НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Дворак Інна Ярославівна

УДК 517.5

МЕТОД СИМЕТРИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
БАХТІН Олександр Костянтинович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», м. Київ,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
фізико-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
СЕВОСТЬЯНОВ Євген Олександрович,
Житомирський державний університет
імені Івана Франка, м. Житомир,
професор кафедри математичного аналізу
фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться "10" вересня 2019 року о 15.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "5" серпня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Відомо, що метод симетризації відіграє значну роль при вирішенні задач геометричної теорії функції комплексної змінної і має дуже давню історію.

Перші дослідження методу симетризації в геометрії й аналізі на початку 19 століття виконав Я. Штейнером. Пізніше на початку 20 століття широке застосування методу симетризації в геометричній теорії функції здійснено в роботах Г.Г. Харді і Д.І. Літтвуда[1], Г. Поліа і Г. Сеге[2], В.К. Хеймана[3], Дж.А. Дженкінса[4], М. Маркуса[5], А. Бернстайна[6], І.П. Мітюка[7], П.М. Тамразова[8], А.Ю. Солиніна[1], В.М. Дубініна[9], В.А. Шлика[1] та ін.

Варто відзначити, що в ранніх роботах симетризаційні методи потребували індивідуального пристосування до кожної задачі, що створювало значні труднощі при застосуванні цих методів.

Наприкінці 70-х років В.М. Дубінін розробив новий на той час симетризаційний метод розділяючого перетворення, який покращив можливості дослідження різноманітних задач [10]. Варто відзначити, що симетризаційний метод дав змогу отримати такі результати, які іншими методами геометричної теорії функції (метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, варіаційний метод, параметричний метод)

[1] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

[2] Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.

[3] Хейман В.К. Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

[4] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр.лит., 1962.—256с.

[5] Marcus M. Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions / / Pasif. J. math. 1964. V. 14. №2. P. 613-626.

[6] Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization / / Acta math. 1974. V. 133. №3-4. P. 139-169.

[7] Митюк И.П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1980.

[8] Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.

[9] Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.

[10] Дубинин В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 24 – 31.

отримати не вдається. Метод розділяючого перетворення базується на вивченні поведінки інтеграла Діріхле при деяких симетризаційних перетвореннях.

Дисертаційна робота присвячена класичному розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме, дослідженню екстремальних задач для неперетинних і частково перетинних областей.

До кінця 70-х років минулого століття більшість цих задач розглядалась як задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Цими задачами в різні часи займалися М.А. Лаврентьєв [11], Х. Гретч[12], О. Тейхмюллер[13], Г.М Голузін[14], К. Льовнер[11], П.П. Куфарев[11], Дж.А. Дженкінс[4], Н.А. Лєбєдєв[11], П.М. Тамразов[8], В.Я. Гутлянский[15], Г.В. Кузьміна[16], Е.Г. Ємельянов[17], Л.І. Колбіна[18] та ін.

1968 року П.М. Тамразов[14] висунув нову на той час ідею про те, що цікаво розглянути задачі, які відповідають квадратичним диференціалам, полюси яких мають певну ступінь свободи. Зокрема, у вище згаданій роботі він розглянув задачу, яка відповідає квадратичним диференціалам зі п'ятьма вільними простими полюсами. Ідея про "вільні"полюси була застосована в роботах Г.П. Бахтіної[19],[20] для розв'язування задач про неперетинні області, які відповідають квадратичним диференціалам із полюсами другого порядку. Згодом задачі такого типу були розвинені в роботах В.М. Дубініна [1],[9], Г.П. Бахтіної[18], [19], О.К. Бахтіна[11], Е.Г. Ємельянова[21],

[11]Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.

[12]Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308

[13]Teichmuller O. Collected papers. - Berlin ect. Springer - 1982

[14]Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.

[15]Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Владивосток "Дальнаука"ДВО РАН – 2009. – 390с.

[16]Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – 302. – С. 52 – 67.

[17]Емельянов Е. Г. К задачам об экстремальном разбиении / Е. Г. Емельянов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1986. – **154.** – С. 76 – 89.

[18]Колбина Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении / Л.И. Колбина // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1952. — **84**, № 5. — С. 865 — 868

[19]Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

[20]Бахтина Г.П. Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология : Сб.науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.1

[21]Емельянов Е.Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей /

Г.В. Кузьміної[22],[23], А.Л. Таргонського[24], І.В. Денеги[25] та інших математиків і отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами.

1984 року в роботі[26] була розглянута складніша задача про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – система однозв'язних взаємно неперетинних областей, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ – симетричні відносно $|z| = 1$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{U}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $R\left(B, a\right)$ – конформний радіус області B відносно точки a, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $\alpha_k \geq 0$.

В 1988 році В.М. Дубінін[9] зробив важливий крок у розвитку цієї теорії. Зокрема він розглянув і повністю вирішив задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ – система довільних взаємно неперетинних багатозв'язних областей, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $r(B, a)$ — внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$. Варто відзначити, що у вирішеній задачі функціонал було розглянуто для довільних багатозв'язних областей і замість конформного радіуса використано внутрішній радіус області.

У роботі[1] запропоновано список відкритих проблем геометричної теорії функції, серед яких було сформульовано кілька відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Розглянемо вище згадані задачі.

Е.Г. Емельянов // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2002. — Т.286. — С. 103 — 114.

[22]Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – 302. – С. 52 – 67.

[23]Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253 – 275.

[24]Таргонський А. Л. Екстремальні задачі теорії однолистих функцій: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / А. Л. Таргонський. — К., 2006. — 143 с.

[25]Денега І.В. Розділяюче перетворення в геометричної теорії функцій комплексної змінної. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2012. – 16 с.

[26]Бахтина Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей / Г. П. Бахтина //Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев, (1984), 21–27.

Задача 1. Довести, що при кожному фіксованому γ, $\gamma \in (0;n]$ максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ — внутрішній радіус області B у точці a, $a \in B)$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають $n-$ кратну симетрію.

1988 року в роботі В. М. Дубініна[9] було розглянуто одну проблему:

Задача 2. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k)$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$ на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ — внутрішній радіус області B у точці a $(a \in B)$.

Задача 3. При кожному фіксованому $\gamma > 0$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

за умови, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $0 = a_0 \in B_0 \subset U$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ — внутрішній радіус області B у точці a, $a \in B$.

У вище вказаних задачах отримано лише часткові результати.

Таким чином, ідея П.М. Тамразова про екстремальні задачі з вільними полюсами геометричної теорії функції привела до виникнення нового напряму геометричної теорії функцій, який зараз має назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню трьох наведених вище проблем для вільних полюсів, розташованих на одиничному колі або n-променевих системах точок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" , номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної для областей, які не перетинаються з вільними полюсами на колі.

Предметом дослідження є дослідження задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів і методів для вирішення задач про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей і їхніх узагальнень.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено такі завдання:

1. Удосконалити метод розв'язання задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса деякої області відносно початку координат і розв'язати для ширших інтервалів значень параметра γ;

2. Удосконалити метод дослідження оцінки максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів двох неперетинних областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки для отримання точного розв'язку цієї задачі для ширших інтервалів значень параметра γ;

3. Знайти максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із додатковими умовами симетрії на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса певної області відносно початку координат.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, симетризаційний метод розділяючого перетворення і методи теорії квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей, що містять нефіксовані точки одиничного кола, на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса області, яка містить початок координат, у випадку $\gamma \in (1; n^{0.45}]$, $n \geq 12$. За умови $n \geqslant 126$ вказану задачу розв'язано для ширшого інтервалу значень параметра γ, а саме: $\gamma \in (1; n^{0.5}]$.

2. Доведено, що для кожного $n \geqslant 2$ існує число γ_n^0, для якого при будь-якому $\gamma \in (0; \gamma_n^0)$ знайдено розв'язок задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n частково перетинних областей відносно n-променевих систем точок на степені γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки.

3. Отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, що визначається областю, якій належить початок координат, на степінь $\gamma \in (0; \frac{3}{2}]$ внутрішнього радіусу цієї області при $n \geq 9$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і методика їхнього отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії функцій і теорії апроксимацій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку й загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у доборі методів досліджень належать науковому керівникові — О. К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, провела особисто авторка.

У статтях [2, 4, 7], виконаних у співавторстві, науковому керівнику належить постановка задач, обговорення отриманих результатів. У роботах [6, 7, 8, 9, 10] внесок інших співавторів рівноцінний. У роботі [3] Я.В. Заболотному належить постановка задач та теорема 1. У статті [4] Я.В. Заболотному належить теорема 2.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 3 – 15 серпня 2015 року);
- V Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (м. Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);
- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року);
- Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Lodz [University and Lodz Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]), Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland), July 22 - July 29.

А також, на таких семінарах:

- семінар відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);
- семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 12 роботах, серед яких: 9 фахових, зокрема 3 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах 4 конференцій, 2 з яких міжнародні.

Структура дисертації.Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 79 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професору Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задач, корисні поради й рекомендації, а також кандидатам фізико-математичних наук Денезі Ірині Вікторівні й Заболотному Ярославові Володимировичу за плідну співпрацю, постійну увагу до роботи і підтримку при створенні дисертаційної роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **розділі 1** дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**.

У **розділі 2** дисертаційної роботи розглядається **Задача 1**. Основні результати другого розділу представлені в наступних теоремах:

Теорема 2.3.1 *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,45}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k = \overline{1, 4}$) *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \tag{1}$$

Теорема 2.3.2 *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 126$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1, n}$ *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k = \overline{1,4}$) – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (1)*

Теорема 2.3.3 *Нехай* $n = 4$, $\gamma \in (1; 2.09]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,4}$ *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{4} r(B_k, a_k) \leqslant r^\gamma(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{4} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k = \overline{1,4}$) *–кругові області і полюси квадратичного диференціала (1) відповідно.*

У **розділі 3** дисертаційної роботи розглядається **Задача 2**. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множина натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [**?**].

Система точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ називається n***-променевою***, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Позначимо при цьому $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1,n}$.

Відкрита множина D задовільняє умову неналягання відносно точок $\{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\} \in D$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – n-променева система точок, якщо множини $D_k(0), D_k(a_k), D_k(a_{k+1}), D_k(\infty)$ попарно неперетинаються при кожному фіксованому k, $k = \overline{1,n}$, де $D_k(0)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку 0; $D_k(a_k)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_k; $D_k(a_{k+1})$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_{k+1}; $D_k(\infty)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку ∞.

Система областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ задовільняє умову часткового перетину, якщо відкрита множина $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$ задовільняє умову неналягання відносно системи точок $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$. Надалі такі системи називатимемо системами частково перетинних областей відносно вказаної системи точок. Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ розглянемо такий "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|.$$

Нехай

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)). \tag{2}$$

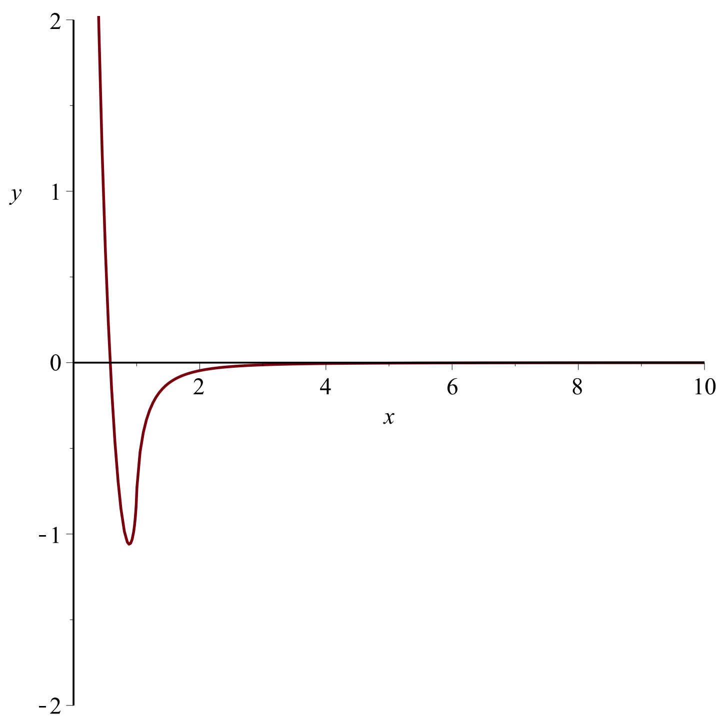

Рис. 1: Графік функції $F'(x)$

$F(x)$ — випукла функція на ітервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. $y_0 = \min F'(x)$, $x \in (0; +\infty), y_0 \approx -1.059$. Рівняння $F'(x) = t$ при $t > 0$ має єдинний розв'язок. Якщо $t < 0$, то це рівняння має два розв'язки: $x_1(t), x_2(t), x_1(t) \in (0; x_0), x_2(t) \in (x_0; \infty)$ (див. Рис. 1).

Позначимо через

$$\mu_n = \min_t((n-1)x_1(t) + x_2(t)), \gamma_n^0 = (\frac{\mu_n}{2})^2. \tag{3}$$

Для частково перетинних областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ D_k справедливі результати.

Теорема 3.3.1 *Нехай* $0 < \gamma < \gamma_n^0$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *і будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$ *справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *і точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 2)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Наступна теорема доповнює Теорему 3.3.1:

Теорема 3.3.2 *Нехай* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0,72$, $\gamma_3 = 1,40$, $\gamma_4 = 2,27$, $\gamma_5 = 3,33$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тоді для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$ *справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *і точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 2)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

У **4 розділі** розглядається задача, яка узагальнює постановку **Задачі 3**.

Нехай $\mathbb{U}$ – відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\partial\mathbb{U}$- одиничне коло. Вважатимемо, що область G_0 належить до класу $\mathbb{K}$, якщо:

1. $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$;
2. $\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus G_0\right) \cap \partial\mathbb{U}$ містить хоча б одну невироджену дугу одиничного кола.

Вважатимемо, щоо область $G_0 \in \mathbb{K}$ належить до класу $\mathbb{K}_1$, якщо $\overline{G_0} \subset \mathbb{U}$, очевидно, що $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$

Систему взаємно неперетинних областей $G_1, G_2, ..., G_n$ будемо називати системою неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю G_0, $G_0 \in \mathbb{K}$, якщо виконується наступне $\cup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{G_0 \cup \widetilde{G_0}\right\}$. Очевидно, що $G_0, G_1, ..., G_n$ – система взаємно неперетинних областей.

Задача 4 Для кожного фіксованого $n \geqslant 2$, $0 < \gamma \leqslant n$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = \left[r\left(G_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right), \tag{4}$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – n-променева система точок, така, що $\mathcal{M}(A_n) = 1$, де $G_1, ..., G_n$ – система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $G_0 \in \mathbb{K}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$.

У 4 розділі вдалося отримати частковий розв'язок Задачі 4 і тільки для випадку, коли n-променева система точок розташована на одиничному колі, тобто має місце результат:

Теорема 4.2.1 *Нехай $0 < \gamma \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant 9, n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такої, що $|a_k| = 1$ і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей $G_0, G_1, ..., G_n$, де $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ — система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $G_0 \in \mathbb{K}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ справедлива нерівність*

$$\left[r\left(G_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right) \leqslant \left[r\left(\Lambda_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_k *і точки* 0, λ_k $(k=\overline{1,n})$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала,*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \qquad (5)$$

Теорема 4.2.2 *Нехай* $\gamma_n^1 = 2\gamma_n^0$, $0 < \gamma < \gamma_n^1$, $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$, *і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $G_0, G_1, ..., G_n$, *де* $\{G_k\}_{k=1}^n$ — *система неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $G_0 \in \mathbb{K}_1$, *такої, що* $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$[r\left(G_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right) \leqslant [r\left(\Lambda_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_k *і точки* 0, λ_k $(k=\overline{1,n},\ n \geqslant 2,)$ —*відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (5)*

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено три проблеми, дві з яких поставив 1994 року В.М. Дубінін в якості відкритих проблем.

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження проблем, які вивчаються в дисертаційній роботі, наведено необхідні означення (конформний радіус, функція Гріна, узугальнена функція Гріна, внутрішній радіус тощо), теореми, які використовуються при доведенні основних результатів дисертації.

Зокрема, у розділі 1 сформульовані основні відкриті проблеми про екстремальне розбиття комплексної площини, наведено короткий історичний опис розвитку методу симетризації в геометричній теорії функції комплексної змінної. Представлено класичні результати М. О. Лаврентьєва й Г.М. Голузіна, з яких бере початок напрямок геометричної теорії функції про екстремальні задачі з неперетинними областями. Сформульована ідея П.М. Тамразова, яка дала поштовх для розвитку нового напрямку в задачах про неперетинні області, який згодом отримав назву "задачі про екстремальне розбиття площини з вільними полюсами".

У розділі 1 також наведено три відкриті проблеми, які вивчаються в дисертаційній роботі. Дано короткий опис основного методу дослідження, який використовується в роботі, а саме, симетризаційного методу розділяючого перетворення.

У розділі 2 в задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса деякої області відносно початку координат розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей, що містять нефіксовані точки одиничного кола, на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса області, яка містить початок координат, у випадку $\gamma \in (1; n^{0.45}]$, $n \geq 12$. За умови $n \geqslant 126$ вказану задачу розв'язано для ширшого інтервалу значень параметра γ, а саме: $\gamma \in (1; n^{0.5}]$.

У розділі 3 розглянуто задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частинно неперетинних областей відносно n-променевих систем точок на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки для значно ширших інтервалів параметра γ, тобто в розділі 2 доведено, що для кожного $n \geqslant 2$ існує число γ_n^0, для якого при будь-якому $\gamma \in (0; \gamma_n^0)$ знайдено розв'язок задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n частково перетинних областей відносно n-променевих систем точок на степені γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки.

У розділі 4 отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, котрій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса цієї області для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

З цього результату як наслідок отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса певної області відносно початку координат для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

Для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n^1)$, що для будь-якого γ з цього інтервалу задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, котрій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області, розв'язана повністю, де γ_n^1 — деяка величина, яка визначається однозначно, але задана в неявній формі;

Отримані в дисертаційній роботі результати й розвинені в ній методи можуть бути корисними в подальших дослідженнях комплексного аналізу та його застосуваннях.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1.*Дворак И.Я.* Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости//Укр. матем. вісник - 2018 р. Т. 15, № 3,-с. 345-357

2.*Бахтин А К., Дворак И.Я.* Задача об экстремальном разбиении плоскости // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – К.: 2018 – Т.32 – С. 3-10.

3. *Zabolotnii Ya., Dvorak I.* Some Evaluation of Maximum of The Product of Conformal Radii for Pairwaise Vonoverlapping Domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, No , pp. 554-559.

4.*Бахтін О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей// Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 2. – С.261 – 267

(Переклад англійською: Estimates for the Product of Inner Radii of Five Nonoverlapping Domains. - Ukrainian Mathematical Journal. – July 2017, Volume 69, Issue 2, pp. 304–311.)

5.*Дворак І.Я.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Укр. матем. вісник. – Том 13 (2016), № 2, с. 157 – 166.

(Переклад англійською: Dvorak Inna Ya. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 221, No. 5. — P. 630 — 637.)

6. *Бахтина Г.П., Дворак И.Я., Денега И.В.* О произведении внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Доп. НАН України. – 2016. – №1. – С. 7 – 11.

7. *Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В.* Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Доп. НАН України. – 2015. – № 12. – С. 7 – 12.

8. *Бахтіна Г.П., В'юн В.Є., Дворак І.Я.* Оцінки добутків внутрішніх областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т. 12, № 3. – С. 29 – 36.

9. *Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В.* Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №4. – С. 29 – 36.

10. *Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane.* X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз". 3 –15 серпня 2015 року, Одеса, Україна: Тези доповідей. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – С. 65 -– 67.

11.*Dvorak I.* About iner radii nonoverlapping domains.// V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського. 9 – 11 листопада 2016 року, м. Київ, Україна: Book of abstracts. – Вінниця, 2016. – С. 58 -– 60;

12. *Дворак И. Я.* О внутренних радиусах симметричных неналягающих областей.// "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р. – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський націонльний університет імені Василя Стефаника 2017. – С. 79 -– 82;

Серед опублікованих праць 3 статті [3,4,5] надруковано в журналах, які входять до наукометричної бази даних Scopus.

АНОТАЦІЇ

Дворак І.Я. Метод симетризації в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. — Кваліфікаційна наукова пра-

ця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У дисертаційній роботі досліджено три проблеми, дві з яких поставив в "Успехи математических наук"1994 року В.М. Дубінін як відкриті проблеми.

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

У другому розділі розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частинно неперетинних областей відносно n – променевих систем точок на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно початку координат та нескінченно віддаленої точки для значно ширших інтервалів параметра γ.

У третьому розділі розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат для $\gamma = n^{0.45}, n \geq 12$, $\gamma = n^{0.5}, n \geq 126$.

У четвертому розділі отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, котрій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса цієї області для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

Ключові слова: неперетинні області, $n-$ променева система точок, конфомний та внутрішній радіус області, функція Гріна області, розділяюче перетворення, полюси та кругові області квадратичного диференціала.

Дворак И.Я. Метод симетризации в задачах об экстремальном разбиения комплексной плоскости. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Математический анализ"(111 — Математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертационной работе исследованы три проблемы, две из которых были поставлены в "Успехах математических наук"в 1994 году В.М. Дубининым в качестве открытых проблем.

В первой главе диссертационной работы сделан обзор литературы, изложены основные идеи методов исследования данных проблем, приведены определения и теоремы, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов диссертации.

Во втором разделе решена задача о нахождении максимума произведения внутренних радиусов отчасти непересекающихся областей относительно n-лучевsх систем точек на некоторую положительную степень γ внутренних радиусов частично пересекающимися областей относительно начала координат и бесконечно удаленной точки для значительно более широких интервалов параметра γ.

В третьем разделе решено задачу о нахождении максимума произведения внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей относительно точек единичного круга на некоторое положительную степень γ внутреннего радиуса некоторой области относительно начала координат для $\gamma = n^{0.45}, n \geq 12$, $\gamma = n^{0.5}, n \geq 126$.

В четвертом разделе получено решение задачи о максимуме произведения внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей с дополнительным условием симметрии, которая определяется определенной областью, которой принадлежит начало координат на некоторую положительную степень γ внутреннего радиуса этой области для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

Ключевые слова: непересекающихся области, $n-$лучевая система точек, конфомний и внутренний радиус области, функция Грина области, Разделяя преобразования, полюса и круговые области квадратичного дифференциала.

Dvorak I.Ya. The method of symmetrization in problems of extremal decomposition of a complex plane. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences on the specialty 01.01.01 — "Mathematical analysis"(111 — Mathematics). — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

In the dissertation work three problems were investigated, two of which were put in "Uspekhi Matematicheskikh Sciences"in 1994 by V.M. Dubinin as open problems.

In the first section of the dissertation the review of the literature is made, The basic ideas of the methods of studying these problems are described, the definitions and the theorems necessary for the formulation and proof of the basic dissertation results.

The second section solves the problem of finding the maximum product of internal radii of partially non-intersecting regions with respect to n -radial systems of points on a certain positive degree of γ of the internal radii of partially intersecting regions relative to the origin of the coordinates and the infinitely distant point for much wider intervals parameter γ.

In the third section, the problem of finding the maximum product of internal radii of mutually non-cross regions over the points of a single circle for a certain positive degree γ of the interior radius of a certain region relative to the origin of the coordinates for $\gamma = n^{0.45}, n \geq 12$, $\gamma = n^{0.5}, n \geq 126$.

In the fourth section we obtain a solution to the problem of the maximum product of internal radii of mutually non-cross-sections with an additional condition of symmetry determined by a certain region, which belongs to the origin of coordinates for some positive degree γ of the interior radius of this domain for $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

Practical significance of the obtained results Thesis the work has

a theoretical character. The obtained results and their methodology Receipt can be used in the study of complex analysis, holomorphic dynamics, the theory of functions, in the theory of approximations, and for the estimation of distortion under conformal mapping.

Key words: non-overlapping domains, $n-$radial system of points, conformal and inner radii of domains, the Green function of domain, separating transformation, poles and circular domains of quadratic differential.

Підписано до друку 16.01.2019. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Умов. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. 18.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.