**Відгук**

офіційного опонента на дисертаційну роботу Дзюбенка Германа Анатолійовича *"Формозберігаюче наближення функцій"*, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, 111 – математика

Дисертаційна работа присвячена формозберігаючому наближенню, а саме, наближенню дійснозначних кусково-монотонних (кусково-опуклих тощо) функцій алгебраїчними та тригонометричними поліномами та сплайнами, які зберігають ці кускові властивості функцій.

Ця тематика бере початок від робіт П.Л. Чебишева, С.Н. Бернштейна, Г.Г. Лоренца, К. Целлера, Р. ДеВора та ін., активно розвивається як в Україні так і за кордоном. Крім теоретичного значення для сучасного математичного аналізу, має не менш важливий прикладний характер. Наприклад, у комп'ютерному дизайні, де деякі результати з цієї тематики вже використовуються.

В дисертації доведено ряд оцінок похибок формозберігаючого наближення, які відносяться до основних оцінок в цій теорії і взагалі в будь-якому наближенні. Вони за своїм змістом та виглядом є повними аналогами класичних оцінок наближення без обмежень, які встановлені Д. Джексоном, Н.І. Ахієзером, С.М. Нікольським, А. Зігмундом, С.Б. Стєчкіним, В.К. Дзядиком, А.Ф. Тиманом, Г. Фройдом, Ю.А. Брудним, І.Е. Гопенгаузом та Р.А. ДеВором. При цьому, в дисертації не просто наближаються функції зі збереженням їх форми, а, як і в класичній теорії наближення без обмежень, вони наближаються у певному розумінні найкращим чином. А саме, побудавано контрприклади (***розділ 6***), які вказують на неможливість покращення більшості отриманих в дисертації оцінок за основними параметрами. Це також свідчить на користь завершеності дисертації, як наукової праці високого рівня і, безумовно, посилює позитивне враження від неї .

Дисертація обсягом 308 сторінок складається з анотації, вступу, шести розділів і списку використаних джерел. У вступі обгрунтовується актуальність теми дослідження, визначається його предмет і мета, окреслюються методи, що використовуються для розв'язання задач і формулюються ре-

зультати роботи. Також підкреслюється наукова новизна отриманих результатів, наводяться публікації здобувача і характеризується особистий внесок автора у спільні результати.

У ***першому розділі*** роботи проводиться огляд досягнень конструктивної теорії наближень без обмежень і огляд перших результатів формозберігаючого наближення. В цьому розділі приведено ряд таблиць з яких видно в яких випадках результати, що стосуються формозберігаючого наближення одержані, а в яких задачі формозберігаючого наближення залишаються не розв'язаними.

***Другий розділ*** дисертаційної роботи присвячено комонотонному (тобто кусково-монотонному) наближенню. Для цього типу наближення отримано чотири основні результати.

В теоремі 2.1.1 доведено інтерполяційний в кінцях відрізку аналог оцінки С.М. Нікольського другого порядку ($k = 2$), тобто аналог оцінок С.О.Тєляковського ($k = 1$), І.Є.Гопенгауза ($k = 1$) та Р.А.ДеВора ($k = 2$) класичного наближення без обмежень. Відзначу, що для більших порядків він хибний навіть у наближенні без обмежень (Х.М.Ю, Х.Венц, Х.Х.Гонски, Д.Левіатан, І.О.Шевчук), а для просто монотонного наближення на всьому відрізку цей результат належить Р.А.ДеВору та Х.М.Ю.

В теоремах 2.2.1 та 2.3.1 у комонотонному наближенні періодичних функцій гладкості $r$ і $k$-м модулем гладкості ($r$-ї похідної) доведено оцінку Джексона з $r = 0,\ k = 2$ та з $r = 1,\ k = 3$ і з $r \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$, відповідно. Це комонотонні аналоги класичних оцінок наближення без обмежень Д.Джексона, А.Зігмунда, Н.І.Ахієзєра та С.Б.Стєчкіна. Для всіх інших пар, тобто для $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, такі оцінки не мають місця. Це встановлено в теоремі 6.2.1, однак, в теоремі 2.4.1, шляхом послаблення умови комонотонності для наближаючого полінома в околах точок її зміни, цю оцінку доведено для $r = 0,\ k = 3$. Це так зване майже комонотонне наближення.

***Третій розділ*** роботи присвячено коопуклому наближенню.

В теоремі 3.1.1 доведено інтерполяційний в кінцях відрізку аналог оцінки С.М.Нікольського другого порядку, який, як вже зазначалось, для більших порядків хибний навіть у наближенні без обмежень. Для просто опуклого наближення на всьому відрізку цей результат належить Д.Левіатану.

В теоремі 3.2.1 для коопуклого наближення неперервних на відрізку фун-

кцій з більш ніж однією точкою перегину доведено оцінку С.М.Нікольського третього порядку. Це коопуклий аналог оцінки Ю.А.Брудного наближення без обмежень, а для більших порядків не справджується навіть його рівномірний аналог (Х.Ву, С.П.Цу). В теоремі 3.3.1 для функцій з класу С.Л.Соболєва $W^r$ цю оцінку доведено для всіх $r$, в той час як для функцій з однією точкою перегину її в теоремі 3.6.1 (див. також 3.4.3) встановлено лише зі сталою, що залежить від розташування цієї точки, і в теоремі 6.3.1 доведено, що позбутись такої залежності неможливо.

В теоремах 3.4.2, 3.5.1 та 3.4.3, 3.5.2 для коопуклого наближення сплайнами та, відповідно, многочленами встановлено всі можливі, тобто крім відомих і доведених в теоремах 6.3.1 та 6.3.3 неможливих випадків, оцінки С.М.Нікольського для функцій скінченної гладкості з однією точкою перегину і для просто неперервних функцій з багатьма точками перегину. В підрозділі 3.7 представлено порівняння цих поточкових оцінок з їх рівномірними аналогами. Зауважу, що відповідні оцінки в наближенні без обмежень доведені А.Ф.Тіманом, В.К.Дзядиком, Г.Фройдом та Ю.А.Брудним.

В теоремах 3.8.1 та 3.9.1 для майже коопуклого наближення многочленами та, відповідно, поліномами доведено оцінки відхилень поліномів через модулі неперервності четвертого порядку, які є аналогами оцінок Ю.А.Брудного та С.Б.Стєчкіна. При цьому, перша оцінка хибна вже для модуля неперервності п'ятого порядку (Д.Левіатан, І.А.Шевчук), а для "чисто" коопуклого наближення обидві оцінки хибні для модуля неперервності четвертого порядку (Х.Ву, С.П.Цу та В.Д.Залізко). Ці оцінки є поточковим та, відповідно, тригонометричним аналогом рівномірного результату Д.Левіатана і І.О.Шевчука.

***Четвертий розділ*** присвячено 3-монотонному (тобто функції мають опуклі на відрізку похідні) наближенню сплайнами.

В теоремах 4.1.3 та 4.1.4 знайдено 3-монотонні сплайни степеня $r \geq 3$ мінімального дефекту з рівномірними та чебишевськими вузлами, що задовольняють рівномірні оцінки із звичайним модулем гладкості четвертого порядку та з модулем гладкості Діціана-Тотіка четвертого порядку, які для п'ятого порядку вже хибні (див. теорему 6.5.1). Ці дві оцінки також не справджуються в інтегральних метриках $L_p$, $p < \infty$ навіть з третім модулем гладкості (В.М.Коновалов, Д.Левіатан а також А.В.Бондаренко, А.В.Примак), однак

в теоремі 4.1.1 показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність контрольована, тобто вузли, на відміну від сплайнів з вільними вузлами, не можуть злипатися. Зауважу також, що це був єдиний недоведений випадок в оцінках типу Д.Джексона для 3-монотонного наближення сплайнами з рівномірними та чебишевськими вузлами.

В теоремі 4.2.1 знайдено кубічний 3-монотонний сплайн з "майже" рівновіддаленими вузлами і з найкращим за порядком локальним наближенням. На відміну від сплайна з теореми 4.1.1, він більш простий, представлений сумою зрізаних степеневих функцій, а отже більш придатний для програмування.

***П'ятий розділ*** роботи присвячений копозитивному наближенню.

В теоремі 5.1.2 для майже копозитивного наближення неперервних на відрізку функцій доведено оцінку С.М.Нікольського довільного порядку. Для "чисто" копозитивного наближення вона хибна вже для четвертого порядку (С.П.Цу). Цікаво відзначити, що на відміну від комонотонного і коопуклого випадків, де послаблення на форму многочленів не дає більше одного додаткового порядку наближення, порядок майже копозитивного наближення зріс до довільного, як у наближенні без обмежень.

В теоремі 5.2.1 для "чисто" копозитивного наближення неперервних періодичних функцій доведено оцінку Джексона-Стєчкіна третього порядку. Зауважу, що для більших порядків вона хибна (П.А.Попов), раніше М.Г.Плєшаков і П.А.Попов довели її з першим порядком і вона є тригонометричним аналогом алгебраїчної оцінки К.А.Копотуна.

Дисертаційна робота Г.А. Дзюбенка виконана на високому науковому рівні. Результати роботи є новими, математично обгрунтованими, з правильними і повними доведеннями. Всі означення і твердження дисертації викладені чітко, логічно і послідовно.

Результати дисертаційної роботи представлені у 22-ох наукових статтях здобувача. Кожен підрозділ роботи починається словами "матеріали цього підрозділу містяться в" і йде посилання на статтю чи дві статті автора. Всі 22 статті опубліковано у фахових виданнях з фізико-математичних наук, 12 – у співавторстві і 10 – самостійно, з них 18 статей опубліковано у виданнях, що відносяться до міжнародних наукометричних баз Scopus. Отримані

результати апробовані, багаторазово доповідались на фахових семінарах в університетах та наукових центрах України, Франції, Канади та ін. Також результати представлялись на 13 міжнародних конференціях з публікацією тез. Автореферат повністю відображає результати дисертації.

Дисертація Г.А. Дзюбенка є завершеною науковою працею, яка містить важливі результати теоретичного характеру. Отримані результати та розроблені в ній методи можуть знайти застосування при розв'язанні задач в багатьох напрямках сучасного аналізу і суміжних галузях знань. Крім того, деякі знайдені в дисертації конструкції наближаючих елементів мають хорошу перспективу комп'ютерного застосування.

Деякі зауваження до роботи.

1) В дисертації однакові об'єкти позначаються по різному, наприклад, простори неперервних, а також диференційовних на відрізку і на дійсній осі функцій позначаються по різному навіть в сусідніх підрозділах, де йдеться про один і той же простір, а наприклад, многочлени і поліноми позначаються однаково. Крім того, певні літери в математиці зарезервовані за устояними об'єктами, наприклад, $T_n$ велика це многочлени Чебишева, однак здобувач не звертає на це увагу і використовує цю літеру для своїх позначень.

2) Досить несподівано було зустріти зміну вже усталених в дисертації двох принципових позначень лише в одному підрозділі 4.1 (і, частково, в 6.5). Хоча матеріал цього підрозділу дещо громіздкий і привести позначення до загально дисертаційних без помилок – не механічна робота, її варто було б зробити.

3) Немає означення модуля гладкості Діціана-Тотіка, який поряд із звичайним модулем, теж є основною величеною виміру похибок наближення в дисертації.

4) У доведенні нерівностей (3.6.50) і (3.6.51) леми 3.6.12 використовується нерівність з роботи І.О. Шевчука і Д. Левіатана, однак вона не наводиться, є тільки посилання на неї, також в доведенні леми 3.6.13 наведено лише відмінності її доведення від леми з тієї ж роботи, таке викладення ускладнює сприйняття. Там же, сторінки $167^{6,9}$ і $168^{4}$, не зрозуміло про яку лему йдеться 17, чи 18.

5) Не зрозуміло чому одна і та сама стаття автора опублікована в двох різних номерах "Математических заметок" і хоча автор не рахує другу пу-

блікацію, як таку, що подається на захист, позначає ці публікації як [9] і [9a], думаю, це слід пояснити.

Вказані зауваження не мають принципового значення, не впливають на обгрунтованість і цінність результатів і не зменьшують позитивне враження від роботи в цілому.

Вважаю, що дисертація **"Формозберігаюче наближення функцій"** задовольняє всі вимоги пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненями, внесеними згідно з постановами КМ України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, **Дзюбенко Герман Анатолійович**, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Професор кафедри математичного
аналізу та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету
Національного технічного університету
України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського",
доктор фізико-математичних наук, професор П. В. Задерей

Вчений секретар Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського" А. А. Мельниченко