ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу Дзюбенка Германа Анатолійовича "Формозберігаюче наближення функцій", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. В багатьох галузях знань важливу роль грають задачі про наближення окремих функцій і класів функцій (насамперед гладких, з тими чи іншими типами обмежень на старшу похідну) за допомогою заданих підпросторів простіших функцій. Частіше за все, такими підпросторами є: множина алгебраїчних многочленів заданого степеня або ж (у періодичному випадку) множина тригонометричних поліномів заданого порядку або ж множини сплайнів (кусково-поліноміальних функцій) певного степеня та дефекту (тобто з певною кількістю неперервних похідних) з довільно або певно фіксованими вузлами. Ці підпростори стали класичними апаратами наближення завдяки, як відомо, їх простоті та принциповій можливості наблизити ними будь-яку неперервну функцію з будь-якою наперед заданою точністю. Однак в класичній теорій наближень ці апарати при наближенні функції (нажаль) не зберігають геометричні властивості, які функція може мати, такі, наприклад, як зміну знаку у певних точках, або зміну монотонності, або опуклості тощо (тобто вони осцілюють довілним чином, хоча і знаходяться близько до функції).

В дисертаційній роботі розв'язано задачі наближення функцій, які мають вказані геометричні властивості, апаратами наближення, які (на відміну від наближення без обмежень) ці властивості зберігають, тобто зберігають форму функції.

Мова йде про задачі побудови наближаючих апаратів наперед заданої форми і про оцінки похибки (формозберігаючого) наближення ними як класів функцій, заданих гладкістю, цією формою, кількістю точок її зміни, так і функцій, що мають цю форму, але зі значеннями, заданими лише на сітці а також функцій із спеціальним наближенням, коли розмірність апарата наближення залежить від функції (чим "гірша" функція, тим вища розмірність).

Ця теорія, тобто теория формозберігаючого наближення, у сучасному аналізі виступає окремим напрямком теорії наближень. Вона бере початок від робіт таких видатних математиків, як П. Л. Чебишев, С. Н. Бернштейн, Г. Г. Лоренц, К. Целлер, Р. ДеВор і активно досліджується понад 40 років в наукових центрах України, Канади, Франції, Ізраїлю, Норвегії та інш. Окрім важливого теоретичного значення, ця теорія має виражені прикладні перспективи, зокрема, у промисловому комп'ютерному дизайні (відповідні посилання на це містяться в дисертації на стор. 47). Крім цього, доволі цікаво з'ясувати, як сильно обмеження на форму наближаючого апарату впливатимуть на порядки наближень (зрозуміло, що вони не покращаться), які встановлені в класичній теорії наближення без обмежень в роботах Д. Джексона, Н.І. Ахієзера, А. Зігмунда, С.Б. Стєчкіна, С.М. Нікольського, В.К. Дзядика, А.Ф. Тимана, Г. Фройда, Ю.А. Брудного та ін. Відзначу, що в дисертації таке порів-

няння класичних оцінок з їх формозберігаючими аналогами теж зроблено.

Отже, тематика дисертаційної роботи важлива і актуальна.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертаційна робота, обсягом 308 сторінок машинописного тексту, складається з української та англійської анотацій, переліку публікацій здобувача (22 статті, 13 тез), змісту, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, п'яти висновків до розділів та списку використаних джерел (178 найменувань).

У вступі характерезується актуальність обраної теми дослідження, визначаються його мета, завдання, об'єкт і предмет роботи, зв'язок її з науковими темами Інституту математики НАН України. Вказано методи дослідження, основні результати, що виносяться на захист, і особистий внесок здобувача у спільні результати.

У першому розділі наведено огляд відомих результатів та робіт з класичної теорії наближення (без обмежень) алгебраїчними многочленами та тригонометричними поліномами (прямі і обернені теореми, конструктивні характеристики класів неперервних дійснозначних функцій тощо) та огляд робіт з формозберігаючого наближення за 1950-ті–80-ті роки. Огляд сучасних результатів формозберігаючого наближення перенесено автором на початки кожного підрозділу дисертації, що б означити місце серед них результатів, які отримані в дисертації.

Результати і висновки дисертації викладено у розділах 2-6. В цих розділах доведено оцінки похибок формозберігаючого наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами та сплайнами а також доведено контрприклади, які свідчать про те, що більшість отриманих оцінок є у певному розумінні остаточними, тобто їх неможливо покращити за порядком модуля гладкості та за характеорм сталих в них.

Відзначу ці результати більш детально. Нагадаю, що в рівномірній теорії наближень відстань між функцією і наближаючим її елементом (тобто похибка наближення) міряється або в кожній точці, або рівномірно (тобто оцінюється максимальне відхилення). В обох типах оцінок ця відстань не перевищує певної сталої помноженої на модуль гладкості функції (або її r-ї похідної) k-го порядку (тобто на різницеву величину з поточковим, або рівномірним кроком, яка, грубо кажучи, тим більша, чим "гірша" фінкція і тим "меньша" , чим більше k). Поточкові оцінки називаються оцінками типу Нікольського, а рівномірні – типу Джексона. В класичній теорії, поточкові оцінки Нікольського наближення без обмежень неперервних на відрізку функцій алгебраїчними многочленами встановлені А.Ф. Тіманом (для $k = 1$), В.К. Дзядиком ($k = 2$), Г. Фройдом ($k = 2$) та Ю.А. Брудним ($k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$), а рівномірні (тригонометричними поліномами на дійсній осі) – Д. Джексоном ($k = 1$), А. Зигмундом ($k = 2$), Н.І. Ахиєзером ($k = 2$) та С.Б. Стечкіним ($k \geq 3$).

Результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному.

У **розділі 2 Комонотонне наближення** доведено:

— інтерполяційний (на кінцях відрізку) аналог оцінки Нікольського з $k = 2$. В наближенні без обмежень такий аналог довели С.А. Теляковський з $k = 1$, И.Е. Гопенгауз теж з $k = 1$ і Р.А. ДеВор з $k = 2$, а Х.М. Ю та Х.-Ж. Венц, Х.Х. Гонска, Д. Левіатан, І.О. Шевчук вказали, що цей інтерполяційний аналог хибний з $k > 2$

навіть у наближенні без обмежень (де сама оцінка Нікольського справджується для всіх k). Див. підрозділ 2.1;

— для наближення періодичних функцій гладкості r доведено оцінку Джексона з $r = 0$ і $k = 2$, з $r = 1$ і $k = 3$, з $r \geq 2$ і $k \in \mathbb{N}$. Для всіх інших пар r і k, тобто для $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, вона хибна. Див. підрозділи 2.2 і 2.3. А завдяки послабленню умови комонотонності для наближаючого полінома в маленьких околах точок її зміни (тобто для майже комонотонного наближення), отримано оцінку Джексона з $r = 0$ і $k = 3$. Див. підрозділ 2.4.

У розділі 3 Коопукле наближення встановлено:

— інтерполяційний (на кінцях відрізку) аналог оцінки Нікольського з $k = 2$, який, як вже було відзначено, для більших k не справджується навіть у наближенні без обмежень. Див. підрозділ 3.1;

— для неперервних функцій з більше ніж однією точкою перегину доведено оцінку Нікольського з $k = 3$ (для $k > 3$ вона хибна), а для функцій з W^k (з абсолютно неперервними $k-1$-ми і обмеженими k-ми похідними) цю оцінку доведено для всіх $k \in \mathbb{N}$, тоді як для функцій з однією точкою перегину її встановлено лише зі сталою, що залежить від функції, і доведено, що неможливо позбутись такої залежності. Зауважу, що отримані оцінки для функцій з W^k це поточкові аналоги рівномірних оцінок А.Ф. Тімана наближення без обмежень. Див. підрозділи 3.2, 3.3, 3.6, відповідно;

— доведено всі ($k \in \mathbb{N}$) можливі оцінки Нікольського для функцій будь-якої скінченої гладкості многочленами і сплайнами (крім відомих і доведених в розділі 6 Контрприклади випадків, де такі оцінки не справджуються). Див. підрозділи 3.4–3.6;

— для майже коопуклого наближення (коли многочлен може не зберігати коопуклість функції в околах точок перегину) доведено оцінку Нікольського з $k = 4$ ногочленами і кубічними сплайнами. Відзначу, що ця оцінка хибна з $k > 4$, а для чисто коопуклого наближення вона хибна навіть з $k > 3$. Те саме зроблено і у періодичному випадку (тобто доведено оцінку Джексона з $k = 4$). Див. підрозділи 3.8 та 3.9.

У розділі 4 Три-монотонне наближення:

— для наближення 3-монотонної функції (тобто її 3-тя розділена різниця ≥ 0, або, що те саме, її похідна опукла) 3-монотонними сплайнами степеня $r \in \mathbb{N}$, мінімального дифекту з рівномірними та чебишевськими вузрами доведено дві рівномірні оцінки (з модулем гладкості Діціана-Тотіка, включно) з $k = 4$, які не тільки з $k > 4$ є хібні, а навіть їх поточковий аналог з $k = 4$ не справджується. Ці дві оцінки також не справджуються в $\mathrm{L}_p,\ p < \infty$, однак показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність контрольована на відміну від сплайнів з вільними вузлами. Див. підрозділ 4.1;

— також знайдено кубічний 3-монотонний сплайн з $n-1$ "майже" рівновіддаленими вузлами і з найкращим (за порядком) локальним наближенням, який є зручним для його комп'ютерного застосування. Див. підрозділ 4.2.

У розділі 5 Копозитивне наближення:

— для майже копозитивного наближення доведено оцінку Нікольського з $k \in \mathbb{N}$

(для чисто копозитивного наближення вона хибна з $k > 3$). Див. підрозділ 5.1.

— для чисто копозитивного наближення тригонометричними поліномами доведено оцінку Джексона з $k = 3$ (для $k > 3$ вона хибна). Див. підрозділ 5.2.

Також в дисертаційній роботі доведено низку контрприкладів **див. розділі 6** про нові явища у формозберігаючому наближенні, про неможливість півдвищення порядків в отриманих оцінках, про неможливість "покращення" характеру залежності сталих в них від основних параметрів, запропоновано нове представлення сплайнів з потенціалом чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі (див. Пропозицію 3.8.1) та запропоновано (див. (2.2.6) і (2.2.8)) строго додатнє тригонометричне ядро, у вигляді суми двох сусідніх ядер типу Джексона, яке виявилось незамінним для отримання оцінок у всіх тригонометричних випадках.

3. Обгрунтованість та достовірність результатів дисертації. Всі результати дисертації математично обгрунтовані та достовірні, викладені чіткою мовою з поясненями і коментарями, що значно спрощують сприйняття. Дисертація Г.А. Дзюбенка є завершеною (зважаючи, у тому числі, і на контрприклади) науковою працею високого рівня з послідовним і логічним викладенням матеріалу. Структура, обсяг та оформлення роботи відповідають вимогам, що висуваються до докторських дисертацій. В цілому, дисертація залишає приємне враження.

4. Апробація та практичне значення результатів. Результати дисертаційної роботи апробовані належним чином, а саме, багаторазово доповідались на семінарах і конференціях в Україні, Канаді, Франції, Іспанії.

Отримані в роботі результати та розроблені методи мають теоретичний характер і можуть знайти застосування при розв'язанні задач у математичному аналізі, математичній фізиці та обчислювальній математиці. Відзначу також, що певні конструкції і деякі представлення наближаючих елементів, знайдені в роботі, можуть слугувати основою для їх чисельної реалізації.

5. Публікації. За результатами досліджень здобувачем опубліковано 22 наукові статті у фахових виданнях, 12 з яких опубліковано у співавторстві і 10 самостійно. З 22 статей 18 опубліковано у виданнях, які внесені до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science. За результами дисертації також опубліковано 13 тез у збірниках тез міжнародних конференцій в Україні та за кордоном. Вказані публікації відповідають темі дисертаційного дослідження і автореферат повною мірою відображає його положення.

5. Зауваження та побажання:

— доцільно було б на початку дисертації пояснити, в якому сенсі використовується словосполучення "точні (за порядком) оцінки". Уточнення цього словосполучення в явному вигляді міститься лише в авторефераті – це "непокращувані (за порядком k модуля гладкості) оцінки";

— з Зауваження 4.2.2 не зрозуміло якою насправді є умова на розбиття X_n, тобто цю умову не виписано у явному вигляді, хоча це цілком можливо;

— стор. 211_4, включення $P_n \in \mathbb{T}_{cn}$ дійсно перевіряється аналогічно до арифметичних підрахунків наведених на сторінках 100–102, однак варто було б його навести хоча б тезісно;

— у підрозділах 4.1 і 6.5 і тільки в них змінено позначення: k-й порядок модуля

гладкості стає m-м, а q-монотонність стає k-монотонністю, щоб, як зазначає здобувач, не порушувати стиль першоджерела, тобто його статті, але ця мета не здається переконливою.

6. ВИСНОВОК. Не зважаючи на зроблені зауваження, всі одержані в дисертації результати є правильними і обгрунтованими.

Вважаю, що дисертація Г.А. Дзюбенка "Формозберігаюче наближення функцій" задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів" , затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненями, внесеними згідно з постановами КМ України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Дзюбенко Герман Анатолійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Професор кафедри економічної кібернетики
та інформатики Тернопільського національного
економічного університету
доктор фіз.-мат. наук, професор **Д.І. Боднар**

Підпис Д.І. Боднара

Завіряю:
Зав.загальним відділом Тарановська Т.В.