ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертаційну роботу Дзюбенка Германа Анатолійовича
"Формозберігаюче наближення функцій",
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, 111 - математика

1. Актуальність теми дослідження. Дисертаційну роботу присвячено актуальному напрямку сучасного математичного аналізу – теорії формозберігаючого наближення.

Під формозбереженням розуміється наявність однакових геометричних властивостей (кускова-монотонність/опуклість/тощо) у функції, а також у наближаючого її елемента (полінома/сплайна).

Більше 30 авторів з різних країн, серед яких Г.Г. Лоренц, К.Л. Целлер, Р.А. Де-Вор, Д. Левиатан, Д.Ж. Ньюман, Е. Пассов, Л. Раймон, Ж.А. Рулье, В.М. Коновалов, І.А. Шевчук та ін., понад 40 років розвивають цей окремий напрямок наближення паралельно до класичної теорії наближень (без обмежень) К. Вейєрштрасса, П.Л. Чебишева, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, Н.І. Ахієзера, А. Зігмунда, С.Б. Стєчкіна, С.М. Нікольського, В.К. Дзядика, Г. Фройда, М.П. Корнейчука, О.І. Степанця та ін.

2. Стисло про результати дисертації. В дисертації розв'язано низку важливих задач, а саме, доведено класичні за виглядом оцінки похибок формозберігаючого наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами та сплайнами на відрізку і на дійсній осі, описано місце цих оцінок серед інших досягнень у формозберігаючому наближенні та в класичній теорії наближення без обмежень, а також доведено приклади про неможливість покращення цих оцінок (за порядком модуля гладкості, у термінах якого вони виражені, та за характерорм залежності сталих в цих оцінках від основних параметрів), тобто розв'язки цих задач мають переважно завершений характер.

3. Зміст, наукова новизна результатів, ступінь їх обгрунтованості та достовірності. Дисертація складається з двох анотацій (українською та англійською), списку публікацій здобувача, змісту, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, п'ять з яких мають висновки, та зі списку літератури, що містить 178 використаних джерел. Обсяг дисертації становить 308 сторінок машинописного тексту.

У **вступі** обгрунтована актуальність тематики дослідження, вказана його мета, завдання і зв'язок з науковими темами, що виконуються в Інституті математики НАН України, де дисертація готувалася, підкреслена наукова новизна отриманих

результатів, їх практичне значення, вказано особистий внесок здобувача, апробацію результатів дисертації тощо.

У **першому розділі** зроблено стислий огляд результатів, стосовно класичного (без обмежень) наближення поліномами дійснозначних функцій на відрізку та періодичних функцій на дійсній осі та їх формозберігаючого наближення за останні тридцять-сорок років.

Всі результати дисертації є новими, математично обгрунтованими та достовірними. Вони полягають у такому.

У **розділі 2**, який присв'ячено кусково-монотонному (або **комонотонному**) наближенню, доведено:

1. Якщо неперервна на відрізку функція змінює свою монотонність в кожній з $s \in \mathbb{N}$ точок y_i (тобто вона не зростає на $[y_2, y_1]$, не спадає на $[y_3, y_2]$ і т.д.), то для кожного натурального n, більшого деякої сталої, що залежить тільки від розташування y_i-х, існує алгебраїчний многочлен степеня $\leq n$, який теж змінює свою монотонність в точках y_i, як f, і який задовольняє інтерполяційний (на кінцях відрізку) аналог оцінки С.М. Нікольського другого порядку ($k = 2$) (більш точно, це аналог оцінок, одержаних С.А. Теляковським ($k = 1$), И.Е. Гопенгаузом ($k = 1$) та Р.А. Де Вором ($k = 2$) для класичного наближення без обмежень). При цьому для більших порядків цей аналог вже хибний навіть у наближенні без обмежень, що встановлено Х.М. Ю і Х.-Ж. Венцом, Х.Х. Гонски, Д. Левиатаном та І.А. Шевчуком, а для випадку $s = 0$ (коли функція і многочлен просто монотонні на всьому відрізку) такий аналог належить Р.А. Де Вору і Х.М. Ю (див. підрозділ 2.1);

2. У періодичному випадку, тобто коли на дійсній осі 2π-періодична функція гладкості r змінює свою монотонність в кожній з $2s$ точок $y_i \in [-\pi, \pi)$, а також в точках, які поза $[-\pi, \pi)$ визначена періодично, встановлено комонотонний аналог так званої нерівності Джексона-Зігмунда-Ахієзера-Стєчкіна з k-м модулем гладкості r-ї похідної з $r = 0,\ k = 2$, з $r = 1,\ k = 3$ та з $r \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$ (див. підрозділи 2.2 і 2.3). Для всіх інших пар, тобто $r = 0,\ k > 2$ та $r = 1,\ k > 3$, цей аналог хибний, що встановлено у підрозділі 6.2 розділу Контрприклади. Крім цього, для просто неперервної функції ($r = 0$) шляхом послаблення умови комонотонності для наближаючого її полінома в маленьких околах точок y_i, автору вдалося збільшити порядок наближення на одиницю, тобто отримати оцінку типу Джексона з $r = 0,\ k = 3$, це так зване майже комонотонне наближення (див. підрозділ 2.4).

3. Автором запропоновано нове строго додатне поліноміальне ядро, у вигляді суми двох послідовних ядер типу Джексона і описано його властивості. Використання цього ядра уможливило доведення в дисертації всіх оцінок похибок

формозберігаючого наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами (див. означення (2.2.6) і (2.2.8)).

У **розділі 3**, який присвячено кусково-опуклому (або **коопуклому**) наближенню, доведено:

1. Якщо неперервна на відрізку функція змінює свою опуклість в кожній з $s \in \mathbb{N}$ точок y_i (тобто вона опукла вгору на $[y_2, y_1]$, опукла до низу на $[y_3, y_2]$ і т.д.), то для кожного натурального n, більшого деякої сталої, яка залежить тільки від y_i-х (або тільки від y_i-х і гладкості цієї функції r) існують три алгебраїчні многочлени степеня $\leq n$, які теж змінюють свою опуклість в точках y_i, як f, і при цьому наближають цю функцію: з інтерполяційним (на кінцях відрізку) аналогом оцінки другого порядку, а якщо функція має більш ніж одну точку перегину, то – з оцінкою третього порядку типу С.М.Нікольського. Якщо ж функція ще й з класу Соболєва (тобто з абсолютно неперервною $r-1$-шою і обмеженою r-ою похідною), то – з оцінкою типу С.М. Нікольського для всіх $r \in \mathbb{N}$ (у цьому випадку оцінка типу С.М. Нікольського перетворюється на поточковий аналог оцінки, отриманої А.Ф. Тіманом), див. підрозділи 3.1–3.3, відповідно. Відзначу, що для більших порядків перша оцінка, як зазначалося вище, не справджується навіть у наближенні без обмежень, а для другої не справджуються навіть її рівномірний аналог, що було встановлено Х. Ву і С.П. Цу. У підрозділі 3.6, для функцій з класу Соболєва і з однією точкою перегину теж встановлено поточковий аналог відповідної оцінки, одержаної А.Ф. Тіманом, для всіх r, але зі сталою в оцінці, яка залежить від розташування цієї точки (чим вона далі від кінця відрізку, тим більша стала). Крім того доведено, що позбутися такої залежності неможливо (див. підрозділ 6.3 розділу Контрприклади).

2. У підрозділах 3.4 – 3.6 встановлено всі можливі (тобто, крім відомих і доведених в розділі 6 Контрприклади неможливих випадків) поточкові оцінки типу С.М. Нікольського коопуклого наближення сплайнами та многочленами функцій будь-якої скінченної гладкості з однією точкою перегину і просто неперервних функцій з багатьма точками перегину. Відзначу, що ці оцінки в наближенні без обмежень були доведені А.Ф. Тіманом, В.К. Дзядиком, Г. Фройдом та Ю.А. Брудним.

3. У підрозділі 3.7 зроблено важливий огляд та наочне (табличне) порівняння отриманих в дисертації поточкових оцінок з їх рівномірними аналогами, які отримані іншими авторами і які, нагадаю, є наслідками поточкових оцінок.

4. У підрозділах 3.8 та 3.9 для майже коопуклого наближення многочленами (і кубічними сплайнами) та, відповідно, поліномами (тобто, коли сплайн/поліном може не зберігати коопуклість функції в "маленьких" околах точок перегину)

доведено оцінки типу Ю.А. Брудного та типу С.Б. Стєчкіна четвертого порядку (вже з модулем гладкості п'ятого порядку перша з них хибна навіть у рівномірному наближенні многочленами, що доведено Д. Левіатаном і І.О. Шевчуком). Ці дві оцінки є поточковим і, відповідно, тригонометричним аналогом рівномірного алгебраїчного результату Д. Левіатана і І.О. Шевчука.

5. Автором знайдено (див. пропозицію 3.8.1) зручне зображення (у вигляді суми зрізаних степеневих функцій простої форми) сплайнів, що складаються зі шматочків многочленів Лагранжа (а отже, з найкращим порядком локального наближення і з інтерполяцією в точках розбиття). Спираючись на модифікації цього зображення, в дисертації доведено цілий ряд оцінок (Теореми 3.2.2, 3.8.2, 3.9.1, 4.2.1 та 5.2.1). З огляду на цей факт, використання цього зображення можна розглядати як новий метод теорії формозберігаючого наближення. Також, це зображення та його формозберігаючі модифікації, побудовані в роботі, мають хороший потенціал чисельної реалізації зі швидкодією у реальному часі.

У **розділі 4**, який присвячено **три-монотонному** наближенню сплайнами, доведено:

1. У підрозділі 4.1 для $r \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ і будь-якої 3-монотонної на відрізку функції (тобто функції, у якої 3-я розділена різниця для всіх наборів з 4-ох різних точок відрізку невід'ємна або, що еквівалентно, функція має опуклу похідну) знайдено два сплайни степеня r, мінімального дефекту (тобто з $r-1$-шою неперервною похідною) з $n-1$ рівновіддаленими і, відповідно, чебишевскими вузлами, які теж є 3-монотонними (як і функція) і які задовольняють дві рівномірні оцінки: оцінку типу Д. Джексона (див. Теорема 4.1.3) і, відповідно, оцінку з модулем гладкості типу Діціана-Тотіка (див. Теорема 4.1.3). Обидві оцінки четвертого порядку. Зазначу, що ці оцінки стають хибними вже для п'ятого порядку (див. підрозділ 6.5 у розділі Контрприклади), і вони не справджуються в інтегральних метриках L_p, $p < \infty$ (навіть з третім порядком модуля гладкості), що доведено В.М. Коноваловим та Д. Левіатаном, а також А.В. Бондаренком та А.В. Примаком, однак в цьому підрозділі показано, що вони можуть справджуватися, якщо дозволити вузлам сплайну залежати від функції і ця залежність, на відміну від сплайнів з вільними вузлами, контрольована (тобто вузли не злипаються). Ці оцінки дають ствердну відповідь на питання Д. Левіатана і А.В. Примака про єдиний недоведений випадок в оцінках типу Д. Джексона для 3-монотонного наближення сплайнами з рівномірними та чебишевськими вузлами. Їх доведення спираються на знайдений кубічний сплайн 3-монотонного локального наближення з "правильними" вузлами (що втім можуть залежити від f) і з локальною оцінкою в L_p, $0 < p \leq \infty$, з модулем гладкості четвертого порядку (див. Теорема 4.1.1).

2. У підрозділі 4.2 знайдено кубічний 3-монотонний сплайн з $n-1$ "майже" рівновіддаленими вузлами і з найкращим (за порядком) локальним наближенням в рівномірній метриці, який, на відміну від вище вказаного, є більш простим і більш придатним для побудови відповідного многочлена або чисельної реалізації.

У **розділі 5**, який присвячено кусково-позитивному (або **копозитивному**) наближенню, доведено:

1. Якщо неперервна на відрізку функція змінює свій знак в s точках y_i (тобто на $[y_i, y_{i-1}]$ вона невід'ємна, якщо i непарне і – недодатня, якщо i парне), то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше деякої сталої, яка залежить тільки від $k \in \mathbb{N}$ і y_i-х, знайдено алгебраїчний многочлен степеня $\leq 4n$, що має скрізь той самий знак, що і функція, за винятком, можливо, маленьких околів точок y_i (тобто, це так зване майже копозитивне наближення) і який задовольняє оцінку типу С.М. Нікольського з модулем гладкості довільного порядку (див. підрозділ 5.1). Відзначу, що для "чисто" копозитивного наближення С.П. Цу доведено, що така оцінка хибна вже з четвертим порядком.

2. У періодичному випадку для "чисто" копозитивного наближення доведено оцінку типу Д. Джексона з модулем гладкості третього порядку (див. підрозділ 5.2). Для більших порядків вона хибна, що встановлено П.А. Поповим. Доведена оцінка посилює результат М.Г. Плєшакова і П.А. Попова з (першим) модулем неперервності (тобто відразу на два порядки) і є тригонометричним аналогом алгебраїчної оцінки К.А. Копотуна.

У **розділі 6** доведено ряд контрприкладів, які свідчать про неможливість підвищення порядків в оцінках, що отримані в дисертації, про неможливість "покращення" залежності сталих в них від основних параметрів та про нові явища у формозберігаючому наближенні.

4. Публікації, апробація та практичне значення результатів. Результати дисертації опубліковано у 22-х статтях у фахових виданнях з фізико-математичних наук, 12 статей опубліковано у співавторстві і 10 – самостійно, з 22-х статей 18 опубліковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз (Scopus, Web of Science). Результати дисертації також опубліковано у 13 тезах доповідей міжнародних конференцій. Всі публікації відповідають темі дисертації. Автореферат повністю відображає результати дисертації. Результати роботи гарно апробовані, доповідались на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України та багаторазово на семінарах і конференціях в Україні та за кордоном. Результати дисертації мають теоретичний характер, вагомо поповнюють теорію наближень, можуть бути

використані в дослідженнях з математичного аналізу, математичної фізики та обчислювальної математики. Деякі побудовані в дисертації наближаючі елементи також можуть бути комп'ютерно реалізовані.

Структура, обсяг та оформлення дисертації відповідає рівню і вимогам, що висуваються до докторських дисертацій. Дисертація Г.А. Дзюбенка є завершеною науковою працею з актуальної і цікавої тематики, написана лаконічно з логічним і послідовним представленням її положень.

5. Зауваження.

1. В дисертації використовуються різні позначення для одних і тих же величин, і однакові позначення для різних величин, зокрема: простори $C := C[-1,1] := C^\infty[-1,1] := C(I) := C_{[-1,1]} := C_I$, $C :=: C([-\pi,\pi]) := C_{[-\pi,\pi]}$, $C^r := C^{(r)} := ...$ (по всій дисертації); многочлени і поліноми $P_n(x) := a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, $P_n(x) := t_n(x) := a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ (стор. 48^7, 104^{12}... 60^8, 198^5, 250_7, 266_9, 287_{11}); величини $\omega_k(f,t) := \omega_k(f,t,[a,b] := \omega_k(f,t,[-1,1])_\infty$, $\omega_k(f,t,[-1,1])_p$ і $\omega_k(f,t) := \omega_k(f,t,\mathbb{R})$ (по всій дисертації). Хоча з контексту зрозуміло про що йдеться, така неузгодженість не додає чіткості. Також, модуль неперервності і модуль гладкості k-го порядку здобувач називає довільно: "k-й модуль" , "k-й модуль неперервності" тощо; це ж відноситься і до оцінок – вони і "типу Нікольського", "типу Джексона" і просто "оцінки Нікольського/Джексона/Брудного" тощо.

2. На стор. 19^{17} у визначенні норми пропущено знак модуля.

3. З доведення Теореми 2.1.2 не зовсім зрозуміло чому в множину Y добавлено точки ± 1 (див. означення Y^* на стор. 54^{11}) і змінено множину O на O^* (див., зокрема, нерівність (2.1.32)). На мою думку, цього можна було б не робити.

4. На стор. 57_8 посилання (35) потрібно замінити на (2.1.44).

5. На стор. 72_7 пропущено підінтегральний вираз.

6. Включення (3.8.3) $S_n(x) \in \Delta^{(2)}(Y)$, $x \in (-1,1) \setminus O_n(c,Y)$, треба замінити нерівністю $S_n''(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in (-1,1) \setminus \{O_n(c,Y) \cup \{x_j\}\}$.

7. Посилання [?2115] на сторінках 54, 55 і 124 треба виправити на [103], як у відповідних статтях здобувача.

8. У тексті наявні граматичні помилки і описки, зокрема: стор. 3_{12} (вузлами); стор. 28^5 (пропущено слово "число"); стор. 30^3 (Стєчкін); стор. 30_9 (забезпечують); стор. 42_1 (пропущено кому); стор. 50_6 ("if"потрібно замінити на "якщо"); стор. 56_4 (частина, позначимо) та інш.

Наведені зауваження не впливають на загальне позитивне враження і оцінку дисертаційної роботи. Достовірність отриманих автором результатів не викликає сумніву.

6. Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота "Формозберігаюче наближення функцій" задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12 – 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМ України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Дзюбенко Герман Анатолійович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Проректор із науково-педагогічної
роботи ДВНЗ "Донбаський державний
педагогічний університет",
доктор фіз.-мат. наук, доцент С.О. Чайченко