатаном а також Бондаренком та Примаком), однак в підрозділі показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність, на відміну від сплайнів з вільними вузлами, контрольована (тобто вузли не зліпаються). Встановлені оцінки дають ствердну відповідь на питання Левіатана і Примака про єдиний недоведений випадок в оцінках типу Джексона для 3-монотонного наближення сплайнами з рівномірними та чебишевськими вузлами. Їх доведення спираються на знайдений кубічний сплайн 3-монотонного *локального* наближення з "правильними" вузлами (що втім можуть залежити від f) і з локальною ("більш точною") оцінкою в $L_p,\ 0 < p \leqslant \infty$, з четвертим модулем гладкості.

У підрозділі 4.2 знайдено кубічний 3-монотонний сплайн з $n-1$ "майже" рівновіддаленими вузлами і з найкращим (за порядком) локальним наближенням. На відміну від вище вказаного сплайна, він більш простий (представлений сумою зрізаних степеневих функцій), може бути використаний для означення 3-монотонного многочлена, що наближатиме f з найкращим порядком, і більш придатний для чисельної реалізації.

Зазначимо, що 3-монотонне наближення це межовий випадок між монотонним і опуклим наближеннями, де багато "позитивних" результатів, та q-монотонним наближенням з $q > 3$, де майже все "негативне". Тут поточкова оцінка з четвертим модулем гладкості для сплайнів недоведена, а для многочленів не доведен навіть її рівномірний аналог (здається, що обидві оцінки будуть хибні, а 3-монотонна функція $x^2\mathrm{sign}(x)$ буде контрприкладом, хоча ми це не доводимо). У цьому виді ФЗН були відомі шість оцінок з різними модулями гладкості (до четвертого включно, але від f'), які належать Бондаренку, Левіатану, Коновалову, Примаку та Шевчуку.

У підрозділі 5.1 для *майже копозитивного* наближення неперервних на відрізку функцій доведено оцінку Нікольського з модулем гладкості довільного порядку (для "чисто" копозитивного наближення вона хибна вже з четвертим модулем, доведено Цу). На відміну від комонотонного і коопуклого випадків, де таке послаблення на форму многочленів не дає більше одного додаткового порядку наближення (див. контрприклади в роботах ДеВора, Ву, Левіатана, Цу, Шевчука), тут порядок зріс до довільного, як у наближенні без обмежень.

У підрозділі 5.2 для *копозитивного* наближення неперервних періодичних функцій тригонометричними поліномами доведено оцінку Джексона з модулем гладкості третього порядку (для більших порядків вона хибна, доведено Поповим). Це посилює результат Плєшакова і Попова з першим модулем неперервності і є тригонометричним аналогом алгебраїчної оцінки Копотуна.

У підрозділах 2.2 та 2.3 у *комонотонному* наближенні періодичних функцій гладкості r і k-м модулем гладкості (r-ї похідної) доведено оцінку Джексона з $r = 0,\ k = 2$, з $r = 1,\ k = 3$ та з $r \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N}$ (для всіх інших пар, тобто $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, вона хибна, див. підрозділ 6.2). Ці оцінки є позитивною відповіддю на питання Дємідовіча і Канягіна про справджуваність *комонотонних* аналогів класичних оцінок наближення без обмежень Джексона, Зігмунда, Ахієзєра та Стєчкіна.

У підрозділах 2.4 та 3.9 у *майже комонотонному* та, відповідно, *майже коопукломуому* наближеннях неперервних періодичних функцій доведено оцінку типу Джексона через модулі неперервності порядку $k = 3$ та, відповідно, $k = 4$ (для "чистих" видів цих ФЗН вона справджується з меншими k, доведено, зокрема, Залізко). Ці дві нерівності є тригонометричними аналогами алгебраїчних результатів Левіатана і Шевчука.

В розділі 6 доведено сім контрприкладів, які свідчать про неможливість підвищення порядків в отриманих оцінках, про неможливість "покращення" залежності сталих в них від основних параметрів та про нові явища у ФЗН. Зокрема, виявилось, що у поточковому *коопукломуому* наближенні многочленами (на відміну від рівномірного) неможливо отримати оцінки похибок зі сталими, що не залежать від розташування точок перегину (щоб їх отримати знадобилось зробити залежною від функції сталу, з якої починаються степені многочленів, реалізуючих ці оцінки). Цього явища не має також і в *комонотоннму* наближенні (і поточковому, і рівномірному).

У підрозділах 3.8 та 2.2 запропоновано нове просте (в одну строку) представлення інтерполяційних сплайнів (сумою зрізаних степеневих функцій простої форми) з довільно фіксованими вузлами і з найкращим (за порядком) локальним наближенням без обмежень, що є перспективним для чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі і модифікації якого є хорошим методом ФЗН, та, відповідно, запропановано нове строго додатнє поліноміальне ядро (сума двох сусідніх ядер типу Джексона), що, зокрема, уможливлює побудову тригонометричних поліномів з найкращими порядками ФЗН (всі поліноми в дисертації побудовано за його допомогою).

Ключові слова: формозберігаюче наближення (ФЗН); порядок наближення алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами і сплайнами; оцінки типу Джексона–Стєчкіна і Нікольського; модулі глад-

кості і модулі гладкості Дітціана–Тотіка; кускова позитивність, монотонність, опуклість і q-монотонність.

Dzyubenko G.A., Shape Preserving Approximation of Functions. — Manuscript.

Thesis for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

In the thesis a number of classical in form estimates of Shape Preserving Approximation (SPA) of functions by algebraic polynomials, trigonometric polynomials and splines on a finite interval and on the real axe are proved, the place of each of these results among other achievements in the theory of SPA and the classical approximation theory without restrictions is described, a number of examples is proved to show that it is not possible to improve the indicated estimates (in the sense of order of approximation, etc.), and a brief overview of the topic over the last thirty years is made.

"Shape" refers to changes of sign, or monotonicity, or convexity, or q-monotonicity (on an interval/period) of a function, whereas "preservation of the shape" – also of polynomials/splines that approximate this function. That is, in contrast to the classical approximation without restrictions, in SPA, the approaching polynomials /splines do not oscilate arbitrarily, but preserve the specified geometric properties of the function.

It is known that it is quite possible to approximate a monotone, or convex, or q-monotone function ($q > 2$) by algebraic polynomials which will preserve its shape (i.e., the Weierstrass theorem on approximation by polynomials is true for SPA). At the same time, in some cases, the degrees (or speeds) of SPA are much "worse" than the best approximations without restrictions, while in the others – they are "almost the same". Also, in certain cases, the classical in form estimations of approximation without restrictions is stored in the SPA – in others no.

In the thesis, in particular, these cases have been clarified, that is the results on validity and invalidity of uniform and pointwise estimates of errors of SPA in terms of different moduli of smoothness are presented.

Namely:

- in the approximation by algebraic polynomials, pointwise estimates (of Nikolskii-type) of piecewise convex SPA, the interpolating (at the endpoi-

nts of an interval) pointwise estimate of piecewise monotone SPA and all possible poinwise estimates of nearly SPA (i.e., when the approaching elements may not preserve the shape of the function on a small set of size about $\frac{1}{n}$) are obtained;

- in the approximation by trigonometric polynomials, uniform estimates of SPA (of Jackson-type) are obtained, or strengthened, and nearly SPA is initiated, where also the basic estimates are obtained;
- in the approximation by splines, the best (by order) local and global estimates of the 3-monotone approximation with different moduli of smoothness and in different metrics are obtained;
- counterexamples are constructed in cases where the corresponding estimates of approximation by polynomials, or splines do not hold, as well as counterexamples, which indicate that it is impossible to improve the dependence of the constans in the proved estimates on the main parameters.

In more details.

The second order ($k = 2$) interpolating (at the ends of an interval) analogue of Nikolskii-type estimate is proved in Sections 2.1 and 3.1 for *piecewise* (further *co-*) *monotone* and *coconvex* approximations, respectively, i.e. an analogue of the estimates of Telyakovsky ($k = 1$), Gopenhauz ($k = 1$) and DeVore ($k = 2$) of the classical approximation without restrictions. For higher orders, it is false even in the approximation without restrictions, that was established by Yu and Wenz, Gonska, Leviatan and Shevchuk (later, Leviatan and Shevchuk proved that such an interpolating analogue can nevertheless be achived in the approximation without restrictions, but if the degree of the polynomial will be allowed to depend on the function). For *purely* monotone approximation (that is, functions are monotone throughout the interval), such estimate belongs to DeVore and Yu, for *purely* convex to Leviatan, and its uniform analogues to Shvedov and, independently, Yu.

In Section 3.2 for *coconvex* approximation of continuous on an interval functions with more than one inflection point, the Nikolskii-type estimate with the third order modulus of smoothness is proved (that is, a *coconvex* analogue of the estimate of Brudnyi in approximation without restrictions), for higher orders even its uniform analogue is false (proved by Wu and Zhou), and in Section 3.3 for functions from Sobolev class W^r (i.e., with absolutely continuous $r-1$-ths and bounded r-th derivatives) this estimate is proved for all r (it's a poinwise analogue of Timan's estimates), whereas for functions with one inflection point it is only proved with a constant depending on the location of this point (see Section 3.6) and it is proved that to get rid of such dependence is impossible (see Section 6.3).

In Sections 3.4, 3.5 and 3.6 for *coconvex* approximation by splines and polynomials, respectively, all possible (that is, without known and proved in the section 6 impossible cases) Nikolskii-type estimates for functions of any finite smoothness with a single inflection point and for simply continuous functions with many inflexion points are established. The corresponding estimates in the approximation without restrictions where proved by Timan, Dzyadyk, Freud and Brudnyi. Section 3.7 reviews and compares these estimates with their uniform analogous.

In Section 3.8 for *nearly coconvex* approximation by polynomials and cubic splines (i.e., when the polynomial/spline can not preserve the function's convexity in "small" neighborhoods of the inflection points) the Brudnyi-type estimate with the fourth order modulus of smoothness is proved (already with the fifth modulus it is false even in the uniform approximation, proved by Leviatan and Shevchuk, and for the "pure" *coconvex* approximation it, as already noted, is false even with the fourth modulus). This estimate is a poinwise analogue of the uniform result of Leviatan and Shevchuk.

In Section 4.1 for *3-monotone* (i.e., the 3-th divided difference of f is nonnegative at any four points or, equivalently, f' is convex on an interval) approximation by splines of degree $r \geqslant 3$ of minimal defect (i.e., $r-1$-th derivative is continuous) with uniform and Chebyshev knots, two uniform estimates (with Ditsian-Totic modulus of smoothness, incl.) of the fourth order are proved, which are already false for the fifth order (see Section 6.5). These two estimates are also not true in the integral metrics L_p, $p < \infty$ (even with the third modulus of smoothness, that was proved by Konovalov and Leviatan, as well as by Bondarenko and Prymak), but in the section it is shown that they can hold if the spline knots will be allowed to depend on the function and this dependence, unlike splines with free knots, is controlled (that is, the knots do not stick each other). The established estimates give the affirmative answer to the question of Leviatan and Prymak on a single unproved case in Jackson-type estimates for 3-monotone spline approximations with uniform and Chebyshev knots. Their proofs are based on a found cubic spline of 3-monotone *local* approximation with "correct" knots (which may, however, depend on f), and with a local ("more precise") estimate in $L_p,\ 0 < p \leqslant \infty$, with the fourth modulus of smoothness.

In Section 4.2 a cubic 3-monotone spline with $n-1$ "almost" equidistant knots and with the best (in order) local approximation is found. In contrast to the above spline, it is simpler (represented by the sum of truncated power functions), can be used to define a 3-monotone polynomial, that will approximate f with the best order, and more suitable for numerical implementation.

We note that the 3-monotone approximation is a boundary case between monotone and convex approximations, where there are many "positive" results, and q-monotone approximation with $q > 3$, where almost all are "negative". Here the pointwise estimate with the fourth modulus of smoothness for splines is not proved, and for polynomials even its uniform analogue is not proved (it seems that both estimates will be false, and the 3-monotone function $x^2\mathrm{sign}(x)$ will be a counterexample, although we do not prove this). In this type of SPA six estimates with different modulus of smoothness (up to the fourth incl., but from f') which belong to Bondarenko, Leviatan, Konovalov, Primak and Shevchuk were known.

In Section 5.1 for *nearly copositive* approximation of continuous on an interval functions, the Nikolskii-type estimate with the arbitrary order modulus of smoothness is proved (for "purely" copositive approximation it is false already with the fourth order, proved by Zhou). Unlike the comonotone and coconvex cases, where such relaxation on the shape of polynomials does not give more than one additional order of approximation (see counterexamples in papers by DeVore, Leviatan, Shevchuk, Zhou, Wu), the order here has grown to arbitrary, like in approximation without restrictions.

In Section 5.2 for *copositive* approximation of continuous periodic functions by trigonometric polynomials, the Jackson-type estimate with the third order modulus of smoothness is proved (for higher orders it is false, proved by Popov). This strengthens the result of Pleshakov and Popov with the first modulus of continuity and is a trigonometric analogue of the algebraic estimate of Kopotun.

In Sections 2.2 and 2.3 for *comonotone* approximation of periodic functions of smoothness r and the k-th order modulus of smoothness (of r-th derivative), the Jackson-type estimate is proved with $r = 0,\ k = 2$, with

$r = 1,\ k = 3$ and with $r \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N}$ (for all other pairs, i.e. $r = 0,\ k > 2$ and $r = 1,\ k > 3$, it is false, see Section 6.2). These estimates are a positive answer to the question of Demitovich and Kanyagin on the validity of *comonomone* analogues of classical estimates of approximation without restrictions established by Jackson, Zigmund, Akhiezer and Stechkin.

In Sections 2.4 and 3.9 for *nearly comonotone* and, respectively, *nearly copositive* approximations of continuous periodic functions the Jackson-type estimate with the k-th order modulus of smoothness is proved for $k = 3$ and, respectively, for $k = 4$ (for "pure" types of these SPA it holds with smaller k-s, proved, in particular, by Zalizko). These two inequalities are trigonometric analogues of the algebraic results of Leviatan and Shevchuk.

In Chapter 6 we prove seven counterexamples about the impossibility of increasing of the orders in the obtained estimates, the impossibility of "improving" the dependence of the constants in them on main parameters and about a new phenomena in SPA. In particular, it turned out that in the pointwise *coconvex* approximation by algebraic polynomials (unlike uniform) it is impossible to obtain estimates of errors with constants which do not depend on the placement of the inflection points (in order to obtain them it is necessary to make to be dependent on the function the constant from which the powers of polynomials, implementing these estimates, begin). This phenomenon does not have place also in *commonotone* approximation (neither in pointwise nor in uniform).

In Sections 3.8 and 2.2 we propose a new simple (in one line) representation of interpolating splines (by a sum of truncated power functions of a simple form) with arbitrary fixed knots and with the best (in order) local approximation without restrictions, which is promising for numerical realization with real-time performance and modifications of which is a good method of SPA, and, respectively, we propose a new strictly additional polynomial kernel (the sum of two neighboring Jackson-type kernels), which, in particular, enables constructing trigonometric polynomials with the best orders of SPA (all polynomials in the thesis are constructed using it).

Keywords: Shape Preserving Approximation (SPA); degree of approximation by algebraic and trigonometric polynomials and splines; Jackson-Stechkin and Nikolskii type estimates; moduli of smoothness and Ditzian–Totik moduli of smoothness; piecewise positivity, monotonicity, convexity and q-monotonicity.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A., *Piecewise monotone pointwise approximation,* Constr. Approx., **14** (1998), 311-348.

2. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Nearly coconvex pointwise approximation,* East J. Approxim., **6** (2000), 357-383.

3. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A., *Coconvex pointwise approximation,* Укр. Мат. Журн., **54** (2002), 1200-1212.

4. Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д., *Коопукле наближення функцій, які мають більше однієї точки перегину,* Укр. Мат. Журн., **56** (2004), №3, 352-365.

5. Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д., *Поточкові оцінки коопуклого наближення диференційовних функцій,* Укр. Мат. Журн., **57** (2005), №1, 47-59.

6. Dzyubenko G. A. , Gilewicz J., Shevchuk I. A., *New phenomena in coconvex approximation,* Analysis Mathematica, **32** (2006), 113-121.

7. Dzyubenko G. A., *Comonotone approximation with interpolation at the ends of an interval,* Analysis in Theory and Application, **22** (2006), №3, 233-245.

8. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Nearly coconvex pointwise approximation by cubic splines and polynomials,* East J. Approxim. **12** (2006), №4, 417-439.

9. Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г., *Комонотонное приближение периодических функций,* Мат. заметки, **83** (2008), вып. 2, 199-209.

9a. Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г., *Комонотонное приближение периодических функций,* Мат. заметки, **84** (2008), вып. 5, 713–723.

10. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., *Copositive approximation of periodic functions,* Acta Math. Hungar., **120** (2006), №4, 301-314.

11. Дзюбенко Г. А., *Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, том 5, №1, 113-123.

12. Дзюбенко Г. А., *Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій,* Укр. Мат. Журн., **61** (2009), №4, 435-451.

13. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Nikolskii-type estimates for coconvex approximation of functions with one inflection point,* Jaen J. Approx., **2** (2010), №1, 51-64.

14. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Coconvex pointwise approximation,* RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO Serie II, Suppl. **82** (2010), 359-374.

15. Dzyubenko G. A., Kopotun K. A., Prymak A. V., *Three-monotone spline approximation,* J. Approx. Theory, **162** (2010), 2168-2183.

16. Дзюбенко Г. А., *Порядки комонотонного наближення періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України "Теорія функцій та суміжні питання", **10** (2013), №1, 110 - 125.

17. Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A., *Pointwise estimates of coconvex approximation,* Jaen J. Approx., **6** (2014), №2, 261–295.

18. Дзюбенко Г. А., *Обмеження порядку q-монотонного наближення періодичних функцій,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, Т. 12, №4, 186–197: "Теорія функцій та суміжні питання"/ Відп. ред.: А.С.Романюк – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – 329 с.

19. Дзюбенко Г. А., *Кубічний сплайн три-монотонного наближення,* Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **13** (2016), №2, 1-14.

20. Dzyubenko G. A., *Nearly comonotone approximation of periodic functions,* Anal. Theory Appl., **33** (2017), №1, 74-92.

21. Дзюбенко Г. А., *Поточкова оцінка майже копозитивного наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами,* Укр. Мат. Журн., **69** (2017), №5, 641-649.

22. Дзюбенко Г. А., *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій,* Укр. Мат. Журн., **71** (2019), №3, 353-367.

23. Dzyubenko G. A., Pointwise estimates for coapproximation // Abstracts. Third Int. Conf. Curves and Surfaces, 27 June- 3 July 1996, Chamonix Mont Blanc, France. 65 p., p. 17.

24. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Pointwise estimate of nearly coconvex polynomial approximation // Тез. доп. Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосуваня, присв'ячена пам'яті В.К.Дзядика", 27-31 Травень 1999.- Київ: Ін-т математики НАН України, с. 23.

25. Дзюбенко Г. А., Залізко В.Д., Поточкові оцінки коопуклого наближення диференційовних функцій // Тези доп. Міжнар. конф. пам-і В.Я.Буняковского (1804-1889), 16-21 серпня 2004.- Київ: Ін-т математики НАН України, с. 54.

26. Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Coconvex approximation with interpolation at the ends of an interval // Abstracts. Conf. "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and statistics II dedicated to the memory of A.Ya. Dorogovtsev (1935-2004) (FM2004), October 1-5, 2004, Kyiv, Ukraine.

27. Dzyubenko G. A., Shape preserving approximation of periodic functions // Abstracts. Canadian Math. Soc.- MITACS 2007 Joint Conference, May 31-June 3, Winnipeg, Manitoba, Canada, p. 94.

28. Dzyubenko G. A., Jackson type estimates of q-monotone approximation // Abstracts. 9th Conference on Orthogonal Polynomials Special Functions and Applications July, 2nd-6th 2007 – Marseille, France, p. 25.

29. Дзюбенко Г. А., Оцінка Джексона-Стечкіна при знакозберігаючому наближенні // Тези доп. Конф. Боголюбовськи читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка, 16-21 червня 2008 р., Мелітополь, с. 44.

30. Dzyubenko G. A., Comonotone analogue of Jackson-Stechkin's inequality // Abstracts. Conf. Math. Analysis Differential Equations and their Appl. Famagusta, North Cyprus, Sept. 12-15, 2008, p. 20-21.

31. Dzyubenko G. A., The orders of the best shape preserving approximation of periodic functions // Abstracts. Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III, dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk (1919-1998) (FM2009), August 22-26, 2009, Camp Hart, Village Svityaz, Shatskyi Region, Volyn, Ukraine, p. 35-36.

32. Dzyubenko G. A., Nearly comonotone approximation of periodic functions // Abstracts. CMS Summer Meeting, The Delta Winnipeg, Manitoba, Canada – 2014 June 6-9, cms.math.ca.

33. Dzyubenko G. A., Nikolskii-type estimate for nearly copositive approximation of continuous on an interval functions // Abstracts. 4th AMMODIT Conference (Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools), March 19-23, 2018, Malekhiv (Lviv region), Ukraine.

34. Dzyubenko G. A., Degrees of comonotone approximation of periodic functions // Abstracts. Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8, Bishkek - Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018.

35. Dzyubenko G. A., One estimate of three-monotone spline approximation // Abstracts. Final AMMODIT Conference "Mathematics for Life Sciences" , March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine, p. 16.

Зміст

Перелік умовних позначень

Більшість символів, що використовуватимуться, наведено в таблиці нижче, однак для зручності вони як правило означені і в тексті, при появі.

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$C(S),\ C,\ C^{(0)}$	простір дійснозначних неперервних на S функцій, те ж тільки на $[-1, 1]$, або 2π-періодичних, в залежності від контексту
$C^r(S),\ C^r,\ C^{(r)}$	простір r разів неперервно диференційовних на S функцій, $r \in \mathbb{N}$, те ж тільки на $[-1, 1]$, або 2π-періодичних, в періодичному випадку
$\\|f\\|_{C(S)},\ \\|f\\|_S$	$\max_{x\in S} \|f(x)\|$
$\\|f\\|$	$\max_{x\in[-1,1]} \|f(x)\|$, або $\max_{x\in[-\pi,\pi]} \|f(x)\|$, в періодичному випадку
$\\|f\\|_{L_\infty(S)}$	$\operatorname{ess\,sup}_{x\in S} \|f(x)\|$
$\Delta^{(1)}$	$\{f \in C[-1, 1]\ :\ f$ не спадає на $[-1, 1]\}$
$\Delta^{(2)}$	$\{f \in C[-1, 1]\ :\ f$ опукла до низу на $[-1, 1]\}$
$\Delta^{(q)},\ \Delta^q$	$\{f \in C[-1, 1] \cap C^{q-2}(-1, 1)\ :\ f^{(q-2)}$ опукла до низу на $(-1, 1)\},\ q \geqslant 3,\ f - q$-монотонні
$\mathbb{P}_n$	простір алгебраїчних многочленів степеня $\leqslant n$
$\mathbb{T}_n$	простір тригонометричних поліномів порядку $\leqslant n$
$E_n(f)$	$\inf_{P_n\in\mathbb{P}_n\vee\mathbb{T}_n} \\|f - P_n\\|$ (величина найкращого наближення без обмежень)
$E_n^{(q)}(f)$	$\inf_{P_n\in\mathbb{P}_n\cap\Delta^{(q)}} \\|f - P_n\\|$ (величина найкращого q-монотонного наближення)
$Y_s,\ Y$	набір $\{y_i\}_{i=1}^s$ з $s \in \mathbb{N}$ точок $-1 =: y_{s+1} < y_s < \cdots < y_1 < y_0 := 1$, а в періодичному випадку – набір $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ точок $-\pi < y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi$, і точок визначених, для решти $i \in \mathbb{Z}$, рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ $(y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...)$

$\mathbb{Y}_s$	множина всіх Y_s
Y_0	$\varnothing$
$\Delta^{(0)}(Y_s),\ \Delta^{(0)}(Y)$	множина всіх функцій $f \in C$, що невід'ємні на $[y_1, y_0]$, недодатні на $[y_2, y_1]$, невід'ємні на $[y_3, y_2]$ і т.д.
$\Delta^{(1)}(Y_s),\ \Delta^{(1)}(Y)$	множина всіх функцій $f \in C$, що неспадні на $[y_1, y_0]$, незростаючі на $[y_2, y_1]$, неспадні на $[y_3, y_2]$ і т.д.
$\Delta^{(2)}(Y_s),\ \Delta^{(2)}(Y)$	множина всіх функцій $f \in C$, що опуклі до гори на $[y_1, y_0]$, опуклі до низу на $[y_2, y_1]$, опуклі до гори на $[y_3, y_2]$ і т.д.
$\Delta^{(q)}(Y_s),\ \Delta^{(q)}(Y)$	множина всіх функцій $f \in C \cap C^{(q-2)}$ таких, що $f^{(q-2)} \in \Delta^{(2)}(Y),\ q \geqslant 3$
$\Delta^{(q)}(Y_0)$	$\Delta^{(q)},\ q \geqslant 0$
$E_n^{(q)}(f, Y_s)$	$\inf_{P_n \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|,\ q \geqslant 0$ (величина найкращого рівномірного ко-q-монотонного наближення)
$\Delta_h^k(f, x)$	$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f(x - kh/2 + ih)$, якщо $|x \pm kh/2| < 1$, і 0, інакше (k-а симетрична різниця)
$\omega_k(f, t)$	$\sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \|\Delta_h^k(f, \cdot)\|$ (k-й модуль гладкості)
$\omega_k(f, t)_p$	$\sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \|\Delta_h^k(f, \cdot)\|_{L_p(S)},\ 0 < p \leqslant \infty$
$\omega(f, t)$	те ж що і $\omega_1(f, t)$ (звичайний модуль неперервності f)
$\omega_0(f, t)$	$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty[-1,1]}$
Φ^k	множина всіх k-мажорант, $k \in \mathbb{N}$, тобто неперервних і неспадних на $[0, \infty)$ функцій $\phi(t)$ таких, що $\phi(0) = 0$ і $t^{-k}\phi(t)$ не зростає при $t > 0$
$\varphi(x),\ \varphi_n(x)$	$\sqrt{1 - x^2},\ \sqrt{1 - x^2}/n$
$\rho_n(x)$	$\sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2$
$\omega_k^{\varphi}(f, t)$	$\sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \|\Delta_{h\varphi(\cdot)}^k(f, \cdot)\|$ (k-й модуль гладкості Дітціана-Тотіка)
W^r	множина означених на $[-1, 1]$ функцій f, що мають абсолютно неперервну $f^{(r-1)}$ і $f^{(r)} \in \mathbb{L}_\infty[-1, 1],\ r \geqslant 1$, (інколи $\|f^{(r)}\| \leqslant 1$), у періодичному випадку – аналогічно
c	абсолютні додатні сталі, що можуть бути різними навіть якщо стоять в одному рядку
$c(\cdot)$	додатні сталі, що залежать тільки від параметрів в дужках
$a_n \sim b_n$	існує абсолютна, додатня стала c така, що $c^{-1}a_n \leqslant b_n \leqslant ca_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$
$a_n \overset{\alpha_1, \alpha_2, \dots}{\sim} b_n$	існує додатня стала $c = c(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ така, що $c^{-1}a_n \leqslant b_n \leqslant ca_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$
$a_n = O(b_n)$	існують $c \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ такі, що $|a_n| \leqslant c\,|b_n|$, для $n \geqslant m$

Зауваження. Надалі, букви "q" , "s" , "r" і "k" завжди позначатимуть невід'ємні цілі числа. Буква "q" буде описувати форму функції (тобто $\Delta^{(q)}$), буква "s" – кількість змін монотонності, опуклості, q-монотонності (тобто Y_s, $\mathbb{Y}_s$, $\Delta^{(q)}(Y_s)$), буква "r" – r-ту похідну (тобто $f^{(r)}$, W^r, C^r) і буква "k" – порядок відповідного модуля гладкості, або йому подібної величини (тобто ω_k, ω_k^{φ}, Φ^k, $1/n^k$, $\rho_n^k(x)$).

Нище наведено типи правих частин оцінок похибок формозберігаючого наближення (ФЗН) і наближення без обмежень (класичного), що розглядаються.

Тип оцінки	**Форма оцінки**
Джексона-Стечкіна (рівномірна)	$n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, 1/n)$
Дітціана-Тотіка (рівномірна)	$n^{-r}\omega_k^{\varphi}(f^{(r)}, 1/n)$
Нікольського (поточкова)	$\rho_n^{-r}(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)),\ x \in [-1, 1]$
поточкова інтерполяційна (на кінцях відрізку)	$\varphi_n^{-r}(x)\omega_k(f^{(r)}, \varphi_n(x)),\ x \in [-1, 1]$

Насамкінець, оскільки "звичайний" модуль гладкості є в дисертації основною величеною для оцінки похибок наближень, дамо його точне означення.

Нехай $L_\infty := L_\infty[-1, 1]$ – простір суттєво обмежених на $[-1, 1]$ функцій з нормою $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L_\infty[-1,1]} := \operatorname{esssup} f$ і, зокрема, якщо $f \in C$, то $\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]}$.

Для будь-якої обмеженої на $[a, b]$ функції f і $k \in N$, k-та симетрична різниця f в точці x з кроком h має вигляд:

$$\Delta_h^k f(x) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x - \frac{k}{2}h + ih), & x \pm \frac{k}{2}h \in [a, b], \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

а (звичайний) k–ий модуль неперервності (або гладкості) функції $f \in C[a, b]$ визначається як

$$\omega_k(f, t, [a, b]) := \sup_{h \in [0,t]} \|\Delta_h^k f\| = \sup_{h \in [0,t]} \max_{x \in [a,b]} |\Delta_h^k f(x)|, \quad t \in [0, (b-a)/k],$$

$$\omega_k(f, t, [a, b]) \equiv \omega_k(f, (b-a)/k, [a, b]), \quad t \geqslant (b-a)/k,$$

а у випадку 2π-періодичної f – як

$$\omega_k(f, t) := \omega_k(f, t, \mathbb{R}) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \omega_k(f, t, [a, a + 2\pi]).$$

Вступ

Актуальність теми. При наближенні заданої на відрізку функції алгебраїчними многочленами, навіть інтуїтивно видається, що було б зовсім не зайвим зберегти у наближаючих її многочленів певні геометричні властивості цієї функції, наприклад, зміну знаку, або її монотоність, опуклість, кускову опуклість, тощо – більш коротко – зберігти її *форму*. Крім того, скажімо, опуклі функції навіть зовні виглядають "краще" монотонних, а ті – довільних (можливо тому, що опукла функція, визначена на інтервалі, обов'язково локально абсолютно неперервна на ньому). Також, таке *формозберігаюче наближення* (далі ФЗН) відіграє, згідно ДеВору, важливу роль у комп'ютерному промисловому дизайні і є корисним також в інших областях знань.

Першу задачу з ФЗН розв'язав Чебишев у 1873 році, знайшовши для кожного $n \geqslant 2$, два *зростаючі* многочлени $p_{\pm}(x) = \pm x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, з мінімальною рівномірною нормою на $[-1, 1]$ серед всіх зростаючих многочленів такої ж форми. Бернштейн у 1927 році зробив те ж саме, тільки для опуклих (2-монотонних) та q-монотонних ($q > 2$) многочленів, $n \geqslant q + 1$. А Лоренц у 1953 році помітив, що поліноміальні оператори Бернштейна зберігають монотонність, опуклість та взагалі q-монотонність ($q > 2$) функції, тобто аналог теореми Вейєрштрасса про наближення многочленами справджується і для q-монотонного ($q > 0$) ФЗН. Він разом з Целлером також зазначив, що ФЗН, принаймні монотонне, не зводиться до наближення без обмежень, оскільки існує неспадна функція $f \in C^1[-1, 1]$, для якої $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty$, де E_n ($E_n^{(1)}$) – величина найкращого рівномірного наближення f будь-якими (тільки монотонними) многочленами степеня $\leqslant n$. Згодом Шевчук виявив, що ФЗН навіть ще "гірше", оскільки, замість відомої нерівності $E_n(f) < \frac{c}{n} E_{n-1}(f')$, існує неспадна f, для якої $E_n^{(1)}(f) > \frac{1}{200} E_{n-1}(f')$.

Таким чином, основним питанням ФЗН виявилось таке питання: *з якими швидкостями наближення можливо будувати наближаючі елементи у ФЗН?* Тобто чи можливо досягти таких самих порядків наближень (найкращих), як і у вже побудованих класичних теоріях наближень без обмежень Джексона-Зігмунда-Ахієзера-Стечкіна, Нікольського-Тімана-Дзядика-Фройда-Брудного та інших.

Більше 30-ти авторів, серед яких Бітсон, Бондаренко, Венц, Ву, Гілевич, Гонска, ДеВор, Залізко, Ілієв, Коновалов, Копотун, Левіатан, Мхаскар, Нісім, Ньюмен, Пал, Плєшаков, Попов, Примак, Раймон, Роульє, Ху, Шадрін, Швєдов, Шевчук, Манія, Цу, Ю, Ющенко та інші, почали з'ясовувати це питання і виявилось, що в одних випадках (формах, гладкостях, наближаючих елементах) досягти таких порядків можливо, в інших – ні. Їх результати і результати кандидатської дисертації автора склали завершені, або майже завершені теорії монотонного, опуклого, кусково монотонного і q-монотонного ($q > 2$) ФЗН алгебраїчними многочленами і сплайнами.

Тим часом у кусково опуклому, у *майже* ФЗН (тобто, коли наближаючі елементи можуть не зберігати форму функції на "маленькій" множині) і частково у кусково q-монотонному ФЗН ($q = 1,\ q > 2$) було досліджено лише рівномірне (не поточкове) наближення на відрізку; а у ФЗН періодичних функцій – були отримані лише перші оцінки похибок наближень, які за порядками були далекі від найкращих, і було зовсім не досліджено їх майже ФЗН.

Саме отриманню найкращих за порядком оцінок (поточкових і рівномірних) в цих видах ФЗН і доведенню випадків, де це неможливо, а отже – завершенню та побудові цих теорій і присв'ячена дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь", номер державної реєстрації 0116U003121; "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U002119.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є побудова алгебраїчних многочленів, тригонометричних поліномів і сплайнів, які забеспечують найкраще за порядком поточкове і рівномірне наближення неперервних на відрізку і на дійсній осі функцій різної гладкості і при цьому зберігають такі їх властивості, як кускову позитивність, монотонність, опуклість, тощо, а також побудова контрприкладів у випадках, де такі наближаючі елементи не існують.

Об'єктом дослідження є формозберігаюче наближення алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами та сплайнами.

Предметом дослідження є конструкції кусково позитивних, монотонних, опуклих, q-монотонних ($q > 2$) многочленів, поліномів і сплайнів та приклади функцій такої ж форми, що "погано" ними наближуються.

Завдання дослідження.

- Довести для наближення алгебраїчними многочленами класичні за формою поточкові оцінки кусково опуклого ФЗН, інтерполяційну (на кінцях відрізку) поточкову оцінку кусково монотонного ФЗН і поточкові оцінки кусково позитивного, кусково монотонного та кусково опуклого майже ФЗН.

- Довести для наближення тригонометричними поліномами класичні за формою рівномірні оцінки ФЗН, посилити відомі оцінки та започаткувати майже ФЗН.

- Знайти сплайни, що забезпечують найкращі за порядком локальні і глобальні оцінки 3-монотонного наближення з різними модулями гладкості і в різних метриках.

- Побудувати контрприклади у випадках, де відповідні класичні за формою оцінки хибні та у випадках, де покращення характеру залежності сталих від основних параметрів в отриманих оцінках неможливе.

Методи дослідження. Використовуються методи математичного аналізу і теорії функцій, зокрема, інтерполяція, поліноміальні ядра типу Джексона, Дзядика і ядра, запропоновані в дисертації, проміжне наближення сплайнами, нерівності Уітні, Маршо, Дзядика, апарат скінченних і розділених різниць, відомі і запропоновані в дисертації представлення сплайнів, класичні прямі та обернені теореми, теореми спільного наближення функції та її похідних, ідея ДеВора представлення похідної сумою "великої" і "малої" функцій, "монотонноне" розбиття одиниці ДеВора і Ю та Шевчука, метод "горбу, що ковзає" при доведенні контрприкладів та інші.

Наукова новизна одержаних результатів.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

- Встановлено для *кусково опуклого* (далі *коопуклого*) наближення многочленами та сплайнами поточкові оцінки типу Нікольського-Тімана-Дзядика-Фройда-Брудного через k-й модуль неперервності r-ї похідної функції для всіх k та r, для яких вони справджуються.

- Доведено для *кусково монотонного* (далі *комонотонного*) та *коопуклого* наближень аналог інтерполяційної оцінки ДеВора ($r = 0,\ k = 2$).

- Одержано для 3-*монотонного* наближення сплайнами степеня $\geqslant 3$ мінімального дефекту з рівномірними та чебишевськими вузлами рівномірні оцінки наближення через "звичайний" 4-й модуль гладкості та, відповідно, 4-й модуль гладкості Діціана-Тотіка, які хибні вже для 5-го модуля гладкості. Доведено, що обидві оцінки не справджуються в інтегральних метриках L_p, $p < \infty$, однак показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність контрольована, на відміну від сплайнів з вільними вузлами.

- Доведено для *майже коопуклого* наближення (тобто коли многочлен/сплайн може не зберігати коопуклість функції в "маленьких" околах точок перегину) оцінку типу Брудного з $k = 4$, яка є хибною для $k > 4$, а для "чисто" коопуклого наближення вона хибна навіть для $k > 3$.

- Одержано для *майже копозитивного* наближення оцінку типу Нікольського з довільним $k \in \mathbb{N}$ (для "чисто" копозитивного наближення вона хибна з $k > 3$).

- Встановлено для *копозитивного* наближення тригонометричними поліномами оцінку типу Джексона з $k = 3$ (для $k > 3$ вона хибна).

- Доведено для *комонотонного* наближення періодичних функцій гладкості r оцінку типу Джексона з $r = 0$, $k = 2$, з $r = 1$, $k = 3$, з $r \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ (для всіх інших пар, тобто $r = 0$, $k > 2$ та $r = 1$, $k > 3$, вона хибна).

- Доведено для *майже комонотонного* та *майже коопуклого* наближень неперервних періодичних функцій оцінку типу Джексона через модулі неперервності порядку $k = 3$ та $k = 4$, відповідно (для "чистих" видів цих ФЗН вона справджується з меншими k).

- Доведено низку контрприкладів про неможливість підвищення порядків в отриманих оцінках, про неможливість "покращення" характеру залежності сталих в них від основних параметрів та про нові явища у ФЗН.

- Знайдено нове і просте представлення кусково-поліноміальних функцій (сплайнів), модифікації якого є хорошим методом отримання оцінок ФЗН, також це представлення має потенціал чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі.

- Запропоновано нове строго додатнє поліноміальне ядро, використання якого, зокрема, уможливлює побудову тригонометричних поліномів з найкращими порядками ФЗН.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Конструктивні доведення більшості її тверджень і особливо деякі представлення наближаючих елементів можуть слугувати основою для їх чисельної реалізації. Також результати дисертації мають значення в теорії наближень і можуть бути використані в теоретичних дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Тематика визначена науковим консультантом здобувача, всі результати отримано здобувачем самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Third international conference “Curves and Surfaces”, 27 June- 3 July 1996, Chamonix Mont Blanc, France;

— міжнародній науковій конференції “Теорія наближення функцій та її застосування, присв’ячена пам’яті В.К.Дзядика”, 27-31 Травень 1999, Київ, Ін-т математики НАН України;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approx. Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics” (FM2001), 19-22 October 2001, Kyiv, Ukraine;

— міжнародній науковій конференції пам’яті В.Я.Буняковского (1804-1889) “Bunyakovsky Intern. Conf.”, August 16-21, 2004, Kyiv, Ukraine;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and statistics II, dedicated to the memory of A.Ya. Dorogovtsev (1935-2004)” (FM2004), October 1-5, 2004, Kyiv, Ukraine;

— MITACS 2007 Joint Conference of Canadian Mathematical Society, May 31-June 3, Winnipeg, Manitoba, Canada;

— 9th Conference on “Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications”, July, 2nd-6th 2007 – Marseille, France;

— міжнародній науковій конференції “Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III, dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk (1919-1998)” (FM2009), August 22-26, 2009, Camp Hart, Village Svityaz, Shatskyi Region, Volyn, Ukraine;

— Canadian Mathematical Society Summer Meeting, The Delta Winnipeg, Manitoba, Canada – 2014 June 6-9, cms.math.ca;

— Final AMMODIT Conference "Mathematics for Life Sciences" , March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine;

— семінарах Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, Marseille, France, (керівник семінару Prof. $\boxed{\text{J. Gilewicz}}$);

— семінарі Université de Toulon et du Var, Toulon, France, (керівник семінару Prof. P. Penel);

— семінарах University of Manitoba, Winnipeg, Canada, (керівник семінару Prof. K. Kopotun);

— семінарі Universidad Autónoma de Madrid, Madrid UAM, Spain, (керівник семінару Prof. K. S. Kazarian);

— засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України, 16 травня 2017;

— семінарі “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 20 березня 2019 (керівники семінару проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко, проф. І. О. Шевчук,);

— семінарі відділу теорії функцій в Інституті математики НАН України, 29 березня 2019 (керівник семінару проф. А. С. Романюк);

— міжвузівському семінарі з теорії функцій в Дніпропетровському національному університеті ім. Олеся Гончара, 10 квітня 2019 (керівник семінару чл.-кор. НАН України В. П. Моторний);

— семінарі з теорії функцій в Одеському національному університеті ім. І.І. Мечникова, 15 квітня 2019 (керівник семінару проф. А. А. Кореновський);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 26 квітня 2019 (керівники семінару ак. НАН України Ю. М. Березанський, ак. НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань в Інституті математики НАН України, 6 травня 2019 (керівник семінару ак. НАН України А. М. Самойленко).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 35 наукових публікаціях, із яких 22 статті [12]–[21], [74]–[85] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук (12 — у співавторстві і 10 — самостійно), 18 з них [76], [17], [18], [19]–[21], [74]–[85] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Всі твердження, які увійшли в дисертацію і не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідним посиланням на джерело.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до розділів та списку використаних джерел, що містить 178 найменувань. Повний обсяг роботи становить 308 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю душевну подяку науковому консультанту Анатолію Михайловичу Самойленку, моєму першому вчителю Ігорю Олександровичу Шевчуку і моїм співавторам.

Розділ 1

Огляд літератури

В розділі наведено досягнення класичної теорії наближення без обмежень тригонометричними поліномами (підрозділ 1.1), алгебраїчними многочленами (підрозділ 1.2) а також досягнення з ФЗН (формозберігаючого наближення), які були зроблені переважно на початковому етапі його розвитку (підрозділ 1.3). Опис більш сучасних результатів ФЗН міститься у вступах до кожного (відповідного) підрозділу дисертації, щоб означити місце між ними результатів, отриманих у цих підрозділах.

Зауважимо, що найбільш кваліфікований та об'ємний огляд тематики наведено в оглядовій статті Копотуна, Левіатана, Примака, Шевчука [112] і хоча досягнення з ФЗН сплайнами та тригонометричними поліномами там не охоплені, як і результати з майже ФЗН, ми в цьому розділі скористаємося певними посиланнями з цієї чудової статті. Також для опису класичних теорем наближення без обмежень скористаємося кількома реченнями (трохи скороченими) з відомої книги Дзядика [25], оскільки краще ніж там ми це написати не зможемо.

1.1 Наближення тригонометричними поліномами без обмежень

Теореми Вейєрштрасса про наближення поліномами встановлювали, хоча і важливий, але лише якісний факт, що будь-яка неперервна на відрізку (або неперервна періодична) функція може бути як завгодно точно наближена многочленами (відповідно, поліномами), тоді як питання "а з якою саме точністю це можно зробити многочленами (поліномами) заданого степеня (порядку)?", "від яких властивостей самої функції це залежить?" і "як саме будувати (означати) такі поліноми?" залишались відкритими. Першим достатньо повну відповідь на ці питання у періодичному випадку дав Джексон [98] (див. також [99]), вказавши, у тому числі, і метод побудови таких поліномів хорошого наближення і заданого порядку, тобто конструктивно довівши наступну теорему 1.1.1.

Теорема 1.1.1. [Джексона] *Якщо 2π-періодична функція $f \in C^r_{[0,2\pi]}$, де r – ціле невід'ємне, то при кожному натуральному $n > r$ тригонометричний поліном $T_n(f,r,t) =: T_n(t)$ порядку $n' = 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2 = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] < n$ вигляду*

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n'} \left(1 - \lambda_k^{r+1}\right)(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

де a_k і b_k – коефіцієнти Фурьє функції $f(t)$, а λ_k – числа, що визначаються ядром Джексона

$$J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-2} j_k \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n'} j_k \cos kt$$

за формулою $\lambda_k = 1 - j_k$, наближає f так, що

$$\|f - T_n\| \leqslant 12^{r+1} \cdot \frac{1}{n^r}\omega_1(f^{(r)}, 1/n), \tag{1.1.1}$$

а, якщо $f : \omega_2(f^{(r)}, t) \leqslant ct,\ c = const$, то і так, що

$$\|f - T_n\| \leqslant 12^r \cdot 64 \cdot \frac{1}{n^r}\omega_2(f^{(r)}, 1/n). \tag{1.1.2}$$

Зазначимо, що точні сталі в цій теоремі отримані Корнійчуком [29] (див. також [28], або в його книзі [30]). Також зазначимо, що нерівність (1.1.2) доведена Зігмундом [178], який помітив, що у випадку $f : \omega_2(f^{(r)}, t) \leqslant ct,\ c = const$, її доведення майже нічим не відрізняєтья від доведення Джексона нерівності (1.1.1). Згодом Ахієзер [1] узагальнив нерівність (1.1.2) до довільного другого модуля неперервнасті, а Стєчкін – до довільного k-го модуля з $k \geqslant 3$ і теорема Джексона набула завершений класичний вигляд:

Теорема 1.1.2. [Пряма теорема] *Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N}_0$. Якщо 2π-періодична функція f належить простору $C^r_{[0,2\pi]}$, то при кожному натуральному n знайдеться тригонометричний поліном $T_n(t)$ порядку $< n$ такий, що*

$$\|f - T_n\| \leqslant c\frac{1}{n^r}\omega_k(f^{(r)}, 1/n), \tag{1.1.3}$$

де $c = c(k,r)$ – стала, яка залежить тільки від k і r.

У 1912 році Бернштейн [2] вперше поставив задачу про обернені теореми, а саме, у періодичному випадку він встановив, що якщо

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{n^{r+\alpha}}, \quad r \in \mathbb{N}_0,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1.1.4}$$

то при будь-якому малому $\epsilon > 0$, f є такою, що

$$\omega_1(f^{(r)}, t) \leqslant c\, t^{\alpha-\epsilon}, \quad c = c(r, \alpha) = const. \tag{1.1.5}$$

У 1919 році Валле-Пуссен [165] с тими самими умовами посилив (1.1.5) для $\alpha \neq 1$, прибравши ϵ, тобто функція при (1.1.4) вже гарантовано потрапляла до множини $W^r H^\alpha$, (або, що те саме, до $W^r \operatorname{Lip} \alpha$).

В наступній оберненій теоремі зберемо результати цих двох робіт та роботи Стєчкіна [42] 1951 року.

Теорема 1.1.3. [Обернена теорема] *Нехай $r \in \mathbb{N}_0$ і функція $\omega = \omega(t)$ (типу першого модуля неперервності) при $r = 0$ задовольняє умови:*

(i) $\omega \in C[0, \infty)$, $\omega(0) = 0$,

(ii) ω *неспадна на* $(0, \infty)$,

(iii) *при* $\forall t > 0$,

$$\omega(2t) \leqslant c\omega(t), \quad c = const,$$

а у випадку $r \geqslant 1$ ще й умову

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt.$$

Тоді, якщо при деякому $r \geqslant 0$ для будь-якої 2π-періодичної функції f існує послідовність поліномів T_n порядку n, які при кожному $n \geqslant r+1$ наближають її так, що

$$\|f - T_n\| \leqslant \frac{1}{n^r} \omega\left(1/n\right),$$

то $f \in C^r_{[0,2\pi]}$ і k-й модуль неперервності її r-тої похідної $f^{(r)}$ задовольняє нерівність

$$\omega_k(f^{(r)}, t) \leqslant c(k, r) \begin{cases} t^k \displaystyle\int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du, & \text{якщо} \quad r \geqslant 1, \\ \left[t^k \displaystyle\int_t^1 \frac{\omega(u)}{u^{k+1}}\, du + \int_0^t \frac{\omega(u)}{u}\, du \right], & \text{якщо} \quad r = 0, \end{cases}$$

де $c = c(k, r)$ – стала, яка залежить тільки від k і r.

Відзначимо також, що у 1945 році Зігмунд [178] довів обернені теореми для множин функцій $f:\ f \in W^r$ і $\omega_2(f^{(r)},t) \leqslant c\,t,\ c = const$ (класів Зігмунда), Салем [159,160] – для H_1^ω, Тімани (див. в книзі [47]) – для $W^r H_k^\omega$ у метриці $L_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, а Стэчкін [43] – те ж для $W^r H_k^\omega$, але в рівномірній метриці.

Теореми 1.1.2 та 1.1.3 (з $\omega(u) := u^\alpha$) тягнуть наступний результат.

Наслідок 1.1.1. [Конструктивна характеристика] *Нехай $r \in \mathbb{N}_0,\ 0 < \alpha < 1$ і нехай задано функцію f. Тоді, для кожного $n > r$ поліном T_n порядку n такий, що*

$$\|f - T_n\| \leqslant c(r,\alpha)\frac{1}{n^{r+\alpha}},$$

знайдеться тоді і тільки тоді коли $f \in C^r_{[0,\pi]}$ і

$$\omega_1(f^{(r)},t) \leqslant c(r,\alpha)t^\alpha,$$

де $c = c(r,\alpha)$ – стала, яка залежить тільки від r і α.

Таким чином, до початку 1960-х років була завершена побудова класичної конструктивної теория наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами.

1.2 Наближення алгебраїчними многочленами без обмежень

Наведемо класичні прямі та обернені теореми наближення многочленами функцій різної гладкості, що містять поточкові оцінки похибки наближення типу Нікольського. Нагадаємо, що тільки поточкові оцінки (зі звичайними модулями неперервності) забеспечують змикання прямих та обернених теорем, що дає конструктивну характеристику приналежності функції до певної множини за можливим порядком її наближення. Також нагадаємо, що наслідками поточкових оцінок є рівномірні оцінки типу Джексона-Стєчкіна, які, скажімо, для неперервних функцій біля кінців відрізку є принаймні на порядок гірші ніж поточкові.

У 1946 році, Нікольський [33] довів, що для будь-якої функції f такої, що $\omega(f,\delta) \leqslant \delta$, можливо побудувати послідовність многочленів $p_n \in \mathbb{P}_n$ таку, що для всіх $x \in [-1,1]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + |x|O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

У 1951 році Тіман (для $k = 1$) [46], Дзядик (для $k = 2$) [24] (у 1958) і, незалежно, Фройд (для $k = 2$) [88] (у 1959) та Брудний (для $k > 2$) [7] (у 1963) довели наступну пряму теорему для наближення алгебраїчними многочленами, що включає поточкові оцінки типу Нікольського.

Теорема 1.2.1. [Пряма теорема] *Нехай* $k \in \mathbb{N}$ *і* $r \in \mathbb{N}_0$. *Якщо* $f \in C^r[-1,1]$, *то для кожного* $n \geqslant k + r$ *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_n$, *такий, що при всіх* $x \in [-1,1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k\big(f^{(r)}, \rho_n(x)\big),$$

де $c = c(k,r)$ *– стала, яка залежить тільки від* k *і* r.

Ці поточкові оцінки безпосередньо тягнуть оцінки типу Джексона-Стєчкіна, які теж вважаються класичними в сучасній теорії наближень.

Наслідок 1.2.1. [Оцінки типу Джексона-Стєчкіна] *Якщо* $f \in C^r[-1,1]$, *то*

$$E_n(f) \leqslant \frac{c(k,r)}{n^r}\omega_k\big(f^{(r)}, n^{-1}\big), \quad n \geqslant k + r,$$

де $c = c(k,r)$ *– стала, яка залежить тільки від* k *і* r.

У 1962 році Тригуб [48] (для $k = 1$) і Гопенгауз [9] (для $k \geqslant 1$) довели узагальнення теореми 1.2.1 для одночасного наближення функції та її похідних многочленами та їх відповідними похідними. Для $k = 1$ і з $1/n$ замість $\rho_n(x)$, цей результат був доведений також Гельфондом [8].

Теорема 1.2.2. [Одночасне наближення функції та її похідних] *Нехай* $k \in \mathbb{N}$ *і* $r \in \mathbb{N}_0$. *Якщо* $f \in C^r[-1,1]$, *то для кожного* $n \geqslant k + r$ *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_n$, *що при кожних* $0 \leqslant \nu \leqslant r$ *та* $x \in [-1,1]$, *задовольняє нерівність*

$$|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^{r-\nu}(x)\omega_k\big(f^{(r)}, \rho_n(x)\big),$$

де $c = c(k,r)$ *– стала, яка залежить тільки від* k *і* r.

Наступний, більш точний результат з одночасного наближення многочленами (теорема 1.2.3) був доведен Копотуном [105] у 1996 році. Зауважимо, що хоча цей результат і не наведено у монографії Шевчука [56] 1992 року, він може бути доведений також подібно до [56, Теорема 15.3] з використанням [56, Лем 15.3 і 4.2’].

Теорема 1.2.3. [Одночасне наближення функції та її похідних] *Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N}_0$. Якщо $f \in C^r[-1,1]$, то для кожного $n \geqslant k+r$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$, що для $0 \leqslant \nu \leqslant r$ і $x \in [-1,1]$ задовольняє нерівність*

$$|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)| \leqslant c(k,r)\omega_{k+r-\nu}\big(f^{(\nu)}, \rho_n(x)\big),$$

де $c = c(k,r)$ – стала, яка залежить тільки від k і r.

Зауваження 1.2.1. *Одним з наслідків теореми 1.2.3 є те, що якщо $k, q \in \mathbb{N}$, $f \in C^q[-1,1]$ і $f^{(q)}$ є* строго *додатня на $[-1,1]$, то для достатньо великого n (що залежить від k, q і f), знайдеться многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ з додатньою q-ою похідною на $[-1,1]$ (тобто $P_n \in \Delta^{(q)}$) такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,q)\omega_k\big(f, \rho_n(x)\big).$$

Нагадаємо, що функцію ϕ називають k-мажорантою (з множини Φ^k всіх k-мажорант), якщо вана задовольняє наступни три умови:

(i) $\phi \in C[0,\infty)$, $\phi(0) = 0$,

(ii) ϕ неспадна на $(0,\infty)$,

(iii) $x^{-k}\phi(x)$ незростаюча на $(0,\infty)$.

В наступній оберненій теоремі зберемо результати, що були доведені в роботах Дзядика [23] 1956 року, Тімана [45] і Лебідя [31] 1957 року та Брудного [6] 1959 року.

Теорема 1.2.4. [Обернена теорема] *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $\phi \in \Phi^k$, і нехай задано функцію f. Якщо для кожного $n \geqslant k+r$ існує многочлен $p_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що*

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \rho_n^r(x)\phi\left(\rho_n(x)\right), \quad x \in [-1,1],$$

то

$$\omega_k(f^{(r)}, \delta) \leqslant c(k,r)\left(\int_0^\delta r u^{-1}\phi(u)\,du + \delta^k \int_\delta^1 u^{-k-1}\phi(u)\,du\right), \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1/2,$$

де $c = c(k,r)$ – стала, яка залежить тільки від k і r.

Зокрема, якщо $\displaystyle\int_0^1 r u^{-1}\phi(u)\,du < \infty$, то $f \in C^r[-1,1]$.

Теореми 1.2.1 та 1.2.4 (з $\phi(u) := u^\alpha$) тягнуть наступний результат.

Наслідок 1.2.2. [Конструктивна характеристика] *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha < k$ і нехай задано функцію f. Тоді, для кожного $n \geqslant k + r$ многочлен $p_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що*

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant c(k, r, \alpha)\rho_n^{r+\alpha}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

знайдеться тоді і тільки тоді коли $f \in C^r[-1, 1]$ і

$$\omega_k(f^{(r)}, \delta) \leqslant c(k, r, \alpha)\delta^\alpha, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1/2.$$

де $c = c(k, r, \alpha)$ – стала, яка залежить тільки від k, r і α.

Таким чином, до початку 1970-х років була завершена побудова класичної конструктивної теория наближення на відрізку функцій алгебраїчними многочленами.

1.3 Формозберігаюче наближення поліномами

Зважаючи на те, що історія ФЗН тригонометричними поліномами дуже коротка, а у деяких видів ФЗН вона і зовсім вітсутня, ми наведемо її безпосередньо на початку кожного відповідного підрозділу, щоб, як вже зазначалось, означити в ній місце результатів, отриманих в цих підрозділах. Отже в цьому підрозділі йдетиметься лише про історію ФЗН алгебраїчними многочленами.

У 1873 році Чебишев [49] (або див. в [50]) знайшов алгебраїчний многочлен з найменьшою рівномірною нормою на $[-1, 1]$ серед всіх *зростаючих* многочленів вигляду $\epsilon x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ з $\epsilon = 1$, або -1. А саме, він показав, що

$$\inf\left\{\|p_n\| \ : \ p_n(x) = x^n + q_n(x)\,,\ q_n \in \mathbb{P}_n \text{ і } p_n \in \Delta^{(1)}\right\}$$
$$= \begin{cases} 2\left(\dfrac{m!}{(2m-1)!!}\right)^2, & \text{якщо} \quad n = 2m, \\ \left(\dfrac{m!}{(2m-1)!!}\right)^2, & \text{якщо} \quad n = 2m + 1, \end{cases}$$

і

$$\inf\left\{\|p_n\| \ : \ p_n(x) = x^n + q_n(x)\,,\ q_n \in \mathbb{P}_n \text{ і } (-p_n) \in \Delta^{(1)}\right\}$$
$$= \begin{cases} 2\left(\dfrac{m!}{(2m-1)!!}\right)^2, & \text{якщо} \quad n = 2m, \\ \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{m!}{(2m-1)!!}\right)^2, & \text{якщо} \quad n = 2m + 1. \end{cases}$$

У 1927 році Бернштейн [62] (або [3, стор. 339-349]) отримав аналогічні результати для опуклих і q-монотонних многочленів, $q \geqslant 3$. Також, доволі добре відомо (див., наприклад, Поповічіу [148, 149], Лоренц [128, стор. 23]), що якщо $f \in \Delta^{(q)}$, то її многочлен Бенштейна (означений Бенштейном у 1912 році в [61], або див. [3, стор. 105-106])

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f\left(\frac{n-2j}{n}\right)(1+x)^{n-j}(1-x)^j$$

є теж з $\Delta^{(q)}$, а оскільки многочлени Бернштейна будь-якої $f \in C[-1,1]$ рівномірно її наближують (нажаль зі швидкістю не кращою ніж $1/n^2$, навіть для дуже гладких f), то і теорема Веєрштрасса про наближення многочленами справджується для ФЗН (принаймні q-монотонного). Тобто для кожної $f \in \Delta^{(q)}$,

$$E_n^{(q)}(f) \to 0, \quad n \to \infty.$$

У 1965 році Шиша [163] отримав першу рівномірну оцінку (типу Джексона) похибки q-монотонного наближення в класичному вигляді, однак за порядком гіршу на n^q ніж відповідна оцінка в наближенні без обмежень. А саме він довів, що якщо $f \in C^r \cap \Delta^q$, $1 \leqslant q \leqslant r$, то

$$E_n^{(q)}(f) \leqslant c(q,r)\,\frac{1}{n^{r-q}}\omega_1(f^{(r)}, 1/n). \tag{1.3.1}$$

Сучасний етап розвитку ФЗН починається з 1968 року і пов'язан з роботами Лоренца, Целлера і ДеВора. Так Лоренц і Целлер [130] (для $r = 0$), Лоренц [129] ($r = 1$) і ДеВор [70] ($r > 1$) довели точний аналог оцінки типу Джексона для монотонного наближення на відрізку, а саме, показали, що для кожної функції $f \in \Delta^{(1)} \cap C^r[-1,1]$,

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\omega\big(f^{(r)}, 1/n\big), \quad n \geqslant r. \tag{1.3.2}$$

Також, Лоренц і Целлер [131], для кожного $q \geqslant 1$, знайшли функцію $f \in \Delta^{(q)} \cap C^q[-1,1]$, таку, що

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{E_n^{(q)}(f)}{E_n(f)} = \infty,$$

показавши, тим самим, що ФЗН (принаймні q-монотонне) не зводиться до наближення без обмежень. А ДеВор [69] для кожної $f \in \Delta^{(1)}$, довів (1.3.2) з другим модулем неперервності

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant c\,\omega_2\,(f, 1/n)\,, \quad n \geqslant 2.$$

Згодом виявилось, що ω_2 в останній нерівності неможливо замінити на ω_k з $k > 2$, оскільки Швєдов [52], для кожних $A > 0$ і $n \in \mathbb{N}$, означив функцію $f = f_{n,A} \in \Delta^{(q)}$ таку, що
$$E_n^{(q)}(f) \geqslant A\omega_{q+2}(f, 1). \qquad (1.3.3)$$

Попередні (не "оптимальні" за порядком) рівномірні оцінки у комонотонному наближенні були отримані в роботах Ньюмен, Пассов, Раймон [138], Пассов, Раймон, Рульє [140], Пассов, Раймон [141] та Ілієв [95], а у 1979 році Ньюмен [137] отримав першу "оптимальну" оцінку такого наближення. А саме, він показав, що якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то
$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(s)\,\omega_1(f, 1/n), \quad n \geqslant 1.$$
Швєдов [53] довів, що якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то
$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leqslant c(s)\,\omega_2(f, 1/n), \quad n \geqslant N,$$
де $N = N(Y_s)$, і, що ця оцінка вже не справджується з незалежною від Y_s сталою N.

Слід згадати також кілька статей до 1980-го року, які тією чи іншою мірою мають відношення до тематики: Рульє [152, 153, 154, 155, 156, 157], Лоренц і Целлер [132], Лім [127], Р. Лоренц [133], Целлер [174], ДеВор [68], Попов і Сєндов [146], Гехнер [89], Кімчі і Лєвіатан [100], Пассов і Рульє [142], Ішисакі [97], Ілієв [96], Мейерс і Раймон [136].

Історія "оптимальних" оцінок q-монотонного наближення, $q \geqslant 1$

Незважаючи на те, що рівномірні очінки наближення на відрізку типу Джексона-Стечкіна є безпосередними наслідками поточкових оцінок типу Нікольського, і перші і другі мають різні історії. До того ж перші, переважно, були встановлені раніше других. Отже почнемо з рівномірних оцінок. Тобто з історії їх встановлення і випадків при яких справджується наступне твердження 1.3.1 для функцій з $C[-1, 1]$ $(r = 0)$.

Твердження 1.3.1. *Нехай $q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in \Delta^{(q)} \cap C[-1, 1]$, то*
$$E_n^{(q)}(f) \leqslant c(k, q)\omega_k\left(f, n^{-1}\right), \quad n \geqslant \mathcal{N}. \qquad (1.3.4)$$

Випадок "+"

Випадок "+" позначатиме випадок коли (1.3.4) справджується з $\mathcal{N} = k + r$.

Для $(k = 1,\ q = 1)$, оцінка (1.3.4) з $\mathcal{N} = 1$ була доведена Лоренцом та Целлером [130]. Бітсон [58] довів (1.3.4) для $k = 1$ і всіх q. Для $(k = 2,\ q = 1)$, (1.3.4) з $\mathcal{N} = 2$, була встановлена ДеВором [69]. Згодом Шведов [51] узагальнив це до $k = 2$ і всіх $q \geqslant 1$.

Отже, для першого і другого модулів гладкості справджуються точно такі ж самі оцінки, як і при наближенні без обмежень. І випадки $(k = 1,\ q \in \mathbb{N})$ та $(k = 2,\ q \in \mathbb{N})$ є типу "+". Крім них відомі лише два інших випадки типу "+". А саме, Ху, Левіатан і Ю [93] і, незалежно, Копотун [103] довели (1.3.4) у випадку $(k = 3,\ q = 2)$, з $\mathcal{N} = 3$, а Бондаренко [63] довів (1.3.4) для $(k = 3,\ q = 3)$, з $\mathcal{N} = 3$.

Випадок "$-$"

Ву і Цу [168] (для $k \geqslant q + 3$ і $q \geqslant 1$), та Бондаренко і Примак [5] (для $k \geqslant 3$ і $q \geqslant 4$), довели, що існує функція $f \in \Delta^{(q)}$ така, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(q)}(f)}{\omega_k(f, 1/n)} = \infty. \tag{1.3.5}$$

Іншими словами, у випадках $(k \geqslant q+3,\ q \geqslant 1)$ і $(k \geqslant 3,\ q \geqslant 4)$, оцінка (1.3.4) взагалі не справджується навіть якщо дозволити $\mathcal{N}$ залежити від f.

Випадок "$\ominus$"

З негативного результату Швєдова (див. [52]) випливає, що у випадках $(k = 3,\ q = 1)$, $(k = 4,\ q = 2)$, і $(k = 5,\ q = 3)$, для кожного $A > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ існує функція $f = f_{n,A} \in \Delta^{(q)}$, така, що

$$E_n^{(q)}(f) \geqslant A\omega_k(f, 1). \tag{1.3.6}$$

У той же час, певні позитивні результати для перших двох з цих випадків були доведені Левіатаном і Шевчуком в [119] і [125]. А саме, ними було показано, що у випадках $(k = 3,\ q = 1)$ і $(k = 4,\ q = 2)$, якщо $f \in \Delta^{(q)}$, то (1.3.4) справджується зі сталою $\mathcal{N}$, що залежить від функції f.

Підкреслимо, що (1.3.6) гарантує, що в цих випадках, нерівність (1.3.4) не може бути вірною з незалежною від f сталою $\mathcal{N}$.

Будемо посилатися на всі такі випадки, використовуючи позначку "$\ominus$". Тобто, через "$\ominus$" позначимо випадки, коли (1.3.4) справджується з $\mathcal{N}$, що залежить від f (це означає, що не існує f, для якої вірна нерівність (1.3.5)), і взагалі не справджується з $\mathcal{N}$, що не залежить від f.

Всі випадки, про які йшлося, зручно зібрати у наступній таблиці 1.1.

$$\begin{array}{cccccccccc}
q & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
5 & + & + & - & - & - & - & - & \cdots \\
4 & + & + & - & - & - & - & - & \cdots \\
3 & + & + & + & ? & ?^* & - & - & \cdots \\
2 & + & + & + & \ominus & - & - & - & \cdots \\
1 & + & + & \ominus & - & - & - & - & \cdots \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & k
\end{array}$$

Рис. 1.1: q-монотонне набл. функцій з $C[-1,1]$ $(r = 0)$, справджуваність $E_n^{(q)}(f) \leqslant c(k,q)\,\omega_k(f, n^{-1})$, $n \geqslant \mathcal{N}$

Зауваження 1.3.1. *З (1.3.6) випливає, що "?*" в таблиці 1.1 будь що не можна буде замінити на "+". І тому лишаються нерозв'язаними дві задачі, пов'язані з (1.3.4). А саме, чи існує функція $f \in C[-1,1]$ з опуклою на $(-1,1)$ похідною, тобто $f \in \Delta^{(3)}$, така, що для кожної послідовності многочленів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}_n$ з*

$$P_n^{(3)}(x) \geqslant 0,$$

буде справджуватися рівність

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|f - P_n\|_{C[-1,1]}}{\omega_5\,(f, 1/n)} = \infty? \tag{1.3.7}$$

Іншими словами, чи випадок $(k = 5,\ q = 3)$ є строго негативним (" $-$ ")? І що можна сказати, якщо ω_5 в (1.3.7) замінити на ω_4?

Наступне твердження 1.3.2 є узагальненням твердження 1.3.1 для функцій з $C^r[-1,1]$ та W^r $(r \geqslant 0)$.

Твердження 1.3.2. *Якщо $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ і $f \in \Delta^{(q)} \cap C^r[-1,1]$, то*

$$E_n^{(q)}(f) \leqslant \frac{c(k,r,q)}{n^r}\omega_k\big(f^{(r)}, n^{-1}\big), \quad n \geqslant \mathcal{N}. \tag{1.3.8}$$

Нище наведемо при яких трійках (k, r, q) це твердження вірне, а при яких ні.

Нагадаємо, що подібна до (1.3.8) оцінка при невимушеному наближенні вірна з $\mathcal{N} = k + r$. І як вже зазначалось, ми кажимо, що для трійці (k, r, q), пропозиція 1.3.2

- "строго позитивна" ("+"), якщо (1.3.8) справджується з $\mathcal{N} = k + r$,

- "слабо негативна" ("$\ominus$"), якщо (1.3.8) справджується з $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f)$ і не справджується з незалежною від f сталою $\mathcal{N}$,

- "строго негативна" ("$-$"), якщо (1.3.8) взагалі не справджується, тобто є функція $f \in \Delta^{(q)} \cap C^r[-1,1]$ така, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^r E_n^{(q)}(f)}{\omega_k\left(f^{(r)}, n^{-1}\right)} = \infty. \tag{1.3.9}$$

Для повноти, розглянемо також випадок $k = 0$ в (1.3.8), тобто коли f з множини $\mathbb{W}^r$ – всіх $(r-1)$ раз неперервно диференційовних на $[-1,1]$ функцій f з абсолютно неперервними на $(-1,1)$ $f^{(r-1)}$ і таких, що $\|f^{(r)}\|_{\mathbb{L}_\infty[-1,1]} < \infty$.

Твердження 1.3.3 ($k = 0$)**.** *Якщо* $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, *і* $f \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{W}^r$, *то*

$$E_n^{(q)}(f) \leqslant \frac{c(r,q)}{n^r} \|f^{(r)}\|_{\mathbb{L}_\infty[-1,1]}, \quad n \geqslant \mathcal{N}.$$

"Таблиця справджуваності" для пропозицій 1.3.2 та 1.3.3 виглядає наступним чином.

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рис. 1.2: Монотонне набл. ($q = 1$), справджуваність $E_n^{(1)}(f) \leqslant c(k,r)n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})$, $n \geqslant \mathcal{N}$

Ці результати були доведені в статтях Лоренца і Целлера [130], Лоренца [129], ДеВора [69] і [70], Швєдова [51], Ву і Цу [168], Шевчука [55] (див. також [54]), та Левітана і Шевчука [119].

Для зручності і для більшої точності зберемо ці посилання в наступній таблиці. Зауважимо, що в ній у випадку "$\ominus$", спочатку йде посилання на негативний результат, а тоді на позитивний.

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	[70]	[70]	[55]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
2	[129]	[70]	[55]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
1	[130]	[129]	[55]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
0		[130]	[69]	[51], [119]	[168]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рис. 2а: Посилання до таблиці 1.2

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 3: Опукле набл. ($q = 2$), справджуваність $E_n^{(2)}(f) \leqslant c(k,r)n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})$, $n \geqslant \mathcal{N}$

Ці результати доведені в статтях Бітсона [58], Швєдова [52], Ву і Цу [168], Манія (див. в [56, Теореми 17.2 і 16.1]), Ху, Левіатана і Ю [93], Копотуна [103], Нісіма і Ющенко [139] та Левіатана і Шевчука [125].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	$\cdots$
2	[52]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	$\cdots$
1	[58]	[52]	[93, 103]	[56], [125]	[139]	[139]	[139]	$\cdots$
0		[58]	[52]	[93, 103]	[52], [125]	[168]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 3а: Посилання до таблиці 3

Зауваження 1.3.2. *Випадки* ($k = 3, r = 0, q = 2$) *та* ($k = 2, r = 1, q = 2$) *(обідва типу "+"), було доведено в* [93] *та незалежно і одночасно в* [103].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
2	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 4: q-монотонне набл. ($q \geqslant 4$), справджуваність $E_n^{(q)}(f) \leqslant c(k,r)n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})$, $n \geqslant \mathcal{N}$

Ці результати доведено Бітсоном [58], Швєдовим [51] та Бондаренком і Примаком [5]. Відзначимо також работу Коновалова і Левіатана [101], яка присв'ячена поперечникам q-монотонного наближення, $q \geqslant 4$.

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
3	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
2	[58, 51]	[5]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
1	[58]	[58, 51]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
0		[58]	[51]	[5]	[5]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 4а: Посилання до таблиці 4

Насамкінець, у випадку 3-монотонного наближення, було відоме наступне.

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
5	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
4	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
3	+	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
2	+	+	?	?*	−	−	−	$\cdots$
1	+	+	+	?	?*	−	−	$\cdots$
0		+	+	+	?	?*	−	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 5: 3-монотонне набл. ($q = 3$), справджуваність $E_n^{(3)}(f) \leqslant c(k,r)n^{-r}\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})$, $n \geqslant \mathcal{N}$

Зауваження 1.3.3. *З результатів Швєдова* [52] *і Манії (див.* [56]*) випливає, що "?*" у випадках* ($k = 5 - r, 0 \leqslant r \leqslant 2$) *в таблиці 5 будь що неможливо буде замінити на "+".*

Ці результати доведено в статтях Бітсона [58], Швєдова [51, 52], Бондаренко [63], Манія (див. [56, Теорема 16.1]), Нісіма і Ющенко [139] та Ву і Цу [168].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
5	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
4	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
3	[63]	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
2	[58, 51]	[63]	?	[56]	[139]	[139]	[139]	$\cdots$
1	[58]	[58, 51]	[63]	?	[56]	[139]	[139]	$\cdots$
0		[58]	[51]	[63]	?	[52]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 5а: Посилання до таблиці 5

Зауваження 1.3.4. *На нашу думку, замінити питання ("?" і "?*") в таблиці 5 на будь-якому місці на якісь визначені відповіді ("+", "⊖", або "−") це доволі складна задача. Наприклад, автору не вдалося це зробити у випадку* $r = 0,\ k = 4$, *у нього лише з'явилося припущення, що у цьому випадку буде негативний результат, а контрприкладом буде функція* x_+^2.

Далі наведемо історію встановлення поточкових оцінок типу Нікольського q-монотонного наближення, $q \geqslant 1$, тобто, історію доведення випадків справджуваності і хибності наступного твердження 1.3.4.

Твердження 1.3.4. *Якщо $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ і $f \in \Delta^{(q)} \cap C^r[-1,1]$, то існує послідовність $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{P}_n$ така, що при всіх $n \geqslant \mathcal{N}$ і кожному $x \in [-1,1]$ виконується нерівність*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r,q)\rho_n^r(x)\omega_k\left(f^{(r)}, \rho_n(x)\right). \tag{1.3.10}$$

Нагадаємо, випадок "+" означає, що твердження 1.3.4 справджується з $\mathcal{N} = k+r$. З іншого боку, зазначимо, що випадок "$-$" тут означає (на відміну від (1.3.9)), що існує функція $f \in \Delta^{(q)} \cap C^r[-1,1]$ така, що для будь-якої послідовності многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(q)}$, виконується рівність

$$\limsup_{n\to\infty} E_{n,r,k}^{(q)}(f) := \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r \omega_k \left(f^{(r)}, \rho_n\right)} \right\| = \infty. \tag{1.3.11}$$

Для $k = 0$, так само як і вище, розглянемо наступну модифікацію твердження 1.3.4.

Твердження 1.3.5 ($k = 0$). *Якщо $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ і $f \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{W}^r$, то існує послідовність $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{P}_n$ така, що при всіх $n \geqslant \mathcal{N}$ і кожному $x \in [-1,1]$, виконується нерівність*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(r,q)\rho_n^r(x)\|f^{(r)}\|_{\mathbb{L}_\infty[-1,1]}. \tag{1.3.12}$$

Зауважимо, що "+" в цьому випадку означає, що (1.3.12) справджується з $\mathcal{N} = r$, а "$-$" –, що для будь-якої послідовності многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(q)}$,

$$\limsup_{n\to\infty} E_{n,r,0}^{(q)}(f) := \limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r} \right\| = \infty. \tag{1.3.13}$$

Оскільки

$$\rho_n^r(x)\omega_k\left(f^{(r)}, \rho_n(x)\right) \leqslant c(k,r)n^{-r}\omega_k\left(f^{(r)}, n^{-1}\right), \tag{1.3.14}$$

то всі позитивні результати в усіх наступних таблицях тягнуть позитивні результати в усіх попередніх відповідних таблицях (на відповідних місцях) а негативні результати

– навпаки (з попередніх таблиць тягнуть відповідні негативні результати в наступних таблицях).

Наведемо "таблиці справджуваності" для пропозицій 1.3.4 і 1.3.5 для $q = 1$, $q = 2$, $q \geqslant 4$ та $q = 3$ (самий складний випадок).

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	+	+	+	+	+	$\cdots$
2	+	+	+	+	+	$\cdots$
1	+	+	+	+	+	$\cdots$
0		+	+	−	−	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 6: Монотонне набл. ($q = 1$), справджуваність $|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$ для $x \in [-1,1]$ і $n \geqslant \mathcal{N}$ з $P_n \in \Delta^{(1)}$

Ці результати належать Лоренцу і Целлеру [130], ДеВору і Ю [71], Шевчуку [55] (див. також [54]), Ву і Цу [168] та Левіатану і Шевчуку [119].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	[55]	[55]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
2	[71]	[55]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
1	[130]	[71]	[55]	[55]	[55]	$\cdots$
0		[130]	[71]	[119]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 6а: Посилання до таблиці 6

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	+	+	+	+	+	+	$\cdots$
2	+	+	+	+	+	+	$\cdots$
1	+	+	+	−	−	−	$\cdots$
0		+	+	+	−	−	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рис. 7: Опукле набл. ($q = 2$), справджуваність $|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$ for $x \in [-1,1]$ and $n \geqslant \mathcal{N}$ with $P_n \in \Delta^{(2)}$

Ці результати належать Бітсону [59], Левіатану [114], Манія і Шевчуку (див. [56, Теорема 17.2]), Копотуну [103], Ву і Цу [168] та Ющенко [57].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	$\cdots$
2	[114]	[56]	[56]	[56]	[56]	[56]	$\cdots$
1	[59]	[114]	[103]	[57]	[57]	[57]	$\cdots$
0		[59]	[114]	[103]	[57]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Рис. 7а: Посилання до таблиці 7

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
2	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 8: q-монотонне набл. ($q \geqslant 4$), справджуваність $|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$ для $x \in [-1,1]$ і $n \geqslant \mathcal{N}$ з $P_n \in \Delta^{(q)}$

Ці результати належать Бітсону [59], Као і Гонска [65] та Бондаренко і Примаку [5].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
2	[65]	[5]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
1	[59]	[65]	[5]	[5]	[5]	$\cdots$
0		[59]	[65]	[5]	[5]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	k

Рис. 8а: Посилання до таблиці 8

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
5	?*	?*	?*	?*	?*	?*	?*	$\cdots$
4	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
3	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
2	+	?	?	−	−	−	−	$\cdots$
1	+	+	?	?	−	−	−	$\cdots$
0		+	+	?	?	−	−	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 9: 3-монотонне набл. ($q = 3$), справджуваність $|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$ для $x \in [-1,1]$ і $n \geqslant \mathcal{N}$ з $P_n \in \Delta^{(3)}$

Зауваження 1.3.5. *З результату Бондаренко і Гілєвіча* [4] *випливає, що "?*" у випадках* ($k \geqslant 0,\ r \geqslant 5$) *в таблиці 9 будь що не може бути змінено на "+".*

Ці результати належать Бітсону [59], Као і Гонска [65], Ву і Цу [168] та Ющенко [57].

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
5	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	$\cdots$
4	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
3	?	?	?	?	?	?	?	$\cdots$
2	[65]	?	?	[57]	[57]	[57]	[57]	$\cdots$
1	[59]	[65]	?	?	[57]	[57]	[57]	$\cdots$
0		[59]	[65]	?	?	[57]	[168]	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рис. 9а: Посилання до таблиці 9

Знову зазначимо, що замінити знаки "?" і "?*" в таблиці 9 на будь-якому місці на "+", "$\ominus$" або "−" це відкриті і складні задачі.

Зауваження 1.3.6. *Для трійок* ($k \leqslant 2, r \leqslant 2-k, q \geqslant 1$)*, ДеВор і Ю* [71] *(для* $q = 1$*), Левіатан* [114] *(для* $q = 2$*) та Као і Гонска* [65] *(для* $q \in \mathbb{N}$*) довели, що (1.3.10) і (1.3.12) справджуються навіть з меньшою ніж* $\rho_n(x)$ *величиною* $n^{-1}\varphi(x)$*, тобто,* *зокрема, многочлени в цих оцінках інтерполюють функцію в кінцях відрізку. Можно було б очікувати, що такі інтерполяційні на кінціх відрізку оцінки будуть вірні і для* $k \geqslant 3$ *(див., наприклад,* [103, (8)]*), однак виявилося, що, взагалі кажучи,* $\rho_n(x)$ *в поточкових оцінках не можливо замінити на* $n^{-1}\varphi(x)$ *навіть у наближенні без обмежень, детальніше див.* [171, 126, 66, 105, 92].

Історія встановлення оцінок типу Діціана-Тотіка у q-монотонному наближенні, $q \geqslant 1$, міститься, зокрема, в оглядовій статті Копотуна, Левіатана, Примака і Шевчука [112].

Наведемо результати, які пов'язують величини найкращих q-монотонних наближень і наближень без обмежень.

Звісно, що для всіх $f \in C[-1,1]$ і $q \geqslant 1$,

$$E_n(f) \leqslant E_n^{(q)}(f).$$

Більш того, як вже зазначалося, Лоренц і Целлер [130] довели, що існує функція $f \in \Delta^{(q)} \cap C^q[-1,1]$ така, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(q)}(f)}{E_n(f)} = \infty.$$

Також відомо, що в наближенні без обмежень для всіх $f \in C^r[-1,1]$ справджується нерівність

$$E_n(f) \leqslant \frac{c(r)}{n^r} E_{n-r}(f^{(r)}), \quad n > r.$$

У той же час, Левіатан і Шевчук [117, 161] довели, що при кожному $n > q$, знайдеться функція $f_n \in \Delta^{(q)} \cap C^q[-1,1]$ така, що

$$E_n^{(q)}(f_n) > c(q) E_{n-q}(f_n^{(q)}), \quad c(q) > 0,$$

і отже майже очевидна для $f \in C^q[-1,1] \cap \Delta^q$ оцінка

$$E_n^{(q)}(f) \leqslant c(q) E_{n-q}(f^{(q)}),$$

взагалі кажучи, не може бути покращена.

Цікавим є також результат Бондаренка і Примака [5], які довели, що якщо $q \geqslant 4$ і $r \geqslant q-1$, то для будь-якої невід'ємної послідовності $\{\alpha_n\}$, що задовольняє рівність $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, знайдеться функція $f = f_{r,q} \in \Delta^{(q)} \cap C^r[-1,1]$ для якої

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n E_n^{(q)}(f) n^{r-q+3} = \infty.$$

Як вже зазначалось, сучасний етап розвитку ФЗН було (згідно ДеВору) ініційовано, зокрема, і вимогами комп'ютерного дизайну, тому завершуючи огляд історії цього етапу, наведемо посилання на кілька робіт, що мають відношення до чисельної реалізації алгоритмів ФЗН: Ванг [166], Даі, Логвінов і Рада [67], Фукарт і Пауерс [87], Мюрей, Мюллер і Турлач [135], Руссел [158], Тіан і Хуанг [164].

Розділ 2

Комонотонне наближення

2.1 Поточкове наближення неперервних функцій з інтерполяцією на кінцях відрізку

Результат цього підрозділу міститься в [74].

Згадаємо дві поточкові оцінки типу Нікольського наближення функції $f \in C[-1,1]$, алгебраїчними многочленами P_n степеня $\leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$: *для будь-якого* $n \geqslant k-1$, $k \in \mathbb{N}$, *існує* P_n, *такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\omega_k\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in [-1,1], \tag{2.1.1}$$

де c *– стала, що може залежити тільки від* k,

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n},$$

і $\omega_k\left(f,t\right)$ *–* k*-тий модуль неперервності* f; а також – інтерполяційну (в -1 і 1) оцінку: *для* $k=1$ *та* $k=2$ *існують многочлени* P_n, *такі, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\omega_k\left(f, \delta_n(x)\right), \quad x \in [-1,1], \tag{2.1.2}$$

де

$$\delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

Оцінка (2.1.1) була доведена Тіманом (для $k=1$) [46], Дзядиком ($k=2$) [24], Фройдом ($k=2$) [88] та Брудним ($k>2$) [7]; детальніше див. [25, Розділ 6]. Оцінка (2.1.2) була доведена Тєляковскім [44] для $k=1$ та ДеВором [69] для $k=2$. Ю [170] та, незалежно, Венц, Гонска, Левіатан, Шевчук [92] довели, що на відміну від (2.1.1) *оцінка* (2.1.2), *взагалі кажучи, не справджується для* $k>2$.

Для будь-якої монотонної на $[-1,1]$ *функції* $f \in C[-1,1]$ *та кожного* $n \geqslant 1$, ДеВор і Ю [71] побудували *монотонний алгебраїчний многочлен степеня* $\leqslant n$, *що задовольняє* (2.1.2) (а отже і (2.1.1) також) *з* $k = 2$. Швєдов [51, 52] довів, що *для монотонного наближення навіть рівномірна оцінка* (з $1/n$ замість $\rho_n(x)$ та $\delta_n(x)$ у (2.1.1) та (2.1.2)) *не справджується з* $k > 2$.

Тепер, нехай $Y := Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s$, позначає набір з s, $s \in \mathbb{N}$, фіксованих точок y_i :

$$y_{s+1} := -1 < y_s < \cdots < y_1 < 1 =: y_0.$$

Позначимо через $\Delta^{(1)}(Y)$ множину всіх функцій $f \in C := C[-1,1]$, що не спадають на $[y_1, 1]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д. Зауважимо, якщо $f \in C^1(-1,1) \cap C[-1,1]$, то $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)\Pi(x) \geqslant 0$, на $(-1,1)$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i),$$

$\Pi(x, \varnothing) :\equiv 1$. Функції з $\Delta^{(1)}(Y)$ називають *комонотонними* (між собою, чи одна до одної). Для спрощення випадок $s = 0$ з $Y_0 := \{\varnothing\}$ це "чисто" монотонні функції на всьому проміжку $[-1,1] := I$.

У цьому підрозділі ми доводимо наступну теорему.

Теорема 2.1.1. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то існує стала* $N(Y)$, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$, $s \in \mathbb{N}$, *така, що для кожного* $n \geqslant N(Y)$, *знайдеться алгебраїчний многочлен* P_n, *степеня* $\leqslant n$, *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(1)}(Y), \tag{2.1.3}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_2\left(f, \delta_n(x)\right), \quad x \in [-1,1], \tag{2.1.4}$$

де $c(s)$ *– стала, яка залежить тільки від* s.

Наслідком теореми 2.1.1 є нерівності

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_2\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in I, \quad n \geqslant N(Y), \tag{2.1.5}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\,\omega_2\left(f, 1/n\right), \quad n \geqslant N(Y), \tag{2.1.6}$$

де тут і надалі $\|f\| := \max\limits_{x \in I}|f(x)|$. Крім того,

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y)\,\omega_2\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in I, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.7}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant C(Y)\, \omega_2\,(f, 1/n)\,, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.8}$$

де $C(Y)$ – стала, що залежить тільки від $\min\limits_{i=0,\dots,s} \{y_i - y_{i+1}\}$, і де нерівність

$$\|f - f(0)\| \leqslant\ 2\,\omega_1(f, 1) \leqslant C(Y)\, \omega_2(f, 1), \quad f \in \Delta^{(1)}(Y),\ s \in \mathbb{N},$$

(див., [167] (2.1.12)) була застосована для $1 \leqslant n < N(Y)$ (фактично, лише для $n = 1$).

Оцінка (2.1.8) належить Швєдову [53] та, незалежно, Ю [172]. Стала $C(Y)$ у (2.1.8) (а отже і у (2.1.7)) не може бути змінена на сталу, що незалежить від Y [53]. Оцінки (2.1.5) та (2.1.7) наведені у [10], де "перевернення" многочлена ДеВора і Ю [71] було задієно для доведення (2.1.5). Використовуючи підхід [71] можна перетворити многочлен з [10] так, щоб отримати (2.1.4) однак ми побудуємо "новий" многочлен для теореми 2.1.1. Насамкінець, Ву і Цу [169] довели, що (2.1.8) (а отже і (2.1.4)-(2.1.7)) не справджуються з $\omega_k,\ k > 2$. Для інших результатів у монотонному та комонотонному наближенні див. огляд Левіатана [115] та статтю [79].

Щоб довести теорему 2.1.1 нам необхідна теорема 2.1.2, що складає окремий інтерес. Для її формулювання нам потрібні деякі позначення. Скрізь надалі c позначатимуть різні невід'ємні абсолютні сталі, що можуть бути різними навіть, якщо вони стоятимуть в одному рядку, або – невід'ємні сталі, що можуть залежити тільки від числа s.

Нехай $x_j := x_{j,n} := \cos\,(j\pi/n),\ j = 0, \dots, n$, складають Чебишевське розбиття I. Для фіксованого $Y = \{y_i\}_{i=1}^s$ і фіксованого $n \in \mathbb{N}$, позначимо

$$O_i := O_i(n, Y) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{-1} := 1,\ x_{-2} := 1$ and $x_{n+1} := -1,\ x_{n+2} := -1$. Нехай

$$O = O(n, Y) := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Будемо писати $j \in H := H(n, Y)$ if $x_j \in (-1, 1) \backslash O$.

Теорема 2.1.2. *Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то існує стала $N(Y)$, яка залежить тільки від $\min\limits_{i=0,\dots,s} \{y_i - y_{i+1}\},\ s \in \mathbb{N}$, така, що для кожного $n \geqslant N(Y)$, знайдеться ламана L, що має вузли в x_j'х з $j \in H$ лише, і такі, що*

$$L \in \Delta^{(1)}(Y), \tag{2.1.9}$$

$$|f(x) - L(x)| \leqslant c\, \omega_2\,(f, \delta_n(x))\,, \quad x \in [-1, 1], \tag{2.1.10}$$

де $N(Y)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,\dots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$.

Підкреслемо, що ламаній L в теоремі 2.1.2 забороняється мати вузли у x_j, якщо $x_j \in O$.

Далі, якщо $j = 1,\dots,n$, ми позначатимемо $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$. Для будь-якого інтервала E, нехай $|E|$ буде його довжиною, зокрема, $|I_j| = x_{j-1} - x_j =: h_{j,n} =: h_j$, і для зручності $h_0 = h_{n+1} := h_1$. Будемо, без спеціальних посилань, використовувати відомі нерівності

$$\begin{aligned} h_{j\pm1} &< 3h_j, \\ \rho_n(x) < h_j &< 5\rho_n(x), \quad x \in I_j, \\ \rho_n(x) &< 2\delta_n(x), \quad x \in I \backslash (I_1 \cup I_n), \\ \rho_n^2(y) &< 4\rho_n(x)\left(|x-y| + \rho_n(x)\right), \quad x, y \in I. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Вони, без доведень, використані майже в усіх роботах з Переліку посилань. Для ілюстрації доведемо перші дві для $j \leqslant \frac{n}{2}$:

$$1 \leqslant \frac{\sin(j+\frac12)\frac{\pi}{n}}{\sin(j-\frac12)\frac{\pi}{n}} = \frac{|I_{j+1,n}|}{|I_{j,n}|} = \cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\cot\left(j-\frac12\right)\frac{\pi}{n} < 1 + \frac{1}{j-1/2} \leqslant 3,$$

$$\frac{|I_{j,n}|}{\rho_n(x)} \leqslant \frac{|I_{j,n}|}{\rho_n(x_{j-1,n})} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos(j-1)\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\sin(j-1)\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac1n\sin(j-1)\frac{\pi}{n}} < \frac{\pi^2}{2} < 5,$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n(x)}{|I_{j,n}|} \leqslant \frac{\rho_n(x_{j,n})}{|I_{j,n}|} &= \frac{1}{n^2|I_{j,n}|} + \frac{1}{2n}\cot\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2n}\cot\left(j-\frac12\right)\frac{\pi}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2|I_{j,n}|} + \frac1n\cot\frac{\pi}{2n} < \frac{1}{n^2|I_{1,n}|} + \frac{2}{\pi} \leqslant \frac14 + \frac{2}{\pi} < 1. \end{aligned}$$

Також, з посиланнями і без, будемо використовувати нерівність Уитні [167]

$$\|g - L_{k-1}(g,\cdot,[a,b])\|_{[a,b]} \leqslant c_{14}\omega_k\left(g, (b-a)/k, [a,b]\right), \quad g \in C([a,b]), \tag{2.1.12}$$

де $k \in \mathbb{N}$, $L_k(g,x,[a,b])$ – многочлен Лагранжа степеня $\leqslant k$, що на $[a,b]$ інтерполює функцію $g = g(x)$ в рівновіддалених точках $a + \nu(b-a)/k$, $\nu = 0,...,k$; $L_0(g,x,[a,b]) := g(a)$.

Доведення теореми 2.1.2

Покладемо

$$\omega(t) := \omega_2(f,t).$$

Оберемо $N(Y)$ таким, що задовольняє

$$I_n \cap O_s = \varnothing, \quad \overline{O}_i(n,Y) \cap \overline{O}_{i-1}(n,Y) = \varnothing, \quad O_1(n,Y) \cap I_1 = \varnothing,$$

для всіх $n \geqslant N(Y)$ і $i = 2, \cdots, s$. Зафіксуємо $n \geqslant N(Y)$. Позначимо $O_i =: (\overline{y}_i, \underline{y}_i), \quad i = 1, \ldots, s$, тобто $\overline{y}_i$ і $\underline{y}_i$ – ліві та праві кінці O_i, відповідно. Через $\check{L} := \check{L}(x)$ позначимо ламану, що складається з $3s+1$ ланок, таких, що $\check{L}(y_i) = 0, \ i = 0, ..., s+1$, і кожного $i = 1, \ldots, s, \ \check{L}(\overline{y}_i) = f(y_i) - f(\overline{y}_i)$ і $\check{L}(\underline{y}_i) = f(y_i) - f(\underline{y}_i)$. Оскільки $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$\check{L}'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in I \backslash O. \tag{2.1.13}$$

Доведемо нерівність

$$\left|\check{L}(x)\right| \leqslant c\,\omega(\delta_n(x)), \quad x \in I. \tag{2.1.14}$$

Для кожного $i = 1, \ldots, s$, через $\bar{l}_i$ позначимо лінійну функцію, що інтерполює f у точках $\overline{y}_i$ і y_i; через $\underline{l}_i$ – лінійну функцію, що інтерполює f у y_i і $\underline{y}_i$. Якщо $x \in \overline{O_i}$, то нерівність Уітні (2.1.12) забеспечує

$$\left|f(x) - \bar{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right),$$

і

$$|f(x) - \underline{l}_i(x)| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right),$$

отже,

$$\left|\check{L}(x)\right| \leqslant \left|\bar{l}_i(x) - \underline{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right), \quad x \in \overline{O_i}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{2.1.15}$$

Тому (2.1.14) справджується для $x \in \overline{O}$. Зокрема,

$$\left|\check{L}\left(\underline{y}_1\right)\right| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(y_1)\right) \leqslant c\,\omega\left(1/n\right).$$

Тепер, якщо $x > \left|\underline{y}_1\right|$, то

$$\left|\check{L}(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(1/n\right)\,(1-x) \leqslant c\,\omega\left(1/n\right)\,(1-x^2) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right).$$

А якщо $\underline{y}_1 < x \leqslant \left|\underline{y}_1\right|$, то $\delta_n(y_1) < \delta_n(x)$, і отже

$$\left|\check{L}(x)\right| \leqslant \left|\check{L}(\underline{y}_1)\right| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(y_1)\right) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right).$$

Таким чином (2.1.10) доведено для $x \in (\underline{y}_1, 1]$ і, аналогічно — для $x \in [-1, \overline{y}_s)$ та $x \in (\underline{y}_i, \overline{y}_{i-1}), \ i = 2, ..., s$, також.

Через $L^* := L^*(x)$ позначимо ламану з вузлами у точках x_j, $j \in H$, і точках $y_i, i = 1, \ldots, s$, що інтерполює функцію f в цих вузлах та у -1, 1. Звісно

$$L^* \in \Delta^{(1)}(Y). \tag{2.1.16}$$

З нерівності Уітні випливає оцінка

$$|f(x) - L^*(x)| \leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right), \quad x \in I. \tag{2.1.17}$$

Покажимо, що ламана

$$L := L(x) := L^*(x) + \check{L}(x) \tag{2.1.18}$$

є шуканою. Дійсно, означення L^* і $\check{L}$ тягнуть нерівності

$$L(x) \equiv f(y_i), \quad x \in \overline{O_i}, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{2.1.19}$$

які разом з (2.1.13) та (2.1.16) забеспечують включення $L \in \Delta^{(1)}(Y)$. Співвідношення (2.1.19) вказують, що ламана L немає вузлів крім x_j з $j \in H$. Нерівності (2.1.14) та (2.1.17) породжують (2.1.10) для $x \in I \setminus (I_1 \cup I_n)$.

Отже ми залишились з (2.1.10) для $x \in I_1$ and $x \in I_n$. За побудовою, L – лінійна на I_1 та на I_n, і $L(-1) = f(-1)$, $L(1) = f(1)$. Покладемо $g(x) := f(x) - L(x)$. Тоді маємо $g(-1) = 0$, $g(1) = 0$, $\omega_2(g, t, I_1) = \omega_2(f, t, I_1) \leqslant \omega(t)$ and $\omega_2(g, t, I_n) \leqslant \omega(t)$, де $\omega_2(g, t, [a,b])$ – другий модуль неперервності на $[a, b]$. Крім того, нерівності (2.1.14) та (2.1.17) породжують оцінку

$$|g(x)| \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right), \quad x \in I_1 \cup I_n.$$

Тоді, скажімо, для $x \in I_1$, застосуємо нерівність Маршо [134] та отримаємо

$$\begin{aligned}
|f(x) - L(x)| = |g(x)| = |g(x) - g(1)| &\leqslant c\,(1-x) \int_{1-x}^{|I_1|} \frac{\omega(u)}{u^2} du + \frac{1-x}{|I_1|} \omega\left(|I_1|\right) \\
&\leqslant c\,(1-x) \int_{1-x}^{\delta_n(x)} \frac{\omega(u)}{u^2} du + c\,(1-x) \int_{\delta_n(x)}^{|I_1|} \frac{\omega(u)}{u^2} du + c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \\
&\leqslant c\,(1-x)\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \int_{1-x}^{\infty} \frac{du}{u^2} + c\,(1-x^2)\,|I_1|\,\frac{\omega\left(\delta_n(x)\right)}{\delta_n^2(x)} + c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \\
&\leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) + c\,n^2\,|I_1|\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right).
\end{aligned}$$

Так само перевіряється (2.1.10) для $x \in I_n$. Теорему 2.1.2 доведено.

Наслідок 2.1.1. *Якщо L – ламана з теореми 2.1.2, то*

$$[x_j, x_{j-1}, L]\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad j \in H \cup \{n\}, \tag{2.1.20}$$

$$|[x_{j+1},x_j,x_{j-1},L]|\leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2},\quad j=1,...,n-1,\tag{2.1.21}$$

$$[x_{j+1},x_j,x_{j-1},L]=[x_j,x_{j-1},L]=0,\quad j\notin H,\tag{2.1.22}$$

де $[x_j,x_{j-1},L]$ *та* $[x_{j+1},x_j,x_{j-1},L]$ *– перша та друга розділені різниці* L, *відповідно.*

Допоміжні факти для доведення теореми 2.1.1

Наслідуючи [56], покладемо

$$t_j(x):=t_{j,n}(x):=\frac{\cos^2 2n\arccos x}{(x-x_j^0)^2}+\frac{\sin^2 2n\arccos x}{(x-\bar{x}_j)^2},$$

де $\bar{x}_j=\cos{(j-\frac{1}{2})}\pi/n$ та $x_j^0=\cos\beta_j^0$ з $\beta_j^0=(j-\frac{1}{4})\pi/n$, $j\leqslant n/2$, та $\beta_j^0=(j-\frac{3}{4})\pi/n$, $j>n/2$. Відзначимо, що $\bar{x}_j$ та x_j^0 є нулями відповідних чисельників, які містяться строго у I_j, і – що t_j є алгебраїчними многочленами степеня $4n-2$ такі, що

$$t_j(x)\leqslant\frac{c}{(|x-x_j|+h_j)^2}\leqslant c\,t_j(x),\quad x\in I.$$

Нехай $Y^*=Y\cup\{-1,1\}$ і зафіксуємо $b\in\mathbb{N}$. Надалі у доведенні дозволимо сталим c залежити також від $b\in\mathbb{N}$. Наслідуючи [103, 79, 123], означимо два многочлени степеня $\leqslant cn$,

$$T_j(x):=T_{j,n}(x,b,Y^*):=\frac{1}{d_j}\int_{-1}^{x}t_j^b(u)\Pi(u,Y^*)du,\tag{2.1.23}$$

де

$$d_j:=\int_{-1}^{1}t_j^b(u)\Pi(u,Y^*)du,$$

і

$$\tau_j(x):=\tau_{j,n}(x,b,Y^*):=\alpha\int_{-1}^{x}T_{j+1}(u)du+(1-\alpha)\int_{-1}^{x}T_{j-1}(u)du,\quad j\in H,\tag{2.1.24}$$

де $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ обрано з умови

$$\tau_{j,n}(1,b,Y^*)=1-x_j,\tag{2.1.25}$$

і $T_{n+1}(x)=T_n(x):\equiv 1,\ T_0(x):\equiv 0$. Позначимо

$$\chi(x,a):=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\leqslant a\\ 1,\ \text{якщо}\ x>a,\end{cases}\quad a\in I,\quad \chi_j(x):=\chi(x,x_j),\quad (x-x_j)_+:=(x-x_j)\,\chi_j(x),$$

$$\Gamma_j(x):=\Gamma_{j,n}(x):=\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j},$$

$$O_{s+1} := [-1, x_{n-1}), \quad O_0 := (x_1, 1], \quad O^* := O \cup O_0 \cup O_{s+1},$$

і згадаємо нерівність

$$h_j \Gamma_j(x) \leqslant c\,\rho_n(x), \quad x \in I. \tag{2.1.26}$$

Лема 2.1.1. [103, 79, 123] *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geqslant 6(s+3)$, *то*

$$\tau_j''(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad T_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{2.1.27}$$

$$\tau_j(\pm 1) = (\pm 1 - x_j)_+, \quad T_j(\pm 1) = \chi_j(\pm 1), \quad T_j'(\pm 1) = 0, \tag{2.1.28}$$

$$|(x - x_j)_+ - \tau_j(x)| \leqslant c\,h_j\,(\Gamma_j(x))^{2b-s-2}, \quad x \in I, \tag{2.1.29}$$

$$|\chi_j(x) - T_j(x)| \leqslant c_0\,(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in I, \tag{2.1.30}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \leqslant c_0\,\frac{1}{h_j}\,(\Gamma_j(x))^{2b-s}, \quad x \in I, \tag{2.1.31}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \geqslant c_1\,\frac{1}{h_j}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \quad x \in I \backslash O^*, \tag{2.1.32}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \geqslant c_1\,\frac{1}{h_j}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}\left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \quad x \in O_i,\ i = 0, ..., s+1, \tag{2.1.33}$$

де $c_0 = c_0(b)$, $c_1 = c_1(b)$ *– додатні сталі, які залежать тільки від* s *і* b.

Зауваження 2.1.1. *Лему 2.1.1 доводять за допомогою нерівностей*

$$c\,\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leqslant \left|T_j'(x)\right| \leqslant c\,\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I, \tag{2.1.34}$$

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \leqslant \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)} + 1\right)^{s+2}, \quad x \in I, \quad y \in I \backslash O^*, \tag{2.1.35}$$

$$\gamma_j^2(x) < 16\Gamma_j(x), \quad \Gamma_j^2(x) < 400\gamma_j(x), \quad x \in I, \tag{2.1.36}$$

де $\gamma_j(x) := \rho_n(x)/\left(|x - x_j| + \rho_n(x)\right)$.

Лема 2.1.1, (2.1.25) та [90, Лема 5.2] тягнуть наступну лему 2.1.2. Для її формулювання, у зручній для нас формі, ми для фіксованого $j \in H$, через $i(j)$ позначимо індекс $i = 0, ..., s$, такий, що $y_{i(j)+1} < x_j < y_{i(j)}$.

Лема 2.1.2. [90] *Для кожного* $j \in H$ *і будь-якого натурального* $b \geqslant 6(2s+3)$ *існує набір* $\mathbf{T}$ *з* s *фіксованих точок* t_i,

$$-1 = y_{s+1} < t_s < ... < y_{i(j)+2} < t_{i(j)+1} < y_{i(j)+1},$$

$$y_{i(j)} < t_{i(j)} < ... < t_2 < y_1 < t_1 < y_0 = 1,$$

такий, що многочлен

$$\overset{\circ}{T}_j(x) := T_{j,n}(x, b, Y^* \cup \mathbf{T}), \tag{2.1.37}$$

степеня cn, *задовольняє* (2.1.28), (2.1.30), (2.1.31) *і, крім того,*

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{T}_j(x)\right| \leqslant c_2 \, (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i, \; i = 0, ..., s+1,$$

зокрема,

$$\chi_j(y_i) - \overset{\circ}{T}_j(y_i) = 0, \quad i = 0, ..., s+1,$$

де $c_2 = c_2(b)$ *– додатня стала, що залежить тільки від* s *і* b.

Зауваження 2.1.2. *Многочлен* $\overset{\circ}{T}_j$ *у лемі 2.1.2 можна "спростити" , поклавши*

$$\overset{\circ}{T}_j(x) = T_{j,n}(x, b, \varnothing) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\chi_j(y_i) - T_{j,n}(y_i, b, \varnothing)}{T'_{j,n}(y_i, b, Y_i)} T'_{j,n}(x, b, Y_i),$$

де $Y_i := Y^* \backslash \{y_i\}$ *and* $b \geqslant 6(3s+3)$.

Наслідок 2.1.2. *Для кожного* $j \in H$ *і будь-якого* $b \geqslant 6(2s+3)$ *многочлен*

$$\overset{\circ}{\tau}_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, Y^* \cup \mathbf{T}), \tag{2.1.38}$$

степеня cn, *задовольняє нерівності*

$$\overset{\circ}{\tau}_j(\pm 1) = (\pm 1 - x_j)_+, \quad \overset{\circ}{\tau}_j{}'(\pm 1) = \chi_j(\pm 1), \tag{2.1.39}$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \overset{\circ}{\tau}_j(x)\right| \leqslant c_2 \, h_j \, (\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)}, \quad x \in I, \tag{2.1.40}$$

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}_j{}'(x)\right| \leqslant c_2 \, (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1}, \quad x \in I, \tag{2.1.41}$$

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}_j{}'(x)\right| \leqslant c_2 \, (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i, \; i = 0, ..., s+1, \tag{2.1.42}$$

зокрема,

$$\chi_j(y_i) - \overset{\circ}{\tau}_j{}'(y_i) = 0, \quad i = 0, ..., s+1, \tag{2.1.43}$$

де $c_2 = c_2(b)$ *– додатня стала,що залежить тільки від* s *і* b.

Візьмемо три числа

$$b_1 = 6(s+3), \quad b_2 = 6(2s+3), \quad n_1 = 2\left[1 + c_2(b_2)/c_1(b_1)\right] n$$

($[\cdot]$ – ціла астина) і для кожного $j = 1, ..., n-1$, через j^* і j_* познаимо такі індекси, для яких

$$x_{j^*, n_1} = (x_{j,n} + x_{j-1,n})/2 \quad \text{і} \quad x_{j_*, n_1} = (x_{j+1,n} + x_{j,n})/2,$$

відповідно. Леми 2.1.1 і 2.1.2 тягнуть

Лема 2.1.3. *Для кожного $j \in H$, два многолени*

$$\tau_{j^*}(x) := \tau_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^* \cup \mathbf{T}) + \frac{h_{j,n}}{2} T_{j^*,n_1}(x, b_1, Y^*),$$

$$\tau_{j_*}(x) := \tau_{j_*,n_1}(x, b_2, Y^* \cup \mathbf{T}) - \frac{h_{j+1,n}}{2} T_{j_*,n_1}(x, b_1, Y^*),$$

степеня cn, задовольняють нерівності

$$\left(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)\right) \Pi(x)\, \Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{2.1.44}$$

$$\left(\tau'_{j_*}(x) - \chi_{j_*}(x)\right) \Pi(x)\, \Pi(x_j) \leqslant 0, \quad x \in I, \tag{2.1.45}$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*_*}(x)\right| \leqslant c\, h_j\, \Gamma^6_{j,n}(x), \quad x \in I, \tag{2.1.46}$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*_*}(x)\right| \leqslant c\,(1 - x^2)\, \Gamma^4_{j,n}(x), \quad x \in I, \tag{2.1.47}$$

де $j^*_* = j^* \vee j_*$.

Доведення. З двох схожих нерівностей (2.1.44) і (2.1.45) доведемо лише (2.1.44). Якщо $x \in I \backslash O(n_1, Y)$, то (2.1.27), (2.1.32) і (2.1.41) породжують

$$\begin{aligned}
&\left(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)\right)\Pi(x)\Pi(x_j) \\
&\qquad \equiv \left(\frac{h_{j,n}}{2} T'_{j^*,n_1}(x, b_1, Y^*) + \tau'_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^* \cup \mathbf{T})\right) \Pi(x)\Pi(x_j) \\
&\qquad \geqslant c_1(b_1)\frac{h_{j,n}}{2h_{j^*,n_1}}\Gamma^{14s+36}_{j^*,n_1}(x) - c_2(b_2)\Gamma^{22s+35}_{j^*,n_1}(x) \\
&\qquad \geqslant \left(c_1(b_1)\frac{h_{j,n}}{2h_{j^*,n_1}} - c_2(b_2)\right) \Gamma^{14s+36}_{j^*,n_1}(x) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

завдяки n_1. Збераючи (2.1.27), (2.1.33) та (2.1.42), ми, аналогічно, отримуємо (35) для $x \in O(n_1, Y)$. Доведемо (2.1.46) і (2.1.47) лише для τ_{j^*}. Нерівності (2.1.40) і (2.4.15) породжують (2.1.46). А саме,

$$\begin{aligned}
|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)| &= \Bigg|\left((x - x_j)_+ - (x - x_{j^*})_+ - \frac{h_{j,n}}{2}\chi_{j^*}(x)\right) \\
&\quad + \left((x - x_{j^*})_+ - \tau_{j^*,n_1}(x, b_2, \mathring{T}_j)\right) \\
&\quad + \frac{h_{j,n}}{2}\Big(\chi_{j^*}(x) - T_{j^*,n_1}(x, b_1, Y^*)\Big)\Bigg| \\
&=: \left|A_1(x) + A_2(x) + \frac{h_{j,n}}{2} A_3(x)\right| \\
&\leqslant c\, h_j\, \Gamma^6_j(x) + c\, h_{j^*,n_1}\, \Gamma^{22s+34}_{j^*,n_1}(x) + c\, h_j\, \Gamma^{11s+35}_{j^*,n_1}(x) \leqslant c\, h_j\, \Gamma^6_j(x).
\end{aligned}$$

Якщо $x \notin I_1 \cup I_n$, то (2.1.26) тягне нерівність

$$h_j \, \Gamma_j^2(x) \leqslant c \, n^2 \, \rho_n^2(x) \leqslant c \, (1 - x^2),$$

і тоді (2.1.47) випливає з (2.1.46).

Якщо $x \in I_1$, то згідно (2.1.28), (2.1.31), (2.1.39) і (2.1.41), запишемо

$$\begin{aligned}
|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)| &= \left| (A_2(x) - A_2(1)) + \frac{h_{j,n}}{2} \, (A_3(x) - A_3(1)) \right| \\
&= \left| \int_x^1 A_2'(u) du + \frac{h_{j,n}}{2} \int_x^1 A_3'(u) du \right| \\
&\leqslant \int_x^1 \left| A_2'(u) \right| du + \frac{h_{j,n}}{2} \int_x^1 \left| A_3'(u) \right| du \\
&\leqslant c_2 \, (1 - x) \, \max_{t \in I_1} \Gamma_{j^*,n_1}^{22s+35}(t) + c \frac{h_{j,n}}{h_{j^*,n_1}} \, (1 - x) \, \max_{t \in I_1} \Gamma_{j^*,n_1}^{11s+36}(t) \\
&= c_2 \, (1 - x) \, \Gamma_{j^*,n_1}^{22s+35}(x_1) + c \frac{h_{j,n}}{h_{j^*,n_1}} \, (1 - x) \, \Gamma_{j^*,n_1}^{11s+36}(x_1) \\
&\leqslant c \, (1 - x) \, \Gamma_j^4(x) \leqslant c \, (1 - x^2) \, \Gamma_j^4(x).
\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться (2.1.47) для $x \in I_n$. Лему 2.1.3 доведено.

Доведення теореми 2.1.1

Нехай L – ламана з теореми 2.1.2. Запишемо її у наступній формі

$$\begin{aligned}
L(x) &\equiv l(x) + \sum_{j=1}^{n-1} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L] \, (x_{j-1} - x_{j+1}) \, (x - x_j)_+ \\
&\equiv l(x) + \sum_{j \in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L] \, (x_{j-1} - x_{j+1}) \, (x - x_j)_+,
\end{aligned}$$

де $l(x) := [x_n, x_{n-1}, L](x + 1) + L(-1)$, і де ми скористалися (2.1.22). Згадаємо, що $\{n - 1, 1\} \subset H$.

Покладемо

$$P_n(x) := l(x) + \sum_{j \in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L] \, (x_{j-1} - x_{j+1}) \, \tau_j(x),$$

де

$$\tau_j(x) := \begin{cases} \tau_{j^*}(x) & \text{якщо} \quad [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L](x_{j-1} - x_{j+1}) \Pi(x_j) \geqslant 0, \\ \tau_{j_*}(x) & \text{інакше.} \end{cases}$$

Таким чином, беручи до уваги (2.1.22), бачимо, що нерівності (2.1.20), (2.1.44), (2.1.45) і $x_{j_*^*} \leqslant x_{(j-1)_*^*}$ тягнуть оцінку

$$\begin{aligned}
&P_n'(x)\Pi(x)\\
&= \Bigg([x_n, x_{n-1}, L]\,\chi_n(x) + \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\left(\tau_j'(x) - \chi_{j_*^*}(x)\right)\\
&+ \sum_{j\in H} \left(-[x_{j+1}, x_j, L] + [x_j, x_{j-1}, L]\right)\chi_{j_*^*}(x)\Bigg)\Pi(x)\\
&= \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\left(\tau_{j_*^*}'(x) - \chi_{j_*^*}(x)\right)\Pi(x)\\
&+ \sum_{j\in H\cup\{n\}} [x_j, x_{j-1}, L]\left(\chi_{j_*^*}(x) - \chi_{(j-1)_*^*}(x)\right)\Pi(x)\\
&= \sum_{j\in H} \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\Big([x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\Pi(x_j)\Big)\left(\left(\tau_{j_*^*}'(x) - \chi_{j_*^*}(x)\right)\Pi(x)\Pi(x_j)\right)\\
&+ \sum_{j\in H\cup\{n\}} \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\Big([x_j, x_{j-1}, L]\,\Pi(x_j)\Big)\left(\left(\chi_{j_*^*}(x) - \chi_{(j-1)_*^*}(x)\right)\Pi(x)\Pi(x_j)\right) \geqslant 0, \quad x \in I,
\end{aligned}$$

($n_*^* := n$ і $0_*^* := 0$), яка породжує (2.1.3). Для доведення (2.1.5) запишемо різницю $f - P_n$ у формі

$$\begin{aligned}
f(x) - P_n(x) &= f(x) - L(x) + L(x) - P_n(x) = f(x) - L(x)\\
&+ \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\left((x - x_j)_+ - \tau_j(x)\right)\\
&=: f(x) - L(x) + \sum_{j\in H} \alpha_j(x).
\end{aligned}$$

Перепишемо (2.1.10)

$$|f(x) - L(x)| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right), \quad x \in I.$$

Для оцінки $\alpha_j(x)$, скорестаємося (2.1.46), (2.1.47) і (2.1.21). Якщо $x \notin I_1 \cup I_n$, то

$$\begin{aligned}
|\alpha_j(x)| &\leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2} h_j h_j \Gamma_j^4(x) = c\,\omega(h_j)\Gamma_j^4(x)\\
&\leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right)\left(1 + \frac{h_j^2}{\rho_n^2(x)}\right)\Gamma_j^4(x) \leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right)\Gamma_j^2(x)\\
&\leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\Gamma_j^2(x),
\end{aligned}$$

де ми скористалися (2.1.26). Якщо $x \in I_1$, то

$$|\alpha_j(x)| \leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2} h_j (1 - x^2)\Gamma_j^4(x) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\Gamma_j^2(x),$$

де ми знову скористалися (2.1.26). Тому, беручи до уваги, що (2.1.26) забезпечує нерівність $\left\|\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j^2\right\| \leqslant c$, ми запишемо

$$\left|\sum_{j\in H}\alpha_j(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\sum_{j\in H}\Gamma_j^2(x) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\left\|\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j^2\right\| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right), \quad x \in I.$$

Теорему 2.1.1 доведено.

2.2 Наближення неперервних періодичних функцій

Результати цього підрозділу містяться в [21, 22].

Нехай C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – простір тригонометричних поліномів $P_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)$ порядку $\leqslant n$, де $a_j \in \mathbb{R}$ і $b_j \in \mathbb{R}$,

$$E_n(f) := \inf_{P_n\in\mathbb{T}_n}\|f - P_n\|$$

– величина найкращого наближення функції f поліномами $P_n \in \mathbb{T}_n$. Нехай $k \in \mathbb{N}$.

Нагадаємо класичну оцінку Джексона (випадок $k = 1$) [98]-Зігмунда ($k = 2$, $\omega_2(f, t) \leqslant t$) [178]-Ахієзєра ($k = 2$) [1]-Стєчкіна ($k \geqslant 3$) [43]: *Якщо $f \in C$, то*

$$E_n(f) \leqslant c(k)\,\omega_k\left(f, \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.1}$$

де $c(k)$ – стала, що залежить тільки від k, і $\omega_k(f, \cdot)$ – k-й модуль неперервності функції f. Детальніше див., наприклад, [25, Розділ 4].

Враховуючи інтенсивний розвиток теорії комонотонного наближення на вдрізку, Дємідовіч і Конягін біля 20 років тому поставили питання: *а чи справджується комонотонний аналог нерівності* (2.2.1) *для периодичних функцій?* Для випадку $k = 1$ ствердна відповідь була дана Плєшаковим [144]. Він же [32, стор. 64-83], [36], скориставшись міркуваннями статей Швєдова [51, 52] і ДеВора, Левіатана, Шевчука [72], при кожному $n \in \mathbb{N}$ побудував функцію таку, що для неї при $k > 2$ комонотонний аналог нерівності (2.2.1) не справджується, а в теоремі 6.2.1 побудована одна така функція для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо також, що для $k = 1$ був відомий ствердний результат Лоренца і Целлера [130] для дзвоноподібних (тобто парних та незростаючих на $[0, \pi]$) 2π-періодчних функцій .

Таким чином, залишалося відкритим питання про вірність комонотонного аналога нерівності (2.2.1) для випадка $k = 2$, тобто про вірність періодичного аналога результату Швєдова [53], доведеного ним для (неперіодичних) функцій, що задані на відрізку. На важливість цього питанн звернули увагу Тєляковській і Швєдов під час захисту кандидатської дисертації Плєшакова.

У цьому підрозділі, у теоремах 2.2.1 і 2.2.2, наведена ствердна відповідь на вказане питання. Щоб їх сформулювати дамо необхідні означення. Нехай на $[-\pi, \pi)$ є $2s,\ s \in \mathbb{N}$, фіксованих точок y_i :

$$-\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,$$

а для решти індексів $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...$). Позначимо $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Нехай $\Delta^{(1)}(Y)$ – множина усіх функцій $f \in C$, що не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д.,

$$E_n^{(1)}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - P_n\|$$

– величина найкращого комонотонного наближення функції f поліномами $P_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$. Зауважимо, якщо функція f диференційовна, то $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2} \qquad (\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)).$$

Теорема 2.2.1. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant c(s)\, \omega_2\left(f, \pi/n\right), \quad n \geqslant N(Y), \tag{2.2.2}$$

де $N(Y)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$, *і* $c(s)$ *– стала, що залежить тільки від* s.

Наступна теорема 2.2.2 є простим наслідком теоремы 2.2.1 і нерівності Уітні [167] $\|f - f(0)\| \leqslant \omega_2(f, 2\pi)$.

Теорема 2.2.2. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant C(Y)\, \omega_2\left(f, \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.3}$$

де $C(Y)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$.

Зауваження 2.2.1. *Нагадаємо, що обидві теореми стають хибними з* $\omega_k,\ k > 2$, *замість* ω_2, *і ми вважаємо, що сталі* $N(Y)$ *і* $C(Y)$ *в них неможливо замінити сталими, що не залежать від* Y, *однак ми не доводимо це.*

Допоміжні факти для доведення теореми 2.2.1

Наведемо, у зручній для нас формі, означення і леми з робіт [144, 37, ?petya_misha, 79, 90] та їх наслідки. Єдина відмінність полягає у тому, що замість невід'ємного ядра типу Джексона буде використано строго додатнє ядро, що є добутком двох "сусідних" ядер типу Джексона.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$h := h_n := \pi/n, \quad x_j := x_{j,n} := -j\,h, \quad I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Покладемо

$$m = 20.$$

Для фіксованого $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ і фіксованого n позначимо

$$O_i := O_{i,m} := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m}, x_{j-m}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}).$$

Нехай

$$O := O_m := O(Y, n, m) := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_i.$$

Будемо писати $j \in H := H(Y, n, m)$, якщо $x_j \in \mathbb{R}\backslash O$. Оберемо $N(Y) := N(Y, m)$ таким, що

$$\overline{O}_i \cap \overline{O}_{i-1} = \varnothing, \tag{2.2.4}$$

для усіх $n \geqslant N(Y)$ і усіх $i = 1, ..., 2s$. (Тобто, $N(Y)$ залежить тільки від $\min\limits_{i=1,...,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$.)

Позначимо

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}, \quad \chi_j(x) := \chi(x, x_j),$$

$$(x - x_j)_+^q := (x - x_j)^q \, \chi_j(x), \quad q = 1, 2, 3,$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\left|\sin\frac{x-(x_j+h/2)}{2}\right|}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N},$$

і зауважимо, що

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n} \Gamma_j^2\right\| < 6, \tag{2.2.5}$$

детальніше див. [144].

Для кожного $j \in \mathbb{Z}$, означимо додатній поліном

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) := \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\frac{x-x_j}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\frac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad J_j \in \mathbb{T}_{n-1}, \quad (2.2.6)$$

тобто сума двох "сусідних" ядер типу Джексона. Надалі $n > N(Y) = N(Y, m)$. Нехай

$$\overline{H} := \{j : j \in H(Y, n, m/2),\ |j| < n + m/2\}.$$

Для кожного $b \in \mathbb{N},\ b \geqslant s + 2$, позначимо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y) := \frac{1}{d_j} \int_{x_j - \pi}^{x} J_j^b(u)\Pi(u)du \qquad (2.2.7)$$

де

$$d_j := \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j^b(u)\Pi(u)du.$$

Зокрема, $d_j \neq 0$ для $j \in \overline{H}$ і $b \geqslant s + 2$ (див. детальну оцінку аналогічної величини в роботі [144, Лема 1]).

Зауваження 2.2.2. *Поліном J_j^b в (2.2.7) можна замінити більш простим поліномом*

$$\overline{J}_{j,b}(x) := \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\frac{x-x_j}{2}}\right)^{2b} + \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\frac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^{2b}, \qquad (2.2.8)$$

при цьому функції t_j збережуть всі властивості, описані нижче. Грубо кажучи, поліном J_j^b краще ніж $\overline{J}_{j,b}$ лише тому, що він меньше осцілює, має більш різкий "пік ядра" і є "більш додатнім" поза проміжків, що несуть пік ядра.

Нище в лемах 2.2.1, 2.2.2 і в наслідку 2.2.1, через $\bar{c} = \bar{c}(s, b)$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_1(s, b)$ і $\bar{c}_2 = \bar{c}_2(s, b)$ позначені додатні сталі, що можуть залежити тільки від s і b. В лемі 2.2.1 наведемо [144, Лема 2] (до зауважиння, включно) а також нерівності (5.22) і (5.27) з [79, Лема 1].

Лема 2.2.1. *Якщо $j \in \overline{H}$ і $b \geqslant s + 2$, то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2.2.9)$$

$$t_j(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm\pi),) \qquad (2.2.10)$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leqslant \bar{c}\,(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \qquad (2.2.11)$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leqslant \bar{c}\,\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2.2.12)$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant \bar c_1\, \frac{1}{h}\, \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x\in\mathbb{R}\backslash O(Y,n,m/2), \tag{2.2.13}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant \bar c_1\, \frac{1}{h}\, \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x\in O_i(Y,n,m/2),\ i\in\mathbb{Z}. \tag{2.2.14}$$

Зауважимо, що лема 2.2.1 доводиться за допомогою нерівностей

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\bar c h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\tfrac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| &\leqslant \left|t_j'(x)\right| \leqslant \tfrac{\bar c}{h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\tfrac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|,\\ \left|\tfrac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| &\leqslant 2^{2s}\Gamma_j^{-2s}(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad j\in H_m,\ m\geqslant 10, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

$$\begin{aligned} \left|\int_x^{x_j+\pi}\Gamma_j^b(u)du\right| &\leqslant \bar c\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \quad b\in\mathbb{N}, \quad x\in[x_j, x_j+2\pi],\\ \left|\int_x^{x_j-\pi}\Gamma_j^b(u)du\right| &\leqslant \bar c\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \quad b\in\mathbb{N}, \quad x\in[x_j-2\pi, x_j], \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

детальніше див. [144].

Позначимо

$$H_0 := \{j:\ j\in H(Y,n,m),\ |j|<n\},$$

і для кожного $j\in H_0$ покладемо

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x,b,Y) := \alpha\int_{x_j-\pi}^{x} t_{j+\frac{m}{2}}(u)du + (1-\alpha)\int_{x_j-\pi}^{x} t_{j-\frac{m}{2}}(u)du, \tag{2.2.17}$$

де число α обрано з умови

$$\tau_j(x_j+\pi)=\pi. \tag{2.2.18}$$

Зауважимо, що оцінка (2.2.11) і обрані m та b тягнуть нерівності $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Детальне доведення аналогічних нерівностей можна знайти в [37, стор. 923], єдина відмінність полягає в тім, що замість невід'ємного ядра типу Джексона там, тут застосовано строго додатнє ядро. Також, доведення аналогічних співвідношень можна знайти в доведенні лем 5.2.2 і 2.4.4.

Зауважимо, що функції t_j і τ_j можна представити на $\mathbb{R}$ у вигляді:

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat R_j(x), \quad j\in\overline{H}, \tag{2.2.19}$$

$$\tau_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi-x_j}{2\pi}x + \tilde R_j(x), \quad j\in H_0, \tag{2.2.20}$$

де $\hat R_j$ і $\tilde R_j$ – деякі поліноми з $\mathbb{T}_{cn}$, див. аналогічні випадки в [144] і [37], відповідно. Також, загальний підхід отримання подібних рівностей можна знайти в доведенні лем 5.2.2 і 2.4.4.

Зафіксуємо $j \in \overline{H}$. Позначимо

$$\{z_i\}_{i=1}^{2s} := \{Y \cap (x_j - \pi, x_j + \pi]\},$$

де точки z_i пронумеровані справа наліво; $z_{2s+1} := x_j - \pi$ і $z_0 := x_j + \pi$ (тобто z_0 і z_1 можуть співпадати). Через $i(j)$ позначимо індекс $i = 0, ..., 2s$, такий, що $z_{i(j)+1} < x_j < z_{i(j)}$. Наступна лема 2.2.2 це [34, Лема 1], вона доводиться аналогічно до [90, Лема 5.2].

Лема 2.2.2. *Для кожного $j \in \overline{H}$ і кожного $b \geqslant 2s + 2$ існує $2s$ фіксованих точок u_i,*

$$z_{2s+1} < u_{2s} < ... < z_{i(j)+2} < u_{i(j)+1} < z_{i(j)+1},$$

$$z_{i(j)} < u_{i(j)} < ... < u_2 < z_1 \leqslant u_1 \leqslant z_0,$$

таких, що функція

$$\overset{\circ}{t}_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y \cup \mathbf{U}), \quad \mathbf{U} := \{u_i : u_i = u_{i+2s} + 2\pi, \ i \in \mathbb{Z}\},$$

задовольняє співвідношення (2.2.10)-(2.2.12), (2.2.19) *і, крім того,*

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{t}_j(x)\right| \leqslant \bar{c}_2 \ (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \quad x \in O_i(Y, n, m/2), \ i = 1, ..., 2s,$$

зокрема, $\chi_j(y_i) - \overset{\circ}{t}_j(y_i) = 0, \ i = 1, ..., 2s.$

Зауваження 2.2.3. *Замість $\overset{\circ}{t}_j$ в лемі 2.2.2 можна використовувати функцію*

$$t_{j,n}(x, b) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\chi_j(y_i) - t_{j,n}(y_i, b)}{t'_{j,n}(y_i, b, Y_i)} t'_{j,n}(x, b, Y_i),$$

де $t_{j,n}(x, b)$ – поліном, що визначається рівністю (2.2.7) *з* $\Pi(x) :\equiv 1$,
$Y_i := (Y \backslash \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}) \cup \{\underline{y}_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ *і* $b \geqslant 3s + 2$.

Наслідок 2.2.1. *Для кожного $j \in H_0$ і кожного $b \geqslant 2s + 2$, функція*

$$\overset{\circ}{\tau}_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, Y \cup \mathbf{U}),$$

що визначена формулою (2.2.17), *задовольняє рівність* (2.2.20) *і крім цього,*

$$\overset{\circ}{\tau}_j(x_j \pm \pi) = ((x_j \pm \pi) - x_j)_+, \quad \overset{\circ}{\tau}_j{}'(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm\pi),$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \overset{\circ}{\tau}_j(x)\right| \leqslant \bar{c}\, h \ (\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{2.2.21}$$

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}_j{}'(x)\right| \leqslant \bar{c}_2\ (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{2.2.22}$$

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}_j{}'(x)\right| \leqslant \bar{c}_2\ (\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|,\ x \in O_i(Y,n,m/2),\ i=1,...,2s. \tag{2.2.23}$$

Надалі $c > 0$ позначають сталі, що можуть залежити тільки від s. Вони можуть бути різними, навіть якщо стоятимуть в одному рядку. Позначимо

$$Q := \{(2\nu - 1)\, n\}_{\nu \in \mathbb{Z}}.$$

Лема 2.2.3. *Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то для кожного $n > N(Y)$ існує ламана $L \in \Delta^{(1)}(Y)$, яка має вузли тільки в точках x_j-их з $j \in H \backslash Q$ і така, що*

$$\|f - L\| \leqslant c\,\omega_2\,(f, \pi/n)\,. \tag{2.2.24}$$

Підкреслимо, що L в лемі 2.2.3 не може мати вузли в x_j-их, якщо $x_j \in O$ і якщо $x_j : j \in Q$.

Доведення. Зафіксуємо $n > N(Y)$. Для зручності вважатимемо, що

$$\{x_j :\ j \in Q\} \not\subset \overline{O} \backslash O \tag{2.2.25}$$

(якщо це не так, то нехай $n > N(Y) + 4$, або нехай $m = 22$ замість $m = 20$, щоб (2.2.25) і (2.2.4) справджувались). Нехай $L^* := L^*(x)$ позначає неперервну ламану з вузлами $\{x_j :\ j \in H \backslash Q\} \cup Y$, яка іннтерполює f в кожному своєму вузлі. Вочевидь,

$$L^* \in \Delta^{(1)}(Y). \tag{2.2.26}$$

Більш того, з нерівеності Уітні випливає оцінка

$$\|f - L^*\| \leqslant c\,\omega_2\,(f, \pi/n)\,. \tag{2.2.27}$$

"Підправимо" L^* так, щоб отримати L. Позначимо

$$(\overline{y}_i, \underline{y}_i) := O_i, \quad i = 1, ..., 2s,$$

тобто $\overline{y}_i$ і $\underline{y}_i$ – лівий і правий кінці інтервалу O_i, відповідно. Через $\check{L} := \check{L}(x)$ позначимо неперервну ламану, що складається на $[y_{2s}, y_0]$ з $6s$ ланок таких, що $\check{L}(y_i) = 0,\ i = 0, ..., 2s$, і при кажному $i = 0, ..., 2s,\ \check{L}(\overline{y}_i) = f(y_i) - f(\overline{y}_i)$ і $\check{L}(\underline{y}_i) = f(y_i) - f(\underline{y}_i)$. Вочевидь, що $\check{L}$ можно періодично продовжити на $\mathbb{R}$. Оскільки $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$\check{L}'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \backslash O. \tag{2.2.28}$$

Покажемо, що

$$\left\|\check{L}\right\| \leqslant c\,\omega_2\left(f,\pi/n\right). \tag{2.2.29}$$

Для кожного $i = 0,...,2s$, через $\bar{l}_i$ позначимо лінійну функцію, яка інтерполює f в точках $\overline{y}_i$ і y_i, а через $\underline{l}_i$ – лінійну функцію, яка інтерполює f в y_i і $\underline{y}_i$. Якщо $x \in \overline{O}_i$, то з нерівності Уітні випливають оцінки

$$\left|f(x) - \bar{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega_2\left(f, \underline{y}_i - \overline{y}_i\right) \leqslant c\,\omega_2\left(f,\pi/n\right),$$

$$\left|f(x) - \underline{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega_2\left(f,\pi/n\right),$$

а отже, з урахуванням (2.2.28), маємо

$$\left\|\check{L}\right\| = \max_{x\in\overline{O}}\left|\check{L}(x)\right| \leqslant \left|\bar{l}_i(x) - \underline{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega_2\left(f,\pi/n\right).$$

Тому, з означень L^* і $\check{L}$, видно, що ламана

$$L = L^* + \check{L}$$

є шуканою в лемі 2.2.3. Дійсно, ми отримали рівність

$$L(x) \equiv f(y_i), \quad x \in \overline{O}_i,\ i \in \mathbb{Z},$$

з якої, з урахуванням (2.3.1) і (2.2.28), видно, що $L \in \Delta^{(1)}(Y)$, тоді як (2.2.24) випливає з (2.2.27) і (2.3.3). Лему 2.2.3 доведено.

Позначимо

$$\delta_j := L(x_j) - L(x_{j-1}), \quad \Delta_j := L(x_{j+1}) - 2L(x_j) + L(x_{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Наслідок 2.2.2. *Якщо L – ламана з леми 2.2.3, то*

$$\delta_j\,\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad j \in H, \tag{2.2.30}$$

$$|\Delta_j| \leqslant \omega_2\left(L - f + f,\pi/n\right) \leqslant c\,\omega_2\left(f,\pi/n\right), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.31}$$

$$\Delta_j = \delta_j = 0, \quad j \notin H, \tag{2.2.32}$$

$$\Delta_j = 0, \quad j \in Q. \tag{2.2.33}$$

Позначимо

$$b_1 := s + 2, \quad b_2 := 3(s+1), \quad c_1 := \bar{c}_1(s,b_1), \quad c_2 := \bar{c}_2(s,b_2), \quad n_1 := 2\left[1 + c_2/c_1\right]n$$

($[\cdot]$ – ціла частина). Для кожного $j = 1-n,...,n-1$, через j^* і j_* позначимо індекси такі, що $x_{j^*,n_1} = (x_{j,n} + x_{j-1,n})/2$ і $x_{j_*,n_1} = (x_{j+1,n} + x_{j,n})/2$, відповідно.

Лема 2.2.4. *Для кожного* $j \in H_0$, *дві функції*

$$\tau_{j^*}(x) := \tau_{j^*,n_1}(x, b_2, Y \cup \mathbf{U}) + \frac{h_n}{2}\, t_{j^*,n_1}(x, b_1, Y),$$

$$\tau_{j_*}(x) := \tau_{j_*,n_1}(x, b_2, Y \cup \mathbf{U}) - \frac{h_n}{2}\, t_{j_*,n_1}(x, b_1, Y),$$

при $x \in [-\pi, \pi]$, *задовольняють нерівності*

$$\left(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)\right)\, \Pi(x)\, \Pi(x_j) \geqslant 0, \tag{2.2.34}$$

$$\left(\tau'_{j_*}(x) - \chi_{j_*}(x)\right)\, \Pi(x)\, \Pi(x_j) \leqslant 0, \tag{2.2.35}$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*_*}(x)\right| \leqslant c\, h_n\, \Gamma^2_{j,n}(x), \tag{2.2.36}$$

де $j^*_* = j^*$ *або* j_*.

Доведення. З двох аналогічних нерівнстей (2.2.34) і (2.2.35), перевіримо лише (2.2.34). Якщо $x \in [-\pi, \pi] \backslash O(Y, n_1, m/2)$, то з (2.2.9), (2.2.13), (2.2.22) і вибору n_1 випливає, що

$$\left(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)\right) \Pi(x) \Pi(x_j)$$
$$= \left(\frac{h_n}{2} t'_{j^*,n_1}(x, b_1, Y) + \tau'_{j^*,n_1}(x, b_2, Y \cup \mathbf{U}) - \chi_{j^*}(x)\right) \Pi(x) \Pi(x_j)$$
$$\geqslant c_1 \frac{h_n}{2h_{n_1}} \Gamma^{4(s+1)}_{j^*,n_1}(x) - c_2 \Gamma^{4s+5}_{j^*,n_1}(x) \geqslant \left(c_1 \frac{h_n}{2h_{n_1}} - c_2\right) \Gamma^{4(s+1)}_{j^*,n_1}(x) \geqslant 0.$$

Збираючи (2.2.9), (2.2.14) і (2.2.23), знаходимо (2.2.34) для решти x, аналогічно. Нерівності (2.2.21) і (2.2.11) тягнуть (2.2.36). А саме,

$$|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)| = \left| \left((x - x_j)_+ - (x - x_{j^*})_+ - \frac{h_n}{2} \chi_{j^*}(x) \right) \right.$$
$$\left. + \left((x - x_{j^*})_+ - \tau_{j^*,n_1}(x, b_2, Y \cup \mathbf{U})\right) + \frac{h_n}{2} \left(\chi_{j^*}(x) - t_{j^*,n_1}(x, b_1, Y) \right) \right|$$
$$\leqslant c\, h_n\, \Gamma^2_{j,n}(x) + c\, h_{n_1}\, \Gamma^{4(s+1)}_{j^*,n_1}(x) + c\, h_n\, \Gamma^{s+3}_{j^*,n_1}(x) \leqslant c\, h_n\, \Gamma^2_{j,n}(x).$$

Для індексу j_*, нерівність (2.2.36) доводиться аналогічно. Лему 2.2.4 доведено.

Доведення теореми 2.2.1

Нехай L – ламана з леми 2.2.3. Представимо її на $[-\pi, \pi]$ у вигляді

$$L(x) \equiv l(x) + \frac{1}{h} \sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j (x - x_j)_+ \equiv l(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j (x - x_j)_+,$$

де $l(x) := L(-\pi) + [x_n, x_{n-1}, L](x+\pi) := L(-\pi) + \frac{L(x_n)-L(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x+\pi)$, і де ми скористалися (2.3.8).

Покладемо

$$P_n(x) := l(x) + \frac{1}{h}\sum_{j\in H_0} \Delta_j\, \tau_j(x), \tag{2.2.37}$$

де

$$\tau_j(x) := \begin{cases} \tau_{j^*}(x) & \text{якщо} \quad \Delta_j\, \Pi(x_j) \geqslant 0, \\ \tau_{j_*}(x) & \text{якщо} \quad \Delta_j\, \Pi(x_j) < 0. \end{cases}$$

Переконаємося, що P_n це шуканий в теоремі 2.2.1 поліном. Спочатку покажемо, що P_n це взагалі тригонометричний поліном порядку cn. Підставимо (2.2.19) і (2.2.20) у (2.2.37). З урахуванням (2.3.8) і (2.3.9), маємо

$$P_n(x) = \frac{A}{4\pi}x^2 + [x_n, x_{n-1}, L]\, x + \frac{n}{\pi} x \sum_{j\in H_0} \Delta_j \left(\frac{\pi - x_{j^*_*}}{2\pi} \pm \frac{h}{2}\frac{1}{2\pi} \right) + R_n(x),$$

де

$$A := \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j = -\frac{n}{\pi}\Delta_n = 0,$$

$$R_n(x) := L(-\pi) + [x_n, x_{n-1}, L]\pi + \frac{n}{\pi}\sum_{j\in H_0} \Delta_j\, \hat{\hat{R}}_{j^*_*}(x)$$

– деякий поліном порядку cn, тобто

$$P_n(x) = x\left([x_n, x_{n-1}, L] + \frac{n}{2\pi^2}\sum_{j\in H_0} \Delta_j \left(\pi - x_j \mp \frac{h}{2} \pm \frac{h}{2} \right) \right) + R_n(x)$$

$$= x\left([x_n, x_{n-1}, L] + \frac{A}{2} + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j\, j \right) + R_n(x)$$

$$= \frac{x}{\pi}\left(n\, L(x_{n-1}) - n\, L(x_n) + \frac{1}{2}\Big[(n-1)\,(L(x_n) - L(x_{-n})) - n\, (L(x_{n-1}) - L(x_{1-n}))\, \Big] \right)$$

$$+ R_n(x) = x\,\frac{n}{2\pi}\big(L(x_{n-1}) - 2\,L(x_n) + L(x_{1-n}) \big) + R_n(x) = R_n(x),$$

оскільки $L(x_n) = L(x_{-n})$ и $L(x_{1-n}) = L(x_{n+1})$.

Доведемо, що $P_n \in \Delta^{(1)}(Y)$. Нехай $x \in [-\pi, \pi]$, тоді, з урахувунням (2.3.8), нерівності (2.3.6), (2.2.34), (2.2.35) і $x_{j^*_*} \leqslant x_{(j-1)^*_*}$, дозволяють записати

$$P_n'(x)\Pi(x)$$

$$= \left([x_n, x_{n-1}, L]\, \chi_n(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \left(\tau_j'(x) - \chi_{j_*^*}(x) \right) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} (\delta_{j+1} - \delta_j)\, \chi_{j_*^*}(x) \right) \Pi(x)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \left(\tau_{j_*^*}'(x) - \chi_{j_*^*}(x) \right) \Pi(x) - \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0 \cup \{n\}} \delta_j \left(\chi_{j_*^*}(x) - \chi_{(j-1)_*^*}(x) \right) \Pi(x)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} \Big(\Delta_j \Pi(x_j) \Big) \left(\left(\tau_{j_*^*}'(x) - \chi_{j_*^*}(x) \right) \Pi(x) \Pi(x_j) \right)$$

$$- \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0 \cup \{n\}} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} \Big(\delta_j\, \Pi(x_j) \Big) \left(\left(\chi_{j_*^*}(x) - \chi_{(j-1)_*^*}(x) \right) \Pi(x) \Pi(x_j) \right) \geqslant 0$$

($n_*^* := n$ и $-n_*^* := -n$).

Щоб довести (2.2.2), представимо різницю $f - P_n$, на $[-\pi, \pi]$, у вигляді

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) + L(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \left((x - x_j)_+ - \tau_j(x) \right).$$

Тепер оцінка (2.2.2) випливає з (2.2.24), (2.2.36), (2.3.7) і (2.2.5). Теорему 2.2.1 доведено.

2.3 Наближення диференційовних періодичних функцій

Результати цього підрозділу містяться в [13, 16].

Нагадаємо, що якщо $f \in C^{(r)} := \left\{ f : f^{(r)} \in C \right\}$, $r \in \mathbb{N}$, то наслідком (2.2.1) є нерівність

$$E_n(f) \leqslant \frac{c(r,k)}{n^r} \omega_k \left(f^{(r)}, \pi/n \right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

В теоремі 2.3.2, наведено її комонотонний аналог. Він випливає з наступної теореми 2.3.1, яка доводиться в цьому підрозділі.

Теорема 2.3.1. *Якщо* $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(s)}{n} \omega_3 \left(f', \pi/n \right), \quad n \geqslant N(Y), \tag{2.3.2}$$

а якщо $f \in C^{(2)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(s,k)}{n^2} \omega_k \left(f'', \pi/n \right), \quad n \geqslant N(Y,k), \tag{2.3.3}$$

$$\left(E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{c(s, r+k)}{n^r} \omega_k \left(f^{(r)}, \pi/n \right), \quad f \in C^{(r)},\ r \geqslant 2, \right)$$

де $N(Y)$ *і* $N(Y,k)$ *– сталі, які залежать тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* k, *а* $c(s)$ *і* $c(s,k)$ *– сталі, які залежать тільки від* s *і* k, *відповідно.*

Наслідком теореми 2.3.1 і нерівності Уітні [167] $\|f - f(0)\| \leqslant k\omega_k(f, k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, є наступна теорема 2.3.2.

Теорема 2.3.2. *Якщо* $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{C(Y)}{n}\,\omega_3\left(f', \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3.4}$$

а якщо $f \in C^{(2)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{C(Y,k)}{n^2}\,\omega_k\left(f'', \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3.5}$$

$$\left(E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{C(Y, r+k)}{n^r}\,\omega_k\left(f^{(r)}, \pi/n\right), \quad f \in C^{(r)},\ r \geqslant 2\right)$$

де $C(Y)$ *і* $C(Y,k)$ *– сталі, які залежать тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* k, *відповідно.*

Зауваження 2.3.1. *Ми вважаємо, що сталі* $N(Y)$, $N(Y,k)$, $C(Y)$ *і* $C(k,Y)$ *в теоремах 2.3.1, 2.3.2 неможливо замінити сталими, які не залежать від* Y *(а залежать, скажімо, від* s*) а також, що* ω_3 *в* (2.3.2) *та* (2.3.4) *неможливо замінити на* ω_k *з* $k > 3$, *однак ці обидва припущення ми не доводимо. Алгебраїчний аналог другого припущення доведено в теоремі 6.1.1.*

Плєшаков [32, Розділ 2] довів частинний випадок теореми 2.3.2: *Якщо* $f \in W^r \cap \Delta^{(1)}(Y)$ *(де* W^r *– множина функцій* g *з абсолютно неперервними* $g^{(r-1)}$ *і з* $|g^{(r)}(x)| \leqslant 1$ *м. с. на* $\mathbb{R}$*), то*

$$E_n^{(1)}(f) \leqslant \frac{C(r,Y)}{n^r} \quad n \in \mathbb{N},\ r \geqslant 2,$$

де $C(r,Y)$ *– стала, яка залежать тільки від* r *і* Y. Для $r = 1$ (і $r = 2$, також) це тверджeня є частинним випадком (2.2.3).

Допоміжні факти для доведення теореми 2.3.1

Надалі через c_ν, $\nu = 1, \dots, 37$, позначені додатні числа, які можуть залежити тільки від фіксованих $r, k, l \in \mathbb{N}$ і $p \in \mathbb{Z}_+$. Доведемо лему 2.3.1, яка дещо уточнює оцінку (2.2.1), а отже і (2.3.1), а також відповідні оцінки для одночасного наближення функції і її похідних. Нехай

$$J_{n,l}(x) := \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2l}, \quad K_{n,l}(x) := J_{n,l}(x)\left(\int_{-\pi}^{\pi} J_{n,l}(x)dx\right)^{-1}$$

– парне і невід'ємне ядро типу Джексона з $n, l \in \mathbb{N}$, і

$$\sigma_{n,l}(f,x) := (-1)^{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+it)dt$$

– поліном з $\mathbb{T}_{l(n-1)}$, запропонований Стєчкіним [43] для доведення (2.2.1), де $f \in C$ і $k \in \mathbb{N}$.

Лема 2.3.1. *При кожних натуральних* $(r+1)$, k, l, $2l \geqslant k+r+2$, *і* n *для будь-якої функції* $f \in C^{(r)}$ *поліном* $\sigma_{n,l} \in \mathbb{T}_{l(n-1)}$ *є таким, що при будь-яких* x *і* $\delta > 0$

$$\left| f^{(p)}(x) - \sigma_{n,l}^{(p)}(f,x) \right|$$

$$\leqslant \frac{c_1}{n^{r-p}} \left(\omega_k \left(f^{(r)}, 1/n, [x-\delta, x+\delta] \right) + \left(\frac{1}{n\delta} \right)^{2l-k-r-1} \omega_k \left(f^{(r)}, 1/n \right) \right)$$

$$\left(\leqslant \frac{c_1}{n^{r-p}} \omega_k \left(f^{(r)}, \pi/n \right) \right), \quad p = 0, 1, ..., r. \tag{2.3.6}$$

Доведення. Без втрати загальності будемо вважати $\delta \in [1/n, \pi]$. Оцінимо $|f(x) - \sigma_{n,l}(f,x)|$. Оскільки,

$$f(x) - \sigma_{n,l}(f,x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+it)dt$$

$$= (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \Delta_t^k f(x) dt, \tag{2.3.7}$$

то

$$\left| f(x) - \sigma_{n,l}(f,x) \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \left| \Delta_t^k f(x) \right| dt = \int_{-\pi}^{-\delta/k} + \int_{-\delta/k}^{\delta/k} + \int_{\delta/k}^{\pi}$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.3.8}$$

Оцінимо I_2.

$$I_2 \leqslant \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \max_{|h| \leqslant |t|} \left| \Delta_t^k f(x) \right| dt \leqslant \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \sup_{|h| \leqslant |t|} \left\| \Delta_t^k f(\cdot) \right\|_{[x-\delta+k|h|, x+\delta-k|h|]} dt$$

$$\leqslant \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \omega_k \left(f, |t|, [x-\delta, x+\delta] \right) dt.$$

Для оцінки останнього інтегралу скористаємося властивістю

$$\omega_k \left(f, n|t|n^{-1}, [a,b] \right) \leqslant n^k \left(|t| + n^{-1} \right)^k \omega_k \left(f, n^{-1}, [a,b] \right) \tag{2.3.9}$$

і нерівністю

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t)\left(|t|+n^{-1}\right)^k dt \leqslant c_2\, n^{-k},$$

див. [43, Лема 8]. Отже, $I_2 \leqslant c_2\,\omega_k\left(f, n^{-1}, [x-\delta, x+\delta]\right)$. З двох аналогічних інтегралів I_1 і I_3, оцінимо лише I_3. При цьому врахуємо (2.3.9) і властивості $K_{n,l}$, див., наприклад, [25, стор. 131]. Нехай $\delta/k \leqslant n^{-1} \leqslant \delta$. Тоді,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t)\left|\Delta_t^k f(x)\right| dt \leqslant \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t)\left\|\Delta_t^k f(\cdot)\right\| dt \\
&\leqslant \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t)\omega_k(f,t)\,dt \leqslant n^k\omega_k(f,1/n)\int_{\delta/k}^{\pi}(t+1/n)^k K_{n,l}(t)dt \\
&\leqslant n^k\omega_k(f,1/n)\left(\frac{2^k}{n^k}\int_{\delta/k}^{1/n} K_{n,l}(t)dt + 2^k\int_{1/n}^{\pi} t^k K_{n,l}(t)dt\right) \\
&\leqslant n^k\omega_k(f,1/n)\left(\frac{2^k}{n^k}\int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t)dt + \frac{2^k}{c_2 n^{2l-1}}\int_{1/n}^{\pi} t^k\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l} dt\right) \\
&\leqslant n^k\omega_k(f,1/n)\frac{2^k}{c_3 n^{2l-1}}\left(1/n^k\int_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{2l}} + \pi^{2l}\int_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{t^{2l-k}}\right) \\
&= \omega_k(f,1/n)\frac{2^k\pi^{2l}}{c_3 n^{2l-k-1}}\left(\frac{k^{2l-1}}{n^k(2l-1)\delta^{2l-1}} + \frac{k^{2l-k-1}}{(2l-k-1)\delta^{2l-k-1}}\right) \\
&\leqslant \frac{c_4}{(n\delta)^{2l-k-1}}\omega_k(f,1/n).
\end{aligned}$$

Для $\delta/k > 1/n$, аналогічно

$$I_3 \leqslant n^k\omega_k(f,1/n)\frac{2^k\pi^{2l}}{c_3 n^{2l-1}}\int_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{t^{2l-k}} \leqslant \frac{c_4}{(n\delta)^{2l-k-1}}\omega_k(f,1/n).$$

Збираючи у (2.3.8) оцінки $I_{1,2,3}$, знайдемо нерівність (2.3.6) для випадку $r=p=0$. Решта випадків леми 2.3.1 випливають з (2.3.7), доведення (2.3.8) і оцінок

$$\omega_{k+i}\left(f, n^{-1}, [a,b]\right) \leqslant n^{-i}\omega_k\left(f^{(i)}, n^{-1}, [a,b]\right), \quad i = 0,1,...,r.$$

Лему 2.3.1 доведено.

Надалі числа c_ν можуть залежити ще й від фіксованих $s, b \in \mathbb{N}$, $n > N(Y) = N(Y,20)$ і без втрати загальності будемо вважати, що $y_{2s} = -\pi$. Позначимо

$$J_j(x) := \left((J_{2n,1}(x-(x_j+\pi/(4n))) + J_{2n,1}(x-(x_j+3\pi/(4n))))\right)^b, \quad b \in \mathbb{N}.$$

Для $j \in H$ і $b \geqslant s+4$ покладемо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x,b,Y) := \frac{1}{d_j}\int_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{2.3.10}$$

$$\breve{t}_j(x) := \breve{t}_{j,n}(x,b,Y) := \frac{1}{\breve{d}_j}\int_{x_j-\pi}^{x} \Pi_j(u)J_j(u)\Pi(u)du \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{2.3.11}$$

де

$$d_j := \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du, \quad \breve{d}_j := \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \Pi_j(u)J_j(u)\Pi(u)du,$$

$$\Pi_j(x) := -\Pi(x, \{x_j, x_{j-1}\}),$$

зокрема, $d_j \neq 0$ і $\breve{d}_j \neq 0$ (для вказаних j і b), див. [144, Лема 1]. В наступній лемі 2.3.2 (майже як в лемі 2.2.1) зберемо, співвідношення (13)-(16) з [144] і аналоги нерівностей (5.22) і (5.27) з [79]. Зауважимо, що співвідношення в [144] описують невід'ємне ядро $J_{n,l}(x - x_j)$, а їх аналоги в лемі 2.3.2 – строго додатне $J_j(x)$, як суму двох "сусідніх" невід'ємних.

Лема 2.3.2. *Якщо $j \in H$ і $b \geqslant s+4$, то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3.12}$$

$$\breve{t}_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad x \in [x_j - 2\pi + h, x_j + 2\pi]\backslash I_j, \tag{2.3.13}$$

$$t_j(x_j \pm \pi) = \breve{t}_j(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm\pi), \tag{2.3.14}$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leqslant c_6 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s-1}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j + 2\pi], \tag{2.3.15}$$

$$\left|\chi_j(x) - \breve{t}_j(x)\right| \leqslant c_6 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s-1}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j + 2\pi], \tag{2.3.16}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leqslant c_7 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3.17}$$

$$\left|\breve{t}_j'(x)\right| \leqslant c_7 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3.18}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_8 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash O(Y,n), \tag{2.3.19}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_8 \frac{1}{h} \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i(Y,n),\ i \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.20}$$

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + R_j(x), \quad \breve{t}_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \breve{R}_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3.21}$$

де R_j і $\breve{R}_j$ – деякі поліноми з $\mathbb{T}_{c_5 n}$.

Через Φ^k, $k \in \mathbb{N}$, позначимо множину всіх k-мажорант, тобто неперервних і неспадних на $[0,\infty)$ функцій $\phi(t)$ таких, що $\phi(0) = 0$ і $t^{-k}\phi(t)$ не зростає при $t > 0$. Відомо (див., наприклад [25, стор. 167]), що для будь-якого модуля $\omega_k(g,t)$, в множині Φ^k є функція $\phi(t)$ така, що $\omega_k(g,t) \leqslant \phi(t) \leqslant 2^k\omega_k(g,t)$, $t \geqslant 0$. Оберемо $\varphi \in \Phi^k$ таку, що

$$\omega_k(f',t) \leqslant \varphi(t) \leqslant 2^k\omega_k(f',t), \quad t \geqslant 0.$$

Позначимо $H_0 := H_0(Y,n) := \{j \in H(Y,n) : |j| < n\}$ і $Z := \{z_q\}_{q=0}^{n^*} := \{x_j : j \in H_0\} \cup \{y_i\}_{i=0}^{2s}$, де $n^* := 2n+1-8(2s+1)$ і точки z_q упорядковані за спаданням. Нехай $j(q) := j$, якщо $z_q = x_j$ (з $j \in H_0$); $j(q) := j(q-1)$, якщо $z_q = y_i$. Покладемо $b_1 = s+4$.

Лема 2.3.3. *Якщо f' 2π-періодична, $\|f'\| \leqslant \varphi(h)$ і $f'(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$, то функція*

$$\tau_n(f,x) := f(-\pi) + \sum_{q=1}^{n^*} \left(f(z_{q-1}) - f(z_q)\right) t_{j(q),n}(x, b_1, Y)$$

задовольняє нерівності

$$\|f - \tau_n(f,\cdot)\| \leqslant c_{11} h\varphi(h), \tag{2.3.22}$$

$$\tau_n'(f,x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.3.23}$$

Крім того, якщо, для $A = const$, $f(x) - Ax$ періодична, то $\tau_n(f,x) - Ax \in \mathbb{T}_{c_5 n}$.

Доведення. Нерівності $\left(f(x_{j-1}) - f(x_j)\right)\Pi(x_j) \geqslant 0,\ j \in H_0$, і (2.3.12) породжують (2.3.23). Оцінка (2.3.22) доводиться за допомогою (2.3.15), (2.2.5) і рівності $f(x) - \tau_n(f,x) = f(x) - S(x) + S(x) - \tau_n(f,x),\ x \in [-\pi,\pi]$, де $S(x) := f(-\pi) + \sum_{q=1}^{n^*}(f(z_{q-1}) - f(z_q))\chi_{j(q)}(x)$. Включення $\tau_n(f,x) - Ax \in \mathbb{T}_{c_5 n}$ доводиться аналогічно подібному включенню в [21, стор. 207], або, що те саме, в [22, стор. 721], (сума алгебраїчних доданків з (2.3.21) дорівнює Ax, оскільки $\tau_n(f,x) = \tau_n(S,x)$, а на $O_i,\ i = 0,...,2s,\ S(x) = const$, тому їх сума по $q = 1,...,n^*$ дорівнює сумі по $j = 1-n,...,n$ і дорівнює Ax). Лему 2.3.3 доведено.

Для кожного $i \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$\left(\underline{y}_i, \overline{y}_i\right) := \left(x_{\underline{j}(i)}, x_{\overline{j}(i)}\right) := O_i,$$

тобто лівий і правий кінці проміжку O_i. Для $x \in \mathbb{R}$ нехай

$$d(x,O) := \min_{i \in \mathbb{Z}} \left\{|x - (\underline{y}_i + h/2)|, |x - (\overline{y}_i + h/2)|\right\},$$

$$\widetilde{t}_{i,n}(x) := t_{\underline{j}(i),n}(x, b_1, Y)\,\mathrm{sign}\,\Pi(\underline{y}_i) + t_{\overline{j}(i),n}(x, b_1, Y)\,\mathrm{sign}\,\Pi(\overline{y}_i).$$

Лема 2.3.4. *Функція*

$$U_n(x) := h\,\varphi(h) \sum_{i=1}^{2s} \widetilde{t}_{i,n}(x), \tag{2.3.24}$$

задовольняє співвідношення

$$U_n \in \mathbb{T}_{c_5 n} \cap \Delta^{(1)}(Y), \tag{2.3.25}$$

$$\|U_n\| \leqslant c_{12} h \varphi(h), \tag{2.3.26}$$

$$|U_n'(x)| \geqslant c_{13}\varphi(h)\big((\check{\Gamma}_n\,(d(x,O))\,)\big)^{4(s+2)}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash O, \tag{2.3.27}$$

$$|U_n'(x)| \geqslant \frac{c_{13}}{h}\varphi(h)\,|x-y_i|\,, \quad x \in O_i,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.28}$$

Доведення. З (2.3.12) випливає, що (2.3.25)-(2.3.28) є наслідками (2.3.21) (доданки в (2.3.24) мають попарно протилежні знаки), (2.3.15) (і рівності $U_n = U_n - S + S$, де $S-$ кусково-стала функція у формі (2.3.24)), (2.3.19) ($|U_n(x)|$ дорівнює сумі модулів доданків) і (2.3.20), відповідно. Лему 2.3.4 доведено.

Нам буде потрібна нерівність Уітні [167]

$$\|g - L_{k-1}(g,\cdot,[a,b])\|_{[a,b]} \leqslant c_{14}\omega_k\left(g,(b-a)/k,[a,b]\right), \quad g \in C([a,b]), \tag{2.3.29}$$

і лема 4.2' з [56]: *якщо* $g \in C^{(p)}([a,b]),\ p \in \mathbb{N},\ p < k,$ *то*

$$\left\|g^{(p)} - L_{k-1}^{(p)}(g,\cdot,[a,b])\right\|_{[a,b]} \leqslant c_{15}\omega_{k-p}\left(g^{(p)},(b-a)/k,[a,b]\right). \tag{2.3.30}$$

Позначимо

$$l_1 := \left[\frac{k+r+1}{2}\right] + 2(s+2)+1, \quad J_i := J_{i,n} := [y_i - h, y_i + h],$$

$$Y_i := \big((Y\backslash\{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}\,)\big)\bigcup\left\{\underline{y}_i + 2\pi\nu\right\}_{\nu\in\mathbb{Z}},$$

$$\widehat{t}_{i,n}(x) := t_{\bar{j}(i),n}(x,b_1,Y_i) - \breve{t}_{\bar{j}(i),n}(x,b_1,Y_i),$$

де $[\cdot]-$ ціла частина і $i \in \mathbb{Z}$.

Лема 2.3.5. *Якщо* $f \in C^{(1)}$ *і* $f'(y_i) = A$ *для всіх* $i \in \mathbb{Z}$, *де* $A = const$, *то поліном*

$$\widehat{\sigma}_n(f,x) := \sigma_{n,l_1}(f,x) - \sum_{i=1}^{2s}\frac{\sigma_{n,l_1}'(f,y_i) - A}{\widehat{t}_{i,n}'(y_i)}\widehat{t}_{i,n}(x) \in \mathbb{T}_{c_5 n},$$

при будь-яких $\delta > 0$, *задовольняє нерівності*

$$\|f - \widehat{\sigma}_n(f,\cdot)\| \leqslant c_{16} h\varphi(h), \tag{2.3.31}$$

$$\left|f'(x) - \widehat{\sigma}_n'(f,x)\right|$$

$$\leqslant c_{17}\left(\omega_k(f',h,[x-\delta,x+\delta]) + \left(\frac{1}{n\delta}\right)^{4(s+2)+1}\varphi(h)\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3.32}$$

$$\left\|f' - \widehat{\sigma}_n'(f,\cdot)\right\| \leqslant c_{17}\varphi(h), \tag{2.3.33}$$

$$\left|L_{k-1}(f', x, J_i) - L_{k-1}(f', y_i, J_i) - \widehat{\sigma}'_n(f, x) + A\right|$$
$$\leqslant \frac{c_{18}}{h}\,\varphi(h)|x - y_i|, \quad x \in J_i,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.34}$$

зокрема, $\widehat{\sigma}'_n(f, y_i) = A$.

Доведення. Включення $\widehat{\sigma}_n \in \mathbb{T}_{c_5 n}$ є наслідком (2.3.21), (2.3.12) і (2.3.13). Користуючись (2.3.6), (2.3.19) з (2.3.12) і (2.3.13), а також (2.3.15) і (2.3.16), для $x \in [-\pi, \pi]$, запишемо

$$|f(x) - \widehat{\sigma}_n(f, x)| \leqslant c_1 h\varphi(h) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2s} \frac{|\sigma'_{n,l_1}(f, y_i) - f'(y_i)|}{|t'_{\bar{j}(i),n}(y_i, b_1, Y_i)|}\left|t_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i) - \chi_{\bar{j}(i)}(x) + \chi_{\bar{j}(i)}(x) - \breve{t}_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i)\right|$$
$$\leqslant c_1 h\varphi(h) + 2s\frac{c_1\varphi(h)h}{c_8\left(\Gamma_{\bar{j}(1)}(y_1)\right)^{2b_1+2s}} 2c_6\left(\Gamma_{\bar{j}(1)}(x)\right)^{2b_1-s-1} \leqslant c_{16} h\varphi(h),$$

тобто оцінка (2.3.31) вірна. Нерівність (2.3.32), а отже і (2.3.33), доводятся аналогічно, з використанням (2.3.17) і (2.3.18) замість (2.3.15) і (2.3.16). Оскільки, за означеннями $f'(y_i) = \widehat{\sigma}'_n(f, y_i) = A,\ i \in \mathbb{Z}$, то (2.3.34) вірна, якщо на J_i справджується нерівність

$$|B'(x)| := \left|L'_{k-1}(f', x, J_i) - \widehat{\sigma}''_n(f, x)\right| \leqslant \frac{c_{18}}{h}\varphi(h). \tag{2.3.35}$$

З (2.3.29) і (2.3.33) випливає оцінка

$$\|B\|_{J_i} = \left\|L_{k-1}(f', \cdot, J_i) - f' + f' - \widehat{\sigma}'_n(f, \cdot)\right\|_{J_i} \leqslant c_{14}\omega_k\left(f', |J_i|/k, J_i\right) + c_{17}\varphi(h)$$
$$\leqslant c_{19}\omega_k\left(f', h\right) + c_{17}\varphi(h) \leqslant c_{20}\varphi(h).$$

З [43] відомо, що якщо поліном задовольняє (2.3.33), то $\left\|\widehat{\sigma}_n^{(k+1)}(f, \cdot)\right\| \leqslant c_{21}\varphi(h)/h^k$. Тому

$$\|B^{(k)}\|_{J_i} \leqslant c_{21}\,\varphi(h)/h^k.$$

Тепер похідні $B^{(p)},\ p < k$, задовольняють нерівність типу Колмогорова (див. [56, стор. 35])

$$\|B^{(p)}\|_{J_i} \leqslant c_{22}\left(|J_i|^{k-p}\frac{c_{21}}{h^k}\varphi(h) + \frac{1}{|J_i|^p}c_{20}\varphi(h)\right) \leqslant \frac{c_{18}}{h^p}\varphi(h).$$

Лему 2.3.5 доведено.

Доведення теореми 2.3.1

Коментар. Теорему 2.3.1 доведем у наступний спосіб: Функцію f представимо сумою $f = f_1 + f_2$, де $\|f'_1\|$ буде "маленькою" скрізь на $\mathbb{R}$, а $|f'_2(x)|$ буде "великим" на "більшій" частині деякої множини F. Тоді, означимо поліном P_n, як суму п'яти поліномів, перший з яких τ_n буде наближати f_1 (як треба) і буде комонотонним з f, а другий $\hat{\sigma}_n$ буде (теж як треба) наближати f_2 і, що важливо, f_2' (своєю похідною, звісно), але він не буде комонотонним з f. Натомість його похідна (завдяки спільному наближенню) буде "великою" там де "велика" f_2'. Три інші поліноми U_n, Q і M будуть мати "маленькі" норми (рівні за порядком оцінкам в теоремі) і будуть "виправляти" поліном $\hat{\sigma}_n'$ (кожен на своїй множині) так, щоб їх спільна з $\hat{\sigma}_n$ сума вже була комонотонним поліномом. Це можливо завдяки існуванню ділянок, де $|\hat{\sigma}_n'(x)|$ "великий" і тому на цих ділянках, виправляючі поліноми можуть порушувати свою особисту комонотонність з f (на величину не більшу ніж $|\hat{\sigma}_n'(x)|$, разом). Без такого порушення, зробити їх норми маленькими неможливо, принципово.

1°. Для $j \in \mathbb{Z}$ будемо писати $j \in V$, якщо існує точка $x \in I_j$ така, що

$$|f'(x)| \leqslant 2c_{17}\varphi(h). \tag{2.3.36}$$

Позначимо $c_{23} := 96k[c_7/c_8 + 1]$ і $c := c_{23} + 20s + 15$. Без втрати загальності будемо вважати, що n ділеться на c, тобто $n = pc$, де $p \in \mathbb{N}$. Покладемо $\nu_p = n+8$ і $\nu_{-p} = 8-n$. Для кожного $q = p-1, ..., 0, ..., 1-p$ нехай ν_q позначає найменше ціле серед цілих $j \geqslant cq$ для яких $[x_{j+3}, x_{j-3}] \cap O = \varnothing$. Позначимо

$$E_q := [x_{\nu_q}, x_{\nu_{q-1}}] \quad \left(= I_{\nu_q} \cup I_{\nu_q - 1} \cup ... \cup I_{\nu_{q-1}+1}\right), \quad q = \overline{1-p, p}.$$

Отже, $cq + 15 \geqslant \nu_q \geqslant cq$ і кожен відрізок E_q складається принаймні з $c_{23} + 20s$ і не більше ніж з $c_{23} + 20s + 30$ різних відрізків I_j.

Надалі будемо вважати, що $q \in \mathbb{Z}$ ($f-$ періодична). Будемо писати $q \in W$, якщо E_q містить принаймні $2k-1$ проміжків I_j таких, що $j \in V$. Зауважимо, що якщо $q \in W$, то (2.3.36) і (2.3.29) тягнуть нерівність

$$|f'(x)| \leqslant c_{24}\varphi(h), \quad x \in E_q. \tag{2.3.37}$$

Далі в означенні 2.3.1 представимо функцію $f'(x)$ сумою "маленької" функції $g_1(x)$ і "великої" функції $g_2(x)$ так, щоб на множині

$$E := \cup_{q \notin W} E_q$$

$g_2(x) \equiv f'(x)$, а на $\mathbb{R} \backslash E$, якщо $E \neq \mathbb{R}$, (за винятком околів кінців E) $-$ $g_2(x) \equiv 0$. В кінцях E множинням на функцію S_j забезпечимо неперервність.

Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$S_j(x) := \int_{x_j}^{x} (u - x_j)^k (x_{j-1} - u)^k du \left(\int_{x_j}^{x_{j-1}} (u - x_j)^k (x_{j-1} - u)^k du \right)^{-1}.$$

Для довільної непорожньої множини $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$, через $\mathbf{E}^*$ позначимо об'єднення всіх $I_j,\ j \in \mathbb{Z}$, таких, що $I_j \cap \mathbf{E} \neq \varnothing$. Аналогічно, $\mathbf{E}^{**} := (\mathbf{E}^*)^*$ і т.д. ($\mathbf{E} \subset \mathbf{E}^* \subset \mathbf{E}^{**} \subset ...$).

Означення 2.3.1. *Для $x \in I_j$ покладемо*

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad I_j \subset E^*, \\ f'(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{\mathbb{R} \backslash E^{**}}, \\ f'(x) S_j(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \backslash E^*} \ \textit{і} \ x_j \in E^*, \\ f'(x)(1 - S_j(x)), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \backslash E^*} \ \textit{і} \ x_j \notin E^*, \end{cases}$$

і $g_2(x) := f'(x) - g_1(x)$.

Лема 2.3.6. *Мають місце нерівності*

$$\|g_1\| \leqslant c_{24} \varphi(h), \quad \omega_k(g_1, t) \leqslant c_{25} \varphi(t), \quad \omega_k(g_2, t) \leqslant (c_{25} + 1) \varphi(t).$$

Лема 2.3.6 це фактично лема 17.4 з [56]. Зауважимо, що її перша нерівність випливає з (2.3.37); друга – з першої, оцінки $\omega_k(f', t) \leqslant \varphi(t)$ і нерівності $|S_j^{(\nu)}(x)| \leqslant c_{26}/h^{\nu},\ x \in I_j,\ \nu \in \mathbb{N}$; третя – з другої.

Позначимо $c_{27} := [c_{25} + 2]$. Без втрати загальності будемо вважати, що $p \geqslant 4c_{27}$. Представимо множину $E \neq \mathbb{R}$ у вигляді об'єднення відрізків $F_m := [a_m, b_m],\ m \in \mathbb{Z}$, що не перетинаються. Будемо писати $m \in X$, якщо F_m складається не більше ніж з c_{27} різних відрізків E_q (або, що те саме, – не більше ніж з $c_{27}c + 15$ різних відрізків I_j). Якщо $m \notin X$, то F_m містить принаймні $c_{27}c + c_{23}$ різних I_j.

Означення 2.3.2. *Покладемо*

$$g_3(x) := \begin{cases} g_2(x), & x \in (\cup_{m \in X} F_m)^{**}, \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{R} \backslash (\cup_{m \in X} F_m)^{**}}, \end{cases}$$

і $g_4(x) := g_2(x) - g_3(x)$.

Лема 2.3.7. *Мають місце нерівності*

$$\|g_3\| \leqslant c_{28} \varphi(h), \quad \omega_k(g_3, t) \leqslant c_{29} \varphi(t), \quad \omega_k(g_4, t) \leqslant (c_{25} + 1 + c_{29}) \varphi(t).$$

Лема 2.3.7 доводиться аналогічно лемі 2.3.6, з урахуванням самої леми 2.3.6.

Позначимо

$$f_1(x) := f(0) + \int_0^x (g_1(u) + g_3(u) - A)\,du, \quad f_2(x) := \int_0^x (g_4(u) + A)\,du$$

так, що $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і де дійсне число A, $|A| \leqslant \varphi(h)\max\{c_{24}, c_{28}\}/2$, обрано з умови $f_1(0) = f_1(2\pi)$ (або, що те саме, $f_2(0) = f_2(2\pi)$). Якщо $f_2(x) \equiv Ax$, то $f_1(x) \equiv f(x)$ $(A = 0)$ і теорема 2.3.1 є наслідком лем 2.3.6, 2.3.7 і 2.3.3.

2°. Тобто задача звелася до наближення функції $f_2(x)$. Нехай для визначеності $A \geqslant 0$. Позначимо

$$F := \cup_{m \notin X} F_m.$$

Нагадаємо, що за побудовою

$$f_2'(x) = \begin{cases} f'(x) + A, & x \in F^*, \\ A, & x \notin F^{**}, \end{cases}$$

і на "більшій" частині множини F маємо $|f_2'(x) - A| > 2c_{17}\varphi(h)$. Тому, згідно (34), $|\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A| > c_{17}\varphi(h_n)$ при $n_1 > n$. Однак можуть існувати і "погані" точки x (на F зокрема) в яких $(\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A)\Pi(x) < 0$. В усіх "поганих" точках $x \in F \backslash O$, $x \in (\overline{\mathbb{R} \backslash F}) \backslash O$ і $x \in O$ ми "виправимо" поліном $\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x)$ за допомогою поліномів $Q'(x)$ (Лема 8), $M'(x)$ (Лема 9) і $U_n'(x)$ (Лема 4), відповідно.

Нехай

$$\delta_j := \operatorname{sign}\Pi(x_j), \quad t_j(x) = t_{j,n}(x, b_1, Y), \quad \breve{t}_j(x) = \breve{t}_{j,n}(x, b_1, Y).$$

Для кожного $E_q \subset F$, $q = \overline{1-p, p}$, такого, що $E_q \cap O \neq \varnothing$, через ν_q^+ і ν_q^- позначимо найбільше $j \in H$ для якого $I_j \subset E_q$ і $\delta_j > 0$ або $\delta_j < 0$, відповідно.

Означення 2.3.3. *Для кожного* $q = \overline{1-p, p}$, *покладемо* $Q_q(x) :\equiv 0$, *якщо* $E_q \not\subset F$, *або* $E_q \subset F$ *і* E_q *не містить відрізків* I_j *з* $j \in V \cap H$. *Для решти* E_q, *тобто для* $E_q \subset F$ *і* E_q *містить* I_j *з* $j \in V \cap H$, *покладемо*

$$Q_q(x) := \begin{cases} \dfrac{2c_{17}}{c_8} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \in V}^{\nu_q} t_j(x)\delta_j - \alpha_q \dfrac{c_{17}}{2c_7} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \notin V}^{\nu_q} \breve{t}_j(x)\delta_j, & E_q \cap O = \varnothing, \quad (*) \\ \dfrac{2c_{17}}{c_8} \left(\displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j \in V \cap H}^{\nu_q} t_j(x)\delta_j + \alpha_q^+ t_{\nu_q^+}(x) - \alpha_q^- t_{\nu_q^-}(x) \right), & E_q \cap O \neq \varnothing, \quad (**) \end{cases}$$

де числа $\alpha_q > 0$, $\alpha_q^+ \geqslant 0$ *і* $\alpha_q^- \geqslant 0$ *обрані так, що* $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$ *і* $\alpha_q^+\alpha_q^- = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_1 := \bigcup_{j\colon I_j\subset F, j\in V\cap H} I_j, \quad \mathcal{F}_2 := \bigcup_{j\colon I_j\subset F, j\notin V, j\in H} I_j,$$

так, що $F\backslash(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \subset O$.

Лема 2.3.8. *Функція*

$$Q(x) := h\varphi(h) \sum_{q=1-p}^{p} Q_q(x)$$

задовольняє співвідношення

$$Q \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{2.3.38}$$

$$\|Q\| \leqslant c_{30} h\varphi(h), \tag{2.3.39}$$

$$|Q'(x)| \geqslant 2c_{17}\varphi(h), \quad x \in \mathcal{F}_1, \tag{2.3.40}$$

$$Q'(x)\operatorname{sign}\Pi(x) \geqslant -\frac{c_{17}}{2}\varphi(h), \quad x \in \mathcal{F}_2, \tag{2.3.41}$$

$$Q'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{F}_2. \tag{2.3.42}$$

Доведення. Нерівності (2.3.12), (2.3.13), означення δ_j і вибір $\nu_q^{\pm}$ гарантують строгу додатність α_q і, відповідно, строгу додатність α_q^+ при $\alpha_q^- = 0$, або $\alpha_q^- > 0$ при $\alpha_q^+ = 0$. Тому $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$. Разом з (2.3.21) це породжує (2.3.38). Щоб довести (2.3.39) покажемо, що $\alpha_q < 1$ і $\alpha_q^{\pm} < 2k$. Дійсно, якщо $E_q \subset F$, то, зокрема, $q \notin W$, тобто перші суми в (*) і (**) містять не більше ніж $2k-2$ доданків кожна, а друга сума в (*) – принаймні $c_{23}/2$ доданків. Тому, враховуючи додатність α_q, (2.3.21) і умову $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$, запишемо

$$\alpha_q \leqslant \left(2(k-1)\frac{2c_{17}}{c_8}\right)\left(\frac{c_{23}}{2}\frac{c_{17}}{2c_7}\right)^{-1} < \frac{16kc_7}{c_8c_{23}} < 1.$$

Аналогічно, $\alpha_q^{\pm} \leqslant 2(k-1)/1 < 2k$. Покладемо $S_q(x) := 0$ якщо $Q_q(x) = 0$, інакше

$$S_q(x) := \begin{cases} \dfrac{2c_{17}}{c_8} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\in V}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j - \alpha_q \frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\notin V}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j, & E_q \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}}{c_8}\left(\displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\in V\cap H}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j + \alpha_q^+\chi_{\nu_q^+}(x) - \alpha_q^-\chi_{\nu_q^-}(x)\right), & E_q \cap O \neq \varnothing. \end{cases}$$

Користуючись (2.3.15) і (2.3.16) запишемо нерівність для $x \in [-\pi - 8h, \pi - 8h] = [x_{\nu_p}, x_{\nu_{-p}}] =: I$,

$$|Q_q(x) - S_q(x)| \leqslant \left(\frac{2c_{17}}{c_8} + \frac{c_{17}}{2c_7} + 4k\frac{2c_{17}}{c_8}\right) c_6 \sum_{j=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q} (\Gamma_j(x))^{2b_1-s-1} =: c_{31} B_q(x).$$

Тепер якщо $x \in \mathbb{R}\backslash E_q$, то $\chi_j(x) = \chi_{\nu_q}(x)$ для всіх $j = \overline{\nu_{q-1}+1, \nu_q}$, і тому періодичність $Q_q(x)$ тягне рівність

$$S_q(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\backslash E_q,$$

а вона, в свою чергу, – оцінку

$$|S_q(x)| \leqslant c_{32} B_q(x), \quad x \in I.$$

Отже, з урахуванням (2.2.5) запишемо нерівність

$$|Q(x)| \leqslant h\varphi(h) \sum_{q=-p}^{p} |Q_q(x) - S_q(x) + S_q(x)| \leqslant (c_{31}+c_{32}) h\varphi(h) \sum_{q=-p}^{p} B_q(x) \leqslant c_{30} h\varphi(h),\ x \in I,$$

яка, зважаючи на періодичність $Q(x)$, тягне (2.3.39). Доведем (2.3.40)-(2.3.42). Представимо $Q(x)$ у формі

$$Q_q(x) = \frac{2c_{17}}{c_8} \sum_{j:\, I_j \subset \mathfrak{F}_1 \cap I} t_j(x)\delta_j + \frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j:\, I_j \subset \mathfrak{F}_2 \cap I} \beta_j \check{t}_j(x)\delta_j + \frac{2c_{17}}{c_8} \sum_{j \in H_0 \cup \{n+6\}} \gamma_j t_j(x)\delta_j,$$

де $-1 < \beta_j \leqslant 0$ і $0 \leqslant \gamma_j < 2k$ для всіх j. Для кожного $j \in H_0 \cup \{n+6, n+7, n+8\}$ нерівності (2.3.12), (2.3.13), (2.3.19) і (2.3.18) тягнуть оцінки

$$t_j'(x)\Pi(x)\delta_j \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\beta_j \check{t}_j'(x)\Pi(x)\delta_j \geqslant 0, \quad x \in I\backslash I_j,$$

$$\frac{2c_{17}}{c_8} t_j'(x)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x)\delta_j \geqslant \frac{2c_{17}}{h}, \quad x \in I_j,$$

$$\frac{c_{17}}{2c_7} |\check{t}_j'(x)| \leqslant \frac{c_{17}}{2h}, \quad x \in I_j.$$

Тепер врахуємо (2.3.38) і тоді з перших двох оцінок випливає (2.3.42); з перших трьох – (2.3.40); з перших двох і четвертої – (2.3.41). Лему 2.3.8 доведено.

Нагадаємо, що $F = \cup_{m \notin X} F_m$, де $F_m = [a_m, b_m]$ не перетинаються і кожен F_m містить принаймні $c_{27}c + c_{23} =: c_{33}$ різних I_j ($c_{27}+1$ різних E_q). Будемо писати $m \in X_0$, якщо $m \notin X$ і $F_m \cap [a_0, a_0 + 2\pi] = F_m$. Для кожного $m \in X_0$ позначимо

$$[x_{j_{a,m}}, x_{j_{b,m}}] := [a_m, b_m] = F_m, \quad F_{a,m} := [x_{j_{a,m}}, x_{j_{a,m}-c_{32}}], \quad F_{b,m} := [x_{j_{b,m}+c_{32}}, x_{j_{b,m}}].$$

Для кожного $m \in X_0$ такого, що $F_{a,m} \cap O \neq \varnothing$ ($F_{b,m} \cap O \neq \varnothing$), через $\nu_{a,m}^+$ і $\nu_{a,m}^-$ ($\nu_{b,m}^+$ і $\nu_{b,m}^-$) позначимо два найбільші цілі $j \in H$ для яких $I_j \subset F_{a,m}$ ($I_j \subset F_{b,m}$) і $\delta_j > 0$ або $\delta_j < 0$, відповідно.

Означення 2.3.4. *Для кожного* $m \in X_0$ *покладемо*

$$M_{a,m}(x) := \begin{cases} \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} t_j(x)\delta_j - \mu_{a,m}\frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j=j_{a,m}-c_{33}+1, j\notin V}^{j_{a,m}} \check{t}_j(x)\delta_j, \\ \hfill F_{a,m} \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \left(\displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} t_j(x)\delta_j + \mu_{a,m}^{+} 3t_{\nu_{a,m}^{+}}(x) - \mu_{a,m}^{-} 3t_{\nu_{a,m}^{-}}(x) \right), \\ \hfill F_{a,m} \cap O \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$M_{b,m}(x) := \begin{cases} \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} t_j(x)\delta_j - \mu_{b,m}\frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j=j_{b,m}+1, j\notin V}^{j_{b,m}+c_{33}} \check{t}_j(x)\delta_j, \\ \hfill F_{b,m} \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \left(\displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} t_j(x)\delta_j + \mu_{b,m}^{+} 3t_{\nu_{b,m}^{+}}(x) - \mu_{b,m}^{-} 3t_{\nu_{b,m}^{-}}(x) \right), \\ \hfill F_{b,m} \cap O \neq \varnothing, \end{cases}$$

де числа $\mu_{a,m} > 0$, $\mu_{a,m}^{\pm} \geqslant 0$, $\mu_{b,m} > 0$ *і* $\mu_{b,m}^{\pm} \geqslant 0$ *обрані так, що* $M_{a,m}(-\pi) = M_{a,m}(\pi)$, $\mu_{a,m}^{+}\mu_{a,m}^{-} = 0$, $M_{b,m}(-\pi) = M_{b,m}(\pi)$ *і* $\mu_{b,m}^{+}\mu_{b,m}^{-} = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_3 := \overline{F^{***} \backslash F}.$$

Лема 2.3.9. *Функція*

$$M(x) := h\varphi(h) \sum_{m \in X_0} (M_{a,m}(x) + M_{b,m}(x))$$

задовольняє співвідношення

$$M \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{2.3.43}$$

$$\|M\| \leqslant c_{34} h\varphi(h), \tag{2.3.44}$$

$$|M'(x)| \geqslant 2c_{17}(c_{25}+1)\varphi(h)\big((\check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3)))\big)^{4(s+2)}, \quad x \in \mathbb{R} \backslash (F \cup O), \tag{2.3.45}$$

$$M'(x) \operatorname{sign} \Pi(x) \geqslant -\frac{c_{17}}{4}\varphi(h), \quad x \in \mathcal{F}_2, \tag{2.3.46}$$

$$M'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{F}_2. \tag{2.3.47}$$

Доведення. Лема 2.3.9 доводиться аналогічно лемі 2.3.8. Доведем лише нерівність $\mu_{a,m} < 1/4$. За побудовою, кожен відрізок $E_q \subset F$ містить не більше ніж $2k-2$ різних I_j з $j \in V$, тому сума при $\mu_{a,m}$ містить принаймні

$$c_{33} - (c_{27}+1)(2k-2) > c_{33}/2 + (c_{27}+1)2 > c_{33}/2$$

доданків. Тому,

$$\mu_{a,m} \leqslant \left(3\frac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8}\right)\left(\frac{c_{33}}{2}\frac{c_{17}}{2c_7}\right)^{-1} < \frac{24c_7}{c_8 c} < \frac{1}{4}.$$

Лему 2.3.9 доведено.

3°. Позначимо

$$c_{35} := 4\pi(c_{25}+1+c_{29}), \quad n_1 := c_{35}n, \quad h_1 := \frac{\pi}{n_1}, \tag{2.3.48}$$

$$c_{36} := \max\{c_{17}, c_{18}\}(c_{25}+1+c_{29})c_{35}/c_{13},$$

$$R_{n_1}(x) := \tau_n(f_1 + Ax, x) - Ax + \widehat{\sigma}_{n_1}(f_2, x) + Q(x) + M(x) + \left(c_{36} + \frac{c_{15}}{c_{13}}\right) U_n(x) \in \mathbb{T}_{c_5 n_1}.$$

Покажимо, що R_{n_1} – шуканий в теоремі 2.3.1 поліном. Врахуємо Леми 6 і 7, і зберемо (2.3.22), (2.3.31), (2.3.39), (2.3.44) і (2.3.26) в оцінку

$$\begin{aligned} \|f - R_{n_1}\| = \|f_1 + f_2 - R_{n_1}\| \leqslant \|f_1 - \tau_n(f_1 + Ax, \cdot) + A\cdot\| + \|f_2 - \widehat{\sigma}_{n_1}(f_2, \cdot)\| \\ + \|Q\| + \|M\| + \left(c_{36} + \frac{c_{15}}{c_{13}}\right)\|U_n\| \\ \leqslant c_{11} h \max\{c_{24}, c_{28}\}(c_{25}+c_{29})\varphi(h) + c_{16}h_1(c_{25}+1+c_{29})\varphi(h_1) \\ + \left(c_{30} + c_{34} + \left(c_{36} + \frac{c_{15}}{c_{13}}\right)c_{12}\right) h\varphi(h) \leqslant c_{37} h\varphi(h). \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

Перевіремо нерівність

$$R'_{n_1}(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.3.50}$$

Зробимо це, використовуючи рівність

$$\begin{aligned} R'_{n_1}(x)\operatorname{sign}\Pi(x) = \tau'_n(f_1 + Ax, x)\operatorname{sign}\Pi(x) + \big(f'_2(x) - A\big)\operatorname{sign}\Pi(x) \\ + \big(\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - f'_2(x)\big)\operatorname{sign}\Pi(x) \\ + \big(Q'(x) + M'(x)\big)\operatorname{sign}\Pi(x) + c_{36}U'_n(x)\operatorname{sign}\Pi(x) + \frac{c_{15}}{c_{13}}U'_n(x)\operatorname{sign}\Pi(x) =: \sum_{\nu=1}^{6}\Psi_\nu(x). \end{aligned}$$

З (2.3.23), побудови f_2 і (2.3.25) зауважимо, що

$$\Psi_1(x) \geqslant 0, \quad \Psi_2(x) \geqslant 0, \quad \Psi_5(x) \geqslant 0, \quad \Psi_6(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\mathcal{F}_4 := \overline{\mathbb{R} \backslash (F \cup \mathcal{F}_3 \cup O)}$ так, що $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup O = \mathbb{R}$. Розглянемо п'ять випадків.

(1) $x \in \mathcal{F}_1$. Для $u \in \mathcal{F}_1^*$ функція $f_2'(u) = f'(u) + A$. Беручи до уваги (2.3.32) з $\delta = h$, (2.3.42), (2.3.40), (2.3.47), лему 2.3.7 і (2.3.48), запишемо

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geqslant -c_{17}\omega_k(f' + A, h_1) - c_{17}\omega_k(f_2', h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} + 2c_{17}\varphi(h) + 0$$

$$\geqslant \varphi(h)c_{17}\left(1 - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geqslant 0.$$

(2) $x \in \mathcal{F}_2$. Для $u \in \mathcal{F}_2^*$ функція $f_2'(u) = f'(u) + A$. Більш того, $|f_2'(x) - A| \geqslant 2c_{17}\varphi(h)$, $x \in \mathcal{F}_2$. Тепер (2.3.32) з $\delta = h$, (2.3.41), (2.3.46), лема 2.3.7 і (2.3.48) тягнуть нерівність

$$\Psi_2(x) + \Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geqslant 2c_{17}\varphi(h) - c_{17}\omega_k(f' + A, h_1) - c_{17}\omega_k(f_2', h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1}$$

$$-\frac{c_{17}}{2}\varphi(h) - \frac{c_{17}}{4}\varphi(h) \geqslant \varphi(h)c_{17}\left(\frac{1}{4} - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geqslant 0.$$

(3) $x \in \mathcal{F}_3$. Для $u \in \mathcal{F}_3^*$ функція $f_2'(u) = g_2(u) + A$ і (2.3.32) з $\delta = h$, (2.3.42), (2.3.47), (2.3.45), леми 2.2.2, 2.3.7 і (2.3.48) тягнуть нерівність

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geqslant -c_{17}\omega_k(g_2 + A, h_1) - c_{17}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} + 0$$

$$2c_{17}(c_{25} + 1)\varphi(h) \geqslant \varphi(h)c_{17}\left(c_{25} + 1 - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geqslant 0.$$

(4) $x \in \mathcal{F}_4$. Для $u \in \mathcal{F}_4^*$ функція $f_2'(u) = A$. Тому $\omega_k(f_2', t, \mathcal{F}_4) \equiv 0$. Скористаємося (2.3.32) з $\delta = \operatorname{dist}(x, F^{**})$, лемою 2.3.7, (2.3.42), (2.3.47), (2.3.45), (2.3.48) і нерівністю

$$\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})} < \check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3)).$$

Запишемо

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geqslant -c_{17} \cdot 0 - c_{17}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})}\right)^{4(s+2)+1}$$

$$+0 + 2c_{17}(c_{25} + 1)\varphi(h)\big((\check{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3)))\big)^{4(s+2)} \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(h)c_{17}\big((\check{\Gamma}_n(\mathrm{dist}(x,\mathcal{F}_3)))\big)^{4(s+2)}\left(2(c_{25}+1)-\pi(c_{25}+1+c_{29})\frac{n}{n_1}\right)\geqslant 0.$$

(5) $x\in O$. Згідно (2.3.42) і (2.3.47) маємо $\Psi_4(x)\geqslant 0$. Для $x\in O_i$ такої, що $O_i\cap F=\varnothing$, функція $f_2'(x)=A$, тому (2.3.25), (2.3.28), (2.3.48), лема 2.3.7 і, відповідно, (2.3.34) і (2.3.33) тягнуть нерівності

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x)\geqslant \frac{c_{36}c_{13}}{h}\varphi(h)|x-y_i|-\frac{c_{18}}{h_1}(c_{25}+1+c_{29})\varphi(h_1)|x-y_i|\geqslant 0,\ x\in J_{i,n_1}, \quad (2.3.51)$$

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x)\geqslant \frac{c_{36}c_{13}}{h}\varphi(h)|x-y_i|-c_{17}(c_{25}+1+c_{29})\varphi(h_1)\geqslant 0,\ x\in O_i\backslash J_{i,n_1}. \quad (2.3.52)$$

Для решти $O_i\subset O$, тобто для $x\in O_i:\ O_i\cap F\neq\varnothing$, функція $f_2'(x)=f'(x)+A$. В цьому випадку нерівність (2.3.52) залишається вірною, а нерівність

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x)+\Psi_2(x)=\Psi_5(x)+\big((\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2,x)-L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1})+L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1})$$
$$+L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1})-L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1})-f_2'(x)\big)\big)\operatorname{sign}\Pi(x)+\Psi_2(x)$$
$$=\Psi_5(x)+\big((-A+\widehat{\sigma}'_{n_1}(f_2,x)-L_{k-1}(f_2',x,J_{i,n_1})+L_{k-1}(f_2',y_i,J_{i,n_1})\big)\big)\operatorname{sign}\Pi(x)$$
$$+\big((L_{k-1}(f',x,J_{i,n_1})-L_{k-1}(f',y_i,J_{i,n_1})\big)\big)\operatorname{sign}\Pi(x)=:\Psi_5(x)+\Psi_{3,1}(x)+\Psi_{3,2}(x,k)\geqslant 0,$$

справджується для $x\in J_{i,n_1}$ аналогічно (2.3.51), якщо

$$\Psi_{3,2}(x,k)\geqslant 0,\quad x\in J_{i,n_1}. \quad (2.3.53)$$

Таким чином, доведення (2.3.50) звелося до доведення (2.3.53).

Оскільки, при $f'(x)\Pi(x)\geqslant 0$,

$$\Psi_{3,2}(x,3)=\Big(L_2(f',x,J_{i,n_1})-L_2(f',y_i,J_{i,n_1})\Big)\operatorname{sign}\Pi(x)$$
$$=L_2(f',x,J_{i,n_1})\operatorname{sign}\Pi(x)\geqslant 0,\quad x\in J_{i,n_1},$$

то нерівність (2.3.53) є вірною завжди тільки при $k=3$ (при $k>3$, такого сказати не можна).

Для $f\in C^{(2)}\cap\Delta^{(1)}(Y)$ оберемо $\omega\in\Phi^k$ таку, що $\omega_k(f'',t)\leqslant\omega(t)\leqslant 2^k\omega_k(f'',t)$. Нехай тепер $\varphi(t):=t\omega(t)$ (тобто $\varphi\in\Phi^{k+1}$). Запишемо

$$\Psi_{3,2}(x,k+1)=\left(\int_{y_i}^{x}L_k'(f',u,J_{i,n_1})-f''(u)du+f'(x)\right)\operatorname{sign}\Pi(x).$$

Тоді (2.3.25), (2.3.28), (2.3.30) (з $p=1$) (і $f'(x)\Pi(x)\geqslant 0$) тягнуть нерівність

$$\Psi_6(x)+\Psi_{3,2}(x,k+1)\geqslant c_{15}\omega(h)|x-y_i|-c_{15}\omega(h_1)|x-y_i|+0\geqslant 0,\quad x\in J_{i,n_1},$$

і (2.3.50) справджується. При цьому оцінки (2.3.2) і (2.3.3) є наслідком (2.3.49). Теорему 2.3.1 доведено.

2.4 Майже комонотонне наближення неперервних періодичних функцій

Результат цього підрозділу містяться в [75].

Як вже зазначолося в підрозділі 2.2, для $k > 2$ комонотонний аналог нерівності (2.2.1) не справджується. Тим не менш, з результатів наближення на відрізку алгебраїчними многочленами нам відомо, що *якщо дозволити деяке послаблення умови комонотонності наближаючого многочлена, то можна отримати один додатковий порядок наближення* [118] *і не більше ніж один* [122]. В цьому підрозділі в теоремі 2.4.1 ми доводимо тригонометричний аналог алгебраїчного результату Левіатана і Шевчука [118].

Теорема 2.4.1. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то існує стала* $N(Y)$, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, *така, що для кожного* $n \geqslant N(Y)$ *знайдеться поліном* $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$, *який задовольняє нерівності*

$$P_n'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i\in\mathbb{Z}} \left(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n\right), \tag{2.4.1}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\,\omega_3(f, \pi/n), \tag{2.4.2}$$

де c *і* $c(s)$ *– сталі, які залежать тільки від* s.

Наступна теорема 2.4.2 є наслідком теореми 2.4.1 і нерівності Уітні [167] $\|f - f(0)\| \leqslant 2\,\omega_3(f, 2\pi)$.

Теорема 2.4.2. *Якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *існує поліном* $P_n \in \mathbb{T}_n$, *такий, що*

$$P_n'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i\in\mathbb{Z}} \left(y_i - c/n, y_i + c/n\right), \tag{2.4.3}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant C(Y)\,\omega_3(f, \pi/n), \tag{2.4.4}$$

де c *– стала, що залежить тільки від* s, *а* $C(Y)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$.

Зауваження 2.4.1. *Ми вважаємо, що* ω_3 *в* (2.4.2) *і* (2.4.4) *неможливо замінити на* ω_k *з* $k > 3$, *а сталі* $N(Y)$ *і* $C(Y)$ *в теоремах 2.4.1 і 2.4.2 — сталими, що не залежать від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *(а залежать, скажімо, від* s*). Ці припущення ми не доводимо, а також не приділяємо уваги сталій* c *в обох теоремах, тобто не намагаємось зробити її абсолютною або/і найменьш можливою.*

Допоміжні факти для доведення теореми 2.4.1

Нехай

$$m = 30, 20, 10, 4, 3,$$

$$H_m := \{j : j \in H(Y, n, m),\ |j| \leqslant n\},$$

і надалі $n > N(Y) = N(Y, 30)$, тобто справджується (2.2.4) для $m = 30$. Позначимо

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) := \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\frac{x-x_j}{2}}\right)^{2b} + \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\frac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^{2b}, \quad j \in \mathbb{Z},\ b, n \in \mathbb{N}, \qquad (2.4.5)$$

і для $j \in H_{10}$ покладемо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y) := \int_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du \Big/ \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du. \qquad (2.4.6)$$

Далі $c_i = c_i(b) = c_i(s, b),\ i = 1, ..., 8,$ – додатні сталі, які можуть залежити тільки від s і b. В наступній лемі 2.4.1 зберемо необхідні нам нерівності з леми 2.2.1.

Лема 2.4.1. *Якщо* $j \in H_{10}$ *і* $b \geqslant s + 2$, *то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2.4.7)$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leqslant c_1\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \qquad (2.4.8)$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leqslant c_2\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (2.4.9)$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_3\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash O_{10}, \qquad (2.4.10)$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_3\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10},\ i \in \mathbb{Z}. \qquad (2.4.11)$$

Для $j \in H_{20}$ позначимо функцію

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, Y) := \alpha\int_{x_j-\pi}^{x} t_{j+10}(u)du + (1-\alpha)\int_{x_j-\pi}^{x} t_{j-10}(u)du, \qquad (2.4.12)$$

де $\alpha \in [0, 1]$ обрано з умови

$$\tau_j(x_j + \pi) = \pi.$$

Зауважимо, що нерівності $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ випливають з оцінки (2.4.8) і вибору індексів $j \pm 10$ (достатньо далеких від j) при (достатньо великих) $b \geqslant s + 2$ (що робить ядро "крутішим", детальніше див. аналогічний випадок в [37, стор. 923], або доведення схожих рівностей (2.4.31) далі).

Функції t_j і τ_j можуть на $\mathbb{R}$ бути представлені у вигляді

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_j(x), \quad j \in H_{10}, \tag{2.4.13}$$

$$\tau_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_j(x), \quad j \in H_{20}, \tag{2.4.14}$$

де $\hat{R}_j$ і $\tilde{R}_j$ деякі поліноми з $\mathbb{T}_{c6n}$ (див. аналогічні випадки в [144] і [37], відповідно).

Далі $c > 0$ позначатимуть абсолютні сталі, або сталі, що залежать тільки від s. Вони можуть бути різні навіть якщо знаходяться в одному рядку.

Нехай $j \in H_{10}$. Позначимо

$$\overset{\circ}{t}_j(x) := \overset{\circ}{t}_{j,n}(x,b) := \bar{t}_j(x) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\chi_j(y_i) - \bar{t}_j(y_i)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)} \hat{t}_{j_i}(x),$$

де функція $\bar{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \varnothing)$ означена в (2.4.6) з $\Pi(x) :\equiv 1$ і $\bar{b} = b + 3$, і

$$\hat{t}_{j_i}(x) := \left(\bar{t}_{j_i+10}(x) - \breve{t}_{j_i-10}(x)\right) \frac{\Pi(x, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)}$$

– тригонометричний поліном, в якому j_i позначає індекс j такий, що $y_i \in [x_j, x_{j-1})$, $i = 1, ..., 2s$, а $\breve{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \breve{Y}_i)$ – функція (2.4.6) з $\breve{Y}_i := \{y_i - \pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, і

$$Y_i := (Y \backslash \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}) \cup \{y_i^* + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}},$$

де y_i^* – лівий кінець інтервалу $O_{i,20}$, якщо i непарне, і – правий, якщо i парне.

Лема 2.4.2. *Для кожних $j \in H_{10}$ і $b \geqslant 3s + 2$ функція $\overset{\circ}{t}_j(x)$ задовольняє співвідношення* (2.4.8), (2.4.13), *і до того ж,*

$$\left|\chi_j(x) - \overset{\circ}{t}_j(x)\right| \leqslant c_7 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1} \left|\frac{x - y_i}{x_j - y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10}, \ i = 1, ..., 2s, \tag{2.4.15}$$

(зокрема, $\chi_j(y_i) - \overset{\circ}{t}_j(y_i) = 0$).

Доведення. Позначимо $\Lambda_j(x) := \chi_j(x) - \overset{\circ}{t}_j(x)$. З (2.4.8), (2.4.10), другого рядку в

(2.2.15) і прямих розрахунків випливає що

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_j(x)| \leqslant{} & |\chi_j(x) - \bar{t}_j(x)| + \sum_{i=1}^{2s} \frac{|\chi_j(y_i) - \bar{t}_j(y_i)|}{|\hat{t}_{j_i}(y_i)|} |\hat{t}_{j_i}(x)| \\
\leqslant{} & c_1 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2\bar{b}-1} + \sum_{i=1}^{2s} \frac{c_1 \left(\Gamma_j(y_i)\right)^{2\bar{b}-1}}{c_3} \big| \bar{t}_{j_i+10}(x) - \chi_{j_i+10}(x) \\
& + \chi_{j_i+10}(x) - \chi_{j_i-10}(x) + \chi_{j_i-10}(x) - \breve{t}_{j_i-10}(x) \big| \left| \frac{\Pi(x, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)} \right| \\
\leqslant{} & c_1 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2\bar{b}-1} + c \sum_{i=1}^{2s} \left(\Gamma_j(y_i)\right)^{2\bar{b}-1} \big[c_1 \left(\Gamma_{j_i+10}(x)\right)^{2\bar{b}-1} \\
& + c \left(\Gamma_{j_i}(x)\right)^{2\bar{b}-3} + c_1 \left(\Gamma_{j_i-10}(x)\right)^{2\bar{b}-3} \big] \Gamma_{j_i}^{-2s}(x) \\
\leqslant{} & c_1 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2\bar{b}-1} + c \sum_{i=1}^{2s} \left(\Gamma_j(y_i)\right)^{2\bar{b}-1} \left(\Gamma_{j_i}(x)\right)^{2\bar{b}-3-2s} \\
\leqslant{} & c \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi],
\end{aligned}
$$

де, знаючи з (2.4.7) що $\bar{t}'_{j_i+10}(u) > 0$ скрізь і $\breve{t}'_{j_i-10}(u) < 0$ на $(x_{j_i-10} - \pi, y_i)$, ми скористалися нерівністю

$$
\begin{aligned}
\hat{t}_{j_i}(y_i) = & \int_{x_{j_i+10}-\pi}^{y_i} \bar{t}'_{j_i+10}(u) du - \int_{x_{j_i-10}-\pi}^{y_i} \breve{t}'_{j_i-10}(u) du \\
> & \int_{x_{j_i+10}-\pi}^{y_i} c_3 \frac{1}{h} \Gamma_{j_i+10}^{2\bar{b}}(u) du \\
> & c_3 \frac{1}{h} \int_{x_{j_i+10}}^{x_{j_i+9}} \left(\chi_{x_{j_i+10}}(u) - \chi_{x_{j_i+9}}(u)\right) du = c_3.
\end{aligned}
$$

Таким чином, для $\overset{\circ}{t}_j$ (2.4.8) справджується, тоді як (2.4.13) очевидне. Доведемо (2.4.15). Маючи за означенням, для фіксованого i, $\hat{t}_{j_i}(y_i) > 0$ (а фактично $> c_3$) і тому $\hat{t}_{j_i}(y_k) = 0,\ k \neq i,\ 1 \leqslant k \leqslant 2s$, а отже для всіх $i = 1, ..., 2s$, $\Lambda_j(y_i) = 0$, ми, для деякої $\theta \in O_{i,10}$ і всіх $x \in O_{i,10}$, аналогічно запишемо

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_j(x)| &= \left|\int_{y_i}^{x} \Lambda_j'(u)du\right| \\
&\leqslant |x-y_i| \left(\left|\bar{t}_j'(\theta)\right| + \sum_{i=1}^{2s} \frac{|\chi_j(y_i) - \bar{t}_j(y_i)|}{|\hat{t}_{j_i}(y_i)|} |\hat{t}_{j_i}'(\theta)| \right) \\
&\leqslant |x-y_i| \left(c\frac{1}{h}\Gamma_j^{2\bar{b}}(x) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=1}^{2s} \frac{c_1}{c_3} \left(\Gamma_j(y_i)\right)^{2\bar{b}-1} \left(c\frac{1}{h} \left(\Gamma_{j_i}(\theta)\right)^{2\bar{b}-2-2s} + c\left(\Gamma_{j_i}(\theta)\right)^{2\bar{b}-3} \left|\frac{\Pi'(\theta, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)}\right| \right) \right) \\
&\leqslant |x-y_i| \left(c\frac{1}{h}\Gamma_j^{2\bar{b}}(x) + c\sum_{i=1}^{2s} \left(\Gamma_j(y_i)\right)^{2\bar{b}-1} \frac{1}{h} \left(\Gamma_{j_i}(\theta)\right)^{2\bar{b}-2-2s} \right) \\
&\leqslant c\,|x-y_i| \frac{1}{h}\Gamma_j(x) \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1},
\end{aligned}
$$

де ми також скористалися (2.4.9) і нерівністю

$$
\left|\frac{\Pi'(x, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)}\right| = \left| \sum_{k=1}^{2s} \frac{\cos((x-y_k)/2)}{\sin((x_{j_i}-y_k)/2)} \prod_{\nu=1, \nu\neq k}^{2s} \frac{\sin((x-y_\nu)/2)}{\sin((x_{j_i}-y_\nu)/2)} \right| \leqslant c\frac{1}{h}\Gamma_{j_i}^{-2s+1}(x),
$$

що справджується для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ ($|x_{j_i} - y_{k\,\mathrm{or}\,\nu}| \geqslant 20h$). Якщо зараз $|x_j - y_i| \geqslant 20h$, то $\frac{1}{h}\Gamma_j(x) = \frac{1}{\pi|\sin((x-(x_j+h/2))/2)|} \leqslant \frac{1}{|x-x_j-h/2|} < \frac{3}{|x_j-y_i|}$, $x \in O_{i,10}$, інакше $\frac{1}{h}\Gamma_j(x) < \frac{20}{|x_j-y_i|}\Gamma_j(x)$. Таким чином (2.4.15) доведено. Лему 2.4.2 доведено.

Зауваження 2.4.2. *Замість полінома $\hat{t}_{j_i}(x)$ можна взяти $t'_{j_i,n}(x, \bar{b}, Y_i)$ як більш "природній" у такій функції (дії), але це зробить доведення леми довшим.*

Наступна лема 2.4.3 доводиться з використанням тих самих аргументів що й лема 2.4.2.

Лема 2.4.3. *Для кожних $j \in H_{20}$ і $b \geqslant 3s+2$ функція*

$$
\mathring{\tau}_j(x) := \mathring{\tau}_{j,n}(x,b) := \tau_{j,n}(x,b,\varnothing) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{(y_i - x_j)_+ - \tau_{j,n}(y_i, b, \varnothing)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)} \hat{t}_{j_i}(x)
$$

задовольняє співвідношення (2.4.14), *і до того ж,*

$$
\left|(x-x_j)_+ - \mathring{\tau}_j(x)\right| \leqslant c_8 h \left(\Gamma_j(x)\right)^{2(b-s-1)}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{2.4.16}
$$

$$
\left|(x-x_j)_+ - \mathring{\tau}_j(x)\right| \leqslant c_8 h \left(\Gamma_j(x)\right)^{2(b-s-1)} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10}, \ i = 1, ..., 2s, \tag{2.4.17}
$$

(зокрема, $(y_i - x_j)_+ - \overset{\circ}{\tau}_j(y_i) = 0$*).*

Дійсно, маючи, завдяки (2.4.12), рівності $\tau_j(x_j - \pi) = 0$ і $\tau_j(x_j + \pi) = \pi$, ми, для різниці $(x - x_j)_+ - \tau_j(x) =: \Lambda(x)$, можемо використовувати два представлення

$$\Lambda(x) = \int_{x_j-\pi}^{x} \Lambda'(u)du, \quad \text{для} \quad x \in [x_j - \pi, x_j],$$

і

$$\Lambda(x) = -\int_{x}^{x_j+\pi} \Lambda'(u)du, \quad \text{для} \quad x \in [x_j, x_j + \pi],$$

що разом з (2.4.8) і (2.2.16) тягне нерівність

$$\begin{aligned}|\Lambda(x)| &= |\Lambda(x) - \alpha\chi_{j+10}(x) + \alpha\chi_{j+10}(x) - (1-\alpha)\chi_{j-10}(x) + (1-\alpha)\chi_{j-10}(x)| \\ &\leqslant c\, h\, (\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi],\end{aligned}$$

спираючись на яку, ми отримуємо (2.4.16) і (2.4.17) аналогічно доведенню леми 2.4.2.

Допоміжні факти для доведення теореми 2.4.1 (продовження)

Коментар. Ми доводимо теорему 2.4.1, через проміжне наближення сплайном:

$$\|f - S + S - P_n\| \leqslant \|f - S\| + \|S - P_n\|. \tag{$*$}$$

Сплайн S це сума парабол ψ_j, зрізаних в точках x_j, або x_{j-1}, або лінійна комбінація цих парабол в залежності від співвідношень між певними різницями f, так, що S – майже комонотонний з f. Ми взмозі наблизити ψ_j лише функціями φ_j, що складаються з тригонометричних поліномів і, нажаль, алгебраїчних доданків. Тому ми маємо обрати φ_j так, щоб ці доданки знищили себе, коли береться сума всіх φ_j в означенні P_n (по розбиттю "j" на періоді), і, одночасно, щоб зберегти зміни монотонності S в P_n. Для цього ми замінемо неперервні ψ_j "технічними" ненеперервними Ψ_j (що сформують сплайн S_0), які є тими ж самими параболами, але зрізаними в 3-х інших точках біля x_j і x_{j-1}, так, щоб функції φ_j будувати "ідентично" до Ψ_j. Оскільки ми спочатку не приділяємо уваги поведінці S і P_n в околах точок з Y, ми замінемо f в цих околах інтерполяційними параболами (позначивши так новоутворену функцію через f_0). Це допоможе нам з аріфметикою з алгебраїчними частинами φ_j. Отже замість $(*)$ ми, фактично, використовуємо нерівність

$$\|f - f_0 + f_0 - S + S - S_0 + S_0 - P_n\| \leqslant \|f - f_0\| + \|f_0 - S\| + \|S - S_0\| + \|S_0 - P_n\|.$$

Нехай

$$(\underline{y}_i, \overline{y}_i) := O_{i,4}.$$

Покладемо

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \in \mathbb{R} \backslash O_4 \\ L_2(x, \underline{y}_i, y_i, \overline{y}_i, f), & \text{якщо} \quad x \in O_{i,4}, \ i \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

де L_2 – парабола, що інтерполює f у вказаних точках з $\overline{O}_{i,4}$. За нерівністю Уітні [167]

$$\|f - f_0\| \leqslant c\,\omega_3(f, |O_{i,4}|) \leqslant c\,\omega_3(f, h), \tag{2.4.18}$$

і f_0 лише *майже комонотонна* з f, тобто на O_4 можуть бути x такі, що $f_0'(x)\Pi(x) < 0$. Без втрати загальності будемо вважати, що $-\pi = y_{2s}$ (отже, $\pi = y_0$, $\Pi(\overline{y}_{2s}) < 0$, $\Pi(\underline{y}_0) > 0$). Для $j \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$\begin{aligned} \Delta_j &:= -f_0(x_j) + f_0(x_{j-1}), \\ \lambda_j &:= \quad f_0(x_j) - 2f_0(x_{j-1}) + f_0(x_{j-2}), \\ \delta_j &:= -f_0(x_j) + 3f_0(x_{j-1}) - 3f_0(x_{j-2}) + f_0(x_{j-3}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\Delta_j \Pi(x_j) \geqslant 0, \qquad \text{якщо} \qquad (x_j, x_{j-1}) \cap O_4 = \varnothing, \tag{2.4.19}$$

$$\delta_j = -\lambda_j + \lambda_{j-1} = 0, \qquad \text{якщо} \qquad (x_j, x_{j-3}) \subset O_4. \tag{2.4.20}$$

Більш того, нерівність (2.4.18) тягне

$$|\,\delta_j| \leqslant \omega_3(f_0 - f + f, h) \leqslant 8\|f_0 - f\| + \omega_3(f, h) \leqslant c\,\omega_3(f, h). \tag{2.4.21}$$

На кожному проміжку $[x_j, x_{j-1}]$, $j = 1 - n, ..., n$, для f_0 означимо параболу p_j ($\deg \leqslant 2$) наступним чином. Якщо $\operatorname{sgn} \lambda_{j+1} = \operatorname{sgn} \lambda_j$, то покладемо

$$p_j(x) := \begin{cases} L_2(x, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, f_0), & \text{якщо} \quad |\lambda_{j+1}| > |\lambda_j| \\ L_2(x, x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, f_0), & \text{інакше}, \end{cases}$$

інакше (тобто якщо $\operatorname{sgn} \lambda_{j+1} \neq \operatorname{sgn} \lambda_j$), покладемо

$$p_j(x) := L_1(x, x_j, x_{j-1}, f_0),$$

де L_1 пряма, що інтерполює f_0 в x_j і x_{j-1}. Нехай

$$S|_{[x_j, x_{j-1}]} := p_j, \quad j = 1 - n, ..., n.$$

Зауважимо, що у випадку $p_j = L_1$ пряма $L_1(x, x_j, x_{j-1}, f_0)$ міститься між параболами $L_2(x, x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, f_0)$ і $L_2(x, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, f_0)$ для кожної з яких виконується нерівність Уітні (2.1.12) на $[x_j, x_{j-1}]$. Отже, разом з (2.4.18), це тягне оцінку

$$\|f - S\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant \|f - f_0\| + \|f_0 - S\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant c\,\omega_3(f, h). \tag{2.4.22}$$

Більш того, легко перевірити, що $S'(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in (x_j, x_{j-1})$ для кожного $j \in H_4$. Тому,

$$S'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-\pi, \pi]\backslash(O_4 \cup \{x_j\}_{j\in H_4}). \tag{2.4.23}$$

На $[-\pi, \pi]$ представимо неперервний на $[-\pi, \pi]$ сплайн S наступним чином. Якщо $\operatorname{sgn}\lambda_{j+1} = \operatorname{sgn}\lambda_j$, то покладемо

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \underline{\psi}_j(x) := (x - x_j)_+(x - x_{j-1}), & \text{якщо} \quad |\lambda_{j+1}| > |\lambda_j| \\ \overline{\psi}_j(x) := (x - x_j)(x - x_{j-1})_+, & \text{інакше,} \end{cases}$$

інакше (тобто якщо $\operatorname{sgn}\lambda_{j+1} \neq \operatorname{sgn}\lambda_j$), покладемо

$$\psi_j(x) := \alpha_j \underline{\psi}_j(x) + (1 - \alpha_j)\overline{\psi}_j(x), \quad \alpha_j := \frac{|\lambda_{j+1}|}{|\lambda_{j+1}| + |\lambda_j|} \in [0, 1].$$

Нехай $\psi_n(x) := (x - x_n)(x - x_{n-1}),\ \psi_{1-n}(x) :\equiv 0$.

Отже маємо

$$S(x) = f(x_n) + \frac{\Delta_n}{h}(x - x_n) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n} \lambda_j \left(\psi_j(x) - \psi_{j-1}(x)\right), \tag{2.4.24}$$

або, що те саме,

$$S(x) = f(x_n) + \frac{\Delta_n}{h}(x - x_n) + \frac{\lambda_n}{2h^2}\psi_n(x) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n-1} \delta_{j+1}\psi_j(x) \tag{2.4.25}$$

(зручно дивитися на суми в (2.4.24) і (2.4.25) починаючи з останніх доданків, детальніше про такі представлення, див. [76, Пропозиція 1]).

Щоб наблизити сплайн S необхідним поліномом, означимо технічний сплайн S_0, що є ненеперервною модифікацією S на $[-\pi, \pi]$. Покладемо

$$a_j := x_j - \frac{h}{2}, \quad v_j := \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \quad d_j := x_{j-1} + \frac{h}{2}.$$

Зафіксуємо $j = 2 - n, ..., n - 1$. Якщо

$$\delta_{j+1}\Pi(x_j) \geqslant 0, \tag{2.4.26}$$

то покладемо

$$\Psi_j(x) := \begin{cases} \Psi_{j,1}(x) := (x - x_j)(x - x_{j-1})\chi(x, a_j), & \text{якщо} \quad \psi_j \equiv \underline{\psi}_j, \\ \Psi_{j,3}(x) := (x - x_j)(x - x_{j-1})\chi(x, d_j), & \text{якщо} \quad \psi_j \equiv \overline{\psi}_j, \\ \alpha_j \Psi_{j,1}(x) + (1 - \alpha_j)\Psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad \psi_j \equiv \alpha_j \underline{\psi}_j + (1 - \alpha_j)\overline{\psi}_j, \end{cases}$$

інакше (тобто якщо $\delta_{j+1}\Pi(x_j) < 0$), покладемо

$$\Psi_j(x) := \Psi_{j,2}(x) := (x - x_j)(x - x_{j-1})\chi(x, v_j).$$

Нехай $\Psi_n(x) := (x - x_n)(x - x_{n-1}),\ \Psi_{1-n}(x) :\equiv 0$.

Тепер, нехай S_0 буде сплайном представленим (2.4.25) (або (2.4.24)) з Ψ_j замість ψ_j. Зауважимо, що для S_0 справджуються наступні нерівності

$$\|f - S_0\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant c\,\omega_3(f, h), \tag{2.4.27}$$

$$(S_0(v_j + 0) - S_0(v_j - 0))\Pi(v_j) \geqslant 0, \quad j = 2 - n, ..., n - 1, \tag{2.4.28}$$

$$S_0'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-\pi, \pi] \backslash \left(O_4 \cup \{v_j\}_{j \in H_4}\right). \tag{2.4.29}$$

Дійсно, використовуючи (2.4.25), (2.4.25) для S_0, і (2.4.21) запишемо

$$\begin{aligned} \|S - S_0\|_{I_\nu} =& \frac{1}{2h^2} \left\| \sum_{j=2-n}^{n-1} \delta_{j+1}(\psi_j(\cdot) - \Psi_j(\cdot)) \right\|_{I_\nu} \\ \leqslant& \frac{1}{2h^2} \sum_{j=2-n}^{n-1} |\delta_{j+1}| \, \|\psi_j - \Psi_j\|_{I_\nu} \\ =& \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{j=2-n \\ j \in \{\nu+1, \nu, \nu-1\}}}^{n-1} |\delta_{j+1}| \, \|\psi_j - \Psi_j\|_{I_\nu} \\ \leqslant& \frac{1}{2h^2} \sum_{j=\nu-1}^{\nu+1} |\delta_{j+1}| \frac{3h^2}{4} \leqslant c\,\omega_3(f, h), \quad \nu = 1 - n, ..., n, \end{aligned}$$

що разом з (2.4.22) породжує (2.4.27). Означення S_0 (а саме, завдяки (2.4.26)) і його представлення у формі (2.4.25) тягнуть (2.4.28). Беручи до уваги означення S, можно бачити, що нерівність (2.4.29) випливає з того факту, що різниці $\Psi_j' - \Psi_{j-1}' = \Psi_{j,\nu}' - \Psi_{j-1,\mu}'$, $\nu, \mu = 1 \vee 2 \vee 3$, (у представленні (2.4.24) для S_0) невід'ємні на $[\max\{\nu_j, \mu_{j-1}\}, \infty)$, $\nu_j, \mu_j = a_j \vee v_j \vee d_j$, завжди, навіть у можливому випадку коли $d_j = a_{j-1} + h$, оскільки $\Psi_{j-1}'(x) = \Psi_{j-1,1}'(x) \geqslant 0$ для $x \in [d_j, \infty)$. Тому можлива від'ємна частина Ψ_j' на $[a_j, v_j]$ (у випадку $\Psi_j = \Psi_{j,1} \vee \alpha_j \Psi_{j,1}$) компенсується (наступним доданком) нерівністю $|\lambda_{j+1}| > |\lambda_j|$ (у випадку $\psi_j = \underline{\psi}_j$), або значенням α_j (у випадку $\psi_j = \alpha_j \underline{\psi}_j$) так, що $S_0'(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in [a_j, v_j]$. (Якщо $\Psi_j = \Psi_{j,3}$, то має місце дзеркальна ситуація з $|\lambda_{j+1}| < |\lambda_j|$ і $(1-\alpha_j)$).

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,1}(x) &= 2\int_{v_j-\pi}^{x} \big((u-a_j)_+ - h\chi(u,a_j)\big)du + \frac{3}{4}h^2\chi(x,a_j),\\
\Psi_{j,3}(x) &= 2\int_{v_j-\pi}^{x} \big((u-d_j)_+ + h\chi(u,d_j)\big)du + \frac{3}{4}h^2\chi(x,d_j),\\
\Psi_{j,2}(x) &= 2\int_{v_j-\pi}^{x} (u-v_j)_+ du - \frac{1}{4}h^2\chi(x,v_j).
\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Позначимо числа

$$b_1 := s+2, \quad b_2 := 3(s+1),$$

$$c_9 := \max\left\{\frac{2((2\pi)^{2b_2}\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\} + c_8(b_2) + 2)}{3c_3(b_1)}, 2\right\},$$

$$n_1 := 2\,[c_9+1]\,n,\ \ h_1 := h_{n_1},$$

$$c_{10} := \max\left\{c_5(b_2)\left(\frac{c_8(b_2)}{2c_9} + c_1(b_2)\right), 10\right\},$$

$$n_2 := 2\,[c_{10}+1]\,n_1, \quad h_2 := h_{n_2},$$

де $[\cdot]$ – ціла частина. Для кожного $j = 2-n, ..., n-1$ і кожного $\nu = 1,2,3$ позначимо індекс j_ν, такий, що $x_{j_\nu} := x_{j_\nu, n_1} = \nu_j,\ \nu_j = a_j, v_j, d_j$, при цому нехай j_ν^* позначає індекс, такий, що $x_{j_\nu^*} := x_{j_\nu^*, n_2} = x_{j_\nu} (= x_{j_\nu, n_1})$.

Нехай $j \in H_3$. Для кожного $j_\nu,\ \nu = 1,2,3$, візьмемо

$$\overset{\circ}{\tau}_{j_\nu^*}(x) = \overset{\circ}{\tau}_{j_\nu^*, n_2}(x, b_2), \quad \overset{\circ}{t}_{j_\nu^*}(x) = \overset{\circ}{t}_{j_\nu^*, n_2}(x, b_2), \quad t_{j_\nu}(x) = t_{j_\nu, n_1}(x, b_1, Y),$$

покладемо

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,1}(x) &:= 2\int_{v_j-\pi}^{x}\left(\overset{\circ}{\tau}_{j_1^*}(u) - h\left(\alpha\overset{\circ}{t}_{(j_1+1)^*}(u) + (1-\alpha)\overset{\circ}{t}_{(j_1-1)^*}(u)\right)\right)du + \frac{3}{4}h^2 t_{j_1}(x),\\
\varphi_{j,3}(x) &:= 2\int_{v_j-\pi}^{x}\left(\overset{\circ}{\tau}_{j_3^*}(u) + h\left(\beta\overset{\circ}{t}_{(j_3+1)^*}(u) + (1-\beta)\overset{\circ}{t}_{(j_3-1)^*}(u)\right)\right)du + \frac{3}{4}h^2 t_{j_3}(x),\\
\varphi_{j,2}(x) &:= 2\int_{v_j-\pi}^{x}\left(\overset{\circ}{\tau}_{j_2^*}(u) - \frac{1}{16}h^2\left(\gamma t'_{(j_2+5)^*}(u) + (1-\gamma)t'_{(j_2-5)^*}(u)\right)\right)du - \frac{1}{8}h^2 t_{j_2}(x),
\end{aligned}$$

і позначимо $\varphi_{j,\nu}(x) =: A_\nu(x) + B_\nu(x), \quad \nu = 1,2,3.$

Лема 2.4.4. *Якщо* $j \in H_3$, *то* $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ *можуть бути обрані так, що*

$$A_\nu(v_j + \pi) = \pi^2 - h^2, \quad \nu = 1, 3, \quad A_2(v_j + \pi) = \pi^2 - \pi h^2/8, \tag{2.4.31}$$

і тоді

$$\begin{aligned} \Big(\varphi'_{j,\nu}(x) - \Psi'_{j,\nu}(x)\Big)\, \Pi(x_j)\Pi(x) &\geqslant 0, \quad \nu = 1, 3, \\ \Big(\varphi'_{j,2}(x) - \Psi'_{j,2}(x)\Big)\, \Pi(x_j)\Pi(x) &\leqslant 0, \end{aligned} \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{2.4.32}$$

$$|\Psi_{j,\nu}(x) - \varphi_{j,\nu}(x)| \leqslant c\, h^2 \Gamma_j^3(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.4.33}$$

Більш того,

$$\varphi_{j,\nu}(x) = \frac{1}{6\pi} x^3 + \frac{\pi - v_j}{2\pi} x^2 + \left(\frac{x_j x_{j-1}}{2\pi} - v_j + \frac{\pi}{3}\right) x + Q_{j,\nu}(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{2.4.34}$$

де $Q_{j,\nu}$ *деяки поліноми з* $\mathbb{T}_{cn}$.

Доведення. Будемо користуватися значеннями обраних n_1 і n_2, і нерівностями

$$\Gamma_{(j_\nu \pm 1)^*, n_2}(x) < \Gamma_{j_\nu \pm 1, n_1}(x) < 2\pi \Gamma_{j_\nu, n_1}(x) < 2\pi \Gamma_{j,n}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

без спеціальних посилань. Візьмемо (2.4.16), (2.4.8) для $\overset{\circ}{t}_{j_\nu^*}$, і (2.2.16), щоб перевірити існування $\beta \in [0, 1]$ для (2.4.31) з $\nu = 3$. Якщо $\beta = 1$, то

$$\begin{aligned} &A_3(v_j + \pi) \\ &\quad = 2 \int_{v_j - \pi}^{v_j + \pi} \Big[\overset{\circ}{\tau}_{j_3^*}(u) - (u - d_j)_+ + h \left(\overset{\circ}{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u, x_{j_3+1}) \right) \\ &\qquad + h\big(\chi(u, x_{j_3+1}) - \chi(u, d_j)\big) \Big] du + 2 \int_{v_j - \pi}^{v_j + \pi} \left((u - d_j)_+ + h\chi(u, d_j) \right) du \\ &\quad \geqslant \pi^2 - h^2 + 2hh_1 - 2 \left| \int_{v_j - \pi}^{v_j + \pi} \left[\overset{\circ}{\tau}_{j_3^*}(u) - (u - d_j)_+ + h \left(\overset{\circ}{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u, x_{j_3+1}) \right) \right] du \right| \\ &\quad \geqslant \pi^2 - h^2 + 2hh_1 - 2c_8(b_2) h_2 \int_{v_j - \pi}^{v_j + \pi} \Gamma_{j_3^*, n_2}^{2(b_2 - s - 1)}(u) du \\ &\qquad - 2c_1(b_2) h \int_{v_j - \pi}^{v_j + \pi} \Gamma_{(j_3+1)^*, n_2}^{2b_2 - 2s - 1}(u) du \\ &\quad \geqslant \pi^2 - h^2 + 2hh_1 - 2c_5(b_2)\big(c_8(b_2) h_2^2 + c_1(b_2) h h_2\big) \\ &\quad > \pi^2 - h^2, \end{aligned}$$

тоді як для $\beta = 0$ ми аналогічно маємо протилежну нерівність $A_3(v_j + \pi) < \pi^2 - h^2$. Отже, для $\nu = 3$ нерівність (2.4.31) доведено. Для $\nu = 1, 2$ вона доводиться аналогічно.

З трьох схожих нерівностей (2.4.32) перевіримо лише одну з $\nu = 3$. Візьмемо до уваги (2.4.30), і маючи (2.4.16), (2.4.17), (2.4.8) для $\overset{\circ}{t}_j$, і (2.4.15), скористаємося (2.4.10) і (2.4.11). А саме, для $j \in H_3$ позначимо

$$K_{i,j}(x, n_1) := \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi] \backslash O_i(Y, n_1, 10) \\ \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, & \text{якщо} \quad x \in O_i(Y, n_1, 10), \end{cases} \qquad i = 1, ..., 2s,$$

і, завдячуючи (2.4.7), побачимо, що нерівність

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi'_{j,3}(x) - \Psi'_{j,3}(x)\big)\Pi(x_j)\Pi(x) \\
&\quad = \Big(2\left(\overset{\circ}{\tau}_{j_3^*}(x) - (x-d_j)_+\right) + 2h\Big[\beta\left(\overset{\circ}{t}_{(j_3+1)^*}(x) - \chi(x, x_{j_3+1})\right) \\
&\qquad + (1-\beta)\left(\overset{\circ}{t}_{(j_3-1)^*}(x) - \chi(x, x_{j_3-1})\right) \\
&\qquad + \beta\chi(x, x_{j_3+1}) + (1-\beta)\chi(x, x_{j_3-1}) - \chi(x, d_j)\Big] + \frac{3}{4}h^2 t'_{j_3}(x)\Big)\Pi(x_j)\Pi(x) \\
&\quad \geqslant 0,
\end{aligned}$$

справджується, якщо наступна велечина невід'ємна

$$\begin{aligned}
&- c_8(b_2)h_2\Gamma^{2(b_2-s-1)}_{j_3^*,n_2}(x)K_{i,j_3}(x, n_1) \\
&- 2h\Big[\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\}2\Gamma^{2b_2-2s-1}_{(j_3\pm1)^*,n_2}(x)K_{i,j_3\pm1}(x, n_1) + \chi(x, d_j) - \chi(x, x_{j_3-1})\Big] \\
&+ \frac{3}{4}h^2 c_3(b_1)\frac{1}{h_1}\Gamma^{2b_1+2s}_{j_3,n_1}(x)K_{i,j_3}(x, n_1) \\
\geqslant &-c_8(b_2)h_2\Gamma^{2b_1+2s}_{j_3,n_1}(x)K_{i,j_3}(x, n_1) - 2h\Big[\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\}2\Gamma^{2b_1+2s}_{j_3\pm1,n_1}(x)K_{i,j_3\pm1}(x, n_1) \\
&+ \Gamma^{2b_1+2s}_{j_3,n_1}(x)K_{i,j_3}(x, n_1)\Big] + \frac{3}{4}h^2 c_3(b_1)\frac{1}{h_1}\Gamma^{2b_1+2s}_{j_3,n_1}(x)K_{i,j_3}(x, n_1) \\
\geqslant &\frac{3}{4}hc_3(b_1)\frac{n_1}{n} - c_8(b_2)h_2 - 2h\big[\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\}2(2\pi)^{2b_1+2s} + 1\big] \\
\geqslant &\, 0,
\end{aligned}$$

що так і є. Таким чином, нерівність (2.4.32) доведено.

Доведем (2.4.33). З (2.4.30), (2.4.16) і (2.4.8), при $x < v_j$, запишемо

$$\begin{aligned}
&|\Psi_{j,1}(x) - \varphi_{j,1}(x)| \\
&\quad = \Bigg| 2\int_{v_j-\pi}^{x} \Big((u-a_j)_+ - \overset{\circ}{\tau}_{j_1^*}(u) - h\Big(\chi(u,a_j) - \alpha\chi(u,x_{j_1+1}) - (1-\alpha)\chi(u,x_{j_1-1})\Big) \\
&\quad -h\left[\alpha\left(\chi(u,x_{j_1+1}) - \overset{\circ}{t}_{(j_1+1)^*}(u)\right) + (1-\alpha)\left(\chi(u,x_{j_1-1}) - \overset{\circ}{t}_{(j_1-1)^*}(u)\right)\right]\Big) du \\
&\quad + \frac{3}{4}h^2\Big(\chi(x,a_j) - t_{j_1}(x)\Big)\Bigg| \\
&\quad \leqslant 2c_8(b_2)h_2\int_{v_j-\pi}^{x} \Gamma_{j_1^*,n_2}^{2(b_2-s-1)}(u)du \\
&\quad + 2h\int_{v_j-\pi}^{x} |\chi(u,a_j) - \chi(u,x_{j_1+1})|\, du + 2c_1(b_2)h2\int_{v_j-\pi}^{x} \Gamma_{(j_1\pm1)^*,n_2}^{2(b_2-s-1)}(u)du \\
&\quad + \frac{3}{4}h^2 c_1(b_1)\Gamma_{j_1,n_1}^{2b_1-s-1}(x) \\
&\quad \leqslant 2c_8(b_2)c_5(b_2)h_2^2\Gamma_{j_1^*,n_2}^3(x) + 2hh_1\Gamma_{j_1+1,n_1}^3(x) \\
&\quad + 2c_1(b_2)c_5(b_2)((4\pi)^3+1)h2h_2\Gamma_{(j_1-1)^*,n_2}^3(x) + (4\pi)^3h^2c_1(b_1)\Gamma_{j,n}^3(x) \\
&\quad \leqslant c\,h^2\Gamma_j^3(x)
\end{aligned}$$

інакше, якщо $x > v_j$, то скористаємося (2.4.31) і, позначивши $\Psi_{j,1}(x) =: C_1(x) + D_1(x)$, аналогічно запишемо

$$\begin{aligned}
|\Psi_{j,1}(x) - \varphi_{j,1}(x)| &= \left|C_1(x) - A_1(x) - \Big(C_1(v_j+\pi) - A_1(v_j+\pi)\Big) + D_1(x) - B_1(x)\right| \\
&\leqslant \left|\int_{v_j+\pi}^{x} \Big(C_1'(u) - A_1'(u)\Big)du\right| + \left|D_1(x) - B_1(x)\right| \\
&= \left|2\int_{v_j+\pi}^{x} \ldots\, du\right| + \left|D_1(x) - B_1(x)\right| \\
&\leqslant c\,h^2\Gamma_j^3(x).
\end{aligned}$$

Отже, оцінку (2.4.33) доведено для $\nu = 1$ і за аналогією для $\nu = 2, 3$ теж.

Насамкінець, доведем (2.4.34) для $\nu = 1$ для визначеності. З (2.4.13) і (2.4.14) пишемо

$$\overset{\circ}{t}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_{j_1^*}(x), \quad \overset{\circ}{\tau}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_{j_1^*}(x),$$

$$\hat{r}_{j_1^*}(x) := \hat{R}_{j_1^*}(x) - \hat{R}_{j_1^*,0}, \quad \tilde{r}_{j_1^*}(x) := \tilde{R}_{j_1^*}(x) - \tilde{R}_{j_1^*,0},$$

де $\hat{R}_{j_1^*,0}$ і $\tilde{R}_{j_1^*,0}$ – вільні доданки поліномів $\hat{R}_{j_1^*}, \tilde{R}_{j_1^*} \in \mathbb{T}_{cn}$, відповідно. Тоді,

$$\begin{aligned}A_1(x) &= \left(\frac{1}{6\pi}x^3 + \frac{\pi - a_j}{2\pi}x^2 + 2\tilde{R}_{j_1^*,0}x\right) - \Big(...(v_j - \pi)\Big) \\ &- 2h\left(\frac{1}{4\pi}x^2 + \left(\alpha\hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\right)x\right) + 2h\Big(...(v_j - \pi)\Big) \\ &+ 2\int_{v_j-\pi}^{x}\Big(\tilde{r}_{j_1^*}(u) - h\big(\alpha\hat{r}_{(j_1+1)^*}(u) + (1-\alpha)\hat{r}_{(j_1-1)^*}(u)\big)\Big)du \\ &= \frac{1}{6\pi}x^3 + \frac{\pi - v_j}{2\pi}x^2 + 2Cx - \left(\frac{1}{6\pi}(v_j-\pi)^3 + \frac{\pi - v_j}{2\pi}(v_j-\pi)^2 + 2C(v_j-\pi)\right) + q_{j_1}(x),\end{aligned}$$

де

$$C := \tilde{R}_{j_1^*,0} - h\left(\alpha\hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\right),$$

і $q_{j_1} \in \mathbb{T}_{cn}$ не має вільного доданку. Беручи це і (2.4.31) до уваги, пвдрахуємо значення C, а саме,

$$\pi^2 - h^2 = \frac{1}{6\pi}\big((v_j+\pi)^3 - (v_j-\pi)^3\big) + \frac{\pi - v_j}{2\pi}\big((v_j+\pi)^2 - (v_j-\pi)^2\big) + 4\pi C$$
$$\Rightarrow\ C = \frac{\frac{1}{3}\pi^2 + \frac{1}{2}v_j^2 - \frac{1}{2}h^2 - v_j\pi}{2\pi},$$

що разом з (2.4.13) (для B_1) породжує (2.4.34). Дві інші рівності (2.4.34) доводяться аналогічно. Лему 2.4.4 доведено.

Доведення теореми 2.4.1

Покладемо

$$P_n(x) := f(x_n) + \frac{\Delta_n}{h}(x - x_n) + \frac{\lambda_n}{2h^2}\Psi_n(x) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1}\varphi_j(x), \tag{2.4.35}$$

де для $\delta_{j+1}\Pi(x_j) \geqslant 0$

$$\varphi_j(x) := \begin{cases}\varphi_{j,1}(x), & \text{якщо}\quad \psi_j \equiv \underline{\psi}_j,\\ \varphi_{j,3}(x), & \text{якщо}\quad \psi_j \equiv \overline{\psi}_j,\\ \alpha_j\varphi_{j,1}(x) + (1-\alpha_j)\varphi_{j,3}(x), & \text{якщо}\quad \psi_j \equiv \alpha_j\underline{\psi}_j + (1-\alpha_j)\overline{\psi}_j,\end{cases}$$

і для $\delta_{j+1}\Pi(x_j) < 0$

$$\varphi_j(x) := \varphi_{j,2}(x).$$

Покажимо, що P_n поліном з теореми 2.4.1. Поперше, користуючись (2.4.34) і (2.4.20), покажемо, що $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$. А саме,

$$P_n(x) = \frac{A}{6\pi}x^3 + \frac{\lambda_n}{2h^2}x^2 + \frac{1}{2h^2}x^2\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1}\frac{\pi - v_j}{2\pi}$$

$$+\frac{\Delta_n}{h}x - \frac{\lambda_n}{2h^2}(x_n + x_{n-1})x + \frac{1}{2h^2}x\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1}\left(\frac{x_j x_{j-1}}{2\pi} - v_j + \frac{\pi}{3}\right) + Q_n(x),$$

де

$$A := \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1} = \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_{j+1} = \frac{1}{2h^2}(\lambda_{2-n} - \lambda_n) = \frac{1}{2h^2}(\lambda_{n+2} - \lambda_n) = 0$$

(завдячуючи періодичності f_0 і рівності $\lambda_\nu = \lambda_\mu$ для параболи), і

$$Q_n(x) := f(x_n) - \frac{\Delta_n}{h}x_n + \frac{\lambda_n}{2h^2}x_n x_{n-1} + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3,\, \nu=1\vee 2\vee 3}\delta_{j+1}Q_{j,\nu}(x) \quad \in \mathbb{T}_{cn}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= Q_n(x) + x^2\left[\frac{\lambda_n}{2h^2} + \frac{1}{8\pi h^2}\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1}(2\pi - x_j - x_{j-1})\right] \\
&\quad + x\left[\frac{\Delta_n}{h} - \frac{\lambda_n}{2h^2}(x_n + x_{n-1}) + \frac{1}{12\pi h^2}\sum_{j\in H_3}\delta_{j+1}(3x_j x_{j-1} - 3\pi(x_j + x_{j-1}) + 2\pi^2)\right] \\
&= Q_n(x) + x^2\left[\frac{\lambda_n}{2h^2} + \frac{1}{8nh^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_{j+1}(2j + 2n - 1)\right] \\
&\quad + x\left[\frac{2\Delta_n n - \lambda_n n(1-2n)}{2\pi} + \frac{1}{12\pi}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_{j+1}\big(3j^2 + (6n-3)j + 2n^2 - 3n\big)\right] \\
&= Q_n(x) + x^2\left[\frac{\lambda_n}{2h^2} + \frac{1}{4nh^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_{j+1}j\right] \\
&\quad + x\left[\frac{2\Delta_n n - \lambda_n n(1-2n)}{2\pi} + \frac{1}{12\pi}\left(3\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_{j+1}j^2 - 2(6n-3)n\lambda_n\right)\right] \\
&= Q_n(x) + x^2\frac{1}{4h^2}\left[2\lambda_n + \frac{1}{n}\left(-(n-1)\lambda_n + (1-n)\lambda_{2-n} + \sum_{j=2-n}^{n-1}\lambda_j\right)\right] \\
&\quad + x\left[\frac{2\Delta_n n - \lambda_n n(1-2n)}{2\pi} + \frac{1}{12\pi}\Big(12n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - 2(6n-3)n\lambda_n\Big)\right] \\
&= Q_n(x) + x^2\frac{1}{4h^2}(\lambda_n - \lambda_{n+2}) \\
&\quad + x\frac{1}{12\pi}\big(12n\Delta_n + 12n^2\lambda_n - 6n\lambda_n - 12n^2\lambda_n + 6n\lambda_n + 12n\lambda_n - 12n\Delta_{n-1}\big) \\
&= Q_n(x),
\end{aligned}$$

де ми знову скористалися періодичністю f_0 і рівністями

$$\sum_{j=2-n}^{n-1} \lambda_j = -\lambda_{n+1} - \lambda_n = -2\lambda_n, \quad \frac{1}{n}\sum_{j=2-n}^{n-1} \delta_{j+1} j = -\lambda_n - \lambda_{n+2} = -2\lambda_n,$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=2-n}^{n-1} \delta_{j+1} j^2 &= -(n-1)^2\lambda_n + \sum_{j=2-n}^{n-1} \lambda_j(2j-1) + (1-n)^2\lambda_{n+2} \\ &= 2\sum_{j=2-n}^{n-1} \lambda_j j + 2\lambda_n = 4n(\lambda_n - \Delta_{n-1}).\end{aligned}$$

Отже, $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$.

Тепер доведемо (2.4.1). Беручи до уваги (2.4.20), запишемо (2.4.25) для S_0 у формі

$$S_0(x) = f(x_n) + \frac{\Delta_n}{h}(x - x_n) + \frac{\lambda_n}{2h^2}\Psi_n(x) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3} \delta_{j+1}\Psi_j(x). \tag{2.4.36}$$

Використовуючи це, (2.4.35), (2.4.32) з (2.4.26), і (2.4.29), запишемо

$$\begin{aligned}P_n'(x)\Pi(x) &= \big(P_n'(x) - S_0'(x) + S_0'(x)\big)\Pi(x) \\ &= \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3} \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\delta_{j+1}\Pi(x_j)\big(\Psi_j'(x) - \varphi_j'(x)\big)\Pi(x_j)\Pi(x) + S_0'(x)\Pi(x) \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

де $x \in [-\pi, \pi]\backslash \big(O_4 \cup \{v_j\}_{j\in H_4}\big)$, тобто за періодичністю P_n',

$$P_n'(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-\pi, \pi]\backslash O_4,$$

що породжує (2.4.1).

Оцінка (2.4.2) випливає з періодичності f і P_n, (2.4.36), (2.4.35), (2.4.33), (2.4.21) і (2.2.5). А саме,

$$\begin{aligned}\|f - P_n\| &= \|f - S_0 + S_0 - P_n\|_{[-\pi,\pi]} \\ &\leqslant \|f - S_0\|_{[-\pi,\pi]} + \left\|\frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_3} \delta_{j+1}\big(\Psi_j - \varphi_j\big)\right\|_{[-\pi,\pi]} \\ &\leqslant c\,\omega_3(f,h) + c\,\omega_3(f,h)\left\|\frac{1}{2h^2}\sum_{j=1-n}^{n} h^2\Gamma_j^3\right\| \\ &\leqslant c\,\omega_3(f,h).\end{aligned}$$

Теорему 2.4.1 доведено.

2.5 Висновки до розділу 2

У розділі 2 доведено наступне:

- Якщо неперервна на $[-1,1]$ функція f змінює свою монотонність в кожній з $s \in \mathbb{N}$ точок набору $Y : -1 < y_s < \dots < y_1 < 1$ (тобто f не спадає на $[y_1, 1]$, не зростає на $[y_2, y_1]$, не спадає на $[y_3, y_2]$ і т.д.), то для кожного натурального n, більшого деякої сталої $N(Y)$, що залежить тільки від Y, існує алгебраїчний многочлен P_n, степеня $\leqslant n$, який теж змінює свою монотонність в точках Y, як f, і

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\, \omega_2(f, \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1,1],$$

де $c(s)$ – стала, що залежить тільки від s і $\omega_2\,(f,t)$ – другий модуль неперервності функції f (див. підрозділ 2.1).

- Якщо неперервна на дійсній осі $\mathbb{R}$ 2π-періодична функція f змінює свою монотонність в кожній точці $y_i \in [-\pi, \pi),\ i = 1, \dots, 2s,\ s \in \mathbb{N}$ (тобто на $\mathbb{R}$ є множина $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, де точки поза $[-\pi, \pi)$, визначено рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$), то для кожного натурального n, більшого деякої сталої $N(Y)$ (або $N(Y,k)$), що залежить тільки від Y (або ще й від k), існують тригонометричні поліноми $P_n,\ T_n,\ R_n$ порядку $\leqslant n$, що змінюють свою монотонність в точках $y_i \in Y$, як f, і поліном Q_{cn}, який може порушувати ці зміни в маленьких околах $y_i : (y_i - \pi/n, y_i + \pi/n)$, і такі, що

$$\begin{aligned}
&\|f - P_n\| \leqslant c(s)\, \omega_2(f, \pi/n), && f \in C,\\
&\|f - T_n\| \leqslant \frac{c(s)}{n}\, \omega_3(f', \pi/n), && f \in C^{(1)},\\
&\|f - R_n\| \leqslant \frac{c(s,k)}{n^2}\, \omega_k(f'', \pi/n), && f \in C^{(2)},\ k \in \mathbb{N},\\
&\|f - Q_{cn}\| \leqslant c(s)\, \omega_3(f, \pi/n), && f \in C,\ Q_{cn} - \textit{майже комонотонний з } f,
\end{aligned}$$

де $c,\ c(s)$ і $c(s,k)$ – сталі, які можуть залежити тільки від s і k, $\omega_k\,(f,\cdot)$ – k-й модуль неперервності f і $\|\cdot\|$ – max-норма (див. підрозділи 2.2, 2.3, 2.4).

В отриманих оцінках збільшити порядки наближень неможливо (інколи навіть зі сталими, що залежать від функції) (див., зокрема, підрозділ 6.2).

- Наслідуючи Рогозиньського, який додав два сусідніх ядра Діріхле, утворюючи ядро Рогозиньського, і Джексона, якій підніс ядро Діріхле до парного степеня, отримавши невід'ємне ядро Джексона з потужними наближуючими властивостями, запропоновано строго додатнє ядро, у вигляді суми двох сусідніх ядер Джексона, яке виявилось незамінним (тобто, його строга додатність) для отримання майже всіх оцінок похибок формозберігаючого наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами (див. (2.2.6) і (2.2.8)).

Розділ 3

Коопукле наближення

3.1 Поточкове наближення неперервних функцій з інтерполяцією на кінцях відрізку

Результат цього підрозділу міститься в [80].

Згадаємо класичні нерівності (2.1.1) і (2.1.2). Нехай $\Delta^{(2)}$ буде множиною опуклих на $[-1,1]$ функцій $f \in C := C[-1,1]$, а $\mathbb{P}_n$ – множиною алгебраїчних многочленів степеня $\leqslant n$. Надалі $c = c(s)$ позначатимуть різні додатні абсолютні сталі, що можуть бути різними навіть в одному рядку, або – сталі, що можуть залежити тільки від $s \in \mathbb{N}$.

Левіатан [114] для кожної $f \in \Delta^{(2)}$ і кожного $n \geqslant 1$, довів існування многочлена $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}$, такого, що (2.1.2) справджується з $k \leqslant 2$. Як це вже відзначалося, неможливо отримати оцінку (2.1.2) з $k > 2$, навіть для наближення без обмежень, тобто для $f \in C$ і $P_n \in \mathbb{P}_n$. Копотун [103] довів (2.1.1) з $k = 3$ для $f \in \Delta^{(2)}$ і $P_n \in \Delta^{(2)}$. Якщо $k > 3$, навіть оцінка (2.1.1) не справджується для опуклого наближення. А саме, Ющенко [173] побудувала функцію $f \in \Delta^{(2)}$, таку, що для кожної послідовності $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \Delta^{(2)} \cap \mathbb{P}_n$, справджується рівність

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{f - P_n}{\omega_4(f, \rho_n)} \right\| = \infty, \tag{3.1.1}$$

де і надалі $\|f\| := \max_{x\in I} |f(x)|$. Раніше Ву і Цу [169] довели (3.1.1) з ω_k, $k \geqslant 5$, замість ω_4.

Що до *кусково*- опуклого, або коротше, коопуклого наближення, то Копотун, Левіатан і Шевчук [109, 123] довели відповідні рівномірні оцінки з $\omega_k(f, 1/n)$, $k \leqslant 3$.

Головним результатом цього підрозділу є теорема 3.1.1, в якій встановлено першу поточкову (з інтерполяцією на кінцях відрізку) оцінку коопуклого наближення многочленами. Більш того, теореми 6.3.1-6.3.3 свідчать, що ця оцінка є, у певному розумінні, остаточною.

Нехай $\mathbb{Y}_s$, $s \in \mathbb{N}$, позначає множину всіх наборів $Y := Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s$ точок y_i : $-1 < y_s < \cdots < y_1 < 1$, і $\Delta^{(2)}(Y)$ – множину всіх функцій $f \in C[-1,1]$, що змініють свою опуклість в y_i, і є опуклі до низу на $[y_1, 1]$. Тобто, $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли f опукла до низу на $[y_1, 1]$, опукла до гори на $[y_2, y_1]$, опукла до низу на $[y_3, y_2]$ і т.д. А якщо $f \in C^2(-1,1) \cap C[-1,1]$, то $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f''(x)\Pi(x) \geqslant 0$, на $(-1,1)$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i),$$

$\Pi(x, \varnothing) := 1$, і, для спрощення, випадок $s = 0$ з $Y_0 := \{\varnothing\}$ це опуклі до низу на всьому $[-1,1] := I$ функції.

Теорема 3.1.1. *Якщо $Y \in \mathbb{Y}_s$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то для кожного $n \geqslant N(Y)$, існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$, такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y), \tag{3.1.2}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_2\left(f, \delta_n(x)\right), \quad x \in [-1,1], \tag{3.1.3}$$

де $N(Y)$ – стала, що залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\ldots,s-1} y_i - y_{i+1}$, якщо $s > 1$, і $N(Y) = 1$, коли $s = 1$, а $c(s)$ – стала, що залежить тільки від s.

Теорема 3.1.1 безпосередньо тягне наслідки 3.1.1 – 3.1.4.

Наслідок 3.1.1. *В умовах теореми 3.1.1 для кожного $n \geqslant N(Y)$ маємо*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\omega_2\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.1.4}$$

Нехай W^r, $r \in \mathbb{N}$, – множина функцій $f \in C$, що мають на I абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ і таких, що $\left|f^{(r)}(x)\right| \leqslant 1$ м. с. на I.

Наслідок 3.1.2. *Якщо $r = 1$, $r = 2$, $Y \in \mathbb{Y}_s$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y) \cap W^r$, то для кожного $n \geqslant N(Y)$, знайдеться многочлен $P_n \in \Delta^{(2)}(Y) \cap \mathbb{P}_n$, такий, що*

$$\left\|\frac{f - P_n}{\delta_n^r}\right\| \leqslant c, \tag{3.1.5}$$

і отже

$$\left\|\frac{f - P_n}{\rho_n^r}\right\| \leqslant c. \tag{3.1.6}$$

Теореми 6.3.1 і 6.3.2 вказують на те, що якщо $s = 1$, то наслідки 3.1.1 і 3.1.2 (а отже і теорема 3.1.1) є хибними для гдадкості більше ніж 2.

Наслідок 3.1.3. *Якщо* $Y \in \mathbb{Y}_s$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y) \cap C^1$, *то для кожного* $n \geqslant N(Y)$, *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_n$, *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y), \tag{3.1.7}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\delta_n(x)\,\omega_1(f', \delta_n(x)), \quad x \in I, \tag{3.1.8}$$

$$\left|f'(x) - P_n'(x)\right| \leqslant c\,\omega_1(f', \rho_n(x)), \quad x \in I. \tag{3.1.9}$$

Зауваження 3.1.1. *Якщо* $s > 1$, *то в теоремі 3.1.1 і в усіх її наслідках сталу* $N(Y)$ *неможливо замінити сталою, що не залежить від* Y, *див., скажімо, Левіатан, Шевчук* [123].

Зауваження 3.1.2. *Якщо в* (3.1.9) *замінити* ρ_n *на* δ_n, *то, для* $s = 1$, *твердження наслідку 3.1.3 є, взагалі кажучи, хибним, див. теорему 6.3.3.*

Щоб сформулювати останній наслідок позначимо через $\mathrm{Lip}^*\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, множину функцій $f \in C$,таких, що

$$\omega_2(f, t) = O(t^\alpha), \quad t \to 0.$$

Наслідок 3.1.4. *Нехай* $0 < \alpha < 2$ *і* $Y \in \mathbb{Y}_s$. *Функція* $f \in \Delta^{(2)}(Y) \cap Lip^*\alpha$ *тоді і тільки тоді, коли існує послідовність* $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ *многочленів* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y) \cap \mathbb{P}_n$, *таких, що*

$$\left\| \frac{f - P_n}{\delta_n^\alpha} \right\| = O(1), \quad n \to \infty. \tag{3.1.10}$$

Для доведення теореми 3.1.1 нам знадобиться теорема 3.1.2, що складає окремий інтерес.

Нехай $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \ldots, n$, – чебишевське розбиття I. Для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ і $Y = \{y_i\}_{i=1}^s \in \mathbb{Y}_s$, нехай

$$O_i := O_i(n, Y) := (x_{j+2}, x_{j-2}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{n+1} := -1$, $x_{n+2} := -1$ і $x_{-1} := 1$, і $O = O(n, Y) := \bigcup\limits_{i=1}^s O_i$. Також будемо писати $j \in H$, якщо $x_j \in (-1, 1) \backslash O$.

Теорема 3.1.2. *Нехай $Y \in \mathbb{Y}_s$. Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то для кожного $n \geqslant N(Y)$, існує ламана L, що має вузли в x_j-х з $j \in H$ лише, і така, що*

$$L \in \Delta^{(2)}(Y) \tag{3.1.11}$$

$$|f(x) - L(x)| \leqslant c\,\omega_2\left(f, \delta_n(x)\right), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.1.12}$$

де $N(Y)$ – стала, що залежить тільки від Y. Якщо $s = 1$, то $N(Y) = 1$.

Підкреслимо, що L з теореми 3.1.2 не має вузлів в x_j-х, якщо $x_j \in O$.

Як завжди для кожного $j = 1, \dots, n$, позначимо $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$, для будь-якого проміжку E нехай $|E|$ – його довжина, зокрема $|I_j| = x_{j-1} - x_j =: h_j$, і нерівності (2.1.11) і (2.1.12) буде використано без спеціальних посилань.

Доведення теореми 3.1.2

Покладемо

$$\omega(t) := \omega_2(f, t).$$

Якщо $s = 1$, то нехай $N(Y) = 1$, якщо $s > 1$, то нехай $N(Y)$ таке, що

$$O_i(n, Y) \cap O_{i+1}(n, Y) = \varnothing,$$

для всіх $n \geqslant N(Y)$ і $i = 1, \cdots, s-1$. Зафіксуємо $n \geqslant N(Y)$. Позначимо

$$O_i = O_i(n, Y) =: (\overline{y}_i, \underline{y}_i), \quad i = 1, \dots, s,$$

тобто $\overline{y}_i$ і $\underline{y}_i$ є відповідно лівим і правим кінцем проміжку O_i.

Можливі чотири випадки: a) $\underline{y}_1 = 1,\ \ \overline{y}_s \neq -1$; b) $\underline{y}_1 = 1,\ \ \overline{y}_s = -1$; c) $\underline{y}_1 \neq 1,\ \ \overline{y}_s = -1$; d) $\underline{y}_1 \neq 1,\ \ \overline{y}_s \neq -1$. Розглянемо лише випадок a), оскільки всі решта випадків є схожими. Тобто, надалі в доведенні теореми 3.1.2

$$\underline{y}_1 = 1, \ \ \overline{y}_s \neq -1.$$

Означимо функції L_i для кожного $i = 1, \dots, s$. Якщо $i \neq 1$, то через $\overline{L}_i$ позначимо ламану, що складається з трьох ланок, таких, що $\overline{L}_i(-1) = 0,\ \overline{L}_i(\overline{y}_i) = 1,\ \overline{L}_i(y_i) = \overline{L}_i(1) = 0$.

Схожим чином, якщо $i \neq 1$, то через $\underline{L}_i$ позначимо ламану з трьох ланок, таких, що $\underline{L}_i(-1) = \underline{L}_i(y_i) = 0,\ \underline{L}_i(\underline{y}_i) = -1,\ \underline{L}_i(1) = 0$.

Відзначимо, що якщо i непарне, то $\overline{L}_i \in \Delta^{(2)}(Y)$ і $\underline{L}_i \in \Delta^{(2)}(Y)$. Якщо i парне, то $-\overline{L}_i \in \Delta^{(2)}(Y)$ і $-\underline{L}_i \in \Delta^{(2)}(Y)$.

Для кожного $i = 1, \ldots, s$, через $\bar{l}_i$ позначимо пряму, що інтерполює f в точках $\overline{y}_i$ і y_i; через $\underline{l}_i$ – пряму, що інтерполює f в y_i і $\underline{y}_i$.

Покладемо

$$L_1(x) := \frac{1}{2}\left(f(1) - \bar{l}_1(1)\right)(x+1).$$

Для кожного $i \neq 1$, покладемо

$$L_i(x) := \begin{cases} \left(\underline{l}_i(\underline{y}_i) - \bar{l}_i(\underline{y}_i)\right) \underline{L}_i(x), & \text{якщо} \quad (-1)^i(\underline{l}_i(\overline{y}_i) - \bar{l}_i(\overline{y}_i)) \geqslant 0, \quad (*) \\ \left(\underline{l}_i(\overline{y}_i) - \bar{l}_i(\overline{y}_i)\right) \overline{L}_i(x), & \text{інакше.} \quad (**) \end{cases} \tag{3.1.13}$$

Вочевидь,

$$L_i \in \Delta^{(2)}(Y), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{3.1.14}$$

Для $i \neq 1$ нехай

$$l_i^* := l_i^*(x) := \begin{cases} \bar{l}_i(x), & \text{якщо} \quad x \in [\overline{y}_i, y_i], \\ \underline{l}_i(x), & \text{якщо} \quad x \in [y_i, \underline{y}_i]. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Тоді у випадку (*) (3.1.13) маємо

$$l_i^*(x) + L_i(x) \equiv \bar{l}_i(x), \quad x \in O_i, \tag{3.1.16}$$

і, у випадку (**) (3.1.13), –

$$l_i^*(x) + L_i(x) \equiv \underline{l}_i(x), \quad x \in O_i. \tag{3.1.17}$$

Тепер, для $i \neq 1$, доведем нерівність

$$|L_i(x)| \leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right), \quad x \in I. \tag{3.1.18}$$

Розглянемо, скажімо, випадок (*) (3.1.13). Якщо $x \in [-1, \overline{y}_i]$, то $L_i(x) \equiv 0$, і нерівність (3.1.18) тривіальна. Якщо $x \in O_i$, то за нерівністю Уітні (2.1.12)

$$\left|f(x) - \bar{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right),$$

і

$$|f(x) - \underline{l}_i(x)| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right),$$

отже

$$\left|\bar{l}_i(x) - \underline{l}_i(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(|O_i|\right), \quad x \in O_i.$$

Тому (3.1.18) справджується для $x \in O_i$. Зокрема,

$$\left|L_i(\underline{y}_i)\right| \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(y_i)) \leqslant c\,\omega\,(1/n)\,.$$

Тепер, якщо $x \geqslant \left|\underline{y}_i\right|$, то

$$|L_i(x)| \leqslant c\,\omega\,(1/n)\,\,(1-x) \leqslant c\,\omega\,(1/n)\,\,(1-x^2) \leqslant c\,\omega\,(\delta_n(x)) \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(x))\,.$$

Якщо $\underline{y}_i \leqslant x < \left|\underline{y}_i\right|$, то $\rho_n(y_i) \leqslant \rho_n(x)$, і отже

$$|L_i(x)| \leqslant \left|L_i(\underline{y}_i)\right| \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(y_i)) \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(x))\,.$$

Так (3.1.18) доведено.

Для $i = 1$, схожі аргументи породжують

$$|L_1(x)| \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right), \quad x \in I_1, \tag{3.1.19}$$

отже

$$|L_1(x)| \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right)(1+x) \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right) \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(x))\,, \quad x \in I. \tag{3.1.20}$$

Через $L^* := L^*(x)$ позначимо ламану з вузлами в x_j-х, $j \in H$, і точках $y_i, i = 1, \ldots, s$, що інтерполює f в ціх вузлах і в -1 і y_1 (тобто, взагалі кажучи, $L^*(1) \neq f(1)$). Вочевидь,

$$L^* \in \Delta^{(2)}(Y). \tag{3.1.21}$$

Нерівність Уітні породжує

$$|f(x) - L^*(x)| \leqslant c\,\omega\,(\rho_n(x))\,, \quad x \in I. \tag{3.1.22}$$

Насамкінець покажемо, що ламана

$$L := L(x) := L^*(x) + \sum_{i=1}^{s} L_i(x) \tag{3.1.23}$$

є шуканою. Дійсно, (3.1.21) і (3.1.14) гарантують, що $L \in \Delta^{(2)}(Y)$. Співвідношення (3.1.16) і (3.1.17) кажуть, що L не має вузлів, за винятком x_j з $j \in H$. Нерівності (3.1.18), (3.1.20) і (3.1.22) тягнуть оцінку (3.1.12) для $x \in I \backslash (I_1 \cup I_n)$.

Отже, ми лишилися з (3.1.12) для $x \in I_1$ і $x \in I_n$. За побудовою, L – лінійна функція на I_1 і на I_n, і $L(-1) = f(-1)$, $\;L(1) = f(1)$. Покладемо $g(x) := f(x) - L(x)$.

Тоді маємо $g(-1) = 0,\ g(1) = 0,\ \omega_2(g, t, I_1) = \omega_2(f, t, I_1) \leqslant \omega(t)$ і $\omega_2(g, t, I_n) \leqslant \omega(t)$. Крім цього, нерівності (3.1.18), (3.1.20) і (3.1.22) тягнуть

$$\|g\|_{I_1} \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right) \quad \text{i} \quad \|g\|_{I_n} \leqslant c\,\omega\left(1/n^2\right).$$

Тоді, скажімо, для $x \in I_1$, застосуємо нерівність Маршо [134] і отримаємо

$$\begin{aligned}
|f(x) - L(x)| = |g(x)| = |g(x) - g(1)| &\leqslant c\,(1-x)\int_{1-x}^{|I_1|}\frac{\omega(u)}{u^2}du + \frac{1-x}{|I_1|}\omega\left(|I_1|\right)\\
&\leqslant c\,(1-x)\int_{1-x}^{\delta_n(x)}\frac{\omega(u)}{u^2}du + c\,(1-x)\int_{\delta_n(x)}^{|I_1|}\frac{\omega(u)}{u^2}du + c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\\
&\leqslant c\,(1-x)\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\int_{1-x}^{\infty}\frac{du}{u^2} + c\left(1-x^2\right)|I_1|\,\frac{\omega\left(\delta_n(x)\right)}{\delta_n^2(x)} + c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\\
&\leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) + c\,n^2\,|I_1|\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\\
&\leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right).
\end{aligned}$$

Так само перевіряється (3.1.12) для $x \in I_n$. Теорему 3.1.2 доведено.

Наслідок 3.1.5. *Якщо L – ламана з теореми 3.1.2, то*

$$\Pi(x_j)\left[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, L\right] \geqslant 0, \quad j \in H, \tag{3.1.24}$$

$$\left|\left[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, L\right]\right| \leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2}, \quad j = 1, ..., n-1, \tag{3.1.25}$$

$$\left[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, L\right] = 0, \quad j \notin H, \tag{3.1.26}$$

де $[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, L]$ – друга розділена різниця L.

Допоміжні факти для доведення теореми 3.1.1

Скористаємося многочленами

$$T_j(x) = T_{j,n}(x, 6s, Y),\ j \in H,$$

з (2.1.23) $\big(T_{j\pm1} := T_{2j\pm1,2n},$ якщо $j \pm 1 \neq H\big)$ і

$$\tau_j(x) = \tau_{j,n}(x, 6s, Y),\ j \in H,$$

з (2.1.24).

Лема 3.1.1. [79, 123, 76] *Для кожного* $j \in H$, *многочлен* τ_j *задовольняє*

$$\tau_j''(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{3.1.27}$$

$$\tau_j'(\pm 1) = \chi_j(\pm 1), \quad \tau_j(-1) = 0, \quad \tau_j(1) = (1 - x_j), \tag{3.1.28}$$

$$|(x - x_j)_+ - \tau_j(x)| \leqslant c\, h_j\, \Gamma_j^6(x), \quad x \in I, \tag{3.1.29}$$

$$\left|\chi_j(x) - \tau_j'(x)\right| \leqslant c\, \Gamma_j^4(x), \quad x \in I, \tag{3.1.30}$$

Лема 3.1.1 породжує лему 3.1.2.

Лема 3.1.2. *Для кожного* $j \in H$, *многочлен* τ_j *задовольняє*

$$|(x - x_j)_+ - \tau_j(x)| \leqslant c\,(1 - x^2)\,\Gamma_j^4(x), \quad x \in I. \tag{3.1.31}$$

Доведення. Якщо $x \notin (I_1 \cup I_n)$, то (2.1.26) тягне

$$h_j\, \Gamma_j^2(x) \leqslant c\, n^2 \rho_n^2(x) \leqslant c\,(1 - x^2),$$

отже, (3.1.31) випливає з (3.1.29). Якщо $x \in I_1$, то з (3.1.28) і (3.1.30) випливає, що

$$\begin{aligned} |(x - x_j)_+ - \tau_j(x)| &= |((x - x_j)_+ - \tau_j(x)) - ((1 - x_j)_+ - \tau_j(1))| \\ &= \left|\int_x^1 \big(\chi_j(u) - \tau_j'(u)\big)\, du\right| \leqslant \int_x^1 \left|\chi_j(u) - \tau_j'(u)\right| du \\ &\leqslant c\,(1 - x) \max_{t \in I_1} \Gamma_j^4(t) = c\,(1 - x)\Gamma_j^4(1) \\ &\leqslant c\,(1 - x)\,\Gamma_j^4(x) \leqslant c\,(1 - x^2)\,\Gamma_j^4(x). \end{aligned}$$

Так само доводять (3.1.31) для $x \in I_n$. Лему 3.1.2 доведено.

Доведення теореми 3.1.1

Нехай L – ламана з теореми 3.1.2. Представимо її у формі

$$\begin{aligned} L(x) \equiv l(x) + \sum_{j=1}^{n-1} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,(x - x_j)_+ \equiv \\ \equiv l(x) + \sum_{j \in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,(x - x_j)_+, \end{aligned}$$

де $l(x) := [x_n, x_{n-1}, L](x+1) + L(-1)$, і де ми скористалися (3.1.26).

Покладемо

$$P_n(x) := l(x) + \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\tau_j(x).$$

Нерівності (3.1.24) і (3.1.27) породжують

$$[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\tau_j''(x)\Pi(x)$$

$$= \frac{1}{\Pi^2(x_j)}\left(\Pi(x_j)\,[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\right)\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\left(\tau_j''(x)\Pi(x_j)\right)\right) \geqslant 0, \quad x \in I, \quad j \in H,$$

що тягне (3.1.2). Щоб довести (3.1.4), представимо різницю $f - P_n$ у формі

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) &= f(x) - L(x) + L(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) \\ &\quad + \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,((x - x_j)_+ - \tau_j(x)) \\ &=: f(x) - L(x) + \sum_{j\in H} \alpha_j(x). \end{aligned}$$

З (3.1.12) запишемо

$$|f(x) - L(x)| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right), \quad x \in I.$$

Для оцінки $\alpha_j(x)$ застосуємо (3.1.29), (3.1.31) і (3.1.25). Якщо $x \notin I_1$ і $x \notin I_n$, то

$$\begin{aligned} |\alpha_j(x)| &\leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2} h_j h_j \Gamma_j^4(x) = c\,\omega(h_j)\Gamma_j^4(x) \\ &\leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right)\left(1 + \frac{h_j^2}{\rho_n^2(x)}\right)\Gamma_j^4(x) \leqslant c\,\omega\left(\rho_n(x)\right)\Gamma_j^2(x) \\ &\leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\Gamma_j^2(x), \end{aligned}$$

де ми скористалися (2.1.26). Якщо $x \in I_1$, то

$$|\alpha_j(x)| \leqslant c\,\frac{\omega(h_j)}{h_J^2} h_j (1 - x^2)\Gamma_j^4(x) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\Gamma_j^2(x),$$

де ми знову скористалися (2.1.26). Тому, беручи до уваги, що (2.1.26) тягне $\left\|\sum_{j=1}^n \Gamma_j^2\right\| \leqslant c$, маємо

$$\left|\sum_{j\in H} \alpha_j(x)\right| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \sum_{j\in H} \Gamma_j^2(x) \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right) \left\|\sum_{j=1}^n \Gamma_j^2\right\| \leqslant c\,\omega\left(\delta_n(x)\right), \quad x \in I.$$

Теорему 3.1.1 доведено.

3.2 Поточкове наближення неперервних на відрізку функцій, які мають більше однієї точки перегину

Результат цього підрозділу міститься в [19].

В цьому підрозділі доводиться наступна теорема 3.2.1.

Теорема 3.2.1. *Якщо* $s > 1$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$*, то для кожного* $n \geqslant 2$*, існує алгебраїчний многочлен* P_n*, степеня* $\leqslant n$*, такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y),$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.2.1}$$

і

$$|f'(x) - P_n'(x)| \leqslant C(Y)\,\omega_2(f', \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \quad \textit{якщо } f \in C^{(1)},$$

$$|f''(x) - P_n''(x)| \leqslant C(Y)\,\omega_1(f'', \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \quad \textit{якщо } f \in C^{(2)},$$

де $C(Y)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,\dots,s}(y_i - y_{i+1})$.

Історія оцінок (ко)опуклого наближення неперервних функцій многочленами міститься на початку підрозділу 3.1. Тут, лише зауважимо, що оцінка (3.2.1) є хибною з ω_k, $k > 3$, навіть з $1/n$ замість ρ_n (див. Ву, Цу [169, 176]), є хибною з $s = 1$ (див. теорему 6.3.1) і є хибною з $c(s)$ і $n \geqslant N(Y)$ замість $C(Y)$ і $n \geqslant 2$ (див. теорему 6.4.1).

Для доведення теореми 3.2.1 ми будуємо допоміжний кусково-опуклий сплайн степеня $\leqslant 2$, властивості якого наведені в наступній теоремі 3.2.2.

Згадаємо позначення: $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \dots, n$, – чебишевське розбиття $I := [-1, 1]$, $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$, $j = 1, ..., n$, і для фіксованих n і Y, $O_i := O_{i,n}(Y) := (x_{j+2},\ x_{j-3})$, якщо $y_i \in [x_j, x_{j-1})$, $(x_{n+2} = x_{n+1} := -1,\ x_{-1} = x_{-2} := 1)$, $O := O(n, Y) := \cup_{i=1}^{s} O_i$, і $j \in H$, якщо $I_j \cap O = \varnothing$.

Теорема 3.2.2. *Якщо* $s > 1$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$*, то існують сталі* $N(Y)$ *і* $C(Y)$*, які залежать тільки від* Y*, такі, що для кожного* $n \geqslant N(Y)$*, існує сплайн* L*, степеня* $\leqslant 2$*, з вузлами в* x_j*-х з* $j \in H$ *лише, і такий, що*

$$L \in \Delta^{(2)}(Y), \tag{3.2.2}$$

$$|f(x) - L(x)| \leqslant C(Y)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1]. \tag{3.2.3}$$

Доведення теореми 3.2.2

Спочатку означимо інтерполяційний (в своїх вузлах) сплайн $S \in \Delta^{(2)}(Y)$, степеня $\leqslant 2$, з вузлами в кожній точці множини

$$X_n := \{x_j\}_{j\in H} \cup Y \cup \{1\},$$

а тоді "підправимо" його так, щоб отримати L з теореми 3.2.2.

Виберемо $N(Y)$ таким, що для кожного $n \geqslant N(Y)$, будь-який інтервал (y_{i+1}, y_i), $i = \overline{0,s}$, містить принаймні сім різних відрізків I_j. Надалі $n \geqslant N(Y)$, $n-$ фіксоване, і тому, зокрема, $H \neq \emptyset$. Для будь-якого інтервалу $E = (x_{j_1}, x_{j_2}) \subset I$, $j_1 > j_2$, будемо користуватись позначенням $^*E := (x_{j_1+1}, x_{j_2})$, і $|E|$ – довжина E, зокрема, $|I_j| := x_{j-1} - x_j =: h_{j,n} =: h_j$. Нехай

$$\left(\underline{y}_i, \overline{y}_i\right) =: {}^*O_i,\ i = \overline{1,s},$$

тобто $\{\underline{y}_i, \overline{y}_i\}_{i=1}^s \subset X_n$, і нехай $\overline{y}_{s+1} := -1$, $\underline{y}_0 := 1$.

Розіб'єм множину $G := I \backslash (\cup_{i=1}^s {}^*O_i)$ на дві множини $\smile{G}$ і $\frown{G}$ так, що

$$G = \left(\bigcup_{i=0,\, i \text{ парне}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y_i}] \right) \cup \left(\bigcup_{i=1,\, i \text{ непарне}}^{s} [\overline{y}_{i+1}, \underline{y}_i] \right) =: \breve{G} \cup \widehat{G},$$

тобто $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, є опуклою донизу для $x \in \breve{G}$, і – опуклою догори для $x \in \widehat{G}$.

Нехай $l(x, g; b) := l(x, g; a, b, c)$ позначає параболу, що інтерполює $g \in C$ в трьох послідовних точках a, b і c з множини X_n, таких, що $a < b < c$, тобто в X_n немає $d \neq b$, такої, що $a < d < c$. Через $S := S(x, f; X_n)$ позначимо неперервний сплайн, степеня $\leqslant 2$, $S' \notin C$, який інтерполює f в кожній точці X_n наступним чином

$$S(x) := \begin{cases} l(x, f; x_{n-1}), & x \in [-1, x_{n-1}), \\ l(x, f; x_1), & x \in [x_1, 1], \\ l(x, f; \underline{y_i}), & x \in [\underline{y}_i, y_i),\ i = \overline{1,s}, \\ l(x, f; \overline{y_i}), & x \in [y_i, \overline{y}_i),\ i = \overline{1,s}, \\ \max\{l(x, f; x_j), l(x, f; x_{j-1})\}, & x \in [x_j, x_{j-1}) \subset \breve{G} \backslash ([-1, x_{n-1}) \cup [x_1, 1]), \\ \min\{l(x, f; x_j), l(x, f; x_{j-1})\}, & x \in [x_j, x_{j-1}) \subset \widehat{G} \backslash ([-1, x_{n-1}) \cup [x_1, 1]). \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то $S \in \Delta^{(2)}(Y)$.

Для будь-яких двох фіксованих a і $b \in I$, $a < b$, позначимо

$$\Psi(x, a, b, -) := (x - a)(x - b)\chi(x, a)$$

$$\left(\equiv \int_{-1}^{x} \Big(2(t-a)_+ - (b-a)\chi(t,a)\Big)dt = \int_{-1}^{x} \Psi'(t,a,b,-)dt\right),$$

$$\Psi(x,a,b,+) := (x-a)(x-b)\chi(x,b)$$

$$\left(\equiv \int_{-1}^{x} \Big(2(t-b)_+ + (b-a)\chi(t,b)\Big)dt = \int_{-1}^{x} \Psi'(t,a,b,+)dt\right).$$

Перенумеруємо точки набору X_n у спадному порядку

$$-1 := z_{n-4s} < \ldots < z_1 < z_0 := 1,\ X_n = \{z_k\}_{k=0}^{n-4s},$$

нехай $z_{-1} := 1$ і $z_{n-4s+1} := -1$. Для кожного $i = 1,\ldots,s$, через $k(i)$ позначимо індекс $k = 0,\ldots,n-4s$, такий, що $z_{k(i)} = y_i$. Покладемо

$$\Phi_k := [z_{k+1}, z_k, z_{k-1}, z_{k-2}, f](z_{k-2} - z_{k+1}), \quad k = 2,\ldots,n-4s-1,$$

$$F_k := [z_k, z_{k-1}, z_{k-2}, f], \quad k = 2,\ldots,n-4s.$$

Зауважимо, що для $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, $\operatorname{sign} F_k = \operatorname{sign}\Pi(z_{k-1})$, коли $k \neq k(i)+1$.

Будемо писати $k \in \overline{H} := \overline{H}(n,Y)$, якщо k є ціле від 2 до $n-4s-1$, і таке, що $k \neq k(i)$, $k \neq k(i)+1$, для всіх $i = 1,\ldots,s$.

Для кожного $k \in \overline{H}$, означимо неперервну на I функцію Ψ_k, як

$$\Psi_k(x) := \begin{cases} \Psi(x, z_k, z_{k-1}, -), & \text{якщо } |F_k| \leqslant |F_{k+1}|, \\ \Psi(x, z_k, z_{k-1}, +), & \text{якщо } |F_k| > |F_{k+1}|. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Для кожного $i = 1,\ldots,s$, покладемо

$$\begin{aligned} \Psi_{k(i)}(x) &:= \Psi(x, z_{k(i)}, z_{k(i)-1}, -), \quad x \in I, \\ \Psi_{k(i)+1}(x) &:= \Psi(x, z_{k(i)+1}, z_{k(i)}, +), \quad x \in I. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Нехай $\Psi_{n-4s}(x) :\equiv (1+x)(x - z_{n-4s-1})$ і $\Psi_1(x) :\equiv 0$. Тепер сплайн $S = S(x,f,X_n)$, має представлення

$$S(x) = \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k \Psi_k(x) + l(x, f, z_{n-4s-1}), \tag{3.2.6}$$

або, що те саме,

$$S(x) = l_1(x, f, -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k\big(\Psi_k(x) - \Psi_{k-1}(x)\big), \tag{3.2.7}$$

де $l_1(x,f,-1)$ – пряма, що інтерполює f в -1 і z_{n-4s-1} , (детальніше див. пропозицію 3.8.1).

Надалі c і $C(Y)$ – невід'ємні абсолютні сталі і, відповідно, сталі, що залежать тільки від Y, вони різні, навіть якщо стоять в одному рядку. Без спеціальних посилань, будемо користуватись нерівностями (2.1.11).

Зауважимо, що для S виконуються нерівності

$$|f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x)| \leqslant c\,\omega_{3-r}(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{3.2.8}$$

де $r = 0$, і, крім того, $r = 1$, якщо $f \in C^{(1)}$; $r = 1, 2$, якщо $f \in C^{(2)}$. Дійсно, нехай $\tilde{l}(x, g, [z_k, z_{k-2}]) := \tilde{l}(x, g, z_k, (z_{k-2} + z_k)/2, z_{k-2})$, – парабола, що інтерполює $g \in C$ в $z_k, (z_{k-2} + z_k)/2$ і z_{k-2}. Тоді, для $x \in [z_k, z_{k-2}]$, $k = 2, \dots, n-4$, за нерівністю Уітні

$$\left|g(x) - \tilde{l}(x, g, [z_k, z_{k-2}])\right| \leqslant 3\,\omega_3\left(g, (z_{k-2} - z_k)/3, [z_k, z_{k-2}]\right),$$

маємо

$$\begin{aligned}|g(x) - l(x, g, z_{k-1})| &= \left|g(x) - \tilde{l}(x, g, [z_k, z_{k-2}]) - l(x, g - \tilde{l}, z_{k-1})\right| \\ &\leqslant \left\|g - \tilde{l}\right\|_{[z_k, z_{k-2}]} \left(1 + \left|\frac{x - z_{k-2}}{z_{k-1} - z_{k-2}} \times \frac{x - z_k}{z_{k-1} - z_k}\right|\right) \\ &\leqslant 3\,\omega_3\left(g, (z_{k-2} - z_k)/3, [z_k, z_{k-2}]\right) \leqslant c\,\omega_3(g, \rho),\end{aligned}$$

звідки і випливає (3.2.8) для $r = 0$. Випадки $r = 1, 2$, є наслідками, відповідно, наступних двох нерівностей (детальніше див. [56, Лема 4.2]). Нехай

$$\mathbf{l}_\nu(x) := g(z_\nu) + \int_{z_\nu}^{x} l_1\left(u, g', z_\nu, z_{\nu-2}\right) du,$$

де $\nu := k \vee k+1$, $k = \overline{1, n-4s}$, і l_1 – пряма, що інтерполює g' в z_ν і $z_{\nu-2}$. Тоді, для $x \in [z_k, z_{k-1}]$, запишемо

$$\begin{aligned}\left|g'(x) - S'(x)\right| &= \left|g'(x) - l'(x, g, z_{\nu-1})\right| = \left|g'(x) - \mathbf{l}'_\nu(x) - l'\left(x, g - \mathbf{l}_\nu, z_{\nu-1}\right)\right| \\ &\leqslant \left|g'(x) - l_1(x, g', z_\nu, z_{\nu-2})\right| + c(z_{\nu-2} - z_\nu)^{-1} \left\|g - \mathbf{l}_\nu\right\|_{[z_\nu, z_{\nu-2}]} \\ &\leqslant 3\,\omega_2\left(g', \frac{z_{\nu-2} - z_\nu}{2}, [z_\nu, z_{\nu-2}]\right) + c(z_{\nu-2} - z_\nu)^{-1} \\ &\quad\times \max_{x \in [z_\nu, z_{\nu-2}]} \left|\int_{z_\nu}^{x} \Big(g'(u) - l_1\Big(u, g', z_\nu, z_{\nu-2}\Big)\Big) du\right| \leqslant c\,\omega_2\left(g', \rho\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|g''(x) - S''(x)\right| &= \left|g''(x) - l''(x, g, z_{\nu-1})\right| = \left|g''(x) - 2[z_\nu, z_{\nu-1}, z_{\nu-2}, g]\right| \\ &= \left|2\int_0^1 \int_0^{t_1} \Big(g''(x) - g''\big(z_\nu + (z_{\nu-1} - z_\nu)t_1 + (z_{\nu-2} - z_{\nu-1})t_2\big)\Big) dt_2 dt_1\right| \\ &\leqslant c\,\omega_1\left(g'', \rho\right).\end{aligned}$$

Нехай $\bar{i}$ позначає такий парний індекс $i = 2, \dots, s$, для якого виконується рівність $|^*O_{\bar{i}}| = \max\limits_{i\text{ – парне}} |^*O_i|$ (якщо таких індексів два, то нехай $\bar{i}$ позначає, більший з них). Аналогічно, $\underline{i}$: $|^*O_{\underline{i}}| = \max\limits_{i\text{ – непарне}} |^*O_i|$. Для кожного $i = 1, \dots, s$, позначимо

$$l_i := \begin{cases} \max\{l'(y_i, f, \underline{y}_i), l'(y_i, f, \overline{y}_i)\}, & \text{якщо i парне,} \\ \min\{l'(y_i, f, \underline{y}_i), l'(y_i, f, \overline{y}_i)\}, & \text{якщо i непарне,} \end{cases} \tag{3.2.9}$$

$$\Delta_i := \Delta_{i,n} := \int_{\underline{y}_i}^{\overline{y}_i} (l_i - S'(t))dt.$$

Покладемо

$$L'(x, A, B) := \begin{cases} S'(x), & x \in G, \\ l_i, & x \in {}^*O_i, \ i = 1, \dots, s, \ i \neq \bar{i} \vee \underline{i}, \\ A, & x \in {}^*O_{\bar{i}}, \\ B, & x \in {}^*O_{\underline{i}}, \end{cases}$$

де числа $A \geqslant l_{\bar{i}}$ і $B \leqslant l_{\underline{i}}$ вибрані з умови

$$L(1, A, B) := \int_{-1}^{1} L'(x, A, B)dx = S(1).$$

А саме, зважаючи на те, що

$$\Delta_i \geqslant 0, \quad \text{коли i парне, і } \Delta_i \leqslant 0, \quad \text{коли i непарне,} \tag{3.2.10}$$

візьмемо $\widetilde{A} := l_{\bar{i}}$ і $\widetilde{B} := l_{\underline{i}}$. Тоді позначимо

$$\Delta := L(1, \widetilde{A}, \widetilde{B}) - S(1) \tag{3.2.11}$$

і покладемо

$$\begin{cases} A = l_{\bar{i}}, & B = l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{|^*O_{\underline{i}}|}, & \text{якщо } \ \Delta \geqslant 0, \\ A = l_{\bar{i}} - \frac{\Delta}{|^*O_{\bar{i}}|}, & B = l_{\underline{i}}, & \text{якщо } \ \Delta < 0. \end{cases} \tag{3.2.12}$$

З побудови L' випливає, що сплайн

$$L(x) := L(x, A, B) := \int_{-1}^{x} L'(t, A, B)dt,$$

задовольняє (3.2.2). Доведемо (3.2.3). Для $x \in [-1, \underline{y}_s] \cup [\overline{y}_1, 1], L(x) \equiv S(x)$, тому (3.2.3) випливає з (3.2.8). Для решти x-ів, скористаємось міркуваннями доведення леми 9 з [120], нерівністю Уітні (2.1.12) і властивостями модуля неперервності. Тоді для кожного $i = 1, \dots, s$, запишемо

$$\|l(\cdot, f, \underline{y}_i) - l(\cdot, S, y_i)\|_{[\underline{y}_i, y_i]} = \|S - l\|_{[\underline{y}_i, y_i]} \leqslant \|S - l\|_{*\overline{O}_i} \leqslant c\,\omega_3(S, |^*O_i|) \leqslant c\,\omega_3\left(S, 1/n\right),$$

де $l := l(x, S, y_i)$ і де ми застосували нерівність $|{}^*O_i| \leqslant c\,\rho_n(y_i) \leqslant c/n$. Аналогічно,

$$\|l(\cdot, f, \overline{y}_i) - l\|_{[y_i, \overline{y_i}]} \leqslant c\,\omega_3\,(S, 1/n)\,.$$

Тому

$$\|l(\cdot, f, \underline{y}_i) - l(\cdot, f, \overline{y}_i)\|_{{}^*\overline{O}_i} \leqslant c\,\omega_3\,(S, 1/n)\,,$$

і з нерівності Маркова випливає оцінка

$$D_i := \|l'(\cdot, f, \underline{y}_i) - l'(\cdot, f, \overline{y}_i)\|_{{}^*\overline{O}_i} \leqslant c\,\frac{\omega_3\,(S, 1/n)}{|{}^*O_i|}. \tag{3.2.13}$$

Оскільки $S \in \Delta^{(2)}(Y)$, тобто S' – кусково-монотонна (хоча, взагалі кажучи, $S' \notin C$), то для кожного $i = 1, \ldots, s$, з (3.2.9) і (3.2.13) випливає нерівність

$$|\Delta_i| \leqslant \int_{\underline{y}_i}^{\overline{y}_i} |l_i - S'(t)|dt \leqslant c\,|{}^*O_i|\,D_i \leqslant c\,\omega_3\,(S, 1/n)\ \ . \tag{3.2.14}$$

До того ж, зауважимо, що

$$|\Delta| \leqslant \left| \sum_{i=2,\ i-\text{парне}}^{s} \Delta_i \quad - \sum_{i=2,\ i-\text{непарне}}^{s} \Delta_i \right| \leqslant s \max_{i=1,\ldots,s} |\Delta_i|. \tag{3.2.15}$$

Враховуючи (3.2.14), (3.2.15) і (3.2.8), для кожного $x \in I \backslash ([-1, \underline{y}_s] \cup [\overline{y}_1, 1])$, запишемо

$$|f(x) - L(x)| \leqslant |f(x) - S(x)| + |S(x) - L(x)| \leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)) + \left|\int_{-1}^{x} \Big(S'(t) - L'(t)\Big)dt\right|$$

$$\leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)) + \sum_{\substack{i=1\\ i \neq \overline{i} \vee \underline{i}}}^{s} \int_{{}^*O_i} |l_i - S'(t)|\,dt + \int_{{}^*O_{\overline{i}}} |A - S'(t)|\,dt + \int_{{}^*O_{\underline{i}}} |B - S'(t)|\,dt$$

$$\leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)) + c\,\omega_3\,(S, 1/n) + \int_{{}^*O_{\overline{i}}} \left| l_{\overline{i}} - \frac{\Delta}{|{}^*O_{\overline{i}}|} - S'(t) \right| dt + \int_{{}^*O_{\underline{i}}} \left| l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{|{}^*O_{\underline{i}}|} - S'(t) \right| dt$$

$$\leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)) + c\,\omega_3\,(S, 1/n) + 2|\Delta| \leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)) + c\,\omega_3\,(S, 1/n)$$

$$\leqslant C(Y)\,\omega_3(f, \rho_n(x)). \tag{3.2.16}$$

Нерівність (3.2.3) доведено. Теорему 3.2.2 доведено.

Доведення теореми 3.2.1

Для $j = 1, \ldots, n$, нехай j^* позначає індекс, такий, що $x_{j^*, n_1} = x_{j,n}$. Для кожного $j \in H$, скористаємося многочленами $\overset{\circ}{\tau}_j$ з (2.1.38) і τ_j з (2.1.24) і позначимо

$$Q_j(x) := \int_{-1}^{x} \overset{\circ}{\tau}_{j^*, n_1}(u, b_1, Y \cup \mathbf{T})du,$$

$$R_j(x,\alpha) := \frac{1}{2}\Big(\alpha\tau_{(j+1)*,n_1}(x,b_2,Y) + \tau_{j*,n_1}(x,b_2,Y) + (1-\alpha)\tau_{(j-1)*,n_1}(x,b_2,Y)\Big),$$

де $\alpha \in [0,1]$,

$$b_1 := 6(2s+3)+1, \quad b_2 := 6(s+3),$$

$$c_3 := 5\max\left\{2,\ \left[1+\sqrt{24c_2(b_1)/(b_1-s-2)}\right],\ [1+12c_2(b_1)/c_1(b_2)]\right\}, \quad n_1 := c_3 n,$$

і $c_1,\ c_2$, з леми 2.1.1 і наслідку 2.1.2, відповідно ($[\cdot]$ – ціла частина).

Лема 3.2.1. [76, Лема 3] *Для кожного $j \in H,\ j \neq 1, n$, числа α_1 і $\alpha_2 \in [0,1]$, можуть бути обрані так, що два многочлени*

$$V_j(x,-) := 2Q_j(x) - h_{j,n}R_j(x,\alpha_1),$$

$$V_j(x,+) := 2Q_{j-1}(x) + h_{j,n}R_{j-1}(x,\alpha_2),$$

степеня $c(b_1)n_1$, будуть задовольняти умову $V_j(1,\pm) = (1-x_j)(1-x_{j-1})$, і тоді для них виконуватимуться нерівності

$$\left|\Psi^{(r)}(x,x_j,x_{j-1},\pm) - V_j^{(r)}(x,\pm)\right| \leqslant c\,h_j^{2-r}\,\Gamma_j^{6-r}(x), \quad x \in I,\ r = 0,1,2. \qquad (3.2.17)$$

$$\Big(2\chi_j(x) - V_j''(x,-)\Big)\Big(V_j''(x,+) - 2\chi_{j-1}(x)\Big)\Pi(x)\Pi(x_j) \geqslant 0,\ x \in I. \qquad (3.2.18)$$

Зокрема, $V_j(-1,\pm) = 0,\ V_j'(\pm1,\pm) = \Psi'(\pm1,x_j,x_{j-1},\pm) = 2\left(\pm1-(x_j+x_{j-1})/2\right)_+$.

Зауваження 3.2.1. *1) $\Psi''(x,x_j,x_{j-1},-) \equiv 2\chi_j(x)$ і $\Psi''(x,x_j,x_{j-1},+) \equiv 2\chi_{j-1}(x)$. 2) Лема 3.2.1 доводиться в нашій спільній з Гілевічем роботі, однак її доведення трохи громіздке і ми його не наводимо, а лише зазначимо, що воно спирається на леми 2.1.1, 2.1.2 і наслідок 2.1.2, і саме вибір c_3 обумовлює, як існування α_1 і α_2 (для $n_1 < c_3 n$, вони можуть не існувати) так і виконання* (3.2.18).

Для кожного $i = 1, \ldots, s$, покладемо

$$W_i(x,-) := 2Q_{\underline{j}}(x) - (y_i - \underline{y}_i)R_{\underline{j}}(x,\alpha_1),$$

$$W_i(x,+) := 2Q_{\overline{j}}(x) + (\overline{y}_i - y_i)R_{\overline{j}}(x,\alpha_2),$$

де $x_{\underline{j}} := x_{\underline{j},n} := x_j = \underline{y}_i$, і $x_{\overline{j}} := x_{\overline{j},n} := x_j = \overline{y}_i$. Оскільки $\underline{j}$ і $\overline{j} \in H$, то многочлени $W_i(x,\pm)$ мають абсолютно ті ж самі властивості, що і многочлени з леми 3.2.1. Звісно вони наближають, при цьому, функції $\Psi(x,\underline{y}_i,y_i,-)$ і $\Psi(x,y_i,\overline{y}_i,+)$, відповідно.

Шуканий многочлен P_n з теореми 3.2.1 означимо у вигляді суми двох многочленів $\overline{P}_n$ і $\tilde{P}_n$ так, що $\overline{P}_n$ "добре" наближатиме $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, але $\overline{P}_n \notin \Delta^{(2)}(Y)$, тоді як $\overline{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$, і оцінка наближення "не псується".

Для кожного $k \in \overline{H}$, покладемо

$$U_k(x) := \begin{cases} V_{j(k)}(x,-), & \text{якщо } |F_k| \leqslant |F_{k+1}|, \\ V_{j(k)}(x,+), & \text{якщо } |F_k| > |F_{k+1}|, \end{cases} \tag{3.2.19}$$

де $j(k) := j$, якщо $z_k = x_j$. Для $i = 1, \dots, s$, позначимо $R_i(x) :\equiv 0$, якщо $F_{k(i)+1} = 0$, інакше

$$R_i(x) := \alpha_i \tau_{\underline{j},n_2}(x, b_2, Y) + (1-\alpha_i)\tau_{\overline{j},n_2}(x, b_2, Y),$$

де $\alpha_i := (\overline{y}_{i,n_2} - y_i)/(\overline{y}_{i,n_2} - \underline{y}_{i,n_2}) = (\overline{y}_{i,n_2} - y_i)/|{}^*O_{i,n_2}| \in (0,1)$, і $n_2 = 20n$,

$$U_{k(i)+1}(x) := \beta_i W_i(x,-) + (1-\beta_i)\left(W_i(x,+) + |{}^*O_i| R_i(x)\right),$$

$$U_{k(i)}(x) := (1-\beta_i) W_i(x,+) + \beta_i\left(W_i(x,-) - |{}^*O_i| R_i(x)\right),$$

де $\beta_i := 0$, якщо $F_{k(i)+2} = F_{k(i)} = 0$, інакше $\beta_i := |F_{k(i)+2}|/\left(|F_{k(i)+2}| + |F_{k(i)}|\right) \in [0,1]$. Нехай $U_{n-4s}(x) :\equiv (1+x)(x - z_{n-4s-1})$ і $U_1(x) :\equiv 0$. Многочлен

$$\overline{P}_n(x) := \sum_{k=2}^{n-4s-1} \Phi_k U_k(x) + l(x, f, z_{n-4s-1}), \tag{3.2.20}$$

або, що те саме,

$$\overline{P}_n(x) := l_1(x, f, -1) + \sum_{k=2}^{n-4s} F_k\left(U_k(x) - U_{k-1}(x)\right), \tag{3.2.21}$$

степеня $c\,n$, наближує $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, як

$$\left|f^{(r)}(x) - \overline{P}_n^{(r)}(x)\right| \leqslant c(s)\omega_{3-r}(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I,\ f \in C^{(r)},\ r = 0,1,2. \tag{3.2.22}$$

Перевіримо (3.2.22) для $r = 0$. Спочатку зауважимо, що для кожного $i = 1, \dots, s$, при всіх $x \in I$, виконується рівність

$$\left|\Psi_{k(i)}(x) - U_{k(i)}(x)\right| = \Big|(1-\beta_i)\Big(\Psi(x, z_{k(i)}, z_{k(i)-1}, -) - W_i(x,+)\Big)$$

$$+\beta_i\Big(\Psi(x, z_{k(i)+1}, z_{k(i)}, +) - W_i(x,-)\Big) + |{}^*O_i|\Big(R_i(x) - (x - z_{k(i)})_+\Big)\Big| \leqslant c\,h_{\overline{j}}^2\,\Gamma_{\overline{j}}^6(x),$$

оскільки $|\Psi(x, z_k, z_{k-1}, -) - \Psi(x, z_k, z_{k-1}, +)| \leqslant c\,h_{j(k)}^2\,\Gamma_{j(k)}^6(x)$, $k = 2, ..., n-4s$. Аналогічно, $\left|\Psi_{k(i)+1}(x) - U_{k(i)+1}(x)\right| \leqslant c\,h_{\underline{j}}^2\,\Gamma_{\underline{j}}^6(x)$. Тоді, з нерівності

$$|\Phi_k| = \left|\frac{f(z_k) - l(z_k, f, z_{k+1}, z_{k-1}, z_{k-2})}{(z_k - z_{k+1})(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k-2})}(z_{k-2} - z_{k+1})\right| \leqslant c\,h_{j(k)}^{-2}\omega_3\left(f, \rho_n(x_{j(k)})\right)$$

$$\leqslant c\,h_{j(k)}^{-2}\Gamma_{j(k)}^{-3}(x)\,\omega_3(f, \rho), \quad k = 2, \dots, n-4s-1,\ x \in I,$$

беручи до уваги (3.2.8), (3.2.4)-(3.2.7), (3.2.20), (3.2.19) і (3.2.17), випливає оцінка

$$\Big|f(x)-\overline{P}_n(x)\Big|\leqslant\Big|f(x)-S(x)\Big|+\Big|S(x)-\overline{P}_n(x)\Big|\leqslant\omega_3(f,\rho)+\sum_{k=2}^{n-4s-1}|\Phi_k|\,|\Psi_k(x)-U_k(x)|$$

$$\leqslant\omega_3(f,\rho)\left(c+c\sum_{k=2}^{n-4s-1}\Gamma^3_{j(k)}(x)\right)\leqslant\omega_3(f,\rho)\left(c+c_\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{(|x-x_j|+\rho)^2}\right)$$

$$\leqslant c\,\omega_3(f,\rho),\quad x\in I. \tag{3.2.23}$$

Випадки $r=1,2$, доводяться аналогічно.

Прослідкуємо за $\operatorname{sign}\overline{P}''_n(x),\ x\in I$. Для цього зауважимо, що

$$F_{k(i)+2}\Big(U_{k(i)+2}(x)-U_{k(i)+1}(x)\Big)+F_{k(i)+1}\Big(U_{k(i)+1}(x)-U_{k(i)}(x)\Big)$$

$$+F_{k(i)}\Big(U_{k(i)}(x)-U_{k(i)-1}(x)\Big)=F_{k(i)+2}\Big(U_{k(i)+2}(x)-W_i(x,-)\Big)+F_{k(i)+1}|^*O_i|R_i(x)$$

$$+F_{k(i)}\Big(W_i(x,+)-U_{k(i)-1}(x)\Big),\quad x\in I, \tag{3.2.24}$$

оскільки $\operatorname{sign}F_{k(i)+2}\neq\operatorname{sign}F_{k(i)}$. Введемо допоміжний індекс

$$\mu(k):=\begin{cases} j(k), & \text{якщо } U_k(x)=V_{j(k)}(x,-),\\ j(k)-1, & \text{якщо } U_k(x)=V_{j(k)}(x,+),\end{cases}\quad k\in\overline{H}; \tag{3.2.25}$$

$\mu(k(i)+1):=\underline{j},\ \mu(k(i)):=\overline{j},\ i=1,\dots,s;\ \mu(n-4s):=n,\ \mu(1):=0$. Спираючись на (3.2.21) і (3.2.24), представимо $\overline{P}''_n$ як:

$$\overline{P}''_n(x)\equiv\sum_{\substack{k=2\\k\neq k(i)+1,i=1,\dots,s}}^{n-4s}F_k\Big(U''_k(x)-2\chi_{\mu(k)}(x)+2\chi_{\mu(k)}(x)-2\chi_{\mu(k-1)}(x)$$

$$+2\chi_{\mu(k-1)}(x)-U''_{k-1}(x)\Big)+\sum_{i=1}^{s}F_{k(i)+1}|^*O_i|R''_i(x)$$

$$\equiv\sum_{k\in\overline{H}}\Big(F_k-F_{k+1}\Big)\Big(U''_k(x)-2\chi_{\mu(k)}(x)\Big)+\sum_{i=1}^{s}\Big\{F_{k(i)+2}\Big(2\chi_{\mu(k(i)+1)}(x)-W''_i(x,-)\Big)$$

$$+F_{k(i)+1}|^*O_i|R''_i(x)+F_{k(i)}\Big(W''_i(x,+)-2\chi_{\mu(k(i))}(x)\Big)\Big\}+2\Big[F_{n-4s}\Big(1-\chi_{\mu(n-4s-1)}(x)\Big)$$

$$+\sum_{k\in\overline{H}}F_k\Big(\chi_{\mu(k)}(x)-\chi_{\mu(k-1)}(x)\Big)+\sum_{i=1}^{s}F_{k(i)}\Big(\chi_{\mu(k(i))}(x)-\chi_{\mu(k(i)-1)}(x)\Big)\Big]$$

$$=:\Sigma_1(x)+\sum_{i=1}^{s}\Big\{A_{1,i}(x)+A_{2,i}(x)+A_{3,i}(x)\Big\}+2\Sigma_2(x).$$

Оскільки $\mu(k) \geqslant \mu(k-1)$, для $k = n-4s,\ k \in \overline{H}$ і $k = k(i), i = 1, \dots, s$, то $\operatorname{sign} \Sigma_2(x) = \operatorname{sign} \Pi(x), x \in I$. З властивостей $W_i(x, \pm)$ і рівності $\operatorname{sign} F_{k(i)+2} = -\operatorname{sign} F_{k(i)},\ i = 1, \dots, s$, випливає, що $\operatorname{sign} A_{1,i}(x) = \operatorname{sign} A_{3,i}(x) = \operatorname{sign} \Pi(x),\ \ x \in I$. З (3.2.19), (3.2.25) і (3.2.18) маємо $\operatorname{sign} \Sigma_1(x) = \operatorname{sign} \Pi(x), x \in I$. Тому лише знак доданку $\sum\limits_{i=1}^{s} A_{2,i}(x)$ не співпадає зі знаком $\Pi(x)$. "Виправимо" його. Покладемо

$$\tilde{P}_n(x) := \sum_{i=1}^{s} \frac{\delta_{i,n}}{|^*O_{i,n_2}|} \Big(M_{\underline{j}, n_2}(x, b_2, Y) - M_{\overline{j},\ n_2}(x, b_2, Y) \Big),$$

де $\delta_{i,n} := \begin{cases} \Delta_{i,n}, & \text{якщо } i = 1, \dots, s, \quad i \neq \overline{i} \vee \underline{i}, \\ \int_{^*O_{\overline{i},n}} (A - S'(t))\, dt, & \text{якщо } i = \overline{i}, \\ \int_{^*O_{\underline{i},n}} (B - S'(t))\, dt, & \text{якщо } i = \underline{i}. \end{cases}$

З (3.2.10)-(3.2.12) і (2.1.27) видно, що $\tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$. Крім того, нерівність

$$\frac{|\delta_{i,n}|}{|^*O_{i,n_2}|} \geqslant \frac{|\Delta_{i,n}|}{|^*O_{i,n_2}|} \geqslant \frac{(y_i - \underline{y}_i)|l_i - S'(\underline{y}_i)| + (\overline{y}_i - y_i)|l_i - S'(\overline{y}_i)|}{2|^*O_{i,n_2}|}$$

$$\geqslant \frac{|^*O_{i,n}|}{10|^*O_{i,n_2}|} \max\Big\{ \Big| l_i - S'(\underline{y}_i) \Big|,\ \Big| l_i - S'(\overline{y}_i) \Big| \Big\}$$

$$\geqslant \max\Big\{ \Big| l_i - S'(\underline{y}_i) \Big|,\ \Big| l_i - S'(\overline{y}_i) \Big| \Big\} \geqslant \Big| S'(\theta_2) - S'(\theta_1) \Big|$$

$$= \Big| [y_i, \overline{y}_i, S] - [\underline{y}_i, y_i, S] \Big| = |^*O_{i,n}| \left| F_{k(i)+1} \right|,\ \theta_1 \in (\underline{y}_i, y_i),\ \theta_2 \in (y_i, \overline{y}_i),\ i = 1, \dots, s,$$

тягне $P_n := \overline{P}_n + \tilde{P}_n \in \Delta^{(2)}(Y)$.

Нарешті, оскільки многочлен $\tilde{P}_n$, фактично, наближує функцію $L - S$, то оцінка

$$|\tilde{P}_n(x)| \leqslant C(Y)\, \omega_3\left(f, \rho_n(x)\right),\ x \in I,$$

доводиться аналогічно (3.2.24) і (3.2.16), з урахуванням (2.1.29). Теорему 3.2.1 доведено для $n \geqslant N(Y)$. Доведення теореми 3.2.1 для решти n (тобто, фактично, для $n = 2$) цілком спирається на міркування лем 3.4 і 3.3 з роботи Плєшакова і Шаталіної [145], і на той факт, що $s \geqslant 2$. Ми не наводимо це доведення, щоб не повторювати ці леми. Зауважимо лише, що вони описують, при "малих" n, співвідношення між величинами найкращого q-монотонного рівномірного наближення, $q = 2, 3, \dots$, і величинами найкращого рівномірного наближення без обмежень.

3.3 Поточкове наближення функцій з множини W^r (з абсолютно неперервними $r-1$-ми і обмеженими r-ми похідними) і більше ніж однією точкою перегину

Результат цього підрозділу міститься в [20].

В цьому підрозділі ми доводимо наступну теорему 3.3.1.

Нехай $W^r,\ r \in N$, позначає множину функцій $f \in C[-1,1]$, які мають $(r-1)$-у абсолютно неперервну похідну на $I := [-1,1]$ і для яких, при м. в. $x \in I$, $\left|f^{(r)}(x)\right| \leqslant 1$.

Теорема 3.3.1. *Якщо* $r > 3,\ s > 1$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$, *то для кожного натурального* $n > N(Y,r)$, *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\leqslant n$, *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y), \tag{3.3.1}$$

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leqslant C(Y,r)\,\rho_n^r(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3.3.2}$$

де $N(Y,r)$ *і* $C(Y,r)$ *– сталі, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* r.

Для $r = 1, 2$ і 3, теорема 3.3.1 теж є вірною, див. теореми 3.1.1 і 3.2.1, відповідно, а для $s = 1,\ r > 2$, її твердження, взагалі кажучи, невірне, див. теорему 6.3.1. Отже, разом з результатами Плєшакова і Шаталіної [145] (для "малих" n) маємо

Теорема 3.3.2. *Якщо* $r \in N,\ s > 1$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$, *то для кожного натурального* $n \geqslant r$, *існує алгебраїчний многочлен* P_n *степеня* $\leqslant n$, *такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(2)}(Y),$$

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leqslant C(Y,r)\,\rho_n^r(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3.3.3}$$

де $C(Y,r)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* r.

Історію (ко)опуклого наближення недиференційовних ($r = 0$) і "слабо" диференційовних ($r = 1, 2$) функцій многочленами наведено на початку підрозділу 3.1. Нижче наведемо чотири результати які стосуються (ко)опуклого наближення функцій для $r \geqslant 3$. Для $s = 0$, поточкова оцінка у класичній формі

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leqslant c(r,k)\,\rho_n^r(x)\,\omega_k\big(f^{(r)}, \rho_n(x)\big), \quad x \in I,\ n \geqslant k + r - 1, \tag{3.3.4}$$

де $\omega_k(\cdot)$ – k-й модуль неперервності і $c(r,k)$ – стала, була доведена Копотуном [103] $(r = 0, k = 3)$ і Манія див. в книзі Шевчука [56, стор. 148] $(r > 1, k \in \mathbb{N})$. Швєдовим

[52] встановлено, що (3.3.4) не виконується для $r = 0, k \geqslant 4$ (навіть з $1/n$ замість $\rho_n(x)$). Для $s \geqslant 1$, аналогічний негативний результат доведено Ву і Цу [169], а в роботі Копотун, Левіатан, Шевчук [109] доведено рівномірний аналог оцінки (3.3.4) ($s \geqslant 1,\ r \geqslant 3,\ k \in N$), який включає модуль неперервності Диціана-Тотіка (а, отже, і звичайний модуль теж).

Схема доведення теореми 3.3.1 запозичена з роботи Шевчука [55] і роботи [79]. Вона грунтується на ідеї ДеВора [70] представлення похідної (тут f'') сумою двох функцій "великої" і "малої", на використанні поліноміальних ядер типу Дзядика [25, 56] і на "монотонному" розбитті одиниці ДеВора і Ю [71].

Допоміжні факти для доведення теореми 3.3.1

Нехай $N(Y)$ таке, що для кожного $n \geqslant N(Y)$, будь-який інтервал (y_{i+1}, y_i), $i = 1, \ldots, s-1$, містить принаймні сім різних відрізків I_j.

Надалі c – невід'ємні сталі, які можуть залежати тільки від r, s і деякого фіксованого числа $b \in \mathbb{N}$, тобто $c := c(r, s, b)$, вони різні, навіть якщо стоять в одному рядку, а якщо далі є посилання на значення цих сталих, то будемо писати $c_\nu := c_\nu(r, s, b)$.

Окрім многочлена $T_j(x) = T_{j,n}(x, b, Y)$ з (2.1.23) нам знадобиться многослен $\overline{T}_j(x) := T_{j,n}(x, b, Y \cup \{x_j, x_{j-1}\})$ і, відповідно, два многочлени $\tau_j(x) = \tau_{j,n}(x, b, Y)$ і $\overline{\tau}_j(x) := \overline{\tau}_{j,n}(x, b, Y \cup \{x_j, x_{j-1}\})$, що означені в (2.1.24).

Нище в лемі 3.3.1 зберемо співвідношення, що описують ці многочлени і які нам знадобляться. Більшість з них вже нами використовувалась, а деякі і доводились вище. В посиланні цієї леми відзначено авторів, що їх встановлювали.

Лема 3.3.1. [79, 103, 123] *Якщо $j \in H$ і $b \geqslant 6(s+2)$, то*

$$\tau_j''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{3.3.5}$$

$$\overline{\tau}_j''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad x \in I \backslash I_j, \tag{3.3.6}$$

$$\tau_j'(\pm 1) = \overline{\tau}_j'(\pm 1) = \chi_j(\pm 1), \quad \tau_j(\pm 1) = \overline{\tau}_j(\pm 1) = (\pm 1 - x_j)_+,$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \tau_j(x)\right| \leqslant c_1\, h_j \Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-2}, \quad x \in I, \tag{3.3.7}$$

$$\left|(x - x_j)_+ - \overline{\tau}_j(x)\right| \leqslant c_1\, h_j \Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-2}, \quad x \in I, \tag{3.3.8}$$

$$\left|\chi_j(x) - \tau_j'(x)\right| \leqslant c_2 \Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-1}, \quad \left|\chi_j(x) - \overline{\tau}_j'(x)\right| \leqslant c_2 \Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s-1}, \quad x \in I,$$

$$\left|\tau_j''(x)\right| \leqslant c_3\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s}, \quad \left|\overline{\tau}_j''(x)\right| \leqslant c_3\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b-s}, \quad x \in I, \tag{3.3.9}$$

і якщо $j \neq n$, *то*

$$c_4\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leqslant \left|\tau_j''(x)\right| \leqslant c_5\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I, \tag{3.3.10}$$

$$c_4\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leqslant \left|\overline{\tau}_j''(x)\right| \leqslant c_5\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I\backslash I_j, \tag{3.3.11}$$

$$\left|\tau_j''(x)\right| \geqslant c_6\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}, \quad x \in I\backslash O, \tag{3.3.12}$$

$$\left|\overline{\tau}_j''(x)\right| \geqslant c_6\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}, \quad x \in I\backslash(O \cup I_j), \tag{3.3.13}$$

$$\left|\tau_j''(x)\right| \geqslant c_7\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i,\ i=1,\dots,s, \tag{3.3.14}$$

$$\left|\overline{\tau}_j''(x)\right| \geqslant c_7\frac{1}{h_j}\Big(\Gamma_j(x)\Big)^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i,\ i=1,\dots,s. \tag{3.3.15}$$

Зафіксуємо $n \geqslant N(Y)$. Для довільного інтервалу $E = (x_{j_1}, x_{j_2}) \subset I$, $j_1 > j_2$, позначимо ${}^*E := (x_{j_1+1}, x_{j_2}) \cap I$; $|E| := x_{j_2} - x_{j_1}$.

Лема 3.3.2. *Якщо* $s \geqslant 2$ *і функція* $g \in \Delta^{(2)}(Y)$ *має на* I *"маленьку" другу похідну*

$$|g''(x)| \leqslant \rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I,\ r \geqslant 3, \tag{3.3.16}$$

то існує многочлен $G_n(x) := G_n(x,g)$, *степеня* $c\,n$, *такий, що*

$$G_n''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{3.3.17}$$

$$\left|g(x) - G_n(x)\right| \leqslant c(Y,r)\,\rho_n^r(x), \quad x \in I, \tag{3.3.18}$$

де $c(Y,r)$ *– стала, що залежить тільки від* $\min\limits_{i=0,s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* r.

Доведення. Нехай $\overline{L}(x)$ – неперервна ламана, яка інтерполює g на I в кожній точці набору $\{x_j,\ j \in H\} \cup Y$ (тобто, взагалі кажучи, $\overline{L}(\pm 1) \neq g(\pm 1)$). Напевно $\overline{L}(x) \in \Delta^{(2)}(Y)$. "Підправимо" $\overline{L}$ так, щоб нова ламана $L \in \Delta^{(2)}(Y)$ і точки Y не були її вузлами. Нехай

$$\Big(\underline{y}_i, \overline{y}_i\Big) := {}^*O_i,\ i=1,\dots,s; \quad {}^*O := \cup_{i=1}^s {}^*O_i;$$

$l(x,a,b)$ – пряма, яка інтерполює $g(x)$ в a і b; $\bar{i}$ – такий парний індекс $i=\overline{2,s}$, для якого $|^*O_{\bar{i}}| = \max\limits_{i\text{ – парне}} |^*O_i|$ (якщо таких індексів два, то нехай $\bar{i}$ – більший з них); аналогічно, $\underline{i}:\ |^*O_{\underline{i}}| = \max\limits_{i\text{ – непарне}} |^*O_i|$. Для кожного $i=\overline{1,s}$, позначимо

$$l_i := \begin{cases} \max\{l'(x,\underline{y_i},y_i),\ l'(x,y_i,\overline{y_i})\}, & \text{якщо i – парне,} \\ \min\{l'(x,\underline{y_i},y_i),\ l'(x,y_i,\overline{y_i})\}, & \text{якщо i – непарне,} \end{cases}$$

$$\Delta_i := \int_{\underline{y_i}}^{\overline{y_i}} \left(l_i - \overline{L}'(t)\right) dt$$

(тобто $\Delta_i \geqslant 0$, коли i – парне, і $\Delta_i \leqslant 0$, коли i – непарне). Покладемо

$$L'(x,A,B) := \begin{cases} \overline{L}'(x), & x \in (-1,1)\backslash {}^*O, \\ l_i, & x \in {}^*O_i,\ i=1,\dots,s,\ i \neq \bar{i} \vee \underline{i}, \\ A, & x \in {}^*O_{\bar{i}}, \\ B, & x \in {}^*O_{\underline{i}}, \end{cases}$$

де числа $A \geqslant l_{\bar{i}}$ і $B \leqslant l_{\underline{i}}$ вибрані з умови

$$L(1,A,B) := \int_{-1}^{1} L'(t,A,B)dt = \overline{L}(1).$$

А саме, нехай $\Delta := L(1,l_{\bar{i}},l_{\underline{i}}) - \overline{L}(1)$ і

$$\begin{array}{lll} A = l_{\bar{i}}, & B = l_{\underline{i}} - \frac{\Delta}{|^*O_{\underline{i}}|}, & \text{якщо } \ \Delta \geqslant 0, \\ A = l_{\bar{i}} - \frac{\Delta}{|^*O_{\bar{i}}|}, & B = l_{\underline{i}}, & \text{якщо } \ \Delta < 0. \end{array}$$

Отже,

$$L(x) := L(x,A,B) := \int_{-1}^{x} L'(t,A,B)dt \ \in \Delta^{(2)}(Y)$$

і точки Y не є вузлами L. Тому

$$\Pi(x_j)[x_{j+1},x_j,x_{j-1},L] \geqslant 0, \quad j \in H, \tag{3.3.19}$$

$$[x_{j+1},x_j,x_{j-1},L] = 0, \quad j \notin H, \tag{3.3.20}$$

де $[\cdot]$ – друга розділена різниця L.

Оцінимо $|g(x)-L(x)|,\ x \in I$. Нерівність

$$|g(x) - l(x,x_j,x_{j-1})| \leqslant \int_{x_j}^{x}\int_{\Theta}^{t} |g''(u)|du\,dt \leqslant c\,\rho_n^r(x),\ \Theta \in I_j,\ x \in [x_{j+1},x_{j-2}],$$

і аналогічна нерівність для $x \in {}^*O_i,\ i = \overline{1, s}$, тягнуть оцінку

$$\left|g(x) - \overline{L}(x)\right| \leqslant c\,\rho_n^r(x), \quad x \in I.$$

Крім того, для $x \in [-1, \underline{y}_s] \cup [\overline{y}_1, 1]$, $\ L(x) - \overline{L}(x) \equiv 0$; а для решти x-ів, врахуємо, що $|\Delta| \leqslant (s-1) \max\limits_{i=1,\dots,s} |\Delta_i|$, і тоді

$$\begin{aligned}\left|L(x) - \overline{L}(x)\right| &= \left|\int_{\underline{y_s}}^{x} \Big(L'(t) - \overline{L}'(t)\Big)\, dt\right| \\ &\leqslant 2(s-1) \max_{i=1,\dots,s} \int_{{}^*O_i} \left|l_i - g'(t) + g'(t) - \overline{L}'(t)\right| dt \\ &\leqslant c \max_{i=1,\dots,s} \rho_n^r(y_i) \leqslant c_8\, \rho_n^r(x),\end{aligned}$$

де c_8, тут і далі в доведенні леми, позначає різні додатні сталі, які залежать тільки від $\min\limits_{i=0,s}\{y_i - y_{i+1}\}$ і r. Отже,

$$|g(x) - L(x)| \leqslant \left|g(x) - \overline{L}(x)\right| + \left|\overline{L}(x) - L(x)\right| \leqslant c_8\, \rho_n^r(x), \quad x \in I. \tag{3.3.21}$$

Зокрема,

$$\begin{aligned}|[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]| = |[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L - g + g]| &\leqslant c_8\, \frac{\rho_n^r(x_j)}{\rho_n^2(x_j)} + \frac{1}{2}\left|g''(\Theta)\right| \\ &\leqslant c_8\, \rho_n^{r-2}(x_j), \quad \Theta \in (x_{j+1}, x_{j-1}),\ j = 1, \dots, n-1.\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Представимо L у формі

$$\begin{aligned}L(x) &\equiv l(x) + \sum_{j=1}^{n-1} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,(x - x_j)_+ \\ &\equiv l(x) + \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,(x - x_j)_+,\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

де $l(x) := [x_n, x_{n-1}, L](x+1) + L(-1)$ і де ми скористалися (3.3.20). Візьмемо $b_1 = 6(s+2) + r$ і $\tau_j(x) = \tau_{j,n}(x, b_1, Y)$. Покладемо

$$G_n(x) := l(x) + \sum_{j\in H} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\tau(x). \tag{3.3.24}$$

Нерівності (3.3.5) і (3.3.19) гарантують

$$[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\tau_j''(x)\Pi(x)$$

$$= \frac{1}{\Pi^2(x_j)} \left(\Pi(x_j)\,[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\right)\,(x_{j-1} - x_{j+1})\,\left(\tau_j''(x)\Pi(x_j))\right) \geqslant 0, \quad x \in I,\ j \in H,$$

що тягне (19). Оцінка (20) випливає з (2.1.26), (3.3.7) і (3.3.21)-(3.3.24). А саме,

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - G_n(x)\right| &\leqslant \left|g(x) - L(x)\right| + \left|L(x) - G_n(x)\right| \\
&\leqslant c_8\,\rho_n^r(x) + \sum_{j\in H}[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L](x_{j-1} - x_{j+1})\,((x - x_j)_+ - \tau_j(x)) \\
&\leqslant c_8\,\rho_n^r(x) + c_8\,\sum_{j\in H}\rho_n^{r-2}(x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})\rho_n(x_j)\left(\frac{\rho_n(x_j)}{|x - x_j| + \rho_n(x_j)}\right)^{2b_1 - s - 2} \\
&\leqslant c_8\,\rho_n^r(x) + c_8\,\sum_{j=1}^{n} h_j^r \Gamma_j^{r+11s}(x) \\
&\leqslant c_8\,\rho_n^r(x)\left(1 + \rho_n(x)\,\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{\left(|x - x_j| + \rho_n(x)\right)^2}\right) \leqslant c_8\,\rho_n^r(x), \quad x \in I.
\end{aligned}$$

Лему 3.3.2 доведено.

Нехай $\beta := \arccos x,\ x \in I;\ \alpha := \arccos y,\ y \in I;\ l := 24(r-1)s + 3(r-1) + s + 3$, і

$$D_{2l+1,n,l}(y, x) := \frac{1}{(2l)!}\,\frac{\partial^{2l+1}}{\partial x^{2l+1}}(x - y)^{2l}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} J_{n,l}(t)dt \tag{3.3.25}$$

– поліноміальне ядро типу Дзядика (див. [56, стор. 129]), де

$$J_{n,l}(t) = \frac{1}{\gamma_{n,l}}\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^{2(l+1)},\ \ \gamma_{n,l} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2(l+1)} dt$$

– ядро типу Джексона.

Нехай функція $g = g(x)$ неперервна на I і $L_{r-1}(x, g)$ позначає многочлен Лагранжа степеня $\leqslant r-1$, який інтерполює g в точках $-1 + 2i/(r-1),\ i = 0, \ldots, r-1$.

Лема 3.3.3. [56, стор. 135] *Якщо $g \in W^r,\ r \geqslant 3$ і $g''(x) = 0$ для $x \in F \subset I$, то многочлен*

$$D_n(x, g) := \int_{-1}^{1}\left(g(y) - L_{r-1}(y, g)\right) D_{2l+1,n,l}(y, x)dy + L_{r-1}(x, g), \tag{3.3.26}$$

степеня $c\,n$, наближує g та її похідні на I так, що

$$\left|g^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x, g)\right| \leqslant c_9\,\rho_n^{r-p}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, I\backslash F) + \rho_n(x)}\right)^{l-2r}, \tag{3.3.27}$$

де $p = 0 \vee 1 \vee 2 \vee 3$, і зокрема,

$$\left|g^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x, g)\right| \leqslant c_9\,\rho_n^{r-p}(x), \quad x \in I. \tag{3.3.28}$$

Для кожного $i = 1, \dots, s$, позначимо $Y_i := Y \backslash \{y_i\}$; $j_i^* := j_i + 2$, а у випадку $j_s + 2 = -1$, нехай $j_s^* := j_s - 2$;

$$\check{\tau}_{i,n}(x) := \tau_{j_i^*,n}(x, b_2, Y_i) - \overline{\tau}_{j_i^*,n}(x, b_2, Y_i),$$

де $b_2 := l - r + s - 1$. Нехай

$$K_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in I \backslash O, \\ \frac{|x - y_i|}{h_{j_i}}, & \text{якщо } x \in O_i \subset O, \; i = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Лема 3.3.4. *Якщо $g \in W^r$, $g''(x) = 0$, $x \in F \subset I$, і $g''(y_i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, то многочлен*

$$Q_n(x, g) := D_n(x, g) - \sum_{i=1}^{s} \frac{D_n''(y_i, g)}{\check{\tau}_{i,n}''(y_i)} \check{\tau}_{i,n}(x), \tag{3.3.29}$$

степеня $c\,n$, задовольняє нерівності

$$\left| g(x) - Q_n(x, g) \right| \leqslant c_{10}\, \rho_n^r(x), \; x \in I, \tag{3.3.30}$$

$$\left| g''(x) - Q_n''(x, g) \right| \leqslant c_{11}\, \rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, I \backslash F) + \rho_n(x)} \right)^{l-2r} K_n(x), \quad x \in I, \tag{3.3.31}$$

зокрема,

$$\left| g''(x) - Q_n''(x, g) \right| \leqslant c_{11}\, \rho_n^{r-2}(x) K_n(x), \; x \in I. \tag{3.3.32}$$

Доведення. З рівності $g''(y_i) = 0$ і оцінок (3.3.28), (2.1.26), (3.3.5)-(3.3.8), (3.3.12), (3.3.13) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \left| V_{i,n}(x) \right| &:= \left| \frac{D_n''(y_i, g)}{\check{\tau}_{i,n}''(y_i)} \check{\tau}_{i,n}(x) \right| \\ &\leqslant c_9\, \rho_n^{r-2}(y_i) \left(2c_6 \frac{1}{h_{j_i^*}} \Big(\Gamma_{j_i^*}(y_i) \Big)^{2b_2 + 2(s-1)} \right)^{-1} 2c_1 h_{j_i^*} \big(\Gamma_{j_i^*}(x) \big)^{2b_2 - s - 1} \\ &\leqslant c\, h_{j_i^*}^r \Big(\Gamma_{j_i^*}(x) \Big)^{2b_2 - s - 1} \leqslant c\, \rho_n^r(x), \quad x \in I. \end{aligned}$$

Тому (3.3.30) справджується. Аналогічно, (3.3.27) і (3.3.9) тягнуть оцінку

$$\begin{aligned}
\left|V''_{i,n}(x)\right| &\leqslant c_9\, \rho_n^{r-2}(y_i) \left(\frac{\rho_n(y_i)}{\operatorname{dist}(y_i, I\backslash F)+\rho_n(y_i))}\right)^{l-2r} c \left(\frac{1}{h_{j_i^*}}\right)^{-1} 2c_3\, \frac{1}{h_{j_i^*}}\, \Gamma_{j_i^*}(x)^{2b_2-(s-1)}\\
&\leqslant c\, \rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(y_i)}{\operatorname{dist}(y_i, I\backslash F)+\rho_n(y_i))}\right)^{l-2r} \left(\frac{\rho_n(x)}{|x-y_i|+\rho_n(x))}\right)^{\frac{2b_2-(s-1)-(r-2)}{2}}\\
&\leqslant c\, \rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x, I\backslash F)+\rho_n(x))}\right)^{l-2r}\\
&=: c\, \rho_n^{r-2}(x)\Omega, \quad x\in I,
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

яка разом з (3.3.27) веде до (3.3.31), коли $x \in I\backslash O$. З (3.3.33) і нерівності Дзядика для модуля похідної від ($\smile$) алгебраїчного многочлена [25] (або див. [56, стор. 120]) випливає оцінка

$$\left|V'''_{i,n}(x)\right| \leqslant c\, \rho_n^{r-3}(x)\Omega, \quad x\in I,$$

яка, разом з умовою $g''(y_i) = 0$ і (3.3.27), гарантують (3.3.31) для $x \in O_i \subset O$, $i = 1,\ldots,s$. Дійсно,

$$\begin{aligned}
\left|g''(x)-Q''_n(x,g)\right| &= \left|\int_{y_i}^{x} g'''(u)-D'''_n(u,g)+\sum_{i=1}^{s} V'''_{i,n}(u)du\right|\\
&\leqslant c\,\frac{|x-y_i|}{h_{j_i}} h_{j_i}\, \rho_n^{r-3}(x)\Omega \leqslant c_{11}\, \rho_n^{r-2}(x)\Omega\, K_n(x).
\end{aligned}$$

Лему 3.3.4 доведено.

Лема 3.3.5. *Якщо множина $E \subset I\backslash O$ складається з яких-небудь відрізків I_j, то многочлен*

$$U_n(x) := U_n(x,E) := \sum_{j:I_j\subset E} h_j^{r-1}\Big(\tau_{j,n}(x,b_3,Y)-\overline{\tau}_{j,n}(x,b_3,Y)\Big)\operatorname{sign}\Pi(x_j), \tag{3.3.34}$$

з $b_3 := 6(s+2)+r$, степеня $c\,n$, задовольняє нерівності

$$\left|U_n(x)\right| \leqslant c_{12}\, \rho_n^{r}(x), \quad x\in I, \tag{3.3.35}$$

$$\left|U''_n(x)\right| \leqslant c_{13}\, \rho_n^{r-2}(x), \quad x\in I, \tag{3.3.36}$$

$$\left|U''_n(x)\right| \geqslant c_{14}\rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x,E)+\rho_n(x)}\right)^{l-2r-1} K_n(x), \quad x\in I\backslash E, \tag{3.3.37}$$

$$U''_n(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x\in I\backslash E. \tag{3.3.38}$$

Доведення. З урахуванням (2.1.26), оцінки (3.3.7) і (3.3.8) тягнуть (3.3.35); (3.3.9) – (3.3.36); (3.3.5) і (3.3.6) – (3.3.38); (3.3.5), (3.3.6) і (3.3.12)-(3.3.15) – (3.3.37). Лему 3.3.5 доведено.

Лема 3.3.6. *Якщо $g \in W^r$ і на відрізку*

$$J_j := \cup_{\nu=0}^{20r} I_{j+\nu}, \quad j = 1, \dots, n-20r,$$

серед усіх $I_{j+\nu}$ знайдеться принаймні $2r-1$ відрізків $I_{j+\nu_p}$, $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{2r-1} \leqslant 20r$, таких, що на кожному з них є хоча б одна точка $\tilde{x}_{j+\nu_p} \in I_{j+\nu_p}$, $p = 1, \dots, 2r-1$, в якій

$$\left|g(\tilde{x}_{j+\nu_p})\right| \leqslant \rho_n^r(\tilde{x}_{j+\nu_p}),$$

то для всіх $x \in J_j$, виконується нерівність

$$\left|g(x)\right| \leqslant c_{15}(r)\rho_n^r(x).$$

Лему 3.3.6 доводять, користуючись нерівністю Уітні (2.1.12). Відзначимо, що

$$\operatorname{mes} J_j \leqslant c_{16}\, \rho_n(x), \ x \in J_j. \tag{3.3.39}$$

Доведення теореми 3.3.1

Нехай $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y)$. Представимо $f''(x)$ у вигляді суми "маленької" функції $g_1 = g_1(x)$ і "великої" $g_2 = g_2(x)$. Зробимо це наступним чином. Позначимо

$$A := \max\{c_{13} + c_{11}, 1\}. \tag{3.3.40}$$

Означення 3.3.1. *Нехай $j = \overline{1, n}$. Будемо писати*
$j \in V_1$, якщо

$$\left|f''(x)\right| \leqslant A\, c_{15}(r-2)\, \rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I_j;$$

$j \in V_2$, якщо $j \notin V_1$, $O \cap \bigcup\limits_{\nu=-3}^{3} I_{j+\nu} = \varnothing$ і

$$\left|f''(x)\right| \geqslant A\, \rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I_j;$$

$j \in V_3$, якщо $j \notin V_1 \cup V_2$. Покладемо

$$E_1 := \bigcup_{j \in V_1} I_j; \quad E_2 := \bigcup_{j \in V_2} I_j; \quad E_3 := \bigcup_{j \in V_3} I_j.$$

Множина E_3 (якщо $E_3 \neq \varnothing$) складається з (скінченого числа) відрізків $[a_\nu, b_\nu] =: l_\nu$, які не перетинаються. Кожен відрізок l_ν, згідно леми 3.3.6 (для $f'' \in W^{r-2}$), не може складатись із більш ніж $20(r-2)$ відрізків I_j. (Іншими словами, якщо $j \in V_3$, то між індексами $j, j+1, \ldots, j+20(r-2)$ знайдеться принаймні один, який не належить V_3.) Позначимо

$$E_{1,3} := E_1 \cup \left(\bigcup_{\nu:\, l_\nu \cap E_1 \neq \varnothing} l_\nu \right).$$

Будемо вважати $E_{1,3} \neq I$ (або, що те саме $E_2 \neq \varnothing$), інакше $\left|f''(x)\right| \leqslant A\, c_{15}^2 (r-2)\rho_n^{r-2}(x),\ x \in I$, і теорема 3.3.1 випливає з леми 3.3.2. Нехай k_μ – відрізки, які не перетинаються і складають $E_{1,3} = \underset{\mu}{\cup} k_\mu$. Через k_{μ_p} позначимо ті з них, які складаються з 3-х і 4-х відрізків I_j (звісно, якщо такі є). Покладемо

$$G_1 := \overline{E_{1,3} \backslash \underset{p}{\cup} k_{\mu_p}},\ G_2 := \overline{I \backslash G_1} \supset E_2.$$

Нехай $G_2^* := G_2^*(n)$ позначає об'єднання всіх $I_j,\ j = \overline{1,n}$, таких, що $I_j \cap G_2 \neq \varnothing$; $G_2^{**} := G_2^{**}(n)$ – об'єднання всіх I_j таких, що $I_j \cap G_2^* \neq \varnothing$; G_2^{***} – аналогічно, тобто $G_2^{***} = (G_2^{**})^* = \left((G_2^*)^*\right)^*$. Вочевидь, $G_2 \subset G_2^* \subset G_2^{**} \subset G_2^{***} \subset I$. Для кожного $j = \overline{1,n}$, позначимо

$$S_j(x) := \int_{x_j}^{x} (y - x_j)^{r-2} (x_{j-1} - y)^{r-2} dy \left(\int_{x_j}^{x_{j-1}} (y - x_j)^{r-2} (x_{j-1} - y)^{r-2} dy \right)^{-1}.$$

Означення 3.3.2. *Нехай $x \in I_j$. Покладемо*

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad I_j \subset G_2^*, \\ f''(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{I \backslash G_2^{**}}, \\ f''(x) S_j(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{G_2^{**} \backslash G_2^*} \ \textit{і}\ x_j \in G_2^*, \\ f''(x)(1 - S_j(x)), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{G_2^{**} \backslash G_2^*} \ \textit{і}\ x_j \notin G_2^*, \end{cases}$$

Нехай $g_2(x) := f''(x) - g_1(x)$. Введемо

$$f_1(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} g_1(u) du\, dt, \quad f_2(x) := \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} g_2(u) du\, dt$$

(тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$). Відмітимо

$$f_1,\ f_2 \in c_{17}\, W^{r} \cap \Delta^{(2)}(Y) \tag{3.3.41}$$

$$\left|f_1''(x)\right| \leqslant c_{17}\, A\, c_{15}^2 (r-2) \rho_n^{r-2}(x), \quad x \in I. \tag{3.3.42}$$

Позначимо

$$A_1 := \max\Big\{{c_{17}}^{r-2}, \Big(c_{17}c_{11}(c_{16}+1)^{l-2r-1}/c_{14}\Big)^{r-3},$$

$$\Big(c_{17}c_{11}14^{l-2r-1}/c_{14}\Big)^{r-3}, \Big(c_{17}c_{11}66^{l-2r-1}/c_{14}\Big)^{r-2}\Big\}, \quad n_1 := \big[A_1+1\big]n,$$

де $[\cdot]$ – ціла частина. Зауважимо, що

$$A_1\frac{\rho_{n_1}(x)}{\rho_n(x)} < 1, \ x \in I. \tag{3.3.43}$$

Доведемо, що многочлен

$$P_{n_1}(x) := G_n(x,f_1) + Q_{n_1}(x,f_2) + U_n(x,E_2), \tag{3.3.44}$$

визначений за формулами (3.3.24), (3.3.29) і (3.3.34), є шуканим в теоремі 3.3.1. Нерівність (3.3.2) одразу випливає з оцінок (3.3.42), (3.3.18), (3.3.30) і (3.3.35). Доведемо (3.3.1), тобто доведемо нерівність

$$G_n''(x,f_1)\Pi(x) + \Big(f_2''(x) + Q_{n_1}''(x,f_2) - f_2''(x) + U_n''(x,E_2)\Big)\Pi(x)$$

$$=: \Psi_1(x) + \Psi_2(x) \geqslant 0, \quad x \in I. \tag{3.3.45}$$

Нерівність $\Psi_1(x) \geqslant 0, \ x \in I$, є наслідком (3.3.41) і (3.3.17). Згідно (3.3.41) і (3.3.38), оцінка

$$\big|f_2''(x)\big| - \big|Q_{n_1}''(x,f_2) - f_2''(x)\big| + \big|U_n''(x,E_2)\big| \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{3.3.46}$$

тягне нерівність $\Psi_2(x) \geqslant 0, \ x \in I$. Для доведення (3.3.46) розглянемо наступні чотири випадки. При цьому будемо враховувати означення 3.3.1 і 3.3.2 та (3.3.31), (3.3.36)-(3.3.41), (3.3.43). Якщо:

1) $x \in E_2$, тобто $\big|f_2''(x)\big| = \big|f''(x)\big| \geqslant A\,\rho_n^{r-2}(x)$ і $K_n(x) = 1$, то (3.3.46) випливає з нерівності

$$A\,\rho_n^{r-2}(x) - c_{17}\,c_{11}\,\rho_{n_1}^{r-2}(x) - c_{13}\,\rho_n^{r-2}(x) \geqslant 0;$$

2) $x \in G_2 \backslash E_2$, тобто $f_2''(x) = f''(x)$, то з урахуванням нерівності

$$\rho_{n_1}(x)K_{n_1}(x) \leqslant \rho_n(x)K_n(x), \ x \in I, \tag{3.3.47}$$

(яка є правильною для будь-якого $n_1 \geqslant n$), маємо

$$-c_{17}\,c_{11}\,\rho_{n_1}^{r-2}(x)K_{n_1}(x) + c_{14}\,\rho_n^{r-2}(x)\left(\frac{\rho_n(x)}{\operatorname{dist}(x,E_2)+\rho_n(x)}\right)^{l-2r-1}K_n(x)$$

$$\geqslant -c_{17}\,c_{11}\,\rho_{n_1}^{r-2}(x)K_{n_1}(x) + \frac{c_{14}}{(c_{16}+1)^{l-2r-1}}\,\rho_n^{r-2}(x)K_n(x) \geqslant 0,$$

тому оцінка (3.3.46) тим більше виконується;
3) $x \in I \backslash G_2^{***}$, тобто $f_2''(x) = 0$, то з урахуванням (3.3.47) і нерівності $14\,\mathrm{dist}\,(x, G_2^{**}) > \mathrm{dist}\,(x, E_2) + \rho_n(x)$, маємо

$$-c_{17}\, c_{11}\, \rho_{n_1}^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_{n_1}(x)}{\mathrm{dist}(x, G_2^{**}) + \rho_{n_1}(x)} \right)^{l-2r} K_{n_1}(x)$$

$$+c_{14}\, \rho_n^{r-2}(x) \left(\frac{\rho_n(x)}{\mathrm{dist}(x, E_2) + \rho_n(x)} \right)^{l-2r-1} K_n(x) \geqslant 0,$$

звідки випливає (3.3.46);
4) $x \in G_2^{***} \backslash G_2$, то $x \notin O$ і (3.3.46) є наслідком нерівності

$$-c_{17}\, c_{11}\, \rho_{n_1}^{r-2}(x) + \frac{c_{14}\, \rho_n^{r-2}(x)}{66^{l-2r-1}} \geqslant 0.$$

Таким чином оцінка (3.3.46) доведено для всіх $x \in I$. Теорему 3.3.1 доведено.

Доведення теореми 3.3.2 для "малих" n

Нехай $n = r-1$. Розглянемо два випадки:
1) $s \geqslant r-2$. Оскільки $f''(y_i) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, r-2$, то $L(x, f'') := L(x, f'', y_1, \dots, y_{r-2}) \equiv 0$, де L – многочлен Лагранжа степеня $\leqslant r-3$ який інтерполює $f''(x)$ в y_i, $i = 1, \dots, r-2$. Тоді з нерівності

$$\left|f''(x)\right| = \left|[y_1, \dots, y_{r-2}, x, f'']\right| \prod_{i=1}^{r-2} |x - y_i| \leqslant c(r), \quad f \in W^r,\ r \geqslant 3, \tag{3.3.48}$$

де $[\cdot]$ – розділена різниця функції f'' в $y_1, \dots, y_{r-2}$ і x, випливає, що многочлен $P_{r-1}(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1)$ є шуканим в теоремі 3.3.2.
2) Нехай $s < r-2$. До точок y_i, $i = 1, \dots, s$, добавимо $r-2-s$ рівновіддалених точок y_i, $i = s+1, \dots, r-2$, $-1 = y_{s+1} < y_{s+2} < \cdots < y_{r-2} < y_s$. Зауважимо, що аналогічно (3.3.48), виконується нерівність

$$\left|f''(x) - L(x, f'')\right| \leqslant \frac{1}{(r-2)!} \prod_{i=1}^{r-2} |x - y_i| \leqslant c_{18}(r) \left|\Pi(x)\right|.$$

Покладемо

$$P_{r-1}(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} \Big(L(u, f'') + c_{18}(r)\, \Pi(u) \Big) du\, dt,$$

і помітимо, що $P_{r-1}''(x)\, \Pi(x) \geqslant 0$. Для $r-1 < n \leqslant N(Y, r)$, покладемо $P_n(x) := P_{r-1}(x)$. Теорему 3.3.2 доведено.

3.4 Поточкове наближення сплайнами функцій з однією точкою перегину

Результати цього підрозділу містяться в [83].

Нехай
$$\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}, \quad \varphi_n(x) := \frac{1}{n} + \varphi(x), \quad \rho_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_n(x),$$
W^r – множина всіх $f \in C$, що мають на $(-1,1)$ абсолютно неперервну $(r-1)$-шу похідну і $f^{(r)} \in L_\infty[-1,1]$. Для $f \in C[-1,1]$ позначимо
$$E_{n,r}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|$$
– похибку найкращого вагового наближення f многочленами $P_n \in \mathbb{P}_n$, з вагою φ_n^{-r}. Для $f \in W^r$, добре відомі оцінки Тімана (див., наприклад, [86, стор. 381])
$$E_{n,r}(f) \leqslant c(r)\frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n \geqslant r,$$
де $c(r)$ – стала, що залежить тільки від r. Тепер, якщо $\Delta^{(2)}$ – набір опуклих донизу функцій $f \in C[-1,1]$, і, для $f \in \Delta^{(2)}$,
$$E^{(2)}_{n,r}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|,$$
– похибка найкращого вагового опуклого наближення, то Левіатан [114] (для $r = 1,2$), і Манія, Шевчук (див., наприклад, [56, стор. 148], або [86, Теорема 7.6.5]) (для $r > 2$), довели, що якщо $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}$, то
$$E^{(2)}_{n,r}(f) \leqslant c(r)\frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n \geqslant r,$$
тобто оцінки Тімана лишаються вірними для опуклого наближення. В цьому підрозділі висвітлюється питання збереження таких оцінок для коопуклого наближення функцій з однією точкою перегину. Так, для $f \in \Delta^{(2)}(Y_1)$ і
$$E^{(2)}_{n,r}(f, Y_1) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_1)} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|,$$
– похибки найкращого вагового коопуклого наближення, в теоремі 3.1.1 доведено, що якщо $r = 1$, або $r = 2$ і $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$, то
$$E^{(2)}_{n,r}(f, Y_1) \leqslant c(r)\frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n \geqslant r. \tag{3.4.1}$$

Теорема 6.3.1 стверджує, що якщо $r > 2$, то оцінка (3.4.1) не вірна, а саме, для кожного $r > 2$ і $y \in (-1,1)$, існує стала $C(Y_1, r) > 0$, така, що при всіх $n \in \mathbb{N}$, знайдеться функція $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$, така, що

$$E_{n,r}^{(2)}(f, Y_1) > C(Y_1, r)\frac{\|f^{(r)}\|}{n^2}. \tag{3.4.2}$$

Тимнеменьш, нижче покажемо, що (3.4.1) можна зберегти для всіх $r \in \mathbb{N}$ в більш слабкій формі. А саме, вірна наступна теорема 3.4.1, яка є наслідком теореми 3.4.3.

Теорема 3.4.1. *Для кожних $r \in \mathbb{N}$, $y \in (-1,1)$ і $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$, існує стала $N = N(f, r, Y_1)$, така, що*

$$E_{n,r}^{(2)}(f, Y_1) \leqslant c(r)\frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n \geqslant N, \tag{3.4.3}$$

де стала $c(r)$ залежить тільки від r.

Зауваження 3.4.1. *Для $r = 1$ і $r = 2$, N в (3.4.3) можна взяти 1 і 2, відповідно (див. (3.4.1)). Якщо $r > 2$, то згідно (3.4.2), N в (3.4.3) не може бути незалежною від f.*

Зауваження 3.4.2. *Випадок $s > 1$, розглянуто в підрозділах 3.1 – 3.3, 3.5 і 3.6. Зокрема, в теоремах 3.2.1 і 3.3.1 аналог (3.4.3) зберігається для $r > 2$ з N незалежною від f, але з $c = c(r, Y_s)$, і він не може бути збережений з $c = c(r,s)$ і N незалежною від f. Аргументи цього підрозділу легко можуть бути розповсюджені на випадок $s > 1$, тобто повні аналоги теорем 3.4.1-3.4.3 вірні і для $s > 1$.*

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$, нехай знову $x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, ..., n$, – чебишевське розбиття $[-1,1] := I$, $I_{j,n} := [x_{j,n}, x_{j-1,n}]$, $I_{j,n}^0 := [x_{j,n}, x_{j-1,n})$, $|I_{j,n}| = |I_{j,n}^0| := x_{j-1,n} - x_{j,n}$.

Для $m \in \mathbb{N}$, через $\Sigma_{m,n}$, позначимо множину неперервних на I кусково-поліноміальних функцій (для спрощення – сплайнів) s порядку $< m$, з вузлами $x_{j,n}$, $j = 1, ..., n-1$. Тобто, $s \in \Sigma_{m,n}$, якщо $s \in C[-1,1]$ і

$$s|_{I_{j,n}} = p_{j,n}, \quad j = 1, ..., n,$$

де $p_{j,n} \in \mathbb{P}_m$. Для $y \in (-1,1)$ і $Y_1 := \{y\}$, через $\Sigma_{m,n}(Y_1)$, позначимо набір всіх сплайнів з $\Sigma_{m,n}$ таких, що

$$p_{j_y-1,n} \equiv p_{j_y,n} \equiv p_{j_y+1,n},$$

де $j_y := j_y(n)$ – індекс, для якого $y \in I_{j_y,n}^0$, і $p_{0,n} := p_{1,n}$ і $p_{n+1,n} := p_{n,n}$.

В цьому підрозділі ми доводимо теорему 3.4.2.

Теорема 3.4.2. *Нехай або $r = 2$ і $k = 1, 2, 3$, або $r > 2$ і $k \in \mathbb{N}$. Візьмемо $y \in (-1, 1)$, $Y_1 = \{y\}$ і $m = k + r$. Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r$, то існує стала $N = N(f, k, r, Y_1)$, така, що для кожного $n \geqslant N$, знайдеться сплайн $s \in \Sigma_{m,n}(Y_1) \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$, такий, що*

$$|f(x) - s(x)| \leqslant c(k, r)\rho_n^r(x)\,\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де $c(k, r)$ – стала, що залежить тільки від k і r.

Теорема 3.4.2 тягне наступну теорему 3.4.3, яку ми доведемо в підрозділі 3.6, а тут лише зауважимо, що це доведення буде спиратися на, "стандартну" для такого типу результатів, техніку (див. [70], [55] і [79], також, див. [93], [103], [125], [123]).

Теорема 3.4.3. *Нехай або $r = 2$ і $k = 1, 2, 3$, або $r > 2$ і $k \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r$, то існує стала $N = N(f, k, r, Y_1)$, така, що для кожного $n \geqslant N$, знайдеться многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_1)$, такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k, r)\rho_n^r(x)\,\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де $c(k, r)$ – стала, що залежить тільки від k і r.

Зауваження 3.4.3. *Як вже відзначалося, коли $r = 2$, теорема 3.4.3 не справджується з $k > 3$ (див., Гілевіч, Ющенко [91]), навіть, якщо дозволити обом сталим c і N залежити від f. Для $r = 0$ і $r = 1$ маємо: якщо $k + r \leqslant 2$, то теорема 3.4.3, згідно теоремі 3.1.1, справджується з абсолютними c і N, для $k + r \geqslant 4$, вона є хибна навіть з c і N залежними від f (див. Ву, Цу [169] і [176]), а для останнього випадку $k + r = 3$, спираючись на теорему 6.3.1, ми вбачаємо, що теорема 3.4.3 (а отже і теорема 3.4.2, яка її тягне) не справджується з обома сталими, що не залежать від f, хоча вона вірна з абсолютною c і $N = N(f, Y_1)$, як частинний ($s = 1$) випадок теореми 3.5.2.*

Доведення теореми 3.4.2

Для $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ і k-мажоранти ω, нехай

$$W^r H_k^\omega := \{f : \ f \in C^r[-1, 1] \text{ і } \omega_k(f^{(r)}, t) \leqslant \omega(t), \ t \geqslant 0\},$$

– узагальнений клас Гельдера.

Надалі c_ν – фіксовані додатні сталі, що можуть залежити тільки від k і r, значення яких ми будемо відстежувати.

Лема 3.4.1. *Нехай або* $r = 2$ *і* $k \leqslant 3$, *або* $r \geqslant 3$. *Для довільного* $y \in (-1, 1)$, *нехай проміжок* $[a, b] \subset [-1, 1]$ *такий, що або* $y \in [a+(b-a)/10, b-(b-a)/10]$, *або* $y \notin [a, b]$, *а функція* $f \in W^r H_k^\omega$, *така, що* $f''(x)(x-y) \geqslant 0, \quad x \in [-1, 1]$. *Тоді, існує многочлен* $P(\cdot, f, [a, b]) \in \mathbb{P}_m$, $m = k + r$, *такий, що* $P(a, f, [a, b]) = f(a)$, *і*

$$(P'(a, f, [a, b]) - f'(a))(a - y) \geqslant 0, \tag{3.4.4}$$

$$(P'(b, f, [a, b]) - f'(b))(b - y) \leqslant 0, \tag{3.4.5}$$

$$P''(x, f, [a, b])(x - y) \geqslant 0, \quad x \in [a, b], \tag{3.4.6}$$

$$\|f - P(\cdot, f, [a, b])\|_{[a,b]} \leqslant c_1\, (b-a)^r\, \omega(b-a), \tag{3.4.7}$$

а якщо $y \notin [a, b]$, *то також* $P(b, f, [a, b]) = f(b)$.

Доведення. Якщо $y \notin [a, b]$, то лема 3.4.1 це [125, Наслідок 2.4], а якщо $y \in [a + (b - a)/10, b - (b-a)/10]$, то лема 3.4.1 випливає з [125, Наслідок 2.6] і [125, Наслідок 3.1]. Можно сказати, що останнє фактично є "копозитивною" нерівністю Уітні, а перше зводить "коопуклу" нерівність Уітні до копозитивної. Лему 3.4.1 доведено.

Покладемо

$$J_y := \left(y - \frac{1}{2}(1 - |y|), y + \frac{1}{2}(1-|y|) \right),$$

$$h_n := \rho_n^r(y)\, \omega(\rho_n(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки для всіх $x \in J_y$, $\frac{1}{2}\varphi(x) < \varphi(y) < 2\varphi(x)$, то

$$c_2^{-1} h_n \leqslant \rho_n^r(x)\, \omega(\rho_n(x)) \leqslant c_2\, h_n, \quad x \in J_y. \tag{3.4.8}$$

Спочатку припустимо, що $f''(x) \equiv 0$ для $x \in J_y$, тобто тут $f(x) =: \ell(x)$ – лінійна функція. Згадаємо, що $j_y = j_y(n)$ такий, що $y \in I^0_{j_y,n}$ і візьмемо N настільки великим, щоб $I_{j_y \pm 2,n} \subset J_y$, для всіх $n \geqslant N$. Тоді можна взяти

$$P(\cdot, f, I_{j_y+1,n}) = P(\cdot, f, I_{j_y,n}) = P(\cdot, f, I_{j_y-1,n}) = \ell,$$

і, отже, згідно лемі 3.4.1 і другої нерівності в (2.1.11), шуканий сплайн s можно означити як

$$s|_{I_{j,n}} = p_{j,n} := P(\cdot, f, I_{j,n}), \quad j = 1, ..., n.$$

Інакше, можимо припустити, що існує $y_0 \in J_y$, така, що $f''(y_0) \neq 0$. Віднімаючи, за необхідністю, лінійну функцію, припускаємо, що $f(y_0) = 0$ і $f'(y_0) = 0$, і без втрати загальності, нехай $f''(y_0) > 0$, так, що $y < y_0 < y^0 := y + \frac{1}{2}(1 - |y|)$. Тепер, оскільки f опукла до низу на $[y, y^0]$, заключаємо, що

$$\frac{1}{3}\min\{f(y), f(y^0)\} =: \delta > 0.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$, нехай $j_0 = j_0(n)$ і $j^0 = j^0(n)$ позначають індекси, такі, що $y_0 \in I^0_{j_0,n}$ і $y^0 \in I^0_{j^0,n}$, відповідно. Візьмемо N настільки великим, щоб для всіх $n \geqslant N$, ми мали б $y < x_{j_0,n}$ і

$$f(x_{j_y-2,n}) > 2\delta, \quad f(x_{j_0,n}) < \delta, \quad f(x_{j_0-1,n}) < \delta, \quad f(x_{j^0,n}) > 2\delta, \quad c_3 h_n < \delta$$

де $c_3 := c_1\, 35^m$.

Вочевидь, f не зростає на $[y, y_0]$, і тому останні нерівності тягнуть $j_y - 2 \geqslant j_0 + 1$.

Зафіксуємо $n \geqslant N$, і не писатимемо його в індексах $x_{j,n}$, $p_{j,n}$, $I_{j,n}$ і $I^0_{j,n}$. Як перший крок в означені шуканого сплайну s, завдяки лемі 3.4.1, покладемо

$$s|_{[x_{j_y+1}, x_{j_y-2}]} := P(\cdot, f, [x_{j_y+1}, x_{j_y-2}]),$$

і позначимо

$$d := s(x_{j_y-2}) - f(x_{j_y-2}).$$

Оскільки $x_{j_y-2} - x_{j_y+1} < 7|I_{j_y}|$, то з (3.4.7) випливає, що

$$|d| \leqslant c_1\,(x_{j_y-2} - x_{j_y+1})^r \omega(x_{j_y-2} - x_{j_y+1}) \leqslant c_3 h_n,$$

отже $|d| < |\delta|$ і (3.4.8) породжує

$$|d| \leqslant c_4\, \rho_n^r(x)\omega(\rho_n(x)), \quad x \in J. \tag{3.4.9}$$

Якщо $d = 0$, то візьмемо $p_j := P(\cdot, f, I_j)$, для всіх $j = 1, ..., j_y - 2$ і $j = j_y + 2, ..., n$, і знову лема 3.4.1 і (2.1.11) свідчать, що ми означили шуканий s. Отже ми припускаємо, що $d \neq 0$.

Випадок I: $d > 0$. Нехай ℓ – дотична до f у точці $(x_{j_0}, f(x_{j_0}))$. Оскільки f опукла до низу на $[x_{j_0}, x_{j^0}]$ і $\ell'(x_{j_0}) = f'(x_{j_0}) < 0$, і згадаємо також, що $f(x_{j_0}) < \delta$, $f(x_{j^0}) > 2\delta$ і $d < \delta$, то напевно існує едина точка $x_* \in (x_{j_0}, x_{j^0})$, така, що

$$\ell(x_*) + d = f(x_*).$$

Через j_* позначимо індекс, для якого $x_* \in I^0_{j_*}$. Ясно, що $j_0 \geqslant j_*$. Нехай сплайн s на проміжку $[x_{j_y+1}, x_{j_y-2}]$ є таким, як означено вище. Спираючись на лему 3.4.1, для всіх $j = 1, \ldots, j_* - 1$ і всіх $j = j_y + 2, \ldots, n$, покладемо

$$p_j := P(\cdot, f, I_j),$$

а для $j = j_0 + 1, \ldots, j_y - 2$, нехай

$$p_j := P(\cdot, f, I_j) + d.$$

Отже s означено на проміжках $[-1, \alpha]$ і $[\beta, 1]$, де $\alpha := x_{j_0}$ і $\beta := x_{j_*-1}$, і згідно лемі 3.4.1, (2.1.11) і (3.4.9), цей s задовольняє всім вимогам теореми 3.4.2 на цих двох проміжках. Більш того,

$$s'(\alpha-) \leqslant f'(\alpha) \quad \text{i} \quad s'(\beta+) \geqslant f'(\beta).$$

Щоб завершити означення s, а отже і доведення теореми 3.4.2 у випадку I, побудуємо многочлен $p_* \in \mathbb{P}_m$, такий, що

$$p_*(\alpha) = f(\alpha) + d, \quad p_*(\beta) = f(\beta), \tag{3.4.10}$$

$$p_*'(\alpha) \geqslant f'(\alpha), \quad p_*'(\beta) \leqslant f'(\beta), \tag{3.4.11}$$

$$p_*''(x) \geqslant 0, \quad x \in [\alpha, \beta], \tag{3.4.12}$$

$$|f(x) - p_*(x)| \leqslant c_5 \rho_n^r(x) \omega(\rho_n(x)), \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{3.4.13}$$

Якщо покласти

$$g(x) := f(x) - \ell(x) \quad \text{i} \quad q(x) := p_*(x) - \ell(x),$$

то (3.4.10)-(3.4.13) еквівалентні до

$$q(\alpha) = d, \quad q(\beta) = g(\beta), \tag{3.4.14}$$

$$q'(\alpha) \geqslant 0, \quad q'(\beta) \leqslant g'(\beta), \tag{3.4.15}$$

$$q''(x) \geqslant 0, \quad x \in [\alpha, \beta], \tag{3.4.16}$$

$$|g(x) - q(x)| \leqslant c_5 \rho_n^r(x) \omega(\rho_n(x)), \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{3.4.17}$$

Покажимо, що

$$q(x) := d + \lambda P(x),$$

де

$$P(x) := \begin{cases} P(x, g, [\alpha, \beta]), & \text{якщо} \quad j_* = j_0, \\ g(\beta) \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{інакше}, \end{cases}$$

з λ обраною так, що $q(\beta) = g(\beta)$, задовольняє (3.4.14)-(3.4.17). Спочатку звернемо увагу, що це можливо з $0 < \lambda < 1$. Дійсно, це випливає з того, що g опукла до низу на $[\alpha, \beta]$, $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$, так, що g там зростає, і $x_* < \beta$. Отже,

$$d = g(x_*) < \|g\|_{[\alpha, ta]} = g(\beta).$$

Тепер $P(\beta) = g(\beta)$, і тому

$$\lambda = 1 - \frac{d}{g(\beta)}. \tag{3.4.18}$$

Інша частина (3.4.14) випливає з рівності $P(\alpha) = g(\alpha) = 0$, а (3.4.16) – з (3.4.6). Якщо $j_0 = j_*$, то (3.4.15) випливає з (3.4.4) і (3.4.5). Якщо $j_0 \neq j_*$, то маємо

$$g'(\alpha) = 0 < \lambda \frac{g(\beta)}{\beta - \alpha} = q'(\alpha) = \lambda \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} < \lambda g'(\beta) < g'(\beta),$$

де в другій нерівності ми скористалися опуклістю g.

Перевіремо (3.4.17). Оскільки

$$g - q = \lambda(g - P) + (1 - \lambda)g - d,$$

то з (3.4.18) випливає, що

$$\|g - q\|_{[\alpha,\beta]} \leqslant \|g - P\|_{[\alpha,\beta]} + (1 - \lambda)\|g\|_{[\alpha,\beta]} + d = \|g - P\|_{[\alpha,\beta]} + 2d.$$

Якщо $j_* = j_0$, то $[\alpha, \beta] = I_{j_0}$, і (3.4.17) випливає з (3.4.7), другої нерівності (2.1.11) і (3.4.9).

Якщо $j_0 \neq j_*$, то вочевидь, $I_{j_*+1} \subset [\alpha, x_*]$. Отже

$$\|g\|_{I_{j_*+1}} \leqslant \|g\|_{[\alpha,x_*]} = d \leqslant c_6 |I_{j_*+1}|^r \omega(|I_{j_*+1}|).$$

Оскільки, $x_{j_*-1} - x_{j_*+1} < 4|I_{j_*+1}|$, $g \in W^r H_k^\omega$ і $\|g\|_{I_{j_*+1}} \leqslant c_6 |I_{j_*+1}|^r \omega(|I_{j_*+1}|)$, то (див., наприклад, [86, Лема 4.1.1])

$$\|g\|_{[x_{j_*+1}, x_{j_*-1}]} \leqslant c_7 (x_{j_*-1} - x_{j_*+1})^r \omega(x_{j_*-1} - x_{j_*+1}).$$

Це, у свою чергу, разом з (2.1.11), призводить до

$$\begin{aligned} \|g - q\|_{[\alpha,\beta]} &\leqslant \|g - P\|_{[\alpha,\beta]} + 2d \leqslant \|g\|_{[\alpha,\beta]} + \|P\|_{[\alpha,\beta]} + 2d = 2g(\beta) + 2d \\ &= 2\|g\|_{[x_{j_*+1}, x_{j_*-1}]} + 2d \leqslant c_8 (x_{j_*-1} - x_{j_*+1})^r \omega(x_{j_*-1} - x_{j_*+1}), \end{aligned}$$

що породжує (3.4.17) і отже завершує доведення теореми 3.4.2 для $d > 0$.

Випадок II: $d < 0$. Нехай ℓ – дотична до f у точці $(x_{j_0-1}, f(x_{j_0-1}))$. Оскільки f опукла до низу на $[x_{j_y-2}, x_{j_0-1}]$, $\ell'(x_{j_0-1}) = f'(x_{j_0-1}) > 0$, $f(x_{j_0-1}) < \delta$, $|d| < \delta$ і $f(x_{j_y-2}) > 2\delta$, то існує єдина точка $x_* \in (x_{j_y-2}, x_{j_0} - 1)$, така, що

$$\ell(x_*) - d = f(x_*).$$

Через j_* позначимо індекс, для якого $x_* \in I^0_{j_*}$. Знову, нехай s означена на $[x_{j_y+1}, x_{j_y-2}]$ як вище, і користуючись лемою 3.4.1, для всіх $j = 1, \dots, j_0 - 1$ і всіх $j = j_y + 2, \dots, n$, покладемо

$$p_j := P(\cdot, f, I_j),$$

а для $j = j_* + 1, \dots, j_y - 2$, нехай

$$p_j := d + P(\cdot, f, I_j).$$

Отже s означено на проміжках $[-1, \alpha]$ і $[\beta, 1]$, де $\alpha := x_{j_*}$ і $\beta := x_{j_0-1}$. Згідно лемі 3.4.1, (2.1.11) і (3.4.9), сплайн s, на цих двох проміжках, задовольняє всім вимогам теореми 3.4.2. Більш того,

$$s'(\alpha-) \leqslant f'(\alpha) \quad \text{i} \quad s'(\beta+) \geqslant f'(\beta).$$

Таким чином знову, щоб завершити означення s і разом з цим доведення теореми 3.4.2 у випадку II, побудуємо $p_* \in \mathbb{P}_m$, що задовольняє (3.4.10)-(3.4.13).

Якщо покласти

$$g(x) := f(x) - \ell(x) \quad \text{i} \quad q(x) := p_*(x) - \ell(x),$$

то (3.4.10)-(3.4.13) еквівалентні (3.4.14)-(3.4.17).

Як і у випадку I, можно показати, що многочлен, який задовольнятиме (3.4.14)-(3.4.17), може бути обрано у формі

$$q(x) := \lambda P(x),$$

де

$$P(x) := \begin{cases} P(x, g, [\alpha, \beta]), & \text{якщо} \quad j_* = j_0, \\ g(\alpha)\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}, & \text{інакше}, \end{cases}$$

і λ така, що $q(\alpha) = g(\alpha) + d$. Теорему 3.4.2 доведено.

3.5 Поточкове наближення сплайнами неперервних на відрізку функцій

Результати цього підрозділу містяться в [84].

У цьому підрозділі доводиться наступна теорема 3.5.1.

Нехай $x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \dots, n$, – чебишевське розбиття $[-1, 1] =: I$, $n \in \mathbb{N}$, $I_{j,n} := [x_{j,n}, x_{j-1,n}]$, $|I_{j,n}| = x_{j-1,n} - x_{j,n}$, $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s \in \mathbb{Y}_s$, $O_{i,n} := (x_{j+1,n}, x_{j-2,n})$, якщо $y_i \in [x_{j,n}, x_{j-1,n})$, $(x_{n+1,n} := -1,\ x_{-1,n} := 1), O = O(n, Y_s) := \cup_{i=1}^s O_{i,n},$, зокрема

$$|O_{i,n}| < c_1\rho_n(x), \quad x \in O_{i,n}, \tag{3.5.1}$$

де $|O_{i,n}|$ довжина $O_{i,n}$ і $c_1 < 65$. Знову $\Sigma_{k,n}$ – множина всіх неперервних на I кусково-поліноміальних функцій (для спрощення сплайнів) степеня $< k$, з вузлами $\{x_{j,n}\}_{j=1}^{n-1}$. Нехай $\Sigma_{k,n}(Y_s)$, позначає підмножину $\Sigma_{k,n}$, що складається з таких $S \in \Sigma_{k,n}$, які для кожного $i = 1, \dots, s$, $S|_{O_{i,n}}$ є многочленом.

Теорема 3.5.1. *Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, то існує стала $N = N(f, Y_s)$, така, що для кожного $n \geqslant N$, знайдеться сплайн $S \in \Sigma_{3,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, такий, що*

$$|f(x) - S(x)| \leqslant c\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де c – абсолютна стала.

Теорема 3.5.1 тягне теорему 3.5.2, яка буде доведена "стандартним" чином (див. [70], [55] і [79], також, див. [93], [103], [125], [123]) в наступному підрозділі 3.6.

Теорема 3.5.2. *Для кожного $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ і кожної функції $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ існує стала $N = N(f, Y_s)$ і послідовність $\{P_n\}_{n=N}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, такі, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де $c(s)$ – стала, яка залежить тільки від s.

Теорема 3.5.2 не справджується з ω_k, $k > 3$, навіть, якщо дозволити обом сталим c і N залежити від f, див. Ву, Цу [169] і [176].

Доведення теореми 3.5.1

Доведення теореми 3.5.1 почнемо з трьох лем.

Надалі c_i – абсолютні сталі.

Лема 3.5.1. *Для кожної опуклої до гори (низу) функції $f \in C[a, b]$, існує число $d = d([a, b], f) > 0$, таке, що для кожного h,*

$$|h| \leqslant E_2(f)_{[a,b]} := \inf_{l \in \mathbb{P}_2} \|f - l\|_{[a,b]},$$

знайдеться опукла до гори (низу) функція $g \in C[a,b]$, $g(x) = g(x,h,f,[a,b])$, *що задовольняє рівності*

$$g(x) = f(x) + h,\ x \in [a, a+d]; \qquad g(x) = f(x),\ x \in [b-d, b]; \qquad \|f-g\|_{[a,b]} = |h|.$$

Доведення. Доведемо лему 3.5.1 для опуклої до низу f. Нехай l – лінійна функція найкращого наближення f, тобто $\|f-l\|_{[a,b]} = E_2(f)_{[a,b]} =: E$. Покладемо $f^* := f - l$, і помітимо, що $f^*(a) = f^*(b) = E$. Якщо $h = 0$, то немає чого доводити. Отже, припустимо, що $0 < |h| \leqslant E \neq 0$. Через x_1 і x_5 позначимо (саме два) корені рівняння $f^*(x) = 0$, $x_1 < x_5$, і нехай x_2 і x_4 – (саме два) корені рівняння $f^*(x) = |h| - E$, $x_2 < x_4$. Насамкінець, нехай x_3 – корень рівняння $f^*(x) = -E$. Вочевидь, маємо

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < b.$$

Тому лема 3.5.1 вірна з $d = \min\{x_1 - a, b - x_5\}$, і напевно опуклою до низу функцією

$$g(x) = l(x) + \begin{cases} f^*(x) + h, & \text{якщо} \quad x \in [a, x_3], \\ h - E, & \text{якщо} \quad x \in [x_3, x_4], \\ f^*(x), & \text{якщо} \quad x \in [x_4, b], \end{cases}$$

якщо $h > 0$, і

$$g(x) = l(x) + \begin{cases} f^*(x) + h, & \text{якщо} \quad x \in [a, x_2], \\ -E, & \text{якщо} \quad x \in [x_2, x_3], \\ f^*(x), & \text{якщо} \quad x \in [x_3, b], \end{cases}$$

якщо $h < 0$. Лему 3.5.1 доведено.

Через

$$[t_1, t_2; f] := \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

позначимо першу розділену різницю функції f в точках t_1 і t_2.

Лема 3.5.2. *Для будь-якого проміжку* $[a,b]$, *нехай* $y \in (a,b)$ *задовольняє* $(b-y)/3 < y - a < 3(b-y)$. *Якщо функція* $f \in C[a,b]$ *опукла до гори на* $[a,y]$ *і опукла до низу на* $[y,b]$, *то існує лінійна функція* $l(x) = l(x,f,[a,b],y)$, *така, що*

$$l' \leqslant [a,y;f] \quad \text{і} \quad l' \leqslant [y,b;f], \tag{3.5.2}$$

ми можемо обирати $l(a) = f(a)$, *або* $l(b) = f(b)$, *і*

$$\|f-l\|_{[a.b]} \leqslant c_2\omega_3(f, b-a, [a,b]), \tag{3.5.3}$$

де модуль неперервності взято по проміжку $[a, b]$.

Доведення. Оскільки f опукла до гори на $[a, y]$ і опукла до низу на $[y, b]$, то (див. [109]) $E_2(f)_{[a,b]} \leqslant c_3 E_3(f)_{[a,b]} := c_3 \inf_{p\in\mathbb{P}_3} \|f - p\|_{[a,b]}$, і отже, $E_2(f)_{[a,b]} \leqslant c_4\omega_3(f, b - a, [a, b])$. Тому, вибір або $l_1(x) = f(a) + (x - a)[a, y; f]$, або $l_2(x) = f(b) + (x - b)[y, b; f]$, в залежності від того, яка з двох розділених різниць меньша, вочевидь тягне (3.5.2), тоді як (3.5.3) випливає з нерівності Уітні (2.1.12) і того факту, що l_j з $j = 1$, або $j = 2$, інтерполює f в двох точках, відстань між якими пропорційна $b - a$. Щоб гарантувати $l(a) = f(a)$, якщо обрано l_1, візьмемо $l = l_1$. Інакше, якщо $h := l_2(a) - f(a)$, то згідно (3.5.3), можно взяти $l = l_2 - h$, яка задовольняє (3.5.2) і (3.5.3), і отримуємо $l(a) = f(a)$. А для забеспечення $l(b) = f(b)$, все робиться аналогічно. Лему 3.5.2 доведено.

Лема 3.5.3. *Для* $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$*, існує стала* $N = N(f, Y_s)$*, така, що для кожного* $n \geqslant N$*, знайдеться функція* $f_n \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ *така, що* $f_n|_{0_{i,n}}$ *лінійна для всіх* $i = 1, \ldots, s$*, і*

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant c_5\, \omega_3\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in [-1, 1].$$

Доведення. Покладемо

$$y_i^+ := \min\{y_i + \frac{1}{2}(1 - |y_i|), \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)\},$$

$$y_i^- := \max\{y_i - \frac{1}{2}(1 - |y_i|), \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})\},$$

де $y_0 := 1$ iand $y_{s+1} := -1$. Запишемо

$$J_i^- := [y_i^-, y_i] \quad \text{і} \quad J_i^+ := [y_i, y_i^+].$$

Розділемо $1 \leqslant i \leqslant s$ на дві множини. Нехай $i \in A$, якщо існує дві лінійні функції l_{i-} і l_{i+}, такі, що,

$$f|_{J_i^-} = l_{i-} \qquad \text{і} \qquad f|_{J_i^+} = l_{i+}.$$

Інакше $i \notin A$. Нехай N_0 є настільки великим, що для $n \geqslant N_0$,

$$O_{i,n} \subset J_i^- \cup J_i^+ = [y_i^-, y_i^+], \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

і, зокрема, $O_{i,n} \cap O_{i+1,n} = \varnothing$, $1 \leqslant i < s$. Нехай $y_{i,n}^+$ і $y_{i,n}^-$ – правий і лівий кінці $O_{i,n}$, відповідно. Далі $n \geqslant N_0$ і $i \in A$. Через $L_{i,n}^+$, позначимо ламану з трьох ланок, таку, що

$$L_{i,n}^+(-1) = L_{i,n}^+(y_i) = L_{i,n}^+(1) = 0 \quad \text{і} \quad L_{i,n}^+(y_{i,n}^+) = 1,$$

так само, $L^-_{i,n}$, – ламану з трьох ланок, таку, що

$$L^-_{i,n}(-1) = L^-_{i,n}(y_i) = L^-_{i,n}(1) = 0 \quad \text{і} \quad L^-_{i,n}(y^-_{i,n}) = 1,$$

і означимо

$$L_{i,n} := \begin{cases} (l_{i-}(y^+_{i,n}) - l_{i+}(y^+_{i,n}))L^+_{i,n}, & \text{якщо} \quad (-1)^i(l'_{i-} - l'_{i+}) \geqslant 0; \\ (l_{i+}(y^-_{i,n}) - l_{i-}(y^-_{i,n}))L^-_{i,n}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Вочивидь,

$$L_{i,n} \in \Delta^{(2)}(Y_s), \tag{3.5.4}$$

і або $(f + L_{i,n})|_{O_{i,n}} = l_{i-}$, або $(f + L_{i,n})|_{O_{i,n}} = l_{i+}$, так, що $f + L_{i,n}$ лінійна на $O_{i,n}$. Тому, з

$$L_n := \sum_{i\in A} L_{i,n},$$

вбачаємо, що $(f+L_n)|_{O_{i,n}}$ лінійна при кожному $i \in A$. Також, ясно, що $L_n|_{O_{i,n}}$ лінійна при кожному $i \notin A$.

Якщо $M := \max_{i\in A} |l'_{i+} - l'_{i-}|$, то завдяки (3.5.1),

$$|l'_{i+} - l'_{i-}|(y^+_{i,n} - y_i) \leqslant M(y^+_{i,n} - y_i) \leqslant M|O_{i,n}| \leqslant c_1 M\rho_n(y^+_{i,n}),$$

і

$$|l'_{i+} - l'_{i-}|(y_i - y^-_{i,n}) \leqslant c_1 M\rho_n(y^-_{i,n}).$$

Отже

$$|L_{i,n}(x)| \leqslant c_1 M\rho_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

що, зі свого боку, породжує

$$|L_n(x)| \leqslant sc_1 M\rho_n(x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{3.5.5}$$

З іншого боку, для кожного $i \in A$ існує $t^0_i > 0$, таке, що

$$\omega_3(f, t, [y^-_i, y^+_i]) = |l'_{i+} - l'_{i-}|t, \quad t \leqslant t^0_i.$$

Тому, якщо $A \neq \varnothing$, то маємо

$$\omega_3(f, t) \geqslant Mt, \quad t \leqslant t^0 := \min_{i\in A} t^0_i,$$

що, разом з (3.5.5), для всіх $n \geqslant N^0 := \max\{N_0, [1/t^0]\}$, тягне

$$|L_n(x)| \leqslant sc_1\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.5.6}$$

Далі, для $i \notin A$, позначимо $J_i := J_i^-$, якщо $f|_{J_i^+}$ лінійна. Інакше, покладемо $J_i := J_i^+$.

Нам знадобиться допоміжна функція g_n, що складатиметься з f на більшій частині $[-1,1]$. Фактично, вана відрізнятиметься від f лише на $O_{i,n}$-х і J_i-х з $i \notin A$.

Зафіксуємо $i \notin A$ і припустимо, що $J_i := J_i^+$ і, що i неперне, тобто f опукла до низу на J_i. Інші випадки такі ж самі. За лемою 3.5.2, існує лінійна функція $l_{i,n}$, така, що

$$l'_{i,n} \leqslant [y_{i,n}^-, y_i; f], \quad l'_{i,n} \leqslant [y_i, y_{i,n}^+; f], \tag{3.5.7}$$

$$f(y_{i,n}^-) = l_{i,n}(y_{i,n}^-), \tag{3.5.8}$$

$$\|f - l_{i,n}\|_{\overline{O}_i} \leqslant c_2\omega_3(f, |O_{i,n}|), \tag{3.5.9}$$

зокрема,

$$h_{i,n} := l_{i,n}(y_{i,n}^+) - f(y_{i,n}^+) \leqslant c_2\omega_3(f, |O_{i,n}|).$$

Оскільки $i \notin A$, то тоді $E_2(f)_{J_i} > 0$, і можно застосувати лему 3.5.1 з $d_i := d(J_i, f)$ і $g(x, h_{i,n}, f, J_i)$, які нею гарантовані. Візьмемо $N_i \geqslant N^0$ настільки великим, щоб для $n \geqslant N_i$ ми мали б

$$y_{i,n}^+ - y_i < d_i \quad \text{і} \quad c_2\omega_3(f, |O_{i,n}|) < E_2(f)_{J_i},$$

і означимо

$$g_{i,n}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \in J_i^- \backslash O_{i,n}; \\ l_{i,n}, & \text{якщо} \quad x \in O_{i,n}; \\ g(x, h_{i,n}, f, J_i), & \text{якщо} \quad x \in J_i \backslash O_{i,n}. \end{cases}$$

Тоді, згідно (3.5.9),

$$|f(x) - g_{i,n}(x)| \leqslant c_2\omega_3(f, |O_{i,n}|), \quad x \in J_i^- \cup J_i,$$

і нерівність

$$\max_{x \in J_i^- \cup J_i^+} \rho_n(x) \leqslant 2 \min_{x \in J_i^- \cup J_i^+} \rho_n(x),$$

разом з двома першими нерівностями (2.1.11) і (3.5.1), тягнуть

$$|f(x) - g_{i,n}(x)| \leqslant c_4\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in J_i^- \cup J_i. \tag{3.5.10}$$

Також, $g_{i,n}$ неперервна на $J_i^- \cup J_i$, опукла до гори на J_i^- і опукла до низу на J_i, і $g_{i,n}(x) = f(x)$ біля обох кінців $J_i^- \cup J_i$.

Таким чином, для кожного $n \geqslant N := \max_{i \notin A} N_i$, функція

$$g_n(x) := \begin{cases} g_{i,n}(x), & \text{якщо} \quad x \in O_{i,n} \cup J_i \quad \text{з} \quad i \notin A, \\ f(x), & \text{інакше} \end{cases}$$

задовольняє співвідношення

$$g_n \in \Delta^{(2)}(Y_s), \tag{3.5.11}$$

$$|f(x) - g_n(x)| \leqslant c_9 \omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.5.12}$$

$$g_n \quad \text{лінійна на кожному} \quad O_i \quad \text{з} \quad i \notin A. \tag{3.5.13}$$

Збираючи разом (3.5.11)-(3.5.13) з (3.5.4) і (3.5.6), вбачаємо, що

$$f_n := g_n + L_n,$$

– шукана функція. Лему 3.5.3 доведено.

Позначимо другу розділену різницю f в точках t_1, t_2, t_3, через

$$[t_1, t_2, t_3; f] := \frac{[t_1, t_2; f] - [t_2, t_3; f]}{t_1 - t_3}.$$

Нехай N і f_n з леми 3.5.3. Для кожного $n \geqslant N$ і кожного $j = 2, \dots, n-1$ нехай

$$\begin{aligned} p_{j,n} \ &:= f_n(x_{j,n}) + (x - x_{j,n})[x_{j,n}, x_{j-1,n}; f_n] \\ &\quad + (\operatorname{sgn}\Pi(x_{j,n}))(x - x_{j,n})(x - x_{j-1,n}) \\ &\quad\quad \cdot \min\{|[x_{j,n}, x_{j-1,n}, x_{j-2,n}; f_n]|, |[x_{j,n}, x_{j-1,n}, x_{j+1,n}; f_n]|\}, \end{aligned}$$

парабола, що інтерполює f_n в $x_{j,n}$, $x_{j-1,n}$ і або в $x_{j-2,n}$, або в $x_{j+1,n}$. Зразу видно, (див., наприклад, [103]), що шуканий в теоремі сплайн S може бути взятий у формі

$$S|_{I_{j,n}} = p_{j,n}, \ j = 2, \dots, n-1, \quad S|_{I_{1,n}} = p_{2,n} \quad \text{і} \quad S|_{I_{n,n}} = p_{n-1,n}.$$

Теорему 3.5.1 доведено.

3.6 Поточкове наближення многочленами неперервних функцій і функцій з однією точкою перегину

Результати цього підрозділу містяться в [85].

Як вже зазначалося, рівномірні оцінки наближення $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ многочленами $p_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, тобто оцінки велечини

$$E_n^{(2)}(f, Y_s) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \|f - p_n\|,$$

наведено, зокрема, в огляді [112] і в його внутрішніх посиланнях. В цьому підрозділі для $n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{N}_0, \ s \in \mathbb{N}_0$ і $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, оцінемо

$$E_{n,k,r}^{(2)}(f, Y_s) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \left\| \frac{f - p_n}{\rho_n^r \omega_k(f^{(r)}, \rho_n)} \right\|$$

$$= \inf_{p_n\in\mathbb{P}_n\cap\Delta^{(2)}(Y_s)} \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{f(x)-p_n(x)}{\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)},\rho_n(x))}\right|,$$

для $f \in \Delta^{(2)}(Y_s) \cap C^r[-1,1]$ такої, що $f \notin \mathbb{P}_{k+r}$ (і $E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) := 0$, якщо $f \in \mathbb{P}_{k+r} \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$) у випадках: *a*) $r \geqslant 3$ і $s = 1$, *b*) $r = 2$, $k \leqslant 3$ і $s = 1$, *c*) $r = 0$ і $k = 3$. Доречі, для $s \geqslant 2$, з теореми 6.4.1 і [123] випливає, що **ні** для яких $k \geqslant 1$ і $r \geqslant 0$, не можна знайти сталі $C = C(k, r, s)$ і $N = N(k, r, s)$, що залежили б тільки від k, r і s, такі, щоб нерівність

$$E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) \leqslant C, \tag{3.6.1}$$

справджувалася б для всіх $n \geqslant N$ і $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, і для всіх $f \in \Delta^{(2)}(Y_s) \cap C^r[-1,1]$.

Більш того, для $s = 1$, з [109, Теорема 2] випливає, що **ні** для яких $k \geqslant 1$ і $r \geqslant 0$ таких, що $k+r > 2$, і $Y_1 \in \mathbb{Y}_1$, неможливо знайти сталі $C = C(k, r, Y_1)$ і $N = N(k, r, Y_1)$, що залежили б тільки від k, r і Y_1, такі, щоб (3.6.1) виконувалось би для всіх $n \geqslant N$, і для всіх $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r[-1,1]$.

Тимнеменьш, в ціому підрозділі показано, що в усіх трьох вище наведенних випадках (3.6.1) справджується, якщо дозволити одній, чи обом сталим C і N залежити від f. Точніше, тут доведено, що (3.6.1) справджується з C, що залежить тільки від k, r і s, а N залежить від f, Y_s, k і r. Це доведення суттєво спирається на теореми 3.4.2 і 3.5.1 про коопукле поточкове наближення сплайнами. Фактично, тут показано, що, якщо існує відповідне формозберігаюче наближення сплайном, то і многочлен з такою ж оцінкою формозберігаючого наближення означити цілком можливо, див. лему 3.6.1 і теорему 3.6.3, які ми і доводимо в цьому підрозділі, і таким чином, отримуємо наступні дві теореми (це переформульовані теоремами 3.4.3 і 3.5.2, відповідно).

Теорема 3.6.1. *Нехай або $r = 2$ і $k = 1, 2, 3$, або $r > 2$ і $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $Y_1 \in \mathbb{Y}_1$ і будь-якої функції $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r[-1,1]$, існує стала $N = N(f, k, r, Y_1)$, така, що для всіх $n \geqslant N$, справджується нерівність*

$$E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_1) \leqslant c(k, r)$$

де стала $c(k, r)$ залежить тільки від k і r.

Теорема 3.6.2. *Для кожного $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ і будь-якої функції $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ існує стала $N = N(f, Y_s)$, така, що для всіх $n \geqslant N$, справджується нерівність*

$$E^{(2)}_{n,3,0}(f, Y_s) \leqslant c(s)$$

де стала $c(s)$ залежить тільки від s.

Знову нехай $\Sigma_{k,n}$ – множина всіх неперервних на I кусково-поліноміальних функцій (для спрощення, сплайнів) степеня $< k$, на чебишевському розбитті. Тобто, $S \in \Sigma_{k,n}$, якщо

$$S|_{I_j} = p_{j,n} =: p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

де $p_j \in \mathbb{P}_k$, і

$$p_j(x_j) = p_{j+1}(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1;$$

$Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $O_i := O_{i,n}(Y_s) := (x_{j+1}, x_{j-2})$, якщо $y_i \in [x_j, x_{j-1})$; $O = O(n, Y_s) := \cup_{i=1}^{s} O_i$, $O(n, \varnothing) := \varnothing$; $j \in H = H(n, Y_s)$, якщо $I_j \cap O = \varnothing$; і $\Sigma_{k,n}(Y_s) \subseteq \Sigma_{k,n}$ – підмножина таких сплайнів, для яких

$$p_j \equiv p_{j+1}, \quad \text{якщо обидва} \quad j, (j+1) \notin H.$$

Нехай Φ^k, $k \in \mathbb{N}$, – множина всіх k-мажорант, тобто неперервних і неспадних на $[0, \infty)$ функцій $\phi(t)$ таких, що $\phi(0) = 0$ і $t^{-k}\phi(t)$ не зростає при $t > 0$. Відомо (див., наприклад [25, стор. 167]), що для кожної $f \in C[-1, 1]$ існує k-мажоранта $\phi \in \Phi^k$ така, що, для всіх $t \geqslant 0$,

$$\phi(t) \leqslant \omega_k(f, t) \leqslant c(k)\phi(t). \tag{3.6.2}$$

і навпаки, для будь-якої k-мажоранти $\phi \in \Phi^k$ знайдеться $f \in C[-1, 1]$, така, що (3.6.2) справджується для $t \in [0, 2/k]$.

Для $\phi \in \Phi^k$, $\phi \not\equiv 0$, і $S \in \Sigma_{k,n}$, позначимо

$$b_{i,j}(S) := b_{i,j,n}(S) := \frac{\|p_i - p_j\|_{I_i}}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}} \right)^k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \tag{3.6.3}$$

де $h_{i,j} := h_{i,j,n}$ довжина найменьшого замкненого проміжку $I_{i,j} := I_{i,j,n}$, що містить разом I_i і I_j.

Зауваження 3.6.1. *Зауважимо, що, завдяки того, що* $t^{-k}\phi(t)$ *не зростає, маємо* $\phi(t) > 0$*, для* $t > 0$*, отже* (3.6.3) *означено коректно. Також відмітимо, що* $b_{i,j}(S) = a_{i,j}(S)/\varphi(h_j)$*, де*

$$a_{i,j}(S) := \|p_i - p_j\|_{I_i} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}} \right)^k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

означино в [123, (6.1)].

Позначимо

$$b_k(S) := b_{k,n}(S) := \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}(S).$$

Лема 3.6.1. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \Phi^k$, $f \in C[-1,1]$ і $S \in \Sigma_{k,n}$. Якщо*

$$\omega_k(f,t) \leqslant \phi(t),$$

і

$$|f(x) - S(x)| \leqslant \phi(\rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{3.6.4}$$

то

$$b_k(S) \leqslant c(k),$$

де $c(k)$ залежить тільки від k.

Теорема 3.6.3. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \Phi^k$ і $s \in \mathbb{N}_0$. Тоді існують сталі $c = c(k,s)$ і $c_* = c_*(k,s)$ такі, що для кожного $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, знайдеться натуральне число $N(k,Y_s)$, з наступними властивостями. Якщо $n \geqslant N(k,Y_s)$ і*

$$S \in \Sigma_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s), \tag{3.6.5}$$

є така, що

$$b_k(S) \leqslant 1, \tag{3.6.6}$$

то існує многочлен $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ степеня $\leqslant c_* n$, що задовольняє

$$|S(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\phi\left(\rho_n(x)\right), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.7}$$

Зауваження 3.6.2. *Зауважимо, що теорема 3.6.3 є трівіалною для $k = 1$.*

Надалі сталі c або абсолютні, або можуть залежити тільки від k, r і s. Сталі C можуть залежити також від інших параметрів, які ми будемо вказувати в дужках. Зокрема, $C(k,r,s) = c$.

Властивості $b_{i,j}$-х. Доведення леми 3.6.1

Нехай $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тоді,

$$b_{i,j}(S) \leqslant \frac{\|p_i - f\|_{I_i}}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k + \frac{\|f - p_j\|_{I_i}}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k := J_1 + J_2.$$

Тепер з (2.1.11) і (3.6.4) маємо $\|p_i - f\|_{I_i} \leqslant \phi(\|\rho_n\|_{I_i}) \leqslant \phi(h_i)$, і отже

$$J_1 \leqslant \frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k \leqslant 1,$$

де ми скористалися тим фактом, що, якщо $h_i \leqslant h_j$, то $\varphi(h_i) \leqslant \varphi(h_j)$, а, якщо $h_i > h_j$, то $\frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_j)} h_j^k \leqslant h_i^k$.

Що до J_2, то бачимо, що

$$\omega_k(f - p_j, t) = \omega_k(f, t) \leqslant \phi(t),$$

а отже, завдяки [86, Підрозділ 3 (6.17)], візьмемо $x_0 := x_j$ і $h := h_j/(k-1)$, і для кожного $x \in I_i$ запишемо

$$|f(x) - p_j(x)| \leqslant c \left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k \left(\varphi(h_j) + \|f - p_j\|_{I_j}\right).$$

Застосовуючи (3.6.4), отримуємо

$$J_2 \leqslant c.$$

Лему 3.6.1 доведено.

Надалі, за винятком леми 3.6.3, n фіксоване, і тому, де це ясно, ми будемо його не вказувати, наприклад, писатимемо ρ замість $\rho_n(x)$.

Нехай $\Sigma^1_{k,n} \subseteq \Sigma_{k,n}$ – підмножина всіх неперервно диференційовних сплайнів $S \in \Sigma_{k,n}$, тобто $S \in \Sigma^1_{k,n}$ має додаткову властивість

$$p_j'(x_j) = p_{j+1}'(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Зауважимо, що якщо $k = 1$, або $k = 2$, то кожен $S \in \Sigma^1_{k,n}$ це лінійна функція. Зокрема, твердження наступної леми 3.6.2 є трівіальним для $k = 1$ і $k = 2$, і ми формулюємо його лише для $k \geqslant 3$. Лема 3.6.2 встановлює важливу властивість $b_k(S)$ і є аналогом [123, Лема 11].

Лема 3.6.2. *Нехай $k \geqslant 3$, $\phi \in \Phi^k$ і $S \in \Sigma^1_{k,n}$. Тоді,*

$$b_k(S) \leqslant c \left\| \frac{\rho^2 S''}{\varphi(\rho)} \right\|_\infty,$$

де $\|\cdot\|_\infty$ – $\operatorname{ess\,sup}$ – норма на $[-1, 1]$.

Доведення. Без втрати загальності припустимо, що

$$\left\| \frac{\rho^2 S''}{\varphi(\rho)} \right\|_\infty = 1. \tag{3.6.8}$$

Оскільки

$$p_j(x) = S(-1) + S'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x_j} (x-u) S''(u)du + \int_{x_j}^{x} (x-u) p_j''(u)du, \quad j = 1, ..., n,$$

то маємо

$$p_j(x)-p_i(x)=\int\limits_{x_i}^{x_j}(x-u)S''(u)du+\int\limits_{x_j}^{x}(x-u)p_j''(u)du-\int\limits_{x_i}^{x}(x-u)p_i''(u)du$$
$$=: A_1(x)+A_2(x)+A_3(x).$$

Вочевидь, лема безпосередньо випливає з нерівності

$$|A_\nu(x)|\leqslant c\varphi(h_j)\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k,\quad x\in I_i,\quad \nu=1,2,3. \tag{3.6.9}$$

Доведемо (3.6.9) для $\nu=3$. Дійсно, якщо $u\in I_i$, то завдяки (3.6.8),

$$|p_i''(u)|=|S''(u)|\leqslant\frac{c\varphi(h_i)}{h_i^2}.$$

Тому, для $x\in I_i$,

$$|A_3(x)|\leqslant\frac{c\varphi(h_i)}{h_i^2}\left|\int\limits_{x_i}^{x}(x-u)du\right|=c\varphi(h_i)\leqslant c\varphi(h_{i,j})\leqslant c\varphi(h_j)\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k.$$

Тепер, якщо $u\in I_j$, то за (3.6.8),

$$|p_j''(u)|=|S''(u)|\leqslant\frac{c\varphi(h_j)}{h_j^2},$$

і оскільки p_j'' є многочленом степеня $\leqslant k-3$, маємо

$$|p_j''(u)|\leqslant\frac{c\varphi(h_j)}{h_j^2}\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^{k-3},\quad u\in I_{i,j}.$$

Тому, для $x\in I_i$,

$$|A_2(x)|\leqslant\frac{c\varphi(h_j)}{h_j^2}\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^{k-3}\left|\int\limits_{x_j}^{x}(x-u)du\right|\leqslant c\varphi(h_j)\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^{k-1}.$$

Насамкінець, оцінемо $|A_1(x)|$. Для $x\in I_i$, маємо

$$|A_1(x)|\leqslant h_{i,j}\left|\int\limits_{x_i}^{x_j}\frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)}du\right|:=h_{i,j}B_1.$$

Якщо $|x_j|\geqslant|x_i|$, то $h_j\leqslant c\rho_n(u)$, $u\in I_{i,j}$, так, що

$$\varphi(\rho_n(u))\leqslant c\frac{\rho_n^k(u)}{h_j^k}\varphi(h_j),\quad u\in I_{i,j},$$

Отже, якщо $x_i x_j \geqslant 0$, то

$$B_1 = \int_{|x_i|}^{|x_j|} \frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)} du \leqslant c \frac{\varphi(h_j)}{h_j^k} \int_{|x_i|}^{|x_j|} \rho_n^{k-2}(u) du \leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}^{k-1}}{h_j^k}, \tag{3.6.10}$$

де ми застосували нерівність $\rho_n(u) \leqslant h_{i,j}$ для $u \in [|x_i|, |x_j|]$. Якщо, з іншого боку, $x_i x_j < 0$, то (згадаємо, що $|x_j| \geqslant |x_i|$)

$$B_1 \leqslant 2 \int_0^{|x_j|} \frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)} du \leqslant c \frac{\varphi(h_j)}{h_j^k} \int_0^{|x_j|} \rho_n^{k-2}(u) du \leqslant c\varphi(h_j) \frac{|x_j|^{k-1}}{h_j^k} \leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}^{k-1}}{h_j^k}.$$

Інакше $|x_i| > |x_j|$, і ми маємо $\rho_n(u) \geqslant ch_i$, $u \in I_{i,j}$. Якщо $x_j x_i \geqslant 0$, то $\rho_n(u) \leqslant h_j$, $u \in I_{i,j}$, так, що $\varphi(\rho_n(u)) \leqslant \varphi(h_j)$, $u \in I_{i,j}$. Тоді, за (**??**),

$$h_j^2 \leqslant c\rho_n(x_j) \leqslant c\rho_n(x_i) \left(|x_j - x_i| + \rho_n(x_i)\right) \leqslant ch_i h_{i,j} \leqslant ch_{i,j} \rho_n(u).$$

Отже,

$$\rho_n^{-1}(u) \leqslant c \frac{h_{i,j}}{h_j^2}, \quad u \in I_{i,j}, \tag{3.6.11}$$

що, зі свого боку, породжує

$$\begin{aligned} B_1 &\leqslant c\varphi(h_j) \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{du}{\rho_n^2(u)} \leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}}{h_j^2} \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{du}{\rho_n(u)} \\ &\leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}^2}{h_j^3} \leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}^{k-1}}{h_j^k}, \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

де ми застосували нерівність

$$\begin{aligned} \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{du}{\rho_n(u)} &\leqslant n \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2n \frac{|x_i| - |x_j|}{\sqrt{1-|x_j|} + \sqrt{1-|x_i|}} \\ &\leqslant 2n \frac{|x_i| - |x_j|}{\sqrt{1-|x_j|}} \leqslant c \frac{h_{i,j}}{h_j}. \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Насамкінець, якщо $x_j x_i < 0$ (згадаємо, що $|x_j| < |x_i|$), то

$$\begin{aligned} B_1 &= \left| \int_{x_i}^{x_j} \frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)} du \right| = \int_{-|x_j|}^{|x_j|} \frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)} du + \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{\varphi(\rho_n(u))}{\rho_n^2(u)} du \\ &\leqslant ch_j^{-k} \varphi(h_j) \int_{-|x_j|}^{|x_j|} \rho_n^{k-2}(u) du + c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}}{h_j^2} \int_{|x_j|}^{|x_i|} \frac{du}{\rho_n(u)} \\ &\leqslant c\varphi(h_j) \left(\frac{|x_j|^{k-1}}{h_j^k} + \frac{h_{i,j}^2}{h_j^3} \right) \leqslant c\varphi(h_j) \frac{h_{i,j}^{k-1}}{h_j^k}, \end{aligned}$$

де в першій нерівності для першого доданку ми скористалися тим, що $h_j \leqslant c\rho_n(u)$, $-|x_j| \leqslant u \leqslant |x_j|$ і застосували (3.6.10) в другій нерівності, тоді як до другого доданку ми приклали (3.6.11), і використали (3.6.12) і (3.6.13) в другій нерівності. Це завершує доведення (3.6.9). Лему 3.6.2 доведено.

Щоб довести лему 3.6.4 нижче, доведемо лему 3.6.3.

Лема 3.6.3. *Нехай $k \geqslant 3$, $\phi \in \Phi^k$, $S \in \Sigma_{k,n/2}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, де n парне, і*

$$\|p_{l,n/2} - p_{l-1,n/2}\|_{I_{l,n/2} \cup I_{l-1,n/2}} \leqslant \phi(x_{l-2,n/2} - x_{l,n/2}), \quad 2 \leqslant l \leqslant n/2,$$

де

$$S|_{I_{l,n/2}} =: p_{l,n/2}, \quad l = 1, \dots, n/2.$$

Тоді існує $\tilde{S} \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, такий, що

$$|S(x) - \tilde{S}(x)| \leqslant c\,\phi(\rho), \quad x \in [-1, 1]. \tag{3.6.14}$$

Доведення. Для $2 \leqslant j \leqslant n$, покладемо

$$a_j(x) := \frac{1}{2}\frac{x_{j-1} - x_{j-2}}{x_{j-1} - x_j}\frac{S'(x_{j-1} + 0) - S'(x_{j-1} - 0)}{x_j - x_{j-2}}(x - x_j)^2, \quad \text{і} \quad a_1(x) :\equiv 0,$$

і для $1 \leqslant j \leqslant n-1$, покладемо

$$b_j(x) := \frac{1}{2}\frac{x_j - x_{j+1}}{x_j - x_{j-1}}\frac{S'(x_j + 0) - S'(x_j - 0)}{x_{j+1} - x_{j-1}}(x - x_{j-1})^2, \quad \text{і} \quad b_n(x) :\equiv 0.$$

Тоді,

$$\tilde{S}(x) = S(x) + a_j(x) + b_j(x), \quad x \in I_j,$$

є шуканою функцією. Дійсно, прямі підрахунки показують, що

$$a_{j+1}(x_j) = b_j(x_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

тоді як

$$b_{j+1}(x_j) = a_j(x_j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Отже,

$$\tilde{S}(x_j + 0) = \tilde{S}(x_j - 0), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Також,

$$\begin{aligned}\tilde{S}'(x_j + 0) &= \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}S'(x_j - 0) + \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}S'(x_j + 0)\\ &= \tilde{S}'(x_j - 0), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1,\end{aligned}$$

так, що $\tilde{S} \in \Sigma^1_{k,n}$.

Нам треба довести, що

$$\tilde{S} \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s). \tag{3.6.15}$$

Щоб довести, що $\tilde{S} \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s)$, треба, з $p_j := \tilde{S}|_{I_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, показати, що якщо $j, j+1 \notin H(n, Y_s)$, то $p_j = p_{j+1}$.

Для цього згадаємо, що $p_{l,n/2} := S|_{I_{l,n/2}}$, $l = 1, \ldots, n/2$, і розглянемо два випадки. Або j парне, тоді $j/2 \notin H(n/2, Y_s)$ і $j/2+1 \notin H(n/2, Y_s)$. І отже, $p_{j/2,n/2} = p_{j/2+1,n/2}$, що тягне $S'(x_{j+\nu}+0) = S'(x_{j+\nu}-0)$, для $\nu = 0, \pm 1$, тобто $a_j = a_{j+1} = b_j = b_{j+1} \equiv 0$. І таким чином, $p_j = p_{j+1}$, як і вимагалося. Або j непарне, тоді x_j не є вузлом S, і тоді існує точка перегину y_i на проміжку $[x_{(j+1)/2,n/2}, x_{(j-1)/2,n/2})$, така, що $(j+\nu)/2 \notin H(n/2, Y_s)$, for $\nu = 3, \pm 1$. Отже,

$$S'(x_{(j+1)/2,n/2}+0) = S'(x_{(j+1)/2,n/2}-0),$$

і

$$S'(x_{(j-1)/2,n/2}+0) = S'(x_{(j-1)/2,n/2}-0),$$

що, в свою чергу, породжує $a_j = b_{j+1} \equiv 0$. Також, $S'(x_j+0) = S'(x_j-0)$, оскільки x_j не вузел S, що тягне $a_{j+1} = b_j \equiv 0$. Таким чином, заключаємо, що $\tilde{S}(x) = S(x) = p_{(j+1)/2,n/2}(x)$, для $x \in [x_{(j+1)/2,n/2}, x_{(j-1)/2,n/2}]$. Це завершує доведення того, що

$$\tilde{S} \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s). \tag{3.6.16}$$

Насамкінець,

$$a''_j(x) = \frac{x_{j-2} - x_{j-1}}{(x_{j-2} - x_j)(x_{j-1} - x_j)} \big(S'(x_{j-1}+0) - S'(x_{j-1}-0)\big),$$

і

$$b''_j(x) = \frac{x_j - x_{j+1}}{(x_{j-1} - x_{j+1})(x_{j-1} - x_j)} \big(S'(x_j+0) - S'(x_j-0)\big),$$

так, що ми бачимо, що

$$\tilde{S}''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1] \backslash \{x_j\}_{j=1}^{n-1}. \tag{3.6.17}$$

Збираючи (3.6.16) і (3.6.17), отримуємо (3.6.15).

Для завершення доведення згадаємо, що для непарного j, $S'(x_j+0)-S'(x_j-0)=0$, і якщо j парне, то за нерівністю Маркова

$$\begin{aligned}|S'(x_j+0)-S'(x_j-0)| &= |p'_{j/2,n/2}(x_j)-p'_{j/2+1,n/2}(x_j)|\\ &\leqslant \frac{2k^2}{h_{j/2+1,n/2}+h_{j/2,n/2}}\|p_{j/2,n/2}-p_{j/2+1,n/2}\|_{I_{j/2+1,n/2}\cup I_{j/2,n/2}}\\ &\leqslant \frac{2k^2}{h_{j/2+1,n/2}+h_{j/2,n/2}}\phi(h_{j/2+1,n/2}+h_{j/2,n/2})\leqslant c\,\frac{\phi(h_j)}{h_j}.\end{aligned}$$

Це породжує (3.6.14) і завершує доведення леми. Лему 3.6.3 доведено.

Лема 3.6.4. *Для кожного $S\in\Sigma_{k,n}(Y_s)\cap\Delta^{(2)}(Y_s)$ такого, що*

$$b_k(S)\leqslant 1, \tag{3.6.18}$$

існує $\tilde S\in\Sigma^1_{k,2n}(Y_s)\cap\Delta^{(2)}(Y_s)$, такий, що

$$b_{k,2n}(\tilde S)\leqslant c. \tag{3.6.19}$$

Доведення. З (3.6.3) і (3.6.18) випливає, що

$$\|p_j-p_{j-1}\|_{I_j\cup I_{j-1}}\leqslant c\phi(x_{j-2}-x_j),\quad 2\leqslant j\leqslant n.$$

Отже, лема 3.6.3 гарантує існування сплайна $\tilde S\in\Sigma^1_{k,2n}(Y_s)\cap\Delta^{(2)}(Y_s)$, такого, що

$$|S(x)-\tilde S(x)|\leqslant c\,\phi(\rho_n(x)),\quad x\in[-1,1], \tag{3.6.20}$$

і ми маємо перевірити лише (3.6.19). Для $\nu,\mu=1,\dots,2n$, покладемо $j:=\lceil\nu/2\rceil$, і $i:=\lceil\mu/2\rceil$. Тоді, за (3.6.3) і (3.6.18),

$$\begin{aligned}b_{\mu,\nu,2n}(\tilde S) &= \frac{\|p_{\mu,2n}-p_{\nu,2n}\|_{I_{\mu,2n}}}{\varphi(h_{\nu,2n})}\left(\frac{h_{\nu,2n}}{h_{\mu,\nu,2n}}\right)^k\leqslant c\frac{\|p_{\mu,2n}-p_{\nu,2n}\|_{I_{\mu,2n}}}{\varphi(h_j)}\left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k\\ &\leqslant c\,b_{i,j}(S)+c\frac{\|p_{\mu,2n}-p_i\|_{I_{\mu,2n}}}{\varphi(h_j)}\left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k+c\frac{\|p_{\nu,2n}-p_j\|_{I_{\mu,2n}}}{\varphi(h_j)}\left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k\\ &=: c+J_1+J_2.\end{aligned} \tag{3.6.21}$$

Тепер, за (3.6.20),

$$J_1\leqslant c\frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_j)}\left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k\leqslant c, \tag{3.6.22}$$

де ми скористалися фактом, що якщо $h_i \leqslant h_j$, то $\varphi(h_i) \leqslant \varphi(h_j)$, а якщо $h_i > h_j$, то $\frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_j)} h_j^k \leqslant h_i^k$.

Насамкінець,

$$J_2 \leqslant c \frac{\|p_{\nu,2n} - p_j\|_{I_{\mu,\nu,2n}}}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k \leqslant c \left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k \frac{\|p_{\nu,2n} - p_j\|_{I_{\nu,2n}}}{\varphi(h_j)} \left(\frac{h_j}{h_{i,j}}\right)^k \leqslant c, \quad (3.6.23)$$

де у другій нерівності ми скористалися фактом, що обидва многочлена є степеня $< k$, і в останній нерівності ми знову застосували (3.6.20).

Підставляння (3.6.22) і (3.6.23) у (3.6.21), завершує доведення леми. Лему 3.6.4 доведено.

Допоміжні леми

Перший потрібний нам факт – наслідок 3.6.1, що нижче, випливає з наступних трьох лем.

Лема 3.6.5. *Нехай $P \in \mathbf{P}_k$ такий, що*

$$P(x) \geqslant 0 = P(0), \quad x \in [-1, 1].$$

Тоді

$$\int_0^1 P(x)dx \leqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) \|P\| \quad (3.6.24)$$

і, так само,

$$\int_{-1}^0 P(x)dx \leqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) \|P\|. \quad (3.6.25)$$

Доведення. Для $k = 1$ і $k = 2$ припущення леми вірно для $P \equiv 0$, тому нехай $k \geqslant 3$.

Доведемо (3.6.24), оскільки інша нерівність симетрична.

За нерівністю Бернштейна,

$$|P'(x)| \leqslant \frac{k-1}{2\sqrt{1-x^2}} \|P\|, \quad x \in (-1, 1).$$

Покладемо $t_0 := \frac{2}{k}$ і отримаємо

$$\int_0^{t_0} P(x)dx \int_0^{t_0} \int_0^x P'(u)dudx$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|P\|(k-1) \int_0^{t_0} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} dudx \leqslant \frac{(k-1)t_0^2}{4\sqrt{1-t_0^2}} \|P\| \leqslant \frac{1}{k}\|P\|.$$

Тому

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^{t_0} P(x)dx + \int_{t_0}^1 P(x)dx$$
$$\leqslant \int_0^{t_0} P(x)dx + (1-t_0)\|P\| \leqslant \|P\|\left(\frac{1}{k}+1-t_0\right) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\|P\|.$$

Лему 3.6.5 доведено.

Лема 3.6.6. *Нехай $P \in \mathbf{P}_k$ такий, що*

$$xP'(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1].$$

Тоді існує функція $g := g_{_P} \in C^\infty[-1,1]$, така, що

$$xg'(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \qquad g(-1) = P(-1) \quad \text{і} \quad g(1) = P(1),$$
$$\|g'\| \leqslant c\|P'\|, \qquad g'(x) \equiv 0, \quad x \in [-1/2k, 1/2k]\,,$$

і яка задовольняє рівність

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 P(x)dx.$$

Доведення. Без втрати загальності припустимо, що $P(0) = 0$ і $P(-1) \leqslant P(1)$. Нехай $\sigma \in C^\infty(-\infty,\infty)$ незростаюча функція така, що

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \geqslant 1 \\ 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Нехай

$$\bar{g}(x) := P(-1) + \sigma(kx)(P(1) - P(-1)),$$

і

$$\underline{g}(x) := P(x)(\sigma(kx) + \sigma(-kx)).$$

Тоді випливає, що шукана функція g може бути взята у формі

$$g = \lambda\bar{g} + (1-\lambda)\underline{g},$$

з належним $\lambda \in [0,1]$. Дійсно, обидві $\bar{g}$ і $\underline{g}$ задовольняють всім вимогам до g за винятком останньої. Тепер,

$$\int_{-1}^1 \underline{g}(x)dx \leqslant \int_{-1}^1 P(x)dx$$

і

$$\int_{-1}^{1}\bar{g}(x)dx \geqslant \left(\int_{-1}^{0}+\int_{1/k}^{1}\right)\bar{g}(x)dx = P(-1)+\left(1-\frac{1}{k}\right)P(1)$$
$$\geqslant \int_{-1}^{0}P(x)dx+\left(1-\frac{1}{k}\right)P(1) \geqslant \int_{-1}^{1}P(x)dx,$$

де в останній нерівності ми застосували лему 3.6.5. Лему 3.6.6 доведено.

Лема 3.6.7. *Для $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ і $k \in \mathbb{N}$, існує стала $N(k,Y_s)$ така, що якщо $n \geqslant N(k,Y_s)$ і $S \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ задовольняє*

$$|S''(x)| \leqslant \frac{\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1],\ x \neq x_j,$$

де $\phi \in \Phi^k$, то знайдеться функція $G \in C^1[-1,1],$, така, що

$$G \in C^2(x_j, x_{j-1}), \quad j = 1,\dots n, \qquad G \in \Delta^{(2)}(Y_s),$$
$$|G''(x)| \leqslant c\,\frac{\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1],\ x \neq x_j, \qquad |S(x)-G(x)| \leqslant c\,\phi(\rho), \quad x \in [-1,1],$$

і

$$G''(x) \equiv 0, \quad x \in O_{i,cn}(Y_s), \quad i = 1,\dots,s.$$

Доведення. Оскільки ми дозволяємо N залежити від Y_s, припускаємо, що N настільки велике, що для всіх $n \geqslant N$, маємо $O_i \cap O_{i+1} = \varnothing$, $1 \leqslant i < s$.

Означимо похідну G', і тоді $G(x) := S(-1) + \int_{-1}^{x} G'(u)du$. Для цього, для кожного i нехай d_i – відстань від y_i до найближчого кінця O_i, тоді покладемо

$$G'(x) := S'(x), \quad x \in [-1,1] \setminus \cup_{i=1}^{s} [[y_i - d_i, y_i + d_i].$$

Для

$$p_i := S|_{O_i}, \quad i = 1,\dots,s,$$

позначимо $P_i(t) := p_i'(d_i t + y_i)$, $t \in [-1,1]$, і нехай

$$g_i(t) := \begin{cases} g_{P_i}, & \text{якщо} \quad tP_i'(t) \geqslant 0, \quad t \in [-1,1], \\ -g_{-P_i}, & \text{якщо} \quad tP_i'(t) \leqslant 0, \quad t \in [-1,1], \end{cases}$$

де функцію g_P означино в лемі 3.6.6. Насамкінець, покладемо

$$G'(x) := g_i\left(\frac{x-y_i}{d_i}\right), \quad x \in [y_i - d_i, y_i + d_i], \quad i = 1,\dots,s.$$

Легко перевірити, що G є шуканою функцією. Лему 3.6.7 доведено.

В наступній лемі 3.6.8 наведемо кілька необхідних нам нерівностей з леми 3.3.1.

Лема 3.6.8. *Нехай $b \in \mathbb{N}$. Для кожного $j \in H$ існує многочлен τ_j степеня $\leqslant cn$, $c = c(b)$, такий, що*

$$\tau_j''(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \tag{3.6.26}$$

$$|\,(x-x_j)_+ - \tau_j(x)| \leqslant C(b,s)h_j\Gamma_j^b(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3.6.27}$$

де, нагадаємо,

$$(x-x_j)_+ := \begin{cases} x - x_j, & \text{якщо} \quad x \geqslant x_j, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad \Gamma_j(x) := \frac{h_j}{|x-x_j| + h_j}.$$

Лема 3.6.9. *Нехай задані $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \Phi^k$ і $G \in \Delta^{(1)}(Y) \cap C^1[-1,1]$ така, що $G \in C^2(x_j, x_{j-1})$, $j = 1,\dots,n$. Якщо G є лінійною функцією l_i на кожному O_i, $i = 1,...,s$, і*

$$|G''(x)| \leqslant \frac{\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1]\backslash\{x_j\}_{j=1}^{n-1}, \tag{3.6.28}$$

то знайдеться многочлен $P_{\tilde{n}} \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, степеня $\tilde{n} \leqslant cn$, такий, що

$$|G(x) - P_{\tilde{n}}(x)| \leqslant c\,\phi(\rho), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.29}$$

Доведення. Без втрати загальності припустимо, що n парне і, що твердження леми справджується з $n/2$ замість n, тобто припустимо, що $G \in C^2(x_{2j}, x_{2j-2})$, $j = 1,...,n/2$, і, що G лінійна функція l_i на кожному $O_{i,n/2}(Y_s)$, $i = 1,...,s$.

Нехай L – ламана, що інтерполює G в x_j, $j = 0,...,n$. Ясно, що $L \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, оскільки G лінійна функція на кожному $O_{i,n/2}(Y_s)$. Тоді, з

$$G_j := [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, G](x_{j-1} - x_{j+1}) = \frac{G(x_{j-1}) - G(x_j)}{x_{j-1} - x_j} - \frac{G(x_{j+1}) - G(x_j)}{x_{j+1} - x_j},$$

ламана L може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned} L(x) &= G(-1) + [x_n, x_{n-1}, G](x+1) + \sum_{j=1}^{n-1} G_j\,(x-x_j)_+ \\ &= G(-1) + [x_n, x_{n-1}, G](x+1) + \sum_{j\in H} G_j\,(x-x_j)_+, \end{aligned} \tag{3.6.30}$$

де в останній рівності ми скористалися припущенням, що G лінійна функція на кожному $O_{i,n/2}(Y_s)$.

Оскільки $G \in C^1[x_{j+1}, x_{j-1}]$ і $G \in C^2\big((x_{j+1}, x_j) \cup (x_j, x_{j-1})\big)$, то за (3.6.28), маємо

$$|G_j| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x \in (x_{j+1}, x_{j-1}) \setminus \{x_j\}} |G''(x)|(x_{j-1} - x_{j+1}) \leqslant c \frac{\phi(h_j)}{h_j}. \tag{3.6.31}$$

Аналогічно, з (3.6.28) і (2.1.11) випливає, що для всіх $x \in [x_j, x_{j-1}]$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\begin{aligned} |G(x) - L(x)| &= \big|[x, x_j, x_{j-1}, G](x - x_j)(x - x_{j-1})\big| \\ &\leqslant \frac{1}{2}(x - x_j)(x - x_{j-1})|G''(\theta)| \leqslant c\,\phi(h_j) \leqslant c\,\phi(\rho), \end{aligned} \tag{3.6.32}$$

де $\theta \in (x_j, x_{j-1})$.

Нехай

$$P_{\tilde{n}}(x) := G(-1) + [x_n, x_{n-1}, G](x + 1) + \sum_{j \in H} G_j\, \tau_j(x), \tag{3.6.33}$$

де τ_j многочлени з леми 3.6.8 з $b = k + 3$. Оскільки $\Pi(x_j)G_j \geqslant 0$, $j \in H$, то, завдяки (3.6.26), $P_{\tilde{n}} \in \Delta^{(2)}(Y_s)$.

Тепер, за (3.6.27) і (2.1.11),

$$\begin{aligned} |(x - x_j)_+ - \tau_j(x)| &\leqslant c\,h_j \left(\frac{h_j}{|x - x_j| + h_j}\right)^{k+3} \leqslant c\,h_j^{2-k} \frac{h_j^{2k+2}}{(|x - x_j| + h_j)^{k+3}} \\ &\leqslant c\,\frac{h_j^{2-k}}{(|x - x_j| + \rho)^2} \min\{\rho^{k+1}, h_j^{k+1}\}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi \in \Phi^k$, то

$$\varphi(h_j) \leqslant \frac{h_j^k}{\min\{\rho^k, h_j^k\}} \varphi(\rho),$$

і ми отримуємо

$$\begin{aligned} |L(x) - P_{\tilde{n}}(x)| &\leqslant \left| \sum_{j \in H} G_j \big((x - x_j)_+ - \tau_j(x)\big) \right| \\ &\leqslant c \sum_{j \in H} \phi(h_j) \frac{h_j^{1-k}}{(|x - x_j| + \rho)^2} \min\{\rho^{k+1}, h_j^{k+1}\} \\ &\leqslant c\,\varphi(\rho) \sum_{j \in H} \frac{h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2} \min\{\rho, h_j\} \\ &\leqslant c\,\rho\,\varphi(\rho) \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2} \leqslant c\,\rho\,\varphi(\rho) \int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2} = c\,\phi(\rho). \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

На завершення, оцінемо $G - P_{\tilde{n}}$ для $x \in [-1, 1]$. Маємо

$$|G(x) - P_{\tilde{n}}(x)| \leqslant |G(x) - L(x)| + |L(x) - P_{\tilde{n}}(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho) + |L(x) - P_{\tilde{n}}(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho).$$

Лему 3.6.9 доведено.

Наступний наслідок 3.6.1 лем 3.6.7 і 3.6.9, є суттєвим у доведенні теореми 3.6.3 .

Наслідок 3.6.1. *Нехай задані* $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $k \in \mathbb{N}$ *і* $\phi \in \Phi^k$. *Якщо* $S \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ *такий, що*

$$|S''(x)| \leqslant \frac{\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1] \backslash \{x_j\}_{j=1}^{n-1},$$

то існує многочлен $P_{\tilde{n}} \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, *степеня* $\tilde{n} \leqslant cn$, *такий, що*

$$|S(x) - P_{\tilde{n}}(x)| \leqslant c\,\phi(\rho), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.35}$$

Допоміжні многочлени

Для Y_s, $s > 0$, згадаємо, що $\Pi(x) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i)$, і покладемо

$$\delta(x) := \operatorname{sgn} \Pi(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.36}$$

Нехай

$$\pi(x) := \prod_{i=1}^{s} \frac{|x - y_i|}{|x - y_i| + \rho}. \tag{3.6.37}$$

Наступна лема доводиться з використанням аргументів аналогічних до [123, Лема 10].

Лема 3.6.10. *Нехай* E *– проміжок, що об'єднує* $l \geqslant 12s$ *проміжків* I_j, *і нехай множина* $J \subseteq E$ *складається з* $1 \leqslant \mu \leqslant l/4$ *цих* I_j. *Тоді існує многочлен* $\tilde{Q}_n(x) = \tilde{Q}_n(x, E, J)$, *степеня* $\leqslant cn$, *такий, що*

$$\tilde{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant c_1 \frac{l}{\mu} \left(\frac{\rho}{\max\{\rho, \operatorname{dist}(x, E)\}} \right)^{25(s+1)+k} \frac{\pi(x)}{\rho^2}, \quad x \in J \cup ([-1,1] \backslash E), \tag{3.6.38}$$

(з можливо $c_1 \leqslant 1$*)*

$$\tilde{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant -\frac{\pi(x)}{\rho^2}, \quad x \in E \backslash J, \tag{3.6.39}$$

$$|\tilde{Q}_n(x)| \leqslant c\, l^{4k+6} \rho^{k+1} \sum_{j: I_j \subseteq E} \frac{h_j^{k+1}}{(|x - x_j| + \rho)^{2k+2}}, \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.40}$$

Модифікуємо лему 3.6.10 у лему 3.6.11.

Лема 3.6.11. *Нехай E – проміжок, що об'єднує $l \geqslant 12s$ проміжків I_j, і нехай множина $J \subseteq E$ складається з $1 \leqslant \mu \leqslant l/4$ цих I_j. Тоді існує многочлен $Q_n(x) = Q_n(x, E, J)$ степеня $\leqslant cn$, такий, що*

$$Q_n''(x)\delta(x) \geqslant c_1 \frac{l}{\mu} \left(\frac{\rho}{\max\{\rho, \operatorname{dist}(x, E)\}} \right)^{25(s+1)+2k} \frac{\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \qquad x \in J \cup ([-1,1]\backslash E), \tag{3.6.41}$$

(*з можливо* $c_1 \leqslant 1$)

$$Q_n''(x)\delta(x) \geqslant -\frac{\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in E\backslash J, \tag{3.6.42}$$

$$|Q_n(x)| \leqslant c\, l^{4k+6} \rho\, \varphi(\rho) \sum_{j: I_j \subseteq E} \frac{h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2}, \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.43}$$

Доведення. Через j_0 і $j^0 = j_0 + l - 1$ позначимо найменьше і найбільше ціле j, таке, що $I_j \subseteq E$. Запишемо $j^* := j_0 + [l/2]$ і припустимо, що $j^* \leqslant n/2$ (якщо $j^* > n/2$, то це зеркальний випадок).

Покладемо

$$Q_n(x) := \tilde{Q}_n(x) 8^{-k} \varphi(h_{j^*}),$$

де $\tilde{Q}_n$ многочлен з леми 3.6.10. Доведемо (3.6.41). Якщо $j \leqslant j^*$, то трівіаяльно маємо $h_j \leqslant h_{j^*}$. З іншого боку, якщо $j^0 \geqslant j > j^*$, то

$$\frac{h_j}{h_{j^*}} = \frac{\sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin\left(j^* - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}} \leqslant \frac{j - \frac{1}{2}}{j^* - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{j_0 + l - \frac{3}{2}}{j_0 + [\frac{l}{2}] - \frac{1}{2}} < 2, \tag{3.6.44}$$

де у першій нерівності ми скористалися фактом, що $\frac{\sin x}{x}$ спадає на $x \in [0, \pi]$. Тому,

$$\rho < 2h_{j^*}, \quad \forall x \in E,$$

що, оскільки $\varphi \in \Phi^k$, в свою чергу, породжує,

$$\varphi(h_{j^*}) \geqslant 2^{-k} \varphi(\rho), \quad x \in E. \tag{3.6.45}$$

Разом (3.6.38) і (3.6.45) тягнуть (3.6.41) для $x \in J$. Також, якщо $x \in [-1,1]\backslash E$ і $h_{j^*} \geqslant \rho$, то (3.6.41) випливає з (3.6.38). Таким чином заключаємо, що $h_{j^*} < \rho$ (що може трапитися лише коли $x \in [-1, x_{j^0})$) і отримуємо

$$\varphi(h_{j^*}) \geqslant \varphi(\rho) \frac{h_{j^*}^k}{\rho^k} \geqslant 2^{-k} \varphi(\rho) \frac{h_{j^0}^k}{\rho^k} \geqslant c\, \varphi(\rho) \frac{\rho^k}{(|x - x_{j^0}| + \rho)^k} \geqslant c\, \varphi(\rho) \frac{\rho^k}{(\max\{\rho, \operatorname{dist}(x, E)\})^k},$$

де до другої нерівності ми приклали (3.6.44) а до четвертої (2.1.11). Отже, знову (3.6.38) тягне (3.6.41).

Доведемо (3.6.42). Для цього побачимо, що якщо $Q_n''(x)\delta(x) \geqslant 0$, то нерівність (3.6.42) очевидна. Більш того, за означенням $\tilde{Q}_n$ (див. [123, Доведення леми 10]), якщо $j_0 \leqslant l$, то $\tilde{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant 0$, а отже і $Q_n''(x)\delta(x) \geqslant 0$. Припустимо, що $j_0 > l$. Тепер, як вище

$$\frac{h_{j*}}{h_{j_0}} \leqslant \frac{j_0 + [\frac{l}{2}] - \frac{1}{2}}{j_0 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{l + [\frac{l}{2}] + \frac{1}{2}}{l + \frac{1}{2}} < \frac{3}{2}.$$

Тому, з огляду на припущення, що $j^* \leqslant n/2$, маємо $\frac{2}{3}h_{j*} \leqslant h_{j_0} \leqslant h_j$, $j_0 \leqslant j \leqslant j^0$. З (2.1.11) для $x \in I_j$ запишемо

$$h_{j*} < \frac{3}{2}h_j < \frac{15}{2}\rho < 8\rho,$$

що, у свою чергу, тягне

$$\varphi(h_{j*}) \leqslant 8^k\varphi(\rho) \quad x \in E\backslash J,$$

і (3.6.42) справджується завдяки (3.6.39).

Насамкінець, доведемо (3.6.43). З (2.1.11), для будь-яких $x \in [-1, 1]$ і всіх $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\rho h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2} \leqslant c. \tag{3.6.46}$$

Тому, якщо $h_{j*} \leqslant \rho$, то (3.6.43) випливає з (3.6.40). Інакше, $h_{j*} > \rho$. Тоді маємо,

$$\frac{\phi(h_{j*})}{h_{j*}^k} \leqslant \frac{\phi(\rho)}{\rho^k}.$$

Також, згадаємо, що

$$h_{j*} \leqslant 2lh_{j_0} \leqslant 2lh_j, \quad \forall j : I_j \in E, \tag{3.6.47}$$

що, зокрема, забезпечує нерівність $h_{j*} < 10l\rho$, якщо $x \in E$. Отже, для $x \in E$, маємо $\phi(h_{j*}) \leqslant cl^k\phi(\rho)$. Тому (3.6.43) випливає з (3.6.40) і (3.6.46).

Припустимо, що $x \notin E$, тобто $x \in [-1, x_{j^0}) \cup (x_{j_0-1}, 1]$. Тоді, за (3.6.47),

$$\varphi(h_{j*}) \leqslant \varphi(\rho)\frac{h_{j*}^k}{\rho^k} \leqslant cl^k\varphi(\rho)\frac{h_{j_0}^k}{\rho^k} \leqslant cl^k\varphi(\rho)\frac{(|x - x_j| + \rho)^k}{\rho^k}, \quad \forall j : I_j \in E,$$

де у третій нерівності ми скористалися фактом, що $h_{j_0} \leqslant c(|x - x_j| + \rho)$. Тому для $x \in [-1, x_{j^0}) \cup (x_{j_0-1}, 1]$ і j такого, що $I_j \subseteq E$, пишемо

$$\varphi(h_{j*})\rho^{k+1}\frac{h_j^{k+1}}{(|x - x_j| + \rho)^{2k+2}} \leqslant cl^k\varphi(\rho)\rho\frac{h_j^{k+1}}{(|x - x_j| + \rho)^{k+2}} \leqslant cl^k\varphi(\rho)\frac{\rho h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2},$$

де до останньої нерівності ми приклали $h_j \leqslant c(|x-x_j|+\rho)$. Разом з (3.6.40), це тягне (3.6.43) і завершує доведення. Лему 3.6.11 доведено.

Далі нам знадобиться аналог [123, Лема 12] – лема 3.6.12.

Лема 3.6.12. *Нехай $k \geqslant 3$, $\varphi \in \Phi^k$, і $S \in \Sigma^1_{k,n}$ такий, що $b_k(S) \leqslant 1$. Якщо проміжок $I_{\mu,\nu}$ містить принаймні $2k-5$ проміжків I_i і точок $x^*_i \in \overset{\circ}{I}_i$, таких, що*

$$|S''(x^*_i)| \leqslant \frac{\varphi(h_i)}{h_i^2}, \tag{3.6.48}$$

то для всіх $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\left\| \frac{\rho^2 S''}{\varphi(\rho)} \right\|_{I_j} \leqslant c\big((j-\mu)^{4k} + (j-\nu)^{4k}\big). \tag{3.6.49}$$

Доведення. Зафіксуємо j iand $x \in \overset{\circ}{I}_j$. З (3.6.3) випливає, що для всіх i,

$$\|p_i - p_j\|_{I_i} \leqslant \varphi(h_j)\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k.$$

Оскільки p_i і p_j многочлени степеня $< k$, отримуємо

$$\|p_i'' - p_j''\|_{I_i} \leqslant c\frac{\varphi(h_j)}{h_i^2}\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k.$$

Тому, (3.6.48) породжує

$$|p_j''(x^*_i)| \leqslant c\frac{\varphi(h_j)}{h_i^2}\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k + c\frac{\varphi(h_i)}{h_i^2} \leqslant c\frac{\varphi(h_j)}{h_i^2}\left(\frac{h_{i,j}}{h_j}\right)^k \leqslant c\frac{\varphi(h_j)}{h_j^2}(|i-j|+1)^{2k}, \tag{3.6.50}$$

де у другій нерівності ми скористалися фактом, що $\varphi \in \Phi^k$ а до третьої приклали [123, (4.5)].

За припущенням існує принаймні $k-2$ точок $x^*_{i_m} \in I_{\mu,\nu}$, $\quad m = 1, \dots, k-2$, кожні з двох яких розділені проміжком $I_i \subseteq I_{\mu,\nu}$. Згадуючи, що $x \in I_j$ і знову застосовуючи [123, (4.5)], ми для кожного $1 \leqslant l \leqslant k-2$ і $1 \leqslant m \leqslant k-2$, з $l \neq m$, маємо

$$\frac{|x - x^*_{i_m}|}{|x^*_{i_l} - x^*_{i_m}|} \leqslant c\frac{h_{j,i_m}}{h_{i_m}} \leqslant c(|j-i_m|+1)^2 \leqslant c\big((j-\mu)^2 + (j-\nu)^2\big). \tag{3.6.51}$$

Тепер, користуючись представленням

$$p_j''(x) \equiv \sum_{l=1}^{k-2} p_j''(x^*_{i_l}) \prod_{m=1, m\neq l}^{k-2} \frac{x - x^*_{i_m}}{x^*_{i_l} - x^*_{i_m}},$$

з (3.6.50) і (3.6.51) запишемо

$$\frac{\rho^2|S''(x)|}{\varphi(\rho)} = \frac{\rho^2|p_j''(x)|}{\varphi(\rho)} \leqslant c\frac{h_j^2|p_j''(x)|}{\varphi(h_j)} \leqslant c\big((j-\mu)^{4k-6} + (j-\nu)^{4k-6}\big), \quad x \in \mathring{I}_j,$$

що завершує доведення (3.6.49). Лему 3.6.12 доведено.

Надалі $s > 0$, інакше більшість подальших тверджень не потрибуватимуть доведення.

Щоб навести необхідну нам лему 17 з [123], введемо позначення. Для $j \notin H$, нехай I_j^* позначає зв'язний компонент O, такий, що $I_j \cap O \neq \varnothing$, а якщо $j \in H$, то нехай $I_j^* := I_j$. Для кожних Y_s, $b \geqslant 0$ і цілого $n_1 \geqslant n$, многочлени $\tilde{T}_{j,n_1}(x) = \tilde{T}_{j,n_1}(x, b, Y_s)$ степеня $\leqslant C^* n_1$, $C^* = C^*(s, b)$, означено в [123, Лема 17] так, що:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_{j,n_1}(x) \equiv 1, \quad x \in [-1, 1], \tag{3.6.52}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{T}'_{j,n_1}(y_i) = \tilde{T}''_{j,n_1}(y_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ &\tilde{T}_{j,n_1}(y_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad y_i \notin I_j^*, \end{aligned} \tag{3.6.53}$$

$$\begin{gathered} |\tilde{T}^{(q)}_{j,n_1}(x)| \leqslant \frac{C}{\rho^q_{n_1}(x)} \left(\frac{\rho_{n_1}(x)}{\rho_{n_1}(x) + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^b, \\ x \in I, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0 \leqslant q \leqslant s+2, \end{gathered} \tag{3.6.54}$$

де $C = C(s, b)$.

Нехай $S \in \Sigma_{k,n}$, візьмемо n_1, що ділеться на n, і позначимо многочлен

$$D_{n_1}(x) := D_{n_1}(x, S, b) := \sum_{j=1}^{n} p_j(x)\tilde{T}_{j,n_1}(x), \tag{3.6.55}$$

степеня $\leqslant cn_1$. Зауважимо, що з огляду на (3.6.53), якщо $S''(y_i) = 0$, то також

$$D''_{n_1}(y_i) = 0.$$

Насамкінець, запишемо

$$O_e := \{u : [u - \rho_n(u)/2, u + \rho_n(u)/2] \subseteq \bar{O}\}.$$

Згадаємо, що N в теоремі 3.6.3 може залежити від Y_s. Отже припустимо, що N таке велике, що $\bar{O} \cap (I_1 \cup I_n) = \varnothing$.

Назвемо проміжок A простим, якщо його кінці належать чебишевському розбиттю (див. [123]). Для простого A і сплайна $S \in \Sigma_{k,n}$, покладемо

$$b_k(S, A) := b_{k,n}(S, A) := \max_{i,j: I_j, I_i \subseteq A} b_{i,j}(S). \tag{3.6.56}$$

Наступна лема схожа на [123, Лема 18] і тому в її доведенні ми наведемо лише відмінності.

Лема 3.6.13. *Нехай A простий проміжок, такий, що $A \cap O_e \neq \varnothing$, і нехай $b_1 \geqslant 0$. Тоді, для $S \in \Sigma_{k,n}(Y_s)$ і $x \in A \cap O_e$, маємо*

$$\begin{aligned} &\left|S^{(3)}(x) - D_{n_1}^{(3)}(x)\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{C(k,s,b)\varphi(\rho)}{\rho^3} \left(b_k(S, A) + b_k(S) \frac{n}{n_1} \left(\frac{\rho}{\rho + \operatorname{dist}(x, [-1,1] \backslash A)} \right)^{b_1} \right), \end{aligned} \tag{3.6.57}$$

де $b_k(S, A)$ означено в (3.6.56)*.*
Більш того, якщо $S \in \Sigma_{k,n}^1$, то для $x \in A$, $x \neq x_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$\begin{aligned} &\left|S''(x) - D''_{n_1}(x)\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{C(k,s,b)\varphi(\rho)}{\rho^2} \left(b_k(S, A) + b_k(S) \frac{n}{n_1} \left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, [-1,1] \backslash A)} \right)^{b_1} \right). \end{aligned} \tag{3.6.58}$$

Доведення. Доведемо аналог [123, (7.26)]. Для спрощення, будемо тут писати ρ_1 замість $\rho_{n_1}(x)$ і $\tilde{T}_j$ замість $\tilde{T}_{j,n_1}$. Нехай $x \in I_\nu$ такий, що, скажімо,

$$x - x_\nu \leqslant x_{\nu-1} - x. \tag{3.6.59}$$

З (3.6.3) запишемо

$$\|p_\nu - p_j\|_{I_\nu} \leqslant b_{\nu,j}(S)\varphi(h_\nu) \frac{h_{\nu,j}^{2k}}{h_j^k h_\nu^k}.$$

Тому, для кожного $r \in \mathbb{N}$,

$$\|p_\nu^{(r)} - p_j^{(r)}\|_{I_\nu} \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(h_\nu)}{h_\nu^r} \frac{h_{\nu,j}^{2k}}{h_j^k h_\nu^k}. \tag{3.6.60}$$

Якщо $j \neq \nu, \nu+1$, то (2.1.11) і (3.6.59) тягнуть $\operatorname{dist}(x, I_j) \geqslant \frac{1}{2}\rho$, і, також як і у доведенні

[123, (7.26)], ми з (3.6.54) для b і для $r \leqslant q \leqslant 3$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|p_\nu^{(r)} - p_j^{(r)}\|_{I_\nu} |\tilde{T}_j^{(q-r)}(x)| \\
&\qquad \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{h_\nu^r} \left(\frac{h_{\nu,j}}{h_j}\right)^k \left(\frac{h_{\nu,j}}{h_\nu}\right)^k \frac{1}{\rho_1^{q-r}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^b \\
&\qquad = c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{h_\nu^r} \left(\frac{h_{\nu,j}}{h_j}\right)^{k+1} \left(\frac{h_{\nu,j}}{h_\nu}\right)^{k-1} \frac{h_j}{h_\nu \rho_1^{q-r}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^b \\
&\qquad \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{h_\nu^{r+1}} \left(\frac{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}{\rho}\right)^{3k+1} \frac{h_j}{\rho_1^{q-r}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^b \\
&\qquad \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{h_\nu^{r+1}} \left(\frac{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}{\rho}\right)^{3k-q+r} \left(\frac{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}{\rho}\right)^{q-r+1} \frac{h_j}{\rho_1^{q-r}} \\
&\qquad\quad \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^{q-r+1} \left(\frac{\rho}{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^{b-q+r-1} \\
&\qquad \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{h_\nu^{r+1}} h_j \frac{\rho_1}{\rho} \frac{1}{\rho^{q-r}} \left(\frac{\rho}{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^{b_1+1} \\
&\qquad \leqslant c \frac{b_{\nu,j}(S)\varphi(\rho)}{\rho^q} \frac{n}{n_1} \rho^{b_1} h_j \left(\frac{1}{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}\right)^{b_1+1}, \quad 0 \leqslant r \leqslant q, \qquad (3.6.61)
\end{aligned}$$

де $b_1 = b - 3k - 2 \geqslant 0$, і де у другій нерівності ми застосували (2.1.11), щоб показати, що

$$\frac{h_{\nu,j}}{h_j} \leqslant c \left(\frac{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}{\rho}\right)^2,$$

і

$$\frac{h_{\nu,j}}{h_\nu} \leqslant c \frac{\rho + \operatorname{dist}(x, I_j)}{\rho},$$

а потім, у третій нерівності ми скористалися тим фактом, що $\operatorname{dist}(x, I_j) \geqslant \frac{1}{2}\rho$, і до останньої нерівності приклали $\frac{\rho_1}{\rho} \leqslant \frac{n}{n_1}$. Решта доведення нічим не відрізняється від доведення [123, Лема 18]. Лему 3.6.13 доведено.

Наступна лема 3.6.14 доводиться аналогічно лемі 3.6.13.

Лема 3.6.14. *Якщо $S \in \Sigma_{k,n}$, то*

$$|S(x) - D_{n_1}(x)| \leqslant C\, b_k(S)\varphi(\rho). \qquad (3.6.62)$$

Так само, наслідуючи дослівно доведення [123, Лема 20], з заміною [123, (7.23) і (7.24)] на, відповідно, (3.6.57) і (3.6.58), отримуємо наступну лему 3.6.15.

Лема 3.6.15. *Якщо A простий проміжок і $S \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s)$ такий, що $S''(y_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant s$, то*

$$\left|S''(x) - D''_{n_1}(x)\right| \leqslant \frac{C_0\,\varphi(\rho)\pi(x)}{\rho^2}\left(b_k(S,A) + b_k(S)\frac{n}{n_1}\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I\backslash A)}\right)^{b_1}\right), \qquad (3.6.63)$$

де $C_0 = C_0(k,s,b)$ і $\pi(x)$ означені в (3.6.37).

Доведення теореми 3.6.3

Згадаємо, що ми припустили, що $k \geqslant 3$, і, що за лемою 3.6.4, можемо припустити, що $S \in C^1[-1,1]$. Для $A \subseteq I$ позначимо

$$A^e := \cup_{I_j \cap A \neq \varnothing} I_j, \quad \text{і} \quad A^{2e} := (A^e)^e.$$

Щоб довести твердженя теореми, означимо многочлен P_n, степеня $\leqslant cn$, такий, що

$$|S(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho), \qquad (3.6.64)$$

$$P''_n(x)\delta(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \qquad (3.6.65)$$

де $\delta(x)$ означена в (3.6.36). Зафіксуємо b як $b_1 := 25(s+1) + 2k$. Це робить сталу $C_0(k,s,b)$ в (3.6.63), залежною тільки від k і s, отже, $c_2 := C_0$. Зафіксуємо ціле c_3 таке, що

$$c_3 \geqslant \max\{8k/c_1, 12s\}, \qquad (3.6.66)$$

де c_1 – стала з (3.6.41), і без втрати загальності припустимо, що n ділиться на c_3, тобто $n = N\,c_3$ з якимось N.

Розділемо I на N проміжків

$$E_q := [x_{qc_3}, x_{(q-1)c_3}] = I_{qc_3} \cup \cdots \cup I_{(q-1)c_3+1}, \quad q = 1, \ldots, N,$$

і припустимо, без втрати загальності, що N настільки велике, що існує принаймні три проміжка E_q що знаходяться між точками y_i і y_{i+1}, $0 \leqslant i \leqslant s$.

Будемо писати $j \in UC$ (як "Under Control"), якщо знайдеться $x \in I_j$, така, що

$$|S''(x)| \leqslant \frac{5c_2\varphi(\rho)}{\rho^2}, \qquad (3.6.67)$$

і будемо казати, що $q \in G_1$, якщо E_q складається принаймні з $2k-5$ проміжків I_j з $j \in UC$. Будемо казати, що $q \in G$, якщо або $q \in G_1$, або E_q перетинає O і E_{q-1} перетинає O і $q-1$ з G_1, або E_q перетинає O і E_{q+1} перетинає O і $q+1$ з G_1.

Зауважимо, що (3.6.67) і лема 3.6.12 тягнуть

$$|S''(x)| \leqslant \frac{c\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in E_q, \quad q \in G. \tag{3.6.68}$$

Покладемо

$$E := \cup_{q \notin G} E_q,$$

і розділемо S на "малу" і "велику" функції наступним чином

$$s_1(x) := \begin{cases} S''(x), & \text{якщо} \quad x \notin E, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$s_2 := S'' - s_1,$$

і покладемо

$$S_1(x) := S(-1) + (x+1)S'(-1) + \int_{-1}^{x} (x-u)s_1(u)du,$$
$$S_2(x) := \int_{-1}^{x} (x-u)s_2(u)du.$$

(Зауважимо, що s_1 і s_2 означено коректно для $x \neq x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, і, отже, S_1 і S_2 теж означено коректно і вони мають другу похідну скрізь де, знову ж таки, $x \neq x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Тобто, надалі запис $S_l''(x)$ має на увазі, що $x \neq x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$.)

Вочевидь,

$$S_1, S_2 \in \Sigma^1_{k,n}(Y_s),$$

і

$$S_1''(x)\delta(x) \geqslant 0 \quad \text{і} \quad S_2''(x)\delta(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1].$$

Тепер, (3.6.68) тягне

$$|S_1''(x)| \leqslant \frac{c\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1],$$

що, в свою чергу, за лемою 3.6.2, породжує нерівність

$$b_k(S_1) \leqslant c.$$

Разом з (3.6.6), отримуємо

$$b_k(S_2) \leqslant c + 1 \leqslant \lceil c+1 \rceil =: c_4. \tag{3.6.69}$$

Представимо множину E об'єднанням неперетинаючих один одного проміжків $F_p = [a_p, b_p]$, між будь-якими двома з яких є проміжки E_q лише з $q \in G$. Можимо припустити, що $n > c_3 c_4$, і будемо писати $p \in AG$ (як "Almost Good"), якщо F_p складається з не більше ніж c_4 проміжків E_q, а отже, – з не більше ніж c_3c_4 проміжків I_j. Тоді, за лемою 3.6.12,

$$|S_2''(x)| \leqslant \frac{c\,\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in F_p, \quad p \in AG. \tag{3.6.70}$$

Покладемо

$$F := \cup_{p \notin AG} F_p,$$

і знову розкладемо S, поклавши

$$s_4 := \begin{cases} S''(x), & \text{якщоif} \quad x \in F, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$s_3 := S'' - s_4,$$

і

$$\begin{aligned} S_3(x) &:= S(-1) + (x+1)S'(-1) + \int_{-1}^{x} (x-u)s_3(u)du, \\ S_4(x) &:= \int_{-1}^{x} (x-u)s_4(u)du. \end{aligned}$$

Тоді, вочевидь,

$$S_3, S_4 \in \Sigma_{k,n}^1(Y_s), \tag{3.6.71}$$

і

$$S_3''(x)\delta(x) \geqslant 0 \quad \text{і} \quad S_4''(x)\delta(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.72}$$

Наблизимо S_3 і S_4 коопуклими з S многочленами з необхідною поточковою швидкістю.

Для $x \in \cup_{p \in AG} F_p$, (3.6.70) тягне

$$|S_3''(x)| = |S_2''(x)| \leqslant \frac{c\,\varphi(\rho)}{\rho^2}.$$

Інакше,

$$|S_3''(x)| = |S_1''(x)| \leqslant \frac{c\,\varphi(\rho)}{\rho^2}.$$

Тому

$$|S_3''(x)| \leqslant \frac{c\,\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in [-1,1], \tag{3.6.73}$$

що, за лемою 3.6.2, тягне $b_k(S_3) \leqslant c$. Знову з (3.6.6) отримуємо

$$b_k(S_4) \leqslant c + 1 \leqslant \lceil c+1 \rceil =: c_5. \tag{3.6.74}$$

З огляду на (3.6.71) і (3.6.72), з наслідку 3.6.1, поєдненим з (3.6.73), випливає, що існує многочлен r_n, степеня $\leqslant cn$, коопуклий з S і такий, що

$$|S_3(x) - r_n(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho). \tag{3.6.75}$$

Отже, лишилось наблизити S_4. Для цього, вбачаємо, що для $p \notin AG$,

$$s_4(x) = S_2''(x), \quad x \in F_p^{2e},$$

тому за (3.6.69),

$$b_k(S_4, F_p^{2e}) = b_k(S_2, F_p^{2e}) \leqslant b_k(S_2) \leqslant c_4. \tag{3.6.76}$$

(Зауважимо, що для $p \in AG$, S_4 – лінійна функція на F_p^{2e} і $b_k(S_4, F_p^{2e}) = 0$.)

Користуючись лемою 3.6.11, означимо два многочлена $\overline{Q}_n$ іM_n, степеня $< cn$, і застосуємо $D_{n_1}(\cdot, S_4)$ степеня cn_1, означений в (3.6.55), з $n_1 := c_5 n$.

Почнемо з $\overline{Q}_n$. Для кожного q, для якого $E_q \subseteq F$, нехай J_q буде об'єдненям всіх проміжків $I_j \subseteq E_q$ з $j \in UC$. Згадаємо, що $q \notin G$, тому згідно (**??**), кількість μ_q таких проміжків не перевищує $2k - 6 < c_3/4$, а загальна кількість проміжків в E_q складає c_3. Таким чином, лему 3.6.11 можно застосувати до кожного E_q, і якщо покласти

$$\overline{Q}_n := \sum_{E_q \subseteq F} Q_n(\cdot, E_q, J_q),$$

де у правій частині многочлени з леми 3.6.11 (вважаємо $Q_n(\cdot, E_q, J_q) \equiv 0$, якщо $J_q = \varnothing$), і позначити

$$J := \bigcup_{E_q \subseteq F} J_q,$$

то заключаємо, що $\overline{Q}_n$ задовольняє

$$\begin{aligned} &\overline{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1]\backslash F, \\ &\overline{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant -\frac{\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in F\backslash J, \\ &\overline{Q}_n''(x)\delta(x) \geqslant \frac{4\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in J. \end{aligned} \tag{3.6.77}$$

Зауважимо, що (3.6.77) справджується оскільки для будь-якого x всі відповідні $Q_n''(x, E_q, J_q)$, за винятком можливо одного, мають однаковий знак і, якщо $J_q \neq \varnothing$, то $c_1 \frac{c_3}{\mu_q} \geqslant 4$, оскільки $\mu_q \leqslant 2k - 6$ і $c_1 c_3 \geqslant 8k$. Насамкінець, з (**??**) випливає, що

$$|\overline{Q}_n(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho), \quad x \in [-1,1]. \tag{3.6.78}$$

Далі означимо многочлен M_n. Для кожного F_p з $p \notin AG$, нехай J_{p^-} позначає об'єднання двох проміжків на лівому кінці F_p^e, і нехай J_{p^+} – об'єднання двох проміжків на правому кінці F_p^e. Також, нехай F_{p^-} iand F_{p^+} – замкнені проміжки, кожен з яких складається з $l := c_3c_4$ проміжків I_j і такі, що $J_{p^-} \subset F_{p^-} \subset F_p^e$ і $J_{p^+} \subset F_{p^+} \subset F_p^e$. Насамкінець, покладемо

$$J_p^* := J_{p^-} \cup J_{p^+} \quad \text{and} \quad J^* := \cup_{p \notin AG} J_p^*,$$

і означимо

$$M_n := \sum_{p \notin AG} \big(Q_n(\cdot, F_{p^+}, J_{p^+}) + Q_n(\cdot, F_{p^-}, J_{p^-})\big).$$

Оскільки $l = c_3c_4$, то з (3.6.66) випливає, що $c_1\frac{l}{\mu} \geqslant 2c_4$, для $\mu = 2$. Знову за лемою 3.6.11,

$$\begin{aligned}
&M_n''(x)\delta(x) \geqslant -2\frac{\pi(x)\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in F\backslash J^*,\\
&M_n''(x)\delta(x) \geqslant \frac{2c_4\pi(x)\phi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in J^*, \qquad (3.6.79)\\
&M_n''(x)\delta(x) \geqslant \frac{\pi(x)\phi(\rho)}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, F)}\right)^{25(s+1)+2k}, \quad x \in [-1,1]\backslash F^e,
\end{aligned}$$

де в останній нерівності ми скористалися фактом, що друга нерівність в (2.1.11) породжує оцінку

$$\max\{\rho, \operatorname{dist}(x, F^e)\} \leqslant \operatorname{dist}(x, F), \quad x \in [-1,1]\backslash F^e.$$

Отже, з (3.6.43) випливає, що

$$|M_n(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho). \tag{3.6.80}$$

Трєтій допоміжний многочлен, властивості якого на потрібні, це $D_{n_1} := D_{n_1}(S_4, \cdot)$. За (3.6.74) і вибором b, лема 3.6.14 тягне оцінку

$$|S_4(x) - D_{n_1}(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho), \quad x \in [-1,1], \tag{3.6.81}$$

а лема 3.6.15, поєднена з (3.6.71) і (3.6.72), для будь-якого простого проміжка A, – оцінку

$$\begin{aligned}
|S_4''(x) - D_{n_1}''(x)| \leqslant{}& c_2\frac{\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}b_k(S_4, A) \qquad (3.6.82)\\
&+ c_2c_5\frac{\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}\frac{n}{n_1}\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, [-1,1]\backslash A)}\right)^{b_1}, \quad x \in A.
\end{aligned}$$

Згадаємо, що $n_1 = c_5 n$, і запишемо

$$R_n := D_{n_1} + c_2\overline{Q}_n + c_2 M_n. \tag{3.6.83}$$

З (3.6.78), (3.6.80) і (3.6.81) отримуємо

$$|S_4(x) - R_n(x)| \leqslant c\,\varphi(\rho), \quad x \in [-1,1],$$

що, у поєднені з (3.6.75), доводить (3.6.64) для $P_n := R_n + r_n$. Отже, щоб закінчити доведення теореми 3.6.3, доведемо, що P_n задовольняє (3.6.65).

Згадаємо, що r_n коопуклий з S, тобто нам треба перевірити це лише для R_n. Оскільки (3.6.82) справджується для будь-якого простого проміжка A, будемо брати різні A, за необхідністю. Коли $x \in F_p \backslash J_p^*$, достатньо взяти $A := F_p$. Тоді величина у великих дужках (3.6.82) обмежена одиницею, і оскільки $S_4(x) = S(x)$, $x \in F$, то $b_k(S_4, F_p) = b_k(S, F_p) \leqslant 1$. Тому,

$$\begin{aligned} |S_4''(x) - D_{n_1}''(x)| &\leqslant \frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2} b_k(S_4, F_p) + \frac{c_2c_5\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}\frac{n}{n_1} \\ &\leqslant 2\frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in F_p \backslash J_p^*. \end{aligned} \tag{3.6.84}$$

Якщо $x \in J_p^*$, то достатньо взяти $A := F_p^{2e}$ і, аналогічно, (3.6.76) і (3.6.82), тягнуть оцінку

$$\begin{aligned} |S_4''(x) - D_{n_1}''(x)| &\leqslant \frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2} b_k(S_4, F_p^{2e}) + \frac{c_2c_5\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}\frac{n}{n_1} \\ &\leqslant 2\frac{c_2c_4\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}, \quad x \in J_p^*. \end{aligned} \tag{3.6.85}$$

Насамкінець, якщо $x \in [-1,1] \backslash F^e$, то візьмемо A зв'язним компонентом $[-1,1]\backslash \overset{\circ}{F}$, що містить x. Тоді, за (3.6.82),

$$\begin{aligned} |S_4''(x) - D_{n_1}''(x)| &\leqslant \frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2} b_k(S_4, A) + \frac{c_2c_5\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}\frac{n}{n_1}\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, [-1,1]\backslash A)}\right)^{b_1} \\ &= \frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, F)}\right)^{b_1}, \quad x \in [-1,1]\backslash F^e, \end{aligned} \tag{3.6.86}$$

де ми застосували той факт, що S_4 лінійна на A.

Оскільки за (3.6.83),

$$\begin{aligned} R_n''(x)\delta(x) \geqslant c_2\overline{Q}_n''(x)\delta(x) + c_2M_n''(x)\delta(x) + S_4''(x)\delta(x) - |S_4''(x) - D_{n_1}''(x)|, \\ x \in [-1,1], \end{aligned}$$

то з (3.6.72) (3.6.77), (3.6.79) і (3.6.84) випливає, що

$$R_n''(x)\delta(x) \geqslant \frac{c_2 c_4 \pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}(4-2+0-2)=0, \quad x \in J_p \backslash J_p^*.$$

Якщо $x \in F_p \backslash (J_p \cap J_p^*)$, то (3.6.67) не виконується і

$$S_4''(x)\delta(x) > \frac{5c_2\varphi(\rho)}{\rho^2} \geqslant \frac{5c_2}{\rho^2}\pi(x)\varphi(\rho).$$

Тому з (3.6.77), (3.6.79) і (3.6.84) отримуємо

$$R_n''(x)\delta(x) \geqslant \frac{c_2\pi(x)\varphi(\rho)}{\rho^2}(-1-2+5-2)=0, \quad x \in F_p \backslash (J_p \cap J_p^*).$$

Далі, якщо $x \in J^*$, то з (3.6.72), (3.6.77), (3.6.79) і (3.6.85) запишемо

$$R_n''(x)\delta(x) \geqslant 0, \tag{3.6.87}$$

і, насамкінець, (3.6.72), (3.6.77), (3.6.79) і (3.6.86) породжують (3.6.87) для $x \in [-1,1] \backslash F^e$.

Таким чином, (3.6.87) справджується для всіх $x \in [-1,1]$, тобто ми означили P_n, що задовольняє (3.6.64) і (3.6.65), для кожного $n > c$, що ділеться на c_3. Для всіх інших n теорема 3.6.3 випливає з включення

$$\Sigma_{k,n}^1(Y_s) \subseteq \Sigma_{k,c_3 n}^1(Y_s).$$

Теорему 3.6.3 доведено.

3.7 Порівняння рівномірних і поточкових оцінок коопуклого наближення многочленами

Матеріал цього підрозділу міститься в [84].

Як відомо, існує два типу оцінок похибки наближення неперервних на $[-1,1]$ функцій алгебраїчними многочленами: поточкові оцінки типу Нікольського і рівномірні оцінки типу Джексона, які включають в себе або звичайні модулі гладкості, або модулі гладкості Дітціана-Тотіка, або нещодавні вагові модулі гладкості Дітціана-Тотіка. Тобто, якщо, скажімо, $\omega_k(f, 1/n)$ – звичайний модуль гладкості (порядку k), то рівномірні оцінки мають вигляд

$$E_n(f) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_{C[-1,1]} \leqslant c(k,r) n^{-r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \quad n \geqslant k+r, \tag{3.7.1}$$

де $f \in C^r[-1,1] =: C^r$ $(C := C^0[-1,1])$, $E_n(f)$ – величина найкращого наближення f многочленами степеня $< n$, що складають множину $\mathbb{P}_n$, і $c(k,r)$ – стала, що може залежити тільки від k і r але не від f і n, а поточкові –

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in [-1,1], \tag{3.7.2}$$

де $\rho_n(x) = 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n$, (детальныше див. (2.1.1)) і тут і надалі сталі c можуть залежити тільки від параметрів в дужках. Оскільки $\rho_n(x) \leqslant \frac{2}{n}$, то (3.7.2) тягнуть (3.7.1).

Починаючи з ранніх робіт Лоренца, Целлера, ДеВора і Ньюмана 1960-х років з формозберігаючого наближення, більше сотні робіт різних авторів було присв'ячено питанню збереження аналогів цих оцінок для комонотонного і коопуклого наближень. А саме, для яких трійок (k,r,s), де k і r такі як вище, а s кількість змін монотонності, або опуклості функції f, зберігається аналоги (3.7.1), а для яких ні, коли наближаючи многочлени є комонотонні, або, відповідно, коопуклі до f (див., наприклад, [121] і [125], відповідно, а також [112]); аналоги оцінок (3.7.1) з ваговими модулями гладкості Дітціана-Тотіка можна знайти, наприклад, в [121, 110, 111]); а в [121] наведено таблиці збереження/незбереження аналогів (3.7.2) для комонотонного наближення (самі комонотонні оцінки доведено в [79]).

В цьому підрозділі наведемо таблиці збереження/незбереження аналогів (3.7.1) і (3.7.2) для коопуклоого наближення (доведенних і у попередніх підрозділах, у тому числі), що дасть нам можливість їх порівняти.

Надалі припускаємо, що $f \notin \mathbb{P}_{k+r}$, і для такої f, ми знаходимо зручним переписати (3.7.2) у формі

$$E_{n,k,r}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r \omega_k(f^{(r)}, \rho_n)} \right\| \leqslant c(k,r), \qquad n \geqslant k + r.$$

Зауважимо, що з (3.7.2) негайно випливає, що якщо $f \in W^r$ – множині всіх $f \in C$, що мають на $(-1,1)$ абсолютно неперервну $(r-1)$-шу похідну і $f^{(r)} \in L_\infty$, то існує послідовність $\{P_n\}_{n=r}^\infty$ многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n$, таких, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(r)\rho_n^r(x)\|f^{(r)}\|, \qquad x \in [-1,1].$$

Для $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ нехай

$$E_n^{(2)}(f, Y_s) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \|f - P_n\|,$$

– величина найкращого коопуклого наближення многочленами і для $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k = 0$), позначимо

$$E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r \omega_k(f^{(r)}, \rho_n)} \right\|,$$

так, що завжди

$$E^{(2)}_n(f, Y_s) \leqslant 2^{k+r} n^{-r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n) E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s).$$

Далі, з цими позначеннями, побачимо для яких трійок (k, r, s), нерівність

$$E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) \leqslant c, \qquad n \geqslant N, \tag{3.7.3}$$

з $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k = 0$), і $f \notin \mathbb{P}_{k+r}$, вірна, а для яких ні.

З $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, нехай $(k, r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ і $k + r \neq 0$.

Будемо казати, що

a) оцінка (3.7.3) невірна з обома c і N, незалежними від Y_s, якщо для будь-якого $A > 0$ існує додатнє ціле N, таке, що при всіх $n \geqslant N$, знайдуться набір $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ і функція $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k = 0$) такі, що

$$E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) \geqslant A; \tag{3.7.4}$$

b) (3.7.3) невірна з $c = c(k, r, s)$ і N, незалежними від f, якщо для будь-якого $A > 0$ існують додатнє ціле N і набір $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, такі, що при всіх $n \geqslant N$, знайдеться функція $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k = 0$), що задовольняє (3.7.4);

c) (3.7.3) невірна для будь-якого Y_s з обома c і N, незалежними від f, якщо для будь-яких $A > 0$ і $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, існує додатнє ціле N, таке, що при всіх $n \geqslant N$, знайдеться функція $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$ ($f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, якщо $k = 0$) що задовольняє (3.7.4);

d) (3.7.3) не справджується навіть, якщо дозволити обом сталим c і N залежити від всіх параметрів k, r, Y_s і f, якщо для будь-якого $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ знайдеться функція $f \in C^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, така, що

$$\limsup_{n \to \infty} E^{(2)}_{n,k,r}(f, Y_s) = \infty.$$

Отже, ми будемо розрізняти п'ять випадків для трійці (k, r, s). А саме,

Означення 3.7.1. *Нехай* $(k, r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *і* $k + r \neq 0$. *Будемо писати*

1. $(k, r, s) \in$ “ + ” **(“сильний позитивний випадок”)**, *якщо* (3.7.3) *справджується з* $c = c(k, r, s)$ *і* $N = k + r$;

2. $(k,r,s)\in$ "$\oplus$" **("слабкий позитивний випадок")**, *якщо* (3.7.3) *справджується з* $c=c(k,r,Y_s)$ *і* $N=k+r$, *а також з* $c=c(k,r,s)$ *і* $N=N(k,r,Y_s)$, *але* (3.7.3) *не справджується з обома* c *і* N, *незалежними від* Y_s*;*
3. $(k,r,s)\in$ "$\oslash$" **("ще позитивний випадок")**, *якщо* (3.7.3) *справджується з* $c=c(k,r,Y_s)$ *і* $N=k+r$, *а також з* $c=c(k,r,s)$ *і* $N=N(k,r,Y_s,f)$, *але* (3.7.3) *не справджується з* $c=c(k,r,s)$ *і* N, *незалежним від* f*;*
4. $(k,r,s)\in$ "$\ominus$" **("слабкий негативний випадок")**, *якщо* (3.7.3) *справджується з* $c=c(k,r,s)$ *і* $N=N(k,r,Y_s,f)$, *але* (3.7.3) *невірно для жодного* Y_s*, з обома* c *і* N*, незалежними від* f*;*
5. $(k,r,s)\in$ "$-$" **("сильний негативний випадок")***:* (3.7.3) *не справджується навіть, якщо дозволити обом сталим* c *і* N *залежити від всіх параметрів* k*,* r*,* Y_s *і* f*.*

Зберемо результати в наступній теоремі.

Теорема 3.7.1.
1. $(k,r,s)\in$ "$+$", *якщо* $s=0$ *і або* $k\leqslant 3$ *і* $r\leqslant 3-k$*, або* $k\geqslant 0$ *і* $r\geqslant 2$*; або* $s=1$ *і* $k\leqslant 2$ *і* $r\leqslant 2-k$*;*
2. $(k,r,s)\in$ "$\oplus$", *якщо* $s\geqslant 2$ *і* $k\leqslant 2$ *і* $r\leqslant 2-k$*;*
3. $(k,r,s)\in$ "$\oslash$", *якщо* $s\geqslant 2$ *і або* $k=3$ *і* $r=0$*, або* $k=2$ *і* $r=1$*, або* $1\leqslant k\leqslant 3$ *і* $r=2$*, або* $k\geqslant 0$ *і* $r\geqslant 3$*;*
4. $(k,r,s)\in$ "$\ominus$", *якщо* $s=1$ *і або* $k=3$ *і* $r=0$*, або* $k=2$ *і* $r=1$*, або* $1\leqslant k\leqslant 3$ *і* $r=2$*, або* $k\geqslant 0$ *і* $r\geqslant 3$*.*
5. $(k,r,s)\in$ "$-$", *інакше.*

Здається, більш зручно буде побачити теорему 3.7.1 у вигляді наступних таблиць для пар (k,r), для "поточкових оцінок, $s=0$" , "поточкових оцінок, $s=1$" і "поточкових оцінок, $s\geqslant 2$". А також порівняти її з таблицями для рівномірного коопуклого наближення з [125, стор. 110 і 114], а саме, де справджується/не справджується оцінка

$$E_n^{(2)}(f,Y_s)\leqslant cn^{-r}\omega_k(f^{(r)},1/n),\quad n\geqslant N. \tag{3.7.5}$$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s = 0$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	k

Рівномірні, $s = 0$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\cdots$
3	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\cdots$
2	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$\ominus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
2	$+$	$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$+$	$+$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s = 1$ Рівномірні, $s = 1$

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\cdots$
3	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\cdots$
2	$\oplus$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$\oplus$	$\oplus$	$\oslash$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$\oplus$	$\oplus$	$\oslash$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

r	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
4	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\cdots$
3	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\cdots$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
0		$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$-$	$-$	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	k

Поточкові, $s \geqslant 2$ Рівномірні, $s \geqslant 2$

Зауважимо, що "Рівномірні" таблиці не містять "ще позитивний випадок" "$\oslash$", а також – що в розділі 3 отримано всі поточкові випадки, крім $s = 0$ і $(k, r, s) \in$ " $-$ ".

Автори. Теорема 3.7.1.1 (тобто випадок " $+$ ") була доведена для $s = 0$, спочатку Левіатаном [114] для $k \leqslant 2$ і $r \leqslant 2-k$, а пізніше Копотуном [103] для $k \leqslant 3$ і $r \leqslant 3-k$, і Манія і Шевчуком (див. [56, стор. 148], або [86, Теорема 7.6.5]) для $k = 0$ і $r \geqslant 2$. Для $s = 1$, $k \leqslant 2$ і $r \leqslant 2 - k$, вона доведена в теоремі 3.1.1.

Позитивний результат теореми 3.7.1.2 (тобто випадки " $\oplus$ ") доведено в теоремі 3.1.1, а негативний – в Левіатан, Шевчук [123].

Перший варіант позитивного результату теореми 3.7.1.3 (тобто випадки “ $\oslash$ ”) доведено в теоремах 3.2.1 і 3.3.1, другий, для $r \geqslant 2$, є наслідком зауваження 3.4.2, а для $r < 2$, тобто для $s > 1$ і або $k = 3$ і $r = 0$, або $k = 2$ і $r = 1$, його доведено в теоремі 3.5.2 (вона же 3.6.2). Негативний результат доведено в теоремі 6.4.1.

Позитивний результат теореми 3.7.1.4 (тобто випадки “ $\ominus$ ”) для $r \geqslant 2$ доведено в теоремі 3.2.1, а для $r < 2$, тобто для $s = 1$ і або $k = 3$ і $r = 0$, або $k = 2$ і $r = 1$ – в теоремі 3.4.3 (вона же 3.6.1). Негативний результат доведено в теоремі 6.4.1.

Насамкінець, теорему 3.7.1.5 (тобто випадок “ $-$ ”) доведено Ву і Цу [169, 176], для $s = 0$ і або $k \geqslant 5$ і $r = 0$, або $k \geqslant 4$ і $r = 1$; і для $s \geqslant 1$ і або $k \geqslant 4$ і $r = 0$, або $k \geqslant 3$ і $r = 1$. Гілєвіч і Ющенко [91] довели її для $s \geqslant 1$ і $k \geqslant 4$ і $r = 2$, і Ющенко [173] для $s = 0$ і або $k = 4$ і $r = 0$, або $k = 3$ і $r = 1$.

3.8 Майже коопукле поточкове наближення неперервних на відрізку функцій

Результати цього підрозділу містяться в [77, 76].

Позначимо

$$O_n(c,Y) := \left(-1, -1 + \frac{c^2}{n^2}\right) \bigcup \left(1 - \frac{c^2}{n^2}, 1\right) \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{s} (y_i - c\rho_n(y_i), y_i + c\rho_n(y_i))\right].$$

і нагадаємо $\rho := \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n$, $n \in \mathbb{N}$, $Y := Y_s := \{y_i : \ -1 < y_s < \cdots < y_1 < 1, \ s \in \mathbb{N}\}$, $\Pi(x) := \Pi(x, Y) = \prod_{i=1}^{s}(x - y_i)$, $\Pi(x, \varnothing) :\equiv 1$, і, якщо f двічі диференційорвна на $I := [-1, 1]$, то $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ – множині коопуклих (відносно Y) функцій тоді і тільки тоді, коли $f''(x)\Pi(x) \geqslant 0$, $x \in I$.

В цьому підрозділі ми доводимо наступні дві теореми 3.8.1 і 3.8.2, і пропозицію 3.8.1, що складає окремий інтерес.

Теорема 3.8.1. *Якщо $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то для кожного $n \geqslant 3$, існує многочлен P_n, степеня $\leqslant n$, такий, що*

$$P_n''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in (-1, 1) \backslash O_n(c, Y), \tag{3.8.1}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(s)\, \omega_4\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in I, \tag{3.8.2}$$

де c – абсолютна стала і $C(s)$ – стала, що залежить тільки від s.

Теорема 3.8.2. *Якщо* $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то існує кубічний сплайн (кусково-поліноміальна функція)* $S_n \in C[-1,1]$ *з* $n-1$ *чебишевськими вузлами, такий, що*

$$S_n(x) \in \Delta^{(2)}(Y), \quad x \in (-1,1)\backslash O_n(c,Y), \tag{3.8.3}$$

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant C\, \omega_4\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in I, \tag{3.8.4}$$

де c *і* C *– абсолютні сталі.*

Тобто, це так зване *майже опукле* (коли $s = 0$) і *майже коопукле* ($s > 0$) наближення многочленами (теорема 3.8.1) і сплайнами (теорема 3.8.2).

Історію "чисто" (ко)опуклого наближення наведено в попередніх підрозділах, а тут лише нагадаємо, що оцінка

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y)\, \omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad n \geqslant 2, \quad s > 1,$$

яка доведена в теоремі 3.2.1, є хибною з ω_k, $k > 3$, навіть з $1/n$ замість ρ_n (див. Ву, Цу [169, 176]), є хибною з $s = 1$ (див. теорему 6.3.1) і є хибною з $C(s)$ і $n \geqslant N(Y)$ замість $C(Y)$ і $n \geqslant 2$ (див. теорему 6.4.1). Тимнеменьш, Левіатан і Шевчук [124] довели рівномірні аналоги теорем 3.8.1 і 3.8.2 (з $1/n$ замість ρ_n в (3.8.2) і (3.8.4)). Також, ці дві теореми тільки з ω_3 замість ω_4 доведено в [76].

Зауваження 3.8.1. *Грубо кажучи, неможливо "зменшити" сталу* c *в* (3.8.1) *і* (3.8.3) *за рахунок збільшення* $C(s)$ *і* C *в* (3.8.2) *і* (3.8.4), *відповідно. Більш точно, неможливо замінити* c *в теоремі 3.8.1, скажімо, на* 1, *якщо* n *"вилике", навіть з* $1/n$ *замість* ρ_n *в* (3.8.2), *див. Левіатан, Шевчук* [124]. *Хоча, якщо* n *маленьке, зокрема, для* $n = 3$, *то це можна зробити: Нехай для простоти* $s = 0$. *Покладемо* $P_3 = S_3$, *де* S_3 *з теореми 3.8.2 є многочленом Лагранжа, що інтерполює* f *в* $-1, -1 + 1/n^2, -1 + 2/n^2, 1$ *або в* $-1, 1 - 2/n^2, 1 - 1/n^2, 1$. *Легко перевірити, що один з них буде шуканим в теоремі 3.8.1 многочленом з* $c = 1$.

Зауваження 3.8.2. *Насправді, сплайн* S_n *в теоремі 3.8.2 здійснює і відповідне локальне наближення, і його неважко (спираючись на його просте означення) згладити до його першої неперервної похідної (звісно, з сувом і додаванням вузлів), або, навіть, надати йому якусь інтерполяційну властивість, однак, ми не приділяємо цьому увагу, оскільки він нам потрібен лише як проміжний для доведення теореми 3.8.1.*

Доведення теореми 3.8.2

Спочатку означимо інтерполяційний в своїх вузлах сплайн з гарними наближаючими властивостями, але без обмежень на форму. Його представлення в наступній пропозиції 3.8.1 складає окремий інтерес (оскільки, зокрема, легко модифікується і чисельно реалізується, за потребою) а тоді, виправимо цей сплайн для (3.8.3).

Нехай $A_n = \{a_j\}_{j=0}^n$ набір з $n+1$ фіксованих точок $a_j: \ -1 = a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0 = 1, \ \ n \in \mathbb{N}$. Для кожного $j = q, ..., n, \ q \in \mathbb{N}, \ q \leqslant n$, нехай $L_q(x, a_j, g) := L(x, a_j, ..., a_{j-q}, g)$ – многочлен Лагранжа, степеня $\leqslant q$, що інтерполює $g \in C$ в $a_j, ..., a_{j-q}$, і нехай $\widetilde{L}_q(x, [a_j, a_{j-q}], g)$ – многочлен Лагранжа, степеня $\leqslant q$, що інтерполює g в рівновіддалених точках $a_j + \mu(a_{j-q} - a_j)/q, \ \mu = 0, \ldots, q$. Згадаємо, що для $x \in [a_j, a_{j-q}], \ j = q, \ldots, n$, за нерівністю Уітні [167]

$$|g(x) - \widetilde{L}_q(x, [a_j, a_{j-q}], g)| \leqslant 3\,\omega_{q+1}\left(g, (a_{j-q} - a_j)/(q+1), [a_j, a_{j-q}]\right),$$

і тому

$$|g(x) - L_q(x, a_j, g)| = |g(x) - \widetilde{L}_q(x, [a_j, a_{j-q}], g) - L_q(x, a_j, g - \widetilde{L}_q)|$$

$$\leqslant \|g - \widetilde{L}_q\|_{[a_j, a_{j-q}]} \left(1 + \sum_{\nu=j-q+1}^{j-1} \prod_{k=j-q, k\neq\nu}^{j} \left|\frac{x - a_k}{a_\nu - a_k}\right|\right)$$

$$\leqslant 3\,\omega_{q+1}\left(g, (a_{j-q} - a_j)/(q+1), [a_j, a_{j-q}]\right) \left(1 + \sum_{\nu=j-q+1}^{j-1} \prod_{k=j-q, k\neq\nu}^{j} \left|\frac{x - a_k}{a_\nu - a_k}\right|\right) \quad (3.8.5)$$

(якщо $q = 1$, то $\sum_{\nu=j}^{j-1} := 0$).

Через $S_q(x, A_n) := S_q(x, A_n, g)$ позначимо неперервний на $[-1, 1]$ сплайн, степеня $\leqslant q$, дефекту q, що інтерполює g в кожній точці набору A_n, а саме,

$$S_q(x, A_n) := \begin{cases} L(x, a_q, ..., a_0, g), & x \in [a_q, 1], \\ L(x, a_j, ..., a_{j-q}, g), & x \in [a_j, a_{j-1}), \quad j = q+1, \ldots, n. \end{cases} \quad (3.8.6)$$

Для кожного $j = q, \ldots, n$, позначимо

$$\Psi_q(x, a_j) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant a_j, \\ \displaystyle\prod_{k=j-q+1}^{j} (x - a_k), & \text{якщо} \quad x > a_j, \end{cases} \qquad \Psi_q(x, a_{q-1}) :\equiv 0.$$

Пропозиція 3.8.1. *Сплайн $S_q \in C$ має представлення*

$$S_q(x, A_n) = L_q(x, a_n, g) + \sum_{j=q}^{n-1} [a_{j+1}, a_j, ..., a_{j-q}, g](a_{j-q} - a_{j+1})\Psi_q(x, a_j), \tag{3.8.7}$$

або, що те саме,

$$S_q(x, A_n) = L_{q-1}(x, a_n, g) + \sum_{j=q}^{n} [a_j, ..., a_{j-q}, g] \left(\Psi_q(x, a_j) - \Psi_q(x, a_{j-1})\right), \tag{3.8.8}$$

де $[\cdot]$ – розділені різниці g.

Доведення. Застосовуючи формулу Ньютона для многочлена Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x, a_n, ..., a_{n-q}, g) &= [a_n, g] + [a_n, a_{n-1}, g](x - a_n) \\ &\quad + \cdots + [a_n, \ldots, a_{n-q}, g] \prod_{k=n-q+1}^{n} (x - a_k) \\ &= L_{q-1}(x, a_n, g) + [a_n, \ldots, a_{n-q}, g] \prod_{k=n-q+1}^{n} (x - a_k) \end{aligned}$$

і q раз тотожність

$$[a_n, \ldots, a_{n-q-1}, g](a_{n-q-1} - a_n) = -[a_n, \ldots, a_{n-q}, g] + [a_{n-1}, \ldots, a_{n-q-1}, g],$$

легко перевірити (3.8.7) для $x \in [a_{n-1}, a_{n-2}]$, тобто отримати рівність

$$\begin{aligned} S_q(x, A_n) &= L_{q-1}(x, a_n, g) + [a_n, ..., a_{n-q}, g] \left(\prod_{k=n-q+1}^{n} (x - a_k) - \Psi_q(x, a_{n-1}) \right) \\ &\quad + [a_{n-1}, ..., a_{n-q-1}, g]\Psi_q(x, a_{n-1}) \\ &= L_{q-1}(x, a_n, g) + [a_n, ..., a_{n-q}, g] \left(x - a_n - x + a_{n-q}\right) \prod_{k=n-q+1}^{n-1} (x - a_k) \\ &\quad + [a_{n-1}, ..., a_{n-q-1}, g] \prod_{k=n-q}^{n-1} (x - a_k) \\ &= \cdots = [a_{n-1}, g] \\ &\quad + [a_{n-1}, a_{n-2}, g](x - a_{n-1}) + \cdots + [a_{n-1}, ..., a_{n-q-1}, g] \prod_{k=n-q}^{n-1} (x - a_k) \\ &= L_{q-1}(x, a_{n-1}, g). \end{aligned} \tag{3.8.9}$$

Повторюючи (3.8.9) для $x \in [a_{n-2}, a_{n-3}]$, ..., $x \in [a_{q+1}, a_q]$, $x \in [a_q, a_0]$, отримуємо (3.8.7) для всіх $x \in I$ (випадок $x \in [a_n, a_{n-1}]$ є очевидним). Пропозицію 3.8.1 доведено.

Для $q = 1$, рівності (3.8.7) і (3.8.8) можна знайти в [56, стор. 143], а для інших аналітичних представлень сплайнів через зрізані степеневі функції $(x - a_j)_+^q$, див., наприклад, [30, Розділ 2.3].

Будемо використовувати пропозицію 3.8.1 для $S_3(x, X_n)$ з $X_n := \{x_j\}_{j=0}^n$ – чебишевське розбиття $[-1, 1]$, тобто для

$$\Psi_3(x, x_j) = (x - x_j)(x - x_{j-1})(x - x_{j-2})\chi(x, x_j),$$

і

$$S_3(x, X_n) = L_3(x, x_n, g) + \sum_{j=3}^{n-1} [x_{j+1}, x_j, \dots, x_{j-3}, g](x_{j-3} - x_{j+1})\Psi_3(x, x_j), \tag{3.8.10}$$

або, що те саме,

$$S_3(x, X_n) = L_2(x, x_n, g) + \sum_{j=3}^{n} [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}, g] \left(\Psi_3(x, x_j) - \Psi_3(x, x_{j-1})\right), \tag{3.8.11}$$

або, що те саме,

$$\begin{aligned} S_3(x, X_n) = {} & L_1(x, x_n, g) \\ & + [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, g] \left((x - x_n)(x - x_{n-1}) - \frac{\Psi_3(x, x_n) - \Psi_3(x, x_{n-1})}{x_{n-3} - x_n} \right) \\ & + \sum_{j=3}^{n-1} [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, g] \left(\frac{\Psi_3(x, x_{j+1}) - \Psi_3(x, x_j)}{x_{j-2} - x_{j+1}} - \frac{\Psi_3(x, x_j) - \Psi_3(x, x_{j-1})}{x_{j-3} - x_j} \right) \\ & + [x_2, x_1, x_0, g] \frac{\Psi_3(x, x_3)}{x_0 - x_3}. \end{aligned} \tag{3.8.12}$$

Відразу зауважимо, що нерівності (3.8.5) тягнуть оцінку

$$|g(x) - S_3(x, X_n)| \leqslant c\,\omega_4(g, \rho), \quad x \in I, \tag{3.8.13}$$

де тут і надалі c – абсолютні сталі, які можуть бути різними навіть в одному рядку.

Покладемо

$$c_j := \frac{x_j + x_{j-1} + x_{j-2}}{3}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Зафіксуємо j. Нехай

$$\begin{aligned} & a_\nu := a_{j,\nu} := x_j \vee x_{j-1} \vee x_{j-2}, \\ & \widetilde{h}_\nu := \widetilde{h}_{j,\nu} := -(2h_j + h_{j-1})/3 \vee (h_j - h_{j-1})/3 \vee (h_j + 2h_{j-1})/3, \\ & \widehat{h}_\nu := \widehat{h}_{j,\nu} := h_j(h_j + h_{j-1}) \vee -h_j h_{j-1} \vee (h_j + h_{j-1})h_{j-1}, \end{aligned} \tag{3.8.14}$$

якщо $\nu = 1 \vee 2 \vee 3$, відповідно. Надалі $\nu \in \{1,2,3\}$ лише.

Введемо три функції $\Psi_{j,\nu} \in C$, що співпадають з $\Psi_3(x,x_j)$ м.с. на I,

$$\Psi_{j,\nu} := \Psi_{j,\nu}(x) := \Psi_3(x,x_j)\,\chi(x,a_\nu) = (x-a_\nu)_+^3 + 3\,\widetilde{h}_\nu(x-a_\nu)_+^2 + \widehat{h}_\nu(x-a_\nu)_+.$$

Тобто,

$$\Psi_{j,\nu}(x) = \Psi_3(x,x_j), \quad x \in I\setminus[x_j,a_\nu]\,, \tag{3.8.15}$$

$$|\Psi_3(x,x_j) - \Psi_{j,\nu}(x)| \leqslant c\,h_j^3, \quad x \in [x_j,a_\nu], \tag{3.8.16}$$

і

$$\Psi_{j,\nu}(x) = \int_{-1}^{x}\left(6\int_{-1}^{t}\Big((u-a_\nu)_+ + \widetilde{h}_\nu\chi(u,a_\nu)\Big)\,du + \widehat{h}_\nu\chi(t,a_\nu)\right)dt. \tag{3.8.17}$$

Зауважимо,

$$|\widetilde{h}_\nu| < 2\,h_j, \qquad h_j^2/3 < |\widehat{h}_{j,\nu}| < 3\,h_j^2, \tag{3.8.18}$$

$$\operatorname{sign}\widehat{h}_{j,1} = 1, \quad \operatorname{sign}\widehat{h}_{j,2} = -1, \quad \operatorname{sign}\widehat{h}_{j,3} = 1 \tag{3.8.19}$$

і для $\nu_1,\ \nu_2 \in \{1,2,3\}$, маємо

$$\frac{\Psi''_{j,\nu_1}(x) - \Psi''_{j-1,\nu_2}(x)}{x_{j-3}-x_j} = \frac{6(x-c_j)-6(x-c_{j-1})}{x_{j-3}-x_j} = 2,\ x \in (\max\{a_{\nu_1},a_{\nu_2}\},\infty). \tag{3.8.20}$$

Тепер, нехай $f \in \Delta^{(2)}(Y)$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$, і знову для $i = 1,\dots,s$, нехай

$$O_i := O_i(n,Y) := (x_{j+2},x_{j-1}),\ \text{якщо}\ y_i \in [x_j,x_{j-1}) =: [x_{j_i},x_{j_i-1}),$$

$(x_{n+1} := x_{n+2} := -1-h_n)$, і будемо писати

$$j \in \overline{\overline{H}} := \overline{\overline{H}}(n,Y),\ \text{якщо}\ x_j \in I\setminus(O \cup (x_2,1])\,,\ \text{з}\ O := O(n,Y) := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Зауважимо, що якщо $j \in \overline{\overline{H}}$, то

$$[x_j,x_{j-1},x_{j-2},f]\,\Pi(x_j) \geqslant 0. \tag{3.8.21}$$

Будемо писати $j \in \overline{H} := \overline{H}(n,Y)$, якщо $j \pm 1 \in \overline{\overline{H}}$, і $j \in H := H(n,Y)$, якщо $j \pm 1 \in \overline{H}$, $(H \subset \overline{H} \subset \overline{\overline{H}})$.

Оберемо найменьше число $N := N(Y)$, таке, що для кожного $n \geqslant N$, $H \neq \varnothing$. Оскільки для $3 \leqslant n \leqslant N+10$, твердження теореми 3.8.2 є наслідком "звичайного" наближення сплайнами без обмежень (можна, наприклад, взяти $S_n(x) = S_3(x,X_n)$), то зафіксуємо $n > N+10$, до кінця доведення.

Означення майже коопуклого кубічного сплайна

Позначимо

$$F_j := [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, f], \quad j = 2, \dots, n,$$

$$\Phi_j := [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}, f], \quad j = \overline{3, n-1}.$$

Зауважимо,

$$\Phi_j\,(x_{j-3} - x_{j+1}) = \frac{F_{j+1} - F_j}{x_{j-2} - x_{j+1}} - \frac{F_j - F_{j-1}}{x_{j-3} - x_j}. \tag{3.8.22}$$

Введемо нові функції $\Psi_j,\ j = 2, \dots, n$. Для кожного $j \in \overline{H}$, покладемо

$$\Psi_j(x) := \Psi_{j,2}(x), \quad \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j) \leqslant 0, \tag{3.8.23}$$

інакше покладемо

$$\begin{array}{ll} (a) & \\ (b) & \Psi_j(x) := \\ (c) & \end{array} \begin{cases} \Psi_{j,1}(x), \text{ якщо } |F_{j+1}| > |F_j| \geqslant |F_{j-1}|, \\ \Psi_{j,3}(x), \text{ якщо } |F_{j+1}| \leqslant |F_j| < |F_{j-1}|, \\ \alpha_j\,\Psi_{j,1}(x) + (1 - \alpha_j)\,\Psi_{j,3}(x), \text{ якщо } |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|, \end{cases}$$

де

$$\alpha_j := \frac{\frac{F_{j+1}}{x_{j-2} - x_{j+1}}}{\frac{F_{j+1}}{x_{j-2} - x_{j+1}} + \frac{F_{j-1}}{x_{j-3} - x_j}} \in (0, 1).$$

Для інших $j = 3, \dots, n-1$, таких, що $j \notin \overline{H}$, покладемо

$$\Psi_j(x) := \begin{cases} \Psi_{j,2}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j, Y_i) \leqslant 0, \\ \Psi_{j,1}(x), & \text{інакше}, \end{cases} \tag{3.8.24}$$

де

$$Y_i := (Y \backslash \{y_i\}) \cup \{y_i^*\}, \qquad y_i^* := \begin{cases} x_{j_i+5}, & i = 1, ..., s-1, \\ x_{j_i-6}, & i = s. \end{cases}$$

Нехай

$$\Psi_n(x) := \Psi_3(x, x_n) = (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}), \quad \Psi_2(x) := \Psi_3(x, x_2) = 0. \tag{3.8.25}$$

Зауваження 3.8.3. *В обох "дивних" випадках в* (3.8.24) *було б достатньо взяти просто* $\Psi_j(x) = \Psi_{j,2}(x)$, *щоб мати майже коопуклість нижче означеного сплайна, однак означення* (3.8.24) *є більш зручним для перевірки майже коопуклості многочлена, що буде цей сплайн наближати.*

Покажемо, що неперервний кубічний сплайн

$$S_n(x) = L_3(x, x_n, f) + \sum_{j=3}^{n-1} \Phi_j\,(x_{j-3} - x_{j+1})\,\Psi_j(x), \tag{3.8.26}$$

або, що те саме

$$\begin{aligned} S_n(x) = L_1(x, x_n, f) + F_n \left((x - x_n)(x - x_{n-1}) - \frac{\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)}{x_{n-3} - x_n} \right) \\ + \sum_{j=3}^{n-1} F_j\, A_j(x) + F_2 \frac{\Psi_3(x)}{x_0 - x_3}, \end{aligned} \tag{3.8.27}$$

де

$$A_j(x) := \overline{A}_j(x) - \underline{A}_j(x) := \frac{\Psi_{j+1}(x) - \Psi_j(x)}{x_{j-2} - x_{j+1}} - \frac{\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x)}{x_{j-3} - x_j},$$

задовольняє (3.8.3) і (3.8.4).

За допомогою (3.8.26) і (3.8.27) перевіримо (3.8.3). Представимо множину $\underset{j \in H}{\cup} I_j$, об'єднанням проміжків $[a_\mu, b_\mu]$, $\mu = \overline{1, s_0}$, $1 \leqslant s_0 \leqslant s + 1$, $b_{\mu+1} < a_\mu$, що не перетинаються. Нехай $\underline{j} = \underline{j}(\mu)$ і $\overline{j} = \overline{j}(\mu)$ позначають індекси j такі, що $x_{\underline{j}} = a_\mu$ і $x_{\overline{j}} = b_\mu$, відповідно. Для кожного $\mu = \overline{1, s_0}$, покладемо

$$G_\mu := \left(c_{\underline{j}+1}, c_{\overline{j}}\right], \qquad G := \bigcup_{\mu=1}^{s_0} G_\mu.$$

Зауважимо, що $G \cap ([-1, c_n] \cup (c_3, 1]) = \varnothing$. Більш того, оскільки $n > N + 10$, то в (3.8.3) існує стала c така, що

$$\varnothing \neq (-1, 1) \backslash O_n(c, Y) \subset G.$$

Без втрати загальності перевіримо (3.8.3) лише для одного проміжку G_μ, тобто зафіксуємо μ, і нехай воно буде таким, що $\Pi(x) > 0$, $x \in G_\mu$. Для зручності, нехай $n - 2 > \underline{j}$ і $\overline{j} > 3$. Випадки $n - 2 = \underline{j}$ і $\overline{j} = 3$ доводяться аналогічно з врахуванням (3.8.25).

Нехай

$$\overline{H}_\mu := \left\{\underline{j} + 1, ..., \overline{j}\right\}.$$

Зауважимо, $\overline{H}_\mu \subset \overline{H}$. З (3.8.26), (3.8.23), (a)-(c) і (3.8.19) випливає, що функція S_n', в точках a_ν (див. (3.8.14)), що визначені окремо для кожної Ψ_j з $j \in \overline{H}_\mu$, задовольняє нерівність

$$S'(a_\nu -) \leqslant S'(a_\nu +), \tag{3.8.28}$$

Зауважимо, що $F_j \geqslant 0$ для $j \in \{\underline{j}+2,...,\overline{j}-1\} =: \overline{\overline{H}}_\mu \subset \overline{\overline{H}}$. Тому, зокрема, з нерівностей

$$F_{j+1} \leqslant F_j \geqslant F_{j-1} \quad \text{випливає, що} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad j \in \overline{H}_\mu, \tag{3.8.29}$$

(див. (3.8.22)). Беручи це до уваги, зазначимо, що в $\overline{H}_\mu$ немає жодного j, для якого, у відповідності з (3.8.23) і (a)-(c), було б зроблене означення

$$\Psi_j = \Psi_{j,3} \quad \text{і} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1},$$

як і означення на кшталт

$$\Psi_{j+1} = \Psi_{j+1,3} \quad \text{і} \quad \Psi_j = \alpha_j\,\Psi_{j,1} + (1-\alpha_j)\,\Psi_{j,3} \quad \text{і} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1}.$$

Іншими словами,

$$a_\nu \text{ (що визначана для } \Psi_j) \quad \leqslant \quad a_\nu \text{ (визначеної для } \Psi_{j-1}). \tag{3.8.30}$$

Звідси і (3.8.20) випливає, що

$$A_j''(x) = 0, \quad x \notin \left(\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\right], \tag{3.8.31}$$

де $\underline{a}_j := a_1$ і $\overline{a}_j := a_3$, якщо (c), інакше $\underline{a}_j = \overline{a}_j$ позначають a_ν, що визначена для Ψ_j за (3.8.23), (b) і (c), або за (3.8.24) (якщо $\underline{a}_{j+1} = \overline{a}_{j-1}$, то $\left(\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\right] := \varnothing$).

Користуючись рівністю $\underline{A}_{j+1} = \overline{A}_j$, виділимо з (3.8.27) чотири доданки, що містять функцію Ψ_j

$$-F_{j+1}\,\overline{A}_j(x) + F_j\,\overline{A}_j(x) - F_j\,\underline{A}_j(x) + F_{j-1}\,\underline{A}_j(x). \tag{3.8.32}$$

Беручи до уваги (3.8.29)-(3.8.32), зафіксуємо $j \in \overline{H}_\mu$, і покажемо, що

$$\begin{array}{ll} (**) & \\ (aa) & \\ (bb) & \\ (cc) & \end{array} \qquad S_n''(x) \geqslant 0, \quad \begin{cases} x \in (a_1, a_3], & \text{якщо} \quad (3.8.23), \\ x \in (a_1, a_2], & \text{якщо} \quad (a), \\ x \in (a_2, a_3], & \text{якщо} \quad (b), \\ x \in (a_1, a_3], & \text{якщо} \quad (c), \end{cases}$$

Лише ці три точки a_1, a_2 і a_3 братимуть участь у неведеному нижче.

Почнемо з випадку (aa). Опишемо його на $(a_1, a_2]$. Функція Ψ_{j+1} може бути означена лише за (3.8.23), або (3.8.24), або (a), тоді як Ψ_{j-1} є будь-якою з чотирьох за

(3.8.23), (a)-(c), або за (3.8.24). Однак будь-що $\Psi''_{j+1} = 6(x-a_1)$, $\Psi''_j = 6(x-a_2)$ і $\Psi''_{j-1} = 0$. Тому, згідно (3.8.20), пишемо

$$F_{j+1}\,2 - F_{j+1}\,2 + F_j\,2 - F_j\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} + F_{j-1}\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} \geqslant 0, \quad x \in (a_1, a_2],$$

оскільки $F_j \geqslant F_{j-1}$.

У випадку (bb) Ψ_{j+1} є будь-якою з чотирьох можливих (за (3.8.23), (a)-(c), (3.8.24)), тоді як Ψ_{j-1} означається лише за (3.8.23), або за (3.8.24), або за (b), однак завжди

$$\overline{A}''_j(x) = 2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}} \quad \text{і} \quad \underline{A}''_j(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in (a_2, a_3],$$

де в першій рівності ми скористалися (3.8.20). Отже,

$$F_{j+1}\,2 - F_{j+1}\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}}\right) + F_j\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}}\right) \geqslant 0, \quad x \in (a_2, a_3],$$

оскільки $F_{j+1} \leqslant F_j$.

Щоб побачити (cc) помітимо, що Ψ_{j+1} і Ψ_{j-1} визначаються за (3.8.23), або (3.8.24), або (a) і за (3.8.23), або (3.8.24), або (b), відповідно. Будь-що $\Psi''_{j+1}(x) = 6(x-a_1)$, $\Psi''_j(x) = \alpha_j\,6(x-a_2)$ і $\Psi''_{j-1}(x) = 0$ для $x \in (a_1, a_3]$. Пишемо

$$F_{j+1}\,2 - F_{j+1}\,\frac{6(x-a_1)-\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}} + F_j\,\frac{6(x-a_1)-\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}}$$

$$-F_j\,\frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} + F_{j-1}\,\frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} = F_j\left(2 + \frac{(1-\alpha_j)6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}} - \frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j}\right)$$

$$+F_{j-1}\frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{x_{j-3}-x_j} - F_{j+1}\frac{(1-\alpha_j)6(x-a_2)}{x_{j-2}-x_{j+1}} =: B_1(x) + B_2(x).$$

Таким чином, $B_2(x) = 0$ завдяки вибору α_j, тоді як $B_1(x) \geqslant 0$, для будь-якої $\alpha_j \in [0,1]$. Дійсно, як в (3.8.20), перепишемо

$$B_1(x) = F_j\left(2 - (1-\alpha_j)\frac{6(x-a_1)-6(x-a_2)-6(x-a_1)}{x_{j-2}-x_{j+1}}\right.$$

$$\left. - \alpha_j\frac{6(x-a_2)-6(x-a_3)+6(x-a_3)}{x_{j-3}-x_j}\right)$$

$$= F_j\left(2 - (1-\alpha_j)\,2 + (1-\alpha_j)\frac{6(x-a_1)}{x_{j-2}-x_{j+1}} - \alpha_j\,2 - \alpha_j\frac{6(x-a_3)}{x_{j-3}-x_j}\right) \geqslant 0, \quad x \in (a_1, a_3].$$

Для останнього випадку (**), зауважимо, що обидві $\Psi_{j\pm 1}$ можуть бути будь-якими з чотирьох можливих означень, однак достатньо перевірити лише коли $\Psi_{j+1} =$

$\Psi_{j+1,2}$ і $\Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,2}$, оскільки для інших означень невід'ємність S_n'' на $(a_1, a_2] \cup (a_2, a_3]$ гарантується щойно розглянутими трьома випадками, а саме, на $(a_1, a_2]$ – (bb), або (cc), і на $(a_2, a_3]$ – (aa), або (cc). Отже, для $x \in (a_1, a_3]$, маємо

$$\overline{A}_j''(x) = \frac{6(x-a_1) - 6(x-a_2)_+}{x_{j-2} - x_{j+1}} \quad \text{і} \quad \underline{A}_j''(x) = \frac{6(x-a_2)_+}{x_{j-3} - x_j},$$

що разом з (3.8.20) тягне

$$F_{j+1}\, 2 - F_{j+1}\,\overline{A}_j''(x) + F_j\,\overline{A}_j''(x) - F_j\,\underline{A}_j''(x) + F_{j-1}\,\underline{A}_j''(x) \geqslant 0.$$

Нерівності (**)-(cc) доведено.

Насамкінець, оскільки проміжки з (**)-(cc) покривають весь проміжок G_μ, коли j пробігає множину $\overline{H}_\mu$, то

$$S_n''(x) = \sum_{j \in \overline{\overline{H}}_\mu} F_j\, A_j''(x) \geqslant 0, \quad x \in G_\mu \backslash \{x_j : \ j \in \overline{\overline{H}}_\mu\}, \tag{3.8.33}$$

що разом з (3.8.28) веде до (3.8.3). Твердження (3.8.3) доведено.

Щоб довести (3.8.4) нам потрібна нерівність

$$|\Phi_j| \leqslant c \frac{\omega_4(f, h_j)}{h_j^4}, \tag{3.8.34}$$

(див., наприклад, [56, стор. 54]) і (3.8.15) разом з (3.8.16). Тепер, якщо $x \in [x_{j^*+1}, x_{j^*-3}]$, то з (3.8.10), (3.8.26) і (3.8.13) випливає, що

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_n(x)| &\leqslant |f(x) - S_3(x, X_n)| + |S_3(x, X_n) - S_n(x)| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, \rho) + \sum_{j=3}^{n-1} |\Phi_j| (x_{j-3} - x_{j+1})\, |\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| \\
&= c\,\omega_4(f, \rho) + \sum_{j=\max\{3, j^*-3\}}^{\min\{n-1, j^*+3\}} |\Phi_j| (x_{j-3} - x_{j+1})\, |\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, \rho).
\end{aligned}$$

Оцінку (3.8.4) доведено. Теорему 3.8.2 доведено.

Доведення теореми 3.8.1

Надалі сталим c дозволяється залежити від фіксованого $b \in \mathbb{N}$, тобто $c := c(b)$. Також, будемо писати $c_k := c_k(b)$, якщо на їх значення будемо посилатися.

Скористаємося многочленами $T_j(x) = T_{j,n}(x,b,Y)$ і $\tau_j(x) = \tau_{j,n}(x,b,Y)$, з (2.1.23) і (2.1.24), відповідно, і для кожного $j \in H$ покладемо

$$\widetilde{T}_j(x) := \widetilde{T}_{j,n}(x,b,Y) := T_{j,n}(x,b,\varnothing) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\chi_j(y_i) - T_{j,n}(y_i,b,\varnothing)}{T'_{j,n}(y_i,b,Y_i)} T'_{j,n}(x,b,Y_i),$$

$$\widetilde{\tau}_j(x) := \widetilde{\tau}_{j,n}(x,b,Y) := \tau_{j,n}(x,b,\varnothing) + \sum_{i=1}^{s} \frac{(y_i - x_j)_+ - \tau_{j,n}(y_i,b,\varnothing)}{T'_{j,n}(y_i,b,Y_i)} T'_{j,n}(x,b,Y_i).$$

Наслідок 3.8.1. леми 2.1.1 *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geqslant 6(s+2)$, *то многочлени* $\widetilde{T}_j$ *і* $\widetilde{\tau}_j$, *степеня* cn, *задовольняють нерівносі*

$$|(x - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)| \leqslant c_3\, h_j\, (\Gamma_j(x))^{2b-2s-3}, \quad x \in I, \tag{3.8.35}$$

$$|(x - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)| \leqslant c_3\, h_j\, (\Gamma_j(x))^{2b-2s-3} \left| \frac{x - y_i}{x_j - y_i} \right|, \quad x \in O_i,\ i = 1, ..., s, \tag{3.8.36}$$

$$\left| \chi_j(x) - \widetilde{T}_j(x) \right| \leqslant c_4\ (\Gamma_j(x))^{2b-2s-2}, \quad x \in I, \tag{3.8.37}$$

$$\left| \chi_j(x) - \widetilde{T}_j(x) \right| \leqslant c_4\ (\Gamma_j(x))^{2b-2s-2} \left| \frac{x - y_i}{x_j - y_i} \right|, \quad x \in O_i,\ i = 1, ..., s, \tag{3.8.38}$$

і, зокрема,

$$(y_i - x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(y_i) = \chi_j(y_i) - \widetilde{T}_j(y_i) = 0, \quad i = 1, ..., s, \tag{3.8.39}$$

Введемо числа

$$b_1 = 6(s+2), \quad b_2 = 8(s+2), \quad b_3 = 2b_2 - 2s - 3,$$

$$c_5 = 6(c_3(b_2) + 2c_4(b_2)), \quad c_6 = c_5(1 + 6c_0(b_2)), \quad c_7 = c_6 + 3c_0(b_1), \quad c_8 = c_5(1 + c_0(b_2)) + 3,$$

$$n_1 = 2\ \max\left\{10, [c_7 + 1], \left[\frac{6c_8}{c_1(b_1)} + 1\right]\right\} n$$

($[\cdot]$ – ціла частина). Зафіксуємо $j = 3, \ldots, n-1$. Для кожної точки a_ν (див. (3.8.14)) через $j^*(\nu)$, $j(\nu)$ і $j_*(\nu)$ позначимо три індекса $j = 1, \ldots, n_1 - 1$, такі, що

$$a_\nu - h_{j,n} \in [x_{j^*(\nu),n_1}, x_{j^*(\nu)-1,n_1}),$$
$$a_\nu = x_{j(\nu)},$$
$$a_\nu + h_{j,n} \in [x_{j_*(\nu),n_1}, x_{j_*(\nu)-1,n_1}),$$

відповідно (для $j = n-1$, нехай $j^*(1) = n_1 - 3$, а для $j = 3$, нехай $j_*(2) = j_*(3) = 3$).

Покладемо

$$\widehat{\tau}_{j(\nu)}(x) := \widetilde{\tau}_{j(\nu),n_1}(x, b_2, Y) + \widetilde{h}_\nu\, \widetilde{T}_{j(\nu),n_1}(x, b_2, Y),$$

$$\varphi_{j(\nu)}(x) := 6\int_{-1}^{x} \widehat{\tau}_{j(\nu)}(u)du,$$

$$A_{j(\nu)}(x) := 6\int_{-1}^{x} \Big((u-a_\nu)_+ + \widetilde{h}_\nu\, \chi(u, a_\nu)\Big)\, du - \varphi_{j(\nu)}(x),$$

$$\psi_{j(\nu)}(x) := \psi_{j(\nu)}(x, Y) := \int_{-1}^{x}\Big(\varphi_{j(\nu)}(t) + A_{j(\nu)}(1) T_{j(\nu),n_1}(t, b_2, Y) \tag{3.8.40}$$

$$+ \frac{\widehat{h}_{j,\nu}}{2}\Big(\beta T_{j*(\nu),n_1}(t, b_1, Y) + T_{j(\nu),n_1}(t, b_1, Y) + (1-\beta) T_{j_*(\nu),n_1}(t, b_1, Y)\Big)\Big)dt,$$

де $\beta \in [0, 1]$ може бути обрана (звісно, окремо для кожного $j(\nu)$) такою, що

$$\psi_{j(\nu)}(1) = (1-x_j)(1-x_{j-1})(1-x_{j-2}) \tag{3.8.41}$$

(нагадаємо, $\Psi_{j,\nu}(1) = (1-x_j)(1-x_{j-1})(1-x_{j-2})$). Покажемо це в доведені леми 3.8.1.

Лема 3.8.1. *Якщо фіксоване j належить H, то три многочлена $\psi_{j(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3$, степеня cn_1, задовольняють нерівності*

$$\Big(\psi''_{j(\nu)}(x) - \Psi''_{j,\nu}(x)\Big)\, \Pi(x)\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad \nu = 1 \vee 3, \quad x \in I, \tag{3.8.42}$$

$$\Big(\psi''_{j(2)}(x) - \Psi''_{j,2}(x)\Big)\, \Pi(x)\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad x \in I, \tag{3.8.43}$$

$$\big|\psi_{j(\nu)}(x) - \Psi_{j,\nu}(x)\big| \leqslant c\, h^3_{j,n}\, \Gamma^6_{j,n}(x), \quad x \in I, \tag{3.8.44}$$

Доведення. Скрізь у доведенні вибір n_1 береться до уваги без спеціальних посилань. Також будемо писати $x_{j(\nu)}$, $h_{j(\nu)}$, $\Gamma_{j(\nu)}$ і $T_{j(\nu)}$ замість $x_{j(\nu),n_1}$, $h_{j(\nu),n_1}$, $\Gamma_{j(\nu),n_1}$ і $T_{j(\nu),n_1}$, відповідно. Доведемо (3.8.41). Спираючись на (3.8.18), (3.8.35) і (3.8.37), зауважимо,

$$\big|A_{j(\nu)}(1)\big| \leqslant c_5\, h_{j,n} \int_{-1}^{1} \Gamma^{b_3}_{j(\nu)}(u)du \tag{3.8.45}$$

$$\leqslant c_5\, h_{j,n}\, h^{b_3}_{j(\nu)} \Big(\int_{-\infty}^{x_{j(\nu)}} + \int_{x_{j(\nu)}}^{\infty} (|u - x_{j(\nu)}| + h_{j(\nu)})^{-b_3} du\Big) \leqslant c_5\, h_{j,n}\, h_{j(\nu)}.$$

Також, з (2.1.28), (3.8.17) і (3.8.40), бачимо, що

$$\psi'_{j(\nu)}(1) = \Psi'_{j,\nu}(1) \tag{3.8.46}$$

для будь-кого $\beta \in [0,1]$. Тепер, за допомогою (3.8.18), (2.1.30), (2.1.31), (3.8.35), (3.8.37) і (3.8.45), оцінемо різницю

$$\begin{aligned}\Psi'_{j,\nu}(x) - \psi'_{j(\nu)}(x) &= A_{j(\nu)}(x) - A_{j(\nu)}(1)T_{j(\nu)}(x)\\ &\quad + \widehat{h}_{j,\nu}\,\chi(x,a_\nu) - \frac{\widehat{h}_{j,\nu}}{2}\Big(\beta T_{j^*(\nu)}(x) + T_{j(\nu)}(x) + (1-\beta)T_{j_*(\nu)}(x)\Big)\\ &= 6\int_{-1}^{x}(u-a_\nu)_+ + \widetilde{h}_\nu\,\chi(u,a_\nu) - \varphi'_{j(\nu)}(u) - A_{j(\nu)}(1)T'_{j(\nu)}(u)du\\ &\quad + \frac{\widehat{h}_{j,\nu}}{2}\Big[\Big(\chi(x,a_\nu) - T_{j(\nu)}(x)\Big)\\ &\quad + \Big(\beta\big(\chi(x,x_{j^*(\nu)}) - T_{j^*(\nu)}(x)\big) + (1-\beta)\big(\chi(x,x_{j_*(\nu)}) - T_{j_*(\nu)}(x)\big)\Big)\\ &\quad + \Big(\chi(x,a_\nu) - \big(\beta\chi(x,x_{j^*(\nu)}) + (1-\beta)\chi(x,x_{j_*(\nu)})\big)\Big)\Big]\\ &=: A(x) + \frac{\widehat{h}_{j,\nu}}{2}\big[B(x)+C(x)+D(x)\big].\end{aligned}$$

Отже, якщо $x < x_{j(\nu)}$, то

$$\begin{aligned}&|A(x)|\\ &\leqslant 6\int_{-1}^{x}\left(c_3(b_2)h_{j(\nu)}\Gamma^{b_3}_{j(\nu)}(u) + 2h_{j,n}c_4(b_2)\Gamma^{b_3+1}_{j(\nu)}(u) + c_5h_{j,n}h_{j(\nu)}c_0(b_2)\frac{1}{h_{j(\nu)}}\Gamma^{2b_2-s}_{j(\nu)}(u)\right)du\\ &\leqslant c_6h_{j,n}h^{b_3}_{j(\nu)}\int_{-\infty}^{x}(|u-x_{j(\nu)}| + h_{j(\nu)})^{-b_3}du \leqslant c_6h_{j,n}h_{j(\nu)}\Gamma^{b_3-1}_{j(\nu)}(x),\end{aligned}$$

а якщо $x > x_{j(\nu)}$, то, користуючись (2.1.28) і (3.8.46), аналогічно знаходимо

$$|A(x)| = \left|\int_x^1 A'(u)du\right| \leqslant c_6h_{j,n}h^{b_3}_{j(\nu)}\int_x^{\infty}(|u-x_{j(\nu)}| + h_{j(\nu)})^{-b_3}du \leqslant c_6h_{j,n}h_{j(\nu)}\Gamma^{b_3-1}_{j(\nu)}(x).$$

Далі,

$$\begin{aligned}|B(x)| &\leqslant c_0(b_1)\Gamma^{2b_1-s-1}_{j(\nu)}(x) \leqslant c_0(b_1)\Gamma^{b_1}_{j(\nu)}(x), \quad x\in I,\\ |C(x)| &\leqslant c_0(b_1)\Gamma^{b_1}_{j^*(\nu)}(x) + c_0(b_1)\Gamma^{b_1}_{j_*(\nu)}(x), \quad x\in I,\end{aligned}$$

і

$$D(x) = \begin{cases} -\big(\chi(x,x_{j^*(\nu)}) - \chi(x,a_\nu)\big), & \text{якщо} \quad \beta = 1,\\ \chi(x,a_\nu) - \chi(x,x_{j_*(\nu)}), & \text{якщо} \quad \beta = 0,\end{cases} \qquad x\in I. \tag{3.8.47}$$

Тобто,

$$\begin{aligned}\left|\Psi'_{j,\nu}(x) - \psi'_{j(\nu)}(x)\right| &\leqslant c_6h_{j,n}h_{j(\nu)}\Gamma^{b_3-1}_{j(\nu)}(x)\\ &\quad + c_0(b_1)\frac{|\widehat{h}_{j,\nu}|}{2}\Big[\Gamma^{b_1}_{j^*(\nu)}(x) + \Gamma^{b_1}_{j(\nu)}(x) + \Gamma^{b_1}_{j_*(\nu)}(x)\Big]\\ &\quad + \frac{|\widehat{h}_{j,\nu}|}{2}\,|D(x)|, \quad x\in I.\end{aligned} \tag{3.8.48}$$

Користуючись (3.8.48) і (3.8.47), зазначимо, що

$$\begin{aligned}\left|\Psi_{j,\nu}(1)-\psi_{j(\nu)}(1)\right| &= \left|\int_{-1}^{1}\Psi'_{j,\nu}(x)-\psi'_{j(\nu)}(x)dx\right| \\ &\leqslant \frac{|\widehat{h}_{j,\nu}|}{2}\Bigg[c_0(b_1)\left(\int_{-\infty}^{x_{j^*(\nu)}}+\int_{x_{j^*(\nu)}}^{\infty}\Gamma^{b_1}_{j^*(\nu)}(x)dx\right) \\ &\quad+(c_6+c_0(b_1))\left(\int_{-\infty}^{x_{j(\nu)}}+\int_{x_{j(\nu)}}^{\infty}\Gamma^{b_1}_{j(\nu)}(x)dx\right) \\ &\quad+c_0(b_1)\left(\int_{-\infty}^{x_{j_*(\nu)}}+\int_{x_{j_*(\nu)}}^{\infty}\Gamma^{b_1}_{j_*(\nu)}(x)dx\right)+\int_{-1}^{1}|D(x)|\,dx\Bigg] \\ &\leqslant \frac{|\widehat{h}_{j,\nu}|}{2}\left(c_7\,\max\{h_{j^*(\nu)},h_{j(\nu)},h_{j_*(\nu)}\}+|\pm h_{j,n}|\right)\end{aligned}$$

і, оскільки $h_{j,n} > c_7\max\{h_{j^*(\nu)},h_{j(\nu)},h_{j_*(\nu)}\}$, то $\beta\in[0,1]$ може бути обрана так, щоб мати (3.8.41).

Залучаючи (3.8.41), отримуємо (3.8.44) з (3.8.48) і (3.8.47) як зазвичай. Тобто, якщо $x < x_{j,n}$, то

$$\left|\Psi_{j,\nu}(x)-\psi_{j(\nu)}(x)\right| = \left|\int_{-1}^{x}\Psi'_{j,\nu}(u)-\psi'_{j(\nu)}(u)du\right| \leqslant c\,|\widehat{h}_{j,n}|\int_{-\infty}^{x}\Gamma^{b_1}_{j,n}(u)du \leqslant c\,h^3_{j,n}\Gamma^6_{j,n}(x),$$

а якщо $x > x_{j,n}$, то

$$\left|\Psi_{j,\nu}(x)-\psi_{j(\nu)}(x)\right| = \left|\int_{x}^{1}\Psi'_{j,\nu}(u)-\psi'_{j(\nu)}(u)du\right| \leqslant c\,h^3_{j,n}\Gamma^6_{j,n}(x).$$

Насамкінець, доведемо одну з трьох схожих нерівностей (3.8.42) і (3.8.43), скажімо (3.8.42) з $\nu=1$. Якщо $x\in I\backslash O(n_1,Y)$, то (2.1.27), (3.8.19), (3.8.18), (3.8.45), (2.1.32), (2.1.31), (3.8.35) і (3.8.37) породжують нерівність

$$\begin{aligned}\left(\psi''_{j(1)}(x)-\Psi''_{j,1}(x)\right)\Pi(x)\Pi(x_j) &= \Bigg(-A'_{j(1)}(x)+\beta\frac{\widehat{h}_{j,1}}{2}T'_{j^*(1)}(x) \\ &\quad+\Big(\frac{\widehat{h}_{j,1}}{2}+A_{j(1)}(1)\Big)T'_{j(1)}(x)+(1-\beta)\frac{\widehat{h}_{j,1}}{2}T'_{j_*(1)}(x)\Bigg)\Pi(x)\Pi(x_j) \\ &\geqslant \frac{\widehat{h}_{j,1}}{2}\left|T'_{j(1)}(x)\right|-\left|A'_{j(1)}(x)\right|-\left|A_{j(1)}(1)T'_{j(1)}(x)\right| \\ &\geqslant \frac{c_1(b_1)}{6}\frac{h^2_{j,n}}{h_{j(1)}}\Gamma^{2(b_1+s)}_{j(1)}(x)-(c_5+3)h_{j,n}\Gamma^{b_3}_{j(1)}(x)-c_5c_0(b_2)h_{j,n}\Gamma^{2b_2-s}_{j(1)}(x) \\ &\geqslant \left(\frac{h_{j,n}}{h_{j(1),n_1}}\frac{c_1(b_1)}{6}-c_8\right)\Gamma^{2(b_1+s)}_{j(1)}(x)\geqslant 0,\end{aligned}$$

завдячуючи n_1. Використовуючи (2.1.33), (3.8.36) і (3.8.38), ми аналогічно таку ж саму нерівність отримуємо і для $x \in O(n_1, Y)$. Лему 3.8.1 доведено.

Означення майже коопуклого многочлена

Для кожного $j = 3, \dots, n-1$, введемо многочлен ψ_j, степеня cn_1. Якщо $j \in \overline{H}$, то покладемо

$$\psi_j(x) := \psi_{j(2)}(x) \quad \text{якщо} \quad \Phi_j \, \Pi(x_j) \leqslant 0,$$

інакше покладемо

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j(1)}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| \geqslant |F_{j-1}|, \\ \psi_{j(3)}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| \leqslant |F_j| < |F_{j-1}|, \\ \alpha_j \, \psi_{j(1)}(x) + (1-\alpha_j) \, \psi_{j(3)}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|. \end{cases}$$

Якщо $j \notin \overline{H}$, тобто $\{j : \, x_j \in \overline{O}_i(n, Y), \; i = 1, ..., s\}$, то нехай

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j(2)}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j \, \Pi(x_j, Y_i) \leqslant 0, \\ \psi_{j(1)}(x), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тепер, покладемо

$$P_n(x) = L_3(x, x_n, f) + \sum_{j=3}^{n-1} \Phi_j \, (x_{j-3} - x_{j+1}) \, \psi_j(x).$$

Перевіремо (3.8.1). Для цього лему 3.8.1 будемо використовувати у двох сенсах: у "звичайному" для $j \in \overline{H} = \overline{H}(n, Y)$, а якщо $j \notin \overline{H}(n, Y)$, то у сенсі, що $j \in \overline{H}(n, Y_i)$.

Отже, (3.8.42), (3.8.43), (3.8.17), (3.8.26), (3.8.27) і (3.8.33) тягнуть

$$\begin{aligned}
P_n''(x)\Pi(x) &= \left(L_3''(x, x_n, f) + \sum_{j=3}^{n-1} \Phi_j\,(x_{j-3} - x_{j+1})\bigl(\psi_j''(x) - \Psi_j''(x)\bigr) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=3}^{n-1} \Phi_j\,(x_{j-3} - x_{j+1})\,\Psi_j''(x) \right) \Pi(x) \\
&= \sum_{j\in\overline{H}} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} \Phi_j \Pi(x_j)(x_{j-3} - x_{j+1}) \left(\psi_{j(\nu)}''(x) - \Psi_{j,\nu}''(x) \right) \Pi(x)\Pi(x_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j:x_j\in O_i} \frac{1}{\Pi^2(x_j, Y_i)} \Phi_j \Pi(x_j, Y_i)(x_{j-3} - x_{j+1}) \\
&\quad \times \left(\psi_{j(2\vee1)}''(x) - \Psi_{j,2\vee1}''(x) \right) \Pi(x, Y)\Pi(x_j, Y_i) \\
&\quad + \left(F_n\Bigl(2 - \frac{\Psi_n''(x) - \Psi_{n-1}''(x)}{x_{n-3} - x_n}\Bigr) + \sum_{j=3}^{n-1} F_j\, A_j''(x) + F_2 \frac{\Psi_3''(x)}{x_0 - x_3} \right) \Pi(x) \\
&=: A(x) + B(x) + C(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(x) &\geqslant 0, & x &\in I, \\
B(x) &\geqslant 0, & x &\in I \setminus \cup_{i=1}^{s} (y_i^*, y_i), \\
C(x) &\geqslant 0, & x &\in G,
\end{aligned}$$

що веде до (3.8.1). Щоб довести (3.8.2) скористаємося (3.8.4), (3.8.34), (3.8.44) і нерівністю $\left\| \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^2 \right\| \leqslant c$. А саме,

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= |f(x) - S_n(x) + S_n(x) - P_n(x)| \\
&= \left| f(x) - S_n(x) + \sum_{j=3}^{n-1} \Phi_j\,(x_{j-3} - x_{j+1})\bigl(\Psi_j(x) - \psi_j(x)\bigr) \right| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, \rho) + c \sum_{j=3}^{n-1} \omega_4(f, h_j)\Gamma_j^6(x) \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, \rho) + c \sum_{j=1}^{n} \omega_4 \left(f, c\frac{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho(|x - x_j| + \rho)}}{\sqrt{\rho}} \right) \frac{\rho^2(|x - x_j| + \rho)^2}{(|x - x_j| + \rho)^4} \Gamma_j^2(x) \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, \rho).
\end{aligned}$$

Теорему 3.8.1 доведено.

3.9 Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій

Результат цього підрозділу містяться в [18].

Нижче C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| = \|f\|_{\mathbb{R}} = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, а $\mathbb{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів $P_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядку $\leqslant n \in \mathbb{N}$ з $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

Знову будемо орієнтуватися на класичну оцінку (2.2.1) похибки наближення функцій з C поліномами з $\mathbb{T}_n$ (отриману, нагадаємо, Джексоном [98] для $k = 1$, Зігмундом [178] та Ахієзером [1] для $k = 2$, і Стєчкіним [43] для $k \geqslant 3$): *Якщо $f \in C$, то для кожного натурального n знайдеться $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$\|f - P_n\| \leqslant c(k)\, \omega_k\left(f, \pi/n\right), \tag{3.9.1}$$

де $c(k)$ – додатня стала, що залежить тільки від k, а $\omega_k\left(f, \cdot\right)$ – k-й модуль гладкості функції f. Детальніше див., наприклад, [25, Розділ 4].

Як вже зазначалося, у 1968 році Лоренц і Целлер [130] для $k = 1$ отримали дзвоноподібний аналог нерівності (3.9.1), тобто коли дзвоноподібні (парні і незростаючі на $[0, \pi]$) 2π-періодичні функції з C наближуються дзвоноподібними поліномами з $\mathbb{T}_n$.

В статтях Попова [37] та Залізко [27] були доведені коопуклі (див. означення нижче) аналоги нерівності (3.9.1) для $k = 2$ та $k = 3$, відповідно. Більш того, в [26] були використані міркування робіт Швєдова [52] та ДеВора, Лєвіатана, Шевчука [72] щоб показати, що для $k > 3$ такого коопуклого аналогу не існує.

Тим не менш, як нам відомо з коопуклого наближення алгебраїчними многочленами на відрізку, див. попередній підрозділ 3.8, *якщо для наближаючих многочленів дозволити деяке послаблення умови коопуклості в маленьких околах точок перегину функції, то можна отримати додатковий порядок наближення* і, як нам здається, не більше ніж один, хоча відповідного контрприкладу ще не побудовано.

В цьому підрозділі в теоремі 3.9.1 ми доводимо тригонометричний аналог алгебраїчного результату з підрозділу 3.8. Це знову так зване *майже* коопукле наближення. Щоб записати теорему 3.9.1 нагадаємо/дамо необхідні позначення.

Нехай $s \in \mathbb{N}$ і на $[-\pi, \pi)$ зафіксовано $2s$ точок $y_i : -\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi$, а для інших $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначено періодично рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$, (тобто, $y_0 = y_{2s} + 2\pi,\ \ldots,\ y_{2s+1} = y_1 - 2\pi,\ \ldots$), $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, а $\Delta^{(2)}(Y)$ – множина всіх функцій

$f \in C$, що опуклі до низу на $[y_1, y_0]$, опуклі до гори на $[y_2, y_1]$, опуклі до низу на $[y_3, y_2]$ і т.д., тобто *коопуклі* (між собою) функції. Також, якщо f двічі диференційовна, то $f \in \Delta^{(2)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f''(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2} \qquad \big(\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)\big).$$

Теорема 3.9.1. *Якщо функція* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то існує стала* N_Y, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, *така, що для кожного* $n \geqslant N_Y$ *знайдеться поліном* $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$, *для якого виконуються нерівності*

$$P_n''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i\in\mathbb{Z}} \left(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n\right), \tag{3.9.2}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\, \omega_4(f, \pi/n), \tag{3.9.3}$$

де c *і* $c(s)$ *– додатні сталі, які залежать тільки від* s.

Наступна теорема 3.9.2 є простим наслідком теореми 3.9.1 і нерівності Уітні [167] $\|f - f(0)\| \leqslant 2\,\omega_4(f, 2\pi)$.

Теорема 3.9.2. *Якщо функція* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *знайдеться поліном* $P_n \in \mathbb{T}_n$ *такий, що*

$$P_n''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i\in\mathbb{Z}} \left(y_i - c/n, y_i + c/n\right), \tag{3.9.4}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant C_Y\, \omega_4(f, \pi/n), \tag{3.9.5}$$

де c *– стала, яка залежать тільки від* s, *а* C_Y *– стала, яка залежать тільки від* $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$.

Зауваження 3.9.1. *Спираючись на контрприклади Левіатана і Шевчука, зокрема з* [122] *для майже комонотонного наближення на відрізку, нам здається, що* ω_4 *в* (3.9.3) *та* (3.9.5) *неможливо замінити на* ω_k *з* $k > 4$, *а сталі* N_Y *і* C_Y *в теоремах 3.9.1 і 3.9.2 – на сталі незалежні від* $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *(а залежні, скажімо, від* s*). Обидва припущення не розглядаються в цій статті. Також, ми не приділяємо увагу сталій* c *в обох теоремах, тобто не намагаємося зробити її абсолютною або/і найменьшою з можливих.*

Історія (майже) копозитивного та комонотонного наближень неперервних періодичних функцій міститься в підрозділах 5.2 та 2.4 а їх алгебраїчні випадки в 5.1 та в статті Левіатана і Шевчука [118], відповідно.

Доведення теореми 3.9.1 має спільні моменти з доведеннями теорем 3.8.1 і 3.8.2 (тобто з алгебраїчним поточковим аналогом), однак відрізняється від них за деталями та у принципових моментах, пов'язаних з необхідністю "боротьби" з алгебраїчними доданками при означені наближаючого тригонометричного полінома, як при доведенні теореми 2.4.1 (майже комонотонне наближення). Більш детально, ми доводимо теорему 3.9.1 через проміжне наближення кубічним сплайном, який нам потрібен у явному вигляді. Він записується сумою зрізаних степеневих функцій і інтеграли від тригонометричного ядра (їх лінійні комбінації), що наближають ці функції, мають природні алгебраїчні доданки. Ці доданки виписуються явно і знищують один одного в цілому при підрахунку всієї суми по періоду (завдяки підібраному розбиттю), і залишається лише шуканий тригонометричний поліном.

Допоміжні факти для доведення теореми 3.9.1

1°. Нехай

$$h := h_n := \frac{\pi}{n}, \quad x_j := x_{j,n} := -j\,h, \quad I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$m \in \{1, 2, 3, 10, 20, 30\}.$$

Для фіксованих $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ і n позначимо

$$O_{i,m} := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m+1}, x_{j-m}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}) =: [x_{j_i}, x_{j_i-1}),$$

$$O_m := O(Y, n, m) := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_{i,m}.$$

Будемо писати $j \in H(Y, n, m)$, якщо $x_j \subset \mathbb{R}\backslash O_m$. Нехай

$$H_m := \{j : \, j \in H(Y, n, m), \; |j| \leqslant n\}.$$

Оберемо $N_Y \in \mathbb{N}$ достатньо великим, щоб

$$O_{i,30} \cap O_{i-1,30} = \varnothing \tag{3.9.6}$$

для всіх $n \geqslant N_Y$ і всіх $i = 1, ..., 2s$ (отже N_Y залежить тільки від $\min\limits_{i=1,...,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$). Далі $n > N_Y$. Знову нехай

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, \quad \chi_j(x) := \chi(x, x_j), \quad (x - x_j)_+ := (x - x_j)\chi_j(x),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\left|\sin\frac{x-(x_j+h/2)}{2}\right|}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N},$$

де, нагадаємо,

$$\left\| \sum_{j=1-n}^{n} \Gamma_j^2 \right\| < 6, \tag{3.9.7}$$

(див. [144]) і в наступній лемі 3.9.1 зберемо лему 2.4.1 з властивостями функцій

$$t_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y) := \frac{\int_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du}{\int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du}, \quad j \in H_{10}, \tag{3.9.8}$$

де

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) := \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_j)}{2}}{\sin\frac{x-x_j}{2}}\right)^{2b} + \left(\frac{\sin\frac{n(x-x_{j-1})}{2}}{\sin\frac{x-x_{j-1}}{2}}\right)^{2b} \in \mathbb{T}_{(n-1)b}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.9.9}$$

(строго додатній поліном у вигляді суми двох "сусідніх" ядер типу Джексона) і

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, t_j) := \alpha \int_{x_j-\pi}^{x} t_{j+10}(u)du + (1-\alpha)\int_{x_j-\pi}^{x} t_{j-10}(u)du, \quad j \in H_{20}, \tag{3.9.10}$$

де $\alpha = \alpha(j) \in [0,1]$ обрано з умови $\tau_j(x_j+\pi) = \pi$, і де, нагадаємо, функції t_j і τ_j можуть на $\mathbb{R}$ бути представлені у вигляді

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_j(x), \quad j \in H_{10}, \tag{3.9.11}$$

$$\tau_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_j(x), \quad j \in H_{20}, \tag{3.9.12}$$

з деякими $\hat{R}_j, \tilde{R}_j \in \mathbb{T}_{c_6 n}$, а також лемми 2.4.2 і 2.4.3 з властивостями функцій $\widetilde{t}_j$ та $\widetilde{\tau}_j$:

$$\widetilde{t}_j(x) := \widetilde{t}_{j,n}(x, b) := \bar{t}_j(x) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\chi_j(y_i) - \bar{t}_j(y_i)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)}\hat{t}_{j_i}(x), \quad j \in H_{10},$$

де функція $\bar{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \varnothing)$ означена в (3.9.8) з $\Pi(x) :\equiv 1$ і $\bar{b} = b+3$, а

$$\hat{t}_{j_i}(x) := \left(\bar{t}_{j_i+10}(x) - \breve{t}_{j_i-10}(x)\right)\frac{\Pi(x, Y_i)}{\Pi(x_{j_i}, Y_i)}$$

– тригонометричний поліном, в якому j_i позначає індекс j такий, що $y_i \in [x_j, x_{j-1})$, $i = 1, ..., 2s$, а функція $\breve{t}_j(x) := t_{j,n}(x, \bar{b}, \breve{Y}_i)$ означена в (3.9.8) з $\breve{Y}_i := \{y_i - \pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, і

$$Y_i := (Y \backslash \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}) \cup \{y_i^* + 2\pi\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}},$$

де y_i^* – лівий кінець інтервалу $O_{i,20}$, якщо i непарне, і – правий, якщо i парне;

$$\widetilde{\tau}_j(x) := \widetilde{\tau}_{j,n}(x, b) := \tau_{j,n}(x, b, \bar{t}_j) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{(y_i - x_j)_+ - \tau_{j,n}(y_i, b, \bar{t}_j)}{\hat{t}_{j_i}(y_i)}\hat{t}_{j_i}(x), \quad j \in H_{20}.$$

Лема 3.9.1. *Якщо* $j \in H_{10}$ *і* $b \geqslant s+2$, *то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.9.13}$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leqslant c_1\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{3.9.14}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leqslant c_2 \frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.9.15}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_3 \frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash O_{10}, \tag{3.9.16}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_3 \frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{3.9.17}$$

якщо $j \in H_{10}$ *і* $b \geqslant 3s+2$, *то* $\widetilde{t}_j$ *задовольняє* (3.9.14), (3.9.11) *і*

$$\left|\chi_j(x) - \widetilde{t}_j(x)\right| \leqslant c_7\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10},\ i = 1, ..., 2s, \tag{3.9.18}$$

якщо $j \in H_{20}$ *і* $b \geqslant 3s+2$, *то* $\widetilde{\tau}_j$ *задовольняє* (3.9.12) *і*

$$|(x-x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)| \leqslant c_8 h\,(\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{3.9.19}$$

$$|(x-x_j)_+ - \widetilde{\tau}_j(x)| \leqslant c_8 h\,(\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10},\ i = 1, ..., 2s, \tag{3.9.20}$$

де $c_i = c_i(b) = c_i(s,b)$, $i = 1, ..., 8$, *– додатні сталі, які можуть залежити тільки від* s *і* b.

2$^{\text{o}}$. Оскільки ми доводимо теорему 3.9.1 через проміжне наближення сплайном (кусково-поліноміальною функцією), тобто через нерівність $||f-S+S-P_n|| \leqslant ||f-S|| + ||S-P_n||$, далі опишемо цей S. При цьому без спеціальних посилань будемо користуватися нерівністю Уітні [167]

$$|f(x) - L_3(x, x_j, f)| \leqslant 3\,\omega_4(f, \pi/n, [x_{j+1}, x_{j-4}]), \quad x \in [x_{j+1}, x_{j-4}],\ j \in \mathbb{Z},$$

де L_k – многочлен Лагранжа степеня $\leqslant k$, що інтерполює f в $x_j, x_{j-1}, \ldots, x_{j-k}$.

Далі $c > 0$ позначатимуть абсолютні сталі, або сталі, що залежать тільки від s. Вони можуть бути різні навіть якщо знаходяться в одному рядку.

Зафіксуємо $j \in \mathbb{Z}$. Нехай

$$\Psi_3(x, x_j) := (x-x_j)_+(x-x_{j-1})(x-x_{j-2}),$$

$$d_j := x_{j-1},$$

$$a_\nu := a_{j,\nu} := x_j \vee x_{j-1} \vee x_{j-2}, \quad \widetilde{h}_\nu := -h \vee 0 \vee h, \quad \widehat{h}_\nu := 2h^2 \vee -h^2 \vee 2h^2,$$

якщо $\nu = 1 \vee 2 \vee 3$, відповідно. Далі $\nu \in \{1,2,3\}$ тільки.

Введемо три функції $\Psi_{j,\nu} \in C$, що співпадають з $\Psi_3(x, x_j)$ м.с.

$$\Psi_{j,\nu}(x) := \Psi_3(x, x_j)\,\chi(x, a_\nu) = (x - a_\nu)_+^3 + 3\,\widetilde{h}_\nu (x - a_\nu)_+^2 + \widehat{h}_\nu (x - a_\nu)_+.$$

Тобто,

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\nu}(x) &= \Psi_3(x, x_j), && x \in \mathbb{R} \backslash [x_j, a_\nu], \\ |\Psi_{j,\nu}(x) - \Psi_3(x, x_j)| &\leqslant c\, h^3, && x \in [x_j, a_\nu], \end{aligned} \tag{3.9.21}$$

і

$$\Psi_{j,\nu}(x) = \int_{d_j - \pi}^{x} \left(6 \int_{d_j - \pi}^{t} \Big((u - a_\nu)_+ + \widetilde{h}_\nu \chi(u, a_\nu) \Big)\, du + \widehat{h}_\nu \chi(t, a_\nu) \right) dt, \tag{3.9.22}$$

а для $\nu_1,\ \nu_2 \in \{1,2,3\}$, виконується рівність

$$\frac{\Psi''_{j,\nu_1}(x) - \Psi''_{j-1,\nu_2}(x)}{3h} = \frac{6(x - d_j) - 6(x - d_{j-1})}{3h} = 2, \quad x \in (\max\{a_{\nu_1}, a_{\nu_2}\}, \infty). \tag{3.9.23}$$

Без втрати загальності будемо вважати, що $y_1 = x_{30}$ (тобто, точки з Y далекі від $-\pi$ і π), також, згадаємо, що $H_3 \subset H_2 \subset H_1$.

Конструкція майже коопуклого кубічного сплайна

Позначимо дві розділені різниці f

$$\begin{aligned} F_j &:= [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, f], && j = 2 - n, ..., n, \\ \Phi_j &:= [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}, f], && j = 3 - n, ..., n - 1, \end{aligned}$$

(зауважимо, $\Phi_j\, 4h = \frac{F_{j+1} - F_j}{3h} - \frac{F_j - F_{j-1}}{3h}$, для $j \in \mathbb{Z}$, $\forall f$, і $F_j \Pi(x_j) \geqslant 0$, для $j \in H_1$, $f \in \Delta^{(2)}(Y)$).

Введемо нові функції $\Psi_j(x)$, $j = 3 - n, ..., n - 1$. Для кожного $j \in H_2$, покладемо

$(d.0)$ $$\Psi_j(x) := \Psi_{j,2}(x), \quad \text{якщо} \quad \Phi_j\, \Pi(x_j) \leqslant 0,$$

інакше нехай

$(d.1)$, $(d.2)$, $(d.3)$:

$$\Psi_j(x) := \begin{cases} \Psi_{j,1}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| \geqslant |F_{j-1}|, \\ \Psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| \leqslant |F_j| < |F_{j-1}|, \\ \alpha_j\, \Psi_{j,1}(x) + (1 - \alpha_j)\, \Psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|, \end{cases}$$

де

$$\alpha_j := \frac{F_{j+1}}{F_{j+1} + F_{j-1}} \in (0,1).$$

Для інших $j = 3-n, ..., n-1$, таких, що $j \notin H_2$ (тобто, для $j:\ x_j \in O_{i,2},\ i = 1, ..., 2s$) покладемо

$$(d.4) \qquad \Psi_j(x) := \begin{cases} \Psi_{j,2}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j \, \Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \leqslant 0, \\ \Psi_{j,1}(x), & \text{інакше}, \end{cases}$$

де

$$\tilde{Y}_i := (Y \backslash \{y_i\}) \cup \{x_{j_i+5}\}.$$

Нехай

$$(d.5) \qquad \Psi_n(x) := \Psi_3(x, x_n), \quad \Psi_{2-n}(x) :\equiv 0.$$

Зауваження 3.9.2. *В обох "дивних" випадках в (d.4) достатньо взяти просто $\Psi_j(x) = \Psi_{j,2}(x)$, щоб отримати майже коопуклість з f сплайна S, означеного нижче, однак означення (d.4) більш зручне для перевірки майже копозитивності полінома P_n'' далі.*

Покажемо, що кубічний сплайн

$$S(x) = L_3(x, x_n, f) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \, \Psi_j(x), \tag{3.9.24}$$

або еквівалентно,

$$\begin{aligned} S(x) = L_1(x, x_n, f) + F_n \left((x - x_n)(x - x_{n-1}) - \frac{\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)}{3h} \right) \\ + \sum_{j=3-n}^{n-1} F_j \, A_j(x) + F_2 \frac{\Psi_3(x)}{3h}, \end{aligned} \tag{3.9.25}$$

де

$$A_j(x) := \overline{A}_j(x) - \underline{A}_j(x) := \frac{\Psi_{j+1}(x) - \Psi_j(x)}{3h} - \frac{\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x)}{3h},$$

(продовжений періодично з $[-\pi, \pi]$) майже коопуклий з f, тобто

$$\big(S'(x_j+) - S'(x_j-)\big)\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad j \in H_3, \tag{3.9.26}$$

$$S''(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in (x_j, x_{j-1}),\ j \in H_3, \tag{3.9.27}$$

і задовольняє нерівність

$$\|f - S\| = \|f - S\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant c\,\omega_4(f, h) \tag{3.9.28}$$

(на суми в (3.9.24) та (3.9.25) зручно дивитися починаючи з останнього доданку, детальніше про такі представлення див. пропозицію 3.8.1).

За допомогою (3.9.24) і (3.9.25) перевіримо (3.9.26) та (3.9.27).

Представимо множину $[-\pi,\pi] \cap (\underset{j\in H_3}{\cup} I_j)$ об'єднанням проміжків $[a_\mu, b_\mu]$, $\mu = 1,...,2s+1$, $b_{\mu+1} < a_\mu$, що не перетинаються. Нехай $\underline{j} = \underline{j}(\mu)$ і $\overline{j} = \overline{j}(\mu)$ позначають індекси j такі, що $x_{\underline{j}} = a_\mu$ і $x_{\overline{j}} = b_\mu$, відповідно. Для кожного $\mu = 1,...,2s+1$, покладемо

$$G_\mu := \Big(d_{\underline{j}+1}, d_{\overline{j}}\Big], \qquad G := \bigcup_{\mu=1}^{2s+1} G_\mu.$$

Без втрати загальності перевіримо (3.9.27) і (3.9.26) лише для одного проміжку G_μ, тобто зафіксуємо μ, і нехай воно буде таким, що $\Pi(x) > 0$, $x \in G_\mu$. Для зручності, нехай $n > \underline{j}$ і $\overline{j} > 3-n$. Випадки $n = \underline{j}$ і $\overline{j} = 3-n$ доводяться аналогічно з врахуванням (d.5). Нехай

$$\overline{H}_\mu := \big\{\underline{j}+1,...,\overline{j}\big\} \quad \big(\overline{H}_\mu \subset H_2\big).$$

З (3.9.24) і (d.0)-(d.3) випливає, що функція S' в точках a_ν, визначених окремо для кожної Ψ_j з $j \in \overline{H}_\mu$, задовольняє нерівність

$$S'(a_\nu-) \leqslant S'(a_\nu+),$$

тобто (3.9.26) справджується.

Оскільки $F_j \geqslant 0$ для $j \in \big\{\underline{j}+2,...,\overline{j}-1\big\} =: \overline{\overline{H}}_\mu \subset H_1$, тому, зокрема, з нерівностей $F_{j+1} \leqslant F_j \geqslant F_{j-1}$ випливає, що

$$\Phi_j\,\Pi(x_j) \leqslant 0, \quad j \in \overline{H}_\mu. \tag{3.9.29}$$

Беручи це до уваги, зазначимо, що в $\overline{H}_\mu$ немає жодного j для якого, у відповідності з (d.0)-(d.4), було б зроблене означення

$$\Psi_j = \Psi_{j,3} \quad \text{i} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1},$$

як і означення на кшталт

$$\Psi_{j+1} = \Psi_{j+1,3} \quad \text{i} \quad \Psi_j = \alpha_j\,\Psi_{j,1} + (1-\alpha_j)\,\Psi_{j,3} \quad \text{i} \quad \Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,1}.$$

Іншими словами,

$$a_\nu \text{ (що визначана для } \Psi_j) \quad \leqslant \quad a_\nu \text{ (визначеної для } \Psi_{j-1}). \tag{3.9.30}$$

Звідси і (3.9.23) випливає, що

$$A_j''(x) = 0, \quad x \notin \left[\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\right], \tag{3.9.31}$$

де $\underline{a}_j := a_1$ і $\overline{a}_j := a_3$, якщо (d.3), інакше $\underline{a}_j = \overline{a}_j$ позначають a_ν, що визначена для Ψ_j за (d.0)-(d.2), або за (d.4) (якщо $\underline{a}_{j+1} = \overline{a}_{j-1}$, то $\left[\underline{a}_{j+1}, \overline{a}_{j-1}\right] := \varnothing$).

Користуючись рівністю $\underline{A}_{j+1} = \overline{A}_j$, виділимо з (3.9.25) чотири доданки, що містять функцію Ψ_j

$$-F_{j+1}\,\overline{A}_j(x) + F_j\,\overline{A}_j(x) - F_j\,\underline{A}_j(x) + F_{j-1}\,\underline{A}_j(x). \tag{3.9.32}$$

Беручи до уваги (3.9.29)-(3.9.32), зафіксуємо $j \in \overline{H}_\mu$, і покажемо, що

$$\begin{array}{ll} (c.0) & \\ (c.1) & \\ (c.2) & \\ (c.3) & \end{array} \qquad S''(x) \geqslant 0, \quad \begin{cases} x \in (a_1, a_3), & \text{якщо} \quad (d.0), \\ x \in (a_1, a_2), & \text{якщо} \quad (d.1), \\ x \in (a_2, a_3), & \text{якщо} \quad (d.2), \\ x \in (a_1, a_3), & \text{якщо} \quad (d.3), \end{cases}$$

Лише ці три точки $a_1,\ a_2$ і a_3 братимуть участь у неведеному нижче.

Почнемо з випадку (c.1). Опишемо його на (a_1, a_2). Функція Ψ_{j+1} може бути означена лише за (d.0), або (d.4), або (d.1), тоді як Ψ_{j-1} є будь-якою з чотирьох за (d.0)-(d.4). Однак будь-що $\Psi''_{j+1} = 6(x - a_1)$, $\Psi''_j = 6(x - a_2)$ і $\Psi''_{j-1} = 0$. Тому, згідно (3.9.23), пишемо

$$F_{j+1}\,2 - F_{j+1}\,2 + F_j\,2 - F_j\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3} - x_j} + F_{j-1}\frac{6(x-a_2)}{x_{j-3} - x_j} \geqslant 0, \quad x \in (a_1, a_2),$$

оскільки $F_j \geqslant F_{j-1}$.

У випадку (c.2) Ψ_{j+1} є будь-якою з чотирьох можливих (за (d.0)-(d.4)), тоді як Ψ_{j-1} означається лише за (d.0), або за (d.4), або за (d.2), однак завжди

$$\overline{A}_j''(x) = 2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2} - x_{j+1}} \quad \text{і} \quad \underline{A}_j''(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in (a_2, a_3),$$

де в першій рівності ми скористалися (3.9.23). Отже,

$$F_{j+1}\,2 - F_{j+1}\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2} - x_{j+1}}\right) + F_j\left(2 + \frac{6(x-a_2)}{x_{j-2} - x_{j+1}}\right) \geqslant 0, \quad x \in (a_2, a_3),$$

оскільки $F_{j+1} \leqslant F_j$.

Щоб побачити (c.3) помітимо, що Ψ_{j+1} і Ψ_{j-1} визначаються за (d.0), або (d.4), або (d.1) і за (d.0), або (d.4), або (d.2), відповідно. Будь-що $\Psi''_{j+1}(x) = 6(x-a_1)$, $\Psi''_j(x) = \alpha_j\, 6(x-a_2)$ і $\Psi''_{j-1}(x) = 0$ для $x \in (a_1, a_3)$. Пишемо

$$F_{j+1}\, 2 - F_{j+1}\, \frac{6(x-a_1) - \alpha_j 6(x-a_2)}{3h} + F_j\, \frac{6(x-a_1) - \alpha_j 6(x-a_2)}{3h}$$

$$-F_j\, \frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{3h} + F_{j-1}\, \frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{3h} = F_j \left(2 + \frac{(1-\alpha_j)6(x-a_2)}{3h} - \frac{\alpha_j 6(x-a_2)}{3h} \right)$$

$$+F_{j-1} \frac{\alpha_j 2(x-a_2)}{h} - F_{j+1} \frac{(1-\alpha_j)2(x-a_2)}{h} =: B_1(x) + B_2(x).$$

Таким чином, $B_2(x) = 0$ завдяки вибору α_j, тоді як $B_1(x) \geqslant 0$, для будь-якої $\alpha_j \in [0,1]$. Дійсно, як в (3.9.23), перепишемо

$$B_1(x) = F_j \left(2 - (1-\alpha_j) \frac{6(x-a_1) - 6(x-a_2) - 6(x-a_1)}{3h} \right.$$

$$\left. - \alpha_j \frac{6(x-a_2) - 6(x-a_3) + 6(x-a_3)}{3h} \right)$$

$$= F_j \left(2 - (1-\alpha_j)\, 2 + (1-\alpha_j) \frac{2(x-a_1)}{h} - \alpha_j\, 2 - \alpha_j \frac{2(x-a_3)}{h} \right) \geqslant 0, \quad x \in (a_1, a_3).$$

Для останнього випадку (c.0), зауважимо, що обидві $\Psi_{j\pm1}$ можуть бути будь-якими з чотирьох можливих означень, однак достатньо перевірити лише коли $\Psi_{j+1} = \Psi_{j+1,2}$ і $\Psi_{j-1} = \Psi_{j-1,2}$, оскільки для інших означень невід'ємність S'' на $(a_1,a_2) \cup (a_2,a_3)$ гарантується щойно розглянутими трьома випадками, а саме, на (a_1,a_2) – (c.2), або (c.3), і на (a_2,a_3) – (c.1), або (c.3). Отже, для $x \in (a_1,a_3)$, маємо

$$\overline{A}''_j(x) = \frac{6(x-a_1) - 6(x-a_2)_+}{3h} \quad \text{і} \quad \underline{A}''_j(x) = \frac{6(x-a_2)_+}{3h},$$

що разом з (3.9.23) тягне

$$F_{j+1}\, 2 - F_{j+1}\, \overline{A}''_j(x) + F_j\, \overline{A}''_j(x) - F_j\, \underline{A}''_j(x) + F_{j-1}\, \underline{A}''_j(x) \geqslant 0.$$

Нерівності (c.0)-(c.3) доведено.

Насамкінець, оскільки проміжки з (c.0)-(c.3) покривають весь проміжок G_μ, коли j пробігає множину $\overline{H}_\mu$, то

$$S''(x) = \sum_{j \in \overline{\overline{H}}_\mu} F_j\, A''_j(x) \geqslant 0, \quad x \in G_\mu \backslash \{x_j :\ j \in \overline{\overline{H}}_\mu\}, \tag{3.9.33}$$

що і веде до (3.9.27).

Щоб довести (3.9.28) нам потрібна нерівність

$$|\Phi_j| \leqslant c\frac{\omega_4(f,h)}{h^4}, \tag{3.9.34}$$

(див., наприклад, [56, стор. 54]), співвідношення (3.9.21) і технічний сплайн

$$s(x) = L_3(x, x_n, t) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \Psi_3(x, x_j),$$

що інтерполює f в кожній точці x_j без обмежень послідовними кубічними параболами (див. пропозицію 3.8.1).

Тепер нехай $x \in [x_{j^*+1}, x_{j^*-3}]$, тоді з (3.9.24) і (3.9.21) випливає оцінка

$$\begin{aligned}
|f(x) - S(x)| &= |f(x) - s(x) + s(x) + S(x)| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f,h) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} |\Phi_j|\,|\Psi_3(x,x_j) - \Psi_j(x)| \\
&= c\,\omega_4(f,h) + \sum_{j=\max\{3-n,j^*-3\}}^{\min\{n-1,j^*+3\}} |\Phi_j| 4h\,|\Psi_3(x,x_j) - \Psi_j(x)| \leqslant c\,\omega_4(f,h)
\end{aligned}$$

і тому (3.9.28) справджується.

Доведення теореми 3.9.1

Позначимо числа

$$b_1 := s+2, \quad b_2 := 3(s+1),$$

$$c_9 := \max\left\{\frac{6((2\pi)^{2b_2}\max\{c_1(b_2), c_7(b_2)\} + c_8(b_2) + 2)}{3c_3(b_1)}, 2\right\},$$

$$n_1 := 2\,[c_9 + 1]\,n, \;\; h_1 := h_{n_1},$$

$$c_{10} := \max\left\{c_5(b_2)\left(\frac{c_8(b_2)}{2c_9} + c_1(b_2)\right), 10\right\},$$

$$n_2 := 2\,[c_{10} + 1]\,n_1, \quad h_2 := h_{n_2},$$

($[\cdot]$ – ціла частина). Зафіксуємо $j = 3-n, ..., n-1$. Для кожної точки $a_\nu,\ \nu = 1,2,3$, нехай j_ν позначає індекс такий, що $x_{j_\nu} := x_{j_\nu,n_1} = a_\nu$, а j_ν^* – такий, що $x_{j_\nu^*} := x_{j_\nu^*,n_2} = x_{j_\nu}(= x_{j_\nu,n_1})$. Нехай $j \in H_3$. Для кожного $j_\nu,\ \nu = 1,2,3$, візьмемо

$$\widetilde{\tau}_{j_\nu^*}(x) = \widetilde{\tau}_{j_\nu^*,n_2}(x, b_2), \quad \widetilde{t}_{j_\nu^*}(x) = \widetilde{t}_{j_\nu^*,n_2}(x, b_2),$$

і покладемо

$$\varphi_{j,\nu}(x) := 6\int_{d_j-\pi}^{x}\left(\widetilde{\tau}_{j_\nu^*}(u) + \widetilde{h}_\nu\left(\alpha_\nu \widetilde{t}_{(j_\nu+1)^*}(u) + (1-\alpha_\nu)\widetilde{t}_{(j_\nu-1)^*}(u)\right)\right)du, \quad \nu = 1,3,$$
$$\varphi_{j,2}(x) := 6\int_{d_j-\pi}^{x}\left(\widetilde{\tau}_{j_2^*}(u) - \frac{1}{12}h^2\left(\alpha_2 t'_{(j_2+5)^*}(u) + (1-\alpha_2)t'_{(j_2-5)^*}(u)\right)\right)du,$$

де $\alpha_\nu \in [0,1], \nu = 1,2,3$, можуть бути обрані так, що

$$\begin{aligned}&\varphi_{j,\nu}(d_j+\pi) = 3(\pi+h)(\pi-h), \quad \nu = 1,3,\\ &\varphi_{j,2}(d_j+\pi) = 3\pi^2 - \pi h^2/2.\end{aligned} \tag{3.9.35}$$

Дійсно, наприклад, користуючись (3.9.19), (3.9.14) для $\widetilde{t}_{j_\nu^*}$ і (2.2.16), ми для фіксованого j, $\nu = 3$ і $\alpha_3 = 1$ маємо оцінку

$$\begin{aligned}\varphi_{j,3}(d_j+\pi) = 6&\int_{d_j-\pi}^{d_j+\pi}\Big[\widetilde{\tau}_{j_3^*}(u) - (u-a_3)_+ + h\left(\widetilde{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u,x_{j_3+1})\right)\\ &+ h\big(\chi(u,x_{j_3+1}) - \chi(u,a_3)\big)\Big]du + 6\int_{d_j-\pi}^{d_j+\pi}\left((u-a_3)_+ + h\chi(u,a_3)\right)du\\ \geqslant\ & 3(\pi^2-h^2) + 6hh_1\\ &- 6\left|\int_{d_j-\pi}^{d_j+\pi}\left[\widetilde{\tau}_{j_3^*}(u) - (u-a_3)_+ + h\left(\widetilde{t}_{(j_3+1)^*}(u) - \chi(u,x_{j_3+1})\right)\right]du\right|\\ \geqslant\ & 3(\pi^2-h^2) + 6hh_1\\ &- 6c_8(b_2)h_2\int_{d_j-\pi}^{d_j+\pi}\Gamma_{j_3^*,n_2}^{2(b_2-s-1)}(u)du - 6c_1(b_2)h\int_{d_j-\pi}^{d_j+\pi}\Gamma_{(j_3+1)^*,n_2}^{2b_2-2s-1}(u)du\\ \geqslant\ & 3(\pi^2-h^2) + 6hh_1 - 6c_5(b_2)\big(c_8(b_2)h_2^2 + c_1(b_2)hh_2\big) > 3(\pi^2-h^2),\end{aligned}$$

тоді як для $\alpha_3 = 0$ (знову завдяки тому, що $h_1 >> h_2$), аналогічно, має місце протилежна нерівність $\varphi_{j,3}(d_j+\pi) < 3(\pi^2-h^2)$. Отже (3.9.35) доведено для $\nu = 3$, а для $\nu = 1,2$, (3.9.35) доводиться аналогічно.

Тепер, візьмемо

$$t_{j_\nu^*}(x) = t_{j_\nu^*,n_2}(x,b_2,Y), \quad t_{j_\nu}(x) = t_{j_\nu,n_1}(x,b_1,Y),$$

і покладемо

$$\psi_{j,\nu}(x) := \int_{d_j-\pi}^{x}\Big[\varphi_{j,\nu}(u) + \hat{h}_\nu\Big(\beta_\nu t_{(j_\nu+1)^*}(u) + t_{j_\nu}(u) + (1-\beta_\nu)t_{(j_\nu-1)^*}(u)\Big)\Big]du,$$

де $\hat{h}_\nu := h^2 \vee -h^2/4 \vee h^2$, $\nu = 1,2,3$, відповідно.

Лема 3.9.2. *Якщо* $j \in H_2$, *то* $\beta_\nu \in [0,1]$, $\nu = 1,2,3$, *можуть бути обрані так, що*

$$\psi_{j,\nu}(d_j + \pi) = (\pi + h)\pi(\pi - h), \tag{3.9.36}$$

і тоді функції $\psi_{j,\nu}$ *задовольнятимуть нерівності*

$$\begin{aligned} &\Big(\psi''_{j,\nu}(x) - \Psi''_{j,\nu}(x)\Big)\Pi(x)\Pi(x_j) \geqslant 0, \\ &\Big(\psi''_{j,2}(x) - \Psi''_{j,2}(x)\Big)\Pi(x)\Pi(x_j) \leqslant 0, \end{aligned} \qquad \nu = 1,3, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{3.9.37}$$

$$|\Psi_{j,\nu}(x) - \psi_{j,\nu}(x)| \leqslant c\, h^3_{j,n}\, \Gamma^6_{j,n}(x), \quad \nu = 1,2,3, \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{3.9.38}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \psi_{j,\nu}(x) = \frac{1}{8\pi}x^4 + \frac{\pi - d_j}{2\pi}x^3 + \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - h^2}{4\pi}x^2 + \frac{(\pi - d_j)(5d_j^2 - 2\pi^2 - h^2)}{2\pi}x \\ + Q_{j(\nu)}(x), \quad \nu = 1,2,3, \end{aligned} \tag{3.9.39}$$

де $Q_{j(\nu)}$ – *деякий поліноми з* $\mathbb{T}_{cn_2}$.

Доведення. Співвідношення (3.9.36)–(3.9.38) доводяться аргументами, використаними при доведенні (3.9.35) (або див. доведення леми 2.4.4), користуючись значеннями обраних n_1 і n_2, а також нерівностями $\Gamma_{(j_\nu \pm 1)^*, n_2}(x) < \Gamma_{j_\nu \pm 1, n_1}(x) < 2\pi\Gamma_{j_\nu, n_1}(x) < 2\pi\Gamma_{j,n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доведемо лише представлення (3.9.39) з $\nu = 1$ для визначеності. З (3.9.11) і (3.9.12) запишемо

$$\begin{aligned} &\tilde{t}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{2\pi}x + \hat{R}_{j_1^*}(x), && \tilde{\tau}_{j_1^*}(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + \tilde{R}_{j_1^*}(x), \\ &\hat{r}_{j_1^*}(x) := \hat{R}_{j_1^*}(x) - \hat{R}_{j_1^*,0}, && \tilde{r}_{j_1^*}(x) := \tilde{R}_{j_1^*}(x) - \tilde{R}_{j_1^*,0}, \end{aligned}$$

де $\hat{R}_{j_1^*,0}$ і $\tilde{R}_{j_1^*,0}$ – вільні члени поліномів $\hat{R}_{j_1^*}, \tilde{R}_{j_1^*} \in \mathbb{T}_{cn}$, відповідно. Тоді,

$$\begin{aligned} \varphi_{j,1}(x) = &\left(\frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - x_j)}{2\pi}x^2 + 6\tilde{R}_{j_1^*,0}x\right) - \Big(...(d_j - \pi)\Big) \\ &- 6h\left(\frac{1}{4\pi}x^2 + \Big(\alpha_1\hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha_1)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\Big)x\right) + 6h\Big(...(d_j - \pi)\Big) \\ &+ 6\int_{d_j - \pi}^{x}\Big(\tilde{r}_{j_1^*}(u) - h\big(\alpha_1\hat{r}_{(j_1+1)^*}(u) + (1-\alpha_1)\hat{r}_{(j_1-1)^*}(u)\big)\Big)du \\ = &\frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}x^2 + 6Ax \\ &- \left(\frac{1}{2\pi}(d_j - \pi)^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}(d_j - \pi)^2 + 6A(d_j - \pi)\right) + q_{j_1}(x), \end{aligned}$$

де

$$A := \tilde{R}_{j_1^*,0} - h\left(\alpha \hat{R}_{(j_1+1)^*,0} + (1-\alpha)\hat{R}_{(j_1-1)^*,0}\right),$$

і поліном q_{j_1} з $\mathbb{T}_{cn}$ не має вільного члена. Звідси і (3.9.35) знаходимо значення A

$$3(\pi^2 - h^2) = \frac{1}{2\pi}\big((d_j+\pi)^3 - (d_j-\pi)^3\big) + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}\big((d_j+\pi)^2 - (d_j-\pi)^2\big) + 12\pi A$$

$$\Rightarrow\ A = \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - 3h^2}{12\pi},$$

отже,

$$\varphi_{j,1}(x) = \frac{1}{2\pi}x^3 + \frac{3(\pi - d_j)}{2\pi}x^2 + \frac{5d_j^2 - 6d_j\pi - 3h^2}{2\pi}x + \frac{(\pi - d_j)(3d_j^2 - 2d_j\pi - 2\pi^2 - 3h^2)}{2\pi} + q_{j_1}(x).$$

Маючи це, (3.9.11) і (3.9.36), знаходимо (3.9.39) аналогічно. Лему 3.9.2 доведено.

Конструкція майже коопуклого тригонометричного полінома

Для $j = 3-n, n-1$ введемо функції ψ_j. Якщо $j \in H_2$, то покладемо

$$\psi_j(x) := \psi_{j,2}(x), \quad \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j) \leqslant 0,$$

інакше нехай

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j,1}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| \geqslant |F_{j-1}|, \\ \psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| \leqslant |F_j| < |F_{j-1}|, \\ \alpha_j\,\psi_{j,1}(x) + (1-\alpha_j)\,\psi_{j,3}(x), & \text{якщо} \quad |F_{j+1}| > |F_j| < |F_{j-1}|. \end{cases}$$

Якщо $j \notin H_2$ (тобто $j :\ x_j \in O_{i,2},\ i = 1, ..., 2s,$) то нехай

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \psi_{j,2}(x), & \text{якщо} \quad \Phi_j\,\Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \leqslant 0, \\ \psi_{j,1}(x) & \text{інакше}. \end{cases}$$

Тепер, позначимо

$$P_n(x) := L_3(x, x_n, f) + 4h\sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j\,\psi_j(x). \tag{3.9.40}$$

Включення $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$ перевіряється аналогічно до відповідних арифметичних підрахунків в доведенні теореми 2.4.1, тобто всі алгебраїчні доданки з (3.9.39), включаючи L_3, разом з відповідними розділеними різницями в сумі (3.9.40) дорівнюють нулю.

Перевіремо (3.9.2). При цьому будемо використовувати лему 3.9.2 у двох сенсах: у "звичайному" для $j \in H_2 = H(n, Y, 2)$, а якщо $j \notin H_2$, то у сенсі, що $j \in H(n, \tilde{Y}_i, 2)$. Отже, (3.9.37), (3.9.22), (3.9.24), (3.9.25) і (3.9.33) тягнуть

$$\begin{aligned}
P_n''(x)\Pi(x) &= \left(L_3''(x, x_n, f) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \big(\psi_j''(x) - \Psi_j''(x) \big) + 4h \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \Psi_j''(x) \right) \Pi(x) \\
&= 4h \sum_{j \in H_2} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} \Phi_j \Pi(x_j) \left(\psi_{j,\nu}''(x) - \Psi_{j,\nu}''(x) \right) \Pi(x)\Pi(x_j) \\
&\quad + 4h \sum_{i=1}^{2s} \sum_{j: x_j \in O_{i,1}} \frac{1}{\Pi^2(x_j, \tilde{Y}_i)} \Phi_j \Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \left(\psi_{j,2\vee1}''(x) - \Psi_{j,2\vee1}''(x) \right) \Pi(x, Y)\Pi(x_j, \tilde{Y}_i) \\
&\quad + \left(F_n \Big(2 - \frac{\Psi_n''(x) - \Psi_{n-1}''(x)}{3h} \Big) + \sum_{j=3-n}^{n-1} F_j \, A_j''(x) + F_2 \frac{\Psi_3''(x)}{3h} \right) \Pi(x) \\
&=: A(x) + B(x) + C(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(x) &\geqslant 0, & & x \in \mathbb{R}, \\
B(x) &\geqslant 0, & & x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} (x_{j_i+5}, y_i), \\
C(x) &\geqslant 0, & & x \in G \text{ на всіх періодах},
\end{aligned}$$

що веде до (3.9.2). Щоб довести (3.9.3) скористаємося (3.9.28), (3.9.34), (3.9.38) і (3.9.7). А саме,

$$\|f - P_n\| = \|f - S + S - P_n\| = \left\| f - S + \sum_{j=3-n}^{n-1} \Phi_j \, 4h \left(\Psi_j(\cdot) - \psi_j(\cdot) \right) \right\|_{[-\pi,\pi]}$$

$$\leqslant c\,\omega_4(f, h) + c \left\| \sum_{j=3-n}^{n-1} \omega_4(f, h) \Gamma_j^6(\cdot) \right\|_{[-\pi,\pi]} \leqslant c\,\omega_4(f, h).$$

Теорему 3.9.1 доведено.

3.10 Висновки до розділу 3

У розділі 3 доведено наступне:

- Якщо неперервна на $[-1, 1]$ функція $f \in C$ змінює свою опуклість в кожній з $s \in \mathbb{N}$ точок набору $Y_s : -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1$ (тобто f опукла до низу на $[y_1, 1]$, опукла до гори на $[y_2, y_1]$, опукла до низу на $[y_3, y_2]$ і т.д.), то для кожного натурального n, більшого деякої сталої $N(Y_s)$ (або $N(Y_s, r)$), що залежить тільки від

Y_s (або від Y_s і r), існують алгебраїчні многочлени P_n, Q_n, R_n, степеня $\leqslant n$, які теж змінюють свою опуклість в точках Y_s, як f, і

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_2(f, \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1,1].$$

А якщо $s > 1$, то

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant C(Y_s)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1],\ n \geqslant 2,$$

де

$$\rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,$$

і якщо до того ж $f \in W^r,\ r \in \mathbb{N}$, (тобто має абсолютно неперервну $r-1$-у і обмежену r-у похідну), то

$$|f(x) - R_n(x)| \leqslant C(Y_s, r)\,\rho_n^r(x), \quad x \in [-1,1],$$

де $c(s),\ C(Y_s),\ C(Y_s, r)$ – сталі, що залежать тільки від параметрів в дужках, $\omega_k(f,t)$ – k-й модуль неперервності функції f, і якщо $s = 1$, то $N(Y_1) = 1$ (див. підрозділи 3.1–3.3, відповідно).

Зі вказаними сталими, порядки наближень в перших двох оцінках збільшити (і навіть зберегти їх для $s = 1$) неможливо (див. підрозділи 6.3, 6.4), однак, існує стала $N = N(Y_s, f)$ і послідовність $\{P_n\}_{n=N}^{\infty}$ коопуклих до $f \in C$ многочленів P_n, степеня $\leqslant n$, такі, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1],$$

де c – абсолютна стала. Більш того, якщо або $r = 2$ і $k = 1,2,3$, або $r > 2$ і $k \in \mathbb{N}$, і $f \in C^r$ має одну точку перегину, то існує стала $N = N(f,k,r,Y_1)$ така, що для кожного $n \geqslant N$, знайдеться многочлен P_n степеня $\leqslant n$ з тією ж самою точкою перегину і такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,r)\rho_n^r(x)\,\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1],$$

де $c(k,r)$ – стала, яка залежить тільки від k і r (див. підрозділ 3.6).

- Якщо неперервна на $[-1,1]$ f є ко(кусково-)опуклою, то для кожного $n \geqslant 3$, існують кубічний сплайн $S_n \in C$ з $n-1$ чебишевськими вузлами і алгебраїчний многочлен P_n степеня $\leqslant n$ такі, що вони обидва є майже коопуклі з f, тобто коопуклі з f на

$$[-1 + c^2/n^2, 1 - c^2/n^2] \setminus \bigcup_{i=1}^{s} (y_i - c\rho_n(y_i), y_i + c\rho_n(y_i)),$$

і

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant C\,\omega_4(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(s)\,\omega_4(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де c, C – абсолютні сталі, $C(s)$ – стала, яка залежить тільки від s (див. підрозділ 3.8).

• Якщо неперервна на дійсній осі 2π-періодична функція f змінює свою опуклість у $2s$, $s \in \mathbb{N}$, точках перегину $y_i : -\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < ... < y_1 < \pi$, а для решти $i \in \mathbb{Z}$, y_i визначені періодично, то для кожного $n \geqslant N_{y_i}$ знайдено тригонометричний поліном P_n порядку cn такий, що P_n є майже коопуклим з f, тобто він змінює свою опуклість так само як f скрізь за винятком, можливо, маленіких околів y_i :

$$(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n)$$

і

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\,\omega_4(f, \pi/n),$$

де N_{y_i} – стала, що залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, c і $c(s)$ – сталі, що можуть залежити тільки від s, і $\|\cdot\|$ – рівномірна норма (див. підрозділ 3.9).

• Знайдено хороше (просте і в одну строку) представлення кусково-поліноміальних функцій (сплайнів), що складаються зі шматочків многочленів Лагранжа (а отже, з найкращим порядком локального наближення і з інтерполяцією в точках розбиття), зрізаними степеневими функціями. Насправді, це представлення є хорошим методом отримання оцінок похибок формозберігаючого наближення оскільки легко модифікується (в околах точок зрізання функцій, які його складають) для надання сплайну потрібної форми і при цьому саме представлення не псується (тобто, його запис в одну строку зберігається). Воно також має хороший потенціал чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі (див. пропозицію 3.8.1).

• Зроблено огляд поточкових оцінок похибки (ко)опуклого наближення многочленами і порівняння їх з рівномірними оцінками такого наближення (див. підрозділ 3.7).

Розділ 4

Три-монотонне наближення

4.1 Наближення сплайнами минимального дефекту з рівномірними і чебишевськими вузрами, а також з залежними від функції, але контрольованими вузлами

Результати цього підрозділу містяться в [82].

Нехай $\mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n)$ – (лінійний) простір всіх кусково-поліноміальних функцій (КПФ), степеня r (порядку $r+1$), з вузлами $\mathbf{z}_n := (z_i)_{i=0}^n$, $z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n$, тобто для кожного $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $s\big|_{(z_i, z_{i+1})} \in \mathbb{P}_r$, де $\mathbb{P}_r$ – простір алгебраїчних многочленів степеня $\leqslant r$. Також, нехай $\widetilde{\mathcal{S}}_r(\mathbf{z}_n) := \mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n) \cap C^{r-1}$ – відповідний простір сплайнів мінімального дефекту (найбільшої гладкості). Крім того, нехай $\mathcal{S}_{N,r}[a,b]$ – (нелінійний) простір КПФ з вільними вузлами, степеня r, з щонайбільш N ланками на $[a,b]$ ($N-1$ вузнами на (a,b)). (Зрозуміло, що для будь-якого $\mathbf{z}_n := (z_i)_{i=0}^n$, $\mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n) \subseteq \mathcal{S}_{n,r}[z_0, z_n]$.)

Надалі у підрозділі "$\mathbf{z}_n$ – розбиття $[a,b]$" означає те, що $\mathbf{z}_n$ – впорядкована множина $(z_i)_{i=0}^n$, $a =: z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n := b$, і ще покладемо $z_{-i} := z_0$ і $z_{n+i} := z_n$ для $i \in \mathbb{N}$ (те саме буде використовуватися для розбиттів $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, тощо.). Зокрема, через $\mathbf{u}_n$ і $\mathbf{t}_n$ позначатимемо рівномірне і чебишевське розбитті $[-1,1]$, відповідно, тобто $\mathbf{u}_n := (-1 + 2i/n)_{i=0}^n$ і $\mathbf{t}_n := (\cos((n-i)\pi/n))_{i=0}^n$.

Тепер, з $J_j := [z_j, z_{j+1}]$, нехай

$$\eta(\mathbf{z}_n) := \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |J_{j\pm1}|/|J_j| \tag{4.1.1}$$

– масштаб розбиття $\mathbf{z}_n$. Також, нехай

$$\mu(\mathbf{z}_n) = \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(j-i)(z_{i+1} - z_i)}{z_j - z_i} \tag{4.1.2}$$

і

$$\vartheta(\mathbf{z}_n) = \max_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant n;\\ \max\{3i-2j,0\}\leqslant k\leqslant \min\{3j-2i,n\}-1}} \frac{(j-i)(z_{k+1}-z_k)}{z_j-z_i}. \qquad (4.1.3)$$

Зрозуміло, що $\mu(\mathbf{z}_n) \leqslant \vartheta(\mathbf{z}_n)$ (візьмемо $k = i$ в (4.1.3)), $1 \leqslant \eta(\mathbf{z}_n) \leqslant \vartheta(\mathbf{z}_n)$ (візьмемо $j = i + 1$ в (4.1.3)). Вочевидь, що $\eta(\mathbf{u}_n) = \mu(\mathbf{u}_n) = \vartheta(\mathbf{u}_n) = 1$, і не важко перевірити, що $\eta(\mathbf{t}_n) \leqslant 3$, $\mu(\mathbf{t}_n) \leqslant 2$, і $\vartheta(\mathbf{t}_n) \leqslant 6$.

В цьому підрозділі і тільки в ньому ми дещо змінемо вже звичайні означення для літер k і q, щоб не порушити стиль першоджерела, зокрема, нехай $\omega_m(f, t, J)_p$ – m-тий модуль гладкості $f \in L_p(J)$ на J, і $\omega_m(f, J)_p := \omega_m(f, |J|, J)_p$.

Для $k \in \mathbb{N}$ і відкритого проміжку $I = (a, b)$, нехай $\Delta^k(I)$ (або $\Delta^k(a, b)$ з невеликим зловживанням позначеннями) – множина всіх k-монотонних функцій на $I = (a, b)$, тобто всіх функцій $f : I \mapsto \mathbb{R}$ таких, що їх k-ті розділені різниці $[x_0, \ldots, x_k]f$ невід'ємні для всіх наборів $(k + 1)$ неспівпадаючих точок $x_0, \ldots, x_k$ на I. Згадаємо, що якщо $f \in C^k(I)$, то $f \in \Delta^k(I)$ тоді і тільки тоді, коли $f^{(k)} \geqslant 0$ на I. Функції з $\Delta^k(a, b)$ не обов'язково мають бути означені в кінцевих точках проміжку (a, b), і, тому, не мають бути а ні обмеженими, а ні інтегрованими на (a, b). Наприклад, якщо $f(x) = (-1)^k x^{-1-1/p}$, то $f \in \Delta^k(0, 1)$ для $k \in \mathbb{N}$, хоча $f \notin L_p[0, 1]$, $0 < p \leqslant \infty$.

Добре відомо (див. [143, 151]), що якщо $k \geqslant 2$, то $f \in \Delta^k(a, b)$ тоді і тільки тоді, коли $f^{(k-2)}$ існує і є опуклою на (a, b). Тому, $f^{(k-2)}$ задовольняє умові Ліпшица на будь-якому замкненому підпроміжку (a, b), є абсолютно неперервною там і має ліву і праву неспадні похідні $f_-^{(k-1)}$ і $f_+^{(k-1)}$ скрізь на (a, b). Більше того, множина E, де $f^{(k-1)}$ може не існувати, є зліченною множиною і $f^{(k-1)}$ неперервна на $(a, b)\backslash E$.

Надалі, $c(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ позначають додатні сталі, що можуть залежити тільки від параметрів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ і вони можуть бути різними навіть в одному рядку, тоді як $\mathfrak{c}_i(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$, $i \in \mathbb{N}$, – додатні сталі, значення яких відслідковується. Якщо проміжок $[a, b]$ це $[-1, 1]$, то він буде виключатися з позначень. Наприклад, $C^m := C^m[-1, 1]$, $L_p := L_p[-1, 1]$, $\mathcal{S}_{N,r} := \mathcal{S}_{N,r}[-1, 1]$, тощо. Також, де б ми не писали L_∞, ми маємо на увазі C. Позначимо $\Delta^k := \Delta^k(-1, 1)$ і ще раз підкреслимо, що $\Delta^k(-1, 1)$ відрізняється від $\Delta^k[-1, 1]$.

Як і скрізь в дисертації, для функції $f \in \Delta^k$ є природнім обрати аппроксиманти теж з Δ^k, тобто зберегти форму f при наближенні. Як вже зазначалось вище, для монотонного $(k = 1)$ і опуклого $(k = 2)$ наближень КПФ-ми з фіксованими вузлами і многочленами, отримано багато "позитивних" результатів, тобто в багатьох ситуаціях вдалося зберегти тіж самі порядки наближень, що й при класичному наближенні без обмежень. Дивним виявилось те, що для k-монотонного наближення з $k \geqslant 4$, порядки наближень – значно гірші, що вперше помітили Коновалов і Левіатан [101] в контексті формозберігаючих поперечників.

Вивчення 3-монотонного наближення КПФ-ми з фіксованими вузлами в рівномірній метриці в роботі Левіатана і Примака [116] вказало на те, що цей випадок теж якось схиляється бути "хорошим", хоча доведення виявились більш складними ніж для $k = 1, 2$. Питання про достовірність оцінок типу Джексона для наближення КПФ-ми з рівномірно розташованими фіксованими вузлами було отримано у всіх, крім одного випадку, як це зазначено в [116, Зауваження 3]. А саме, залишелось невідомим, чи можливо для будь-якої $f \in \Delta^3 \cap C$, означити кубічну КПФ $s \in \Delta^3$ з $n-1$ рівновіддаленими вузлами і таку, що

$$\|f - s\|_{L_\infty} \leqslant c\omega_4(f, n^{-1}, [-1, 1])_\infty. \tag{4.1.4}$$

В ціому підрозділі, ми дамо ствердну відповідь на це запитання. Це виявилося найважчим випадком отримання оцінок типу Джексона для k-монотонного наближення КПФ-ми з фіксованими вузлами і вимагало застосування деяких результатів з формозберігаючого згладжування сплайнів Копотун, Левіатан, Примак [108]. Зауважимо, що слабкіша оцінка з третім модулем гладкості похідної встановлена в Левіатан, Примак [116], де також можна знайти докладне обговорення оцінок типу Джексона, що включають похідні від функції. Більш за все труднощі з (4.1.4) викликані тим, що це "граничний" випадок між "хорошими" і "поганими" випадками.

Першим кроком у встановлені (4.1.4) є наступна теорема 4.1.1. Для 3-монотонного наближення $f \in \Delta^3$ в L_p (квазі)нормі кубічними сплайнами ми в ній досягаємо найкращого з можливих порядку наближення (див. (4.1.6)), однак розташування вузлів може залежити від f. Втім, ми можемо гарантувати, що ці вузли не є надто близько один до одного (див. (4.1.5)), що робить цю теорему відмінною від вимушеного наближення сплайнами з вільними вузлами (див. Копотун, Шадрін [113]).

Теорема 4.1.1. *Для будь-якої $\boldsymbol{\eta} \geqslant 1$, існує стала $\mathfrak{c}_1(\boldsymbol{\eta}) > 0$, така, що якщо $f \in \Delta^3 \cap L_p$, $0 < p \leqslant \infty$, і $\mathbf{x}_n$ є розбиттям $[-1, 1]$, для якого $\eta(\mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\eta}$, то знайдеться розбиття $\mathbf{y}_m$ для $[-1, 1]$, $m \leqslant 20n$, і кубучна КПФ $s \in \mathcal{S}_3(\mathbf{y}_m) \cap \Delta^3$, такі, що для кожного $0 \leqslant k \leqslant m-1$, можна підібрати $1 \leqslant j \leqslant n-1$, для якого $[y_k, y_{k+1}] \subseteq [x_{j-1}, x_{j+1}]$ і*

$$y_{k+1} - y_k \geqslant \mathfrak{c}_1(\boldsymbol{\eta})(x_{j+1} - x_{j-1}), \tag{4.1.5}$$

і для кожного $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\|f-s\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]} \leqslant c(\boldsymbol{\eta},p)\omega_4(f,[x_{j-1},x_{j+2}])_p. \tag{4.1.6}$$

Для 3-монотонного наближення в L_p, $p<\infty$, КПФ-ми з *фіксованими вузлами* неможливо навіть отримати аналог оцінки (4.1.6) з ω_3 замість ω_4, див. Коновалов, Левіатан [101] (див. також Бондаренко, Примак [5, Зауваження 5]). У той же час, для $p=\infty$, ми можемо зсунути вузли на правильне місце і зробити їх незалежними від функції, використовуючи результати з формозберігаючого згладжування сплайнів Копотуна, Левіатана і Примака [108]. Однак, для того щоб застосувати [108], нам потрібно мати один додатковий порядок гладкості, тобто нам потрібно зробити нашу КПФ належною до C^2, і це можливо зробити для $p=\infty$ завдячуючи роботі Левіатана і Примака [116, Теорема 5]. Маємо зауважити, що неможливо отримати цей додатковий порядок гладкості, якщо наближення відбувається в L_p з $p<\infty$, інакше можно було б, просуваючись доведенням теореми 4.1.2, отримати оцінку типу Джексона в L_p з ω_4, яка є хибною.

У випадку $p=\infty$, маємо наступну теорему 4.1.2.

Теорема 4.1.2. *Нехай* $\boldsymbol{\vartheta} \geqslant 1$ *і* $r \geqslant 3$. *Для будь-якої* $f \in \Delta^3 \cap C$ *і будь-якого розбиття* $\mathbf{x}_n$ *для* $[-1,1]$, *такого, що* $\vartheta(\mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\vartheta}$, *існує сплайн* $s \in \widetilde{\mathbb{S}}_r(\mathbf{x}_n) \cap \Delta^3$, *мінімального дефекту, такий, що*

$$\|f-s\|_{L_\infty} \leqslant c(r,\boldsymbol{\vartheta}) \max_{1\leqslant j\leqslant n-1} \omega_4(f,[x_{j-1},x_{j+1}])_\infty.$$

Наступні дві теореми 4.1.3 і 4.1.4 є безпосередніми наслідками теореми 4.1.2.

Теорема 4.1.3. *Нехай* $r \geqslant 3$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Для будь-якої* $f \in \Delta^3 \cap C$, *існує сплайн* $s \in \widetilde{\mathbb{S}}_r(\mathbf{u}_n) \cap \Delta^3$, *мінімального дефекту, такий, що*

$$\|f-s\|_{L_\infty} \leqslant c(r)\omega_4(f,n^{-1},[-1,1])_\infty.$$

Теорема 4.1.4. *Нехай* $r \geqslant 3$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Для будь-якої* $f \in \Delta^3 \cap C$, *існує сплайн* $s \in \widetilde{\mathbb{S}}_r(\mathbf{t}_n) \cap \Delta^3$, *мінімального дефекту, такий, що*

$$\|f-s\|_{L_\infty} \leqslant c(r)\omega_4^\varphi(f,n^{-1})_\infty,$$

де $\omega_4^\varphi(f,n^{-1})_\infty$ *– модуль гладкості Діціана-Тотіка* 4*-го порядку.*

Зауважимо, що в усіх вище наведених оцінках неможливо замінити ω_4 на ω_m з $m > 4$ (див. теорему 6.5.1), і ще раз нагадаємо, що ці оцінки хибні для 3-монотонного наближення в L_p нормі з $p < \infty$.

У той же час, для k-монотонного наближення з $k > 3$, ситуація набагато гірша. А саме, тут неможливо мати оцінки з $\omega_4(f,1/n,[-1,1])_p$ (див. [101, Зауваження (iii), стор. 241]). Більш того, як простий наслідок результатів з [5], в теоремі 6.5.2 показано, що навіть з ω_3 це неможливо.

Зауваження 4.1.1. *Теорему 4.1.3 можливо перевірити повністю минаючи теорему 4.1.2 і користуючись лише теоремою 4.1.1 (разом з тим фактом, що* $\mathbf{y}_m$ *є "майже" рівномірним розбиттям, якщо* $\mathbf{x}_n = \mathbf{u}_n$*),* [106, Наслідок 1.5, Лема 5.1] *і* [116, Теорема 6].

Спеціальне наближення сплайнами з вільними вузлами

Нагадаємо, $f_+^{(i)}(x)$ і $f_-^{(i)}(x)$ – права і ліва i-ті похідні f в x, відповідно. Через $\Delta_*^k(a,b)$ позначимо підмножину таких $f \in \Delta^k(a,b)$, для яких значення $\{f_+^{(i)}(a)\}_{i=0}^{k-1}$ і $\{f_-^{(i)}(b)\}_{i=0}^{k-1}$ обмежені.

Для $f \in \Delta_*^k(a,b)$, через $\Delta^k[f](a,b)$ позначимо множину всіх функцій $h \in \Delta_*^k(a,b)$ таких, що

$$\begin{gathered} h_+^{(i)}(a) = f_+^{(i)}(a)\,,\ h_-^{(i)}(b) = f_-^{(i)}(b)\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2\,, \\ h_+^{(k-1)}(a) \geqslant f_+^{(k-1)}(a)\,, \quad \text{і} \quad h_-^{(k-1)}(b) \leqslant f_-^{(k-1)}(b)\,. \end{gathered}$$

Зауваження 4.1.2. *Припустимо, що* $f \in \Delta_*^k(a,b)$ *і* $\mathbf{z}_m$ *– розбиття* $[a,b]$. *Тоді, той факт, що* $h \in \Delta^k(z_i,z_{i+1})$ *(або* $h \in \Delta_*^k(z_i,z_{i+1})$*) для всіхl* $0 \leqslant i \leqslant m-1$, *зовсім НЕ гарантує, що* h *є* k*-монотонна на* (a,b). *У той же час, якщо* h *є така, що* $h \in \Delta^k[f](z_i,z_{i+1})$ *для всіх* $0 \leqslant i \leqslant m-1$, *то* $h \in \Delta^k(a,b)$.

Наступна лема 4.1.1 показує, що замість довільної $f \in \Delta^k(a,b) \cap L_p[a,b]$, можна розглядати $f \in \Delta_*^k(a,b)$, тобто можна припускати, що f і її похідні обмежені в кінцевих точках (a,b) а, отже, і в усіх внутрішніх точках також.

Лема 4.1.1. [113, Лема 4.4] *Нехай* $k \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant \infty$, *і* $f \in \Delta^k(a,b) \cap L_p[a,b]$. *Тоді, для будь-якого* $\epsilon > 0$, *існує* $f_\epsilon \in \Delta_*^k(a,b)$ *така, що*

$$\|f - f_\epsilon\|_{L_p[a,b]} < \epsilon.$$

Більш того, f_ϵ співпадає з f скрізь за винятком можливо кінцевих точок (a,b).

Пропозиція 4.1.1. [113, Пропозиція 4.3] *Нехай $k,r\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $r\geqslant k-1$, $0<p\leqslant\infty$, $f\in\Delta_*^k(a,b)\cap L_p[a,b]$, і нехай q таке, що або $q\in\mathbb{P}_r\cap\Delta^k(a,b)$, або $(-q)\in(\mathbb{P}_r\backslash\mathbb{P}_k)\cap\Delta^k(a,b)$. Тоді існує s такий, що*

$$s\in\mathcal{S}_{c(k),r}[a,b]\cap\Delta^k[f](a,b),$$

$$\|f-s\|_{L_p[a,b]}\leqslant c(p,r,k)\,\|f-q\|_{L_p[a,b]}\,.$$

Теорема 4.1.5. *Нехай $k,r\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $r\geqslant k-1$, $0<p\leqslant\infty$, $f\in\Delta^k\cap L_p$, $\mathbf{x}_n$ – розбиття $[-1,1]$, і нехай σ – будь-яка КПФ з $\mathcal{S}_r(\mathbf{x}_n)$. Тоді існує стала $\mathfrak{c}_2=\mathfrak{c}_2(k,r)\in\mathbb{N}$ і КПФ $s\in\mathcal{S}_{\mathfrak{c}_2 n,r}\cap\Delta^k$, такі, що*

(i) s має $\leqslant\mathfrak{c}_2$ ланок на кожному проміжку $[x_j,x_{j+1}]$, $0\leqslant j\leqslant n-1$, і

(ii) $\|f-s\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]}\leqslant c(k,r,p)\|f-\sigma\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]}$, $0\leqslant j\leqslant n-1$.

Доведення. Зважаючи на лему 4.1.1, можемо припустити, що $f\in\Delta_*^k$ а, отже, $f\in\Delta_*^k(a,b)$, для будь-якого $(a,b)\subseteq(-1,1)$. Звуження p_j КПФ σ на кожний проміжок $[x_j,x_{j+1}]$, $0\leqslant j\leqslant n-1$, є многочленом, степеня $\leqslant r$, k-та похідна якого – многочлен, степеня $\leqslant r-k$, а, отже, вона має, щонайбільш, $r-k$ дійсних нулів на $[x_j,x_{j+1}]$ (або є там тотожньою нулю). Ці нулі розбивають $[x_j,x_{j+1}]$ на, щонайбільш, $r-k+1$ підпроміжків $\mathcal{I}_1^j,\dots,\mathcal{I}_m^j$, $1\leqslant m\leqslant\max\{1,r-k+1\}$, і $p_j^{(k)}$ або невід'ємна, або недодатня в середені кожного $\mathcal{I}_i^j$, $1\leqslant i\leqslant m$. З цього випливає, що або $p_j\in\mathbb{P}_r\cap\Delta^k(\mathcal{I}_i^j)$, або $(-p_j)\in(\mathbb{P}_r\backslash\mathbb{P}_k)\cap\Delta^k(\mathcal{I}_i^j)$, для кожного $1\leqslant i\leqslant m$. Пропозиція 4.1.1 гарантує, що для кожного $1\leqslant i\leqslant m$, існує сплайн s_i^j такий, що $s_i^j\in\mathcal{S}_{c(k),r}(\mathcal{I}_i^j)\cap\Delta^k[f](\mathcal{I}_i^j)$, і $\|f-s_i^j\|_{L_p(\mathcal{I}_i^j)}\leqslant c(p,r,k)\,\|f-p_j\|_{L_p(\mathcal{I}_i^j)}$.

Зараз з'єднаємо разом всі шматочки s_i^j і отримуємо сплайн s, означений на $[-1,1]$, зі звуженням s_i^j на $\mathcal{I}_i^j$. Беручи до уваги зауваження 4.1.2, легко бачити, що $s\in\mathcal{S}_{\mathfrak{c}_2 n,r}\cap\Delta^k$, $\mathfrak{c}_2=\mathfrak{c}_2(k,r)$, і (i) з (ii) виконуються. Теорему 4.1.5 доведено.

Локальне наближення сплайнами з контрольованими вузлами

Лема 4.1.2. *Для будь-якого проміжку I, $k\in\mathbb{N}_0$, $0<p\leqslant\infty$, і $q\in\mathbb{P}_r$,*

$$\left\|q^{(k)}\right\|_{L_\infty(I)}\leqslant c(r,p)|I|^{-k-1/p}\,\|q\|_{L_p(I)}\leqslant c|I|^{-k}\,\|q\|_{L_\infty(I)}\,.$$

Лема 4.1.3. *Для будь-якого проміжку $I \subseteq J$, $0 < p \leqslant \infty$, і $q \in \mathbb{P}_r$,*

$$\|q\|_{L_p(J)} \leqslant c(r,p)(|J|/|I|)^{r+1/p} \|q\|_{L_p(I)}.$$

Лема 4.1.4. [60, Лема 3.2] *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $d := 2r^2$. Для будь-яких $q_1, q_2 \in \mathbb{P}_r$, і послідовністі вузлів $\mathbf{x}_d = (x_i)_{i=0}^d$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_d$, існує сплайн $s \in \widetilde{\mathbb{S}}_r(\mathbf{x}_d)$ такий, що $s(x)$ є числом між $q_1(x)$ і $q_2(x)$ при кожному $x \in [x_0, x_d]$, $s \equiv q_1$ на $(-\infty, x_0]$ а $s \equiv q_2$ на $[x_d, \infty)$.*

Лема 4.1.5. *Нехай $y_0 < y_1 < y_2 < y_3$, $h := y_3 - y_0$ і для деякої $\theta > 0$*

$$y_1 - y_0 \geqslant \theta h \quad і \quad y_3 - y_2 \geqslant \theta h.$$

Припустимо, що $f \in \Delta^3[y_0, y_3]$ така, що

$$f|_{[y_0,y_1]} =: q_1 \in \mathbb{P}_3 \quad і \quad f|_{[y_2,y_3]} =: q_2 \in \mathbb{P}_3$$

(тобто q_1 і q_2 кубічні многочлени), і тому $f \in C^1[y_0, y_3]$. Тоді, при кожному $0 < p \leqslant \infty$, існує кубічний сплайн $\mathfrak{z} \in \mathbb{S}_{N,3}[y_0, y_3]$, що задовольняє

(i) $\mathfrak{z} \in \Delta^3[y_0, y_3]$;

(ii) $\mathfrak{z}$ *має* $\leqslant 19$ *вузлів в* (y_0, y_3), *тобто* $N \leqslant 20$;

(iii) *відстань між будь-якими вузлами* $\mathfrak{z}$ *є* $\geqslant \mathfrak{c}_3(\theta)h$;

(iv) $\mathfrak{z} \equiv f$ *в деяких околах* y_0 *і* y_3 *(тобто найлівіші і найправіші шматочки* $\mathfrak{z}$ *співпадають з* q_1 *і* q_2, *відповідно)*;

(v) $\|f - \mathfrak{z}\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c(\theta,p)\omega_4(f,[y_0,y_3])_p$.

Доведення. Скрізь у доведенні, для спрощення, $\omega_4 := \omega_4(f,[y_0,y_3])_p$. Якщо q_* є кубічним многочленом з нерівності Уітні [167] $\|f - q_*\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\omega_4$, то, скориставшись лемою 4.1.3 і пригадуючи, що $\|f+g\|_p \leqslant 2^{\max\{0,(1-p)/p\}}(\|f\|_p + \|g\|_p)$, запишемо

$$\begin{aligned} \|f - q_1\|_{L_p[y_0,y_3]} &\leqslant c\|f - q_*\|_{L_p[y_0,y_3]} + c\|q_* - q_1\|_{L_p[y_0,y_3]} \\ &\leqslant c\omega_4 + c\|q_* - q_1\|_{L_p[y_0,y_1]} \\ &= c\omega_4 + c\|q_* - f\|_{L_p[y_0,y_1]} \leqslant c\omega_4. \end{aligned}$$

Звісно, що така сама оцінка є вірною і для q_2 замість q_1, і, отже,

$$\|f - q_j\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\omega_4, \quad j = 1,2, \tag{4.1.7}$$

і

$$\|q_1 - q_2\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\omega_4. \tag{4.1.8}$$

Позначимо $a_j := q_j'''$, $j = 1, 2$, і зауважимо, що $a_j \geqslant 0$ є сталими. Розглянемо два випадки в залежності від наскільки великим є число a_1.

Випадок I. Припустимо, що

$$a_1 \geqslant A_1 h^{-3-1/p}\omega_4, \tag{4.1.9}$$

де $A_1 = A_1(\theta, p)$ оберемо далі. Візьмемо $x_0 := (y_0 + y_1)/2$, $x_{18} := (y_2 + y_3)/2$ і $x_i := x_0 + i(x_{18} - x_0)/18$, $1 \leqslant i \leqslant 17$, і застосуємо лему 4.1.4, щоб мати сплайн $\mathfrak{z}$. Умови (ii), (iii), (iv) напевно задовольняються цим $\mathfrak{z}$. Беручи до уваги (4.1.8) і лему 4.1.4, отримуємо

$$\|q_1 - \mathfrak{z}\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant \|q_1 - q_2\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\omega_4, \tag{4.1.10}$$

що разом з (4.1.7) породжує (v)

$$\|f - \mathfrak{z}\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\,\|f - q_1\|_{L_p[y_0,y_3]} + c\,\|q_1 - \mathfrak{z}\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant c\omega_4.$$

Залишилось перевірити (i). Оскільки $\mathfrak{z} \in C^2$ і $\mathfrak{z}'''$ існує скрізь на $[y_0, y_3]$, за винятком можливо в x_i, $0 \leqslant i \leqslant 18$, то достатньо довести, що $\mathfrak{z}'''(x) \geqslant 0$, $x \neq x_i$. Для $x \in [y_0, x_0) \cup (x_{18}, y_3]$, це очевидно через (iv), а для $x \in (x_i, x_{i+1})$, $0 \leqslant i \leqslant 17$, візьмемо до уваги, що $x_{i+1} - x_i \geqslant \theta h/18$ і, користуючись лемою 4.1.2 разом з (4.1.10), запишемо

$$\begin{aligned} |a_1 - \mathfrak{z}'''(x)| &\leqslant \left\|(q_1 - \mathfrak{z})'''\right\|_{L_\infty[x_i,x_{i+1}]} \leqslant ch^{-3-1/p}\,\|q_1 - \mathfrak{z}\|_{L_p[x_i,x_{i+1}]} \\ &\leqslant \mathfrak{c}_4 h^{-3-1/p}\omega_4. \end{aligned}$$

Якщо оберемо $A_1 := \mathfrak{c}_4$, то (4.1.9) буде гарантувати, що $\mathfrak{z}'''(x) \geqslant 0$.

Випадок II. Припустимо зараз, що (4.1.9) не справджується, тобто $a_1 < \mathfrak{c}_4 h^{-3-1/p}\omega_4$. Лема 4.1.2 і (4.1.8) тягнуть нерівність

$$|a_1 - a_2| = \left\|(q_1 - q_2)'''\right\|_{L_\infty[y_0,y_3]} \leqslant ch^{-3-1/p}\,\|q_1 - q_2\|_{L_p[y_0,y_3]} \leqslant ch^{-3-1/p}\omega_4,$$

і таким чином ми маємо

$$a_j \leqslant ch^{-3-1/p}\omega_4, \quad j = 1, 2. \tag{4.1.11}$$

Візьмемо $z_0 := (y_0 + y_1)/2$, $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2$, $z_3 := (y_2 + y_3)/2$, позначимо

$$l_j(x) := q_1''(z_j)(x - z_j) + q_1'(z_j), \quad j = 0, 1,$$

$$l_j(x) := q_2''(z_j)(x - z_j) + q_2'(z_j), \quad j = 2, 3.$$

і означимо

$$s_1(x) := \begin{cases} f'(x), & x \notin [z_0, z_3], \\ \max\limits_{j=0,1,2,3} l_j(x), & x \in [z_0, z_3]. \end{cases}$$

З опуклості f' випливає, що s_1 – опукла до низу КПФ, що задовольняє нерівність

$$s_1(x) \leqslant f'(x), \quad x \in [y_0, y_3]. \tag{4.1.12}$$

Оскільки дотичні до будь-якої параболи в точках $x = a$ і $x = b$ перетинаються в $x = (a + b)/2$, заключаємо, що вузлами s_1 є z_0, $(z_0 + z_1)/2$, $\tilde{z}$, $(z_2 + z_3)/2$, z_3, де $\tilde{z} \in [z_1, z_2] = [y_1, y_2]$, і, як наслідок цього, вони не ближче ніж $\theta h/4$ один від одного.

Тепер, нехай

$$s_2(x) := \begin{cases} f'(x), & x \notin [z_0, z_3], \\ l(x), & x \in [z_0, z_3], \end{cases}$$

де l – пряма, що інтерполює f' в z_0 і z_3. З опуклості f' випливає, що s_2 є опуклим квадратичним сплайном з вузлами z_0 і z_3 такими, що

$$f'(x) \leqslant s_2(x), \quad x \in [y_0, y_3]. \tag{4.1.13}$$

Тепер нерівності (4.1.12) і (4.1.13) гарантують, що можно обрати $\alpha \in [0, 1]$ так, що

$$\mathfrak{z}(x) := f(z_0) + \int_{z_0}^{x} (\alpha s_1(t) + (1 - \alpha) s_2(t)) dt$$

буде задовольняти рівність $\mathfrak{z}(z_3) = f(z_3)$ а, отже, $\mathfrak{z}$ – кубічний сплайн, що задовольняє (iv). Зрозуміло, що (i), (ii) і (iii) теж справджуються і лишається перевірити (v).

Нехай $\tilde{y} := (y_0 + y_3)/2$, тоді лема 4.1.2 і (4.1.8) тягнуть

$$|q_1''(\tilde{y}) - q_2''(\tilde{y})| \leqslant \|q_1'' - q_2''\|_{L_\infty[y_0, y_3]} \leqslant c h^{-2-1/p} \omega_4. \tag{4.1.14}$$

Нерівність (4.1.11) породжує

$$q_1''(\tilde{y}) - q_1''(y_0) \leqslant c h^{-2-1/p} \omega_4,$$

і

$$q_2''(y_3) - q_2''(\tilde{y}) \leqslant c h^{-2-1/p} \omega_4,$$

що разом з (4.1.14) забеспечують оцінку (пригадаємо, $q_1''(y_0) = f''(y_0)$ і $q_2''(y_3) = f''(y_3)$)

$$f''(y_3) - f''(y_0) \leqslant c h^{-2-1/p} \omega_4. \tag{4.1.15}$$

Нагадаємо, якщо $g \in \Delta^3(I)$, то $g''(x)$ існує для всіх $x \in I$ з множиною винятків, що, само більше, є зліченою, і g'' неспадна на своєму носию. Тому, оскільки $f \in \Delta^3[y_0, y_3]$, маємо

$$f''(y_0) \leqslant f''(x) \leqslant f''(y_3) \quad \text{a.e. on } [y_0, y_3].$$

Так само, оскільки $\mathfrak{z} \in \Delta^3[y_0, y_3]$, то (iv) тягне

$$f''(y_0) \leqslant \mathfrak{z}''(x) \leqslant f''(y_3) \quad \text{м.с. на } [y_0, y_3],$$

і таким чином з (4.1.15) випливає оцінка

$$|f''(x) - \mathfrak{z}''(x)| \leqslant ch^{-2-1/p}\omega_4 \quad \text{м.с. на } [y_0, y_3].$$

Двічи інтегруючи, знаходимо

$$\|f - \mathfrak{z}\|_{L_\infty[y_0,y_3]} \leqslant ch^{-1/p}\omega_4,$$

що тягне (v). Лему 4.1.5 доведено.

Зауваження 4.1.3. *Здається, що у випадку II є багато можливостей для означення $\mathfrak{z}$. Однак, це не так, і для певних f потрібний $\mathfrak{z}$ единий, скажімо, коли $f(x) = (x - y)_+^2$ для фіксованого $y \in [y_1, y_2]$, то едине, що можна обрати, це $\mathfrak{z} \equiv f$.*

Доведення теореми 4.1.1

Поперше, нехай $\sigma - \sigma\big|_{[x_j,x_{j+1}]}$ кубічний многочлен найкращого L_p наближення без обмежень f на $[x_j, x_{j+1}]$, тобто з нерівності Уітні [167]

$$\|f - \sigma\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]} \leqslant c\omega_4(f, [x_j, x_{j+1}])_p, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

За теоремою 4.1.5, існує $\tilde{s} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{c}_2 n,3} \cap \Delta^3$ такий, що

$$\|f - \tilde{s}\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]} \leqslant c\omega_4(f, [x_j, x_{j+1}])_p, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$

і $\tilde{s}$ має $\leqslant \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_2(3,3)$ шматочків на кожному $[x_j, x_{j+1}]$. Тоді, для кожного $0 \leqslant j \leqslant n-1$, знайдеться проміжок $I_j := [a_j, b_j] \subseteq [x_j, x_{j+1}]$, довжини $\geqslant (x_{j+1} - x_j)/\mathfrak{c}_2$, такий, що $\tilde{s}$ на ньому не має вузлів. Візьмемо $t_j := (a_j + b_j)/2$, для кожного $0 \leqslant j \leqslant n-2$, і застосуємо лему 4.1.5 до $\tilde{s}$ з $y_0 = t_j$, $y_1 = b_j$, $y_2 = a_{j+1}$, $y_3 = t_{j+1}$ і $\theta = 1/(2\boldsymbol{\eta}\mathfrak{c}_2)$ щоб отримати $\mathfrak{z}_j$ на $[t_j, t_{j+1}]$. Тепер означимо s так, що $s\big|_{[t_j,t_{j+1}]} := \mathfrak{z}_j$, $0 \leqslant j \leqslant n-2$, і біля кінцевих точок $[-1, 1]$, тобто на проміжках $[-1, t_0]$ і $[t_{n-1}, 1]$, нехай s буде продовженням многочленів $\mathfrak{z}|_{[t_0,t_0+\epsilon]}$ і $\mathfrak{z}|_{[t_{n-1}-\epsilon,t_{n-1}]}$, де $\epsilon > 0$ достатньо мала. (Зауважимо, що (iv) леми 4.1.5 вказує, що ці $\mathfrak{z}|_{[t_0,t_0+\epsilon]}$ і $\mathfrak{z}|_{[t_{n-1}-\epsilon,t_{n-1}]}$ є тими ж многочленами, що й $\tilde{s}\big|_{[a_0,b_0]}$ і $\tilde{s}\big|_{[a_{n-1},b_{n-1}]}$, відповідно.)

З леми 4.1.5 випливає, що $s \in \Delta^3$ (за (i) і (iv)), s належить $\mathcal{S}_{20(n-1)+1,3}$ і має, щонайбільше, 40 шматочків на кожному $[x_j, x_{j+1}]$ (згідно (ii)), відстань між будь-якими двома вузлами s на $[x_j, x_{j+2}]$ не менша ніж $c(\boldsymbol{\eta})(x_{j+2} - x_j)$ (за (iii)). Тепер, з (v) леми 4.1.5, пишемо

$$\|\tilde{s} - s\|_{L_p[t_j,t_{j+1}]} \leqslant c\omega_4(\tilde{s}, [t_j, t_{j+1}])_p,$$

і тому, для $1 \leqslant j \leqslant n-2$,

$$\begin{aligned}
&\|f - s\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]} \\
&\quad\leqslant c\,\|f - \tilde{s}\|_{L_p[x_j,x_{j+1}]} + c\,\|\tilde{s} - s\|_{L_p[t_{j-1},t_j]} + c\,\|\tilde{s} - s\|_{L_p[t_j,t_{j+1}]} \\
&\quad\leqslant c\omega_4(f, [x_j, x_{j+1}])_p + c\omega_4(\tilde{s}, [t_{j-1}, t_j])_p + c\omega_4(\tilde{s}, [t_j, t_{j+1}])_p \\
&\quad\leqslant c\omega_4(f, [x_{j-1}, x_{j+2}])_p.
\end{aligned}$$

Насамкінець, залишелось довести цю оцінку для $j = 1$ і $j = n-1$. Розглянемо лише $j = 1$ (тобто наближення на $[-1, x_1]$), бо доведення для $j = n-1$ таке саме. Нехай q_* – кубічний многочлен, що задовольняє нерівність Уітні $\|f - q_*\|_{L_p[-1,x_1]} \leqslant c\omega_4(f, [-1, x_1])_p$, згадаємо, що $\tilde{s}$ не має вузлів в середені $[a_0, b_0]$ довжиною $\geqslant c(x_1+1)$, і, що $\tilde{s}\big|_{[a_0,b_0]} = s\big|_{[-1,t_0]} =: p_0 \in \mathbb{P}_3$. Маємо

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_{L_p[-1,x_1]} &\leqslant c\,\|f - s\|_{L_p[-1,t_0]} + c\,\|f - s\|_{L_p[t_0,t_1]} \\
&\leqslant c\,\|f - q_*\|_{L_p[-1,t_0]} + c\,\|q_* - p_0\|_{L_p[-1,t_0]} \\
&\quad + c\,\|f - \tilde{s}\|_{L_p[t_0,t_1]} + c\,\|\tilde{s} - s\|_{L_p[t_0,t_1]} \\
&\leqslant c\omega_4(f, [-1, x_2])_p + c\,\|q_* - p_0\|_{L_p[-1,t_0]}\,.
\end{aligned}$$

Тепер, лема 4.1.3 тягне

$$\begin{aligned}
\|q_* - p_0\|_{L_p[-1,t_0]} &\leqslant c\,\|q_* - p_0\|_{L_p[a_0,t_0]} = c\,\|q_* - \tilde{s}\|_{L_p[a_0,t_0]} \\
&\leqslant c\,\|q_* - f\|_{L_p[a_0,t_0]} + c\,\|f - \tilde{s}\|_{L_p[a_0,t_0]} \\
&\leqslant c\omega_4(f, [-1, x_1])_p,
\end{aligned}$$

що, у свою чергу, тягне

$$\|f - s\|_{L_p[-1,x_1]} \leqslant c\omega_4(f, [-1, x_2])_p,$$

і це завершує доведення. Теорему 4.1.1 доведено.

Згладжування і зсув вузлів на правільне місце

Для заданого розбиття $\mathbf{z}_n$ з $[-1,1]$, розбиття $\tilde{\mathbf{z}}_m$ з $[-1,1]$ назовемо *δ-перебудовою* $\mathbf{z}_n$ (див. [108]) якщо, для кожного $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\max\{\tilde{z}_{i+1} - \tilde{z}_i \mid [\tilde{z}_i, \tilde{z}_{i+1}] \cap (z_j, z_{j+1}) \neq \varnothing\} \leqslant \delta \min_{\nu=j-1,j,j+1} |z_{\nu+1} - z_\nu|$$

з z_{-1} і z_{n+1} покладеними (в цьому означені лише) як $-\infty$ і $+\infty$, відповідно.

Лема 4.1.6. [108, Теорема 1.1 ($q = 3$)] *Нехай $r \geqslant 3$, і $\mathbf{y}_l$ – розбиття $[-1,1]$. Існує стала $\delta = \delta(r)$ така, що для кожного $s_* \in \mathcal{S}_r(\mathbf{y}_l) \cap \Delta^3$, такого, що*

$$s_* \in C^2, \tag{4.1.16}$$

і будь-якого розбиття $\mathbf{x}_n$, що є δ-перебудовою $\mathbf{y}_l$, існує сплайн $\tilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_r(\mathbf{x}_n) \cap \Delta^3$, мінімального дефекту, який задовольняє нерівність

$$\|s_* - \tilde{s}\|_{L_p(\mathcal{I}_j)} \leqslant c(r,p)\omega_{r+1}(s_*, \mathcal{I}_j)_p, \quad 0 \leqslant j \leqslant l,$$

з $0 < p \leqslant \infty$, де $\mathcal{I}_j := [(y_{j-1} + y_j)/2, (y_j + y_{j+1})/2]$.

Зауважимо, що випадок $r = 3$ з леми 4.1.6 не присутній в тверджені [108, Теорема 1.1], однак не важко перевірити, що таке ж саме доведення працює і для нього і є, навіть, простішим.

Як буде показано нижче, лема 4.1.6 дозволить згладжувати 3-монотонні сплайни до мінімального дефекту і змінювати положення їх вузлів. Однак, якщо довільна 3-монотонна КПФ, перебуваючи в C^1, не обов'язково потрапляє в C^2, то спочатку, перед застосуванням леми 4.1.6, згідно (4.1.16), треба попіклуватися про її додаткову гладкість. Наступна лема забеспечує згладжування до C^2 у випадку $p = \infty$.

Лема 4.1.7. [116, Теорема 5] *Припустимо, що $\mathbf{y}_l$ розбиття $[-1,1]$ і $s \in \mathcal{S}_3(\mathbf{y}_l) \cap \Delta^3$. Тоді, існує КПФ $s_* \in \mathcal{S}_3(\mathbf{y}_l) \cap \Delta^3$, така, що*

$$s_* \in C^2,$$

$$\|s - s_*\|_{L_\infty} \leqslant c(\eta(\mathbf{y}_l), \mu(\mathbf{y}_l)) \max_{1 \leqslant j \leqslant l-1} \omega_4(s, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty.$$

Допоміжні факти

Для заданих $\delta > 0$ і розбиття $\mathbf{x}_n$ для $[-1,1]$ з обмеженою $\vartheta(\mathbf{x}_n)$, покажемо, що існує розбиття $\mathbf{z}_m$ таке, що $\mathbf{x}_n$ є його δ-перебудовою і, у той же час, $\vartheta(\mathbf{z}_n)$ все ще обмежене.

Лема 4.1.8. *Для будь-яких $\delta > 0$, $\boldsymbol{\vartheta} \geqslant 1$ і розбиттяп $\mathbf{x}_n$ для $[a, b]$ з $\vartheta(\mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\vartheta}$, існує розбиття $\mathbf{z}_m$, що задовольняє*

(i) $\mathbf{x}_n$ *є δ-перебудовою $\mathbf{z}_m$,*

(ii) $\eta(\mathbf{z}_m) \leqslant 2\boldsymbol{\vartheta}$,

(iii) $\vartheta(\mathbf{z}_m) \leqslant c(\delta, \boldsymbol{\vartheta})$,

(iv) *для будь-яких $0 \leqslant j \leqslant m-1$ і $0 \leqslant k \leqslant n-1$ таких, що $(x_k, x_{k+1}) \cap [z_j, z_{j+1}] \neq \varnothing$*

$$z_{j+1} - z_j \leqslant c(\delta, \boldsymbol{\vartheta})(x_{k+1} - x_k).$$

Доведення. Нехай $\mathcal{K} := \max\{\lceil \boldsymbol{\vartheta}/\delta \rceil, 1\}$, $m := \lfloor n/\mathcal{K} \rfloor$ і означимо $\mathbf{z}_m = (z_j)_{j=0}^m$ як:

$$z_j := x_{\mathcal{K}j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1, \quad \text{і} \quad z_m := x_n.$$

(Зауважимо, що $z_{m-1} = x_{\mathcal{K}(m-1)} < x_{\mathcal{K}m} \leqslant x_n = z_m$.)

Тепер покажемо, що $\mathbf{x}_n$ є δ-перебудовою $\mathbf{z}_m$. Нехай $J_j := [z_j, z_{j+1}]$, і припустимо, що k таке, що $[x_k, x_{k+1}] \cap (z_j, z_{j+1}) \neq \varnothing$ (тобто $[x_k, x_{k+1}] \subseteq J_j$). Потрібно показати, що

$$x_{k+1} - x_k \leqslant \delta \begin{cases} \min\{|J_0|, |J_1|\}, & \text{якщо } j = 0, \\ \min_{\nu=j-1,j,j+1} |J_\nu|, & \text{якщо } 1 \leqslant j \leqslant m-2, \\ \min\{|J_{m-2}|, |J_{m-1}|\}, & \text{якщо } j = m-1. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

Поперше, якщо $0 \leqslant j \leqslant m-2$, то з $\vartheta(\mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\vartheta}$, випливає, що

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{|J_j|} \leqslant \boldsymbol{\vartheta} \frac{x_{\mathcal{K}(j+1)} - x_{\mathcal{K}j}}{\mathcal{K}|J_j|} = \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathcal{K}} \leqslant \delta$$

а, якщо $j = m-1$,

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{|J_{m-1}|} \leqslant \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{n - \mathcal{K}(m-1)} \leqslant \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathcal{K}} \leqslant \delta.$$

Якщо $1 \leqslant j \leqslant m-2$, то ми також маємо

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{|J_{j\pm1}|} \leqslant \boldsymbol{\vartheta} \frac{x_{\mathcal{K}(j\pm1+1)} - x_{\mathcal{K}(j\pm1)}}{\mathcal{K}|J_{j\pm1}|} \leqslant \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathcal{K}} \leqslant \delta.$$

Насамкінець, якщо $j = m-1$, то

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{|J_{m-2}|} \leqslant \boldsymbol{\vartheta} \frac{x_{\mathcal{K}(m-1)} - x_{\mathcal{K}(m-2)}}{\mathcal{K}|J_{m-2}|} = \frac{\boldsymbol{\vartheta}}{\mathcal{K}} \leqslant \delta.$$

Тепер, для будь-якого $0 \leqslant j \leqslant m-1$, нехай k_j є таким, що

$$x_{k_j+1} - x_{k_j} = \max_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [z_j, z_{j+1}]} (x_{i+1} - x_i).$$

Для $0 \leqslant j \leqslant m-2$, маємо

$$\frac{|J_{j+1}|}{|J_j|} \leqslant \frac{2\mathcal{K}(x_{k_{j+1}+1} - x_{k_{j+1}})}{x_{\mathcal{K}(j+1)} - x_{\mathcal{K}j}} \leqslant 2\boldsymbol{\vartheta},$$

і

$$\frac{|J_j|}{|J_{j+1}|} \leqslant \frac{\mathcal{K}(x_{k_j+1} - x_{k_j})}{x_{\mathcal{K}(j+2)} - x_{\mathcal{K}(j+1)}} \leqslant \boldsymbol{\vartheta},$$

отже (ii) перевірено.

Тепер припустимо, що $k \geqslant 0$ таке, що $[x_k, x_{k+1}] \subseteq [z_j, z_{j+1}]$, для деякого $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Тоді,

$$\begin{aligned} z_{j+1} - z_j &\leqslant x_{\min\{\mathcal{K}j+2\mathcal{K},n\}} - x_{\mathcal{K}j} = \sum_{\nu=\mathcal{K}j}^{\min\{\mathcal{K}j+2\mathcal{K},n\}-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) \\ &\leqslant \sum_{\nu=\mathcal{K}j}^{\min\{\mathcal{K}j+2\mathcal{K},n\}-1} \boldsymbol{\vartheta}^{|k-\nu|}(x_{k+1} - x_k) \leqslant (x_{k+1} - x_k) \sum_{\nu=\mathcal{K}j}^{\mathcal{K}j+2\mathcal{K}-1} \boldsymbol{\vartheta}^{|k-\nu|} \\ &\leqslant 2\mathcal{K}\boldsymbol{\vartheta}^{2\mathcal{K}-1}(x_{k+1} - x_k), \end{aligned}$$

і (iv) виконується.

Тепер покажемо, що $\vartheta(\mathbf{z}_m)$ обмежене. Припустимо, що i, j і k такі, що $0 \leqslant i < j \leqslant m$, $\max\{3i-2j, 0\} \leqslant k \leqslant \min\{3j-2i, m\} - 1$, і

$$\vartheta(\mathbf{z}_m) = \frac{(j-i)(z_{k+1} - z_k)}{z_j - z_i},$$

і нехай $i' := \mathcal{K}i$, $j' := \mathcal{K}j$, $k' := \mathcal{K}k$. Ясно, що $0 \leqslant i' < j' \leqslant \mathcal{K}m \leqslant n$ і $\max\{3i' - 2j', 0\} \leqslant k' \leqslant \min\{3j' - 2i', \mathcal{K}m\} - \mathcal{K} \leqslant \min\{3j' - 2i', n\} - 1$, і отже

$$\begin{aligned} \vartheta(\mathbf{z}_m) &= \frac{(j'-i')(z_{k+1} - z_k)}{\mathcal{K}(z_j - z_i)} \leqslant \frac{(j'-i')(z_{k+1} - z_k)}{\mathcal{K}(x_{j'} - x_{i'})} \\ &\leqslant \frac{(j'-i')}{\mathcal{K}(x_{j'} - x_{i'})}(x_{\min\{k'+2\mathcal{K},n\}} - x_{k'}) \leqslant \frac{\vartheta(\mathbf{x}_n)}{\mathcal{K}} \frac{(x_{\min\{k'+2\mathcal{K},n\}} - x_{k'})}{x_{k'+1} - x_{k'}} \\ &\leqslant 2\boldsymbol{\vartheta}^{2\mathcal{K}}, \end{aligned}$$

що завершує доведення. Лему 4.1.8 доведено.

Лема 4.1.9. *Для будь-яких* $y_0 < y_1 < \cdots < y_N$ *таких, що*

$$y_N - y_0 \leqslant \lambda \min_{0\leqslant j\leqslant N-1}(y_{i+1} - y_i)$$

і $f \in C[y_0, y_N]$, *маємо*

$$\omega_k(f, [y_0, y_N])_\infty \leqslant c(k, \lambda) \max_{1\leqslant j\leqslant N-1} \omega_k(f, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty.$$

Доведення. Нехай $\beta := k^{-1} \min_{0\leqslant j\leqslant N-1}(y_{i+1} - y_i)$. Тоді,

$$\omega_k(f, [y_0, y_N])_\infty \leqslant c(k, \lambda)\omega_k(f, \beta, [y_0, y_N])_\infty = c(k, \lambda)\omega_k(f, \beta, [y_{\nu-1}, y_{\nu+1}])_\infty,$$

з деяким $1 \leqslant \nu \leqslant N - 1$. Тобто, лему 4.1.9 доведено.

Доведення теореми 4.1.2

Нехай $f \in \Delta^3 \cap C$, $r \geqslant 3$, і припустимо, що $\mathbf{x}_n$ розбиття $[-1, 1]$ таке, що $\vartheta(\mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\vartheta}$.

Крок 1. Покладемо $\mathfrak{c}_5 := \mathfrak{c}_1(2\boldsymbol{\vartheta})$ і $\delta_1 := (\delta\mathfrak{c}_5^2)/(8\boldsymbol{\vartheta}^2)$ (де $\delta = \delta(r)$ з леми 4.1.6) і застосуємо лему 4.1.8, щоб мати розбиття $\mathbf{z}_m$ для $[-1, 1]$ таке, що $\mathbf{x}_n$ є δ_1-перебудовою $\mathbf{z}_m$, $\eta(\mathbf{z}_m) \leqslant 2\boldsymbol{\vartheta}$, $\vartheta(\mathbf{z}_m) \leqslant c(r, \boldsymbol{\vartheta})$, і, для будь-яких $0 \leqslant j \leqslant m - 1$ і $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ таких, що $(x_k, x_{k+1}) \cap [z_j, z_{j+1}] \neq \varnothing$,

$$z_{j+1} - z_j \leqslant c(r, \boldsymbol{\vartheta})(x_{k+1} - x_k). \tag{4.1.18}$$

Крок 2. З теореми 4.1.1 (з $\mathbf{x}_n = \mathbf{z}_m$) випливає, що існує розбиття $\mathbf{y}_l$ для $[-1, 1]$ і $l \leqslant 20m$, і кубічна КПФ $s \in \mathbb{S}_3(\mathbf{y}_l) \cap \Delta^3$ такі, що для кожного $0 \leqslant k \leqslant l - 1$ знайдеться $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, для якого $[y_k, y_{k+1}] \subseteq [z_{j-1}, z_{j+1}]$ і

$$y_{k+1} - y_k \geqslant \mathfrak{c}_5(z_{j+1} - z_{j-1}),$$

$$\|f - s\|_{L_\infty[z_j, z_{j+1}]} \leqslant c(\boldsymbol{\vartheta})\omega_4(f, [z_{j-1}, z_{j+2}])_\infty, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1.$$

Легко бачити, що

$$\eta(\mathbf{y}_l) \leqslant 2\eta^2(\mathbf{z}_m)/\mathfrak{c}_5 \leqslant 8\boldsymbol{\vartheta}^2/\mathfrak{c}_5.$$

Також, досить просто показати, що $\mu(\mathbf{y}_l)$ обмежено сталою $c(r, \boldsymbol{\vartheta})$.

Ще зауважимо, що $\mathbf{x}_n$ є δ-перебудовою $\mathbf{y}_l$. Дійсно, припустимо, що $[x_i, x_{i+1}] \cap (y_k, y_{k+1}) \neq \varnothing$, де $0 \leqslant k \leqslant l - 1$, і нехай $1 \leqslant j \leqslant m - 1$ таке, що $[y_k, y_{k+1}] \subseteq [z_{j-1}, z_{j+1}]$, і тому $y_{k+1} - y_k \geqslant \mathfrak{c}_5(z_{j+1} - z_{j-1})$. Оскільки, $\mathbf{x}_n$ є δ_1-перебудовою $\mathbf{z}_m$ і, ясно, що $(x_i, x_{i+1}) \cap [z_{j-1}, z_j] \neq \varnothing$, або $(x_i, x_{i+1}) \cap [z_j, z_{j+1}] \neq \varnothing$, то ми також маємо

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &\leqslant \delta_1(z_{j+1} - z_{j-1}) \leqslant \frac{\delta_1}{\mathfrak{c}_5}(y_{k+1} - y_k) \\ &\leqslant \frac{\delta_1 \eta(\mathbf{y}_l)}{\mathfrak{c}_5} \min_{\nu=k-1,k,k+1}(y_{\nu+1} - y_\nu) \\ &\leqslant \frac{8\delta_1 \boldsymbol{\vartheta}^2}{\mathfrak{c}_5^2} \min_{\nu=k-1,k,k+1}(y_{\nu+1} - y_\nu) \\ &\leqslant \delta \min_{\nu=k-1,k,k+1}(y_{\nu+1} - y_\nu). \end{aligned}$$

Крок 3. З леми 4.1.7 випливає, що для $s \in \mathcal{S}_3(\mathbf{y}_l) \cap \Delta^3$, існує КПФ s_*, степеня $\leqslant 3$, з тими ж самими вузлами, і така, що $s_* \in \Delta^3 \cap C^2$ і

$$\begin{aligned} \|s - s_*\|_{L_\infty} &\leqslant c(\eta(\mathbf{y}_l), \mu(\mathbf{y}_l)) \max_{1\leqslant j\leqslant l-1} \omega_4(s, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty \\ &\leqslant c(r, \boldsymbol{\vartheta}) \max_{1\leqslant j\leqslant l-1} \omega_4(s, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty \end{aligned}$$

Крок 4. З леми 4.1.6 випливає, що існує сплайн $\tilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_r(\mathbf{x}_n) \cap \Delta^3$ (тобто $\tilde{s}$ мінімального дефекту), що, для кожного $0 \leqslant j \leqslant l$, задовольняє нерівність

$$\|s_* - \tilde{s}\|_{L_\infty[(y_{j-1}+y_j)/2,(y_j+y_{j+1})/2]} \leqslant c(r)\omega_{r+1}(s_*, [(y_{j-1} + y_j)/2, (y_j + y_{j+1})/2])_\infty.$$

Залишається оцінити різницю $f - \tilde{s}$. Припустимо, що $\|f - \tilde{s}\|_{L_\infty} = |f(x_*) - \tilde{s}(x_*)|$, і $x_* \in [y_\nu, y_{\nu+1})$, для деякого $0 \leqslant \nu \leqslant l - 1$. Також припустимо, що $1 \leqslant \nu_1 \leqslant m - 1$ таке, що $[y_\nu, y_{\nu+1}] \subseteq [z_{\nu_1-1}, z_{\nu_1+1}]$ (і отже, $y_{\nu+1} - y_\nu \geqslant \mathfrak{c}_5(z_{\nu_1+1} - z_{\nu_1-1})$).

Застосовуючи лему 4.1.9 і беручи до уваги, що звуження $\mathbf{y}_l$ і $\mathbf{z}_m$ обмежені, пишемо (з $c = c(r, \boldsymbol{\vartheta})$)

$$\begin{aligned} &\|f - \tilde{s}\|_{L_\infty} \\ &\leqslant |f(x_*) - s(x_*)| + |s(x_*) - s_*(x_*)| + |s_*(x_*) - \tilde{s}(x_*)| \\ &\leqslant \|f - s\|_{L_\infty} + \|s - s_*\|_{L_\infty} + \|s_* - \tilde{s}\|_{L_\infty[(y_{\nu-1}+y_\nu)/2,(y_{\nu+1}+y_{\nu+2})/2]} \\ &\leqslant \|f - s\|_{L_\infty} + \|s - s_*\|_{L_\infty} + c\omega_4\left(s_*, [y_{\nu-1}, y_{\nu+2}]\right)_\infty \\ &\leqslant c\|f - s\|_{L_\infty} + c \max_{1\leqslant j\leqslant l-1} \omega_4(s, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty + c\omega_4\left(f, [y_{\nu-1}, y_{\nu+2}]\right)_\infty \\ &\leqslant c\|f - s\|_{L_\infty} + c \max_{1\leqslant j\leqslant l-1} \omega_4(f, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty + c\omega_4\left(f, [y_{\nu-1}, y_{\nu+2}]\right)_\infty \\ &\leqslant c \max_{0\leqslant j\leqslant m-1} \omega_4(f, [z_{j-1}, z_{j+2}])_\infty + c \max_{1\leqslant j\leqslant l-1} \omega_4(f, [y_{j-1}, y_{j+1}])_\infty \\ &\leqslant c \max_{1\leqslant j\leqslant m-1} \omega_4(f, [z_{j-1}, z_{j+1}])_\infty \\ &\leqslant c \max_{1\leqslant j\leqslant n-1} \omega_4(f, [x_{j-1}, x_{j+1}])_\infty, \end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з (4.1.18). Теорему 4.1.2 доведено.

4.2 Кубічний сплайн з “майже” рівномірними вузлами

Результати цього підрозділу містяться в [15].

Знову нехай $C := C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| := \|f\|_{[a,b]} := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $C^q := \{f : f^{(q)} \in C\}$, $q \in \mathbb{N}$, і $\Delta^3 := \Delta^3[a,b]$ – множина 3-монотонних функцій, тобто $f \in C$, що мають невід'ємну третю розділену різницю в усіх наборах з чотирьох різних точок (a,b). (Якщо $f \in \Delta^3$, то $f \in C^1$ і f' опукла на (a,b), а якщо $f \in C^3$, то $f \in \Delta^3$ тоді і тільки тоді, коли $f'''(x) \geqslant 0,\ x \in (a,b)$.)

В цьому підрозділі йдеться про наближення $f \in \Delta^3$ кубічними сплайнами, які теж є з Δ^3. А саме, ми доводимо наступну теорему 4.2.1.

Теорема 4.2.1. *Нехай $\{a_j\}_{j=0}^n$ – набір рівновіддалених точок відрізку $[a,b]$, $a = a_n < a_{n-1} < ... < a_0 = b$, $h := (b-a)/n$. Якщо функція $f \in \Delta^3$, то існують набір $\{b_j\}_{j=0}^n$ точок $[a,b]$ такий, що*

$$|a_j - b_j| \leqslant 3h/2, \quad |b_j - b_{j-1}| \geqslant h/2,$$

і кубічний сплайн $s \in C^1$, з вузлами в точках b_j, такий, що

$$s \in \Delta^3 \tag{4.2.1}$$

і

$$\|f - s\|_{[a_j, a_{j-1}]} \leqslant c\,\omega_4\left(f, h, [a_{j+4}, a_{j-5}]\right), \quad j = 1, ..., n, \tag{4.2.2}$$

а отже,

$$\|f - s\| \leqslant c\,\omega_4\left(f, h, [a,b]\right), \tag{4.2.3}$$

де $\omega_4\left(f, t, [\cdot,\cdot]\right)$ – 4-й модуль гладкості f, $a_\nu = a,\ \nu > n$, та $a_\nu = b,\ \nu < 0$.

Тут і надалі в підрозділі c позначають додатні абсолютні сталі, що можуть бути різними, навіть якщо вони стоять в одному рядку.

Теорема 4.2.1 є частинним випадком теореми 4.1.1, однак в ній пропонується простіша, ніж в теоремі 4.1.1, конструкція сплайна. Він, на відміну від сплайна з теореми 4.1.1, представлений сумою зрізаних степеневих функцій, а отже, може бути використаний для побудови 3-монотонного многочлена, що наближатиме функцію, "майже" як в (4.2.3) (див. опис (4.2.4)). І для чисельної реалізації, в разі потреби, він підходить значно краще ніж той, що в теоремі 4.1.1.

Зауважимо, що навіть питання про справджуваність поточкового аналогу (4.2.3), тобто оцінки

$$|f(x) - s(x)| \leqslant c\,\omega_4(f, 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n, [-1,1]), \quad x \in [-1,1], \tag{4.2.4}$$

є на сьогодні відкритим для 3-монотонного наближення (здається, що відповідь на це питання буде негативною, а функція $x^2\text{sign}(x) \in \Delta^3$ – буде контрприкладом, хоча ми не приділяємо цьому уваги), а з ω_3 (4.2.4) (і, звісно, (4.2.3)) справджується, див. нижче історію.

Також нагадаємо, що в (4.2.3) неможливо замінити ω_4 на ω_k з $k > 4$ (див. теорему 6.5.1), що відповідна оцінка для 3-монотонного наближення у L_p нормі з $p < \infty$, не є вірною навіть з ω_3 замість ω_4 (див. Коновалов, Левіатан [101] і Бондаренко, Примак [5, Зауваження 5]) і, що в q-монотонному наближенні з $q > 3$, (4.2.3) (і тим більше (4.2.4)) невірна, навіть з ω_3 (див. теорему 6.5.2), хоча для 1та2-монотонних (комонотонного та коопуклого) наближень обидві оцінки справджуються з ω_2 та ω_3, відповідно, тобто (4.2.3) – "граничний" випадок між позитивними і негативними випадками у формозберігаючому наближенні (розгорнутий огляд тематики можна знайти також в [112]).

Зауваження 4.2.1. *Сплайн s, з теореми 4.2.1, інтерполює f в a і b, але, взагалі кажучи, це не інтерполяційний (в своїх вузлах) сплайн степеня 3. Також, грубо кажучи, розташування лише "малої" частини його вузлів залежить від f, тоді як решта – є точками розбиття a_j. Крім того, a_j можуть бути "майже" рівновіддаленими (див. зауваження 4.2.2 в кінці підрозділа).*

Наведемо кілька історичних довідок з 3-монотонного наближення сплайнами і многочленами, про які не згадувалось в попередньому підрозділі.

Для $f \in \Delta^3 \cap C^2$, Коновалов і Левіатан [102] були першими, хто означив квадратичний сплайн $s_1 \in \Delta^3$ з $n-1$ рівновіддаленими вузлами, такий, що

$$\|f - s_1\| \leqslant c\,n^{-2}\omega_1\left(f'', 1/n\right),$$

де $\omega_k(\cdot,\cdot) := \omega_k(\cdot,\cdot,[-1,1])$.

Примак [150] для $f \in \Delta^3$ означив квадратичний сплайн $s_2 \in \Delta^3$ з $n-1$ довільними фіксованими вузлами, такий, що, зокрема, для рівновіддалених вузлів

$$\|f - s_2\| \leqslant c\,\omega_3\left(f, 1/n\right).$$

З результатів Шевчука [162], Левіатана і Примака [116, 41] випливає існування двох сплайнів s_3 і s_4 з $\Delta^3 \cap C^3$, обидва степеня 4 з $n-1$ рівномірними вузлами, таких, що

$$\|f - s_3\| \leqslant c\,n^{-3}\omega_2\left(f''', 1/n\right), \quad n > 4, \quad f \in \Delta^3 \cap C^3,$$

$$\|f - s_4\| \leqslant c\,n^{-1}\omega_4\left(f', 1/n\right), \quad n > N(f), \quad f \in \Delta^3\ (\subset C^1),$$

де $N(f)$ є сталою, яка залежить від f. Зазначимо, що остання нерівність є, взагалі кажучи, не вірною для всіх $n > 4$.

Нещодавно, Бондаренко, Левіатан і Примак [64] довели першу (і, мабуть, остаточну за порядком наближення) поточкову оцінку

$$|f(x) - S(x)| \leqslant c\,\omega_3(f, 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1, 1],$$

з S, що є 3-монотонним квадратичним сплайном по n-му чебишевському розбитті, і з S, що є 3-монотонним многочленом степеня $\leqslant n$.

Також, як вже зазначалось, є два відкритих питання в 3-монотонному наближенні многочленами:

1. Чи існує функція $f \in C[-1,1]$ з опуклою на $(-1,1)$ похідною, тобто $f \in \Delta^{(3)}$, така, що для кожної послідовності $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}_n$ алгебраїчних многочленів з

$$P_n^{(3)}(x) \geqslant 0,$$

ми мали б

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|f - P_n\|_{C[-1,1]}}{\omega_5\left(f, 1/n\right)} = \infty?$$

2. Що можно сказати, якщо ω_5 у першому питанні замінити на ω_4?

Допоміжні факти для доведення теореми 4.2.1

Для спрощення і не зменшуючи загальності, далі $[a,b] = I := [-1,1]$. Ми будемо модифікувати сплайн $S_3 = S_3(x, X_n)$, означений в (3.8.6), з представленням в пропозиції 3.8.1, а саме, в (3.8.10) і (3.8.11), де X_n – набір рівновіддалених або "майже" рівновіддалених (означемо це нижче) точок $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, $n \geqslant 3$, $-1 = x_n < x_{n-1} < \ldots < x_0 = 1$.

Нагадаємо, якщо $g \in \Delta^3$, то $[a,b,c,d,g] \geqslant 0$, для будь-яких різних a, b, c і d з $(-1,1)$. Зауважимо, що $S_3 \notin \Delta^3$, навіть якщо $g \in \Delta^3$, і, що з (3.8.5) випливає нерівність

$$\|g - S_3\|_{I_j} \leqslant c\,\omega_4\left(g, h_j, [x_j, x_{j-3}]\right), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.2.5}$$

($x_{-1} := x_{-2} := 1$).

Доведемо допоміжну лему 4.2.1, яка складає і самостійний інтерес, якщо розглядається f з невід'ємними розділеними різницями порядку q, $q \geqslant 3$. Для спрощення сформулюємо і доведемо лему 4.2.1 для $q = 3$. Позначимо

$$\delta_j := \delta_j(f) := [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}, f], \quad j = 3, ..., n-1.$$

$$\Delta_j := \Delta_j(f) := [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}, f], \quad j = 3, ..., n.$$

Знову, для спрощення позначень в лемі 4.2.1, обмежимо j значеннями $\{5, 4, 3\}$, і нехай $x_5 < x_4 < ... < x_0$ – будь-які фіксовані точки з X_n.

Лема 4.2.1. *Якщо $f \in \Delta^3$, то*

$$\begin{aligned}(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\Delta_4 &\leqslant (x_2 - x_5)(x_3 - x_4)\Delta_5 + (x_0 - x_3)(x_1 - x_2)\Delta_3 \\ &\quad + 2\left|\sqrt{(x_2 - x_5)(x_2 - x_4)\Delta_5(x_0 - x_3)(x_1 - x_3)\Delta_3}\right| \\ &=: A + 2B.\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Більш того, якщо $\Delta_5 \leqslant \Delta_4 \geqslant \Delta_3$, то

$$\begin{aligned}(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\Delta_4 \geqslant \max\Big\{&(x_0 - x_3)(x_1 - x_2)\Delta_3 - (x_2 - x_5)(x_2 - x_4 + x_2 - x_3)\Delta_5, \\ &(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)\Delta_5 - (x_0 - x_3)(x_2 - x_3 + x_1 - x_3)\Delta_3\Big\} \\ =:& \max\{C, D\} \geqslant A - 2B.\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Доведення. Використовуючи одне з представлень розділених різниць [147] (див. також у [56, стор. 14]), ми, для фіксованого $y \in (x_3, x_2)$, запишемо

$$\begin{aligned}\Delta_4(f) &= (x_2 - x_4)[x_4, x_3, y, x_2, f]\Delta_4\big((x - x_3)(x - y)\chi(x, x_3)\big) \\ &\quad + (x_1 - x_3)[x_3, y, x_2, x_1, f]\Delta_4\big((x - y)(x - x_2)\chi(x, y)\big) \\ &= \frac{y - x_4}{x_1 - x_4}[x_4, x_3, y, x_2, f] + \frac{x_1 - y}{x_1 - x_4}[x_3, y, x_2, x_1, f], \\ \Delta_5(f) &= \frac{y - x_5}{x_2 - x_5}[x_5, x_4, x_3, y, f] + \frac{x_2 - y}{x_2 - x_5}[x_4, x_3, y, x_2, f], \\ \Delta_3(f) &= \frac{y - x_3}{x_0 - x_3}[x_3, y, x_2, x_1, f] + \frac{x_0 - y}{x_0 - x_3}[y, x_2, x_1, x_0, f].\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\Delta_4(f) &= \frac{(y - x_4)(x_2 - x_5)}{(x_2 - y)(x_1 - x_4)}\Delta_5(f) - \frac{(y - x_4)(y - x_5)}{(x_2 - y)(x_1 - x_4)}[x_5, x_4, x_3, y, f] \\ &\quad + \frac{(x_1 - y)(x_0 - x_3)}{(y - x_3)(x_1 - x_4)}\Delta_3(f) - \frac{(x_1 - y)(x_0 - y)}{(y - x_3)(x_1 - x_4)}[y, x_2, x_1, x_0, f].\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Оскільки $y \in (x_3, x_2)$ і $f \in \Delta^3$ ($[a,b,c,d,f] \geqslant 0$), то маємо

$$\Delta_4 \leqslant \min_{x_3<y<x_2} \left\{ \frac{(y-x_4)(x_2-x_5)}{(x_2-y)(x_1-x_4)}\Delta_5 + \frac{(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_3)(x_1-x_4)}\Delta_3 \right\}.$$

Знайшовши цей мінімум, бачимо, що $y_{\min} \in [x_3, x_2]$ для будь-яких $\Delta_5, \Delta_3 \geqslant 0$, і тому ми пишемо (4.2.6), беручи до уваги збіжність розділених різниць.

Доведемо першу нерівність в (4.2.7). Нехай $\max\{C, D\} = C$. Припустимо протилежне, що

$$(x_1-x_4)(x_2-x_3)\Delta_4 < C. \tag{4.2.9}$$

З (4.2.8) маємо

$$\frac{(x_2-y)(x_1-x_4)}{(y-x_4)(x_2-x_5)} \left(\Delta_4 - \frac{(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_3)(x_1-x_4)}\Delta_3 \right) \leqslant \Delta_5, \quad y \in (x_3, x_2).$$

Разом з (4.2.9) це породжує

$$\begin{aligned} E_1\Delta_4 &:= \left((x_1-x_4)(x_2-x_3) + (x_2-x_4+x_2-x_3)\frac{(x_2-y)(x_1-x_4)}{y-x_4} \right)\Delta_4 \\ &< \left((x_0-x_3)(x_1-x_2) + (x_2-x_4+x_2-x_3)\frac{(x_2-y)(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_4)(y-x_3)(x_1-x_4)} \right)\Delta_3 \\ &=: E_2\Delta_3. \end{aligned}$$

Оскільки x_j рівновіддалені, або "майже" рівновіддалені, тобто такі, що існує $[a,b] \subset (x_3, x_2)$, для якого $E_1 \geqslant E_2 > 0$ з $y \in [a,b]$, то остання нерівність протирічить нерівності $\Delta_4 \geqslant \Delta_3$ (зазначимо, що a і b, як нулі деякої параболи, можуть бути розташовані дуже близько один до одного і у найгіршому випадку порушення рівномірності точок x_j, $a = b$). Випадок $C < D$ доводиться аналогічно.

Друга нерівність в (4.2.7) очевидна. Дійсно, якщо $C \geqslant D$, то $(x_0-x_3)(x_1-x_3)\Delta_3 \geqslant (x_2-x_5)(x_2-x_4)\Delta_5$ і тому $A - 2B \leqslant A - 2|\sqrt{((x_2-x_5)(x_2-x_4)\Delta_5)^2}| = C$. Лему 4.2.1 доведено.

Зафіксуємо $n > 3,\ j = 3, ..., n-1$ і будь-які $a, c, b \in [x_{j+3}, x_{j-5}] \cap I,\ a < c < b$. Позначимо

$$\widehat{h}_1 := c - a, \quad \widehat{h}_2 := b - c, \quad \widetilde{h}_1 := b - x_j + b - x_{j-1} + b - x_{j-2},$$

$$\widetilde{h}_2 := (b-x_j)(b-x_{j-1}) + (b-x_j)(b-x_{j-2}) + (b-x_{j-1})(b-x_{j-2}),$$

$$\widetilde{h}_3 := (b-x_j)(b-x_{j-1})(b-x_{j-2}).$$

Означимо функцію $\varphi_j \in C^1$, співпадаючу з $\Psi_3(x, x_j)$ (з пропозиції 3.8.1) м.с.,

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) &:= \varphi_j(x, a, c, b)\\ &:= \alpha_j(x-a)_+^3 + \beta_j(x-c)_+^3 + \gamma_j(x-c)_+^2 + (1-\alpha_j-\beta_j)(x-b)_+^3,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \frac{\widetilde{h}_1\widehat{h}_2^2 - 2\widetilde{h}_2\widehat{h}_2 + 3\widetilde{h}_3}{3\widehat{h}_1^2(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2)},\\ \beta_j &= \frac{\widetilde{h}_1\widehat{h}_2(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2)(2\widehat{h}_1-\widehat{h}_2) - \widetilde{h}_2(\widehat{h}_1^2 - 2\widehat{h}_2^2 + 2\widehat{h}_1\widehat{h}_2) - 3\widetilde{h}_3(\widehat{h}_2-\widehat{h}_1)}{3\widehat{h}_1^2\widehat{h}_2^2)},\\ \gamma_j &:= \widetilde{h}_1 - 3\alpha_j(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2) - 3\beta_j\widehat{h}_2.\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_j(x) = \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}\varphi_j''(u)du dt. \tag{4.2.10}$$

Коментар. Числа α_j і β_j обрані з двох відповідних умов так, щоб мати (4.2.10) (перша робить рівним нулю суму всіх коефіцієнтів біля $(x-\cdot)^1$ у представленні Ψ_3 сумою $(x-\cdot)^r$, $r = 0, 1, 2, 3$, а друга робить те саме з усіма вільними коефіцієнтами, включаючи той, що утворюється першою умовою).

Таким чином,

$$\varphi_j(x, a, c, b) = \Psi_3(x, x_j), \quad x \in I\backslash[\min\{a, x_j\}, b] =: I\backslash\widehat{I}_j, \tag{4.2.11}$$

і якщо $h_j \leqslant \widehat{h}_1 < 10h_j$ і $h_j \leqslant \widehat{h}_2 < 10h_j$, то

$$\|\Psi_3(\cdot, x_j) - \varphi_j\| = \|\Psi_3(\cdot, x_j) - \varphi_j\|_{\widehat{I}_j} \leqslant c\, h_j^3. \tag{4.2.12}$$

Доведення теореми 4.2.1

Означення кубічного 3-монотонного сплайна

Надалі $f \in \Delta^3$, і $n > 4$. Для кожного $j = 4, ..., n-1$, позначимо $\Lambda_j := (x_{j-3} - x_j)\Delta_j$, і якщо

$$\Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j > \Delta_{j-1}, \tag{4.2.13}$$

то будемо писати $j \in W$. Для кожного $j \in W$ позначимо точку

$$d_j := \frac{(x_j + x_{j-1})\Lambda_{j+1} + (x_{j-1} + x_{j-2})\Lambda_j + (x_{j-2} + x_{j-3})\Lambda_{j-1}}{2(\Lambda_{j+1} + \Lambda_j + \Lambda_{j-1})},$$

що є центром параболи

$$\begin{aligned}P_j(x) &:= \Lambda_{j+1}(x-x_j)(x-x_{j-1}) + \Lambda_j(x-x_{j-1})(x-x_{j-2}) + \Lambda_{j-1}(x-x_{j-2})(x-x_{j-3}) \\ &= \big(\Lambda_{j+1}+\Lambda_j+\Lambda_{j-1}\big)(x-d_j)^2 + H_j,\end{aligned}$$

де

$$H_j := \Lambda_{j+1}(d_j-x_j)(d_j-x_{j-1}) + \Lambda_j(d_j-x_{j-1})(d_j-x_{j-2}) + \Lambda_{j-1}(d_j-x_{j-2})(d_j-x_{j-3}).$$

Беручи до уваги першу нерівність в (4.2.7), нехай "майже" рівновіддалені x_j є такі, що

$$d_j \in I_{j-1}, \quad j \in W \tag{4.2.14}$$

(для рівновіддалених x_j таке включення гарантоване). Введемо множину

$$Z := \{j-1, j-2 : \ j \in W\}$$

(тобто всі пари індексів, що відповідають кінцям проміжку в (4.2.14)). Використовуючи (4.2.6) і (4.2.7), легко перевірити, що

$$\overline{H}_j \geqslant H_j \geqslant 0, \quad j \in W, \tag{4.2.15}$$

де $\overline{H}_j$ є найбільшим значенням H_j, коли $\Lambda_j(x_{j-2}-x_{j-1}) = \Lambda_{j+1}(x_{j-1}-x_j)+\Lambda_{j-1}(x_{j-3}-x_{j-2})$. Аналогічно, якщо в (4.2.6) ми маємо рівність, то $H_j = 0$.

Нехай

$$D := \{d_j : \ j \in W\}.$$

Відзначимо, що точки з D розташовані на розбитті x_j принаймні через один інтервал. Іншими словами, для будь-якого $j \in W$, індекси $j \pm 1$, що відповідають розбиттю x_j, не належать W (у гіршому випадку тільки $j \pm 2$ можуть бути у W). Зокрема, беручи до уваги (4.2.14), зауважимо, що якщо будь-яке

$$j \in \{3, 4, ..., n-1\} =: J$$

є таким, що $\Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j$, то завжди $(x_j, x_{j-1}) \cap D = \varnothing$, а якщо воно таке, що $\Delta_{j+1} > \Delta_j$, то завжди $(x_{j-1}, x_{j-2}) \cap D = \varnothing$. Останні два зауваження будуть використовуватися далі без спеціальних посилань.

Позначимо

$$V := J \backslash \big(W \cup \{j-1 : \ j \in W\}\big).$$

Зазначимо, що $V = \{j : \ j-1 \in J \backslash Z\}$.

Введемо

$$Y := \{y_i\}_{i=0}^{k} := \big\{x_j : \ j \in (J \cup \{1,2\})\backslash Z\big\} \cup D \cup \{-1,1\},$$

де точки y_i перенумеровано у зворотньому порядку і $n - [n/3] - 1 \leqslant k \leqslant n$.

Далі, для кожного $j \in J$, введемо нову функцію $\Psi_j = \Psi_j(x) \in C^1$. Для кожного $j \in V$, через $i(j)$ позначимо такий індекс i, при якому $y_i = x_{j-1}$, і покладемо

$$\Psi_j(x) := \begin{cases} \varphi_j(x, y_{i(j)}, y_{i(j)-1}, y_{i(j)-2}), & \text{якщо} \quad \Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j, & \text{(i)} \\ \varphi_j(x, y_{i(j)+2}, y_{i(j)+1}, y_{i(j)}), & \text{інакше.} & \text{(ii)} \end{cases}$$

Для кожного $j \in W$, через $i^*(j)$ позначимо такий індекс i, при якому $y_i = d_j$, і покладемо

$$\Psi_j(x) := \varphi_j(x, y_{i^*(j)+1}, y_{i^*(j)}, y_{i^*(j)-1}), \tag{4.2.16}$$

$$\Psi_{j-1}(x) := \varphi_{j-1}(x, y_{i^*(j)+1}, y_{i^*(j)}, y_{i^*(j)-1}). \tag{4.2.17}$$

Означення Ψ_j, $j \in J$, завершено. Покладемо

$$\Psi_2(x) := \Psi_3(x, x_2) = 0, \quad \text{і} \quad \Psi_n(x) := \Psi_3(x, x_n) = (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}).$$

Таким чином, неперервно диференційовний на I кубічний сплайн

$$s(x) := L_3(x, x_n, f) + \sum_{j=3}^{n-1} \delta_j(f)\,(x_{j-3} - x_{j+1})\,\Psi_j(x), \tag{4.2.18}$$

або еквівалентно,

$$s(x) := L_2(x, x_n, f) + \sum_{j=3}^{n} \Delta_j(f)\,\left(\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x)\right), \tag{4.2.19}$$

має свої вузли тільки в Y.

Доведемо (4.2.3). Оскільки

$$h_{j^*} \leqslant |y_i - y_{i-1}| < 4\,h_{j^*}, \quad j = 1, ..., k, \tag{4.2.20}$$

де h_{j^*} є довжина будь-якого найближчого до y_i проміжку I_j (з двох можливих), то оцінка (4.2.3) випливає з (4.2.5), (3.8.10), (4.2.18), (4.2.11), (4.2.12) і оцінки

$$|\delta_j| \leqslant c\frac{\omega_4(f, h_j)}{h_j^4}, \quad j = 3, ..., n-1,$$

див., наприклад, [56, стор. 54]. А саме, якщо $x \in I_{j^*}$, то

$$\begin{aligned}
|f(x) - s(x)| &\leqslant |f(x) - S_3(x)| + |S_3(x) - s(x)| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, 1/n) + \sum_{j=3}^{n-1} |\delta_j|(x_{j-3} - x_{j+1})\,|\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| \\
&= c\,\omega_4(f, 1/n) + \sum_{j=\max\{3, j^*-5\}}^{\min\{n-1, j^*+4\}} |\delta_j|(x_{j-3} - x_{j+1})\,|\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| \\
&\leqslant c\,\omega_4(f, 1/n).
\end{aligned}$$

Отже, оцінку (4.2.3) доведено з одночасним доведенням (4.2.2).

Покажемо (4.2.1), тобто перевіримо, що $s''(x)$ не спадає на I.

Для цього зауважимо, що в усіх Ψ_j,

$$\mathrm{sign}\gamma_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j, \\ -1, & \text{інакше}, \end{cases} \qquad j \in J. \tag{4.2.21}$$

Це зручно побачити разом з наступним. Нехай $j \in V^+$ (V^-), якщо справджується (i) ((ii)), відповідно, тобто $V = V^+ \cup V^-$. Беручи до уваги (4.2.20), зазначимо, що у Ψ_j з $j \in V^+$, $\alpha_j + \beta_j \geqslant 0$ завдяки рівновіддаленому, або "майже" рівновіддаленому розбиттю X_n, тоді як $\alpha_j \geqslant 0$ завжди (для всіх x_j). Обидва числа (тобто $\alpha_j + \beta_j$ і α_j) $\leqslant 1$. Аналогічно, якщо $j \in V^-$, то $\alpha_j \leqslant 1$ завдяки X_n, тоді як $\alpha_j + \beta_j \leqslant 1$ завжди. Обидва числа $\geqslant 0$. Будемо використовувати ці чотири зауваження зі спеціальним посиланням ($*$).

Зауваження 4.2.2. *Саме ці симетричні умови, разом з* (4.2.14) *і лемою 4.2.1, накладають обмеження на розбиття X_n. Для рівновіддалених точок вони гарантовано виконуються, на відміну, скажімо, від чебишевського розбиття біля кінців інтервалу (у центральній частині чебишевського розбиття теж все добре).*

Стосовно чисел α_j і $\alpha_j + \beta_j$ в (4.2.16), а також α_{j-1} і $\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}$ в (4.2.17), зауважимо, що вони суттєво залежать лише від розташування центрального вузла $y_{i^*(j)} = d_j$. А саме, якщо d_j знаходиться біля правого кінця I_{j-1} (див. (4.2.14)), то α_j і $\alpha_j + \beta_j$ "хороші" , тобто задовольняють ($*$) з $j \in V^+$, тоді як $1 \leqslant \alpha_{j-1} + \beta_{j-1} < 1.5$ "погані" (тобто не задовольняють ($*$)) і $0 \leqslant \alpha_{j-1} < 0.5$, інакше (якщо біля лівого кінця) α_{j-1} і $\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}$ "хороші" , тоді як $-0.5 < \alpha_j \leqslant 0$ і $1 \leqslant \alpha_j + \beta_j < 1.5$ "погані". (Фактично, 1.5 і -0.5 це грубі числа і в більш точних арефметичних підрахунках вони кращі.) Будемо посилатись на зазначені "погані" властивості через ($**$).

Таким чином, з (4.2.19) і (4.2.21) відразу помітимо, що

$$s''(y_i-) \leqslant s''(y_i+), \quad y_i \in Y. \tag{4.2.22}$$

Далі зазначимо, що доданки в сумі в (4.2.19) зручно розглядати у спадному порядку, тобто від n до 3, як і дивитися на неспадність s'' а не на невід'ємність s''' на кожному (y_i, y_{i-1}). Переконаємося, що

$$s''(x) \nearrow, \quad x \in (y_i, y_{i-1}),\ i = 1, ..., k. \tag{4.2.23}$$

Нехай a_j (b_j) позначає найменший (найбільший) вузол з трьох вузлів кожної Ψ_j, відповідно. Зауважимо, що

$$\Psi''_j(x) - \Psi''_{j-1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty, a_j], \\ 2(x_{j-3} - x_j), & \text{якщо } x \in [b_{j-1}, +\infty), \end{cases} \qquad j = 4, ..., n. \tag{4.2.24}$$

Виділимо з (4.2.19) три доданки

$$\begin{aligned} &\Delta_{j+1}\big(\Psi''_{j+1}(x) - \Psi''_j(x)\big) + \Delta_j\big(\Psi''_j(x) - \Psi''_{j-1}(x)\big) + \Delta_{j-1}\big(\Psi''_{j-1}(x) - \Psi''_{j-2}(x)\big) \\ &=: \overline{P}''_j(x), \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

і розглянемо

$$x \in (y_{i(j)+1}, y_{i(j)}) \cup (y_{i(j)}, y_{i(j)-1}) =: \widetilde{I}_{i(j)+1} \cup \widetilde{I}_{i(j)} =: \overline{I}_{i(j)}. \tag{4.2.26}$$

Маємо три принципові ситуації: 1) якщо $j+1 \in V^-$, то $j \in V$, 2) якщо $j+1 \in V^+$, то $j \in V^+$ (і ніколи до V^-), 3) $j+1 \in V \cup \{\nu - 1 :\ \nu \in W\}$, $\ j \in W$, $\ j-2 \in V \cup W$.

Перші два випадки є подібні, тому перевіримо тільки другий. Зауважимо, що Ψ_{j+1} і Ψ_j мають тільки два спільних вузли $y_{i(j)}$ і $y_{i(j)-1}$. Беручи до уваги (4.2.25) і (i), запишемо

$$s''(x) = A(x - y_{i(j)}) + B = A(x - x_{j-1}) + B \nearrow, \quad x \in \widetilde{I}_{i(j)},$$

де

$$A \geqslant (\Delta_{j+1} - \Delta_{j+2})(\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}) + (\Delta_j - \Delta_{j+1})\alpha_j \geqslant 0$$

завдяки тому, що $\Delta_{j+2} \leqslant \Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j$ разом з $(*)$, а B є невід'ємна стала, оскільки є (4.2.24).

Для отримання (4.2.23), у складному випадку 3), скористаємося тим, що "хороші" властивості $(*)$ у сумі з "поганими" $(**)$ завжди разом дадуть (4.2.23). Більш точно, беручи до уваги (4.2.11) і (4.2.12), розглянемо для (4.2.26) три головні співвідношення (4.2.10), (4.2.15) і (4.2.20). Нагадаємо, у цьому випадку $y_{i(j)} = y_{i*(j)} = d_j$. Завдяки (4.2.10) маємо

$$\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t} \overline{P}_j''(u)dudt = P_j(x)\chi(x, d_j), \quad x \in I\backslash\overline{I}_{i*(j)}, \tag{4.2.27}$$

і більш того,

$$\int_{-1}^{x} \overline{P}_j''(t)dt = P_j'(x)\chi(x, d_j), \quad x \in I\backslash\overline{I}_{i*(j)}. \tag{4.2.28}$$

Оскільки $\overline{P}_j''(x)$ має тільки три вузли і, більш того, центральний – це d_j (тобто центр P_j), то рівності (4.2.28) і (4.2.27) з $H_j \geqslant 0$ не можуть бути вірними обидві разом одночасно без (4.2.23), див. також (4.2.22).

Як додаткове зауваження, скажемо, що нерівність (4.2.20) дає достатні відстані між цими трьома вузлами, щоб сформувати досить гарно обмежене число $\overline{H}_j$ (див. (4.2.15)) в (4.2.27) без того, щоб зруйнувати (4.2.23) на $\overline{I}_{i*(j)}$. Твердження (4.2.23), а отже і (4.2.1), доведено. Теорему 4.2.1 доведено.

4.3 Висновки до розділу 4

У розділі 4 доведено наступне:

- Для $r \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$ і будь-якої 3-монотонної неперервної на $[a, b]$ функції f (тобто її третя розділена різниця для всіх наборів з чотирьох різних точок (a, b) невід'ємна або, що еквівалентно, f має опуклу на (a, b) похідну) знайдено сплайн s, степеня r, мінімального дефекту (тобто $s \in C^{r-1}[a, b]$) з $n - 1$ рівновіддаленами вузлами на (a, b), який є теж 3-монотонним (як і f) і такий, що

$$\|f - s\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant c\,\omega_4(f, (b - a)/n, [a, b])_\infty,$$

де c – абсолютна стала, і $\omega_4(f, t, [a, b])_\infty$ – 4-й модуль гладкості f в рівномірній нормі. Це дає ствердну відповідь на питання з [116, Зауваження 3], яке вказувало на єдиний недоведенний випадок в оцінках типу Джексона для рівномірного 3-монотонного наближення кусково-поліноміальними функціями (КПФ) з рівномірно розташованими вузлами. В підрозділі 6.5 (теорема 6.5.1) показано, що ця оцінка хибна з ω_k, $k > 4$.

- Також, доведена аналогічна оцінка в термінах 4-го модуля гладкості Діціана-Тотіка для сплайнів з чебишевськими вузлами.

- В підрозділі 6.5 (теорема 6.5.2) показано, що обидві вказані оцінки хибні у випадку 3-монотонного наближення сплайнами в L_p нормі з $p < \infty$. Також, доведено, що ці оцінки справджуються в в L_p з $p < \infty$, якщо дозволити вузлам наближаючих КПФ-ій залежити від f, причому ця залежність (тобто відстань між їх сусідніми вузлами), на відміну від наближень сплайнами з вільними вузлами, є контрольованою (тобто вузли не зліпаються).

- Доведення обох вказаних вище оцінок спирається на знайдений кубічний сплайн 3-монотонного *локального* наближення з "правильними" вузлами і з відповідною оцінкою з ω_4. (Див. підрозділ 4.1).

- Для будь-якої 3-монотонної на $[a, b]$ функції f знайдено кубічний 3-монотонний сплайн s з $n - 1 \in \mathbb{N}$ "майже" рівновіддаленими вузлами a_j, такий, що

$$\|f - s\|_{C[a_j,a_{j-1}]} \leqslant c\,\omega_4\left(f, (b-a)/n, [a_{j+4}, a_{j-5}] \cap [a, b]\right), \quad j = 1, ..., n,$$

а, отже, теж $\|f - s\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant c\omega_4(f, (b-a)/n, [a, b])_\infty$. Цей сплайн, на відміну від вище наведеного, більш простий, його представлено сумою зрізаних степеневих функцій, тобто він більш придатний, за петребою, для чисельної реалізації (див. підрозділ 4.2).

Отримані оцінки вказують на те, що 3-монотонне наближення є межовим випадком між монотонним і опуклим наближеннями (де багато “позитивних” результатів) та k-монотонним наближенням з $k > 3$ (де майже все “негативне”). Зауважимо, що навіть питання про справджуваність поточкової оцінки

$$|f(x) - s(x)| \leqslant c\,\omega_4(f, 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n, [-1, 1]), \quad x \in [-1, 1],$$

а отже і

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s \vee Y)\,\omega_4(f, 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1, 1],$$

є на сьогодні відкритим для 3-монотонного наближення (здається, що відповідь на це питання буде негативною, а функція $x^2\mathrm{sign}(x) \in \Delta^3$ – буде контрприкладом, хоча ми це не доводимо).

Розділ 5

Копозитивне наближення

5.1 Майже копозитивне поточкове наближення неперервних на відрізку функцій

Результати цього підрозділу містяться в [17].

Знову згадаємо, що класична поточкова оцінка типу Нікольського (2.1.1), для $f \in C[-1,1] =: C$, тобто

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k)\,\omega_k(f, \rho_n(x)), \quad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,\ x \in [-1,1], \quad (5.1.1)$$

зі сталою $c(k)$, що залежить тільки від k, тягне рівномірну –

$$\|f - P_n\| \leqslant c(k)\,\omega_k(f, 1/n), \quad n \geqslant k-1, \quad (5.1.2)$$

і, що з 1968 року, коли Лоренц і Целлер [130] довели монотонний її аналог з $k = 1$ (тобто наблизили монотонну $f \in C$ монотонними многочленами з $\mathbb{P}_n$), започатковано пошук опуклих, кусково або коопуклих, комонотонних і таких інших аналогів цих двох нерівностей.

У 1995 році Копотун [104] отримав копозитивний аналог (5.1.1) з $k = 3$. Саме його нерівність "узагальнюється" в ціому підрозділі. А саме, для $Y := Y_s$ – набору з $s \in \mathbb{N}$ фіксованих точок $y_i :\ -1 < y_s < \ldots < y_1 < 1$, і $\Delta^{(0)}(Y)$ – множини $f \in C$ таких, що f невід'ємна на $[y_1, 1]$, недодатня на $[y_2, y_1]$, невід'ємна на $[y_3, y_2]$ і т.д., тобто

$$f \in \Delta^{(0)}(Y) \Leftrightarrow f(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad \Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i)$$

($\Delta^{(0)}(Y)$ – *копозитивні* функції (одна одній, або між собою)), Копотун довів наступну теорему.

Теорема 5.1.1. Копотун [104] *Якщо* $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *що більше деякої сталої* $N(Y)$, *яка залежить тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_n$, *такий, що* $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$, *тобто*

$$P_n(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \tag{5.1.3}$$

зокрема $P_n(y_i) = 0,\ i = 1, ..., s,$ *і*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(s)\,\omega_3(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{5.1.4}$$

де $c(s)$ *– стала, яка залежать тільки від* s.

З (5.1.4) випливає оцінка

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\,\omega_3(f, 1/n), \quad n \geqslant N(Y), \tag{5.1.5}$$

яку (зі сталою $C(Y)$ замість $c(s)$ і з $n \geqslant 2$) довели також Ю і Ху [94], як наслідок аналогічної нерівності для сплайна [94].

Оцінка (5.1.5), і тим більше (5.1.4), є остоточна за порядком, тобто в ній неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k > 3$, тому що Цу [175, 177] побудовано функцію $f \in \Delta^{(0)}(Y_1)$ (яка є навіть ще й з $C^{(1)}$) таку, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\inf\limits_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y_1)} \|f - P_n\|}{\omega_4(f, 1/n)} = \infty. \tag{5.1.6}$$

Однак з *комонотонного* наближення (де (5.1.4) і (5.1.5) тільки з ω_2 замість ω_3 встановлено в [10], а (5.1.6) тільки з ω_3 і $\Delta^{(1)}$ замість ω_4 і $\Delta^{(0)}$ встановлено Ву і Цу [169]) нам відомо, що якщо послабити умову комонотонності для многочленів у маленьких околах точок зміни монотонності функції, то можна збільшити порядок комонотонного наближення на одиницю, див. Левіатан, Шевчук [118], і не більше ніж на одиницю, див. Левіатан, Шевчук [122].

Нагадаємо, у *коопуклому* наближенні (де (5.1.5) встановлено Копотуном, Левіатаном і Шевчуком [109], (5.1.4) встановлено для різних випадків в розділі 3, а (5.1.6) з $\Delta^{(2)}$ замість $\Delta^{(0)}$ встановлено теж в [169]) – приблизно така сама ситуація – послабивши умову коопуклості для многочленів у маленьких околак точок перегину, ми отримуємо додатковий порядок наближення, тобто ω_4 замість ω_3 у (5.1.5), див. Левіатан, Шевчук [123], і те саме в (5.1.4), див. теорему 3.8.1. Здається, що для коопуклого наближення теж більше ніж один додатковий порядок отримати неможливо, хоча це припущення ще не доведено.

Досить несподіваним виявилось, що у копозитивному наближенні, при послабленні умови зберігання знаку для многочлена у маленьких околах точок зміни знака фінкції, можливо покращити наближення не на один порядок, а як завгодно, тобто так само, як при наближенні без обмежень (5.1.1). А саме, має місце наступна теорема 5.1.2, яка і доводиться в цьому підрозділі.

Теорема 5.1.2. *Якщо* $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *що більше деякої сталої* $N(k,Y)$, *яка залежить тільки від* $k \in \mathbb{N}$ *і* $\min\limits_{i=1,\dots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_{4n}$ *такий, що*

$$P_n(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1] \setminus \cup_{i=1}^{s} (y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)), \tag{5.1.7}$$

$P_n(y_i) = 0,\ i = 1, ..., s,\ i$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,s)\, \omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{5.1.8}$$

де $c(k,s)$ *– стала, яка залежать тільки від* k *і* s.

Наслідком (5.1.8) є оцінка

$$\|f - P_n\| \leqslant c(k,s)\, \omega_k(f, 1/n), \quad n \geqslant N(k,Y). \tag{5.1.9}$$

Доречі, для диференційовних функцій з $\Delta^{(0)}(Y)$ має місце наступна теорема 5.1.3.

Теорема 5.1.3. [11, 73] *Якщо* $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *що більше деякої сталої* $N(k,Y)$, *яка залежить тільки від* $k \in \mathbb{N}$ *і* $\min\limits_{i=1,\dots,s-1}\{y_i - y_{i+1}\}$, *існує многочлен* $P_n \in \mathbb{P}_n$ *такий, що* $P_n \in \Delta^{(0)}(Y)$, *тобто*

$$P_n(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \tag{5.1.10}$$

зокрема, $P_n(y_i) = 0,\ i = 1, ..., s,\ i$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,s)\, \rho_n(x)\, \omega_k(f', \rho_n(x)), \quad x \in [-1,1], \tag{5.1.11}$$

$$\|f - P_n\| \leqslant c(k,s)\, (1/n)\, \omega_k(f', 1/n), \tag{5.1.12}$$

де $c(k,s)$ *– стала, яка залежать тільки від* k *і* s.

Для комонотонного та коопуклого наближень диференційовних на відрізку функцій, такі остаточні за порядком оцінки у формі (5.1.11) (і (5.1.12)), див. в [79] та в розділі 3, відповідно, а докладний огляд майже всіх випадків формозберігаючого наближення алгебраїчними многочленами – в Копотун, Левіатан, Примак, Шевчук [112]. Також зауважимо, що з нерівності Уітні (2.1.12) випливає, що в усіх наведених вище оцінках, сталі $N(k, Y)$ та $c(k, s)$ можна замінити на $k-1$ та $C(k, Y)$, відповідно.

Допоміжні факти для доведення теореми 5.1.2

Зберемо у наступних двох лемах необхідні нам властивості двох важливих многочленів: многочлена Дзядика (3.3.26) "найкращого" набиження функцій без обмежень (лема 5.1.1) і одного, вже багато раз нами задіяного, многочлена(нів) (2.1.23) хорошого розбиття одиниці (лема 5.1.2). Вони, як вже зазначалось, використовувались у багатьох роботах з наближення, але ми згадаємо лише три [25, 56] і [79].

Нехай, знову $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_k \ni L_k(x, g, [a, b])$ – многочлен Лагранжа, що інтерполює $g \in C_{[a,b]}$ у рівновіддалених точках $a + \nu\frac{b-a}{k}$, $\nu = 0, ..., k$, відрізку $[a, b]$, $L_0(x, g, [a, b]) := g(a)$, $L_k(x, g) := L_k(x, g, [-1, 1])$, і задовольняє нерівність Уітні [167]

$$\|g - L_{k-1}(\cdot, g, [a, b])\|_{[a,b]} \leqslant 3\,\omega_k\left(g, (b-a)/k, [a, b]\right), \tag{5.1.13}$$

і $\varphi = \varphi(t)$ – k-мажоранта, тобто неперервна і неспадна на $[0, \infty)$ функція така, що $\varphi(0) = 0$ і $t^{-k}\varphi(t)$ не зростає при $t > 0$, і Φ^k– множина всіх φ. Згадаємо (див., напр., [56, Теорема 2.1]), що для будь-якого k-го модуля $\omega_k(g, t, [a, b])$ функції $g \in C_{[a,b]}$ існує $\varphi \in \Phi^k$ така, що

$$\omega_k(g, t, [a, b]) \leqslant \varphi(t) \leqslant 2^k\,\omega_k(g, t, [a, b]), \quad t \geqslant 0. \tag{5.1.14}$$

Надалі $c_\nu := c_\nu(k, s)$ – різні невід'ємні сталі, що можуть залежити тільки від фіксованих $k, s \in \mathbb{N}$; $I := [-1, 1]$, $\rho := \rho_n(x)$, $x \in I$.

Лема 5.1.1. [56, див. у Лемі 15.3] *Якщо функція $g \in C$, то многочлен*

$$\mathcal{D}(x, g) := \mathcal{D}_n(x, g) := \int_{-1}^{1}\big(g(y) - L_{k-1}(y, g)\big)D_{2r+1,n,r}(y, x)dy + L_{k-1}(x, g) \in \mathbb{P}_{(r+1)(n-1)-1},$$

для будь-якої $\delta > 0$, задовольняє нерівність

$$\begin{aligned}|g(x) - \mathcal{D}(x, g)| &\leqslant c_1\,\omega_k\left(g, \rho, [x-\delta, x+\delta] \cap I\right) + c_2\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{r-2k-2}\varphi(\rho)\\ &\leqslant c_3\,\varphi(\rho), \quad x \in I,\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

і для кожної фіксованої точки $x^* \in I$ — нерівність

$$\left|L'_{k-1}\left(x, g, J_n^*\right) - \mathcal{D}'(x, g)\right| \leqslant \frac{c_4}{\rho}\,\varphi(\rho), \quad x \in J_n^*, \tag{5.1.16}$$

де $J_n^* := [x^* - \rho_n(x^*), x^* + \rho_n(x^*)] \cap I$ *і ядро* $D_{2r+1,n,r}$ *означено в* (3.3.25).

Знову нехай $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \dots, n$, $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$, $h_j =: h_{j,n} := x_{j-1} - x_j$. і для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ і Y : $O_i := O_{i,n,Y} := (x_{j+1},\ x_{j-2})$, якщо $y_i \in [x_j, x_{j-1})$ $(x_{n+1} := -1,\ x_{-1} = x_{-2} := 1)$; $O := O_{n,Y} := \bigcup\limits_{i=1}^{s} O_i$; $j \in H$, якщо $I_j \cap O = \varnothing$, $j = 1, ..., n$.

Нехай $N(Y)$ таке, що для всіх $n \geqslant N(Y)$, будь-який проміжок (y_{i+1}, y_i), $i = 1, ..., s-1$, містить принаймні сім різних відрізків I_j і надалі $n \geqslant N(Y)$, і тому, зокрема, $H \neq \varnothing$.

Надалі $B_\nu := B_\nu(k, s, b)$ – різні невід'ємні сталі, що можуть залежати тільки від фіксованих $k, s, b \in N$.

Лема 5.1.2. [79, див. у Лемі 5.3] *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geqslant 6s$, *то для многочлена* $T_j(x) = T_{j,n}(x, b, Y) \in \mathbb{P}_{b(4n-2)+s}$ *і числа* d_j, *означених в* (2.1.23), *виконуються співвідношення*

$$\operatorname{sign} d_j = \operatorname{sign} \Pi(x_j), \quad B_1\, h_j^{1-2b}\, |\Pi(x_j)| \leqslant |d_j| \leqslant B_2\, h_j^{1-2b}\, |\Pi(x_j)|\,,$$

$$T_j'(x)\Pi(x)\operatorname{sign} d_j \geqslant 0, \quad x \in I, \tag{5.1.17}$$

$$B_3 \frac{1}{h_j}\Gamma_j(x) \leqslant \left|T_j'(x)\right| \leqslant B_4 \frac{1}{h_j}\Gamma_j(x), \quad x \in I, \tag{5.1.18}$$

$$|\chi_j(x) - T_j(x)| \leqslant B_5 \left(\frac{h_j}{|x - x_j| + h_j}\right)^{2b-s}, \quad x \in I,$$

і, зокрема, для $\varphi \in \Phi^k$

$$h_j\varphi(h_j)\left|T_j'(x)\right| \geqslant B_6\varphi(\rho)\left(\frac{\rho}{dist(x, I_j) + \rho}\right)^{4b+k+s} K(x), \quad x \in I, \tag{5.1.19}$$

$$h_j\varphi(h_j)\left|T_j'(x)\right| \geqslant B_6\varphi(\rho),\ x \in I_j, \tag{5.1.20}$$

де

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x, b) := \left(\frac{h_j}{|x - x_j| + h_j}\right)^{2b}\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad \chi_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant x_j, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > x_j, \end{cases}$$

$$K(x) := K_n(x, Y) := \min\left\{1, K_n^*(x, Y)\right\}, \quad з \quad K_n^*(x, Y) := \min_{i=1,\dots,s} \frac{|x - y_i|}{\rho_n(y_i)}.$$

Зауважимо, що

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \leqslant \left(\frac{|x - y|}{\rho_n(y)} + 1\right)^s, \quad x \in I,\ y \in I\backslash O. \tag{5.1.21}$$

Доведення теореми 5.1.2

Для кожного $i = 1, ..., s$ покладемо

$$J_{i,n} := [y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)] \cap I, \quad J_n := \bigcup_{i=1}^{s} J_{i,n},$$

$$\mathcal{T}_i(x) := T'_{j_i,n}\left(x, b, Y \backslash \{y_i\}\right),$$

де j_i позначає індекс j, для якого $y_i \in I_j$ (якщо таких індексів два, то нехай j_i — менший з них) і $b = 6ks$.

Лема 5.1.3. *Якщо $f \in C$ і $f(y_i) = 0$ при всіх $i = 1, ..., s$, то многочлен*

$$\mathcal{Q}(x, f) := \mathcal{Q}_n(x, f, Y) := \mathcal{D}(x, f) - \sum_{i=1}^{s} \frac{\mathcal{D}(y_i, f)}{\mathcal{T}_i(y_i)} \mathcal{T}_i(x) \in \mathbb{P}_{25ksn},$$

задовольняє нерівності

$$|f(x) - \mathcal{Q}(x, f)| \leqslant c_5\, \varphi(\rho), \quad x \in I, \tag{5.1.22}$$

$$\begin{aligned} |\,\Lambda(x)| &:= |L_{k-1}(x, f, J_{i,n}) - L_{k-1}(y_i, f, J_{i,n}) - \mathcal{Q}(x, f)| \\ &\leqslant c_6\, \varphi(\rho)\, K(x), \quad x \in J_{i,n},\ i = 1, ..., s. \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Зокрема, $\mathcal{Q}(y_i, f) = 0, \quad i = 1, ..., s.$

Доведення. З урахуванням (2.1.11), для кожного $i = 1, ..., s$, і всіх $x \in I$, згідно (5.1.15), та, відповідно, (5.1.18), (5.1.21), знаходимо

$$|\mathcal{D}(y_i, f)| = |f(y_i) - \mathcal{D}(y_i; f)| \leqslant c_3\, \varphi(\rho_n(y_i)) \leqslant c_7 \left(\frac{|x - y_i| + \rho}{\rho} \right)^{\frac{k}{2}} \varphi(\rho), \tag{5.1.24}$$

та

$$|\mathcal{T}_i(y_i)| \geqslant \frac{c_8}{h_{j_i}}. \tag{5.1.25}$$

Позначимо

$$\alpha(x) := \sum_{i=1}^{s} \frac{\mathcal{D}(y_i, f)}{\mathcal{T}_i(y_i)} \mathcal{T}_i(x).$$

З (5.1.24), (5.1.25), (5.1.18), (5.1.21) та (2.1.11), для будь-яких $x \in I$, випливає нерівність

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| &\leqslant c_9 \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{|x - y_i| + \rho}{\rho} \right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{h_{j_i}}{|x - x_{j_i}| + h_{j_i}} \right)^{2b} \left| \frac{\Pi(x, Y \backslash \{y_i\})}{\Pi(x_{j_i}, Y \backslash \{y_i\})} \right| \\ &\leqslant c_{10} \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{h_{j_i}}{|x - x_{j_i}| + \rho} \right)^{2b-k-s+1} \leqslant c_{11} \rho \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} \frac{h_{j_i}}{(|x - x_{j_i}| + \rho)^2} \\ &\leqslant 2c_{11} \varphi(\rho). \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

Звідси та з (5.1.15) випливає (5.1.22).

З нерівності Дзядика для модуля похідної алгебраического многочлена (див. [25], або у [56, стор. 120]), зауважимо, що

$$\left|\,\alpha'(x)\right| \leqslant \frac{c_{12}}{\rho}\varphi(\rho), \quad x \in I. \tag{5.1.27}$$

Нехай $x \in J_{i,n},\ i = 1, ..., s$. З (5.1.27), (5.1.16) і рівності $\Lambda(y_i) = 0$ випливає оцінка

$$|\,\Lambda(x)| = \left|\int_{y_i}^{x} \Lambda'(y)dy\right| \leqslant |x - y_i|\,\frac{c_{12} + c_4}{\rho}\,\varphi(\rho) \leqslant c_6\,\varphi(\rho)K(x).$$

Лему 5.1.3 доведено.

Зауважимо, що якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, то з (5.1.22) випливає нерівність

$$\mathcal{Q}(x, f)\Pi(x) = \big(f(x) + \mathcal{Q}(x, f) - f(x)\big)\Pi(x) \geqslant -c_5\,\varphi(\rho)\,K(x)\,|\,\Pi(x)|,\ x \in I\backslash J_n, \tag{5.1.28}$$

а з (5.1.23), для кожного $i = 1, ..., s$, — нерівність

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(x, f)\Pi(x) \geqslant& - c_6\,\varphi(\rho)\,K(x)\,|\,\Pi(x)| \\ &+ \big(L_{k-1}(x, f, J_{i,n}) - L_{k-1}(y_i, f, J_{i,n})\big)\Pi(x), \quad x \in J_{i,n}.\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

Лема 5.1.4. *Многочлен*

$$\mathcal{U}(x) := \mathcal{U}_n(x, Y) := \sum_{j\in H} h_j\varphi\,(h_j)\ T'_{j,n}(x, b, Y)\,\mathrm{sign}\,d_j \in \mathbb{P}_{25ksn},$$

для всіх $x \in I$, *задовольняє нерівності*

$$\mathcal{U}(x)\Pi(x) \geqslant 0, \tag{5.1.30}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \leqslant c_{13}\,\varphi(\rho), \tag{5.1.31}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \geqslant c_{14}\,\varphi(\rho)\,K(x). \tag{5.1.32}$$

Доведення. З (5.1.17) випливає (5.1.30). Нерівність (5.1.31) є наслідком (5.1.18), (5.1.21) та (2.1.11). А саме,

$$\begin{aligned}|\,\mathcal{U}(x)| &\leqslant c_{15}\sum_{j\in H}\varphi\,(h_j)\,\Gamma_j(x) \leqslant c_{16}\varphi(\rho)\sum_{j\in H}\left(\frac{|x - x_j| + \rho}{\rho}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{h_j}{|x - x_j| + \rho}\right)^{2b-s} \\ &\leqslant c_{17}\varphi(\rho)\sum_{j\in H}\left(\frac{h_j}{|x - x_j| + \rho}\right)^{2b-k-s} \leqslant c_{18}\rho\,\varphi(\rho)\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{(|x - x_j| + \rho)^2} \\ &\leqslant c_{13}\,\varphi(\rho), \quad x \in I.\end{aligned}$$

Для фіксованого $x \in I \backslash O$, через j^* позначимо будь-який (їх може бути два) індекс $j \in H$ такий, що $x \in I_j$. Для $x \in O_i,\ i = 1, ..., s$, покладемо $j^* := j_i + 2$. Отже, $j^* \in H$ при всіх $x \in I$. З (5.1.19), (5.1.20) та (2.1.11) знаходимо (5.1.32):

$$\begin{aligned} |\,\mathcal{U}(x)| \geqslant & c_{19}\varphi(\rho)K(x) \sum_{j\in H} \left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I_j) + \rho}\right)^{4b+k+s} \\ \geqslant & c_{19}\varphi(\rho)K(x) \left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I_{j^*}) + \rho}\right)^{4b+k+s} \geqslant c_{14}\,\varphi(\rho)\,K(x), \quad x \in I. \end{aligned}$$

Лему 5.1.4 доведено.

З лем 5.1.3 і 5.1.4 випливає, що многочлен

$$P_n(x) := \mathcal{Q}(x, f) + \frac{\max\{c_5, c_6\}}{c_{14}}\,\mathcal{U}(x) \in \mathbb{P}_{25ksn} \tag{5.1.33}$$

задовольняє нерівності (5.1.7) і (5.1.8). Дійсно, оцінка (5.1.8) з $c(k, s) = 2^k(c_5 + c_{13}\max\{c_5, c_6\}/c_{14})$ випливає з (5.1.33), (5.1.22), (5.1.31) та (5.1.14), а нерівність (5.1.7) – з (5.1.33), (5.1.28), (5.1.29), (5.1.32) та (5.1.30). Теорему 5.1.2 доведено ($N(k, Y) = 25ksN(Y)$).

Зауважимо, що нерівність (5.1.29) свідчить про те, що многочлен (5.1.33) задовольняє також і теорему 5.1.1 [104], де $k = 3$, томущо для будь-якої $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, існує многочлен L_2 (парабола) такий, що $\big(L_2(x, f, J_{i,n}) - L_2(y_i, f, J_{i,n})\big)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in J_{i,n},\ i = 1, ..., s$, тоді як для $k > 3$, такого L_{k-1} не існує.

5.2 Наближення неперервних періодичних функцій

Результати цього підрозділу містяться в [78].

Тут нехай C – простір дійснозначних неперервних 2π-періодичних функцій f з рівномірною нормою $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $\mathbb{T}_n,\ n \in \mathbb{N}$, – простір тригонометричних поліномів $P_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx),\ a_j, b_j \in \mathbb{R}$, порядку $\leqslant n$.

Знову згадаємо класичну оцінку Джексона-Зігмунда-Ахієзера-Стєчкіна (2.2.1): *якщо $f \in C$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, існує $P_n \in \mathbb{T}_n$, такий, що*

$$E_n(f) := \inf_{R_n\in\mathbb{T}_n} \|f - R_n\| \leqslant \|f - P_n\| \leqslant c(k)\,\omega_k(f, \pi/n), \tag{5.2.1}$$

де стала $c(k)$ залежить тільки від $k \in \mathbb{N}$, а $\omega_k(f, t)$ – k-й модуль гладкості f, яку, зокрема, Лоренц і Целлер [130] з $k = 1$ довели для наближення дзвоноподібних (парних і незростаючих на $[0, \pi]$) функцій з C дзвоноподібними поліномами з $\mathbb{T}_n$.

Нехай на $[-\pi, \pi)$ є $2s$, $s \in \mathbb{N}$, фіксовані точки y_i : $-\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$, а для решти $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, \ldots, y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, \ldots$) і $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Через $\Delta^{(0)}(Y)$ позначимо множину всіх $f \in C$, які невід'ємні на $[y_1, y_0]$, недодатні на $[y_2, y_1]$, невід'ємні на $[y_3, y_2]$ і т.д., отже, $f \in \Delta^{(0)}(Y) \Leftrightarrow f(x)\Pi(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, де $\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{1}{2}(x - y_i)$ $\quad (\Pi(x) > 0$, $x \in (y_1, y_0)$, $\Pi \in \mathbb{T}_s)$. Функції з $\Delta^{(0)}(Y)$ називаються *копозитивні* (одна одній, або між собою), а наближення їх поліномами теж з $\Delta^{(0)}(Y)$ – *копозитивним, або знакозберігаючим.*

В ціому підрозділі доводиться наступна теорема 5.2.1.

Теорема 5.2.1. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n \geqslant N(Y)$ існує $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(0)}(Y), \tag{5.2.2}$$

$$E_n^{(0)}(f) := \inf_{R_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)} \|f - R_n\| \leqslant \|f - P_n\| \leqslant c(s)\, \omega_3(f, \pi/n), \tag{5.2.3}$$

де стала $N(Y)$ залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\ldots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$, а $c(s)$ – тільки від s.

Плєшаков і Попов [34] довели теорему 5.2.1 з ω_1 замість ω_3 в (5.2.3). Попов [39] довів, що оцінка (5.2.3) стає хибною, якщо ω_3 замінити на ω_k з $k > 3$. Наступна теорема 5.2.2 є наслідком теореми 5.2.1 і нерівності Уітні [167] $\|f - f(y_i)\| \leqslant 2\,\omega_3(f, 2\pi)$, (0 інтерполює f).

Теорема 5.2.2. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n^{(0)}(f) \leqslant C(Y)\, \omega_3(f, \pi/n),$$

де стала $C(Y)$ залежить тільки від $\min\limits_{i=1,\ldots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$.

Зауваження 5.2.1. *Ми не розглядаємо можливість заміни $N(Y)$ і $C(Y)$ в теоремах 5.2.1 і 5.2.2 сталими, що не залежать від Y (а, скажімо, залежать тільки від s), лише припускаємо, що це зробити неможливо.*

Для копозитивного наближення диференційовних періодичних функцій див. [35].

Допоміжні факти для доведення теореми 5.2.1

Покладемо

$$\omega(t) := \omega_3(f, t).$$

Надалі в підрозділі c_ν, $\nu = 0, ..., 20$, – додатні абсолютні сталі, або сталі, що можуть залежити тільки від s. Покладемо $\mathbb{T} := \mathbb{T}_{c_0 n}$, де c_0 буде означена нижче.

Нехай $l(x, g, a, b, c)$ – парабола, що інтерполює $g \in C$ в ізольованих точках a, b і c; $n \in \mathbb{N}$, $h := h_n := \frac{\pi}{n}$, $x_j := x_{j,n} := -j\,h$, $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$, $j \in \mathbb{Z}$.

Покладемо $m = 20$ і для фіксованих $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ і n нехай

$$O_i := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m}, x_{j-m}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

$$O := O(Y, n, m) := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_i, \tag{5.2.4}$$

і $j \in H := H(Y, n, m)$, якщо $x_j \in \mathbb{R}\backslash O$. Оберемо $N(Y) := N(Y, m) \in \mathbb{N}$, таким, що для всіх $n \geqslant N(Y)$ і всіх $i = 1, \cdots, 2s$, будь-який проміжок (y_i, y_{i-1}) містив принаймні $3m$ різних проміжків I_j. Нехай $(\underline{y}_i, \overline{y}_i) := O_i$, $i \in \mathbb{Z}$, – ліві і праві кінці O_i.

Надалі $f \in \Delta^{(0)}(Y)$. Зафіксуємо $n > N(Y)$ і без втрати загальності припускаємо, що $y_{2s} = -\pi$. Позначимо

$$L(x) := \begin{cases} l(x, f, \underline{y}_i, y_i, \overline{y}_i + h), & x \in [\underline{y}_i, \overline{y}_i + h], \quad i \in \mathbb{Z}, \\ l(x, f, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}), & x \in I_j, \quad j \in H,\ j-1 \in H,\ x_j \neq \overline{y}_i,\ i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

тобто $L \in C$ ($L' \notin C$, взагалі кажучі) – квадратичний сплайн (кусково-поліноміальна функція), що інтерполює f в x_j-х з $j \in H$, $x_j \neq \overline{y}_i$, і в Y. Нерівність Уітні і (5.2.5) тягнуть

$$\|f - L\| \leqslant c_1\,\omega(h). \tag{5.2.6}$$

Крім того,

$$L(x)\Pi(x) \geqslant 0, \qquad x \in O, \tag{5.2.7}$$

для будь-якої $f \in \Delta^{(0)}(Y)$. Ще підкреслимо, що L має лише одну ланку (один шматочек) на кожному O_i, $i \in \mathbb{Z}$.

Нехай

$$\Delta_j := L(x_j) - 2L(x_{j-1}) + L(x_{j-2}),$$
$$\delta_j := -L(x_{j+1}) + 3L(x_j) - 3L(x_{j-1}) + L(x_{j-2}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо,

$$|\delta_j| \leqslant 2\,\omega_3\,(L - f + f, h) \leqslant c_2\,\omega(h), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{5.2.8}$$

і

$$\delta_j = -\Delta_{j+1} + \Delta_j = 0, \quad \text{якщо} \ \ (x_{j+1}, x_{j-2}) \subset O. \tag{5.2.9}$$

Позначимо

$$\chi_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant x_j, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > x_j, \end{cases} \qquad (x - x_j)_+ := (x - x_j)\,\chi_j(x),$$

$$\Psi_j(x) := (x - x_j)(x - x_{j-1})\,\chi_j(x),$$

$$H_0 := \{j \in H(Y, n, m) \ : \ |j| < n\},$$

$$E := \left\{j \in H_0 \ : \ (x_{j-1} = \underline{y}_i) \vee (x_j = \overline{y}_i), \ i = 0, ..., 2s\right\}, \quad M := \cup_{j \in E} I_j,$$

$$S(x) := l(x, L, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{j=2-n}^{n-1} \delta_j\, \Psi_j(x), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

З (5.2.9) маємо

$$S(x) \equiv l(x, L, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{j \in H_0} \delta_j\, \Psi_j(x), \qquad x \in [-\pi, \pi]. \tag{5.2.10}$$

Формула Ньютона для многочлена Лагранжа тягне

$$S(x) \equiv \begin{cases} L(x), & x \in [-\pi, \pi] \backslash M, \\ l(x, L, x_j, x_{j-1}, x_{j-2}), & x \in I_j \subset M, \end{cases} \tag{5.2.11}$$

детальніше див. пропозицію 3.8.1.

Зауваження 5.2.2. *Щоб перевірити* (5.2.11)*, можно також скористатися наступним еквівалентним представленням* S

$$S(x) = L(x_n) + [x_n, x_{n-1}, L](x - x_n) + \sum_{j=2-n}^{n} [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, L]\,(\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x)),$$

де $\Psi_{1-n}(x) := 0$ *і у квадратних дужках – 1-ша і 2-га розділені різниці* L*, відповідно (див. пропозицію 3.8.1).*

Таким чином, нерівність

$$\|L - S\| \leqslant 2\,\omega(h) \tag{5.2.12}$$

справджується завдяки (5.2.11), нерівності Уітні і тому факту, що повторюючи (5.2.10) на всьому $\mathbb{R}$, ми означаємо переодичну кусково-поліноміальну функцію, що, для спрощення, позначена тут теж через S.

В наступній лемі 5.2.1 зберемо необхідні нам властивості функції T_j, означеної в (2.2.7), з

$$j \in \overline{H}_0 := \{j \in H(Y, n, m/2) \ : \ |j| < n\} \quad (\supset H_0), \ \text{і}\ b = 6(s+1),$$

що наведені в лемі 2.2.1, і функції τ_j з $j \in H_0$, означеної в (2.2.17) і з властивостями, зокрема, в наслідку 2.2.1.

Лема 5.2.1. *Якщо* $j \in \overline{H}_0$, *то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t_j(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm\pi), \tag{5.2.13}$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leqslant c_3\,(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{5.2.14}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leqslant c_4\,\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.2.15}$$

Більш того, якщо $j \in H_0$, *то*

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_5\,\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash O(Y,n,m), \tag{5.2.16}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geqslant c_5\,\frac{1}{h}\,(\Gamma_j(x))^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_i(Y,n,m),\ i \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.17}$$

$$|(x-x_j)_+ - \tau_j(x)| \leqslant c_6\,h\,(\Gamma_j(x))^{2b-s-2}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{5.2.18}$$

де

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\left|\sin\frac{x-(x_j+h/2)}{2}\right|}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Також, без спеціальних посилань будемо користуватися нерівностями (2.2.16), хоча і звернемося до іхньої сталої $\bar{c}$, як до c_9, тобто $c_9 := \bar{c}(6s+6)$.

Покладемо $\Pi(x,\varnothing) :\equiv 1,\ c_{10} := 2\left[1 + c_9(c_6 + c_3)\right]$, де $[\cdot]$ – ціла частина, і

$$n_1 = c_{10}n. \tag{5.2.19}$$

Для кожного $j \in H_0$, через j^* позначимо індекс, такий, що $x_{j^*} := x_{j^*,n_1} = x_{j,n}$.

Мають місце наступні чотири леми 5.2.2 – 5.2.5.

Лема 5.2.2. *Для кожного* $j \in H_0$, *можно знайти* $\beta \in [0,1]$ *таке, що функція*

$$\psi_j(x) := \int_{x_j-\pi}^{x}\Big[2\tau_{j^*,n_1}(u,\varnothing) - h_n\big(\beta\,t_{(j+1)^*,n_1}(u,\varnothing) + (1-\beta)t_{(j-1)^*,n_1}(u,\varnothing)\big)\Big]du$$

буде задовольняти рівність

$$\psi_j(x_j + \pi) = \pi^2 - \pi h_n, \tag{5.2.20}$$

і тоді,

$$|\Psi_j(x) - \psi_j(x)| \leqslant c_{11}\,h_n^2\,\Gamma_{j,n}^3(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{5.2.21}$$

$$\left|\Psi_j'(x) - \psi_j'(x)\right| \leqslant c_{12}\, h_n\, \Gamma_{j,n}^4(x), \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{5.2.22}$$

Більш того,

$$\psi_j(x) = \frac{1}{6\pi}\, x^3 + \left(\frac{\pi - x_j}{2\pi} - \frac{h}{4\pi}\right) x^2 + \left(\frac{\pi}{3} - x_j + \frac{x_j^2 - (\pi - x_j)h}{2\pi}\right) x + \overline{R}_j(x), \tag{5.2.23}$$

де $x \in \mathbb{R}$ *і* $\overline{R}_j \in \mathbb{T}$.

Доведення. З (5.2.18) і (5.2.14) випливає, що: для $\beta = 1$ ми маємо

$$\begin{aligned}
\psi_j(x_j + \pi) &= \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \Big[2\big((u - x_j)_+ + \tau_{j*}(u) - (u - x_j)_+\big) \\
&\quad - h_n\big(\chi_{j+1}(u) + t_{(j+1)*}(u) - \chi_{j+1}(u)\big)\Big] du \\
&\leqslant \pi^2 + c_6 c_9 h_{n_1}^2 - h_n(\pi + h_n) + h_n c_3 c_9 h_{n_1} < \pi^2 - \pi h_n
\end{aligned}$$

завдяки (5.2.19), тоді як для $\beta = 0$ ми аналогічно приходимо до протилежної нерівності $\psi_j(x_j + \pi) > \pi^2 - \pi h_n$, отже (5.2.20) доведено; якщо $x < x_j$, то

$$\begin{aligned}
|\Psi_j(x) - \psi_j(x)| &= |\Psi_j(x) - \psi_j(x) - (\Psi_j(x_j - \pi) - \psi_j(x_j - \pi))| \\
&= \left|\int_{x_j-\pi}^{x} (\Psi_j'(x) - \psi_j'(x))du\right| \\
&= \Bigg|\int_{x_j-\pi}^{x} \Big[2\big((u - x_j)_+ - \tau_{j*}(u)\big) \\
&\quad - h_n\big(\chi_j(u) - (\beta\chi_{j+1}(u) + (1-\beta)\chi_{j-1}(u))\big) \\
&\quad - h_n\left(\beta(\chi_{j+1}(u) - t_{(j+1)*}(u)) + (1-\beta)(\chi_{j-1}(u) - t_{(j-1)*}(u))\right)\Big] du\Bigg| \\
&\leqslant \int_{x_j-\pi}^{x} \left[2c_6 h_{n_1} \Gamma_{j,n_1}^4(u) + h_n\left(16\Gamma_{j,n}(u)\right)^4 + h_n c_3 \left(16\Gamma_{j,n}(u)\right)^4\right] du \\
&\leqslant c_{11}\, h_n^2\, \Gamma_{j,n}^3(x)
\end{aligned}$$

(оскільки $\Gamma_{(j\pm1)*,n_1}(x) < 4\Gamma_{j\pm1,n}(x) < 16\Gamma_{j,n}(x),\ x \in \mathbb{R}$), інакше ми доводимо (5.2.21) аналогічно за допомогою (5.2.20). З того, що вище також випливає (5.2.22).

Щоб перевірити (5.2.23) перепишемо (2.2.19) і (2.2.20)

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + a_j + \hat{r}_j(x), \quad \tau_j(x) = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x + b_j + \tilde{r}_j(x),$$

де a_j і b_j – вільні члени $\widehat{R}_j$ і $\widetilde{R}_j$, відповідно. Тоді,

$$
\begin{aligned}
\psi_j(x) = {} & \left(\frac{1}{6\pi}x^3 + \frac{\pi - x_j}{2\pi}x^2 + 2b_j x\right) - \left(-\frac{1}{3\pi}(x_j - \pi)^3 + 2b_j(x_j - \pi)\right) \\
& - h\left(\frac{1}{4\pi}x^2 + (\beta a_{j+1} + (1-\beta)a_{j-1})x\right) \\
& + h\left(\frac{1}{4\pi}(x_j - \pi)^2 + (\beta a_{j+1} + (1-\beta)a_{j-1})(x_j - \pi)\right) \\
& + \int\limits_{x_j - \pi}^{x} \Big[2\tilde{r}_j(u) - h\big(\beta \hat{r}_{j+1}(u) + (1-\beta)\hat{r}_{j-1}(u)\big)\Big] du \\
= {} & \frac{1}{6\pi}x^3 + \left(\frac{\pi - x_j}{2\pi} - \frac{h}{4\pi}\right)x^2 + Ax + \frac{(x_j - \pi)^3}{3\pi} + h\frac{(x_j - \pi)^2}{4\pi} - A(x_j - \pi) \\
& + \bar{r}_j(x), \qquad (5.2.24)
\end{aligned}
$$

де $A := 2b_j - h(\beta a_{j+1} + (1-\beta)a_{j-1})$ і $\bar{r}_j(x) := \int_{x_j-\pi}^{x}[\cdot]du$, який є, вочевидь, з $\mathbb{T}$. А це разом з (5.2.20) тягне

$$
\begin{aligned}
\psi_j(x_j + \pi) = \pi^2 - \pi h = {} & \frac{(x_j + \pi)^3}{6\pi} + \left(\frac{\pi - x_j}{2\pi} - \frac{h}{4\pi}\right)(x_j + \pi)^2 + A(x_j + \pi) \\
& + \frac{(x_j - \pi)^3}{3\pi} + \frac{h}{4\pi}(x_j - \pi)^2 - A(x_j - \pi) \\
\Rightarrow \quad A = {} & \frac{\pi}{3} - x_j + \frac{x_j^2 - (\pi - x_j)h}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Підставляючи A в (5.2.24), отримуємо (5.2.23). Лему 5.2.2 доведено.

Лема 5.2.3. *Функція*

$$
R_n(x) := l(x, L, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{j \in H_0} \delta_j \, \psi_j(x) \qquad (5.2.25)
$$

задовольняє співвідношення

$$
R_n \in \mathbb{T}, \qquad (5.2.26)
$$

$$
\|S - R_n\| \leqslant c_{13}\, \omega(h), \qquad (5.2.27)
$$

$$
\|S' - R_n'\| \leqslant c_{14}\, \frac{1}{h}\, \omega(h). \qquad (5.2.28)
$$

Доведення. Згадаємо, що $L(x_n) = L(x_{-n}),\ L(x_{n-1}) = L(x_{-1-n}),\ L(x_{1-n}) = L(x_{n+1})$ і $L(x_{2-n}) = L(x_{n+2})$. Беручи це і (5.2.9) до уваги, перевіримо (5.2.26), підставляючи

(5.2.23) в (5.2.25). Оскільки $l(x, L, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = L(x_n) + [x_n, x_{n-1}, L](x - x_n) + [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, L](x - x_n)(x - x_{n-1})$, то

$$\begin{aligned} R_n(x) = \frac{B}{6\pi}x^3 &+ [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, L]\, x^2 + \frac{x^2}{2h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j\left(\frac{\pi - x_j}{2\pi} - \frac{h}{4\pi}\right) + [x_n, x_{n-1}, L]\, x \\ &- [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, L](x_n + x_{n-1})\, x + \frac{x}{2h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j\left(\frac{\pi}{3} - x_j + \frac{x_j^2 - (\pi - x_j)h}{2\pi}\right) \\ &+ \underline{R}_n(x), \end{aligned}$$

де

$$B := \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j = \frac{1}{2h^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j = \frac{1}{2h^2}(\Delta_{2-n} - \Delta_n) = 0,$$

і

$$\underline{R}_n(x) := L(x_n) + [x_n, x_{n-1}, L]\, x_n + [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, L]\, x_n x_{n-1} + \frac{1}{2h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j\, \overline{R}_j(x) \ \in \mathbb{T}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= x^2\left[\frac{\Delta_n}{2h^2} + \frac{1}{8\pi h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j\ (2\pi - (x_j + x_{j-1}))\right] \\ &\quad + x\left[D + \frac{1}{4\pi h^2}\sum_{j\in H_0}\delta_j\ \left((\pi - x_j)(\pi - x_{j-1}) - \frac{\pi^2}{3}\right)\right] + \underline{R}_n(x) \\ &= x^2\left[\frac{\Delta_n}{2h^2} + \frac{1}{8nh^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j\,(2n + 2j - 1)\right] \\ &\quad + x\left[D + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j(n + j)(n + j - 1)\right] + \underline{R}_n(x) \\ &= x^2\left[\frac{\Delta_n}{2h^2} + \frac{1}{4nh^2}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j\, j\right] + x\left[D + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j\, j^2 + \frac{2n-1}{4\pi}\sum_{j=2-n}^{n-1}\delta_j\, j\right] + \underline{R}_n(x) \\ &= \frac{x^2}{4h^2}(\Delta_n - \Delta_{n+2}) + x\left[\frac{1}{2h}\delta_{1-n} + \frac{2\pi - h}{4h^2}(\Delta_n - \Delta_{2-n}) - \frac{2\pi - h}{4\pi h}\delta_{1-n}\right] + \underline{R}_n(x) \\ &= \underline{R}_n(x), \end{aligned}$$

де

$$D := \frac{1}{h}(L(x_{n-1}) - L(x_n)) + \frac{2\pi - h}{2h^2}\Delta_n.$$

Тобто, (5.2.26) доведено.

Маючи зручні представлення (5.2.10) і (5.2.25), помічаємо, що оцінки (5.2.8), (5.2.21) і (2.2.5) тягнуть (5.2.27) (фактично, для $[-\pi, \pi]$, однак завдяки (5.2.26), для $\mathbb{R}$ також). Нерівність (5.2.28) доводиться аналогічно, якщо (5.2.22) замість (5.2.21) прийняти до уваги. Лему 5.2.3 доведено.

Для кожного $i = 1, \cdots, 2s$, нехай $j(i)$ позначає індекс j, такий, що $x_{j,n} = \overline{y}_i$ (правий кінець O_i).

Лема 5.2.4. *Поліном*

$$V_n(x) := R_n(x) - \sum_{i=1}^{2s} \frac{R_n(y_i)}{t'_{j(i),n}(y_i, Y_i)} t'_{j(i),n}(x, Y_i) \quad \in \mathbb{T},$$

де $Y_i := (Y \backslash \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}) \cup \{\underline{y}_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$, *задовольняє нерівності*

$$\|S - V_n\| \leqslant c_{15}\, \omega(h), \tag{5.2.29}$$

$$|S(x) - V_n(x)| \leqslant c_{16}\, \frac{1}{h}\, |x - y_i|\, \omega(h), \quad x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}, \tag{5.2.30}$$

зокрема, $V_n(y_i) = S(y_i) = 0$.

Доведення. Оцінки (5.2.27), (5.2.15) і (5.2.16) тягнуть нерівності

$$\|S - V_n\| \leqslant c_{13}\, \omega(h) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{|R_n(y_i) - S(y_i)|}{c_5 \Gamma_{j(i)}^{2b+2s}(y_i)} c_4 \Gamma_{j(i)}^{2b-s}(x) \leqslant c_{15}\, \omega(h),$$

і

$$\begin{aligned} |S(x) - V_n(x)| &= |S(x) - V_n(x) - (S(y_i) - V_n(y_i))| = \left| \int_{y_i}^{x} \big(S'(u) - V_n'(u)\big)\, du \right| \\ &\leqslant |x - y_i| \left(\|S' - V_n'\| + \sum_{i=1}^{2s} \frac{c_{13} \omega(h)\ h}{c_5 \Gamma_{j(i)}^{2b+2s}(y_i)} \|t''_{j(i),n}\| \right) \\ &\leqslant c_{16}\, \frac{1}{h}\, |x - y_i|\, \omega(h), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

де в (5.2.31) ми скористались (5.2.28) і нерівністю Бернштейна для $\|t''_j\|$. Лему 5.2.4 доведено.

Лема 5.2.5. *Поліном*

$$U_n(x) := h\, \omega(h) \sum_{j \in H_0} t'_{j,n}(x, Y) \quad \in \mathbb{T},$$

задовольняє нерівності

$$U_n(x)\,\Pi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.2.32}$$

$$\|U_n\| \leqslant c_{17}\,\omega(h), \tag{5.2.33}$$

$$|U_n(x)| \geqslant c_{18}\,\omega(h), \quad x \in \mathbb{R}\backslash O, \tag{5.2.34}$$

$$|U_n(x)| \geqslant c_{18}\,\frac{1}{h}\,|x-y_i|\,\omega(h), \quad x \in O_i,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.35}$$

Доведення. Нерівності (5.2.13) безпосередньо тягнуть (5.2.32) що, в свою чергу, веде до тотожності $|U_n(x)| \equiv h\,\omega(h)\,\sum_{j\in H_0}|t_j'(x)|$. Отже, якщо $x \in I_j \subset \mathbb{R}\backslash O$, то

$$|U_n(x)| \geqslant h\,\omega(h)\,|t_j'(x)| \geqslant 2^{-2b-2s}c_5\,\omega(h)$$

згідно (5.2.16), тобто (5.2.34) справджується; якщо $x \in O_i$, то

$$|U_n(x)| \geqslant h\,\omega(h)\,|t_{j(i)}'(x)| \geqslant c_{19}\,\omega(h)\left|\frac{x-y_i}{x_{j(i)}-y_i}\right|$$

згідно (5.2.17), тобто (5.2.35) справджується оскільки $|x_{j(i)}-y_i| \leqslant (m+1)h$. Завдячуючи (2.2.5), беремо (5.2.33) з (5.2.15). Лему 5.2.4 доведено.

Доведення теореми 5.2.1

Покладемо

$$P_n(x) := V_n(x) + c_{20}\,U_n(x), \qquad c_{20} := \max\{c_{15}+2+c_1,\, c_{16}\}/c_{18}.$$

Збираючи (5.2.6), (5.2.12), (5.2.29) і (5.2.33), знаходимо (5.2.3) для $P_n \in \mathbb{T}$. А саме,

$$\begin{aligned}\|f-P_n\| &= \|f-L+L-S+S-P_n\| \leqslant \|f-L\| + \|L-S\| + \|S-V_n\| + c_{20}\|U_n\| \\ &\leqslant (c_1+2+c_{15}+c_{20}c_{17})\,\omega(h) = c(s)\,\omega(h).\end{aligned}$$

Якщо $x \in \mathbb{R}\backslash O$, то, беручи до уваги (5.2.32), (5.2.34), (5.2.29), (5.2.12) і (5.2.6), помічаємо, що

$$\begin{aligned}P_n(x)\,\Pi(x) &= \big(c_{20}U_n(x) + (V_n(x)-S(x)) + (S(x)-L(x)) + (L(x)-f(x)) + f(x)\big)\,\Pi(x) \\ &\geqslant c_{20}U(x)\,\Pi(x) - (c_{15}+2+c_1)\,\omega(h)\,|\Pi(x)| \geqslant 0.\end{aligned}$$

Якщо $x \in O_i,\ i \in \mathbb{Z}$, то $S(x) = L(x)$ (див. (5.2.11)) і

$$\begin{aligned}P_n(x)\,\Pi(x) &= (c_{20}U_n(x) + (V_n(x)-S(x)) + S(x))\;\Pi(x) \\ &\geqslant c_{20}U(x)\,\Pi(x) - c_{16}\,\frac{1}{h}\,|x-y_i|\,\omega(h)\,|\Pi(x)| \geqslant 0\end{aligned}$$

завдяки (5.2.32), (5.2.35), (5.2.30) і (5.2.7). Таким чином, (5.2.2) доведено. Теорему 5.2.1 доведено.

5.3 Висновки до розділу 5

У розділі 5 доведено наступне:

- Якщо неперервна на відрізку функція f змінює свій знак в s точках $y_i : -1 < y_s < y_{s-1} < ... < y_1 < 1$ (тобто для $x \in [y_i, y_{i-1}],\ f(x) \geqslant 0$, якщо i непарне і $f(x) \leqslant 0$, якщо i парне), то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше деякої сталої $N(k, y_i)$, яка залежить тільки від $k \in \mathbb{N}$ і y_i-х, оначено алгебраїчний многочлен P_n степеня $\leqslant 4n$ такий, що: P_n має скрізь той самий знак, що і f, за винятком, можливо, маленьких околів точок y_i :

$$(y_i - \rho_n(y_i), y_i + \rho_n(y_i)), \quad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n,$$

$P_n(y_i) = 0$ і

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c(k,s)\, \omega_k(f, \rho_n(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

де $c(k, s)$ – стала, яка залежать тільки від k і s, а $\omega_k(f, \cdot)$ – k-й модуль гладкості f (див. підрозділ 5.1).

- Якщо дійснозначна неперервна 2π-періодична функція f змінює свій знак в фіксованих точках $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} :\ -\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < ... < y_1 < \pi$, а для решти $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначено рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше деякої сталої $N(y_i)$, яка залежить тільки від y_i-х, знайдено тригонометричний поліном P_n, порядку $\leqslant n$, що змінює свій знак в тих самих точках y_i, що і f, і такий, що

$$\|f - P_n\| \leqslant c(s)\, \omega_3(f, \pi/n),$$

де $c(s)$ – стала, що залежить тільки від s, $\omega_3(f, \cdot)$ – 3-й модуль гладкості f і $\|\cdot\|$ – рівномірна норма (див. підрозділ 5.2). Ця оцінка стає хибною з $\omega_k,\ k > 3$, замість ω_3.

Розділ 6

Контрприклади

6.1 Обмеження порядку комонотонного наближення диференційовних на відрізку функцій

Результат цього підрозділу містяться в [79, Приклад 3.2].

Нагадаємо, $Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s : \ -1 < y_s < \cdots < y_1 < 1$ і $\Delta^{(1)}(Y_s)$ – множина всіх $f \in C := C[-1,1]$, що не спадають на $[y_1, 1]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д.

В [10, див. (6.1.1)] і [79, див. (6.1.2) і (6.1.3)], зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 6.1.1. [10,79] *Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то існують многочлени $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такі, що для $x \in [-1,1]$ виконуються нерівності*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y_s)\omega_2(f, \rho_n(x)), \qquad f \in C, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6.1.1}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y_s)\rho_n(x)\omega_3(f', \rho_n(x)), \qquad f \in C^{(1)}, \qquad n \geqslant 3, \tag{6.1.2}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y_s, k)\rho_n^2(x)\omega_k(f'', \rho_n(x)), \qquad f \in C^{(2)}, \qquad n \geqslant k+1, \ k \in \mathbb{N}, \tag{6.1.3}$$

$$\Big(|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(Y_s, r, k)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad f \in C^{(r)}, \ n \geqslant r+k-1, \ r \geqslant 2\Big)$$

де сталі $C(Y_s)$ і $C(Y_s, k)$ залежать тільки від Y_s і k, відповідно, ω_k – k-й модуль гладкості відповідної функції і $\rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1-x^2}/n$.

Про сталі: В [79, Приклад 1.1] показано, що в поточковій оцінці (6.1.1) (навіть з ω_1 замість ω_2), коли $s > 1$, неможливо замінити сталу $C(Y_s)$ на сталу, що не залежить від Y_s (а залежить, скажімо від s), а коли $s = 1$ це зробити можливо (доречі, в рівномірній оцінці з $\omega_1(f, 1/n)$ це можливо зробити з будь-яким s).

Про порядки: Ву і Цу [168, 176] довели, що в (6.1.1) неможливо замінити ω_2 на ω_k з $k > 2$, навіть, якщо замість ρ_n була б $1/n$. В [79, Приклад 3.1] показано, що в (6.1.2) (навіть з $1/n$ замість ρ_n), коли $s = 1$, неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k > 3$.

В цьому підрозділі, користуючись аргументами [79, Приклад 3.1] і роботи ДеВор, Левіатан, Шевчук [72], доведемо це твердження для довільного Y_s, а саме, доведем наступну теорему 6.1.2.

Теорема 6.1.2. *Для кожного* $s \in \mathbb{N}$, *і будь-якого* $Y = Y_s$, *існує функція* $f_Y = f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *така, що*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{n\, E_n^{(1)}(f)}{\omega_4\,(f', 1/n)} = \infty, \tag{6.1.4}$$

де

$$E_n^{(1)}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - P_n\|.$$

Доведення. Для будь-якого Y покладемо

$$\Pi_1(x) := \prod_{i=2}^{s} (x - y_i),$$

якщо $s > 1$ і $\Pi_1(x) := 1$, якщо $s = 1$. Тобто, $\Pi(x) = (x - y_1)\Pi_1(x)$.

Для фіксованого додатнього числа $b \leqslant 1$ через $S_b(x)$ позначимо функцію, що задовольняє

$$S_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |x| \geqslant 2b, \\ 0, & \text{якщо} \quad |x| < b, \end{cases}$$

$$0 \leqslant S_b(x) \leqslant 1, \quad \text{якщо} \quad b < |x| < 2b, \quad S_b \in C^{(4)}(\mathbb{R}).$$

Наприклад, для $x \in [b, 2b]$, можно взяти

$$S_b(x) = \int_b^x (u - b)^4 (2b - u)^4 du \Big/ \int_b^{2b} (u - b)^4 (2b - u)^4 du,$$

і $S_b(x) = S_b(-x)$, для $x \in [-2b, -b]$. Покладемо

$$q_b(x) := ((x - y_1)^2 - b^2)(x - y_1),$$

і, насамкінець,

$$g_b(x) := \int_{y_1}^{x} q_b(u) S_b(u - y_1) \frac{\Pi_1(u)}{\|\Pi_1\|} du, \quad Q_b(x) := \int_{y_1}^{x} q_b(u) \frac{\Pi_1(u)}{\|\Pi_1\|} du.$$

Наступні співвідношення є очевидними:

$$g_b(x) = 0, \qquad x \in [y_1 - b, y_1 + b], \tag{6.1.5}$$

$$g_b \in C^{(5)} \cap \Delta^{(1)}(Y), \tag{6.1.6}$$

$$\|g_b\| < \int_{y_1+b}^{y_1+2b} q_b(u)du < 4, \qquad \|g_b'\| \leqslant \|g_b\| < 8, \tag{6.1.7}$$

$$\|g_b - Q_b\| < \int_{y_1}^{y_1+2b} |q_b(u)|du < 4 = \frac{5}{2}b^4 < 3b^4, \tag{6.1.8}$$

$$\begin{aligned} \omega_4(g_b', t) \leqslant & 2^4\|g_b' - Q_b'\| + t^4\|Q_b^{(5)}\| \\ \leqslant & 2^4\|q_b\|_{[y_1-2b, y_1+2b]} + t^4((s+1)s(s-1)(s-2))^2\|Q_b'\| \\ \leqslant & 96b^3 + t^4((s+1)s(s-1)(s-2))^2 8 \leqslant: c(b^3 + t^4), \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

де в (6.1.9) ми застосували нерівність Маркова.

Для кожного многочлена $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ і будь-якого додатнього $h \leqslant 1 - |y_1|$ доведемо оцінку

$$\|g_b - P_n\|_{[y_1-h, y_1+h]} \geqslant B\frac{h^2b^2}{n^2} - 3b^4. \tag{6.1.10}$$

де

$$0 < B = \Pi_1(y_1)/\|\Pi_1\| < 1. \tag{6.1.11}$$

Дійсно, покладемо $R_n(x) = P_n(x) - Q_b(x)$. Оскільки $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то $P_n''(y_1) \geqslant 0$, і отже,

$$R_n''(y_1) \geqslant -Q_b''(y_1) = Bb^2. \tag{6.1.12}$$

Застосовуючи нерівність Бернштейна і (6.1.8), знаходимо

$$h^2R_n''(y_1) \leqslant n^2\|R_n\|_{[y_1-h, y_1+h]} \leqslant n^2(\|g_b - P_n\|_{[y_1-h, y_1+h]} + 3b^4),$$

що разом з (6.1.12) тягне (6.1.10).

Для кожного $n > s + 1$ покладемо

$$b_n := n^{-4/3}, \qquad f_n(x) = g_{b_n}(x), \tag{6.1.13}$$

і помітимо, що (6.1.9) тягне оцінку

$$\omega_4(f_n', t) \leqslant 2\,c\,t^4, \qquad t \geqslant 1/n. \tag{6.1.14}$$

Тепер ми готові означити $f_Y =: f$ для будь-якого Y. Спершу покладемо $\epsilon = 0.1$ і оберемо n_0 настільки великим, щоб

$$2\,c < n_0^{\epsilon}, \tag{6.1.15}$$

і

$$b_{n_0} \leqslant 1 - |y_1|. \tag{6.1.16}$$

Покладемо $d_0 := 1$ і

$$d_j := \frac{B}{2^4}\frac{b_{n_{j-1}}^2 b_{n_j}^2}{n_j^2} d_{j-1} = \frac{b_{n_0}^2}{b_{n_j}^2}\prod_{\nu=1}^{j}\frac{Bb_{n_\nu}^4}{2^4 n_\nu^2}, \qquad j \geqslant 1, \tag{6.1.17}$$

де зростаюча послідовність $\{n_\nu\}$ означається наступним чином. Припустимо, що $\{n_0, \dots, n_{\sigma-1}\}$ вже означені, тоді покладемо

$$F_{\sigma-1} := \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_{j-1} f_{n_j},$$

$(F_0 := 0)$ і візьмемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ настільки великим, щоб

$$\|F_{\sigma-1}^{(5)}\| \leqslant d_{\sigma-1} n_\sigma^{\epsilon}, \tag{6.1.18}$$

і

$$Bb_{n_{\sigma-1}}^2 \geqslant 6\, n_\sigma^{-\epsilon}. \tag{6.1.19}$$

Тепер покладемо

$$\Phi_\sigma := \sum_{j=\sigma}^{\infty} d_{j-1} f_{n_j},$$

де рівномірна збіжність цього ряду і похідної від нього підтверджується (6.1.7) і нерівністю

$$\sum_{j=\sigma}^{\infty} d_{j-1} < d_{\sigma-1}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots\right), \tag{6.1.20}$$

що випливає з (6.1.17), (6.1.13) і (6.1.11). Так означимо

$$f := f_Y := \sum_{j=1}^{\infty} d_{j-1} f_{n_j}, \tag{6.1.21}$$

і помітимо, що (6.1.6) і (6.1.7) тягнуть

$$f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y). \tag{6.1.22}$$

Залишилось перевірити (6.1.4).

Нерівності (6.1.14), (6.1.20) і (6.1.15) тягнуть

$$\omega_4\left(\Phi'_\sigma, 1/n_\sigma\right) \leqslant 2c\frac{1}{n_\sigma^4}\sum_{j=\sigma}^{\infty} d_{j-1} < 4cd_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^4} < 2d_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}},$$

а (6.1.18) забезпечує

$$\omega_4\left(F'_{\sigma-1}, 1/n_\sigma\right) \leqslant \frac{1}{n_\sigma^4}\|F_{\sigma-1}^{(5)}\| \leqslant d_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}}.$$

Тому, для всіх σ

$$\omega_4\left(f', 1/n_\sigma\right) \leqslant 3d_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}}. \tag{6.1.23}$$

Насамкінець, доведемо, що якщо $P_{n_\sigma} \in \mathbb{P}_{n_\sigma} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$\|f - P_{n_\sigma}\| \geqslant 3d_{\sigma-1}\left(\frac{b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^{2+\epsilon}} - b_{n_\sigma}^4\right), \tag{6.1.24}$$

де (див. (6.1.13)) $b_n = n^{-4/3}$; іншими словами

$$E_{n_\sigma}^{(1)}(f) \geqslant 3d_{\sigma-1}\left(\left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^{14/3+\epsilon} - \left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^{16/3}\right), \tag{6.1.25}$$

Дійсно, оскільки, згідно (6.1.5), $F_{\sigma-1}$ є нулем на $[y_1 - b_{n_{\sigma-1}}, y_1 + b_{n_{\sigma-1}}] =: J_\sigma$, то можемо записати

$$f(x) = d_{\sigma-1}f_{n_\sigma}(x) + \Phi_{\sigma+1}(x), \qquad x \in J_\sigma.$$

Нехай $p_{n_\sigma} := [1/d_{\sigma-1}]P_{n_\sigma}$. Оскільки $p_{n_\sigma} \in \mathbb{P}_{n_\sigma} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то, за (6.1.10),

$$\|p_{n_\sigma} - f_{n_\sigma}\|_{J_\sigma} \geqslant B\frac{b_{n_{\sigma-1}}^2 b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^2} - 3b_{n_\sigma}^4.$$

З іншого боку, (6.1.7), (6.1.20) і (6.1.17) тягнуть

$$\|\Phi_{\sigma+1}\| \leqslant 4\sum_{j=\sigma+1}^{\infty} d_{\sigma-1} \leqslant 8d_0 = \frac{1}{2}d_{\sigma-1}B\frac{b_{n_{\sigma-1}}^2 b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^2}.$$

Тому

$$\begin{aligned}\|f - P_{n_\sigma}\| \geqslant& \|f - P_{n_\sigma}\|_{J_\sigma} \geqslant \|P_{n_\sigma} - d_{\sigma-1}f_{n_\sigma}\|_{J_\sigma} - \|\Phi_{\sigma+1}\| \\ =& d_{\sigma-1}\|p_{n_\sigma} - f_{n_\sigma}\|_{J_\sigma} - \|\Phi_{\sigma+1}\| \geqslant d_{\sigma-1}\left(\frac{1}{2}B\frac{b_{n_{\sigma-1}}^2 b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^2} - 3b_{n_\sigma}^4\right).\end{aligned}$$

Тепер (6.1.24) випливає з (6.1.19).

Таким чином, (6.1.23) і (6.1.24) ведуть до

$$\frac{n_\sigma\, E^{(1)}_{n_\sigma}(f)}{\omega_4\,(f',1/n)} \geqslant n_\sigma^{1/3-2\epsilon}-1$$

для всіх σ, що і тягне (6.1.4), оскільки ϵ обрана достатньо малою. Теорему 6.1.2 доведено.

6.2 Обмеження порядку комонотонного наближення періодичних функцій

Результат цього підрозділу міститься в [12].

Нехай $C := \{f:\ 2\pi\text{-періодичні і } \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max\limits_{x\in\mathbb{R}}\|f(x)\|$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{T}_n := \{t_n:\ t_n(x) = a_0+\sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx),\ a_j,b_j\in\mathbb{R}\}$, $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{y_i:\ -\pi\leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,\ s\in\mathbb{N},$ а для решти $i\in\mathbb{Z}$ $y_i = y_{i+2s}+2\pi\}$ $(y_0 = y_{2s}+2\pi,\dots,y_{2s+1} = y_1-2\pi,\dots)$ і $\Delta^{(1)}(Y)$ – множина всіх $f\in C$, що не спадають на $[y_1,y_0]$, не зростають на $[y_2,y_1]$, не спадають на $[y_3,y_2]$ і т.д. Позначимо

$$E^{(1)}_n(f) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y)}\|f-t_n\|\,.$$

Нагадаємо, в теоремах 2.2.1 і 2.2.2 доведено, що якщо $f\in\Delta^{(1)}(Y)$, то

$$E^{(1)}_n(f) \leqslant\ c(s)\ \omega_2(f,\pi/n), \qquad n\geqslant N(Y), \tag{6.2.1}$$

$$E^{(1)}_n(f) \leqslant\ C(Y)\,\omega_2(f,\pi/n), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{6.2.2}$$

де $c(s)$ – стала, яка залежить тільки від s, а $N(Y)$ і $C(Y)$ – сталі, які залежать тільки від Y, тобто від $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i-y_{i+1}\}$.

Плєшаков [32, стор. 64-83], [36], скориставшись міркуваннями статей Швєдова [51, 52] і ДеВора, Левіатана, Шевчука [72], при кожному $n\in\mathbb{N}$ побудував функцію $g_n(x) = g_n(x,s,Y,k)\in\Delta^{(1)}(Y)$ таку, що для неї

$$E^{(1)}_n(g_n) \geqslant C(Y,k)\,n^{\frac{k}{2}-1}\omega_k\,(g_n,\pi/n)\,, \quad k\in\mathbb{N},\ k>2, \tag{6.2.3}$$

де $C(Y,k)$ – стала, яка залежить тільки від Y і k. Іншими словами, при кожному $n\in\mathbb{N}$ можно підібрати функцію з $\Delta^{(1)}(Y)$, для якої (6.2.1) і (6.2.2) з ω_k, $k>2$, хибні.

В цьому підрозділі ми будуємо одну таку функцію (для всіх $n\in\mathbb{N}$), а саме доводимо наступну теорему 6.2.1.

Теорема 6.2.1. *Для кожного натурального* $k > 2$ *в множині* $\Delta^{(1)}(Y)$ *існує функція* $g(x) := g(x, s, Y, k)$ *така, що*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n^{(1)}(g)}{\omega_k\left(g, \pi/n\right)} = \infty. \tag{6.2.4}$$

Доведення. Спочатку, в зручному для нас вигляді, наведемо деякі факти з [32, стор. 64-83], [36]. Зважаючи на періодичність без втрати загальності будемо вважати, що 0 належить набору $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, тобто $y_{i_*} = 0$ при деякому $i_* \in \mathbb{Z}$. Нехай

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{x-y_i}{2} \quad \big(\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)\big), \quad \Pi_*(x) := \prod_{i=1, i\neq i_*}^{2s} \sin\frac{x-y_i}{2},$$

(якщо $f \in C^{(1)}$, то $f \in \Delta^{(1)}(Y) \iff f'(x)\Pi(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$). Для визначеності нехай i_* непарне (тоді $\Pi_*(0) > 0$). Позначимо $2d := \min\{|y_{i_*} - y_{i_*-1}|, |y_{i_*} - y_{i_*+1}|\}$, замітимо, $d \leqslant \pi/2$ і $\Pi_*(x) > 0,\ x \in (-2d, 2d)$. Покладемо

$$M := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad m := \min_{x\in[-d,d]} \Pi_*(x), \quad M_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|.$$

Оберемо (в залежності від Y) найменше натуральне N, що задовольняє нерівність

$$m \sin\frac{d}{8} \geqslant \frac{5}{N}(M + M_1), \tag{6.2.5}$$

тому, принаймні, $d > 60/N$. Для означення g буде використано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4. \tag{6.2.6}$$

Нагадаємо (див., наприклад, [25, стор. 127],) деякі його властивості: а) $J_N(t)$ є парним невід'ємним поліномом з $\mathbb{T}_{2N-2}$; б)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_N(t)dt = 1; \tag{6.2.7}$$

в) для будь-якої неперервно диференційовної періодичної f в кожній точці x має місце нерівність

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(x))J_N(t-x)dt\right| \leqslant \frac{5}{N}\|f'\|. \tag{6.2.8}$$

Оберемо $\nu \in \mathbb{N}$ з умови

$$\left(\frac{1}{2}d <\right) \quad d^* := \frac{\pi}{N} + \nu\frac{2\pi}{N} \leqslant d < \frac{\pi}{N} + (\nu+1)\frac{2\pi}{N}.$$

Позначимо

$$\widetilde{M}:=\frac{1}{\pi}\|J_N\|, \quad \widetilde{m}:=\frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t-d^*) = \frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t+d^*),$$

і зауважимо, що $\widetilde{m} > 0$. Насамкінець, покладемо

$$\overline{M} := 4 + 2\pi^2\frac{M\widetilde{M}}{m\widetilde{m}}.$$

Надалі припускаємо, що число b задовольняє нерівність

$$0 < b < \frac{\pi}{4N\overline{M}}$$

(щоб для зручності $J_N(x) > 0,\ x \in [-2\overline{M}b, 2\overline{M}b]$). Для кожного (такого) b позначимо

$$Q_r(x,b) := Q_r(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{x}\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)J_n(t-d^*)dt,$$

$$Q_l(x,b) := Q_l(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{x}\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)J_n(t+d^*)dt,$$

і зауважимо, що

$$\begin{aligned}Q_r(2\pi-b) &= \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{2\pi-b}\sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*)J_n(t-d^*)dt\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{2\pi-b}\left(\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)-\sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*)\right)J_n(t-d^*)dt.\end{aligned}$$

Крім того, $d/8 < (d^*-b)/2$, оскільки $30/N < d/2 < d^*$. Тому згідно (6.2.7), (6.2.8) і (6.2.5),

$$\begin{aligned}Q_r(2\pi-b) &\geqslant \sin\frac{d^*-b}{2}\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\left(\sin\frac{\cdot-b}{2}\Pi_*(\cdot)\right)'\right\|\\ &\geqslant m\sin\frac{d}{8}-\frac{5}{N}(M+M_1) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Аналогічно, $Q_l(2\pi-b) \leqslant 0$. Тому можна визначити $\alpha_b \in [0,1]$ з умови

$$\alpha_b Q_r(2\pi-b) + (1-\alpha_b)Q_l(2\pi-b) = 0. \qquad (6.2.9)$$

Покладемо

$$Q(x,b) := Q(x) := \alpha_b Q_r(x) + (1-\alpha_b)Q_l(x).$$

Рівність (6.2.9) свідчить про те, що $Q \in \mathbb{T}_{2N+s-2}$.

Зауважимо, що для будь-якого b існує число b_0 таке, що

$$b < b_0 < \overline{M}b, \tag{6.2.10}$$

$$Q(b_0) = 0. \tag{6.2.11}$$

Дійсно, з одного боку $Q(b) < 0$ і справджується нерівність

$$|Q(b)| \leqslant M\widetilde{M}\left|\int_{-b}^{b}\sin\frac{t-b}{2}dt\right| = 4M\widetilde{M}\sin^2\frac{b}{2} \leqslant M\widetilde{M}b^2,$$

а з іншого боку, при $\overline{M}b < \frac{\pi}{2N}$,

$$Q(\overline{M}b)-Q(b)=\frac{1}{\pi}\int_{b}^{\overline{M}b}\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt$$

$$\geqslant m\widetilde{m}\int_{b}^{\overline{M}b}\sin\frac{t-b}{2}dt = 4m\widetilde{m}\sin^2\frac{(\overline{M}-1)b}{4} \geqslant \frac{m\widetilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-1)^2b^2,$$

і тому

$$Q(\overline{M}b) = Q(\overline{M}b) - Q(b) + Q(b) \geqslant \frac{m\widetilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-1)^2b^2 - M\widetilde{M}b^2 > 0.$$

Оскільки $\omega_k(f,t) \leqslant 2\omega_{k-1}(f,t)$, $k \in \mathbb{N}$, то (6.2.4) достатньо довести лише для $k = 3$.

При кожному b через $K_{r,b}(x)$ і $K_{l,b}(x)$ позначимо дві 2π-періодичні функції такі, що

$$K_{r,b},\ K_{l,b} \in C^{(2)}; \qquad 0 \leqslant K_{r,b}(x) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant K_{l,b}(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K_{r,b}(x) := \begin{cases} 0,\ x \in \left[-\dfrac{\overline{M}b}{2}, b_0\right], \\ 1,\ x \in [-\pi, -\overline{M}b] \cup [b_0 + b, \pi], \end{cases} \qquad K_{l,b}(x) := \begin{cases} 0,\ x \in \left[-b, b_0 + \dfrac{\overline{M}b}{2}\right], \\ 1,\ x \in [-\pi, -2b] \cup [b_0 + \overline{M}b, \pi], \end{cases}$$

і доведемо нерівність

$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,b}(t)\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt > 0.$$

Для цього, в наслідок (6.2.9)-(6.2.11), достатньо довести, що

$$\left|\int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b}\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt\right|$$

$$> \int_{b_0}^{b_0+b}\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt.$$

Якщо $-\frac{\overline{M}b}{2} \leqslant t \leqslant -b$, то

$$|\Pi_*(t)| \geqslant m, \quad \frac{1}{\pi}J_N(t-d^*) \geqslant \widetilde{m}, \quad \frac{1}{\pi}J_N(t+d^*) \geqslant \widetilde{m},$$

тобто

$$\left|\int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt\right|$$

$$> \pi m\widetilde{m}\left|\int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin\frac{t-b}{2}dt\right| = 4\pi m\widetilde{m}\sin\frac{(\overline{M}-2)b}{8}\sin\frac{(\overline{M}+6)b}{8} > \frac{m\widetilde{m}(\overline{M}-2)^2b^2}{4\pi}.$$

З іншого боку,

$$\int_{b_0}^{b_0+b} \sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt < bM\pi\widetilde{M}\sin\frac{b_0}{2} < \pi M\widetilde{M}\frac{\overline{M}}{2}b^2.$$

З вибору $\overline{M}$ маємо $m\widetilde{m}(\overline{M}-2)^2b^2/(4\pi) > \pi M\widetilde{M}\overline{M}b^2/2$. Аналогічно,

$$I_2 := \int_{-\pi}^{\pi} K_{l,b}(t)\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt < 0.$$

Тому оберемо $\beta_b \in (0,1)$ з умови $\beta_b I_1 + (1-\beta_b)I_2 = 0$ і покладемо

$$K_b(x) := \beta_b K_{r,b}(x) + (1-\beta_b)K_{l,b}(x).$$

Отже, при кожному b, $K_b(x)$ є 2π-періодична 2 рази неперервно диференційовна функція така, що

$$K_b(x) := \begin{cases} 0, \ x \in [-b, b_0]\,, \\ 1, \ x \in [-\pi, -\overline{M}b] \cup [b_0 + \overline{M}b, \pi], \end{cases} \qquad 0 \leqslant K_b(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int_{-b}^{2\pi-b} K_b(t)\sin\frac{t-b}{2}\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt = 0. \qquad (6.2.12)$$

Згідно (6.2.9)-(6.2.12), функції

$$q_b := \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{x} K_b(t)\sin\frac{t-b}{2}\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

$$Q_b := \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{x} \sin\frac{t-b}{2}\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

є 2π-періодичні і такі, що

$$q_b(x) = 0, \quad x \in [-b, b_0], \qquad (6.2.13)$$

$$q_b \in C^{(3)} \cap \Delta^{(1)}(Y), \qquad (6.2.14)$$

$$\|q_b\| \leqslant 1, \tag{6.2.15}$$

$$\begin{aligned}\|q_b - Q_b\| = \|q_b - Q_b\|_{[-\overline{M}b, b_0+\overline{M}b]} &\leqslant M\widetilde{M}(b_0 + 2\overline{M}b)\sin\frac{b_0 + \overline{M}b - b}{2}\\ &< (3M\widetilde{M}\overline{M}^2 + 1)b^2 =: c_1 b^2,\end{aligned} \tag{6.2.16}$$

$$\begin{aligned}\omega_3(q_b, t) &\leqslant \omega_3(q_b - Q_b, t) + \omega_3(Q_b, t) \leqslant 8\|q_b - Q_b\| + t^3\left\|Q_b^{(3)}\right\|\\ &\leqslant 8c_1 b^2 + t^3 L,\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

де стала L не залежить від b.

Наведемо наслідок з теореми І.І.Прівалова (див. [40, стор. 96-98]): *для довільного полінома $R_n \in \mathbb{T}_n$ і будь-якого додатнього $h \leqslant \pi$ справджується нерівність*

$$h|R_n'(0)| \leqslant An\|R_n\|_{[-h,h]},$$

де стала $A > 1$ ($A \approx 2\pi$). Тоді візьмемо довільний поліном $\tau_n \in \Delta^{(1)}(Y)$ порядку $n > 2N + s - 2$, покладемо $R_n(x) := \tau_n(x) - Q_b(x)$ і помітимо, що

$$R_n'(0) = \tau_n'(0) - Q_b'(0) = -Q_b'(0) \geqslant \frac{bm\widetilde{m}}{\pi M} =: c_2 b.$$

Тому,

$$\begin{aligned}hc_2 b \leqslant hR_n'(0) \leqslant An\|R_n\|_{[-h,h]} &\leqslant An\left(\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} + \|q_b - Q_b\|\right)\\ &\leqslant An\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} + Anc_1 b^2,\end{aligned}$$

звідки,

$$\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} \geqslant \frac{c_2\, h}{A\, n} b - c_1 b^2. \tag{6.2.18}$$

Позначимо

$$b_n := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}},$$

і оберемо N_0 таким, що $N_0 > 2N + s - 2$ і $b_{N_0} < \frac{\pi}{4N\overline{M}}$. При всіх $n > N_0$ покладемо

$$g_n(x) := q_{b_n}(x),$$

і з (6.2.17) помітимо, що

$$\omega_3(g_n, t) \leqslant (8c_1 + L)t^3 =: c_3 t^3, \quad t \geqslant \frac{1}{n}. \tag{6.2.19}$$

Для довільного Y означимо $g(x,s,Y,3) =: g(x)$. Спочатку візьмемо $\epsilon = \frac{1}{10}$ і оберемо $n_0 \geqslant N_0$ настільки великим, щоб

$$2c_3 < n_0^{\epsilon}, \tag{6.2.20}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_0} < 1. \tag{6.2.21}$$

Покладемо $\gamma_0 := 1$ і

$$\gamma_j := \frac{c_2 b_{n_{j-1}} b_{n_j}}{A4n_j} \gamma_{j-1} = \frac{b_{n_0}}{b_{n_j}} \prod_{\nu=1}^{j} \frac{c_2 b_{n_\nu}^2}{A4n_\nu}, \quad j \geqslant 0, \tag{6.2.22}$$

де зростаюча послідовність $\{n_\nu\}$ визначається за індукцією наступним чином. Припустимо, що числа $\{n_0, ..., n_{\sigma-1}\}$ вже визначені, тоді покладемо

$$G_{\sigma-1}(x) := \sum_{j=1}^{\sigma-1} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x), \quad (G_0(x) := 0),$$

і оберемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ настільки великим, щоб

$$\left\| G_{\sigma-1}^{(3)} \right\| \leqslant \gamma_{\sigma-1} n_\sigma^{\epsilon}, \tag{6.2.23}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_{\sigma-1}} \geqslant 2c_1 \frac{1}{n_\sigma^{\epsilon}}. \tag{6.2.24}$$

Позначимо

$$\overline{G}_\sigma(x) := \sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x),$$

і зауважимо, що рівномірна збіжність цього ряду забезпечується співвідношеннями (6.2.15) і нерівністю

$$\sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} \leqslant \gamma_{\sigma-1} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... \right) < 2\gamma_{\sigma-1}, \tag{6.2.25}$$

яка випливає з (6.2.21) і (6.2.22).

Покладемо

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{j-1} g_{n_j}(x) \quad \Big(= G_{\sigma-1}(x) + \overline{G}_\sigma(x) \Big),$$

і з (6.2.14) помітимо, що $g \in \Delta^{(1)}(Y)$. Залишилось перевірити (6.2.4). Оцінка

$$\omega_3 \left(\overline{G}_\sigma, 1/n_\sigma \right) \leqslant \frac{c_3}{n_\sigma^3} \sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} < \frac{2c_3}{n_\sigma^3} \gamma_{\sigma-1} < \frac{\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\epsilon}}$$

випливає з (6.2.19), (6.2.25) і (6.2.20), а оцінка

$$\omega_3\left(G_{\sigma-1}, 1/n_\sigma\right) \leqslant \frac{1}{n_\sigma^3}\left\|G_{\sigma-1}^{(3)}\right\| \leqslant \frac{\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\epsilon}}$$

– з (6.2.23). Тому для всіх σ

$$\omega_3\left(g, 1/n_\sigma\right) \leqslant \frac{2\gamma_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3-\epsilon}}. \tag{6.2.26}$$

Тепер оцінимо знизу $E_{n_\sigma}^{(1)}(g)$. Оскільки, згідно (6.2.13), $G_{\sigma-1}(x) = 0$ на $[-b_{n_{\sigma-1}}, b_{n_{\sigma-1}}] := I_{\sigma-1}$, то

$$g(x) = \gamma_{\sigma-1} g_{n_\sigma}(x) + \overline{G}_{\sigma+1}(x), \quad x \in I_{\sigma-1}.$$

Нехай

$$\tau_{n_\sigma} := \frac{1}{\gamma_{\sigma-1}} \Gamma_{n_\sigma},$$

де Γ_{n_σ} – довільний поліном з $\Delta^{(1)}(Y)$ порядку n_σ, тоді за (6.2.18)

$$\|\tau_{n_\sigma} - g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} \geqslant \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A n_\sigma} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2.$$

Співвідношення (6.2.15), нерівність (6.2.25) і означення (6.2.22) тягнуть оцінку

$$\left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| \leqslant \sum_{j=\sigma+1}^{\infty} \gamma_{j-1} < 2\gamma_\sigma = \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A4 n_\sigma} b_{n_\sigma} \gamma_{\sigma-1}.$$

Тому, з урахуванням (6.2.24), запишемо

$$\begin{aligned}
E_{n_\sigma}^{(1)}(g) &= \|g - \Gamma_{n_\sigma}\| \geqslant \|\Gamma_{n_\sigma} - g\|_{I_{\sigma-1}} \geqslant \|\Gamma_{n_\sigma} - \gamma_{\sigma-1} g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} - \left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| \\
&= \gamma_{\sigma-1}\|\tau_{n_\sigma} - g_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} - \left\|\overline{G}_{\sigma+1}\right\| \\
&\geqslant \gamma_{\sigma-1}\left(\frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A n_\sigma} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2 - \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}}{A4 n_\sigma} b_{n_\sigma}\right) \geqslant \gamma_{\sigma-1}\left(\frac{c_1}{n_\sigma^{1+\epsilon}} b_{n_\sigma} - c_1 b_{n_\sigma}^2\right).
\end{aligned}$$

Разом з (6.2.26), (6.2.24) і (6.2.21) це тягне нерівність

$$\frac{E_{n_\sigma}^{(1)}(g)}{\omega_k\left(g, 1/n_\sigma\right)} \geqslant \frac{c_1}{2}\left(n_\sigma^{-1-\epsilon} n_\sigma^{-3/2} n_\sigma^{3-\epsilon} - n_\sigma^{-3} n_\sigma^{3-\epsilon}\right) = \frac{c_1}{2}\left(1 - \frac{1}{n_\sigma^{\frac{1}{2}-\epsilon}}\right) n_\sigma^{\frac{1}{2}-2\epsilon} \geqslant \frac{c_1}{4} n_\sigma^{\frac{1}{2}-2\epsilon}$$

для всіх σ, тобто (6.2.4) вірно, оскільки $\epsilon = \frac{1}{10}$. Теорему 6.2.1 доведено.

6.3 Обмеження порядку коопуклого наближення неперервних на відрізку функцій

Результати цього підрозділу містяться в [80].

Про місце наступних трьох теорем 6.3.1–6.3.3 в коопуклому наближенні многочленами див. початок підрозділу 3.1.

Теорема 6.3.1. *Для кожних* $r > 2$, $Y \in \mathbb{Y}_1$ *та* $n \in \mathbb{N}$, *знайдеться функція* $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap W^r$, *така, що для кожного многочлена* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap \mathbb{P}_n$ *буде справджуватись нерівність*

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r} \right\| > C(Y, r)\, n^{r-2}, \tag{6.3.1}$$

де $C(Y, r) = const$, *залежить тільки від* Y *і* r.

З теореми 6.3.1 випливає теорема 6.3.2.

Теорема 6.3.2. *Ні для яких* $Y \in \mathbb{Y}_1$, $k \in \mathbb{N}$ *і* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *таких, що* $k + r > 2$, *не існує сталих* $C = C(k, r, Y)$ *і* $N = N(k, r, Y)$, *незалежних від* f *і* n, *таких, що для кожної функції* $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^r$ *і кожного* $n \geqslant N$ *існував би многочлен* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap \mathbb{P}_n$, *що задовольняв би нерівність*

$$|f(x) - P_n(x)| < C\, \rho_n^r(x) \omega_k \left(f^{(r)}, \rho_n(x) \right), \quad x \in [-1, 1]. \tag{6.3.2}$$

Зауваження 6.3.1. *Якщо* $s \neq 1$, *то ми припускаємо, що теореми 6.3.1 і 6.3.2 не справджуються, тобто* (6.3.2) *і* (3.1.6) *вірні з* $C = C(k, r, Y)$ *і* $N = N(k, r, Y)$ *для всіх* k *і* r, *за винятком відомих негативних випадків. Цими випадками є: (*$r = 0, k > 4$*), (*$r = 1, k > 3$*), див. Ву і Цу* [169,176], *і (*$r = 2, k > 3$*), див. Гілевіч і Ющенко* [91].

Теорема 6.3.3. *Для кожних* $Y \in \mathbb{Y}_1$, $n \in \mathbb{N}$ *і* $A > 0$, *існує функція* $f \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap C^1$, *така, що для будь-якого многочлена* $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap \mathbb{P}_n$, *що задовольняє*

$$P_n(-1) = f(-1),\ P_n(1) = f(1),\ P_n'(-1) = f'(-1),\ P_n'(1) = f'(1), \tag{6.3.3}$$

знайдеться точка $x \in I$, *в якій*

$$\left| f'(x) - P_n'(x) \right| \geqslant A \|f'\| \geqslant \frac{1}{2} A\, \omega_1 \left(f', \delta_n(x) \right). \tag{6.3.4}$$

Доведення теорем 6.3.1 і 6.3.3

Згадаємо кілька відомих фактів. Оцінка (2.1.1), нерівність Дзядика [25]

$$\left\|\rho_n^{1-r} P_n'\right\| \leqslant c \left\|\rho_n^{-r} P_n\right\|$$

і оцінки Тригуба одночасного наближення [48] породжують наступне: *Якщо* $f \in W^r$ *і* $P_n \in \mathbb{P}_n,\ n \geqslant r-1,$ *то*

$$\left\|\frac{f' - P_n'}{\rho_n^{r-1}}\right\| \leqslant c_1 \left\|\frac{f - P_n}{\rho_n^r}\right\| + c_2 \left\|f^{(r)}\right\|, \tag{6.3.5}$$

де можна вважати, що $c_1 \geqslant 1$.

Нехай $y_1 \in (-1,1)$. Тоді нерівність Бернштейна [2] гарантує існування сталої n_0, такої, що для кожних $n \geqslant n_0$ і $P_n \in \mathbb{P}_n$, маємо

$$\left|P_n''(x)\right| \leqslant \frac{2}{\delta_n^2(y_1)} \left\|P_n\right\|, \quad x \in [y_1 - \delta_n(y_1), y_1]. \tag{6.3.6}$$

Позначимо

$$S(x) := \frac{\int_{-1}^{x} u^{r-2}(u+1)^{r-2} du}{\int_{0}^{-1} u^{r-2}(u+1)^{r-2} du},$$

$$c_3 := \max_{x \in [-1,0]} \left|S^{(r-1)}(x)\right|,$$

і зауважимо, що

$$S(-1) = 0, \quad S(0) = -1, \qquad S^{(j)}(-1) = S^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, ..., r-2,$$

$$S'(x) \leqslant 0, \quad x \in [-1,0],$$

і

$$\int_{-1}^{0} S(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

Доведення теореми 6.3.1

Зафіксуємо $y_1 \in (-1,1)$, покладемо $Y = \{y_1\}$ і згадаємо, що $\Delta^{(2)}(Y)$ – множина неперервніх на I функцій, що опуклі до низу $[y_1, 1]$ і опуклі до гори на $[-1, y_1]$. Тоді, зафіксуємо довільне велике $n \geqslant n_0$, що задовольняє $y_1 - \delta_n(y_1) > -1$, і $c_2 c_3 \leqslant 0.1\, n^{2r-2} \delta_n^r(y_1)$. Покладемо

$$\delta := \delta_n(y_1) = \frac{\sqrt{1 - y_1^2}}{n},$$

$$S_\delta(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < y_1 - \delta, \\ S\left(\dfrac{x - y_1}{\delta}\right), & \text{якщо} \quad y_1 - \delta \leqslant x \leqslant y_1, \\ -1, & \text{якщо} \quad x > y_1, \end{cases}$$

$$f(x) := \int_{-1}^{x} S_\delta(u)du.$$

Вочевидь,

$$f \in \Delta^{(2)}(Y_1),$$

$$f(-1) - f(1) = -f(1) = 1 - y_1 + 0.5\,\delta, \tag{6.3.7}$$

і

$$\left\| f^{(r)} \right\| = \left\| S_\delta^{(r-1)} \right\| = c_3\, \delta^{1-r}.$$

Тепер, теорема 6.3.1 випливає з нерівності

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r} \right\| \geqslant \frac{1}{20\, c_1} \delta\, n^{2r-2}, \tag{6.3.8}$$

для кожного многочлена $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap \mathbb{P}_n$. Доведемо (6.3.8) від супротивного. Будемо вважати, що для деякого иногочлена $P \in \Delta^{(2)}(Y_1) \cap \mathbb{P}_n$,

$$\left\| \frac{f - P}{\rho_n^r} \right\| < \frac{1}{20\, c_1} \delta\, n^{2r-2}. \tag{6.3.9}$$

Тоді (6.3.5) і вибір n тягнуть

$$\left\| \frac{f' - P'}{\rho_n^{r-1}} \right\| \leqslant \frac{1}{20} \delta\, n^{2r-2} + c_2\, c_3\, \delta^{1-r} \leqslant 0.1\, \delta n^{2r-2}.$$

Зокрема,

$$\left| f'(\pm 1) - P'(\pm 1) \right| \leqslant 0.1\delta.$$

Оскільки $(x - y_1)P'(x) \geqslant 0,\ x \in I$, то

$$P(1) - P(y_1) = \int_{y_1}^{1} P'(x)dx \leqslant P'(1)(1 - y_1) \leqslant (0.1\,\delta - 1)(1 - y_1),$$

$$P(y_1 - \delta) - P(-1) \leqslant P'(-1)(1 + y_1 - \delta) \leqslant 0.1\,\delta(1 + y_1 - \delta),$$

і

$$-\left\| P' \right\| = P'(y_1) \leqslant P'(1) \leqslant 0.1\,\delta - 1.$$

Тому (6.3.6) породжує

$$\begin{aligned} P(y_1) - P(y_1-\delta) &= \delta P'(y_1) + \frac{\delta^3}{3!}P'''(y_1-\Theta\delta) \\ &\leqslant \delta P'(y_1) + 0.2\,\delta\,\left\|P'\right\| = 0.8\,\delta\,P'(y_1) \leqslant 0.8\,\delta\,(0.1\,\delta-1). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(1)-P(-1) &\leqslant (0.1\,\delta-1)(1-y_1) + 0.1\,\delta\,(1+y_1-\delta) + 0.8\,\delta(0.1\,\delta-1) \\ &< -0.6\,\delta - 1 + y_1. \end{aligned}$$

Таким чином, згідно (6.3.7),

$$f(1)-f(-1)-P(1)+P(-1) > 0.1\,\delta,$$

що протирічить (6.3.9), оскільки (6.3.9) тягне

$$\begin{aligned} |f(1)-f(-1)-P(1)+P(-1)| &\leqslant |f(1)-P(1)| + |f(-1)-P(-1)| \\ &\leqslant \frac{2}{20\,c_1}\delta\,n^{2r-2}\frac{1}{n^{2r}} \leqslant 0.1\,\delta\frac{1}{n^2} < 0.1\,\delta. \end{aligned}$$

Теорему 6.3.1 доведено.

Доведення теореми 6.3.3

Для зручності, нехай $y_1 = 0$. Оберемо число $b > 0$ з умови

$$b\,n^2(A+1) < 1.$$

Покладемо

$$f'(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in [0,1], \\ -\dfrac{x}{b}, & \text{якщо} \quad x \in [-b,0], \\ 1, & \text{якщо} \quad x \in [-1,-b], \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{-1}^{x} f'(u)du.$$

Покажимо, що ця функція є шуконою. Дійсно, будемо вважати протилежне, що існує $P_n \in \Delta^{(2)}(\{0\})$, що задовольняє (6.3.3) і такий, що

$$\left|f'(x) - P_n'(x)\right| \leqslant A\|f'\| = A, \quad x \in I.$$

Тоді $\|P_n'\| \leqslant A+1$ і, за нерівністю Маркова,

$$\|P_n''\| \leqslant n^2(A+1).$$

Оскільки $P_n' \in \Delta^{(1)}(\{0\})$, $P_n(-1) = f(-1)$ і $P_n(1) = f(1)$, то $P_n'(x) \leqslant f'(x)$, $x \in [-1,-b] \cup [0,1]$. Покажимо, що $P_n'(x) < f'(x)$, $x \in (-b,0)$. Дійсно, інакше P_n' мав би перетинати f' принаймні в двох точках на $(-b,0)$, і отже, мала б існувати точка $\Theta \in (-b,0)$, така, що $P_n''(\Theta) = f''(\Theta) = -\frac{1}{b}$. Тому $\frac{1}{b} \leqslant \|P_n''\| \leqslant n^2(A+1)$, що протерічить обраному числу b. Таким чином, ми маємо, $P_n(\pm 1) = f(\pm 1)$, $P_n'(x) \leqslant f'(x)$, $x \in I$, і $P_n'(x) < f'(x)$, $x \in (-b,0)$, що неможливо. Теорему 6.3.3 доведено.

6.4 Нове явище у коопуклому наближенні многочленами

Результат цього підрозділу міститься в [81].

Нехай $\mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – простір алгебраїчних многочленів степеня $< n$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L_\infty[-1,1]}$, зокрема $\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]}$, якщо $f \in C[-1,1]$, W^r, $r \in \mathbb{N}$, – множина функцій $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, що мають $(r-1)$-у абсолютно неперервну похідну і $f^{(r)} \in L_\infty[-1,1]$.

В 1946 році Нікольський [33] довів, що *якщо $f \in W^1$, то існує послідовність $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n$, така, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + |x|\, O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\|f'\|, \quad x \in [-1,1].$$

Він припустив, що праву частину цієї нерівності можна замінити на $\frac{c}{n}\varphi_n(x)\|f'\|$, де

$$\varphi_n(x) := \max\left\{\varphi(x),\, \frac{1}{n}\right\}, \quad \varphi(x) := \sqrt{1-x^2}, \tag{6.4.1}$$

і, що такі нерівності можна використати для конструктивної характеристики функціональних классів на $[-1,1]$. Як вже зазначалось, це припущення було успішно підтверджено Тіманом, Дзядиком, Фройдом і Брудним, детальніше див. [46,24,88,7]. Зокрема, Тіман довів, що *якщо $f \in W^r$, то*

$$E_{n,r}(f) \leqslant \frac{C(r)}{n^r}\|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant r,$$

де

$$E_{n,r}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n}\left\|\frac{f-P_n}{\varphi_n^r}\right\|.$$

Тут і надалі $C(\cdot)$ і $N(\cdot)$ – різні додатні сталі, що можуть залежити тільки від параметрів в дужках і більше не від чого.

Тепер, якщо $\Delta^{(1)}$ – множина всіх монотонних $f \in C$, і

$$E_{n,r}^{(1)}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|,$$

то з робіт Лоренца, Целлера [130] ($r = 1$), ДеВора, Ю [71] ($r = 2$) і Шевчука [55] ($r > 2$) випливає, що *якщо* $f \in W^r \cap \Delta^{(1)}$, *то*

$$E_{n,r}^{(1)}(f) \leqslant \frac{C(r)}{n^r} \|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant r,$$

а, якщо $\Delta^{(2)}$ – множина всіх опуклих $f \in C$, і

$$E_{n,r}^{(2)}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|,$$

то Левіатан [114] ($r = 1, 2$) і Шевчук і Манія [56, стор. 148] ($r > 2$) довели, що *якщо* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}$, *то*

$$E_{n,r}^{(2)}(f) \leqslant \frac{C(r)}{n^r} \|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant r.$$

Нехай $Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s = \{y_i : \ -1 < y_1 < \cdots < y_s < 1, \ s \in \mathbb{N}\}$, а $\mathbb{Y}_s$ – множина всіх Y_s. Тепер, якщо $\Delta^{(2)}(Y_s)$ ($\Delta^{(1)}(Y_s)$) – множина всіх f таких, що

$$f''(x)\Pi(x) \geqslant 0 \quad \big(f'(x)\Pi(x) \geqslant 0\big), \quad x \in [-1, 1], \quad \text{де} \quad \Pi(x) := \prod_{i=1}^s (y_i - x),$$

(для f, що не мають неперервну другу (відповідно першу) похідну, означення $\Delta^{(2)}(Y_s)$ (відповідно $\Delta^{(1)}(Y_s)$) більш акуратні), а для $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ і $f \in \Delta^{(2)}(Y_s)$ (відповідно $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$) позначено величину

$$E_{n,r}^{(2)}(f, Y_s) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\|$$

$$\left(\text{відповідно } E_{n,r}^{(1)}(f, Y_s) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y_s)} \left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\| \right),$$

то в [10] ($r = 1, 2$) і [79] ($r > 2$) доведено, що *якщо* $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, *то*

$$E_{n,r}^{(1)}(f, Y_s) \leqslant \frac{C(r, s)}{n^r} \|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant N(r, Y_s), \tag{6.4.2}$$

і

$$E^{(1)}_{n,r}(f,Y_s) \leqslant \frac{C(r,Y_s)}{n^r}\|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant r. \tag{6.4.3}$$

Ми також довели [79, Приклад 1.1], що для $s \geqslant 2$, $N(r,Y_s)$ в (6.4.2) не може бути замінена на $N(r,s)$. Для $s=1$ це можливо.

В наслідку 3.1.2 ($r=1,2$) і теоремах 3.2.1 ($r=3$) і 3.3.2 ($r>3$) доведено, що *якщо* $s>1$, $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ *і* $f \in W^r \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, *то*

$$E^{(2)}_{n,r}(f,Y_s) \leqslant \frac{C(r,Y_s)}{n^r}\|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant r, \tag{6.4.4}$$

тобто аналог (6.4.3) справджується для коопуклого наближення.

Однак виявилось, що аналог (6.4.2) є хибним для коопуклого наближення і в цьому підрозділі ми доводимо теорему 6.4.1, яка це підтверджує. Для її формулювання нам потрібно означити функції F_n, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай g фіксована, парна, невід'ємна, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція з носієм $(-1,1)$. Скажімо

$$g(x) := \begin{cases} \exp(x^2-1)^{-1}, & \text{якщо} \quad |x|<1, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Покладемо

$$S(x) := \int_{-1}^{x} (x-t)\, g(t)\, dt,$$

і

$$F_n := \frac{S(2nx+1)}{S(1)}, \qquad x \in [-1,1].$$

Оскільки F_n нескінченно диференційовна, то $F_n \in W^r$ для всіх $r \in \mathbb{N}$.

Теорема 6.4.1. *Для кожних* $r \geqslant 3$, $s \geqslant 2$ *і сталої* $A>0$, *існують* $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ *і число* N *такі, що*

$$F_n \in \Delta^{(2)}(Y_s), \tag{6.4.5}$$

і

$$E^{(2)}_{n,r}(F_n,Y_s) > \frac{A}{n^r}\|F^{(r)}_n\|$$

для всіх $n \geqslant N$.

Зауваження 6.4.1. *Якщо* $s \geqslant 2$ *і* $r=1$, *або* 2, *то оцінка*

$$E^{(2)}_{n,r}(f,Y_s) \leqslant \frac{C(r,s)}{n^r}\|f^{(r)}\|, \quad n \geqslant N(r,Y_s), \tag{6.4.6}$$

на кшталт (6.4.2)*, справджується (див. теорема 3.1.1) і неможливо замінити* $N(r, Y_s)$ *на* $N(r, s)$*. Якщо* $s = 1$ *і* $r = 1$*, або* $r = 2$*, то* (6.4.6) *справджується навіть з* $n \geqslant 1$*. З іншого боку, для* $s = 1$ *і* $r \geqslant 3$ *обидві оцінки* (6.4.4) *і* (6.4.6) *хибні навіть з* $C(r, Y_s)$ *і* $N(r, Y_s)$*, див. Левіатан, Шевчук* [123].

Зауваження 6.4.2. *Явище, що описано в теоремі 6.4.1, непритаманне оцінкам типу Джексона похибки*

$$E_n^{(2)}(f, Y_s) := \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)} \|f - P_n\|_{C[-1,1]},$$

див. [123].

Допоміжні факти для доведення теореми 6.4.1

Нехай $r \in \mathbb{N}$. За нерівністю Дзядика [23], або [25, стор. 262],

$$\left\| \frac{P_n'}{\varphi_n^{r-1}} \right\| \leqslant C(r)\, n \left\| \frac{P_n}{\varphi_n^r} \right\|,$$

для кожного $P_n \in \mathbb{P}_n$. З результату Тригуба [48] випливає, що якщо $f \in W^r$, то існує послідовність $\{P_n\}_{n=r}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \mathbb{P}_n$, таких, що

$$\left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\| \leqslant \frac{C(r)}{n^r} \left\| f^{(r)} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \frac{f' - P_n'}{\varphi_n^{r-1}} \right\| \leqslant \frac{C(r)}{n^{r-1}} \left\| f^{(r)} \right\|.$$

Для всіх $f \in W^r$ і $P_n \in \mathbb{P}_n$, ці нерівності безпосередньо тягнуть оцінку

$$\left\| \frac{f' - P_n'}{\varphi_n^{r-1}} \right\| \leqslant c_1\, n \left(\left\| \frac{f - P_n}{\varphi_n^r} \right\| + \frac{\left\| f^{(r)} \right\|}{n^r} \right), \tag{6.4.7}$$

де c_1 – стала, що залежить тільки від r. Можна припустити, що $c_1 \geqslant 1$.

Надалі $\| \cdot \|_{[a,b]} := \| \cdot \|_{C[a,b]}$, зокрема, $\| \cdot \|_{[-1,1]} = \| \cdot \|$. Нерівність Бернштейна для похідної тригонометричного полінома порядку $2n - 1$ тягне нерівність

$$\|P_n''\|_{[-2/n, 2/n]} \leqslant n^2 \|P_n\|$$

для будь-якого алгебраїчного многочлена P_n степеня $\leqslant n - 1$. Тому, для кожного $P_n \in \mathbb{P}_n$ і $a \geqslant 1/2$, маємо

$$\|P_n''\|_{[-1/n, 1/n]} \leqslant (n/a)^2 \|P_n\|_{[-a,a]}.$$

Це тягне

$$\left\|P_n''\right\|_{[-1/n, 0]} \leqslant 1.2\, n^2 \left\|P_n\right\|_{[-1,a]}, \tag{6.4.8}$$

для будь-яких $a \in [\sqrt{5/6}, 1]$ і $P_n \in \mathbb{P}_n$.

Завершимо наведення допоміжних фактів наступною лемою.

Лема 6.4.1. *При кожному* $n \in \mathbb{N}$ *маємо:*

$$F_n'(0) = 2\,n, \quad F_n(0) = 1, \tag{6.4.9}$$

$$F_n'(x) = \begin{cases} 2\,n, & \text{якщо} \quad x \in [0,1], \\ 0, & \text{якщо} \quad x \in [-1,-1/n], \end{cases} \tag{6.4.10}$$

$$F_n''(x) \geqslant 0, \quad x \in [-1,1], \tag{6.4.11}$$

$$\left\| F_n^{(r)} \right\| = \frac{2^r \|S^{(r)}\|}{S(1)}\, n^r =: c_2\, n^r. \tag{6.4.12}$$

Доведення. Оскільки S'' парна функція, то $S(1) = S'(1)$, що тягне рівність $F_n'(0) = 2\,n$. Всі решта співвідношень (6.4.9)-(6.4.12) очевидні. Лему 6.4.1 доведено.

Доведення теореми 6.4.1

Покладемо

$$B := c_1\, c_2\, (A+1) \geqslant c_2\, A.$$

Зафіксуємо точку $a \in [\sqrt{5/6}, 1)$, таку, що

$$36\, B\, \varphi(a) < 1. \tag{6.4.13}$$

Покладемо

$$N := \frac{1}{\varphi(a)}$$

і зауважимо, що означення (6.4.1) φ_n тягне рівність

$$\varphi_n(x) = \varphi(x), \qquad x \in [-a, a],$$

для всіх $n \geqslant N$. Покладемо

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = a,$$

і, якщо $s > 2$, через $y_1, ..., y_s$ позначимо будь-які фіксовані точки такі, що $y_2 < y_3 < ... < y_s < 1$. Нехай $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$. Тоді (6.4.10) і (6.4.11) тягнуть (6.4.5).

Припустимо протилежне, що існують якісь $n \geqslant N$ і $P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(2)}(Y_s)$, такі, що

$$\left\| \frac{F_n - P_n}{\varphi_n^r} \right\| \leqslant \frac{A}{n^r} \|F_n^{(r)}\| = c_2\, A.$$

Тоді (6.4.7) і (6.4.12) тягнуть нерівність

$$\left\| \frac{F_n' - P_n'}{\varphi_n^{r-1}} \right\| \leqslant B\, n.$$

Зокрема,

$$|P_n(-1)| = |P_n(-1) - F_n(-1)| \leqslant \frac{c_2\, A}{n^r} \leqslant \frac{B}{n} \leqslant B\,\varphi(a), \tag{6.4.14}$$

$$|P_n(x) - F_n(x)| \leqslant c_2\, A\,\varphi^r(x) \leqslant B\,\varphi^3(x), \quad x \in [-a, a], \tag{6.4.15}$$

$$\left|P_n'(-1)\right| = \left|P_n'(-1) - F_n'(-1)\right| \leqslant \frac{B}{n^{r-2}} \leqslant B\,\varphi(a), \tag{6.4.16}$$

і, беручи до уваги (6.4.9),

$$\begin{aligned} P_n'(a) &= F_n'(a) + \left(P_n'(a) - F_n'(a)\right) \geqslant 2\,n - B\,n\,\varphi^{r-1}(a) \\ &\geqslant 2\,n - B\,n\,\varphi(a). \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

Нерівності (6.4.16), (6.4.17) і (6.4.13) забеспечують

$$P_n'(a) > \left|P_n'(-1)\right|. \tag{6.4.18}$$

Оскільки $P_n \in \Delta^{(2)}(Y_s)$, то P_n' неспадаюча функція на $[-1, 0]$ і незростаюча на $[0, a]$. Тому (6.4.18) і (6.4.17) тягнуть

$$\left\|P_n'\right\|_{[-1,a]} = P_n'(0) \geqslant 2\,n - B\,n\,\varphi(a),$$

а (6.4.8) веде до

$$\left\|P_n'''\right\|_{[-1/n,0]} \leqslant 1.2\,n^2\,P_n'(0).$$

Отже, з деякою $\Theta \in \left(-1, -\frac{1}{n}\right)$,

$$P_n(-\frac{1}{n}) - P_n(-1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\,P_n'(\Theta) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\,P_n'(-1) \geqslant -B\,\varphi(a),$$

і, з деякою $\Theta \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$,

$$\begin{aligned} P_n(0) - P_n(-\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n}P_n'(0) + \frac{1}{3!\,n^3}P_n'''(\Theta) \geqslant \frac{1}{n}P_n'(0) - \frac{1}{3!\,n^3}\left\|P_n'''\right\|_{[-1/n,0]} \\ &\geqslant \frac{1}{n}P_n'(0) - \frac{1.2}{3!\,n}P_n'(0) = \frac{0.8}{n}P_n'(0) \geqslant 0.8\,(2 - B\,\varphi(a)). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \left(P_n(0) - P_n(-\frac{1}{n})\right) + \left(P_n(-\frac{1}{n}) - P_n(-1)\right) + P_n(-1) \\ &\geqslant 1.6 - 0.8\,B\,\varphi(a) - B\,\varphi(a) - B\,\varphi(a) \geqslant 1.6 - 3\,B\,\varphi(a) > 1.5, \end{aligned}$$

де ми також скористалися (6.4.14) і (6.4.13). Отже, за (6.4.9),

$$P_n(0) - F_n(0) > 0.5. \tag{6.4.19}$$

Покладемо $b := 2a - 1$ і зауважимо, що $0 < b < a$ і

$$\varphi(b) < 2\varphi(a). \tag{6.4.20}$$

Оскільки F_n лінійна функція на $[0, a]$ а P_n опукла до гори функція на $[0, a]$, то

$$P_n(x) - F_n(x) \geqslant l(x), \qquad x \in [0, a], \tag{6.4.21}$$

де

$$l(x) = \frac{1}{a}\Big(\left(P_n(0) - F_n(0)\right)(a - x) + \left(P_n(a) - F_n(a)\right) x\Big)$$

– лінійна функція, що проходить через точки $(0, P_n(0) - F_n(0))$ і $(a, P_n(a) - F_n(a))$. Беручи до уваги (6.4.20), (6.4.15), (6.4.21) і (6.4.19), пишемо

$$\begin{aligned}
8\,B\,\varphi^3(a) &\geqslant B\,\varphi^3(b) \geqslant P_n(b) - F_n(b) \geqslant l(b) \\
&= \frac{1}{a}\Big(\left(P_n(0) - F_n(0)\right)(1 - a) + \left(P_n(a) - F_n(a)\right) b\Big) \\
&\geqslant \frac{1-a}{2\,a} - \frac{b}{a} B\,\varphi^3(a) \geqslant \frac{\varphi^2(a)}{4\,a} - \frac{b}{a} B\,\varphi^3(a) \\
&\geqslant \frac{\varphi^2(a)}{4} - B\,\varphi^3(a),
\end{aligned}$$

звідки, $36\,B\,\varphi(a) \geqslant 1$, що протиречить (6.4.13). Теорему 6.4.1 доведено.

6.5 Обмеження порядку q-монотонного наближення сплайнами

Результати цього підрозділу містяться в [82, Теореми 7.1 і 7.4].

В цьому підрозділі доводяться наступні дві теореми 6.5.1 і 6.5.2. Теорема 6.5.1, зокрема, вказує на те, що ω_4 в теоремі 4.1.1 (і в її наслідках – теоремах 4.1.2 - 4.1.4) неможливо замінити на ω_k з $k > 4$.

Означення, що використовуються в цьому підрозділі, наведено в підрозділі 4.1.

Теорема 6.5.1. *Для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, $A > 0$, $0 < p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ і $0 < \epsilon < 2$ існує функція $f \in C^k \cap \Delta^k$ така, що для будь-якого многочлена $q_r \in \mathbb{P}_r$, що задовольняє $q_r^{(k)}(1) \geqslant 0$, виконується нерівність*

$$\|f - q_r\|_{L_p[1-\epsilon,1]} > A\omega_{k+2}(f, 2, [-1, 1])_p. \tag{6.5.1}$$

Доведення. Ідея побудови f належить Швєдову [52], і це доведення дуже схоже на доведення [107, Теорема 3.2]. Нехай f така, що $f^{(k)}(x) = (1-h-x)_+ := \max\{1-h-x, 0\}$, де $h > 0$ оберемо нижче. Нехай $Q \in \mathbb{P}_{k+1}$ такий, що $Q^{(k)}(x) = 1-h-x$, і $Q^{(i)}(-1) = f^{(i)}(-1)$ для всіх $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Оскільки

$$f(x) - Q(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{k-1}\Big(f^{(k)}(t) - Q^{(k)}(t)\Big)\,dt,$$

то

$$\begin{aligned}\|f-Q\|_{L_\infty} &\leqslant \frac{1}{(k-1)!}\int_{-1}^{1}(1-t)^{k-1}\Big|f^{(k)}(t) - Q^{(k)}(t)\Big|\,dt\\ &\leqslant \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\int_{1-h}^{1}(t-1+h)\,dt = ch^{k+1}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\|f-Q\|_{L_p} \leqslant 2^{1/p}\,\|f-Q\|_{L_\infty} \leqslant ch^{k+1},$$

і

$$\omega_{k+2}(f,[-1,1])_p = \omega_{k+2}(f-Q,[-1,1])_p \leqslant c\,\|f-Q\|_{L_p} \leqslant ch^{k+1}.$$

Припускаючи, що (6.5.1) хибна, для деякого многочлена $P \in \mathbb{P}_r$ такого, що $P^{(k)}(1) \geqslant 0$, пишемо $\|f-P\|_{L_p[1-\epsilon,1]} \leqslant A\omega_{k+2}(f,[-1,1])_p$. Тоді, скориставшись лемою 4.1.2, отримуємо

$$\begin{aligned}\Big|P^{(k)}(1) - Q^{(k)}(1)\Big| &\leqslant \Big\|P^{(k)} - Q^{(k)}\Big\|_{L_\infty[1-\epsilon,1]} \leqslant c\,\|P-Q\|_{L_p[1-\epsilon,1]}\\ &\leqslant c\Big(\|P-f\|_{L_p[1-\epsilon,1]} + \|f-Q\|_{L_p[1-\epsilon,1]}\Big)\\ &\leqslant c\Big(A\omega_{k+2}(f,[-1,1])_p + \|f-Q\|_{L_p}\Big) \leqslant \tilde{\mathfrak{c}}h^{k+1},\end{aligned}$$

де $\tilde{\mathfrak{c}}$ залежить від k, r, p, ϵ, і A, однак не залежить від h. Тому,

$$P^{(k)}(1) \leqslant Q^{(k)}(1) + \Big|P^{(k)}(1) - Q^{(k)}(1)\Big| \leqslant -h + \tilde{\mathfrak{c}}h^{k+1} < 0,$$

звісно, для достатньо маленького h, що є протиріччем. Теорему 6.5.1 доведено.

Щоб довести негативний результат для k-монотонного наближення КПФ-ми з $k \geqslant 4$, скористаємося деякими результатами з [5]. Наступна лема випливає безпосередньо з [5, Теорема 1].

Лема 6.5.1. *Припустимо, що* $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in \Delta^3[\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}]$ *і*

$$d := \left\|F'(x) - (x-\xi)_+\right\|_{L_\infty[\xi-\frac{1}{4},\xi+\frac{1}{4}]}.$$

Існує проміжок $I \subseteq [\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}]$ *з* $|I| \geqslant 1/64$ *такий, що*

$$|F(x) - (x-\xi)_+^2/2| \geqslant c\min\{d, d^2\}, \quad \text{для всіх} \quad x \in I,$$

де c *– абсолютна стала.*

Лема 6.5.2. [5, Лема 5] *Нехай* $r \in \mathbb{N}$ *і функція* $G \in C^r[a,b]$ *така, що* $|G^{(r)}(x)| \geqslant h$ *for all* $x \in [a,b]$. *Тоді існує проміжок* $I \subseteq [a,b]$, $|I| \geqslant 4^{-r}(b-a)$ *такий, що*

$$|G(x)| \geqslant 2^{-r^2-r}h(b-a)^r, \quad \text{для всіх} \quad x \in I.$$

Теорема 6.5.2. *Для будь-яких* $k \geqslant 4$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant \infty$ *і* $A > 0$, *існує* $n \in \mathbb{N}$ *таке, що, для будь-якого розбиття* $\mathbf{z}_n$ *з* $[-1,1]$ *(на* n *підпроміжків), знайдеться функція* $f \in \Delta^k \cap C^{k-2}$ *така, що для кожного* $s \in \mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n) \cap \Delta^k$, *виконується нерівність*

$$\|f - s\|_{L_p} > A\omega_3(f, n^{-1}, [-1,1])_p. \tag{6.5.2}$$

Доведення. Нехай $x_+ := \max\{x, 0\}$ і $x_+^0 := 1$, якщо $x > 0$, і $x_+^0 := 0$, якщо $x \leqslant 0$. Для $n \geqslant 2$, нехай $\mathbf{z}_n$ – довільне розбиття $[-1,1]$. Тоді, існують $\xi \in [-1/2, 1/2]$ і ς, $0 \leqslant \varsigma \leqslant n-1$, такі, що $J := [\xi - (2n)^{-1}, \xi + (2n)^{-1}] \subseteq [z_\varsigma, z_{\varsigma+1}]$. Тепер,

$$\|t_+ - P(t)\|_{L_\infty} \geqslant c(r), \quad \text{для будь-якого} \quad P \in \mathbb{P}_r,$$

і після лінійної заміни змінної (з $x = \xi + t(2n)^{-1}$ і отже, $(x-\xi)_+ = (2n)^{-1}t_+$ і $Q(x) = (2n)^{-1}P(t)$), маємо

$$\|(x-\xi)_+ - Q(x)\|_{L_\infty(J)} \geqslant c(r)n^{-1}, \quad \text{для будь-якого} \quad Q \in \mathbb{P}_r.$$

З $f(x) := \frac{1}{(k-1)!}(x-\xi)_+^{k-1} \in \Delta^k \cap C^{k-2}$, це означає, що для будь-якого $s \in \mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n) \cap \Delta^k$,

$$\left\|f^{(k-2)} - s^{(k-2)}\right\|_{L_\infty(J)} \geqslant c(k,r)n^{-1}.$$

Оскільки $J \subseteq [\xi - \frac{1}{4}, \xi + \frac{1}{4}]$, то за лемою 6.5.1 існує проміжок $I \subseteq [\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}] \subset [-1,1]$, $|I| \geqslant \frac{1}{64}$, такий, що

$$|f^{(k-3)}(x) - s^{(k-3)}(x)| \geqslant c(k,r)n^{-2}, \quad \text{для всіх} \quad x \in I.$$

Тому, згідно лемі 6.5.2, для деякого проміжку $\mathcal{I} \subseteq I$, $|\mathcal{I}| \geqslant c(k)$, маємо

$$|f(x) - s(x)| \geqslant c(k,r)n^{-2}, \quad \text{для всіх} \quad x \in \mathcal{I},$$

отже,

$$\|f-s\|_{L_p} \geqslant c(k,r)n^{-2}.$$

Припускаючи, що (6.5.2) хибна, для всіх $n \geqslant 2$, ми знайшли $s \in \mathcal{S}_r(\mathbf{z}_n)$ такий, що

$$c(k,r)n^{-2} \leqslant \|f-s\|_{L_p} \leqslant A\omega_3(f,n^{-1},[-1,1])_p \leqslant cAn^{-3}\left\|f^{(3)}\right\|_{L_p}$$
$$\leqslant c(k)An^{-3}\left\|x_+^{k-4}\right\|_{L_p[-2,2]} \leqslant c(k)An^{-3},$$

тобто прийшли до протеріччя, коли n достатньо велике. Теорему 6.5.2 доведено.

6.6 Обмеження порядку q-монотонного наближення періодичних функцій

Результат цього підрозділу міститься в [14].

Нехай $C := \{f:\ 2\pi\text{-періодичні і } \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $\|f\| := \max\limits_{x\in\mathbb{R}}\|f(x)\|$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{T}_n := \{t_n:\ t_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j\cos jx + b_j \sin jx),\ a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$, $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{y_i:\ -\pi \leqslant y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,\ s\in\mathbb{N},$ а для решти $i\in\mathbb{Z}$ $y_i = y_{i+2s}+2\pi\}$ $(y_0 = y_{2s}+2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...)$ і при кожному $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\Delta^{(q)}(Y)$ – множина всіх $f\in C$, що мають на $[y_1,y_0]$ невід'ємну q-ту розділену різницю в будь-яких $q+1$ точках цього відрізку, на $[y_2,y_1]$ – недодатню, на $[y_3,y_2]$ – невід'ємну і т.д. А якщо $f\in C^{(q)}$, то $\Delta^{(q)}(Y)$ містить всі f, для яких

$$f^{(q)}(x)\Pi(x) \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{Z}, \quad \text{де} \quad \Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s}\sin\frac{x-y_i}{2} \quad \Big(\Pi(x)>0,\ x\in(y_1,y_0)\Big).$$

(Зауважимо, що якщо $q\geqslant 3$ і $f\in\Delta^{(q)}(Y)$, то $f\in C^{(q-2)}$) Функції з $\Delta^{(q)}(Y)$ називають q-комонотонними. Позначимо

$$E_n^{(q)}(f) := E_n^{(q)}(f,Y) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(q)}(Y)}\|f-t_n\|.$$

Про оцінки зверху і знизу цієї велечини при $q=0$ і $q=1$ див. підрозділи 5.2 і 6.2, відповідно. Для $q=2$, Залізко [27, 26] довів наступні дві нерівності для довільної $f\in\Delta^{(2)}(Y)$ і означеної ним, при кожному $n\in\mathbb{N}$, $g_n\in\Delta^{(2)}(Y)$

$$E_n^{(2)}(f) \leqslant C(Y)\,\omega_3(f,1/n), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{6.6.1}$$

$$E_n^{(2)}(g_n) \geqslant C(Y,k)\,n^{2\left(\frac{k}{3}-1\right)}\omega_k(g_n,1/n), \tag{6.6.2}$$

тобто в (6.6.1) неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k > 3$ (про суттєву залежність від Y сталої в (6.6.1) див. роботу Попова [38]).

Наслідуючи роботу Швєдова [52], де, у випадку наближення на відрізку, функції для нерівностей, аналогічних (6.6.2), побудовано для всіх $q \in \mathbb{N}$, ми в цьому підрозділі доводимо наступну теорему 6.6.1.

Теорема 6.6.1. *Для довільних натуральних* q, n *і* k, $k \geqslant q+2$, *існує функція* $f_n \in \Delta^{(q)}(Y)$, *яка залежить від* n, Y, *і* k *така, що*

$$E_n^{(q)}(f_n) > C(Y,k)\, n^{q\left(\frac{k}{q+1}-1\right)}\omega_k(f_n, 1/n), \tag{6.6.3}$$

де стала $C(Y,k)$ *залежить тільки від* Y *і* k.

Доведення. Як вже зазначалось теорема 6.6.1 відома для $q = 1, 2$. Доведем її для $q \geqslant 3$. Зафіксуємо $s \in \mathbb{N}$ і набір $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = Y$. З періодичності і не втрачаючи загальності, припустимо, що 0 належить Y, тобто $y_{i_*} = 0$ для деякого $i_* \in \mathbb{Z}$. Покладемо

$$\Pi_*(x) := \prod_{i=1 i\neq i_*}^{2s} \sin\frac{x-y_i}{2}.$$

Нехай для визначеності i_* – непарне, тоді $\Pi_*(0) > 0$.

Через $2d$ позначимо відстань від y_{i_*} до найближчої точки з Y, зазначимо, що $d \leqslant \frac{\pi}{2}$, і $\Pi_*(x) > 0$, $x \in (-2d, 2d)$. Нехай

$$M := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad M_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|, \quad m := \min_{x\in[-d,d]} \Pi_*(x).$$

Позначимо через N найменше натуральне, яке задовольняє нерівність

$$m\left(\sin\frac{d}{8}\right)^{2q-1} \geqslant \frac{5}{N}\,(M+M_1)\,(2q-1) \tag{6.6.4}$$

тоді, зокрема,

$$d > \frac{40}{N}. \tag{6.6.5}$$

Виберемо натуральне j^* з умови $d^* := \frac{\pi}{N} + j^*\frac{2\pi}{N} \leqslant d < \frac{\pi}{N} + (j^*+1)\frac{2\pi}{N}$, та помітимо,

$$\frac{1}{2}d < d^* \leqslant d. \tag{6.6.6}$$

Нехай знову

$$\tilde{M} := \frac{1}{\pi}\|J_N\|, \quad \tilde{m} := \frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t-d^*) = \frac{1}{\pi}\min_{t\in\left[-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right]} J_N(t+d^*),$$

де $J_N(t)$ – ядро Джексона (6.2.6). Враховуючи, що $\tilde{m} > 0$, покладемо

$$\overline{M} := 2\left(2 + \pi^3\sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}}\right)\sum_{\nu=0}^{q}\binom{k}{\nu}$$

Надалі число b задовольняє нерівність

$$0 < b < \frac{\pi}{2N\overline{M}}. \tag{6.6.7}$$

Покладемо

$$\tilde{\Pi}(x) := \tilde{\Pi}(x, b, B_q) := \sin\frac{x - 2b}{2}\prod_{\nu=0}^{2q-3}\sin\frac{x - b_\nu}{2},$$

де точки $\{b_\nu\}_{\nu=0}^{2q-3} =: B_q$ є такі, що

$$2b < b_{2q-3} < ... < b_1 < b_0 < \overline{M}b. \tag{6.6.8}$$

Враховуючи (6.6.5) та (6.6.6), зазначимо, що

$$\frac{d^* - b_0}{2} > \frac{d}{8}. \tag{6.6.9}$$

Для кожних b і B_q, позначимо

$$Q_r(x) := Q_r(x, b, B_q) := \frac{1}{\pi}\int_0^x \tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)J_N(t - d^*)dt,$$

$$Q_l(x) := Q_l(x, b, B_q) := \frac{1}{\pi}\int_0^x \tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)J_N(t + d^*)dt.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} Q_r(2\pi) = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*)J_N(t - d^*)dt \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t) - \tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*)\right)J_N(t - d^*)dt, \end{aligned}$$

то, враховуючи (6.2.7), (6.2.8), (6.6.9) та (6.6.4), отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} Q_r(2\pi) & \geqslant \tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\left(\tilde{\Pi}(\cdot)\Pi_*(\cdot)\right)'\right\| \\ & \geqslant m\left(\sin\frac{d}{8}\right)^{2q-1} - \frac{5}{N}\left(M + M_1\right)(2q - 1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, оскільки

$$Q_l(2\pi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*)J_N(t+d^*)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big(\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t) - \tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*)\Big)\, J_N(t+d^*)dt,$$

то знову з (6.2.7), (6.2.8), (6.6.9) та (6.6.4) випливає, що

$$Q_l(2\pi) \leqslant \tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*) + \frac{5}{N}\left\|\Big(\tilde{\Pi}(\cdot)\Pi_*(\cdot)\Big)'\right\|$$
$$\leqslant -m\left(\sin\frac{d}{8}\right)^{2q-1} + \frac{5}{N}\left(M+M_1\right)(2q-1) \leqslant 0.$$

Отже, існує $\alpha_b \in [0,1]$ таке, що

$$\alpha_b Q_r(2\pi) + (1-\alpha_b)Q_l(2\pi) = 0. \tag{6.6.10}$$

Покладемо

$$Q(x) := Q(x,b,B_q) := \frac{1}{b^{2(q-1)}}\Big(\alpha_b Q_r(x) + (1-\alpha_b)Q_l(x)\Big).$$

Рівність (6.6.10) означає, що Q – тригонометричний поліномом, порядок якого, у відповідності з тим, що $J_N \in \mathbb{T}_{2N-2}$, дорівнює $2(N+q-2)+s$. Наступна лема 6.6.1 доводиться за індукцією, аналогічно лемі 3.1 з [32] (або див. [36]).

Лема 6.6.1. *Для довільного b і $q \geqslant 2$, існує набір точок B_q такий, що*

$$\int_0^{b_0}\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{q-2}} Q(t_{q-1},b,B_q)dt_{q-1}...dt_1 = 0. \tag{6.6.11}$$

Нехай $K_b(x)$ – 2π-періодична функція така, що

$$K_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in (0,b_0), \\ 1, & \text{якщо} \quad x \in [-\pi,0] \cup [b_0,\pi]. \end{cases}$$

Позначимо

$$g(x) := g(x,b,B_q) := \frac{1}{\pi b^{2(q-1)}}\int_0^x K_b(x)\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)\big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\big)dt.$$

З (6.6.11) та (6.6.8) випливає, що g – 2π-періодична функція з $\Delta^{(1)}(Y)$. Покладемо

$$f(x,b,2) := \int_0^x (g(t,b) - A_{b,2})dt, \qquad f(x,b,3) := \int_0^x (f(t,b,2) + A_{b,3})dt,$$
$$f(x,b,4) := \int_0^x (f(t,b,3) + A_{b,4})dt, \qquad f(x,b,5) := \int_0^x (f(t,b,4) + A_{b,5})dt,$$
$$f(x,b,6) := \int_0^x (f(t,b,5) - A_{b,6})dt, \qquad \ldots,$$

і

$$f(x) := f(x,b,q),$$

де числа

$$A_{b,\nu} \in \begin{cases} [0, 5/b^{2(q-1)}], & \text{якщо} \quad \nu \text{ парне}, \\ [-1,1], & \text{якщо} \quad \nu \text{ непарне}, \end{cases}$$

вибрані з умов

$$f(2\pi, b, \nu) = 0, \;\; \nu = 2, \ldots, q.$$

Тому, зокрема, $f \in \Delta^{(q)}(Y)$. Існування чисел $A_{b,\nu}$ доводиться аналогічно доведенню (6.6.10). Позначимо

$$P(x,b,2) := \int_0^x \big(Q(t,b) - A_{b,2}\big)\, dt, \qquad P(x,b,3) := \int_0^x \big(P(t,b,2) + A_{b,3}\big)\, dt,$$
$$P(x,b,4) := \int_0^x \big(P(t,b,3) + A_{b,4}\big)\, dt, \qquad \ldots,$$

і

$$P(x) := P(x,b,q).$$

Зауважимо, що $P(2\pi\nu) = 0, \;\nu \in \mathbb{Z}$, тобто P – тригонометричний поліном, при кожному $q \geqslant 2$. Отже,

$$\begin{aligned}\|g - Q\| &= \|g - Q\|_{[0,b_0]} = \|Q\|_{[0,b_0]} \\ &\leqslant M\tilde{M} b_0 \frac{1}{b^{2(q-1)}} \left(\sin \frac{b_0 - 2b}{2}\right)^{2q-1} < \frac{1}{2^{2q-1}} M\tilde{M}\overline{M}^{2q} b^2 =: c_1 b^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f - P\| = \|f - P\|_{[0,2\pi]} &= \frac{1}{b^{2(q-1)}} \left\| \int_0^{\cdot} \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{q-2}} \left(g(t_{q-1}) - Q(t_{q-1})\right) dt_{q-1} \ldots dt_1 \right\|_{[0,2\pi]} \\ &< 2\overline{M}^{q-1} c_1 b^{q+1},\end{aligned} \tag{6.6.12}$$

і

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant \omega_k\left(f-P, \frac{1}{n}\right) + \omega_k\left(P, \frac{1}{n}\right)$$
$$\leqslant 2^k\|f-P\| + \left(\frac{1}{n}\right)^k \|P^{(k)}\| \leqslant 2^{k+1}\overline{M}^{q-1}c_1 b^{q+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k, \qquad (6.6.13)$$

де стала M_k не залежить від n.

Виберемо з множини $\Delta^{(q)}(Y)$ довільний тригонометричний поліном τ_n порядку $\leqslant n$, $n > s + 2N$. Нехай $R_n(x) := \tau_n(x) - P(x)$. Тоді

$$R_n^{(q)}(b) = \tau_n^{(q)}(b) - P^{(q)}(b) \geqslant -P^{(q)}(b) \geqslant \frac{bm\tilde{m}}{\pi^{2q-1}} =: c_2 b.$$

Скориставшись нерівністю Бернштейна, отримуємо

$$c_2 b \leqslant R_n^{(q)}(b) \leqslant n^q\|R_n\|,$$

звідки

$$\frac{c_2 b}{n^q} \leqslant \|R_n\| \leqslant \|\tau_n - f\| + \|f-P\| \leqslant \|\tau_n - f\| + 2\overline{M}^{q-1}c_1 b^{q+1},$$

тобто

$$\|\tau_n - f\| \geqslant \frac{c_2 b}{n^q} - 2\overline{M}^{q-1}c_1 b^{q+1} = \frac{c_2 b}{n^q}\left(1 - \frac{2\overline{M}^{q-1}c_1 b^q n^q}{c_2}\right). \qquad (6.6.14)$$

Нарешті, для додоведення (6.6.3) залишилось розглянути два випадки. Якщо $n > N_0$, то візьмемо

$$f_n(x) := f(x, b_n, q), \quad \text{де} \quad b_n := \sqrt[q]{\frac{c_2}{4\overline{M}^{q-1}c_1}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{q+1}},$$

а N_0 вибрано з врахуванням того, щоб виконувались нерівності $\overline{M}b_{N_0} < \frac{\pi}{2N}$ і $N_0 > s + 2N$. Тоді (6.6.3) випливає з (6.6.13) та (6.6.14), а саме,

$$\frac{\|\tau_n - f_n\|}{\omega_k(f_n, 1/n)} \geqslant \frac{\frac{c_2 b_n}{n^q}\left(1 - \frac{2\overline{M}^{q-1}c_1 b_n^q n^q}{c_2}\right)}{2^{k+1}\overline{M}^{q-1}c_1 b_n^{q+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k}$$
$$\geqslant \frac{1}{2n^q}\frac{c_2 b_n}{2^{k+1}\overline{M}^{q-1}c_1 b_n^{q+1} + (\frac{1}{n})^k M_k} =: C(Y,k)n^{q\left(\frac{k}{q+1}-1\right)}.$$

Якщо $n < N_0$, то (6.6.3) випливає з нерівності $E_n^{(q)}(f) \geqslant E_{1+N_0}^{(q)}(f)$, для будь-якої $f \in C$. Теорему 6.6.1 доведено.

6.7 Висновки до розділу 6

У розділі 6 доведено наступне:

- Якщо функція f з неперервною на $[-1,1]$ похідною не спадає на $[y_1,1]$, не зростає на $[y_2,y_1]$, не спадає на $[y_3,y_2]$ і т.д., з будь-якими фіксованими y_i : $-1 < y_s < \cdots < y_1 < 1,\ s \in \mathbb{N}$, то в нерівності

$$\|f - P_n\| \leqslant C(y_i)\, n^{-1}\, \omega_3(f', 1/n), \quad n \geqslant 3,$$

з алгебраїчними многочленами P_n степеня $\leqslant n$, що змінють свою монотонність теж в y_i-х, як f, і сталою $C(y_i)$, що залежить тільки від y_i-х, неможливо замінити 3-й модуль гладкості f' ω_3 на k-й з $k > 3$ (див. підрозділ 6.1).

- Якщо f – неперервна, 2π періодична і на кожному періоді змінює монотонність в y_i-х : $-\pi < y_{2s} < \cdots < y_1 < \pi,\ s \in \mathbb{N}$, то в нерівності

$$\|f - T_n\| \leqslant C(y_i)\, \omega_2(f, \pi/n), \quad n \in \mathbb{N},$$

з тригонометричними поліномами T_n порядку $\leqslant n$, що змінють свою монотонність теж в y_i-х, як f, і сталою $C(y_i)$, що залежить тільки від y_i-х, неможливо замінити 2-й модуль гладкості f ω_2 на k-й з $k > 2$ (див. підрозділ 6.2).

- Для довільних натуральних $q,\ n$ і $k,\ k \geqslant q+2$, в множині всіх неперервних 2π періодичних f, що на $[-\pi,\pi)$ з $Y := \{y_i :\ -\pi < y_{2s} < \cdots < y_1 < \pi,\ s \in \mathbb{N},\}$ мають на $[y_1, y_0]$ невід'ємну q-ту розділену різницю в будь-яких $q+1$ точках цього відрізку, на $[y_2, y_1]$ – недодатню, на $[y_3, y_2]$ – невід'ємну і т.д., тобто в множині всіх q-комонотонних функцій існує функція f_n, яка залежить від $n,\ Y$, і k така, що

$$\|f_n - T_n\| > C(Y,k)\, n^{q\left(\frac{k}{q+1}-1\right)}\, \omega_k(f_n, \pi/n),$$

де T_n – будь-який q-комонотонний з(як) f поліном порядку $\leqslant n$, а стала $C(Y,k)$ залежить тільки від Y і k.

Іншими словами, для кожного натурального q знайдено неперервну періодичну q-комонотонну функцію, для якої, при наближенні її q-комонотонними поліномами, (на відміну від наближення без обмежень) не справджуються оцінка Джексона-Стєчкина з модулем гладкості прядку $\geqslant q+2$ (див. підрозділ 6.6).

- Для кожних $r > 2$ і $n \in \mathbb{N}$, знайдено кусково-опуклу функцію f з однією, довільно фіксованою точкою перегину $y \in [-1,1]$ і з абсолютно неперервною $r-1$-шою і обмеженою r-ю похідною, таку, що для кожного алгебраїчного многочлена P_n

степеня $\leqslant n$ і з тією ж самою єдиною точкою перегину y (на відміну від наближення без обмежень) знайдеться точка $x \in [-1, 1]$ така, що

$$|f(x) - P_n(x)| > C(y, r)\, n^{r-2} \rho_n^r(x), \quad \rho_n(x) := 1/n^2 + \sqrt{1 - x^2}/n,$$

де $C(y, r)$ – стала, яка залежить тільки від y і r. Якщо f має більше однієї точки перегину, то такої x не існує (див. підрозділ 6.3).

• Знайдено функцію g, з однією точкою перегину і неперервною похідною, для якої неможливо отрмимати одночасно дві поточкові оцінки з інтерполяцією в $-1, 1$ (навіть з ω_1) для сумісного наближення g многочленами P_n, з тією ж точкою перегину, і g' похідними P_n' (див. підрозділ 6.3).

• Для кожних $k \geqslant 1$ і $r \geqslant 0$ таких, що $k + r > 2$, знайдено кусково-опуклу функцію $f \in C^r[-1, 1]$, з певним набором Y_s, $s \geqslant 2$, з двох і більше точок перегину, таку, що при наближенні її кусково-опуклими алгебраїчними многочленами P_n степеня $\leqslant n$, з тими ж самими точками перегину Y_s, неможливо отримати поточкові оцінки типу Нікольського

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C(k, r, s)\, \rho_n^r(x)\, \omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad n \geqslant N(k, r, Y_s), \quad x \in [-1, 1],$$

зі сталими $C(k, r, s)$ і $N(k, r, Y_s)$, що залежать тільки від параметрів в дужках (див. підрозділ 6.4). Це можливо лише зі сталими $C(k, r, Y_s)$ і $N(k, r, s)$. Таке явище непритаманне відповідним поточковим оцінкам комонотонного наближення. Його також немає в рівномірному коопуклому наближенні, тобто в оцінках типу Джексона-Стєчкіна (з $1/n$ замість ρ_n). Для однієї точки перегину ці оцінки (тобто з $k + r > 2$) коопуклого поточкового наближення не справджуються навіть з $C(k, r, Y_s)$ і $N(k, r, Y_s)$, а тільки з $C(k, r)$ і $N(f, k, r, Y_1)$ (або, що майже те саме, з $C(f, k, r, Y_1)$ і $N(k, r)$) і то не для відомих негативних випадків ($k > 3$, $r < 3$, де вони зовсім хибні навіть з обома сталими, що залежать від f) (детальніше див. розділ 3).

• Знайдено дві q-монотонні функції $f_1 \in C^q[-1, 1]$, $q \in \mathbb{N}$, і $f_2 \in C^{q-2}[-1, 1]$, $q \geqslant 4$, (тобто їх q-ті розділені різниці невід'ємні для всіх наборів з $q + 1$ точок відрізку $[-1, 1]$), при наближенні яких q-монотонними сплайнами ст. r, $r \in \mathbb{N}$, з будь-якими вузлами, неможливо отримати оцінки похибок, а ні локального, а ні глобального наближень, що включали б ω_k з $k \geqslant q + 2$ і $k = 3$, відповідно (див. підрозділ 6.5).

Список використаних джерел

[1] **Ахиезер Н. И.**, Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. pages 28, 60, 198

[2] **Бернштейн С. Н.**, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, 1912, Собр. соч., Изд. АН СССР, 1952, т. I, 11-104. pages 29, 275

[3] **Бернштейн С. Н.**, Собрание сочинений. Том 1 — Конструктивная теория функций (1905 — 1930 гг.). - М.: АН СССР, 1952. 582 с. pages 34

[4] **Бондаренко А. В., Гилевич Я. Я.**, Негативний результат в поточечном 3-выпуклом приближении многочленами, Укр. Мат. Журн., **61** (2009), №4, 563-567. pages 45

[5] **Бондаренко А. В., Примак А. В.**, Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков, Матем. заметки, **76** (2004), № 6, 812–823. pages 36, 40, 44, 46, 218, 219, 232, 285, 286

[6] **Брудный Ю. А.**, Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси, ДАН СССР, **124** (1959), № 4, 739-742. pages 32

[7] **Брудный Ю. А.**, Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана, ДАН СССР, **148** (1963), № 6, 1237–1240. pages 31, 48, 278

[8] **Гельфонд А. О.**, О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами, УМН, **10** (1955), вып. 1(63), 41–65. pages 31

[9] **Гопенгауз И. Е.**, К вопросу о приближении функций на отрезке и в области с углами, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **4** (1967), 204–210. pages 31

[10] **Дзюбенко Г. А.**, Поточечная оценка комонотонного приближения, Укр. Мат. Журн., **46** (1994), №11, 1467-1472. pages 50, 244, 261, 279

[11] **Дзюбенко Г. А.**, Копозитивное поточечное приближение, Укр. Мат. Журн., **48** (1996), №3, 326-334. pages 245

[12] **Дзюбенко Г. А.**, Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій, Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2008, том 5, №1, 113-123. pages 25, 266

[13] **Дзюбенко Г. А.**, Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій, Укр. Мат. Журн., **61** (2009), № 4, 435-451. pages 70

[14] **Дзюбенко Г. А.**, Обмеження порядку q-монотонного наближення періодичних функцій, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, Т. 12, №4, 186–197: "Теорія функцій та суміжні питання", Відп. ред.: А.С.Романюк – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – 329 с. pages 287

[15] **Дзюбенко Г. А.**, Кубічний сплайн три-монотонного наближення, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **13** (2016), № 2, 1-14. pages 231

[16] **Дзюбенко Г. А.**, Порядки комонотонного наближення періодичних функцій, Збірник праць Ін-ту математики НАН України "Теорія функцій та суміжні питання", **10** (2013), № 1, 110 - 125. pages 70

[17] **Дзюбенко Г. А.**, Поточкова оцінка майже копозитивного наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами, Укр. Мат. Журн., **69** (2017), №5, 641-649. pages 25, 243

[18] **Дзюбенко Г. А.**, *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій,* Укр. Мат. Журн., **71** (2019), №3, 353-367. pages 25, 198

[19] **Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д.**, Коопукле наближення функцій, які мають більше однієї точки перегину, Укр. Мат. Журн., **56** (2004), № 3, 352-365. pages 25, 113

[20] **Дзюбенко Г. А., Залізко В. Д.**, Поточкові оцінки коопуклого наближення диференційовних функцій, Укр. Мат. Журн., **57** (2005), № 1, 47-59. pages 123

[21] **Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.**, Комонотонное приближение периодических функций, Мат. заметки, **83** (2008), вып. 2, 199-209. pages 25, 60, 75

[22] **Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.**, Комонотонное приближение периодических функций, Мат. заметки, **84** (2008), вып. 5, 713–723. pages 60, 75

[23] **Дзядык В. К.**, О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию (Lip $\alpha, (0 < \alpha < 1)$) на конечном отрезке вещественной оси, Изв. АН СССР, сер. мат., **20** (1956), 2, 623-642. pages 32, 281

[24] **Дзядык В. К.**, Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций, ДАН СССР, **121** (1958), №3, 403–406. pages 31, 48, 278

[25] **Дзядык В. К.**, Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами .— Москва: Наука, 1977, 512 сс. pages 27, 48, 60, 73, 74, 124, 130, 150, 198, 246, 249, 267, 275, 281

[26] **Залізко В. Д.**, Контрприклад для коопуклого наближення періодичних функцій, Науковиі записки: Збірник наукових статей Нац. пед. уні-ту ім. М. П. Драгоманова, Серія 1. Фізико-математичні науки, 2006, № 6, 91–96. pages 198, 287

[27] **Залізко В. Д.**, Коопукле наближення періодичних функцій, Укр. матем. журн. **59** (2007), №1, 29-42. pages 198, 287

[28] **Корнейчук Н. П.**, Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций, Докл. АН СССР, **145** (1962), №3, 514-515. pages 28

[29] **Корнейчук Н. П.**, Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., **35** (1971), №1, 93–124. pages 28

[30] **Корнейчук Н. П.**, Точные константы в теории в теории приближения. — Москва: Наука, 1987. — 423 с. pages 28, 185

[31] **Лебедь Г. К.**, Неравенства для полиномов и их производных, ДАН СССР, **117** (1957), 570-572. pages 32

[32] **Плешаков М. Г.**, Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева. Дисс. ... к.ф.-м.н. Саратов: СГУ, 1997. pages 60, 71, 266, 267, 290

[33] **Никольский С. М.**, О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Изв. АН СССР, сер. мат., **10** (1946), 4, 295-317. pages 30, 278

[34] **Плешаков М. Г., Попов П. А.**, Знакосохраняющее приближение периодических функций, Укр. мат. журн., **55** (2003), № 8, 1087-1098. pages 65, 251

[35] **Плешаков М. Г., Попов П. А.**, Второе неравенство Джексона в знакосохраняющем приближении периодических функций, Укр. мат. журн., **56** (2004), № 1, 123-128. pages 251

[36] **Плешаков М. Г., Тышкевич С. В.**, Один отрицательный пример формосохраняющего приближения, Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, **14** (2014), № 2, 144-150. pages 60, 266, 267, 290

[37] **Попов П. А.**, Аналог нерівності Джексона для коопуклого наближення періодичних функцій, Укр. матем. журн., **53** (2001), 919-928. pages 62, 64, 88, 89, 198

[38] **Попов П. А.**, Один контрприклад в коопуклому наближенні періодичних функцій, Праці Ін-ту матем. НАН України: Т. 35: Теорія набл. функцій та суміжні питання / К.: Ін-т. матем. НАН України, – 2002. – 233 с., 113-118. pages 288

[39] **Попов П. А.**, Один контрприклад в знакозберігаючому наближенні періодичних функцій, - К. : Збі-к пр. Ін-ту. матем. НАН України. 2005, **2**, № 2: Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання, ред. О. Степанець. сс. 336, 176-185. pages 251

[40] **Привалов А. А.**, Теория интерполирования функций. кн. 1. - Саратов: Изд-во Сарат. у-та, 1990. — 230 с. pages 271

[41] **Примак А. В.**, Згладжування зі збереженням форми 3-опуклих сплайнів 4-го степеня, Укр. мат. журн., **57** (2005), № 2, 277-283. pages 233

[42] **Стечкин С. Б.**, О уммах Валле-Пуссена, ДАН СССР, **80** (1951), № 4, 545-548. pages 29

[43] **Стечкин С. Б.**, О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., **15** (1951), № 3, 219-242. pages 30, 60, 72, 73, 77, 198

[44] **Теляковский С. А.**, Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами, Матем. сб., **70** (112):2 (1966), 252–265. pages 48

[45] **Тиман А. Ф.**, Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, Докл. АН СССР, **116** (1957), № 5, 762–765. pages 32

[46] **Тиман А. Ф.**, Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций на конечном отрезке вещественной оси, ДАН СССР, **78** (1966), № 1, 17–20. pages 31, 48, 278

[47] **Тиман А. Ф.**, Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 624 с. pages 30

[48] **Тригуб Р. М.**, Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами, Изв. АН СССР. Сер. матем., **26** (1962), № 2, 261–280. pages 31, 275, 281

[49] **Чебышев П. Л.**, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. – СПб., 1873. – 32 с. - Прил. къ Запискам имп. Академии наук, т. 32, № 1. pages 33

[50] **Чебышев П. Л.**, Избранные труды. Из-во Академии наук СССР, 1955, 579-608. pages 33

[51] **Шведов А. С.**, Комонотонное приближений функций многочленами, ДАН СССР, **250** (1980), №1, 39-42. pages 36, 38, 39, 40, 41, 49, 60, 266

[52] **Шведов А. С.**, Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами, Мат. заметки, **29** (1981), № 1, 117-130, 156. pages 35, 36, 39, 41, 49, 60, 124, 198, 266, 285, 288

[53] **Шведов А. С.**, Коприближение кусочно-монотонных функций многочленами, Мат. заметки, **30** (1981), № 6, 839-846. pages 35, 50, 61

[54] **Шевчук И. А.**, О коприближении монотонных функций, ДАН СССР, **308** (1989), № 3, 537-541. pages 38, 43

[55] **Шевчук И. А.**, Приближение монотонных функций монотонными многочленами, Матем. Сб., **183** (1992), № 5, 63-78. pages 38, 39, 43, 124, 137, 143, 279

[56] **Шевчук И. А.**, Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наукова Думка, 1992. 225 с. pages 31, 39, 41, 44, 54, 76, 77, 79, 116, 123, 124, 128, 130, 135, 180, 185, 191, 208, 234, 239, 246, 249, 279

[57] **Ющенко Л. П.**, Контрприклад в опуклому наближенні, Укр. Мат. Журн., **52** (2000), № 12, 1715-1721. pages 44, 45

[58] **Beatson R. K.**, The degree of monotone approximation, Pacific J. Math., **74** (1978), № 1, 5-14. pages 35, 39, 40, 41

[59] **Beatson R. K.**, Joint approximation of a function and its derivatives, conf. Approximation theory, III (Proc. Conf., Univ. Texas, Austin, Tex., 1980), Academic Press, New York, 1980, 199-206. pages 44, 45

[60] **Beatson R. K.**, Restricted range approximation by splines and variational inequalities, SIAM J. Numer. Anal., **19** (1982), 2, 372-380. pages 221

[61] **Bernstein S. N.**, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkov, **13** (1912), 1-2. pages 34

[62] **Bernstein S. N.**, Sur les polynomes multiplement monotone, Commun. Soc. Math. Kharkov, **4** (1927), № 1, 1-11. pages 34

[63] **Bondarenko A. V.**, Jackson type inequality in 3-convex approximation, East J. Approx., **8** (2002), № 3, 291-302. pages 36, 41

[64] **Bondarenko A. V., Leviatan D., Prymak A. V.**, Pointwise Estimates for 3-monotone Approximation, J. Approx. Theory, **164** (2012), 1205-1232. pages 233

[65] **Cao Jia Ding, Gonska Heinz H.**, Pointwise estimates for higher order convexity preserving polynomial approximation, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, **36** (1994), № 2, 213-233. pages 44, 45

[66] **Dahlhaus R.**, Pointwise approximation by algebraic polynomials, J. Approx. Theory, **57**(1989), №3, 274-277. pages 46

[67] **Dai M., Loguinov D., Radha H. M.**, Rate-distortion analysis and quality control in scalable Internet streaming, IEEE Transactions on Multimedia, **8** (2006), № 6, 1135-1146. pages 47

[68] **DeVore R. A.**, Degree of monotone approximation, conf. Linear operators and approximation, II (Proc. Conf., Oberwolfach Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1974), Birkhäuser, Basel, 1974, 337-351. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 25, pages 35

[69] **DeVore R. A.**, Degree of approximation, Approximation theory, II (Proc. Intern. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., 1976), eds G. G. Lorentz, C. K. Chui and L. Schumaker, Acad. Press. New York, 1976, 117-161. pages 34, 36, 38, 39, 48

[70] **DeVore R. A.**, Monotone approximation by polynomials. SIAM J. Math. Anal. **8** (1977), № 5, 906-921. pages 34, 38, 39, 124, 137, 143

[71] **DeVore R. A., Yu X. M.**, Poitwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx., **1** (1985), № 4, 323-331. pages 43, 45, 49, 50, 124, 279

[72] **DeVore R. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Approximation of monotone functions: A counter example, Proceedings Curves and surfaces with applications in CAGD (Chamonix-Mont-Blanc, 1996), Nashville, TN: Vanderbilt Univ. Press, 1997, 95-102. pages 60, 198, 262, 266

[73] **Dzyubenko G. A.**, Copositive and positive pointwise approximation, Preprint series. Inst. Math. NAS of Ukraine, Kyiv, 1994. Preprint 94.38, 14 p. pages 245

[74] **Dzyubenko G. A.**, Comonotone approximation with interpolation at the ends of an interval, Analysis in Theory and Application, **22** (2006), №3, 233-245. pages 25, 48

[75] **Dzyubenko G. A.**, Nearly comonotone approximation of periodic functions, Anal. Theory Appl., **33** (2017), №1, 74-92. pages 87

[76] **Dzyubenko G. A., Gilewicz J.**, Nearly coconvex pointwise approximation, East J. Approxim., **6** (2000), 357-383. pages 25, 94, 111, 119, 181, 182

[77] **Dzyubenko G. A., Gilewicz J.**, Nearly coconvex pointwise approximation by cubic splines and polynomials, East J. Approxim. **12** (2006), №4, 417-439. pages 181

[78] **Dzyubenko G. A., Gilewicz J.**, Copositive approximation of periodic functions, Acta Math. Hungar., **120** (2006), №4, 301-314. pages 250

[79] **Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.**, Piecewise monotone pointwise approximation, Constr. Approx., **14** (1998), 311-348. pages 50, 54, 55, 62, 63, 74, 111, 124, 137, 143, 177, 245, 246, 247, 261, 262, 279, 280

[80] **Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.**, Coconvex pointwise approximation, Укр. Мат. Журн., **54** (2002), 1200-1212. pages 104, 274

[81] **Dzyubenko G. A. , Gilewicz J., Shevchuk I. A.**, New phenomena in coconvex approximation, Analysis Mathematica, **32** (2006), 113-121. pages 278

[82] **Dzyubenko G. A., Kopotun K. A., Prymak A. V.**, Three-monotone spline approximation, J. Approx. Theory, **162** (2010), 2168-2183. pages 215, 284

[83] **Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Nikolskii-type estimates for coconvex approximation of functions with one inflection point, Jaen J. Approx., **2** (2010), №1, 51-64. pages 135

[84] **Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Coconvex pointwise approximation, RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO Serie II, Suppl. **82** (2010), 359-374. pages 142, 176

[85] **Dzyubenko G. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Pointwise estimates of coconvex approximation, Jaen J. Approx., **6** (2014), №2, 261–295. pages 25, 148

[86] **Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A.**, Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. Walter de Gruyter. Berlin and New York. 2008, pp. 480. pages 135, 141, 152, 180

[87] **Foucart S., Powers V.,**, Constrained approximation by semidefinite programming, IMA Journal of Numerical Analysis, **37** (April 2017), № 2, 1066-1085. pages 47

[88] **Freud G.**, Über die Approximation reeller stetigen Funktionen durch gewöhnliche Polynome, Math. Ann, **137** (1959), №1, 17-25. pages 31, 48, 278

[89] **Gehner K. R.**, Characterization theorems for constrained approximation problems via optimization theory, J. Approx. Theory, **14** (1975), 51-76. pages 35

[90] **Gilewicz J., Shevchuk I. A.**, Comonotone approximation, Фундаментальная и прикладная математика, **2** (1996), 319-363. pages 55, 62, 65

[91] **Gilewicz J., Yushchenko L. P.**, Picewise q-convex pointwise approximation, Preprint No. CPT-2001, Centre de Physique Theorique CNRS, Luminy, Marseille, France. pages 137, 181, 274

[92] **Gonska H. H., Leviatan D., Shevchuk I. A., Wenz H.-J.**, Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation, Constr. Approx., **16** (2000), 603-629. pages 46, 48

[93] **Hu Y. K., Leviatan D., Yu X. M.**, Coconvex polynomial and spline approximation in $C[-1,1]$, Constr. Approx. **10** (1994), № 1, 31-64. pages 36, 39, 137, 143

[94] **Hu Y., Yu X. M.**, The degree of copositive Approximation and a Computer Algorithm, SIAM J. Numer. Anal., **33** (1996), № 1, 388–398. pages 244

[95] **Iliev G. L.**, Exact estimates for partially monotone approximation, Anal. Math., **4** (1978), 3, 181-197. pages 35

[96] **Iliev, G. L.**, Partially monotone interpolation, Serdica, **4** (1978), 2-3, 267-276. pages 35

[97] **Ishisaki K.**, Jackson-type estimates for monotone approximation, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **53** (1977), 5, 171-173. pages 35

[98] **Jackson D.**, Üeber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Göttingen (1911) (Thesis) pages 28, 60, 198

[99] **Jackson D.**, On approximation by trigonometric sums and polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., **13** (1912), 491-515. pages 28

[100] **Kimchi E., Leviatan D.**, On restricted best approximation to functions with restricted derivatives, SIAM J. Numer. Anal., **13** (1976), 1, 51-53. pages 35

[101] **Konovalov V. N., Leviatan D.**, Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval, Israel J. Math., **133** (2003), 239-268. pages 40, 217, 218, 219, 232

[102] **Konovalov V. N., Leviatan D.**, Estimates on the approximation of 3-monotone function by 3-monotone quadratic splines, East J. Approx., **7** (2001), 333-349. pages 232

[103] **Kopotun K. A.**, Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials, Constr. Approx., **10** (1994), №2, 153-178. pages 36, 39, 44, 46, 54, 55, 104, 123, 124, 137, 143, 148, 180

[104] **Kopotun K. A.**, Copositive approximation by algebraic polynomials, Analysis Math., **21** (1995), 4, 269–283. pages 243, 244, 250

[105] **Kopotun K. A.**, Simultaneous approximation by algebraic polynomials, Constr. Approx., **12** (1996), № 1, 67-94. pages 31, 46

[106] **Kopotun K. A.**, Univariate splines: equivalence of moduli of smoothness and applications, Math. Comp., **76** (2007), 258, 931-945. pages 219

[107] **Kopotun K., Leviatan D., Prymak A. V.**, Nearly monotone spline approximation in $\mathbb{L}_p$, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 7, 2037-2047. pages 285

[108] **Kopotun K., Leviatan D., Prymak A. V.**, Constrained spline smoothing, SIAM J. Numer. Anal., **46** (2008), 4, 1985-1997. pages 217, 218, 226

[109] **Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, The degree of coconvex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 409-415. pages 104, 124, 145, 149, 244

[110] **Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Convex approximation in the uniform norm: conclusion, Canadian Math. J. **57** (2005), 1224-1248. pages 177

[111] **Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Are the degrees of best (co)convex and unconstrained polynomial approximation the same? , Acta Math. Hung. **123** (2009), 273-290. pages 177

[112] **Kopotun K. A., Leviatan D., Prymak A., Shevchuk I. A.**, Uniform and pointwise shape preserving approximation by algebraic polynomials, Surveys in Approximation Theory, **6** (2011), 24–74. pages 27, 46, 148, 177, 232, 246

[113] **Kopotun K., Shadrin A.**, On k-monotone approximation by free knot splines, SIAM J. Math. Anal., **34** (2003), 4, 901-924. pages 217, 219, 220

[114] **Leviatan D.**, Pointwise estimates for convex polynomial approximation, Proc. Amer. Math. Soc., **98** (1986), № 3, 471-474. pages 44, 45, 104, 135, 180, 279

[115] **Leviatan D.**, Shape-preserving approximation by polynomials, J. Comp. Appl. Math., **121** (2000), 73-94. pages 50

[116] **Leviatan D., Prymak A. V.**, On 3-monotone approximation by piecewise polynomials, J. Approx. Theory, **133** (2005), 2, 147-172. pages 217, 218, 219, 226, 233, 241

[117] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Counterexamples in convex and higher order constrained approximation, East J. Approx., **1** (1995), № 3, 391-398. pages 46

[118] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Nearly Comonotone Approximation, J. Approx. Theory, **95** (1998), 53-81. pages 87, 199, 244

[119] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Monotone approximation estimates involving the third modulus of smoothness, conf. Approximation theory IX, Vol. I., Nashville, TN, 1998, Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, 223-230. pages 36, 38, 39, 43

[120] **D. Leviatan and I. A. Shevchuk,** Some Positiwe Results and Counterexamples in Comonotone approximation, II J. Approx. Theory, **100** (1999), 113-143. pages 117

[121] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Constants in comonotone polynomial approximation - a survey, Proc. IDoMAT 1998, eds. M.W. Müller, M. Felten, D.H. Mache, International Series of Numer. Math., Birkhäuser Verlag, Basel **132** (1999), 145-158. pages 177

[122] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Nearly Comonotone Approximation II, Acta Sci. Math. (Szeged), **66** (2000), 115-135. pages 87, 199, 244

[123] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Coconvex approximation, J. Approx. Theory, **118** (2002), 20-65. pages 54, 55, 104, 106, 111, 124, 137, 143, 149, 150, 152, 163, 165, 166, 167, 168, 169, 180, 244, 281

[124] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Nearly coconvex approximation, Serdica Math. J. **28** (2002), 361-378. pages 182

[125] **Leviatan D., Shevchuk I. A.**, Coconvex polynomial approximation, J. Approx. Theory, **121** (2003), №1, 100-118. pages 36, 39, 137, 138, 143, 177, 179

[126] **Li W.**, On Timan type theorems in algebraic polynomial approximation, Chinese, Acta Math. Sinica, **29** (1986), №4, 544-549. pages 46

[127] **Lim K. P.**, Note on monotone approximation, Bull. London Math. Soc., **3** (1971), 366-368. pages 35

[128] **Lorentz G. G.**, Bernstein polynomials, Mathematical Expositions, no. 8, University of Toronto Press, Toronto, 1953, 130 p. pages 34

[129] **Lorentz G. G.**, Monotone approximation, conf. Inequalities, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, Calif., 1969; dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin), Academic Press, New York, 1972, 201-215. pages 34, 38, 39

[130] **Lorentz G. G., Zeller K. L.**, Degree of Approximation by Monotone Polynomials I, J. Approx. Theory, **1** (1968), 501-504. pages 34, 35, 38, 39, 43, 46, 60, 198, 243, 250, 279

[131] **Lorentz G. G., Zeller K. L.**, Degree of approximation by monotone polynomials. II, J. Approx. Theory, **2** (1969), 265-269. pages 34

[132] **Lorentz G. G., Zeller K. L.**, Monotone approximation by algebraic polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 1-18. pages 35

[133] **Lorentz R. A.**, Uniqueness of best approximation by monotone polynomials, J. Approx. Theory, **4** (1971), 401-418. pages 35

[134] **Marchaud A.**, Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, Math. Pures Appl. **6** (1927), 337-426. pages 53, 110

[135] **Murray K., Müller S., Turlach B. A.**, Fast and flexible methods for monotone polynomial fitting, Journal of Statistical Computation and Simulation, **86** (2016), 1-21. pages 47

[136] **Myers D.-C., Raymon L.**, Exact comonotone approximation, J. Approx. Theory, **24** (1978), 1, 35-50. pages 35

[137] **Newman D. J.**, Efficient co-monotone approximation, J. Approx. Theory, **25** (1979), 3, 189-192. pages 35

[138] **Newman D. J., Passow E., Raymon L.**, Piecewise monotone polynomial approximation, Trans. Amer. Math. Soc., **172** (1972), 465-472. pages 35

[139] **Nissim R., Yushchenko L. P.**, Negative result for nearly q-convex approximation, East J. Approx., **9** (2003), №2, 209-213. pages 39, 41

[140] **Passow E., Raymon L., Roulier, J. A.**, Comonotone polynomial approximation, J. Approx. Theory, **11** (1974), 221-224. pages 35

[141] **Passow E., Raymon L.**, Monotone and comonotone approximation, Proc. Amer. Math. Soc., **42** (1974), 390-394. pages 35

[142] **Passow E., Roulier J. A.**, Negative theorems on generalized convex approximation, Pacific J. Math., **65** (1976), 2, 437-447. pages 35

[143] **Pečarić J. E., Proschan F., Tong Y. L.**, Convex functions, partial orderings, and statistical applications, Mathematics in Science and Engineering, **187**, Academic Press Inc., Boston, MA, 1992, p. 467. pages 216

[144] **Pleshakov M. G.**, Comonotone Jackson's Inequality, J. Approx. Theory, **99** (1999), 409-421. pages 60, 62, 63, 64, 74, 89, 201

[145] **Pleshakov M. G., Shatalina A. V.**, Piecewise Coapproximation and the Whitney Inequality, J. Approx. Theory, **105** (2000), 189-210. pages 122, 123

[146] **Popov V., Sendov Bl.**, Approximation of monotone functions by monotone polynomials in Hausdorff metric, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation, **3** (1974), 1, 79-88. pages 35

[147] **Popoviciu T.**, Sur quelques propriétés des fonctiones d'une ou de deux variables réelles. Roclloa Mathematica, 1934. pp. 85. pages 234

[148] **Popoviciu T.**, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, Mathematica, **10** (1934), 49-54. pages 34

[149] **Popoviciu T.**, Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes dйfinies sur un nombre fini de points, Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **20** (1938), 196–198. pages 34

[150] **Prymak A. V.**, Three-convex approximation by quadratic spline with arbitrary fixed knots, East J. Approx., **8** (2002), 185-196. pages 232

[151] **Roberts A. W., Varberg D. E.**, Convex functions, Pure and Applied Mathematics, **57**, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973, p. 300. pages 216

[152] **Roulier J. A.**, Monotone approximation of certain classes of functions, J. Approx. Theory, **1** (1968), 319-324. pages 35

[153] **Roulier J. A.**, Linear operators invariant on nonnegative monotone functions, SIAM J. Numer. Anal., **8** (1971), 30-35. pages 35

[154] **Roulier J. A.**, Polynomials of best approximation which are monotone, J. Approx. Theory, **9** (1973), 212-217. pages 35

[155] **Roulier J. A.**, Some remarks on the degree of monotone approximation, J. Approx. Theory, **14** (1975), 3, 225-229. pages 35

[156] **Roulier J. A.**, Nearly monotone approximation, Proc. Amer. Math. Soc., **47** (1975), 1, 84-89. pages 35

[157] **Roulier J. A.**, Negative theorems on monotone approximation, Proc. Amer. Math. Soc., **55** (1976), 1, 37-43. pages 35

[158] **Russel D. L.**, Computing convex spline approximation, International Journal of Information and Systems Sciences, **5** (2006), № 1, 83-97. pages 47

[159] **Salem R.**, Sur certaines fonctions continues et les propriétés de leur séries de Fourier, Comptes R., **201** (1935), №17, 703-705. pages 30

[160] **Salem R.**, Essais sur les séries trigonométriques, Actualités scient. et industr., 1940, № 862, Paris, 1-85. pages 30

[161] **Shevchuk I. A.**, One example in monotone approximation, J. Approx. Theory, **86** (1996), № 3, 270-277. pages 46

[162] **Shevchuk I. A.**, One construction of cubic convex spline, Proceedings of ICAOR, **8** (1997), 357-368. pages 233

[163] **Shisha O.**, Monotone approximation, Pacific J. Math., **15** (1965), 667-671. pages 34

[164] **Tian D.-G., Huang Y.-Q.**, Computation of channel capacity based on self-concordant functions, Journal of Electrical and Computer Engineering, **2012** (2012), Article ID 318946, 9 p. pages 47

[165] **Vallée-Poussin Ch.-J.**, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, 1919, Paris, Gauthier-Villars. pages 29

[166] **Wang R.-H.**, Multivariate spline and algebraic geometry, Journal of Computational and Applied Mathematics, **121(1-2)** (September 2000):153-163. pages 47

[167] **Whitney H.**, On Functions with Bouded n-th Differences, J. Math. Pures Appl. **36** (1957), № 9, 67-95. pages 50, 51, 61, 71, 76, 87, 93, 183, 199, 202, 221, 224, 246, 251

[168] **Wu X., Zhou S. P.**, On a counterexample in monotone approximation, J. Approx. Theory, **69** (1992), № 2, 205-211. pages 36, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 262

[169] **Wu X., Zhou S. P.**, A counterexample in comonotone approximation in L^p space, Colloq. Math., **64** (1993), 265-274. pages 50, 104, 113, 124, 137, 143, 181, 182, 244, 274

[170] **Yu X. M.**, Pointwise estimates for convex polynomial approximation, Approx. Theory Appl., **1** (1985), № 4, 65-74. pages 48

[171] **Yu X. M.**, Pointwise estimate for algebraic polynomial approximation, Approx. Theory Appl., **1** (1985), №3, 109-114. pages 46

[172] **Yu X. M.**, Degree of comonotone polynomial approximation, Approx. Theory Appl., **4** (1988), № 3, 73-78. pages 50

[173] **Yushchenko L. P.**, On one counterexample in convex approximation, Ukr. Mat. Zh., **52** (2000), № 12, 1715-1721. pages 104, 181

[174] **Zeller K. L.**, Monotone approximation, conf. Approx. theory (Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., 1973), Academic Press, New York, 1973, 523-525. pages 35

[175] **Zhou S. P.**, A counterexample in copositive approximation, Israel J. Math., 78 (1992), 75-83. pages 244

[176] **Zhou S. P.**, On comonotone approximation by polynomials in L^p space, Analysis, **13** (1993), 363-376. pages 113, 137, 143, 181, 182, 262, 274

[177] **Zhou S. P.**, On copositive approximation, Approx. Theory and its Appl., **9** (1993), № 2, 104–110. pages 244

[178] **Zygmund A.**, Smooth functions, Duke Math. Journal, **12** (1945), № 1, 47-76. pages 28, 30, 60, 198