НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Дворак Інна Ярославівна

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОД СИМЕТРИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

01.01.01 — Математичний аналіз

111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _________ І. Я. Дворак

Науковий керівник:
Бахтін Олександр Костянтинович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2019

АНОТАЦІЯ

Дворак І.Я. Метод симетризації в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз"(111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Ця дисертаційна робота присвячена класичному розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме дослідженню екстремальних задач для неперетинних та частково перетинних областей.

До кінця 70-х років минулого століття більшість задач формулювалось в термінах фіксованих полюсів. Цими задачами в різні часи займалися Лаврентьєв [73], Гретч [15], Тейхмюллер [12], Голузін [39], Льовнер [15], Куфарев [15], Дженкінс [47], Лєбєдєв [15], Тамразов [76], Гутлянский [51], Кузьміна [70], Ємельянов [53], Колбіна [68] та ін.

Отже, у дисертаційній роботі досліджено три проблеми, дві з яких були поставлені в "Успехи математических наук"в 1994 році [48] В.М. Дубініним в якості відкритих проблем.

Задача 1. Довести, що при кожному фіксованому γ, $\gamma \in (0;n]$ максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B)$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

В 1988 в роботі В. М. Дубініна [50] було розглянуто одну проблему:

Задача 2. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B, a)$ - внутрішній радіус області B в точці a $(a \in B)$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

Задача 2 була розв‘язана для $\gamma = 1/2$ в роботі [72]. У 2008 році ця проблема була узагальнена для випадку, коли точки розміщені на n-променевій системі [15].

Задача 3. При кожному фіксованому $\gamma > 0$ довести, що максимум функціоналу

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $0 = a_0 \in B_0 \subset U$ причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$, $(n \geq 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B, a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження проблем, які вивчаються в дисертаційній роботі, наведено необхідні означення (конформний радіус, функція Гріна, узугальнена функція Гріна, внутрішній радіус і т.д.), теореми, які використовуються при доведенні основних результатів дисертації.

Зокрема у розділі 1, сформульовані основні відкриті проблеми про екстремальне розбиття комплексної площини, наведено короткий історичний опис розвитку методу симетризації в геометричній теорії функції комплексної змінної. Представлено класичні результати М. О. Лаврентьєва та Г. М. Голузіна, з яких бере початок напрямок геометричної теорії функції про екстремальні задачі з неперетинними областями. Сформульована ідея П.М. Тамразова , яка дала поштовх для розвитку нового напрямку в задачах про неперетинні області, який в подальшому отримав назву "задачі про екстремальне розбиття площини з вільними полюсами".

У розділі 1, також, наведено ці три відкриті проблеми, які вивчаються в дисертаційній роботі. Дано короткий опис основного методу дослідження, який використовується вроботі, а саме симетризаційного методу розділяючого перетворення.

У розділі 2 в задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат отримано наступні результати:

- Для $n \geq 12$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.45}]$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена;

- Для $n \geq 126$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.5}]$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена;

- Для $n = 4$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; 2.09]$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю. Це перший результат, який дає розв'язок задачі 1 для інтервалу параметру γ, який має довжину більше, ніж $\frac{n}{2}$ при $n = 4$.

У розділі 3 розглянуто задачу, яка значно узагальнює постановку задачі 2, а саме задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частинно перетинних областей відносно n-променевих систем точок на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно початку координат та нескінченно віддаленої точки.

В розділі 3 отримано наступні результати:

- розв'язано вище описану узагальнену задачу для кожного $n \geqslant 2$ при $\gamma \in (0; \gamma_n^0)$, де γ_n^0 – деяка величина,яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді;
- також, попередній результат доповнюємо в тому розумінні, що для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий пів інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n], \gamma_n < \gamma_n^0$, де γ_n – деяка величина,яка задана в явному вигляді;
- наведено кілька наслідків,, які дають розв'язок задачі в деяких частинних випадках: для неперетинних областей та n – променевих систем точок, для неперетинних областей та точок одиничного кола;

У найкраще вивченому випадку, для односвязних неперетинних областей і точок одиничного кола, результати отримані в розділі 3 дисертаційної роботи, значно покращують результати попередників при $n = \overline{2, 6}$.

У 4 розділі розглядається суттєво узагальнення Задачі 3, а саме досліджується задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області.

Першим частинним випадком цієї задачі є задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області, яка містить початок координат.

Другим частинним випадком цієї задачі є задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області, яка лежить в крузі і містить початок координат.

У розділі отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$. З цього результату, в якості наслідку для першого частинного випадку, отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу певної області відносно початку координат для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

В розділі 4 отримано другий результат узагальненої задачі, а саме показано, що задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області вирішена для $\gamma \in (0; \gamma_n^1)$, γ_n^1 – деяка величина,яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді, $n \geqslant 2$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та методика їх отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфній динаміці, теорії функцій, в теорії апроксимацій та для оцінок викривлення при конформному відображенні.

Ключові слова: неперетинні області, $n-$ променева система точок, конфомний та внутрішній радіус області, функція Гріна області, розділяюче перетворення, полюси та кругові області квадратичного диференціала.

Dvorak I.Ya. The method of symmetrization in problems of extremal decomposition of a complex plane. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a candidate of physical and mathematical sciences on the specialty 01.01.01 — "Mathematical analysis"(111 — Mathematics). — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

This dissertation deals with the classical section of geometric theory of functions of a complex variable, namely, the study of extreme problems for non-intersecting and partially intersecting domains.

By the end of the 1970s, most tasks were formulated in terms of fixed poles. Lavrentyev [73], Gretch [15], Teichmiller [12], Goluzin [39], L?wner [**?**], Kufarev [15], Jenkins [47], Lebedev [15], Tamrazov [76] , Gutlian [51], Kuzmina [70], Yemelyanov [53], Kolbina [68] and others at various times were engaged in these tasks.

In the dissertation three problems were investigated, two of which were put in "Successes of mathematical sciences"in 1994 [48] V.M. Dubinin as open problems.

Problem 1. Prove that for every fixed $\gamma,\ \gamma \in (0; n]$, the maximum of

functional

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

where B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ - are pairwise non overlapping domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - internal the radii of B at a, $a \in B)$, is reached for some configurations of regions that have n–multiple symmetry.

In 1988, V.M. Dubinin [50] considered one problem:

Problem 2. Prove that the maximum of functional

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)$$

for $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, on the set of all systems of mutually intersecting domains $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ such that a_k and $B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ - the inner radii of B at a $(a \in B)$, is reached for some configurations of regions that have n – multiple symmetry.

Problem 2 was solved for $\gamma = 1/2$ in [72]. In 2008, this problem was generalized to the point where points are placed on a n - ray system [15].

Problem 3. For every fixed $\gamma > 0$, prove that the maximum of functional

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

provided that B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geq 2)$ are pairwise non overlapping domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $0 = a_0 \in B_0 \subset U$ and the domains $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ – symmetric about points of a single circle, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ – internal radii of B at a, $a \in B$, is reached for some configurations of regions that have n – multiple symmetry.

The first section of the dissertation reviews literature, the basic ideas of methods to research problems, which are studied in the dissertation, are presented, the necessary definitions (conformal radii, Green function, generalized Green function, internal radii, etc.) are given, the theorems used in proving the basic results of the dissertation are presented.

In particular, in Section 1, the main open problems about the extreme partition of a complex plane are formulated, a brief historical description of the development of the symmetrization method in the geometric theory of the complex variable function is given. The classical results of M.A. Lavrentyev and G.M. Goluzin are presented, from which the direction of the geometric theory of function on extremal problems with infinite domains begins. The formulated idea of P.M. Tamrazova, which gave impetus for the development of a new direction in the problems of intersecting regions, which in the future was called "problems of extreme partitioning of a plane with free poles".

Section 1 also outlines three open issues that are explored in the dissertation. A brief description of the main method of study used in the work, namely the symmetrization method of separation transformation.

In Section 2, the problem of finding the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting domains relative to the points of a single circle by some positive degree γ of the inner radii of a certain domain relative to the origin is given by the following results:

- for $n \geq 12$ for every $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.45}]$ the problem of finding the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting domains with respect to the points of a single circle by some positive degree γ the inner radii of a domain relative to the origin is solved;

- for $n \geq 126$ for every $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.5}]$ the problem of finding the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting domains relative to the points of a single circle by some positive degree γ the inner radii of a region relative to the origin is solved;

- for $n = 4$ for every $\gamma, \gamma \in (1; 2.09]$, the problem of finding the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting domains with respect to points of a single circle by some positive degree the γ of the inner radii of a region relative to the origin is completely solved, which is the first result that gives a solution to Problem 1 for the interval of parameter γ, which has a length greater than $\frac{n}{2}$.

Section 3 discusses a problem that greatly generalizes the formulation of Problem 2, namely, the problem of finding the maximum of the product of the inner radii of partially intersecting domains with respect to n-ray systems of points by some positive degree γ of the inner radii of partially intersecting regions relative to the origin infinitely distant point.

In Section 3, the following results are obtained:

- solves the generalized problem described above for each $n \geqslant 2$ for $\gamma \in (0; \gamma_n^0)$, where γ_n^0 is some value that is determined uniquely but implicitly;
- also, the previous result is supplemented in the sense that for each $n \geqslant 2$ the following half interval is specified $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n], \gamma_n < \gamma_n^0$, where γ_n is an explicit value;
- provides several implications that give the solution of the problem in some particular cases: for non-intersecting regions and n-ray systems of points, for non-intersecting areas and points of a single circle.

In the best-studied case, for single-connected intersecting domains and points of a single circle, the results obtained in section 3 of the dissertation significantly improve the results of the precursors at $n = \overline{2, 6}$.

Section 4 examines the essential generalization of Problem 3, namely, the problem of maximizing the product of the inner radii of mutually intersecting domains with an additional symmetry condition, which is determined by a certain domain that has the origin of coordinates for some positive degree of γ of the inner radii.

The first partial case of this problem is the problem of maximizing the product of the inner radii of mutually intersecting regions symmetric about the circle by some positive degree γ of the inner radii of a region containing the origin.

The second special case of this problem is the problem of the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting regions, symmetric about the circle by some positive degree γ of the inner radii of a region that lies in a circle and contains the origin.

In the section we obtain the solution of the maximum problem of the product of the inner radii of mutually intersecting domains with an additional symmetry condition, which is determined by a certain domain that has the origin of coordinates of some positive degree γ of the inner radius of this region for $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$. From this result, as a consequence of the first partial case, the solution of the problem of the maximum of the product of the inner radii of mutually intersecting domains symmetric about the circle by some positive degree γ inner radii some region relative to the origin for $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

In Section 4, we obtain the second result of the generalized problem, namely, that the maximum maximum problem of the product of the inner radii of mutually intersecting domains with an additional symmetry condition is determined by a certain domain that has the origin of coordinates for some positive degree γ of the inner radius of this domain for $\gamma \in (0; \gamma_n^1)$, γ_n^1 is a certain value that is uniquely defined but set implicitly, $n \geqslant 2$.

Practical significance of the obtained results The dissertation is theoretical in nature. The obtained results and the method of their obtaining

can be used in the study of complex analysis, holomorphic dynamics, theory of functions, approximation theory and for estimation of distortion in conformal mapping.

Key words: non-overlapping domains, $n-$radial system of points, conformal and inner radii of domains, the Green function of domain, separating transformation, poles and circular domains of quadratic differential.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

– *Дворак И.Я.* Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости//Укр. матем. вісник - 2018 р. Т. 15, № 3,-с. 345-357

– *Бахтин А К., Дворак И.Я.* Задача об экстремальном разбиении плоскости // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – К.: 2018 – Т.32 – С. 3-10.

– *Zabolotnii Ya., Dvorak I.* Some Evaluation of Maximum of The Product of Conformal Radii for Pairwaise Vonoverlapping Domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, No , pp. 554-559.

– *Бахтін О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей// Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 2. – С.261 – 267

– *Дворак І.Я.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Укр. матем. вісник. – Том 13 (2016), № 2, с. 157 – 166.

– *Бахтина Г.П., Дворак И.Я., Денега И.В.* О произведении внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Доп. НАН України. – 2016. – №1. – С. 7 – 11.

– *Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В.* Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Доп. НАН України. – 2015. – № 12. – С. 7 – 12.

– *Бахтіна Г.П., В'юн В.Є., Дворак І.Я.* Оцінки добутків внутрішніх областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН

України, 2015. – Т. 12, № 3. – С. 29 – 36.

– *Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В.* Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №4. – С. 29 – 36.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ, СЕМІНАРАХ

– *Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane.* X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз". 3 –15 серпня 2015 року, Одеса, Україна: Тези доповідей. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – С. 65 -– 67.

– *Dvorak I.* About iner radii nonoverlapping domains.// V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського. 9 – 11 листопада 2016 року, м. Київ, Україна: Book of abstracts. – Вінниця, 2016. – С. 58 -– 60;

– *Дворак И. Я.* О внутренних радиусах симметричных неналягающих областей.// "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р. – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника 2017. – С. 79 -– 82;

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень **17**

Вступ **18**

Розділ 1. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ **34**

1.1. Результати попередників, які використовуються в роботі . 34

1.2. Конформний і внутрішній радіуси області та функція Гріна 40

1.3. Розділяюче перетворення областей 44

Висновки до розділу 1 47

Розділ 2. ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ПРО МАКСИМУМ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ВЗАЄМНО НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ **48**

2.1. Результати попередників, які використовуються в розділі . 48

2.2. Основні результати розділу 2 54

2.3. Доведення Теореми 2.2.1 56

2.4. Доведення Теореми 2.2.2 73

2.5. Доведення Теореми 2.2.3 85

Висновки до розділу 2 87

Розділ 3. ЕСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТКОВО ПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА N-ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМАХ ТОЧОК **88**

3.1. Результати попередників, які використовуються в розділі . 88
3.2. Основні результати розділу 3 90
3.3. Доведення Теореми 3.2.1 98
3.4. Доведення Теореми 3.2.2 102
Висновки до розділу 3 104

Розділ 4. ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ СИМЕТРІЇ 105

4.1. Результати попередників, які використовуються в розділі . 105
4.2. Основні результати розділу 4 111
4.3. Доведення Теореми 4.2.1. 114
4.4. Доведення Теореми 4.2.2. 133
Висновки до розділу 4 135

Висновки 136

Список використаних джерел 140

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана;

$\mathbb{R}^{+} = (0, \infty)$;

$x \in E$ — елемент x належить множині E;

$X \subset E$ — множина X є підмножиною множини E;

$U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг;

$R(B, a)$ — конформний радіус однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$;

$r(B, a)$ — внутрішній радіус багатозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$;

$g_B(z, z_0)$ — функція Гріна області B з полюсом в точці z_0;

$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$ — (n, m)-променева система точок;

$A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — $n-$ променева система точок;

$\mathcal{M}(A_n) := \prod\limits_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|$ — керуючий функціонал $n-$ променевої системи точок;

α_k, $k = \overline{1, n}$ — кутові параметри системи A_n;

$Q(z)dz^2$ — квадратичний диференціал;

$\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського.

ВСТУП

Актуальність теми.

Відомо, що метод симетризації відіграє значну роль при вирішенні задач геометричної теорії функції комплексної змінної, і має дуже давню історію.

Перші дослідження методу симетризації в геометрії та аналізі на початку 19 століття були виконані Я. Штейнером. Пізніше на початку 20 століття широке застосування методу симетризації здійснено в роботах Харді і Літтвуда [48], Поліа і Сеге [75], Хеймана [79], Дженкінса [47], Маркуса [10], Бернстайна [1], І.П.Мітюка [74], Тамразова [76], Солиніна [48], Дубініна [48, 50], Шлика [48].

Варто відмітити, що в ранніх роботах симетризаційні методи потребували індивідуального пристосування до кожної задачі, що викликало значні труднощі.

Наприкінці 70-х років В.М. Дубінін розробив новий, на той час, симетризаційний метод розділяючого перетворення, який покращив можливості дослідження різноманітних задач [52]. Наприклад, в роботі [50] за допопомогою цього методу розв'язано декілька важливих задач про екстремальне розбиття комплексної площини, розв'язок яких вдалося реалізувати лише за допомогою методу розділяючого перетворення. Варто відзначити, що симетризаційний метод дозволив отримати такі результати, які іншими методами геометричної теорії функції (метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, варіаційний метод, параметричний метод) отримати не вдається. Метод розділяючого перетворення базується на вивченні поведінки інтеграла Діріхле при деяких симетризаційних перетвореннях. Добре відома роль інтеграла Діріхле в ряді класичних задач аналізу, геометрії і математичної фізики.

Ця дисертаційна робота присвячена класичному розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме дослідженню екстремальних задач для неперетинних та частково перетинних областей.

До кінця 70-х років минулого століття більшість задач формулювалось в термінах фіксованих полюсів. Цими задачами в різні часи займалися Лаврентьєв [73], Гретч [15], Тейхмюллер [12], Голузін [39], Льовнер [15], Куфарев [15], Дженкінс [47], Лєбєдєв [15], Тамразов [76], Гутлянский [51], Кузьміна [70], Ємельянов [53], Колбіна [68] та ін.

В 1968 році П. М. Тамразов [76] висунув нову, на той час, ідею про те, що цікаво розглянути задачі, які відповідають квадратичним диференціалам, полюси яких мають певну ступвнь свободи. Зокрема, у, вище згаданій роботі, він розглянув задачу, яка відповідає квадратичним диференціалам з п'ятьма вільними простими полюсами. Для вирішення цієї задачі було роброблено новий метод дослідження.

Ідея про "вільні"полюси була застосована в роботах Г. П. Бахтіної [31, 33] для розв‘язування задач про неперетинні області, яка відповідає квадратичним диференціалам з вільними полюсами другого порядку. У подальшому, задачі такого типу були розвинені в роботах В.М. Дубініна [48, 50], Г. П. Бахтіної [31, 33], О.К. Бахтіна [15], Е.Г. Ємельянова [53, 55] , Г.В. Кузьміної [70, 71], А.Л. Таргонського [77], І. В. Денеги [46] та інших математиків і отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Одна із таких задач була розглянута Г. П. Бахтіною у 1974-1975 роках [31]:

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} R\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – система однозв‘язних взаємно неперетинних областей, симетричних відносно $|z| = 1$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$.

Розв‘язок задачі для $n = 2$ і $n = 3$ може бути отриманий з результатів робіт М. О. Лаврентьєва [73] та Голузіна [39] відповідно. Для $n = 4$ вперше розв‘язок задачі був отриманий в роботі в 1974 [31].

В 1984 році в роботі [35] була розглянута більш складна задача про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – система однозв‘язих взаємно неперетинних областей, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ – симетричні відносно $|z| = 1$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{U}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $R\left(B, a\right)$ – конформний радіус області B відносно точки a, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $\alpha_k \geq 0$.

В.М. Дубінін розробив в 1978 році новий, на той час, метод розділяючого перетворення, який покращив можливості дослідження задач такого типу [52]. В 1988 [50] ним було зроблено важливий крок у розвитку цієї теорії зокрема він розглянув та повністю вирішив задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ – система довільних взаємно неперетинних багатозв‘язих областей, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $r(B, a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$. Варто відзначити, що у вирішеній задачі функціонал було розглянуто для довільних багатозв‘язих областей і замість конформного радіусу використано внутрішній радіус області [48].

Задача 1. Довести, що при кожному фіксованому γ, $\gamma \in (0; n]$ максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$), досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

В 1988 в роботі В. М. Дубініна [50] було розглянуто одну проблему:

Задача 2. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a $(a \in B)$.

Задача 2 була розв‘язана для $\gamma = 1/2$ в роботі [72]. У 2008 році ця проблема була узагальнена для випадку, коли точки розміщені на n-променевій системі [15].

В роботі [48] запропоновано список відкритих проблем повязаний з цим напрямком. Дві проблеми із цього списку вивчається в даній дисертацій роботі.

Задача 3. При кожному фіксованому $\gamma > 0$ знайти максимум функціоналу

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $0 = a_0 \in B_0 \subset U$ причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$.

Задача 3 була сформульована в 1994 році [48] при $\gamma = 1$ і в цій же роботі вона була розв‘язана для $\gamma = 1$. Бахтін О. К. запропонував розглянути цю задачу при $\gamma > 0$ в 2015 році [25]. Варто відзначити, що для $0 < \gamma \leq 1$ розв'язок задачі випливає із роботи [63]. В дисертаційній роботі ми розглядаємо цю проблему при $\gamma > 1$.

Таким чином, ідея П. М. Тамразова про екстремальні задачі з вільними полюсами, які відповідають квадратичним диференціалам, призвела до виникнення нового напряму геометричної теорії функцій, який зараз носить назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Ця ідея виникла на основі багаторічного дослідження задач, які відповідають квадратичним диференціалам з фіксованими полюсами.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню трьох, наведених вище, проблем для вільних полюсів розташованих на одиничному колі або n- променевих системах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження.

Об'єктом дослідження є екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної для областей, які не перетинаються з вільними полюсами на колі.

Предметом дослідження є дослідження задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей.

Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів та методів для вирішення задач про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей та їх узагальнень.

Для досягнення зазначеної мети у роботі було поставлено такі **зав-**

дання:

1. Удосконалити метод розв'язання задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса деякої області відносно початку координат і розв'язати для ширших інтервалів значень параметра γ;

2. Удосконалити метод дослідження оцінки максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів двох неперетинних областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки для отримання точного розв'язку цієї задачі для ширших інтервалів значень параметра γ;

3. Знайти максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із додатковими умовами симетрії на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса певної області відносно початку координат.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, метод розділяючого перетворення та методи теорії квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати дисертаційної роботи є новими і полягають у наступному:

1. Розв'язано задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей, що містять нефіксовані точки одиничного кола, на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіуса області, яка містить початок координат, у випадку $\gamma \in (1; n^{0.45}]$, $n \geq 12$. За умови $n \geqslant 126$ вказану задачу розв'язано для ширшого інтервалу значень параметра γ, а саме: $\gamma \in (1; n^{0.5}]$.

2. Доведено, що для кожного $n \geqslant 2$ існує число γ_n^0, для якого при

будь-якому $\gamma \in (0;\gamma_n^0)$ знайдено розв'язок задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n частково перетинних областей відносно n-променевих систем точок на степені γ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки.

3. Отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, що визначається областю, якій належить початок координат, на степінь $\gamma \in (0;\frac{3}{2}]$ внутрішнього радіусу цієї області при $n \geq 9$.

З деяких результатів отримано низку наслідків для класичних випадків задачі взаємно неперетинних областей і точок одиничного кола, які значно покращують результатів попередників.

У **розділі 1** дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження даних проблем, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**.

У **розділі 2** дисертаційної роботи розглядається **Задача 1**. Основні результати другого розділу представлені в наступних теоремах:

Теорема 2.3.1 *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}45}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k $(k = \overline{1,4})$ *– відповідно кругові області* *і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \qquad (1)$$

Теорема 2.3.2 *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 126$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0,a_0)\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant r^\gamma(D_0,d_0)\cdot\prod_{k=1}^n r(D_k,d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k=\overline{1,4}$) *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1)*

Теорема 2.3.3 *Нехай* $n = 4$, $\gamma \in (1; 2.09]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,4}$ *справедлива нерівність*

$$r^\gamma(B_0,a_0)\prod_{k=1}^4 r(B_k,a_k) \leqslant r^\gamma(D_0,d_0)\cdot\prod_{k=1}^4 r(D_k,d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k=\overline{1,4}$) *–кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1) відповідно.*

У **розділі 3** дисертаційної роботи розглядається **Задача 2**. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множина натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Нехай $r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [48].

Система точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ називається n-***променевою***, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Позначимо при цьому $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Відкрита множина D задовільняє умову неналягання відносно точок $\{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\} \in D$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – n-променева система точок, якщо множини $D_k(0), D_k(a_k), D_k(a_{k+1}), D_k(\infty)$ попарно неперетинаються при кожному фіксованому k, $k = \overline{1, n}$, де $D_k(0)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку 0; $D_k(a_k)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_k; $D_k(a_{k+1})$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_{k+1}; $D_k(\infty)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку ∞.

Система областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ задовільняє умову часткового перетину, якщо відкрита множина $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$ задовільняє умову неналягання відносно системи точок $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$. Надалі такі системи називатимемо системами частково перетинних областей відносно вказаної системи точок. Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ розглянемо такий "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|.$$

Нехай

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)). \qquad (2)$$

$F(x)$ — випукла функція на ітервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. $y_0 = \min F'(x)$, $x \in (0; +\infty), y_0 \approx -1.059$. Рівняння $F'(x) = t$ при $t > 0$ має єдинний розв'язок. Якщо $t < 0$, то це рівняння має два розв'язки: $x_1(t), x_2(t), x_1(t) \in (0; x_0), x_2(t) \in (x_0; \infty)$ (див. Рис. 3.3).

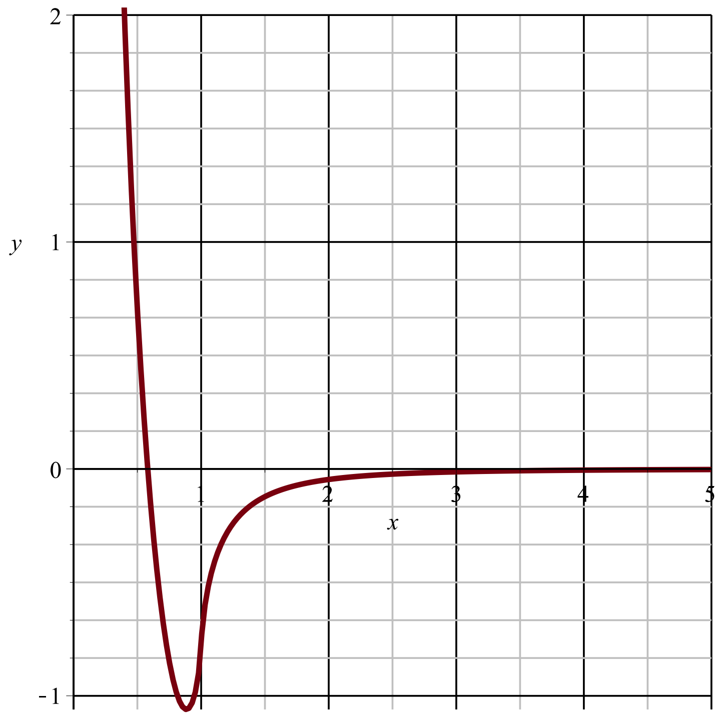

Рис. 1: Графік функції $F'(x)$

Позначимо через

$$\mu_n = \min_t((n-1)x_1(t) + x_2(t)), \gamma_n^0 = (\frac{\mu_n}{2})^2. \tag{3}$$

Для частково перетинних областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ D_k справедливі результати.

Теорема 3.3.1 *Нехай* $0 < \gamma < \gamma_n^0$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *і будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$ *справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *і точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n}$, $n \geq 2)$ — *відповідно* *кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Наступна теорема доповнює Теорему 3.3.1:

Теорема 3.3.2 *Нехай* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0,72$, $\gamma_3 = 1,40$, $\gamma_4 = 2,27$, $\gamma_5 = 3,33$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тоді для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$ *справедлива нерівність*

$$[r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k) \leqslant [r\,(\Lambda_0, 0)\, r\,(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(\Lambda_k, \lambda_k)\,,$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *і точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1, n},\ n \geq 2)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

У **4 розділі** розглядається задача, яка узагальнює постановку **Задачі 3**.

Нехай $\mathbb{U}$ – відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\partial\mathbb{U}$- одиничне коло. Вважатимемо, що область G_0 належить до класу $\mathbb{K}$, якщо:

1. $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$;
2. $\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus G_0\right) \cap \partial\mathbb{U}$ містить хоча б одну невироджену дугу одиничного кола.

Вважатимемо, щоо область $G_0 \in \mathbb{K}$ належить до класу $\mathbb{K}_1$, якщо $\overline{G_0} \subset \mathbb{U}$, очевидно, що $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$

Систему взаємно неперетинних областей $G_1, G_2, ..., G_n$ будемо називати системою неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю G_0, $G_0 \in \mathbb{K}$, якщо виконується наступне $\cup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{ G_0 \cup \widetilde{G_0} \right\}$. Очевидно, що $G_0, G_1, ..., G_n$ – система взаємно неперетинних областей.

Задача 4 Для кожного фіксованого $n \geqslant 2$, $0 < \gamma \leqslant n$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = [r(G_0, 0)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(G_k, a_k), \tag{4}$$

де $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – n-променева система точок, така, що $\mathcal{M}(A_n) = 1$, де $G_1, ..., G_n$ – система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $G_0 \in \mathbb{K}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$.

У 4 розділі вдалося отримати частковий розв'язок Задачі 4 і тільки для випадку, коли n-променева система точок розташована на одиничному колі, тобто має місце результат:

Теорема 4.2.1 *Нехай $0 < \gamma \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant 9, n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такої, що $|a_k| = 1$ і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей $G_0, G_1, ..., G_n$, де $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ — система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $G_0 \in \mathbb{K}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ справедлива нерівність*

$$[r(G_0, 0)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(G_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_k і точки 0, λ_k ($k = \overline{1, n}$) – відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала,

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{5}$$

Теорема 4.2.2 *Нехай* $\gamma_n^1 = 2\gamma_n^0$, $0 < \gamma < \gamma_n^1$, $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$, *і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $G_0, G_1, ..., G_n$, *де* $\{G_k\}_{k=1}^n$ *— система неперетинних областей із додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $G_0 \in \mathbb{K}_1$, *такої, що* $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$[r(G_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(G_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_k *і точки* 0, λ_k $(k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2,)$ *—відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (5)*

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і методика їхнього отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії функцій і теорії апроксимацій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку й загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез, а також допомога у доборі методів досліджень належать науковому керівникові — О. К. Бахтіну. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, провела особисто авторка.

У статтях [2, 4, 7] у списку опублікованих праць, виконаних у співавторстві, науковому керівнику належить постановка задач, обговорення отриманих результатів. У роботах [6, 7, 8, 9, 10] внесок інших співавторів рівноцінний. У роботі [3] Я.В. Заболотному належить постановка задач та теорема 1. У статті [4] Я.В. Заболотному належить теорема 2.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

– XI Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (м. Одеса, 3 – 15 серпня

2015 року);

– V Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (м. Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року);

– Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Lodz [University and Lodz Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]), Mathematical Conference Center at Bedlewo (Poland), July 22 - July 29.

а також, на таких семінарах:

– семінар відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса);

Основні результати дисертації опубліковано у 12 роботах, з них: 9 фахових, серед яких 3 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus.

Публікації:

1.*Дворак И.Я.* Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости//Укр. матем. вісник - 2018 р. т. 15, № 3,-с.345-357

2.*А К. Бахтин, И.Я. Дворак* Задача об экстремальном разбиении плоскости // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН

України. – К.: 2018– Т.32 – С. 3-10.

3. *Ya. Zabolotnii, I. Dvorak.* Some Evaluation of Maximum of The Product of Conformal Radii for Pairwaise Vonoverlapping Domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, No , pp. 554-559

4. *Бахтін О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей// Укр. мат. журн. – - 2017. – - Т. 69, № 2. – - С.261– -267

(Переклад англійською:Estimates for the Product of Inner Radii of Five Nonoverlapping Domains. -Ukrainian Mathematical Journalю – July 2017, Volume 69, Issue 2, pp 304–311)

5. *Дворак І.Я.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей//Укр. матем. вісник - Том 13 (2016), № 2, с. 157 – 166

(Переклад англійською: Inna Ya. Dvorak. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 221, No. 5. — P. 630 — 637.)

6. *Г.П. Бахтина, И.Я. Дворак, И.В. Денега.* О произведении внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Доп. НАН України. – 2016. – №1. – С. 7 – 11.

7. *А.К. Бахтин, И.Я. Дворак, И.В. Денега.* Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Доп. НАН України. – 2015. – №12. – С. 7 – 12.

8. *Г. П. Бахтіна, В. Є.Вюн, І.Я. Дворак.* Оцінки добутків внутрішніх областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №3. – С. 29 – 36.

9. *А.К. Бахтин, И.Я. Дворак, И.В. Денега.* Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в ком-

плексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №4. – С. 29 – 36.

10. *Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Extremal decomposition of the complex plane.* X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз". 3 –15 серпня 2015 року, Одеса, Україна: Тези доповідей. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – С. 65 -– 67.

11.*Dvorak I.* About iner radii nonoverlapping domains.// V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського. 9 – 11 листопада 2016 року, м. Київ, Україна: Book of abstracts. – Вінниця, 2016. – С. 58 -– 60;

12. *Дворак И. Я.* О внутренних радиусах симметричных неналягающих областей.// "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р. – Івано-Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський націонльний університет імені Василя Стефаника 2017. – С. 79 -– 82;

Серед статей 3 статті [3,4,5] опубліковано в журналах, які входять до наукометричної бази даних Scopus.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 79 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професору Бахтіну Олександру Костянтиновичу за постановку задач, корисні поради й рекомендації, а також кандидатам фізико-математичних наук Денезі Ірині Вікторівні й Заболотному Ярославові Володимировичу за плідну співпрацю, постійну увагу до роботи і підтримку при створенні дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Результати попередників, які використовуються в роботі

Відомо, що метод симетризації відіграє значну роль при вирішенні задач геометричної теорії функції комплексної змінної, і має дуже давню історію.

Перші дослідження методу симетризації в геометрії та аналізі на початку 19 століття були виконані Я. Штейнером. Пізніше на початку 20 століття широке застосування методу симетризації здійснено в роботах Харді і Літтвуда [48], Поліа і Сеге [75], Хеймана [79], Дженкінса [47], Маркуса [10], Бернстайна [1], І.П.Мітюка [74], Тамразова [76], Солиніна [48], Дубініна [48, 50], Шлика [48].

Варто відмітити, що в ранніх роботах симетризаційні методи потребували індивідуального пристосування до кожної задачі, що викликало значні труднощі.

Наприкінці 70-х років В.М. Дубінін розробив новий, на той час, симетризаційний метод розділяючого перетворення, який покращив можливості дослідження різноманітних задач [52]. Наприклад, в роботі [50] за допопомогою цього методу розв'язано декілька важливих задач про екстремальне розбиття комплексної площини, розв'язок яких вдалося реалізувати лише за допомогою методу розділяючого перетворення. Варто відзначити, що симетризаційний метод дозволив отримати такі результати, які іншими методами геометричної теорії функції (метод площ, метод контурного інтегрування, метод екстремальних метрик, варіаційний метод, параметричний метод) отримати не вдається. Метод розділяючого перетворення базується на вивченні поведінки інтеграла Діріхле при деяких симетризаційних перетвореннях. Добре відома роль інтеграла Діріхле в ряді класичних задач аналізу, геометрії і математичної фізики.

Ця дисертаційна робота присвячена класичному розділу геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме дослідженню екстремальних задач для неперетинних та частково перетинних областей. Початок розвитку данного напряму було дано в роботі М. О. Лаврентьева [73]. В 1934 році ним була сформульована і розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох односвязних взаємно неперетинних областей комплексної площини.

Розглянемо наступну загальну задачу про неперетинні області. На площині w дано n різних скінчених точок a_1, a_2, ..., a_n, $n > 2$. Функції $w = f_k(z), k = 1, 2, ..., n$, регулярні в крузі $|z| < 1$, однолистно відображають круг $|z| < 1$ на неперетинні одна з одною області B_k, які містять відповідно точки a_k. $k = \overline{1, n}$, і притому, так, що $f_k(0) = a_k, \overline{1, n}$. Досліджуємо проблему про максимум добутку

$$J_n = \prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|$$

відносно всеможливих функцій. У випадку $n = 2$ відповідь на це питання була дана Лаврентьевим М. О. у 1934 році. Наведемо результат:

Теорема 1.1.1 Нехай a_1 і a_2- деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, $a_k \in B_k$, $k = 1, 2$ - довільні взаємно неперетинні односвязні області $\mathbb{C}$, і функції $f_k(z)$ регулярно відображають одиничний круг $U = z \in \mathbb{C} : |z| < 1$ на області $B_k, k = 1, 2$ так, що $f_k(0) = a_k, k = 1, 2$. Тоді має місце наступна нерівність

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \leq |a_1 - a_2|^2$$

. Причому знак рівності досягається, коли області B_1, B_2 є півплощинами, отриманими в результаті видалення з $\mathbb{C}$ серединного перпендикуляра до відрізку $[a_1; a_2]$.

Ця задача в подальшому активно вивчалася. В 50-х роках минулого століття цю задачу досліджував Голузін Г. М. [39]. Він не лише узагальнив постановку задачі М. О. Лаврентьєва для $n \geq 3$, а й розв'язав її у випадку для $n = 3$.

Теорема 1.1.2 Нехай a_1, a_2, a_3 - деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, $B_k, a_k, k = 1, 2, 3$ - довільні взаємно неперетинні односвязні області $\overline{\mathbb{C}}$, і функції $f_k(z)$ регулярно відображають одиничний круг $U = z \in \mathbb{C} : |z| < 1$ на області $B_k, a_k, k = 1, 2, 3$ так, що $f_k(0) = a_k, k = 1, 2, 3$. Тоді має місце наступна нерівність

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \cdot |f_3'(0)| \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_1 - a_2||a_1 - a_3||a_2 - a_3|$$

.

Причому максимум досягається, якщо точки a_1, a_2, a_3 є вершинами правильного трикутника, а функції $w = f_k(z)$, $k = 1, 2, 3$ відображають одиничний круг $|z| < 1$ на три кута величиною $\dfrac{2\Phi}{3}$ з вершиною в центрі трикутника і з бісектисами, які проходять через точки a_1, a_2, a_3. Якщо точки розташовані іншим чином, то максимум досягаєтьсч для функцій $w = f_k(z), k = 1, 2, 3$, одна з яких буде обмежена в крузі $|z| < 1$.

До середини 80-х років переважна більшість задач формулювалася в термігах фіксованих полюсів.

В 1968 році П. М. Тамразов [76] висунув нову, на той час, ідею про те, що цікаво розглянути задачі, які відповідають квадратичним диференціалам, полюси яких мають певну ступвнь свободи. Зокрема, у, вище згаданій роботі, він розглянув задачу, яка відповідає квадратичним диференціалам з п'ятьма вільними простими полюсами. Для вирішення цієї задачі було ним розроблено новий метод дослідження.

Ця ідея П. М. Тамразова в 1973-1975 рр. несподівано, на той час, була застосована в роботах Г.П. Бахтіної [32] до екстремальних задач про неперетинні області, яким відповідають квадратичні диференціали з вільними полюсами другого порядку. У подальшому, задачі такого типу були розвинені в роботах В.М. Дубініна [48, 50], Г. П. Бахтіної [31, 33], О.К. Бахтіна [15], Е.Г. Ємельянова [53, 55] , Г.В. Кузьміної [70, 71], А.Л. Таргонського [?, 9, 38, 77], І. В. Денеги [46] та інших математиків і отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. У 1974 Г. П. Бахтіна [31] сформулювала задачу про знаходження максимуму функціонала

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} R\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – система однозв'язних взаємно неперетинних областей, симетричних відносно одиничного кола, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $R(B,a)$ – конформний радіус області B відносно точки a. Розв'язок задачі для $n = 2$ і $n = 3$ може бути отриманий з результатів робіт М. О. Лаврентьєва [73] та Голузіна Г. М. [39] відповідно. Для $n = 4$ вперше розв'язок задачі був отриманий в роботі в 1974 [31].

В 1984 році в роботі [35] була розглянута більш складна задача про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – система однозв'язих взаємно неперетинних областей, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ – симетричні відносно $|z| = 1$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{U}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$,

$R\,(B,a)$ – конформний радіус області B відносно точки a, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_k \geq 0$.

В 1988 в роботі [50] В.М. Дубінін зробив важливий крок у розвитку цієї теорії зокрема він розглянув та повністю вирішив задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} r\,(B_k, a_k)\,,$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ – система довільних взаємно неперетинних багатозв'язих областей, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$. Варто відзначити, що у вирішеній задачі функціонал було розглянуто для довільних багатозв'язих областей і замість конформного радіусу використано внутрішній радіус області [48].

В роботі [48] запропоновано список відкритих проблем повязаний з цим напрямком. Дві проблеми із цього списку вивчається в даній дисертацій роботі.

Задача 1. Довести, що при кожному фіксованому γ, $\gamma \in (0;n]$ максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B)$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

В 1988 в роботі В. М. Дубініна [50] було розглянуто одну проблему:

Задача 2. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r\,(B_0, 0)\,r\,(B_\infty, \infty)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k)\,, \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a $(a \in B)$.

Задача 2 була розв‘язана для $\gamma = 1/2$ в роботі [72]. У 2008 році ця проблема була узагальнена для випадку, коли точки розміщені на n-променевій системі [15].

Задача 3. При кожному фіксованому $\gamma > 0$ знайти максимум функціоналу

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

при умові, що B_0, B_1, B_2, ..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетинні багатозв'язні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $0 = a_0 \in B_0 \subset U$ причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $(n \geq 2)$ — симетричні відносно точок одиничного кола, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$.

Задача 3 була сформульована в 1994 році [48] при $\gamma = 1$ і в цій же роботі вона була розв‘язана для $\gamma = 1$.Бахтін О. К. запропонував розглянути цю задачу при $\gamma > 0$ в 2015 році [25]. Варто відзначити, що для $0 < \gamma \leq 1$ розв‘язок задачі випливає із роботи [63]. В дисертаційній роботі ми розглядаємо цю проблему при $\gamma > 1$.

Таким чином, ідея П.М. Тамразова про екстремальні задачі з вільними полюсами, які відповідають квадратичним диференціалам, призвела до виникнення нового напряму геометричної теорії функцій, який зараз носить назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Ця ідея виникла на основі багаторічного дослідження задач, які відповідають квадратичним диференціалам з фіксованими полюсами.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню трьох, наведених вище, проблем для вільних полюсів розташованих на одиничному колі або

n- променевих системах.

1.2. Конформний і внутрішній радіуси області та функція Гріна

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ – однозв'язна область, $U = \{z : |z| < 1\}$ – одиничний круг і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення [39], існує конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a) = 0 \in U$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ таке, що здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$. Тоді поняття **конформного радіуса** однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначимо наступним чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

Узагальненням поняття конформного радіуса для багатозв'язних областей є поняття внутрішнього радіуса області, який визначається за допомогою узагальнену функцію Гріна [39].

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ —множина натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина або сфера Рімана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, і $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$ — функція Жуковського, D — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $D \neq \overline{\mathbb{C}}$.

Функцією Гріна області D називається така дійсна функція $g_D(z, z_0)$, яка визначається при всіх z, $z_0 \in D$, $z \neq z_0$, і при кожному фіксованому $z_0 \in D$ виконуються наступні умови:

1) функція $g_D(z, z_0)$ гармонічна як функція від z в області $D \backslash \{z_0\}$;

2) якщо $z \to z_0$, то $g_D(z, z_0) \to +\infty$, при цьому різниця $g_D(z, z_0) - \log \frac{1}{|z - z_0|}$ залишається обмеженою для скінченного z_0, а різниця $g_D(z, z_0) - \log |z|$ обмежена для $z_0 = \infty$;

3) при наближенні до межі ∂D функція $g_D(z,z_0)$ прямує до нуля.

Якщо область D має функцію Гріна (наприклад, у випадку, коли ∂D складається із скінченної кількості замкнених жорданових кривих), то із приведеного означення слідує симетричність і додатність функції $g_D(z,z_0)$ (див. [39], [79]):

$$g_D(z,z_0)=g_D(z_0,z)>0,\quad \forall z,z_0\in D,\quad z\neq z_0.$$

Довільну область $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ завжди можна вичерпати послідовністю областей $D_1\subset D_2\subset\ldots$, для кожної із яких існує функція Гріна. В цьому випадку із теореми Харнака про зростаючі послідовності гармонічних функцій (див. [48]) слідує, що для кожного $z_0\in D\backslash\{\infty\}$ послідовність гармонічних функцій

$$h_{D_k,z_0}(z):=g_{D_k}(z,z_0)-\log\frac{1}{|z-z_0|},\quad z\in D\{z_0\},$$

доозначена по неперервності в точці z_0, рівномірно збігається на компактних підмножинах області D при $k\to\infty$ або $+\infty$, або до деякої гармонічної функції $h_{D,z_0}(z)$, яка не залежить від вибору областей $D_1,D_2,\ldots$. В останньому випадку функція

$$g_D(z,z_0):=h_{D,z_0}(z)+\log\frac{1}{|z-z_0|}$$

називається *узагальненою функцією Гріна* області D, при цьому величина

$$r(D,z_0):=\exp(h_{D,z_0}(z_0))=\exp^{\gamma}$$

називається *внутрішнім радіусом* області D відносно точки z_0 (див. [15], [48]) і позначають $r(D,z_0)$. У випадку, коли послідовність $h_{D_k,z_0}(z)$ рівномірно збігається на компактних підмножинах області D до $+\infty$ при $k\to\infty$, покладемо $r(D,z_0):=+\infty$. Все сказане вище справедливо для $z_0=\infty$ з наступною модифікацією: функції $h_{D_k,\infty}(z)$ визначаються рівностями

$$h_{D_k,\infty}(z) := g_{D_k}(z,\infty) - \log|z|.$$

Для односв'язних областей внутрішній радіус співпадає з конформним радіусом. У випадку нескінченно віддаленої точки маємо

$$g_D(z,\infty) := \log|z| + \gamma + o(1), z \to \infty,$$

де γ – стала Робена області D, $r(D,\infty) = \exp^{\gamma}$ – внутрішній радіус при $z \to \infty$ [48].

Припустимо, що D – однозв'язна і

$$w = \psi(z) = z - a_0 + b_1(z-a_0)^2 + \dots$$

відображає D взаємно однозначно і конформно на круг $|w| < r_0$, так що $\psi(a_0) = 0$, $\psi'(a_0) = 1$. Тоді

$$g_D(z,a_0) = \log\frac{r_0}{|\psi(z)|}$$

– функція Гріна області D в точці a_0, і внутрішній радіус області D відносно a_0 дорівнює r_0. Оскільки $g_D(z,a_0)$ гармонічна всюди в D, крім точки a_0, і якщо z прямує будь-яким чином до межі D, то $\psi(z) \to r_0$ і тому $g_D(z,a_0) \to 0$. Крім того, поблизу $z = a_0$ маємо

$$g_D(z,a_0) = \log\frac{r_0}{|z-a_0||1+o(1)|} = \log\frac{1}{|z-a_0|} + \log r_0 + o(1).$$

Якщо функція $z = f(w) = a_0 + a_1 w + \dots$ відображає круг $|w| < 1$ на область D взаємно однозначно і конформно, то $w = f^{-1}(z) = \frac{z-a_0}{a_1} + \dots$ поблизу $z = a_0$, так що $a_1 f^{-1}(z)$ володіє властивостями функції $\psi(z)$, розглянутими вище. Зокрема, в цьому випадку $|a_1|$ дорівнює внутрішньому радіусу області D в точці a_0.

Внутрішній радіус неспадає з розширенням області [79].

Крім того, функція Гріна є інваріантом при конформному і однолисному відображенні f, тобто $g_{f(D)}(f(z), f(z_0)) = g_D(z,z_0)$, $z \in D\backslash\{z_0\}$.

Це дає змогу в ряді випадків знайти аналітичний вигляд для функції Гріна. Справді, безпосередньою перевіркою отримуємо, що функція Гріна круга $U = \{z : |z| < 1\}$ з полюсом в початку координат має вигляд $g_U(z, 0) = -\log|z|$. Тому функція Гріна того ж круга U, але з полюсом в будь-якій точці $z_0 \in U$ визначається формулою

$$g_U(z, z_0) = \log\left|\frac{1 - \overline{z}_0 z}{z - z_0}\right|.$$

Для довільної відкритої множини D площини $\overline{\mathbb{C}}$ під функцією Гріна $g_D(z, z_0)$ будемо розуміти функцію Гріна зв'язної компоненти множини D, яка містить точку z_0. Якщо множина D має функцію Гріна з полюсом в точці $z_0 \in D$, то вона має функцію Гріна з полюсом в будь-якій іншій точці цієї множини.

Кожна область G, для якої існує узагальнена функція Гріна володіє властивістю: для всіх точок $\zeta \in \partial G$ за виключенням, можливо, деякої множини нульової логарифмічної ємності [15, 39, 48, 79], і для всіх $w \in G$ існує і дорівнює нулю границя $\lim\limits_{z \to \zeta} g_G(z, w)$; такі точки ζ називаються *регулярними граничними точками* області G (див., наприклад, [39]).

Далі під ємністю ми завжди будемо розуміти логарифмічну ємність. Для компакта $F \subset \mathbb{C}$ його (логарифмічна) ємність визначається наступними рівностями:

$$cap\, F := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}} \setminus F, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}} \setminus F, \infty)$ скінченна; $cap\, F := 0$ — в протилежному випадку.

В цій дисертаційній роботі використовуються деякі відомості з теорії квадратичних диференціалів, з якими можна ознайомитись в наступних роботах: [15, 46, 47, 79]

1.3. Розділяюче перетворення областей

В 80-х роках в геометричній теорії функцій був розроблений В.М. Дубініним метод розділяючого перетворення (див., наприклад,, [50], [48], [51]). Суть цього методу полягає в наступному: досліджуваний об'єкт розбивається на частини, які відображаються на частини спеціального вигляду; потім із останніх конструюються симетричні об'єкти або шляхом склеювання, або за допомогою відомих способів симетризації. Важливість розділяючого перетворення полягає в тому, що в ряді випадків воно дозволяє задачу із великою кількістю параметрів звести до ряду однотипних задач з меншим числом параметрів. Ми у цій роботі будемо використовувати часткові випадки цього досить загального методу. Наведемо деякі відомості про розділяюче перетворення.

Розглянемо систему різних точок розширеної комплексної площини $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$ таких, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\arg a_{n+1} := 2\pi, \quad a_0 := a_n, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1} - \arg a_k\right), \ k = \overline{1, n}.$$

Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Нехай

$$\Gamma_k := \left\{w : \ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\right\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\Gamma_0 := \Gamma_n, \ \Gamma_{n+1} := \Gamma_1.$$

Тоді функція

$$z_k\left(w\right) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}, \qquad z_0 := z_n, \ z_{n+1} := z_1,$$

конформно і однолисто відображає області Γ_k, $k = \overline{1, n}$, на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$ таким чином, що виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_m|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} |w - a_m|, \quad w \in \overline{\Gamma_k}, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n,\ m = k, k+1;\ a_{n+1} := a_1;$$

$$|z_k(w)| = |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{\Gamma_k} \quad w \to 0,\ w \to \infty.$$

Нехай $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ — сімейство областей, які задовольняють умовам:

$$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1, n}, \quad \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

$$B_k \bigcap B_m = \varnothing, \qquad k \neq m,\ k, m = 0, 1, ..., n, n+1.$$

Позначимо через $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k\right)$, яка містить точку $z_k(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, з її відображенням відносно уявної осі, а через $\Omega_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $\Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}$, — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}\left(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_{k-1}\right)$, яка містить точку $z_{k-1}(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, з її відображенням відносно уявної осі. Сімейство двох симетричних відносно уявної осі областей $\left\{\Omega_k^{(1)}, \Omega_{k-1}^{(2)}\right\}$ називається результатом розділяючого перетворення області B_k відносно сімейства двох функцій $\{z_k, z_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$.

Аналогічно, результатом розділяючого перетворення області B_0 відносно сімейства функцій $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ називається сімейство симетричних відносно уявної осі областей $\Omega_k^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані внаслідок об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_0 \bigcap \Gamma_k)$, $k = \overline{1, n}$, яка містить точку 0, з її відображенням відносно уявної осі. Результатом розділяючого перетворення області B_{n+1} відносно сімейства функцій $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ називається сімейство симетричних відносно уявної осі областей $\Omega_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані внаслідок об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_{n+1} \bigcap \Gamma_k)$, $k = \overline{1, n}$, яка містить точку ∞, з її відображенням відносно уявної осі. Система областей $\left\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\right\}$ є системою попарно неперетинних областей. Поняття внутрішнього радіуса $r\left(B,a\right)$ області B відносно точки a див. п. 2.1.

Теорема 1.3.1. *Мають місце наступні нерівності:*

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},z_k\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\cdot\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},z_{k-1}\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad\forall k=\overline{1,n},\qquad(1.1)$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}},\qquad(1.2)$$

$$r\left(B_{n+1},\infty\right)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.\qquad(1.3)$$

Якщо для областей B_k, $k=\overline{0,n+1}$, *існує класична функція Гріна, то в нерівностях* (1.1) *знак рівності досягаєтьса тоді і тільки тоді, коли області* B_k, $k=\overline{1,n}$, *відповідно, симетричні відносно прямих* $w=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$; *в нерівностях* (1.2) *і* (1.3), *відповідно, знак рівності досягаєтьса тоді і тільки тоді, коли області* B_0 *і* B_{n+1} *симетричні відносно сімейства прямих* $w=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження проблем, які вивчаються в дисертаційній роботі, наведено необхідні означення (конформний радіус, функція Гріна, узугальнена функція Гріна, внутрішній радіус і т.д.), теореми, які використовуються при доведенні основних результатів дисертації.

Зокрема у розділі 1, сформульовані основні відкриті проблеми про екстремальне розбиття комплексної площини, наведено короткий історичний опис розвитку методу симетризації в геометричній теорії функції комплексної змінної. Представлено класичні результати М.О. Лаврентьєва та Г.М. Голузіна, з яких бере початок напрямок геометричної теорії функції про екстремальні задачі з неперетинними областями. Сформульована ідея П.М. Тамразова, яка дала поштовх для розвитку нового напрямку в задачах про неперетинні області, який в подальшому отримав назву "задачі про екстремальне розбиття площини з вільними полюсами".

У розділі 1, також, наведено три відкриті проблеми, які вивчаються в дисертаційній роботі. Дано короткий опис основного методу дослідження, який використовується вроботі, а саме симетризаційного методу розділяючого перетворення.

РОЗДІЛ 2

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ПРО МАКСИМУМ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ВЗАЄМНО НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ

2.1. Результати попередників, які використовуються в розділі

В цьому розділі розглядається екстремальна задача, яку було сформульовано в 1994 році в роботі [48] стр. 68, 9.2 у списку нерозв'язаних проблем, а потім повторено в аналогічному списку в 2009 році в монографії [51].

Задача 2.1.1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leq n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію (див. рис. 2.1).

Задача 2.1.1 має розв'язок тільки при $\gamma \leqslant n$, оскільки як тільки $\gamma = n + \varepsilon$ задача 2.1.1 не має розв'язку. Ця проблема вивчалася в багатьох роботах. На даний момент відомі тільки часткові результати для цієї задачі, повністю вона не доведена. Ця екстремальна задача відноситься до класу екстремальних задач з так званими "вільними" полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Кожній екстремальній проблемі в

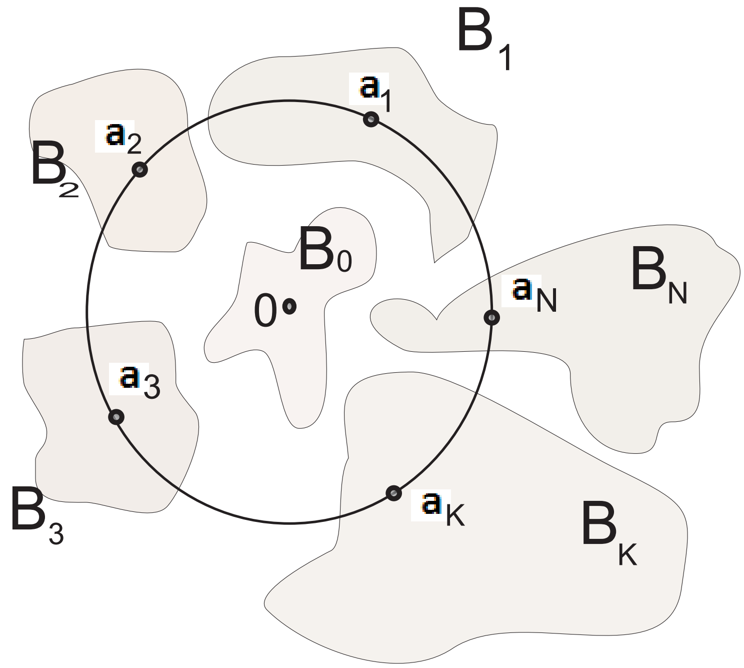

Рис. 2.1: Деяка конфігурвція областей

силу відомого принципа О. Тейхмюллера відповідає деякий квадратичний диференціал (див. [47, с. 49]). До середини 70-х р.р. основні екстремальні проблеми в задачах про неперетинні області були пов'язані з такими задачами, яким відповідають квадратичні диференціали з фіксованими полюсами.

В 1968 році в журналі "Известия АН СССР" П.М. Тамразов в статті [76] привернув увагу спеціалістів до дослідження екстремальних задач яким відповідають квадратичні диференціали полюси яких не фіксовані, а мають певну свободу. В цій роботі П.М. Тамразов вперше розглянув та повністю розв'язав одну дуже важливу екстремальну задачу геометричної теорії функцій комплексної змінної з п'ятьма простими полюсами. Ця ідея П. М. Тамразова в 1973-1975 рр. вперше несподівано, на той час, була застосована в роботах Г.П. Бахтіної [32] до екстремальних задач про неперетинні області, яким відповідають квадратичні диференціали з вільними полюсами другого порядку.

В 1984 році в роботі [35] Г.П. Бахтіної була сформульована загальна екстремальна проблема про екстремальне розбиття комплексної площини у випадку однозв'язних областей. Природньо, що в 1974 році ще не були готові методи для успішного розв'язання задач подібного типу. В роботах Г.П. Бахтіної вдалося розв'язати цю проблему тільки при початкових значеннях параметра n, а саме $n = 1, 2$.

В 1988 році В.М. Дубінін [50] на основі свого методу розділяючого перетворення зміг розв'язати декілька важких екстремальних задач про неперетинні області з вільними полюсами на колі. Зокрема, вище згадана задача 2.1.1, була ним розв'язана для $\gamma = 1$ і всіх значень натурального параметра $n \geqslant 2$. При $n = 2, 3$ і 4 із цього результату випливають відомі теореми М.О. Лаврентьєва [73], Г.М.Голузіна [39], Г.В. Кузьміної [71].Далі Л.В. Ковальов в 1996 році [65] отримав розв'язок Задачі 2.1.1 при дуже суттєвих обмеженнях на геометрію розташування систем точок на одиничному колі, а саме для таких систем точок для яких виконується наступна нерівність $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1, n}, \quad n \geqslant 5$ (див. озн. с.) Тобто, він розв'язав цю задачу для достатньо вузького підкласу конфігурацій областей. Слід відмітити, що результат роботи Ковальова [65] цікавий як сам по собі, так і методом дослідження. В 2003 році Г.В. Кузьміна [70] розв'язала Задачу 1 для $n \geq 2$ при $\gamma \in [0; 1]$ у випадку однозв'язних областей іншим методом.

В 2011 році Я.В. Заболотний [58] отримав розв'язок задачі 2.1.1 для $n \geq 5$ і $0 \leq \gamma \leq \sqrt[4]{n}$, тобто справедлива наступна теорема:

В 2012 році в роботі І.В. Денеги [43] вдалося отримати розв'язок Задачі 2.1.1 для $n \geq 5$ і $0 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$, який подано в наступній теоремі.

В 2013 році Я.В. Заболотним в роботі [57] доведено теорему, яка дає характеристику екстремальних областей за умови, що $0 \leq \gamma \leq n^{\alpha}$, де

$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$, починаючи з деякого номера $n = n_0(\alpha)$. Результати цього розділу суттєво уточнюють цю теорему.

Теорема 2.1.1. *[57] Для довільного $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує натуральне n_0, таке, що для $n \geq n_0$ і $0 < \gamma \leq n^{\alpha}$ виконуеться нерівність:*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$, причому знак рівності досягаеться, наприклад, для $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0, D_k – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Причому в якості n_0 можна взяти $\left[e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2}} \right] + 1$.

В 2011-2012 роках Я.В. Заболотним в роботах [58,60] уточнено інтервал параметра γ для $n \in \{2, 3, 4\}$, тобто отримано наступний результат:

Теорема 2.1.2. [59] *Нехай $\gamma_2 = 1,1$, $\gamma_3 = 1,5$, $\gamma_4 = 1,7$. Тоді для кожного фіксованого $n \in \{2, 3, 4\}$ і довільного γ, $0 < \gamma \leq \gamma_n$ виконується нерівність:*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1,..., B_n, – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ - внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0, D_k – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

В 2017 році А. К. Бахтіним в роботі [17] вдалося отримати наступну оцінку:

Теорема 2.1.3. [17] *Нехай* $\in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \gamma > 0$. *Нехай* $B_k, k = \overline{0,n}$ *система взаємно неперетинних односвязних областей* $0 \in B_0\overline{\mathbb{C}}, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, |a_k| = 1, k = \overline{1,n}, r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \geq J_n^0(\gamma)$. *Тоді виконується нерівність:*

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[n^{\frac{1}{2}} \cdot J_n^0(\gamma)\right]^{-\frac{1}{n-\gamma}},$$

де

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

В 2016 р. в роботі [64] одержано розв'язок Задачі 1 для $n \geq 541$ і $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$.

Теорема 2.1.4. [64] *Для довільного натурального* $n \geq 541$ *і* $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$ *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geq 2)$ *- попарно неперетині області в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ *- внутрішній радіус області* B_j *в точці* a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, *причому знак рівності досягається, зокрема, за умов* $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, *де* a_k^0, D_k, *- відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

В подальшому задача поділися на дві частини: задача без обмежень на кути α_k і задачу з обмеженнями на кути α_k, а саме $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$.

В 2013 році в роботі [19] було отримано розв'язок Задачі 2.1.1 для $n \geq 5$ і $0 < \gamma \leq n^{0{,}38}$.

Теорема 2.1.5. [19] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}38}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $|a_k| = 1$, *і будь-якого набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, *(*$k = \overline{1,n}$*), справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де D_k, d_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, *— кругові області та полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

В роботі [27] наступну теорему:

Теорема 2.1.6. [27] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4{,}17$, $\gamma_5 = 5{,}71$, $\gamma_6 = 7{,}5$, $\gamma_7 = 9{,}53$, $\gamma_8 = 11{,}81$, *та* $\gamma_n = 0{,}1215\, n^2$ *для* $n \geqslant 9$. *Тоді для довільної системи різних точок одиничного кола* $|a_k| = 1$ *такої, що* $0 < \alpha_k < 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ *та для довільної системи областей* D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, *які задовольняють умову часткового налягання відносно точок одиничного кола, справедлива наступна нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2.1)$$

Рівність досягається якщо a_k *і* D_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного дифеенціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

2.2. Основні результати розділу 2

В 2013 році Я.В. Заболотним в роботі [57] доведено теорему 2.1.1, яка дає характеристику екстремальних областей за умови, що $0 \leq \gamma \leq n^{\alpha}$, де $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$, починаючи з деякого номера $n = n_0(\alpha)$.

Згідно теореми 2.1.1 для випадку, коли $\alpha = 0.45$ отримаємо $n_0 = [e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-0,45\right)^2}}] + 1 = 1783377973$. Розглянемо випадок, коли $\alpha = 0.5$. В цьому випадку $n_0 = [e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-0,5\right)^2}}] + 1 = 4311231461000001$. В роботі [64] вдалося знизити номер до $n_0 = 541$, $n \geq n_0$ при $0 < \gamma \leq n^{0.5}$

Основні результати цього розділу представлені в наступних теоремах, які вказують мінімальние $n_0, n \geq n_0$ при $0 < \gamma \leq n^{0.45}$, $0 < \gamma \leq n^{0.5}$, присвячені значному уточненню номера n_0, а саме мають місце наступні результати:

Теорема 2.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,45}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1, n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k $(k = \overline{1, n},\ n \geqslant 12)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{2.1}$$

Теорема 2.2.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 126$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0,5}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0)\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k $(k = \overline{1,n}\,)$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1) відповідно*

Теорема 2.2.3. *Нехай* $n = 4$, $\gamma \in (1; 2.09]$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,4}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod_{k=1}^{4} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, d_0)\cdot\prod_{k=1}^{4} r(D_k, d_k),$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k $(k = \overline{1,4})$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1) відповідно*

Структура траєкторій квадратичного диференціала 2.1 схематично показана на рис 2.2.

Наслідок 2.2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}45}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n}\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k $(k = \overline{1,n},\ n \geqslant 12)$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1) відповідно.*

Наслідок 2.2.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 126$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}5}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок одиничного кола* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і будь-якого набору взаимно неперетинних областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$,

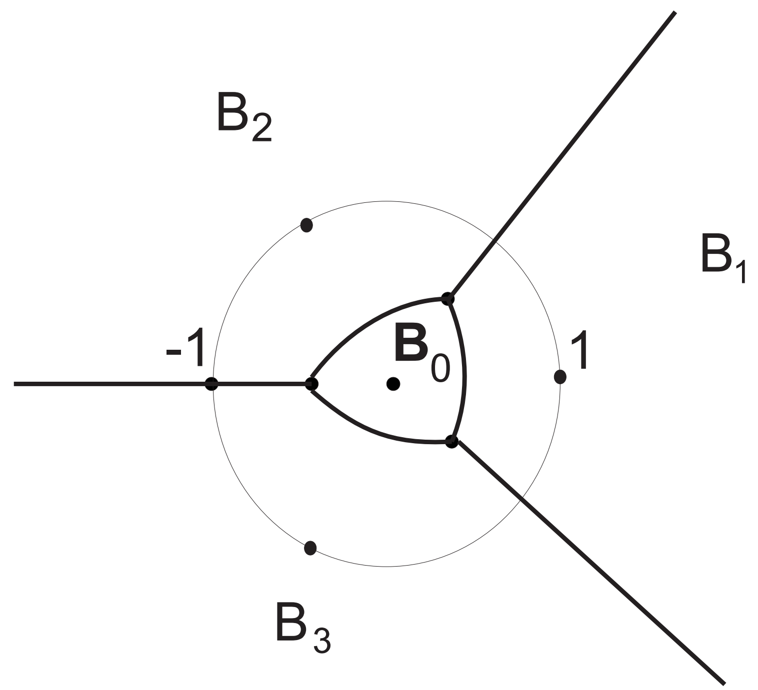

Рис. 2.2: Структура траєкторій квадратичного диференціала 2.1 для $n=3$

$a_0 = 0 \in B_0$, $k=\overline{1,n}$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

де області D_0, D_k *і точки* d_0, d_k ($k=\overline{1,n}$, $n \geqslant 12$) – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (2.1) відповідно.*

2.3. Доведення Теореми 2.2.1

Введемо систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Функції $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ є прийнятними для розділяючого перетворення областей B_0, B_k, $k=\overline{1,n}$, з урахуванням кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, задає ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$

зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. В свою чергу, $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Нехай $\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$. З визначення функції $\pi_k(w)$ випливає, що

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Використовуючи результати роботи [48, 50] ми отримаємо нерівність

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{2.1}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{2.2}$$

Нерівність (2.1) — (2.2) повністю досліджена в Теоремі 1.9 [48]. Використовуючи ці результати ми отримаємо

$$J_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дальше,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\times\tag{2.3}$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, i \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, -i \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, за допомогою розділяючого перетворення та формули (2.3), ми отримали оцінку функціонала $J_n(\gamma)$ через n функціоналів, заданих на трійках попарно неперетинних областей $\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}$ відносно відповідних точок $0, -i, i$.

При кожному $k = \overline{1, n}$ виконується співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) r \left(\Omega_k^{(1)}, -i \right) r \left(\Omega_k^{(2)}, i \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} S(\alpha_k \sqrt{\gamma}) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2} = S(\sigma), \quad \sigma \in [0, 2].$$

Тоді використовуючи всі попередні міркування, отримаємо остаточну нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^{n} S \left(\alpha_k \sqrt{\gamma} \right) \right]^{1/2} = \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P \left(\alpha_k \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0, 2].$$

Відмітимо, що права частина останньої нерівності містить величини, які залежать від кутових параметрів задачі.

Згідно методу роботи [15, с.255], необхідно відкинути випадок, коли $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, причому $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$.

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k) \right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{2.4}$$

Перший множник оцінюється за допомогою відомої теореми М.А. Лаврентьєва [73], а саме завдяки нерівності

$$r(B_0,0)r(B_k,a_k) \leqslant |a_k|^2 = 1, \quad k=\overline{1,n}.$$

Таким чином, справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n}[r(B_0,0)r(B_k,a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \leq 1.$$

Другий множник виразу (2.4) оцінимо, використовуючи теорему В.М. Дубініна [15, 52] маємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

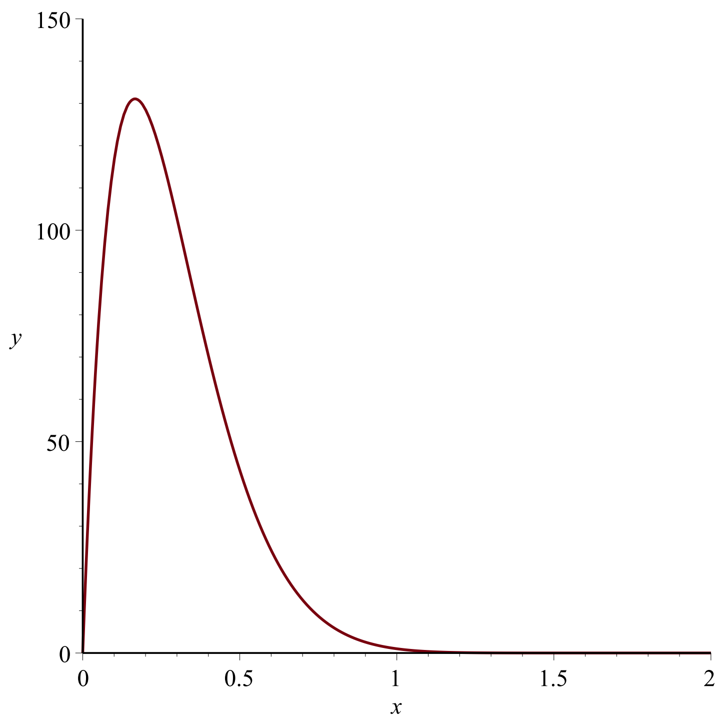

Рис. 2.3: Графік функції $f(x)=x\,(2-x)^{n-1}, n=12$

Отже, використовуючи рівність (2.4) і вище наведені міркування, маємо оцінку

$$\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Далі, з нерівності Коші (про зв'язок між середнім арифметичним та середнім геометричним) маємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Отже, маємо наступну нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Остаточно маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

де $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$, причому $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Використовуючи результати робіт [15, 50, 65, 70], отримаємо що

$$J_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

де $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0^{(0)} = 0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала, відповідно.

Введемо позначення.

Нехай

$$O_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(B_0^{(0)}, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})},$$

де $B_0, ..., B_n$ — довільна система областей та точок $a_k, k = \overline{1, n}$, які задовольняють умови теореми.

Розглянемо величину $O_n(\gamma) = J_n(\gamma)/J_n^0(\gamma)$ для випадку, коли $\alpha_0 \sqrt{\gamma} \geqslant 2$.

З вище наведеного слідує, що виконуються наступні нерівності:

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[2^n \cdot \alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} =$$

$$= \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-\gamma-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $O_n(\gamma)$ через добуток функцій вище наведеного вигляду. Подальше дослідження буде пов'язане з вивченням поведінки цих функцій. Для зручності досліджень, позначимо ці функції наступним чином:

$$f_1(\gamma, n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}},$$

$$f_2(\gamma, n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(\gamma, n) = \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_4(\gamma, n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Таким чином, ми отримали

$$O_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} =$$

$$= f_1(\gamma,n) \cdot f_2(\gamma,n) \cdot f_3(\gamma,n) \cdot f_4(\gamma,n) \cdot f_5(\gamma,n) \cdot f_6(\gamma,n) \cdot .$$

Дослідимо кожну функцію окремо $O_n(\gamma)$ і покажемо, що $J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma)$ при $\gamma \in (1, n^{0,45}]$, $n \geqslant 12$.

Розглянемо функцію $f_1(\gamma,n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}$ (див рис. 2.10).

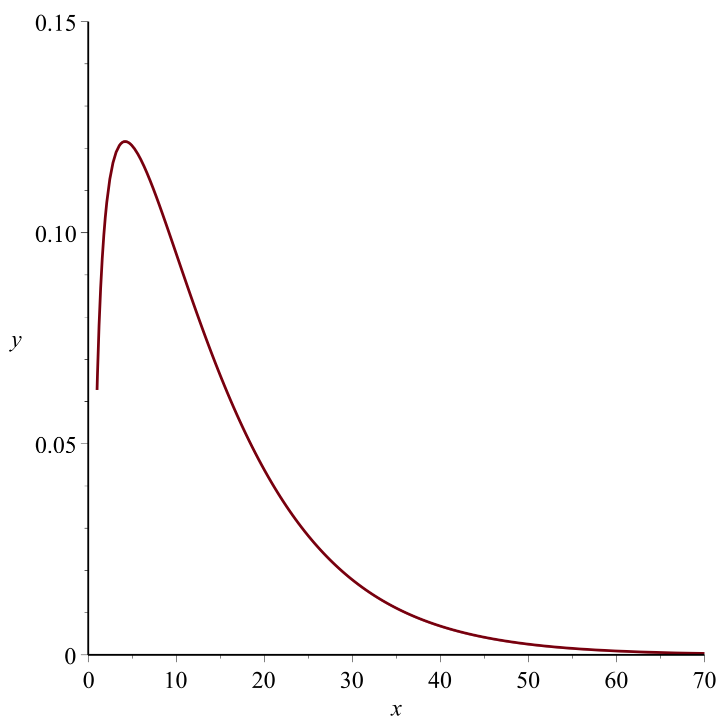

Рис. 2.4: Графік функції $f_1(\gamma,n)$.

Фіксуємо $\gamma = n^{0.45}$ і дослідимо кожну функцію за допомогою стандартних методів математичного аналізу. Отже,

$$f_1(n) := \left(\frac{n}{4}\right)^{n^{0.45}+1} \cdot \left(1-\frac{1}{n^{0.225}}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0.55}}}$$

Таким чином, необхідно дослідити функцію

$$f_1(x) := \left(\frac{x}{4}\right)^{x^{0.45}+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^{0.225}}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{0.55}}}$$

Очевидно, що

$$lnf_1(x) = (x^{0.45}+1)ln\left(\frac{x}{4}\right) + (x - 1 - \frac{x-1}{x^{0.55}})ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.225}}\right)$$

Тоді, для похідної маємо наступне співвідношення

$$(lnf_1(x))\prime = \frac{x^{0.45}+1}{x} + \frac{0.45ln(\frac{x}{4})}{x^{0.55}} + \left(1 - \frac{0.45}{x^{0.55}} - \frac{0.55}{x^{1.55}}\right) ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.225}}\right) +$$

$$+\frac{0.225}{x^{0.225}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.225}}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{0.45}{x^{0.55}} - \frac{0.55}{x^{1.55}}\right) ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.225}}\right) +$$

$$+\frac{0.225}{x^{0.225}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.55}}\right)\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.225}}}\right) + \frac{x^{0.45}+1}{x} + \frac{0.45ln(\frac{x}{4})}{x^{0.55}}$$

Скористаємось розкладом в ряд $ln(1-t)$ будемо мати наступну нерівність

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}}[\left(1 - \frac{0.45}{x^{0.55}} - \frac{0.55}{x^{1.55}}\right)\left(1 + \frac{1}{2x^{0.225}} + \frac{1}{3x^{0.45}} + \frac{1}{4x^{0.675}} + \frac{1}{5x^{0.9}}\right) -$$

$$-0.225\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.225}}}\right) - \frac{1}{x^{0.325}} - \frac{1}{x^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{x}{4})}{x^{0.325}}] \tag{2.5}$$

Якщо $x \geqslant 90$, тоді, враховуючи попередні міркування, і 2.5 маємо остаточний висновок

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}}[\left(1 - \frac{0.45}{90^{0.55}} - \frac{0.55}{90^{1.55}}\right) -$$

$$-0.225\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{90^{0.225}}}\right) - \frac{1}{90^{0.325}} - \frac{1}{90^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{90}{4})}{90^{0.325}}] \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \cdot 0.02136 < 0$$

Отже, функція $f_1(x)$ монотонно спадає на проміжку $x \in [90, \infty]$. Аналогічно доведемо монотонність функції на проміжках $x \in [70, 90]$, $x \in [50, 70]$, $x \in [30, 50]$, $x \in [20, 30]$.

Нехай $x \in [70, 90]$, тоді

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \times$$
$$\times [\left(1 - \frac{0.45}{70^{0.55}} - \frac{0.55}{70^{1.55}}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 90^{0.225}} + \frac{1}{3 \cdot 90^{0.45}} + \frac{1}{4 \cdot 90^{0.675}} + \frac{1}{5 \cdot 90^{0.9}}\right) -$$
$$-0.225\left(1 - \frac{1}{90}\right)\left(1 - \frac{1}{90^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{70^{0.225}}}\right) - \frac{1}{70^{0.325}} - \frac{1}{70^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{87}{4})}{87^{0.325}}] \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \cdot 0.238543 < 0$$

Нехай $x \in [50, 70]$, тоді аналогічно попередньому отримаємо

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{0.45}{50^{0.55}} - \frac{0.55}{50^{1.55}}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 70^{0.225}} + \frac{1}{3 \cdot 70^{0.45}} + \frac{1}{4 \cdot 70^{0.675}} + \frac{1}{5 \cdot 70^{0.9}}\right) -$$
$$-0.225\left(1 - \frac{1}{70}\right)\left(1 - \frac{1}{70^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{50^{0.225}}}\right) - \frac{1}{50^{0.325}} - \frac{1}{50^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{70}{4})}{70^{0.325}} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \cdot 0.193573 < 0$$

Нехай $x \in [30, 50]$, тоді аналогічно

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{0.45}{30^{0.55}} - \frac{0.55}{30^{1.55}}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 50^{0.225}} + \frac{1}{3 \cdot 50^{0.45}} + \frac{1}{4 \cdot 50^{0.675}} + \frac{1}{5 \cdot 50^{0.9}}\right) -$$
$$-0.225\left(1 - \frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{1}{50^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{30^{0.225}}}\right) - \frac{1}{30^{0.325}} - \frac{1}{30^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{50}{4})}{50^{0.325}} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \cdot 0.14253 < 0$$

Нехай $x \in [20, 30]$, тоді, вище згадана нерівність, має вигляд

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{0.45}{20^{0.55}} - \frac{0.55}{20^{1.55}}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 30^{0.225}} + \frac{1}{3 \cdot 30^{0.45}} + \frac{1}{4 \cdot 30^{0.675}} + \frac{1}{5 \cdot 30^{0.9}}\right) -$$

$$-0.225\left(1 - \frac{1}{30}\right)\left(1 - \frac{1}{30^{0.55}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{20^{0.225}}}\right) - \frac{1}{20^{0.325}} - \frac{1}{20^{0.775}} - \frac{0.45ln(\frac{30}{4})}{30^{0.325}} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{x^{0.225}} \cdot 0.055658 < 0$$

Таким чином для всіх $x \in [20, \infty], f_1(x)$ монотонно спадає, звідси отримаємо, $f_1(x) < f_1(20) \leqslant 0.043821, x \geqslant 20.$

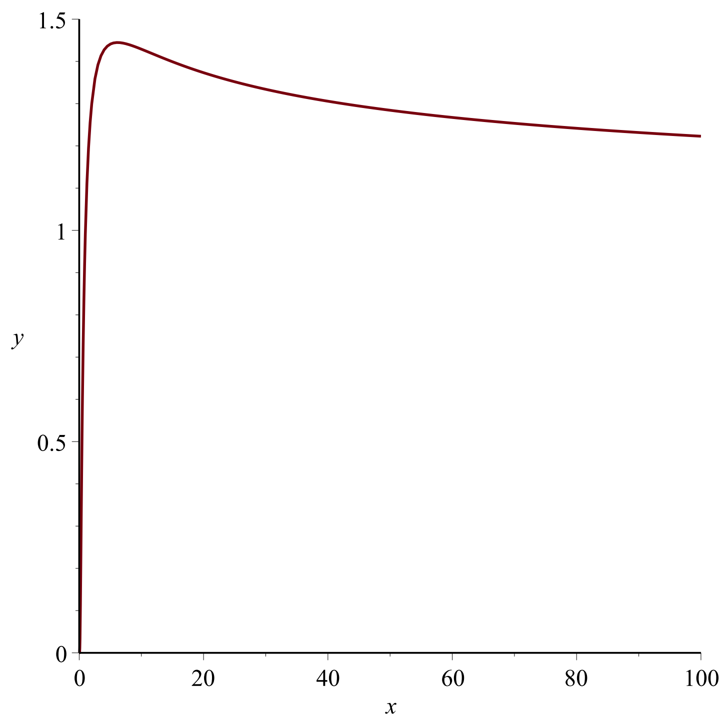

Рис. 2.5: Графік функції $f_2(\gamma, n)$.

Для функції $f_2(\gamma, n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}$ (див рис. 2.5) маємо наступне співвідношення при фіксованому $\gamma = n^{0.45}$:

$$f_2(n) = \left(n^{0.55}\right)^{\frac{1}{n^{0.55}}}$$

Отже, необхідно дослідити наступну функцію

$$f_2(x) = \left(x^{0.55}\right)^{\frac{1}{x^{0.55}}}.$$

Тоді,

$$ln(f_2(x)) = \frac{0.55ln(x)}{x^{0.55}}.$$

Для похідної маємо

$$ln\prime(f_2(x)) = \frac{0.55}{x^{1.55}}\left(1 - 0.55ln(x)\right).$$

Легко показати, що

$$ln\prime(f_2(x)) < 0, x > 7$$

Отже, функція $f_2(x)$ спадає при $x > 7$. Звідси слідує

$$f_2(x) < f_2(20) \approx 1,373243, x \geqslant 20.$$

Розглянемо наступну функцію

$$f_3(\gamma, n) = \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}.$$

Очевидно, що $f_3(\gamma, n)$, (див рис. 2.6) $f_3(\gamma, n) \leqslant 1$.

При дослідженні функції $f_4(\gamma, n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}$ (див рис. 2.7) отримаємо, що при фіксованому $\gamma = n^{0.45}$, і довільному $x \geqslant 20$, виконується наступна нерівність:

$$f_4(x) = \left(\frac{1+\frac{1}{x^{0.775}}}{1-\frac{1}{x^{0.775}}}\right)^{2x^{0.225}} \leqslant (3e)^{2x^{-0.55}},$$

$$f_4(20) \leqslant 2.556216, x \geqslant 20.$$

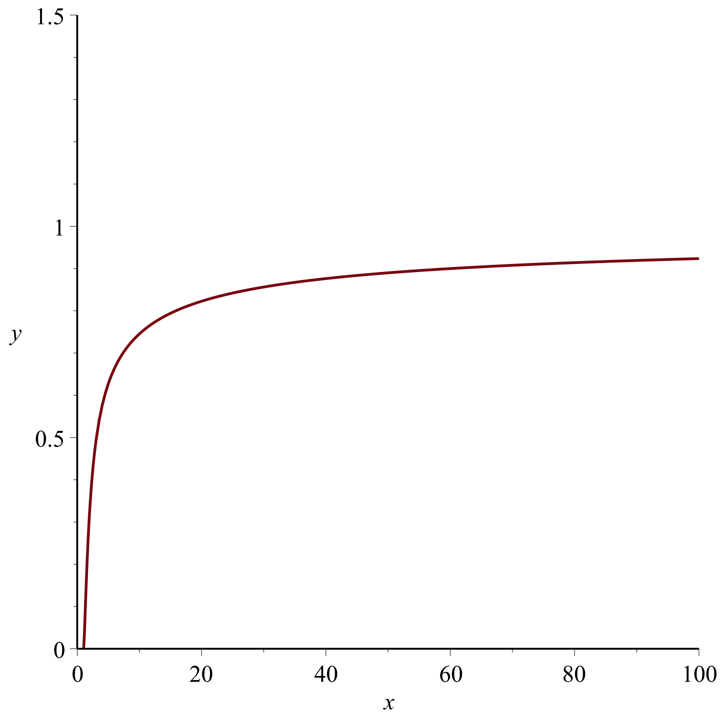

Рис. 2.6: Графік функції $f_3(\gamma, n)$.

Тепер дослідимо поведінку функції $f_5(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$ (див рис. 2.8), для якої, враховуючи дослідження попередніх фунцій, маємо наступне:

$$f_5(x) = \left(\frac{4}{x^{0.225}}\right)^{1-\frac{1}{x^{0.55}}}$$

При $x > 8, (ln(f_5(x)))\prime < 0$, функція $f_5(x)$ строго спадає. Отже, остаточно маємо

$$f_5(x) < f_5(20) \approx 1.777387, x \geqslant 20$$

Для функції $f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}$ (див рис. 2.9) виконуються наступні співвідношення

$$f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-\gamma\frac{n-1}{n}} =$$

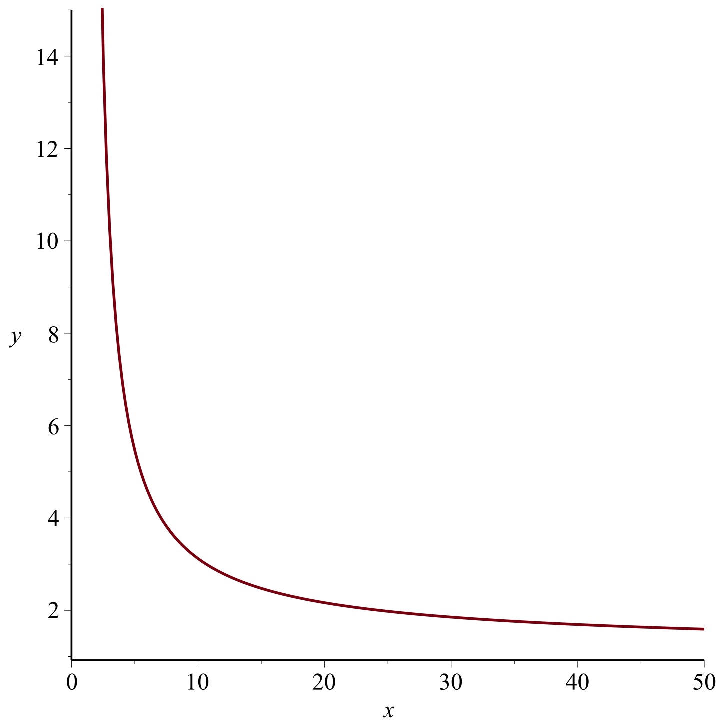

Рис. 2.7: Графік функції $f_4(\gamma, n)$.

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\gamma^{\frac{n-1}{n}}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e < 3.$$

Враховуючи всі попередні результати при $n \geqslant 20$, отримуємо

$$f_1(\gamma, n) \leqslant 0.043821,$$

$$f_2(\gamma, n) \leqslant 1,373243,$$

$$f_3(\gamma, n) \leqslant 1.$$

$$f_4(\gamma, n) \leqslant 2.556216,$$

$$f_5(\gamma, n) \leqslant 1.777387,$$

$$f_6(\gamma, n) < 3,$$

Отже,

$$O_n(\gamma) \leqslant f_1(\gamma, n) \cdot f_2(\gamma, n) \cdot f_3(\gamma, n) \cdot f_4(\gamma, n) \cdot f_5(\gamma, n) \cdot f_6(\gamma, n) =$$

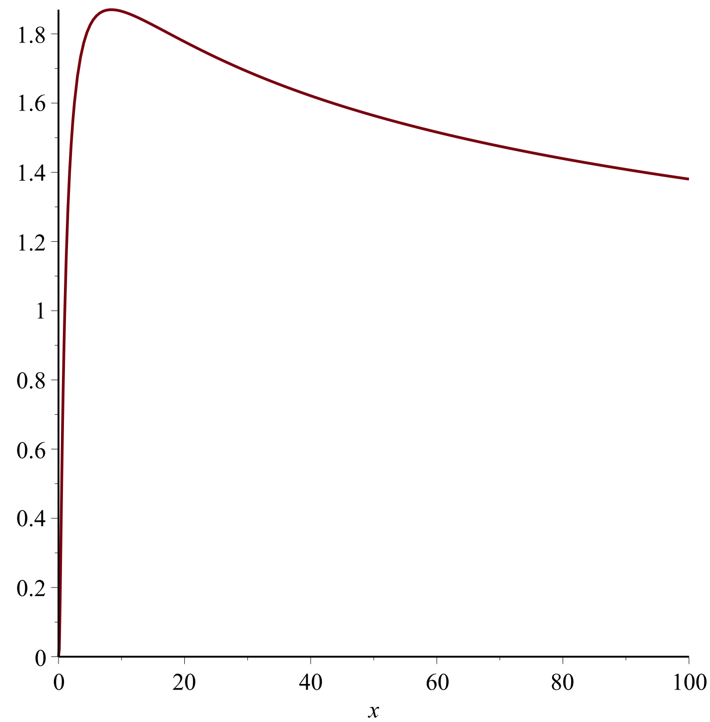

Рис. 2.8: Графік функції $f_5(\gamma, n)$.

$$\leqslant 0.043821 \cdot 1,373243 \cdot 1 \cdot 2.556216 \cdot 1.777387 \cdot 3 \leqslant 0.82022 < 1.$$

Для $n \in [12, 20]$ безпосередні обчислення представлені в таблиці нижче.

n	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$O_n(y)$
11	0,08890	1,4229	0,7578	2,9405	1,8595	2,0101	1,0536
12	0,08290	1,4168	0,7686	2,7930	1,8521	2,0403	0,9529
13	0,07709	1,4108	0,7781	2,6699	1,8437	2,0672	0,8611
14	0,07150	1,4049	0,7865	2,5655	1,8347	2,0912	0,7777
15	0,06617	1,3992	0,7940	2,4758	1,8254	2,1130	0,7020
16	0,06112	1,3936	0,8008	2,3977	1,8158	2,1327	0,6335
17	0,05636	1,3882	0,8070	2,3291	1,8061	2,1507	0,5713
18	0,05189	1,3830	0,8126	2,2683	1,7965	2,1673	0,5152
19	0,04771	1,3780	0,8178	2,2140	1,7869	2,1826	0,4644
20	0,04382	1,3732	0,8226	2,1652	1,7774	2,1967	0,4185

Таким чином, враховуючи попередні міркування, ми отримали, що $O_n\left(n^{0,45}\right) < 1$ при $n \geqslant 12$. Необхідно довести, що нерівність $O_n(\gamma) < 1$ справедлива для $n \geqslant 12$ і $\gamma \in \left(1, n^{0,45}\right)$.

Покажемо, що при кожному $n \geqslant 12$, функція $f_n(\gamma) =$

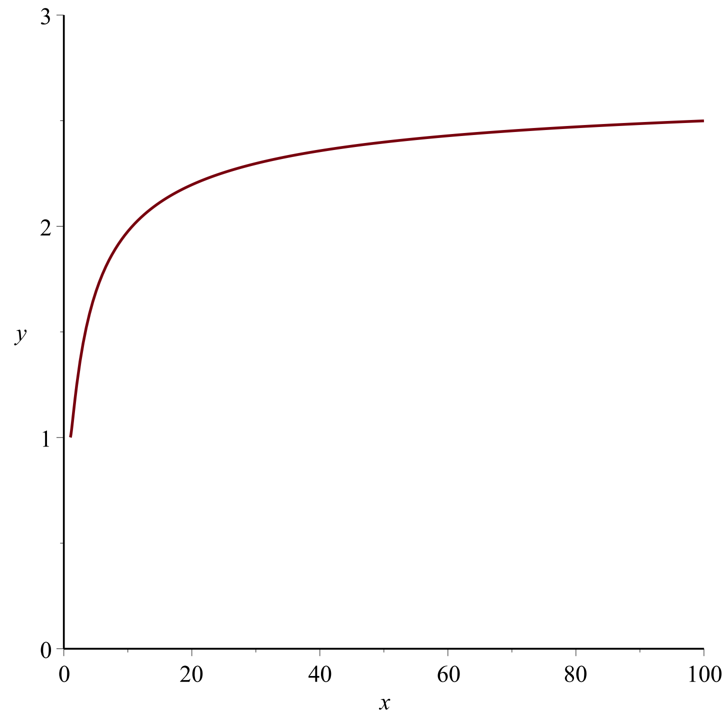

Рис. 2.9: Графік функції $f_6(\gamma, n)$.

$\left[\frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$ монотонно зростає по γ на проміжку $(1; n^{0,45})$.

Справедливі співвідношення

$$\ln(f_n(\gamma)) = (1-\frac{\gamma}{n})\left[n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(f_n(\gamma))]'_\gamma = -\ln 4 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1) +$$
$$+(1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right).$$

Врахуємо, що

$$0 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{11}{12}\ln 11 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \geqslant 0, \quad (1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right) \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{2n}\ln\gamma \geqslant 0.$$

Отже, $f_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних параметрах n, γ.

Доведемо, що при кожному фіксованому $n \geqslant 12$, функціонал $J_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ на проміжку $(1; n^{0{,}45})$.

Враховуючи, що величина $J_n^0(\gamma)$ задовільняє наступну рівність

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left[\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right]^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Так як

$$\ln J_n^0(\gamma) = n\ln\frac{4}{n} + \frac{\gamma}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2} - \left(n+\frac{\gamma}{n}\right)\ln(1-\frac{\gamma}{n^2}) + 2\sqrt{\gamma}\ln\left[\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right],$$

тоді

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]_\gamma' = \frac{1}{n}\ln\frac{4\gamma}{n^2-\gamma} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\ln\left[\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right].$$

Позначимо $\frac{\sqrt{\gamma}}{n} = x$, тоді $\gamma = n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = nx$ і $\frac{1}{n} < x \leq n^{-0{,}775}$.

В результаті перетворень маємо наступне

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]_\gamma' = \frac{2}{n}\ln 2x - \frac{1}{n}\ln(1-x^2) + \frac{1}{4nx}\ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right].$$

Враховуючи, що

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - ...,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+...\right),$$

отримаємо

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]_\gamma' = \frac{2}{n}\ln 2x + \frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+...+\frac{x^{2n}}{n}+...\right) -$$

$$-\frac{1}{2n}\left[1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{x^{2k}}{2k+1}+....\right]$$

Отже,

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma=\frac{2}{n}\ln 2x-\frac{1}{2n}+$$

$$+\frac{x^2}{n}\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)+...+\frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n+2}\right)+....$$

Дальше,враховуючи, що $\frac{1}{n}-\frac{1}{4n+2}\leqslant\frac{1}{2}$,

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma\leqslant\frac{2}{n}\ln 2x-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4+...+\frac{1}{2}x^{2k}+....\right)=$$

$$=-\frac{1}{2n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

Функція $\frac{x^2}{1-x^2}$ монотонно зростає на проміжку $[0,1)$ для $\frac{1}{n}<x\leq n^{-0{,}775}$, тоді справедливі нерівності

$$\left[\ln J_n^0(\gamma)\right]'_\gamma\leqslant-\frac{1}{2n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{2n}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2n}\left(1-4\ln x-\frac{x^2}{1-x^2}\right)<$$

$$<-\frac{1}{2n}\left(1-4\ln(n^{-1})-\frac{n^{-1{,}55}}{1-n^{-1{,}55}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{2n}\left(1+4\ln n-\frac{1}{n^{1{,}55}}\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1{,}55}}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1.03}{n^{1{,}55}}+4\ln n\right)<0,$$

оскільки при $n\geqslant 12$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n^{1{,}55}}}<1.03,$$

Очевидно, що $1-\frac{1}{n^{1,55}}+4\ln n>0$ при всех $n\geqslant 12$.

Таким чином, $J_n^0(\gamma)$ монотонно спадає для всіх γ з проміжку $\gamma\in(1,n^{0.45}]$.

Враховуючи попередні результати отримаємо

$$O_n(\gamma)\leqslant\frac{f_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)}<\frac{f_n(n^{0.45})}{J_n^0(n^{0.45})}<1.$$

А це означає, що при $n\geqslant 12$ та $\alpha_0\geqslant\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, для довільних систем попарно неперетинних областей та довільних наборів різних точок a_k, $|a_k|=1\,,a_k\in B_k\,,\ k=\overline{1,n}\,,\ a_0=0\in B_0$, виконується строга нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)<r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

тобто в цьому випадку не існує екстремальної конфігураціїї.

Залишається розглянути випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma}<2$. Тоді ми потрапляємо в умови теореми 2.1.6 і розглядаємо наступну нерівність $n^{0.45}\leqslant 0.1215n^2\Rightarrow n\geqslant 6$. Теорему доведено.

2.4. Доведення Теореми 2.2.2

Аналогічно доведенню попередньої теореми спочатку розгдянемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{\gamma}>2$. Всі подальші міркування стосуються саме даного випадку.

В подальшому ми застосуваємо метод розроблений науковим керівником наприкінці 2018 рокудля оптимізації обємів обчислень.

Згідно методу роботи [15, с.255], необхідно відкинути випадок, коли $\alpha_0\geqslant\frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, причому $\alpha_0=\max\limits_{k}\alpha_k$.

$$J_n(\gamma)=r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)=$$

$$= \left[r^{2n}(B_0,0)\right]^{\frac{\gamma}{2n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{n} = \tag{2.1}$$

$$= \left(\left[r^2(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)\right]\cdot\ldots\cdot\left[r^2(B_0,0)r(B_n,a_n)r(B_1,a_1)\right]\right)^{\frac{\gamma}{2n}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

Відомо (див. [69]), що наступний функціонал

$$Y_3(t_1,t_2,t_3,D_1,D_2,D_3,d_1,d_2,d_3) = \tag{2.2}$$

$$= \frac{r^{t_1}(D_1,d_1)r^{t_2}(D_2,d_2)r^{t_3}(D_3,d_3)}{|d_1-d_2|^{t_1+t_2-t_3}\cdot|d_2-d_3|^{t_1-t_2+t_3}\cdot|d_2-d_3|^{-t_1+t_2+t_3}}$$

є інваріантом відносно всіх конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, $t_k \in \mathbb{R}^+$, де D_k — неперетинні області такі, що $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = 1,2,3$.

Легко побудувати, такий конформний автоморфізм $\tilde{\omega}_k = T_k(\omega), k = \overline{1,n}$ комплексної площиниб для якого виконуються наступні рівності:

$$\tilde{B}_0 = T_k(B_0), \tilde{B}_k = T_k(B_k), \tilde{B}_{k+1} = T_k(B_{k+1})$$

. Цей автоморфізм існує і він єдиний. Тоді, у нашому випадку отримаємо

$$\frac{r^2(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})}{|a_0-a_1|^2|a_0-a_k|^2|a_k-a_{k+1}|^0} =$$

$$= r^2(\tilde{B}_0,0)r(\tilde{B}_k,1)r(\tilde{B}_{k+1},-1) \leqslant 0.4374$$

Останній множник виразу (2.1) оцінимо, використовуючи теорему В.М. Дубініна [15, 52] маємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Отже, використовуючи рівність (2.1) і вище наведені міркування, маємо оцінку

$$\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Далі, з нерівності Коші (про зв'язок між середнім арифметичним та середнім геометричним) маємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Отже, маємо наступну нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Остаточно маємо

$$J_n(\gamma) \leqslant 0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

де $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$, причому $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Використовуючи результати робіт [15, 50, 65, 70], отримаємо що

$$J_n^0(\gamma) = r^{\gamma} \left(B_0^{(0)}, 0 \right) \prod_{k=1}^{n} r \left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)} \right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n} \right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

де $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0^{(0)} = 0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала, відповідно.

Введемо позначення.

Нехай

$$O_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(B_0^{(0)}, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})},$$

де $B_0, ..., B_n$ — довільна система областей та точок $a_k, k = \overline{1, n}$, які задовольняють умови теореми.

Розглянемо величину

$$O_n(\gamma) = \frac{J_n(\gamma)}{J_n^0(\gamma)}$$

для випадку, коли $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$.

З вище наведеного слідує, що виконуються наступні нерівності:

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \cdot \alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} =$$

$$= 0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-\gamma-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $O_n(\gamma)$ через добуток функцій вище наведеного вигляду. Подальше дослідження буде пов'язане з вивченням поведінки цих функцій. Для зручності досліджень, позначимо ці функції наступним чином:

$$f_1(\gamma,n) = 0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}},$$

$$f_2(\gamma,n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(\gamma,n) = \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_4(\gamma,n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(\gamma,n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Таким чином, ми отримали

$$O_n(\gamma) \leqslant 0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma^{\frac{n-1}{n}}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma^{\frac{n-1}{n}}} =$$

$$= f_1(\gamma, n) \cdot f_2(\gamma, n) \cdot f_3(\gamma, n) \cdot f_4(\gamma, n) \cdot f_5(\gamma, n) \cdot f_6(\gamma, n) \cdot .$$

Дослідимо кожну функцію окремо $O_n(\gamma)$ і покажемо, що $J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma)$ при $\gamma \in (1, n^{0,5}]$, $n \geqslant 126$.

Розглянемо функцію $f_1(\gamma, n) = 0.4374^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma^{\frac{n-1}{n}}}$ (див рис. 2.10).

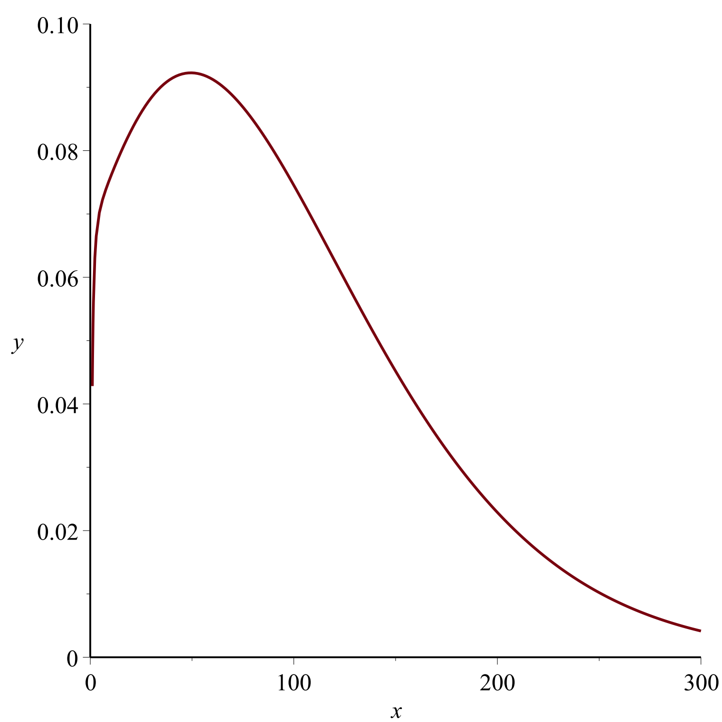

Рис. 2.10: Графік функції $f_1(\gamma, n)$.

Фіксуємо $\gamma = n^{0.5}$ і дослідимо кожну функцію за допомогою стандартних методів математичного аналізу. Отже,

$$f_1(n) := 0.4374^{\frac{n^{0.5}}{2}} \left(\frac{n}{4}\right)^{n^{0.5}+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{0.25}}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0.5}}}$$

Таким чином, необхідно дослідити функцію

$$f_1(x) := 0.4374^{\frac{x^{0.5}}{2}} \left(\frac{x}{4}\right)^{x^{0.5}+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^{0.25}}\right)^{x-1-\frac{x-1}{x^{0.5}}}$$

Очевидно, що

$$lnf_1(x) = \frac{x^{0.5}}{2} ln0.4374 + (x^{0.5}+1) ln\left(\frac{x}{4}\right) + (x - 1 - \frac{x-1}{x^{0.5}}) ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.25}}\right)$$

Тоді, для похідної маємо наступне співвідношення

$$(lnf_1(x))\prime = \frac{1}{4x^{0.5}} ln0.4374 +$$
$$+ \frac{x^{0.5}+1}{x} + \frac{0.5ln(\frac{x}{4})}{x^{0.5}} + \left(1 - \frac{0.5}{x^{0.5}} - \frac{0.5}{x^{1.5}}\right) ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.25}}\right) +$$
$$+ \frac{0.25}{x^{0.25}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.5}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.25}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4x^{0.5}} ln0.4374 + \left(1 - \frac{0.5}{x^{0.5}} - \frac{0.5}{x^{1.5}}\right) ln\left(1 - \frac{1}{x^{0.25}}\right) +$$
$$+ \frac{0.25}{x^{0.25}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.5}}\right)\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.25}}}\right) + \frac{x^{0.5}+1}{x} + \frac{0.5ln(\frac{x}{4})}{x^{0.5}}$$

Скористаємось розкладом в ряд $ln(1-t)$ будемо мати наступну нерівність

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.25}} \times$$
$$\times [\frac{-ln0.4374}{4x^{0.25}} + \left(1 - \frac{0.5}{x^{0.5}} - \frac{0.5}{x^{1.5}}\right)\left(1 + \frac{1}{2x^{0.25}} + \frac{1}{3x^{0.5}} + \frac{1}{4x^{0.75}} + \frac{1}{5x}\right) -$$
$$-0.25\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^{0.5}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^{0.25}}}\right) - \frac{1}{x^{0.25}} - \frac{1}{x^{0.75}} - \frac{0.5ln(\frac{x}{4})}{x^{0.25}}] \quad (2.3)$$

Легко показати, що максимум функції $\frac{ln(\frac{x}{4})}{x^{0.25}}$ знаходиться в точці $x = 218.39$, враховуючи попередні міркування, і 2.3, при $x \geqslant 100$, маємо остаточний висновок

$$(lnf_1(x))\prime \leqslant -\frac{1}{x^{0.25}}[\left(1-\frac{0.5}{100^{0.5}}-\frac{0.5}{100^{1.5}}\right)-$$

$$-0.25\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100^{0.25}}}\right)-\frac{1}{100^{0.25}}-\frac{1}{100^{0.75}}-\frac{0.45ln(\frac{218}{4})}{218^{0.25}}] \leqslant -\frac{1}{x^{0.25}}\cdot 0.010198 < 0$$

Отже, функція $f_1(x)$ монотонно спадає на проміжку $x \in [100, \infty]$. Таким чином для всіх $x \in [126, \infty], f_1(x)$ монотонно спадає, звідси отримаємо, $f_1(x) < f_1(126) \leqslant 0.0590352, x \geqslant 126$.

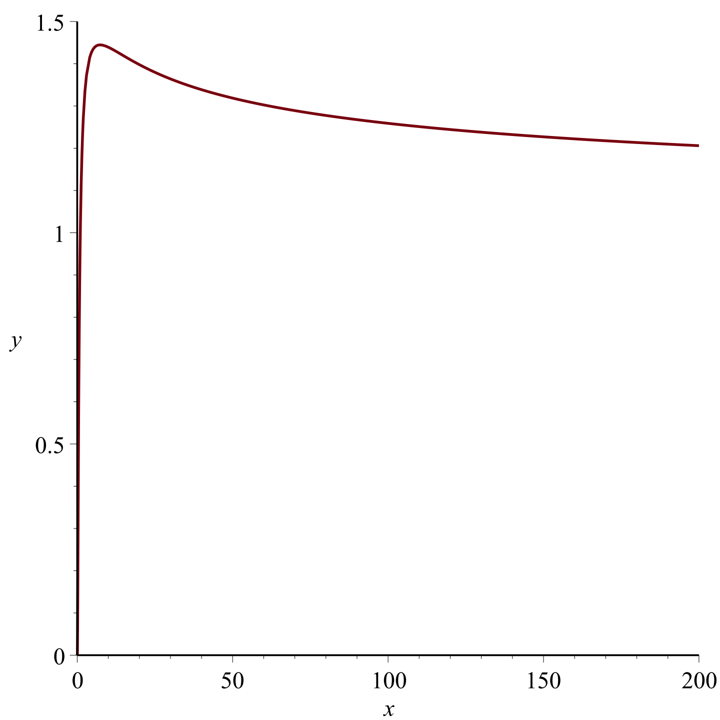

Рис. 2.11: Графік функції $f_2(\gamma, n)$.

Для функції $f_2(\gamma, n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}$ (див рис. 2.11) маємо наступне співвідношення при фіксованому $\gamma = n^{0.5}$:

$$f_2(n) = \left(n^{0.5}\right)^{\frac{1}{n^{0.5}}}$$

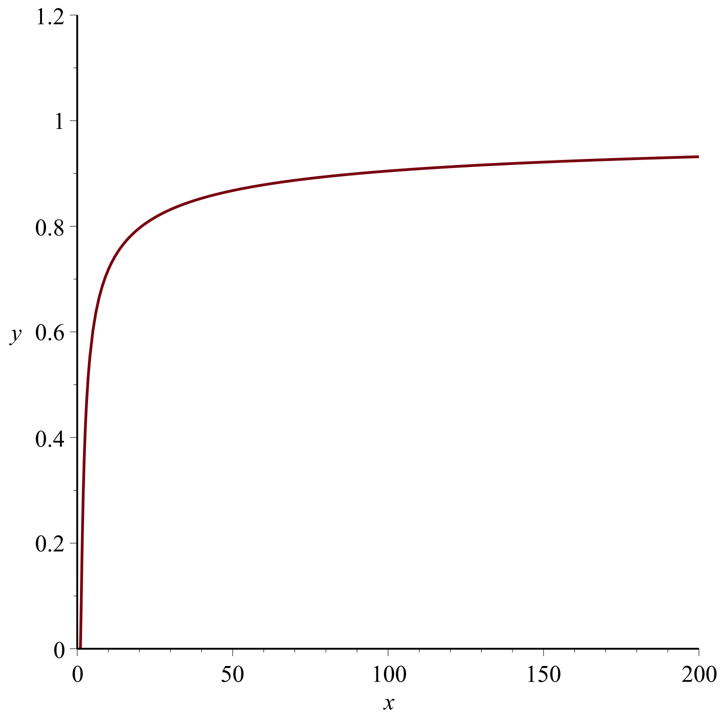

Рис. 2.12: Графік функції $f_3(\gamma, n)$.

Отже, необхідно дослідити наступну функцію

$$f_2(x) = \left(x^{0.5}\right)^{\frac{1}{x^{0.5}}}.$$

Тоді,

$$ln(f_2(x)) = \frac{0.5ln(x)}{x^{0.5}}.$$

Для похідної маємо

$$ln\prime(f_2(x)) = \frac{0.5}{x^{1.5}}\left(1 - 0.5ln(x)\right).$$

Легко показати, що

$$ln\prime(f_2(x)) < 0, x > 8$$

Отже, функція $f_2(x)$ спадає при $x > 8$. Звідси слідує

$$f_2(x) < f_2(126) \approx 1.240389, x \geqslant 126.$$

Розглянемо наступну функцію

$$f_3(\gamma, n) = \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}.$$

Очевидно, що $f_3(\gamma, n)$ (див рис. 2.12), $f_3(\gamma, n) \leqslant 1$.

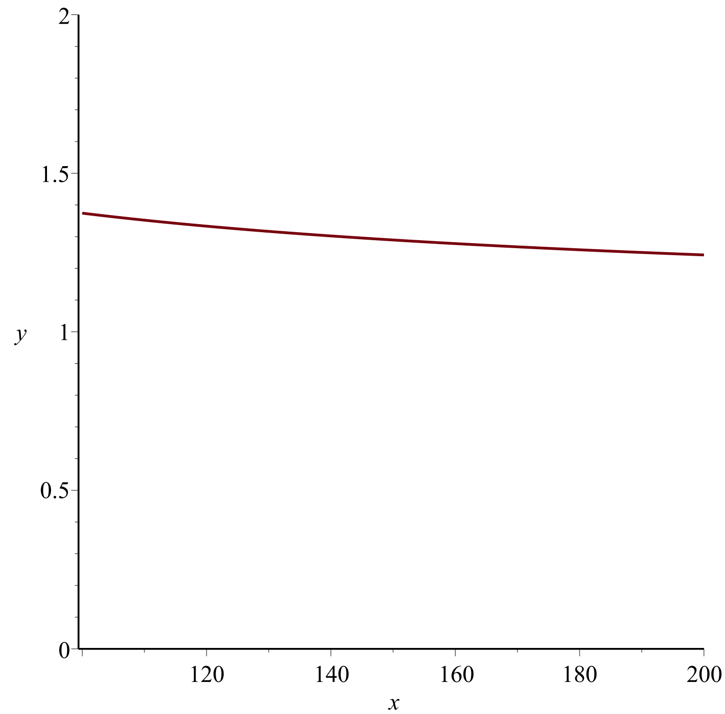

Рис. 2.13: Графік функції $f_4(\gamma, n)$.

При дослідженні функції $f_4(\gamma, n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}$ (див рис. 2.13) отримаємо, що при фіксованому $\gamma = n^{0.5}$, і довільному $x \geqslant 126$, виконується наступна нерівність:

$$f_4(x) = \left(\frac{1 + \frac{1}{x^{0.75}}}{1 - \frac{1}{x^{0.75}}}\right)^{2x^{0.25}} \leqslant (3e)^{2x^{-0.5}},$$

$$f_4(126) \leqslant 1.453419, x \geqslant 126.$$

Тепер дослідимо поведінку функції $f_5(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$ (див рис. 2.14), для якої, враховуючи дослідження попередніх фунцій, маємо наступне:

$$f_5(x) = \left(\frac{4}{x^{0.25}}\right)^{1-\frac{1}{x^{0.5}}}$$

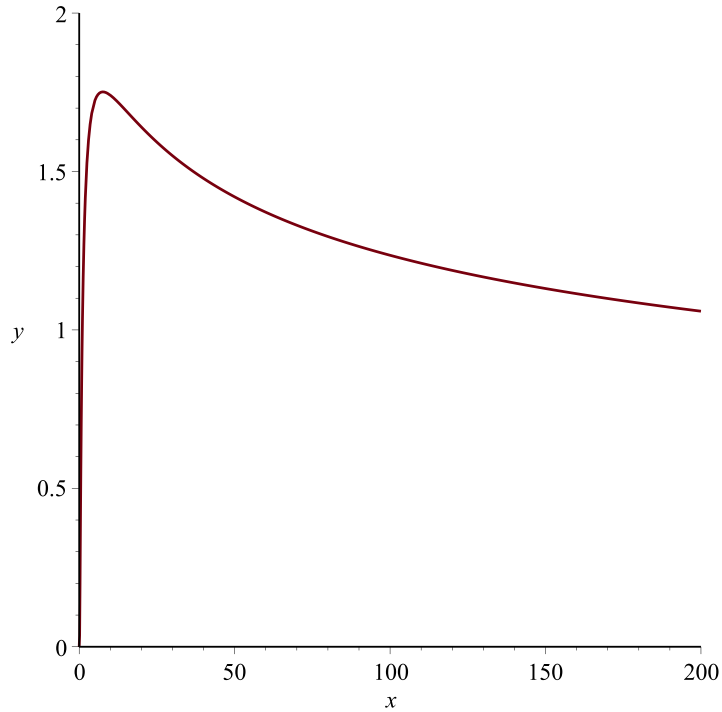

Рис. 2.14: Графік функції $f_5(\gamma, n)$.

При $x > 8, (ln(f_5(x)))\prime < 0$, функція $f_5(x)$ строго спадає. Отже, остаточно маємо

$$f_5(x) < f_5(126) \approx 1.175197, x \geqslant 126$$

Для функції $f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}$ (див рис. 2.15) виконуються наступні співвідношення

$$f_6(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-\gamma\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{\gamma\frac{n-1}{n}}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e < 3.$$

Враховуючи всі попередні результати при $n \geqslant 126$, отримуємо

$$f_1(\gamma, n) \leqslant 0.0590352,$$

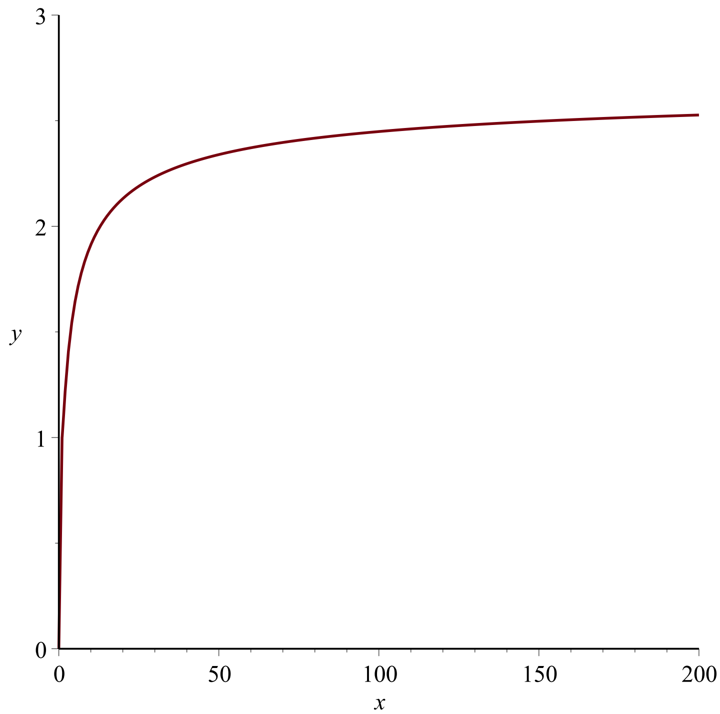

Рис. 2.15: Графік функції $f_6(\gamma,n)$.

$$f_2(\gamma,n) \leqslant 1.240389,$$

$$f_3(\gamma,n) \leqslant 1.$$

$$f_4(\gamma,n) \leqslant 1.453419,$$

$$f_5(\gamma,n) \leqslant 1.175197,$$

$$f_6(\gamma,n) < 3,$$

Отже,

$$O_n(\gamma) \leqslant f_1(\gamma,n) \cdot f_2(\gamma,n) \cdot f_3(\gamma,n) \cdot f_4(\gamma,n) \cdot f_5(\gamma,n) \cdot f_6(\gamma,n) =$$

$$\leqslant 0.0590352 \cdot 1.240389 \cdot 1 \cdot 1.453419 \cdot 1.175197 \cdot 3 \leqslant 0.3752249 < 1.$$

Таким чином, враховуючи попередні міркування, ми отримали, що $O_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ при $n \geqslant 126$. Необхідно довести, що нерівність $O_n\left(\gamma\right) < 1$ справедлива для $n \geqslant 126$ і $\gamma \in \left(1, n^{0,5}\right)$.

Покажемо, що при кожному $n \geqslant 126$, функція $f_n(\gamma) = 0,4374^{\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$ монотонно зростає по γ на проміжку $(1; n^{0,5})$.

Справедливі співвідношення

$$\ln(f_n(\gamma)) = \frac{\gamma}{2} ln 0,4374+$$

$$+(1-\frac{\gamma}{n})\left[n\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1)\ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(f_n(\gamma))]'_\gamma = \frac{ln 0,4374}{2} - \ln 4 + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1) +$$

$$+(1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right).$$

Врахуємо, що

$$0 < ln(0,4374)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{125}{126}\ln 125 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n}\ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \geqslant 0, \quad (1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right) \geqslant 0, \frac{1}{2n}\ln\gamma \geqslant 0.$$

Отже, $f_n(\gamma)$ монотонно зростає при вказаних параметрах n, γ.

Враховуючи, що величина $J_n^0(\gamma)$ досліджена в попередній Теоремі 2.2.1 і монотонно спадає для всіх γ з проміжку $\gamma \in (1, n^{0.5}]$, отримаємо

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{f_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{f_n(n^{0.5})}{I_n^0(n^{0.5})} < 1.$$

Нерівність $O_n(\gamma) < 1$ справедлива і для $n \geqslant 126$ і $\gamma \in (1, n^{0,5})$. Зауважимо, що випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ розглянутий при доведенні Теореми 2.2.1. Тоді, враховуючи 2.1.6 ми отримуємо: $n^{0.5} \leqslant 0.1215n^2 \Rightarrow n \geqslant 5$. Теорему доведено.

2.5. Доведення Теореми 2.2.3

Аналогічно доведенню теореми 2.2.1, 2.2.2 спочатку відкинемо випадок, коли $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k, k = \overline{1,4}$.

За допомогою роботи [17] внутрішній радіус області відносно початку координат оцінимо наступним чином:

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[n^{\frac{1}{2}} \cdot J_n^0(\gamma)\right]^{-\frac{1}{n-\gamma}} \leqslant 0.63161233,$$

де $J_n^0(\gamma)$ для $n = 4$ має вигляд

$$J_n^0(\gamma) = \frac{\left(\frac{4\gamma}{16}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1-\frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \approx 0,15032.$$

Використовуючи рівність (2.4) і вище наведені міркування, маємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{4} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{4} \alpha_k.$$

Далі, з нерівності Коші (про зв'язок між середнім арифметичним та середнім геометричним) маємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{4} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{3}\right)^3.$$

Остаточно маємо

$$J_4(\gamma) \leqslant 2^4 \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{3}\right)^3,$$

де $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, причому $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Отже, виконавши обчислення, маємо

$$J_4(2,09) \leqslant 0,07357.$$

Тоді, враховуючи попередні обчислення маємо

$$J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma).$$

Залишається розглянути випадок $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. В цьому випадку результат теореми 2.2.3 випливає з теореми 2.1.6.

Отже, теорему доведено.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 в задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат отримано наступні результати:

- в теоремі 2.2.1 для $n \geq 12$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.45}]$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю;

- в теоремі 2.2.2 для $n \geq 126$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.5}]$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю;

- в теоремі 2.2.3 для $n = 4$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; 2.09]$, вище вказана задача, вирішена.

Результати розділу опубліковано в статтях [14, 20, 21].

РОЗДІЛ 3

ЕСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТКОВО ПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА N-ПРОМЕНЕВИХ СИСТЕМАХ ТОЧОК

3.1. Результати попередників, які використовуються в розділі

Задача 3.1.1. Знайти максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k, a_k) \tag{3.1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}, |a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a $(a \in B)$.

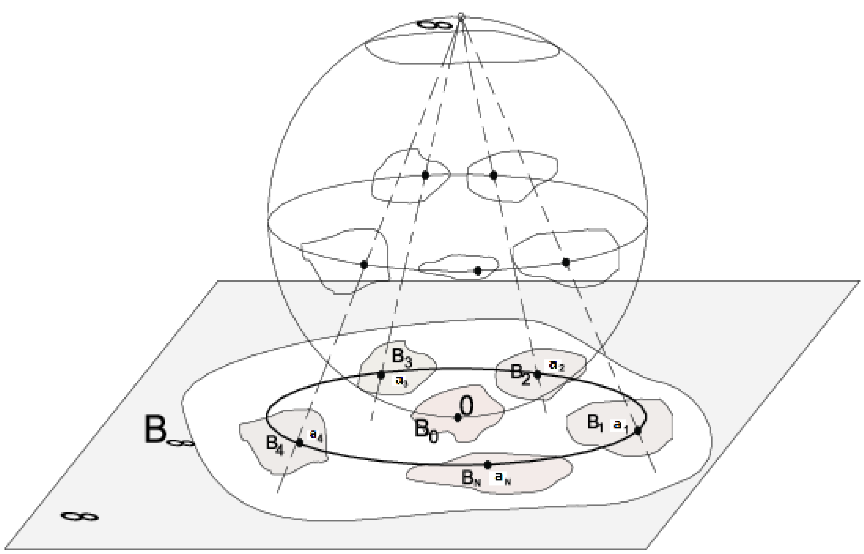

Рис. 3.1: Стереографічна проекція деякої конфігураціїї областей

Вперше була врозглянута ця проблема в 1988 році В.М. Дубініним [50] і отримана оцінка для функціонала 3.1 при $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geqslant 2$ для систем багатозв'язних неперетинних областей методом симетризації. У випадку коли точки лежать на одиничному колі, Г.В. Кузьміна за допомогою методу екстремальної метрики [71, с. 267] розв'язала задачу при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geqslant 2$ для випадку неперетинних однозв'язних областей.

В рамках ідеї П.М. Тамразова про вільні полюси, О.К. Бахтін в 2006 році запропонував розглядати задачі про максимізацію функціоналів на класах неперетинних областей відносно точок, які розміщені на так званих (n, m)-променевих системах [15]. Задачі такого типу значно узагальнюють всі ті задачі з вільними полюсами, що вивчались раніше. В цій роботі було запропоновано метод "керуючих" функціоналів, який дає можливість послабити умови на геометрію розташування систем точок. Завдяки цьому методу в роботі [78, теорема 4.1] в 2006 році вперше отримали оцінку для функціонала 3.1 для n-променевих систем при малих значеннях γ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 0,125$.

В роботах 2011-2012 р.р. [23, 45, 46] задача 3.1.1 розглянута для $n = 2, 3, 4, 5$ в значно більш загальній ситуації. На основі цих робіт сформульовані наступні пезультати:

Теорема 3.1.1. Нехай $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = \frac{3}{5}$, $\gamma_3 = \frac{6}{5}$, $\gamma_4 = 2,1$, $\gamma_5 = 3,2$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такої, що $\mathcal{M}(A_n) = 1$ і будь-якого набору частково перетинних областей B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$, справедлива нерівність

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k), \tag{3.2}$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k и точки 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1, n},\ n \geq 2)$ — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (3.3)$$

Задача про оцінку функціцонала (3.1) при початкових значеннях натурального параметра n розглядалась також в [29]. В роботі [9] у випадку довільних систем перетинних областей задача розв'язана для $n \geqslant 7$ при $\gamma \in (0, 0.08n^2)$.

Теорема 3.1.2. Нехай $0 < \gamma \leqslant \gamma_n, n \geq 7$. Тоді при $\gamma \in (0, 0.08n^2)$ для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, такої, що $\mathcal{M}(A_n) = 1$ і будь-якого набору частково перетинних областей B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), справедлива нерівність

$$[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant [r\left(\Lambda_0, 0\right) r\left(\Lambda_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k и точки 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1, n}$, $n \geq 2$) — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (3.4)$$

3.2. Основні результати розділу 3

Введемо необхідні поняття.

Система точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} :\ k = \overline{1, n}\right\}$, називається n ***- променевою***, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Позначимо при цьому $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ розглянемо наступний "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|. \qquad (3.1)$$

Клас тих n-променевих систем точок для яких $\mathcal{M}(A_n) = 1$ автоматично містить всі системи із n різних точок, які розміщені на одиничному колі.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1,n}$.

Далі розглянемо систему взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$. При кожному $k = \overline{1,n}$ лише скінченна кількість компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ можуть містити якусь із областей B_j, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$; такі компоненти називають суттєвими. Область, отриману викиданням із $\overline{\mathbb{C}}$ всіх суттєвих компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$, будемо позначати $\widetilde{B}_k$. Очевидно, що $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всіх $k = \overline{1,n}$ і $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^{n}$ є системою скінченнозв'язних взаємно неперетинних областей без ізольованих граничних точок. Перехід від системи $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ до системи $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^{n}$ називається *операцією заповнення несуттєвих граничних компонент* [15].

Відкрита множина D задовільняє умові неналягання відносно точок $\{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\} \in D$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – n-променева система точок, якщо множини $D_k(0), D_k(a_k), D_k(a_{k+1}), D_k(\infty)$ попарно неперетинаються при кожному фіксованому k, $k = \overline{1,n}$, де $D_k(0)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку 0; $D_k(a_k)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_k; $D_k(a_{k+1})$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку a_{k+1}; $D_k(\infty)$ – зв'язна компонента $D \cap \overline{P_k}$, яка містить точку ∞.

Система областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ задовільняє умові часткового перетину, якщо відкрита множина $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$ задовільняє умові неналягання відносно системи точок $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$. В подальшому такі системи будемо називати системами частково перетинних областей відносно вказаної системи точок.

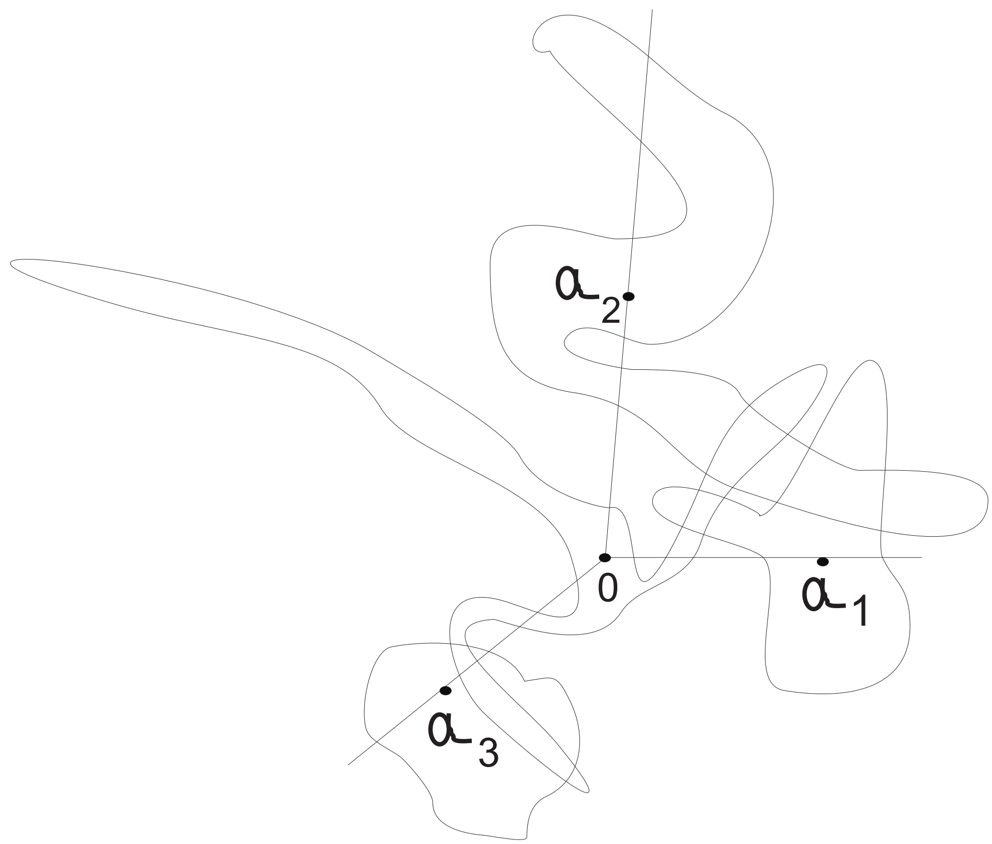

Рис. 3.2: Набір областей, який задовольняє певним умовам часткового налягання

У цьому розділі розв'язана задача 3.1.1 у випадку частково перетинних областей для значно більш широких значень праметра γ.

Задача 3.2.2. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{3.2}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем частково перетинних областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n – кратну симетрію.

Нехай

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)). \quad (3.3)$$

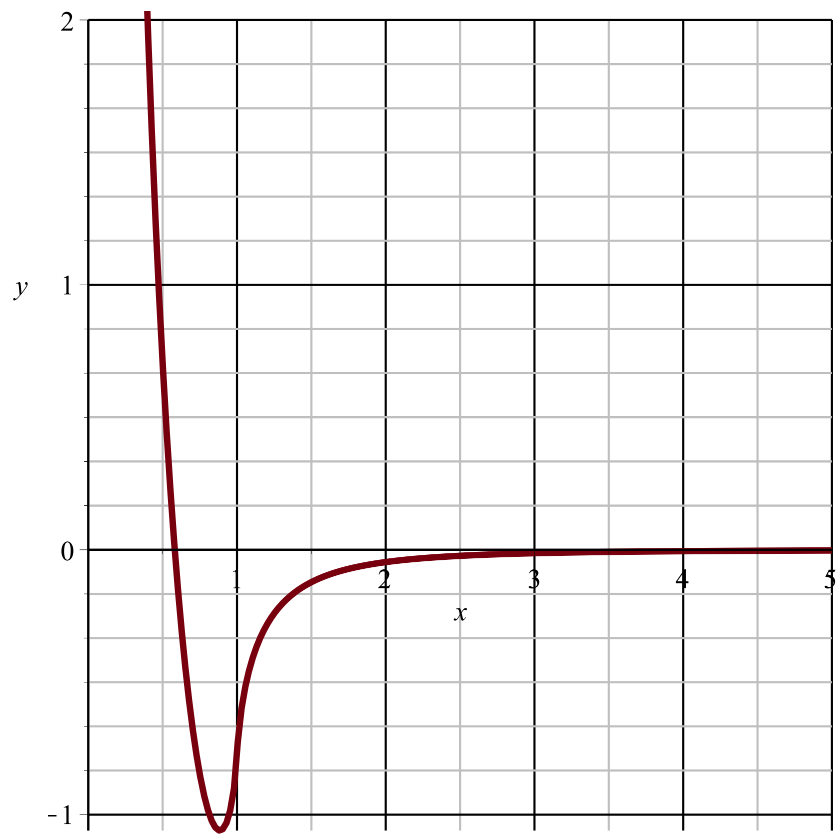

Рис. 3.3: Графік функції $F'(x)$

$F(x)$ випукла функція на итервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. $y_0 = \min F'(x)$ $x \in (0; +\infty), F'(x_0) = y_0, y_0 \approx -1.06$. Рівняння $F'(x) = t$ при $t > 0$ має єдинний розв'язок. Якщо $t < 0$, то це рівняння має дварозв'язки: $x_1(t), x_2(t), x_1(t) \in (0; x_0), x_2(t) \in (x_0; \infty)$ (див Рис. 1).

Позначимо через

$$\mu_n = \min_t((n-1)x_1(t) + x_2(t)), \gamma_n^0 = (\frac{\mu_n}{2})^2. \quad (3.4)$$

Варто відмітити, що система кругових областей Λ_0, Λ_∞, Λ_k, $k =$

$\overline{1,n}$ квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2, \tag{3.5}$$

являє собою систему взаємно перетинних однозв'язних областей, таких що $0 \in \Lambda_0$, $\infty \in \Lambda_\infty$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, $\lambda_k = exp(i\frac{2\pi(n-1)}{n})$, $k = \overline{1,n}$.

Для систем частково перетинних областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$ таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ D_k справедливі наступні результати.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $0 < \gamma < \gamma_n^0$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *і будь-якого набору частково перетинних областей* $B_0, B_0, ..., B_n$, B_∞ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$) *— відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).*

Більш детальне вивчення функції $S(x)$ з урахуванням Теореми 3.2.1 дозволило отримати наступний результат:

Теорема 3.2.2. *Нехай* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0,72$, $\gamma_3 = 1,40$, $\gamma_4 = 2,27$, $\gamma_5 = 3,33$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тоді для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедлива нервність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *і точки* 0, ∞, λ_k $(k=\overline{1,n},\ n\geq 2)$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).*

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $0<\gamma\leqslant\gamma_n$, $\gamma_2=0,72$, $\gamma_3=1,40$, $\gamma_4=2,27$, $\gamma_5=3,33$, $\gamma_6=4,64$, $\gamma_n=0.0845n^2+0.088n+0.0229$, $n\geq 7$. *Тоді для* $\gamma\in(0,\gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n)=1$ *и будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0\in B_0\subset\mathbb{C},\ \infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\mathbb{C})$, *справедлива нервність*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma\prod_{k=1}^n r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n\left[\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}{\left|\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right|^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right)^2}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^2}}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Рівність досягається, якщо 0, ∞, a_k, *и* B_0, B_∞, B_k, $k=\overline{1,n}$, *відповідно полюси і кругові області квадратичного дифференціала (3.5).*

Наслідок 3.2.2. *Нехай* $0<\gamma<\gamma_n^0$, $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, що* $|a_k|=1$ *і будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0\in B_0\subset\mathbb{C},\ \infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}},\ a_k\in B_k\subset\mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k=\overline{1,n},\ n\geq 2)$ – *відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).*

Наслідок 3.2.3. *Нехай* $0<\gamma\leqslant\gamma_n$, $\gamma_2=0,72$, $\gamma_3=1,40$, $\gamma_4=2,27$, $\gamma_5=3,33$, $\gamma_6=4,64$, $\gamma_n=0.0845n^2+0.088n+0.0229$, $n\geq 7$. *Тогда для* $\gamma\in(0,\gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $|a_k| = 1$ *і будь-якого набору частково перетинних областей* B_0, B_k, B_∞ $(a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\,r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 6)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу (3.5).*

Нехай $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$ – взаємно неперетинні області такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}\ \ D_k$, тоді справедливі наступні результати.

Наслідок 3.2.4. *Нехай* $0 < \gamma < \gamma_n^0$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *і будь-якого набору взаємно перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\,r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 2)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).*

Наслідок 3.2.5. *Нехай* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0,72$, $\gamma_3 = 1,40$, $\gamma_4 = 2,27$, $\gamma_5 = 3,33$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тогда для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *і будь-якого набору взаємно перетинних областей* B_0, B_k, B_∞ $(a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\,r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 6)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу (3.5)*

Як наслідок теореми 3.2.1 при певних умовах, отримали розв'язок задачі 3.1.1.

Наслідок 3.2.6. *Нехай* $0<\gamma<\gamma_n^0$, $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, що* $|a_k|=1$ *і будь-якого набору взаємно перетинних областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ $(0\in B_0\subset\mathbb{C},\ \infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}},\ a_k\in B_k\subset\mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k=\overline{1,n},\ n\geq 2)$ *— відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).*

Наслідок 3.2.7. *Нехай* $0<\gamma\leqslant\gamma_n$, $\gamma_2=0,72$, $\gamma_3=1,40$, $\gamma_4=2,27$, $\gamma_5=3,33$, $\gamma_6=4,64$, $\gamma_n=0.0845n^2+0.088n+0.0229$, $n\geq 7$. *Тогда для* $\gamma\in(0,\gamma_n]$, *будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $|a_k|=1$ *і будь-якого набору взаємно неперетинних областей* B_0, B_k, B_∞ $(a_0=0\in B_0\subset\mathbb{C},\ \infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}},\ a_k\in B_k\subset\mathbb{C})$, *справедлива нерівність*

$$[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)]^\gamma\prod_{k=1}^n r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k $(k=\overline{1,n},\ n\geq 6)$ *— відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціалу (3.5)*

Порівняння результатів наслідку 3.2.7 та роботи [71] представлено в наступній таблиці

n	Результат попередників	Результат теореми 3.2.2	Коефецієнт попередників	Коефецієнт теореми 3.2.2
2	0,5	0,72	0,125	0.1800
3	1,125	1,4	0,125	0.1556
4	2	2,27	0,125	0.1419
5	3,125	3,33	0,12	0.1332
6	4,5	4,64	0,125	0.1288

Таблиця ілюструє для деяких n перевагу отриманого в дисертаційній роботі результату над результатами попередників, навіть, у випадку дуже вузького класу конфігурацій, які складваються лише з однозв'язних областей.

3.3. Доведення Теореми 3.2.1

Нехай $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$, тогда $r(B_k, a_k) \leqslant r(D, a_k)$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_0, 0) \leqslant r(D, 0)$, $r(B_\infty, \infty) \leqslant r(D, \infty)$. Звідси випливає, що

$$[r\,(B_0,0)\,r\,(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k) \leqslant [r\,(D,0)\,r\,(D,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(D,a_k)\,,$$

Введемо систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Функції $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ є прийнятними для розділяючого перетворення області D, з урахуванням кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, задає ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. В свою чергу, $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = 0$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. $\Omega_k^{(\infty)}$ - частина площини $\mathbb{C}_\zeta$ отримана в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta = \infty$ зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Нехай $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$. З визначення функції $\pi_k(w)$ випливає, що

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to \infty, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Використовуючи результати роботи [48, 50] ми отримаємо нерівність

$$r\left(D, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

$$r\left(D, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

$$r\left(D, \infty\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Нерівності (3.1) — (3.3) повністю досліджена в Теоремі 1.9 [48]. Використовуючи (3.1) — (3.3) ми отримаємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Виконуючи необхідні перетворення, отримаємо наступну нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{\left(|a_k||a_{k+1}|\right)^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot |a_k| \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} \left(r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2} \cdot \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Дальше,

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k| \times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\cdot\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Враховуючи співввідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|=\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|=\mathcal{M}(A_n),$$

отримуємо

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{M}(A_n)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Помножимо і поділимо праву частину нерівності на $\gamma^{\frac{1}{2}}$ і отримаємо наступне

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\cdot\mathcal{M}(A_n)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де $|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}=|\omega_k^{(2)}-\omega_k^{(1)}|,\ k=\overline{1,n}$.

Враховуючи результати теореми 4.1.1. [15, p. 169] та інваріантність функціонала (3.3) ми отримаємо

$$K_\tau\leqslant\Phi(\tau),\quad\tau\geqslant 0,$$

де $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тоді,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}=$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$.

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

где $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau\geqslant 0$, $\tau_k=\sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$.

Нехай

$$S(x) = x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{і} \quad F(x)=\ln(S(x))$$

і $F'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$ (див. рис. 3.3).

$F(x)$ випукла функція на інтервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. Дальше, аналогічно роботі [65] ми розглянемо наступну ексремальну проблему

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Нехай $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – довільний екстремальний набір точоку вище вказаній задачі. Дальше, використовуючи результати роботи [65], отримаємо, що якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)}$, тоді

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad k,j=\overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Враховуючи співвідношення 3.4 і те, що $\gamma \in (0, \gamma_n]$ покажемо, що виконується умова $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k=\overline{1,n}$, і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для цього, аналогічно [9] введемо наступні позначення.

Нехай $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, де y_0 – значенння функції $y_0 = F''(x_0)$, де x_0 – корінь рівняння $F''(x) = 0, y_0 \approx -1,0599$. Знайдемо розв'язок рівняння $F'(x) =$. Для $\forall t \in [y_0, 0)$ рівняння $F'(x) = t$ має два розв'язки: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ при $n \geq 6$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$. Тоді із умови 3.4 необхідно довести, що випадок $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ неможливий при $\gamma \in (0, \gamma_n]$.

Припустимо, що один з коренів $x_k^{(0)}, k = \overline{1, n}$, належить проміжку $(x_0, \infty]$.

З іншої сторони, стандартне дослідження графіка функції $F'(x)$ показує, що функція монотонно спадає на $(0, x_0]$ від $(\infty, y_0]$ и монотонно зростає на $[x_0, \infty)$ от $[y_0, 0)$. Графік перетинає вісь OX в точці $x \approx 0.5814$.

Тоді,

$$\sum x_k^{(0)} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 2\sqrt{\gamma_1{}^0}.$$

З іншої сторони при $\gamma \in (0, \gamma_1{}^0)$ $2\sqrt{\gamma} = \sum x_k^{(0)} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 2\sqrt{\gamma_1{}^0} = 2\sqrt{\gamma_n}$.

Отримане протиріччя означає, що ні одна з точок $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$ не належить проміжку $(x_0, \infty]$. Звідси, враховуючи співвідношення 3.4 отримаємо, що $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Теорема 3.2.1 доведена.

3.4. Доведення Теореми 3.2.2

Враховуючи міркування теореми 3.2.1 отримаємо наступне:

$$(n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} > (n-1) \cdot 0.5814 + 0.8844 = 0.5814n + 0.303 = 2\sqrt{\gamma_n}.$$

Звідси випливає, що $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.0088n + 0.0229$. З іншої сторони при $\gamma \in (0, \gamma_n]$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} \geq (n-1) \cdot 0.5814 + 0.8844 = 2\sqrt{\gamma_n} > 2\sqrt{\gamma}.$$

Отримане протиріччя означає, що ні одна з точок $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$ не належить проміжку $(x_0, \infty]$. Звідси, враховуючи співвідношення 3.4 отримаємо, що $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Теорема 3.2.2 доведена для $n \geq 7$ і всі попередні доведення будуть справедливі при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$.

Безпосередні обчислення величин $x_1(t) + x_2(t)$ для $n = 3, 4, 5, 6$ представлені в таблиці нижче. Для $n = 2$ із таблиці випливає, що $x_1(t) + x_2(t) > x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. З іншої сторони $x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geq 1.6929$. Враховуючи, що $2\sqrt{\gamma}_2 = 1.6929$, отримуємо $\gamma_2 = 0.72$. Тоді зрозуміло, що при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1 + x_2 > 1.6929 = 2\sqrt{\gamma}_2 \geq 2\sqrt{\gamma}.$$

Аналогічно, враховуючи таблицю нижче, отримаємо $\gamma_6, \gamma_5, \gamma_4, \gamma_3$.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	- 0.01	0.5828	3.2602	
2	- 0.11	0.5970	1.5457	2.1285
3	- 0.21	0.6122	1.2939	1.8909
4	- 0.31	0.6286	1.1749	1.7871
5	- 0.32	0.6302	1.1663	1.7949
6	- 0.33	0.6320	1.1580	1.7882
7	- 0.34	0.6337	1.1502	1.7839
8	- 0.35	0.6354	1.1427	1.7765
9	- 0.36	0.6372	1.1356	1.7728
10	- 0.37	0.6389	1.1288	1.7660
11	- 0.38	0.6407	1.1223	1.7612
12	- 0.39	0.6425	1.1161	1.7568
13	- 0.40	0.6443	1.1101	1.7526
14	- 0.41	0.6461	1.1044	1.7487
15	- 0.51	0.6653	1.0585	1.7046
16	- 0.61	0.6865	1.0276	**1.6929**
17	- 0.71	0.7103	1.0074	1.6939
18	- 0.81	0.7380	0.9961	1.7064
19	- 0.91	0.7719	0.9775	1.7155
20	- 1.01	0.8206	0.9420	1.7139

Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглянуто задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частинно неперетинних областей відносно n-променевих систем точок на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно початку координат та нескінченно віддаленої точки для значно більш широких інтервалів параметра γ, тобто в розділі 2 отримано наступні результати:

- в теоремі 3.2.1 для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n^0)$, що для будь-якого γ з цього інтервалу Задача 3.2.2 вирішена повністю, де γ_n^0 – деяка величина,яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді;
- теорема 3.2.2 доповнює результат теореми 3.2.1 в тому розумінні, що для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий пів інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n], \gamma_n < \gamma_n^0$, де γ_n – деяка величина,яка задана в явному вигляді.

Для теорем 3.2.1, 3.2.2 наведено кілька наслідків,, які дають розвязок задачі в деяких частинних випадках: для неперетинних областей та n – променевих систем точок, для неперетинних областей та точок одиничного кола та ін. У найкраще вивченому випадку результати наслідків 3.2.6, 3.2.7 набагато покращують результати попередників.

Результати розділу опубліковано в статтях [22, 28, 30, 40].

РОЗДІЛ 4

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ СИМЕТРІЇ

4.1. Результати попередників, які використовуються в розділі

В 1968 році в роботі П.М. Тамразова [76] було вперше висунуто ідею про те, що варто розглядати задачі, де полюси квадратичного диференціала мають певну "свободу"і, зокрема, в цій роботі наведено приклад вирішеної екстремальної задачі для п'яти простих вільних полюсів першого порядку та запропоновано новий метод для вирішення цієї задачі.

В рамках ідеї про "вільні"полюси в дисертації Г.П. Бахтіної [31] в 1974 р. був запропонований клас екстремальних задач про неперетинні області, які відповідали квадратичним диференціалам з вільними полюсами другого порядку на колі. У вищезгаданій роботі була сформульована наступна задача:

Задача 4.1.1. Знайти максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} R(B_k, a_k)$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $R(B_k, a_k)$ – конформний радіус області B_k в точці a_k, $(a_k \in B_k)$, $k = \overline{1, n}$. В цій же роботі була отримана оцінка у випадку, коли

$n = 4$:
$$I_4 = \prod_{k=1}^{4} R(B_k, a_k) \leqslant 1,$$
причому рівність досягається на системі областей та полюсів квадратичного диференціала
$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2}{(z^4-1)^2}\, dz^2.$$

Пізніше, в роботі [52] отримано наступну теорему:

Теорема 4.1.1. [52] *Для довільних різних точок* a_k, $k = 1, ..., n, n \geq 2$, *які лежать на колі* $|z| = 1$, *і довільних попарно неперетинних областей* B_k, $k = 1, ..., n$, *таких, що* $(a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}})$, $k = 1, ..., n$, *виконується нерівність*
$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n.$$
Якщо ж області D_k *мають класичну функцію Гріна, то рівність досягається в тому і тільки тому випадку, коли області* D_k *і точки* a_k *є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала*
$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

В 1984 р. Г.П. Бахтіна розглянула значно більш загальну задачу про максимум функціонала
$$I_n = \prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k, a_k),$$
де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних взаємно неперетинних симетричних відносно кола $|z| = 1$ областей таких, що $|a_k| = 1$, $k = 1, ..., n$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{0, n}$ і отримала деякі часткові результати в даній проблемі. Ця задача була розв'язана нею

лише для $n = 2$ варіаційним методом Дюрена-Шифера, при $n > 2$ були отримані тільки якісні результати.

В 1988 [50] В. М. Дубінін зробив важливий крок у розвитку цієї теорії зокрема він розглянув та повністю вирішив задачу про максимум функціонала

$$I_n = \prod_{k=0}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ – система довільних взаємно неперетинних багатозв‘язих областей, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{U}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $r(B,a)$ - внутрішній радіус області B в точці a, $a \in B$.

В.М. Дубінін в роботі [48] розглянув наступні задачі:

Задача 4.1.2. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, ..., B_n$ — довільні багатозв’язні області,кожна з яких симетрична відносно одиничного кола, γ — додатній параметр, $|a_k| = 1$, $k = 1, ..., n$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{U}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k. Таким чином, він розглянув випадок, коли $\alpha_0 = \gamma$, $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 1$.

Крім того, В.М. Дубінін узагальнив задачу Г.П. Бахтіної, коли області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — симетричні неперетинні відносно кола і B_0 — довільна область, яка не зобов’язана повністю належати одиничному кругу.

Узагальнена задача, впорівнянні з задачею 4.1.2, виглядає наступним чином:

Задача 4.1.3. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, симетричні відносно кола, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $\gamma \leq n$ досягається для деякої конфігурації областей, які мають n-кратну симетрію.

Проблема 4.1.3 має розв'язок тільки при $0 < \gamma \leqslant n$, оскільки як тільки $\gamma = n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ існує послідовність систем областей $B_0^p, ..., B_n^p$, де $p \to \infty$ при якому $J_n(\gamma) \to \infty$.

У 2000 році у роботі [67] Л.В. Ковальовим був отриманий частковий результат, який вирішив проблему проблеми 4.1.2 при $\gamma = 1$ та $n \geq 2$. Проблема 4.1.2 була узагальнена в Розділі 4.

У [16] Я.В. Заболотним та Л. В. Вигівською в 2017 році отримано наступнну теорему:

Теорема 4.1.2. [63] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, 1]$. *Тоді для довільного різного набору точок* a_k, *таких, що* $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, *та довільного набору взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *таких, що області* B_k, $k = \overline{1,n}$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (4.1)$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \qquad (4.2)$$

У роботі [16] в 2017 році отримано наступнну теорему:

Теорема 4.1.3. [37]. *Для довільного* $\gamma > 1$ *існує таке* $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, *що для кожного* $n \geqslant n_0(\gamma)$, *для довільної системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$,

$|a_k| = 1$, *та для довільної системи попарно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$ *таких, що області* $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ *— симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right), \tag{4.3}$$

де $a_k^{(0)}$ *та* $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, *— полюси та кругові області квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2, \tag{4.4}$$

відповідно, причому $|a_k^{(0)}| = 1$ *для* $k = \overline{1,n}$, $a_0^{(0)} = 0$, $a_k^{(0)} \in B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

Знак рівності в нерівності (4.3) досягається якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

У 2018 році в роботі [16] отримано наступнний результат:

Теорема 4.1.4. [16] *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,38n^2$. *Тоді для довільної* $n-$ *променевої системи точок* A_n, *що належить одиничному колу, і такій, що* $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1,76$, $k = \overline{1,n}$ *та довільного набора взаємно неперетинних областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *а области* B_k, $k = \overline{1,n}$ *— симетричні відносно одиничного кола* $|w| = 1$, *справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{4.5}$$

Знак рівності досягається коли a_k *і* B_k, $k = \overline{0,n}$, *є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \tag{4.6}$$

У 2018 році в статті [13] отримано результат

Теорема 4.1.5. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 14$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{\frac{1}{3}}$. Тоді для будь-яких точок одиничного кола і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, області B_k, $k = \overline{1,n}$, симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left[\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{4.7}$$

Ззнак рівності досягається, коли a_k і B_k, $k = \overline{0,n}$ - полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{4.8}$$

Як було відмічено в розділі 1, ідея П.М. Тамразова про те, що цікаво розв'язувати екстремальні задачі, які відповідають квадратичним диференціалам з вільними полюсами, спонукала до виникнення нового напрямку в геометричній теорії функцій комплексної змінної, а саме до напрямку, який вивчає екстремальні задачі про розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Вперше сформулювала подібні задачі у 1974–1975 р. Г.П. Бахтіна [31]. Далі цей напрямок бурхливо розвивався. Відмітимо роботи Г.В. Кузьміної, В.М. Дубініна, М. Шиффера, П. Дюрена, Є.Г. Ємельянова, Л.В. Ковальова, Д.А. Кирилової, Е.Г. Прилепкіної, Е.В. Костюченко та ін. У 1988 В.М. Дубінін запропонував підхід, заснований на методі симетризації (див., наприклад, [48, 50]), який значно розширив можливості розв'язання подібних задач.

Значний внесок у вирішення цієї проблеми, зроблений співробітниками відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу, зокрема О.К. Бахтіним, Г.П. Бахтіною, В.Є. В'юн, І.В. Денегою, А. Л. Тпргонським, Я.В. Заболотним.

4.2. Основні результати розділу 4

Нехай $\mathbb{U}$ – одиничний круг з центром в початку координат, $\partial\mathbb{U}$- одиничне коло. Будемо вважати, що область G_0 належить класу $\mathbb{K}$, якщо

1. $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$
2. $\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus G_0\right) \cap \partial\mathbb{U}$ містить хоча б одну невироджену дугу одиничного кола.

Будем вважати, что область $G_0 \in \mathbb{K}$ належить класу $\mathbb{K}_1$, якщо $\overline{G_0} \subset \mathbb{U}$, очевидно $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$

Систему взаємно неперетинних областей $G_1, G_2, ..., G_n$ будемо називати системою неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю G_0, $G_0 \in \mathbb{K}$, якщо виконується наступне $\cup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{G_0 \cup \widetilde{G_0}\right\}$, $\widetilde{G_0}$ – область симетрична G_0 відносно одиничного кола. Очевидно, що $G_0, G_1, ..., G_n$ – система взаємно неперетинних областей.

Система точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \ k = \overline{1,n}\right\}$, називається n ***- променевою***, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Позначимо при цьому $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$

Для довільної n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ розглянемо наступний "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|. \qquad (4.1)$$

Клас тих n-променевих систем точок для яких $\mathcal{M}(A_n) = 1$ автоматично містить всі системи із n різних точок, які розміщені на одиничному колі.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m =$

$\emptyset\,,\;k\neq m\,,\;k,m=\overline{1,n}\,.$

Задача 4.2.4. Для кожного фіксованого $n\geqslant 2\,,\;0<\gamma\leqslant n$ знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma)=\left[r\left(G_0,0\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(G_k,a_k\right), \tag{4.2}$$

де $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – n-променева система точок, така, що $\mathcal{M}(A_n)=1$, де $G_1,...,G_n$ – система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $G_0\in\mathbb{K}\,,\;a_k\in G_k\subset\mathbb{C}\,,\;k=\overline{1,n}\,.$

Нехай

$$S(x)=x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}\quad \text{и}\quad F(x)=\ln(S(x)). \tag{4.3}$$

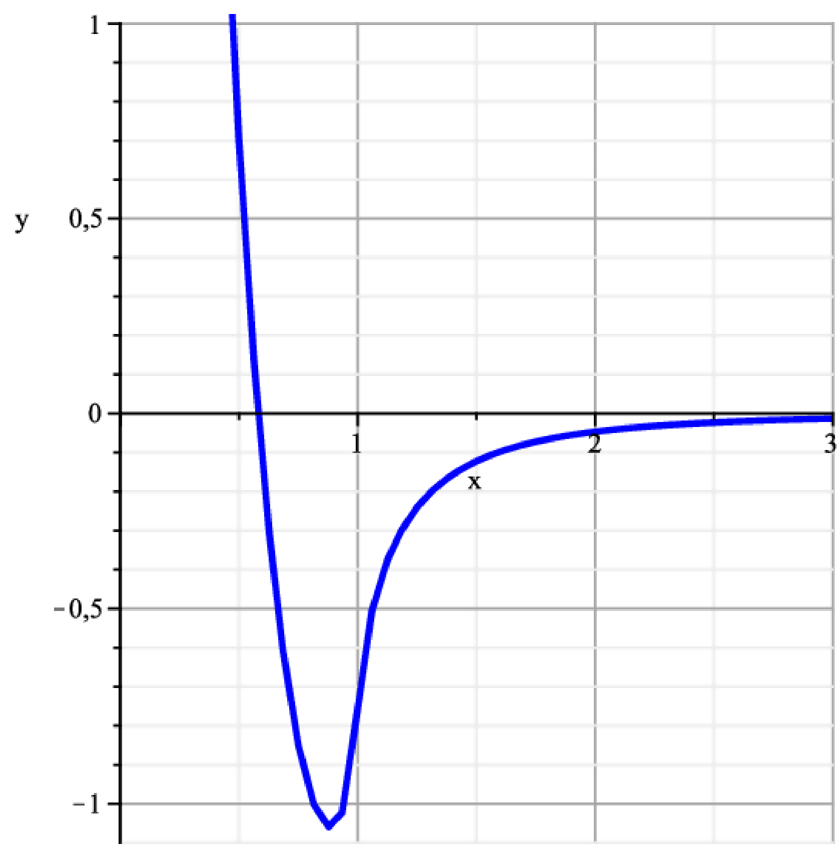

Рис. 4.1: Графік функції $F'(x)$

$F(x)$ випукла функція на інтервалі $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. $y_0 = F'(x_0) = \min F'(x) \approx -1.0599$, $x \in (0; +\infty)$. Рівняння $F'(x) = t$ при $t > 0$ має єдиний розв'язок. Якщо $t < 0$, то це рівняння має два розв'язки: $x_1(t), x_2(t), x_1(t) \in (0; x_0), x_2(t) \in (x_0; \infty)$ (див. 4.1).

Позначимо при $t < 0$ наступні величини

$$\mu_n = \min_t((n-1)x_1(t) + x_2(t)), \gamma_n^0 = (\frac{\mu_n}{2})^2. \tag{4.4}$$

Основні результати Розділу 4 представлено в наступних двох теоремах:

Теорема 4.2.1. *Нехай* $0 < \gamma \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant 9, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n *- променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $|a_k| = 1$ *і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $G_0, G_1, ..., G_n$, *де* $\{G_k\}_{k=1}^n$ *– система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $G_0 \in \mathbb{K}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$[r(G_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(G_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0, Λ_k *і точки* 0, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 9$) *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала,*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2.2. *Нехай* $\gamma_n^1 = 2\gamma_n^0$, $0 < \gamma < \gamma_n^1$, $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої* n *- променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такої, що* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *іздля будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $G_0, G_1, ..., G_n$, *де* $\{G_k\}_{k=1}^n$ *– система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $G_0 \in \mathbb{K}_1$, *такої, що* $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$[r(G_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(G_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

де області Λ_0 *,* Λ_k *і точки* 0 *,* λ_k $(k=\overline{1,n}\,,\ n\geqslant 2,)$ *—відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала 4.5*

Наслідок 4.2.1. *Нехай* $0<\gamma\leqslant\frac{3}{2}\,,\ n\geqslant 9, n\in\mathbb{N}$*. Тоді для будь-якої* n *- променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$*, такої, що* $|a_k|=1$ *і для будь-якої системи взаємно неперетинних областей* $G_0,G_1,...,G_n$*, де* $\{G_k\}_{k=1}^n$ *– система неперетинних областей симетричних відносно кола,* $a_k\in G_k\subset\mathbb{C}\,,\ k=\overline{1,n}$ *справедлива нерівність*

$$[r\left(G_0,0\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(G_k,a_k\right)\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області Λ_0 *,* Λ_k *і точки* 0 *,* λ_k $(\,k=\overline{1,n}\,,\ n\geqslant 9\,)$ *– відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала4.5*

При $n=\overline{9,13}$ результат наслідку є новим.

Наслідок 4.2.2. *Нехай* $0<\sigma\leqslant\sigma_n\,,\ \sigma_2=1.44\,,\ \sigma_3=2.80\,,\ \sigma_4=4.54\,,\ \sigma_5=6,66\,,\ \sigma_6=9.28\,,\ \sigma_n=0.169n^2+0.176n+0.0458\,,\ n\geq 7$*. Тоді для* $\gamma\in(0,\gamma_n]$*, будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$*, такої, що* $|a_k|=1$ *и будь-якого набору неперетинних областей* B_0*,* $\{B_k\}_{k=1}^n$*, (*$0\in B_0\subset\mathbb{C}\,,\ a_k\in B_k\subset\mathbb{C}$*), справедлива нервність*

$$[r\left(B_0,0\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant[r\left(\Lambda_0,0\right)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}r\left(\Lambda_k,\lambda_k\right),$$

де області Λ_0 *,* Λ_k *і точки* 0 *,* λ_k $(\,k=\overline{1,n}\,,\ n\geq 2\,)$ *— відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала 4.5*

4.3. Доведення Теореми 4.2.1.

Введемо систему функцій

$$\zeta=\pi_k(w)=\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Функції

$$\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$$

є прийнятними для розділяючого перетворення областей B_0, B_k, $k=\overline{1,n}$, з урахуванням кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Нехай $E_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, задає ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k)$ зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. В свою чергу, $E_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1})$ зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Крім того, $E_k^{(0)}$ ми позначимо ту частину площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті обєднання звязної компоненти множини $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, яка містить точку $\zeta=0$ зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Нехай $\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$. З визначення функції $\pi_k(w)$ випливає, що

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Використовуючи результати роботи [48, 50] ми отримаємо нерівність

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(E_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}, \tag{4.1}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(E_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

Нерівність (4.1) — (4.2) повністю досліджена в Теоремі 1.9 [48]. Використовуючи ці результати ми отримаємо

$$J_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(r\left(E_k^{(0)}, 0\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \left(\frac{r\left(E_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left({}^{(2)}_{k}, \omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи міркування попереднього розділу 3 отримаємо наступну нерівність:

$$J_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_k^{(0)}, 0\right) r\left(E_k^{(1)}, 1\right) r\left(E_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.3)$$

Таким чином, за допомогою розділяючого перетворення та формул (4.1) — (4.3), ми отримали оцінку функціонала $J_n(\gamma)$ через n функціоналів, заданих на трійках попарно неперетинних областей $E_k^{(0)}, E_k^{(1)}, E_k^{(2)}$ відносно відповідних точок $0, -1, 1$.

Відмітимо, що права частина останньої нерівності містить величини, які залежать від кутових параметрів задачі.

Згідно методу роботи [15, с.255], необхідно відкинути випадок, коли $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, причому $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$.

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} [r(B_0, 0) r(B_k, a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \qquad (4.4)$$

Перший множник оцінюється за допомогою відомої теореми М.А. Лаврентьєва [73], а саме завдяки нерівності

$$r(B_0, 0) r(B_k, a_k) \leqslant |a_k|^2 = 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким чином, справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} [r(B_0, 0) r(B_k, a_k)]^{\frac{\gamma}{n}} \leq 1.$$

Другий множник виразу (4.4) оцінимо, використовуючи теорему В.М. Дубініна [15, 52] маємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

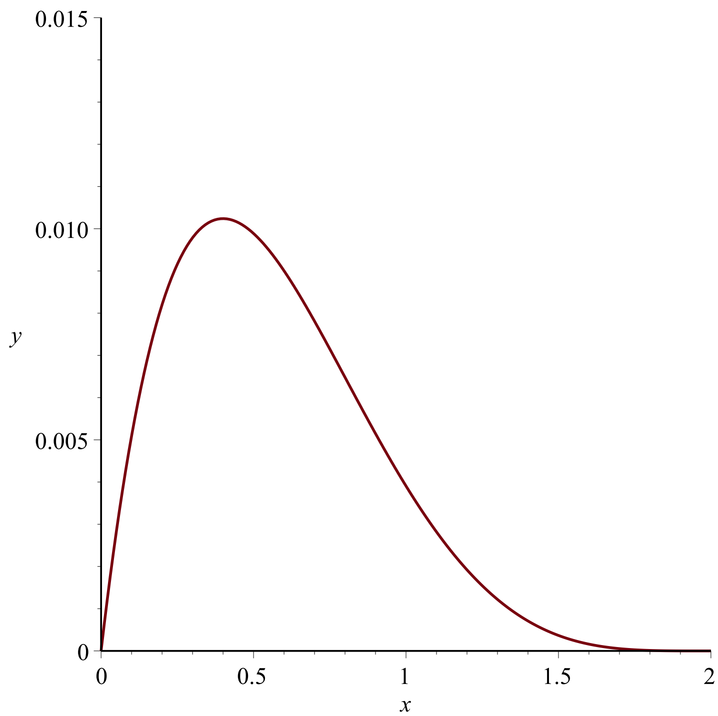

Рис. 4.2: Графік функції $f(x) = x\left(\frac{2-x}{n-1}\right)^{n-1}, n = 5$

Отже, використовуючи рівність (4.4) і вище наведені міркування, маємо оцінку

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Далі, з нерівності Коші (про зв'язок між середнім арифметичним та середнім геометричним) маємо, що справедливе співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Отже, маємо наступну нерівність

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Розглянемо поліном

$$T_n(x)=x(2-x)^{n-1},\quad x\in(0,2].$$

$$T_n'(x)=(2-x)^{n-2}(2-nx).$$

$$T_n'(x)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad x=\frac{2}{n}\text{ или }x=2.$$

Звідси випливає, що поліном $T_n(x)$ має єдиний максимум на проміжку $(0,2]$ в точці $x=\frac{2}{n}$. Таким чином, поліном $T_n(x)$ монотонно зростає на проміжку $\left(0,\frac{2}{n}\right)$ від $T_n(0)=0$ к $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ і монотонно спадає на проміжку $\left(\frac{2}{n},2\right)$ від $T_n\left(\frac{2}{n}\right)$ до $T_n(2)=0$. В подальшому будемо розглядати γ таке, щоб виконувалась умова $\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\geq\frac{2}{n}$, тобто такі γ, при яких виконується нерівність $\gamma\leq\frac{n^2}{2}$. Тоді, на проміжку $\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\leqslant x\leqslant 2$ виконується нерівність

$$x(2-x)^{n-1}\leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}=\frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}.\qquad(4.5)$$

Нехай

$$I_n^0(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

де $0\cup\{a_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}$ и $\{B_k^{(0)}\}_{k=0}^{n}$ є відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (4.5). Полюси $a_k^{(0)}=\omega_k$, $k=\overline{1,n}$, де $\omega_k=e^{\frac{2\pi ki}{n}}$, $k=\overline{0,n-1}$, є коренями $n-$ї степені з одиниці.

Для подальшого дослідження важливо отримати величину $I_n^0(\gamma)$ при всіх $\gamma\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ і $n\geqslant 9$. Доведемо справедливість наступного твердження.

Враховуючи роботу [11, 15, 65–67], отримаємо

$$I_n^0(\gamma)=r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},\omega_k^{(0)}\right)=\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{4.6}$$

де $G_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)}=0$, є відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (4.5).

Нехай

$$O_n(\gamma)=\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}=\frac{r^\gamma\left(G_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(G_k,a_k\right)}{r^\gamma\left(G_0^{(0)},0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)}$$

Враховуючи попередні міркування, а також співвідношення(4.6), отримаємо наступне

$$O_n(\gamma)\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left[2^n\cdot\frac{2^n}{\sqrt{2\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}=$$

$$=\left[2^{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^n\times$$

$$\times\left(\frac{n^2}{2\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}=$$

$$=2^{2n-2\gamma}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot n^{-(n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n})+n+\frac{2\gamma}{n}}\times$$

$$\times 2^{-2n}\cdot(2\gamma)^{-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}=$$

$$= 2^{-2\gamma} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot n^{1+\gamma+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Дальше,

$$O_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку $O_n(\gamma)$ через добуток функцій вище наведеного вигляду. Подальше дослідження буде пов'язане з вивченням поведінки цих функцій. Для зручності досліджень, позначимо ці функції наступним чином:

$$O_n(\gamma) \leqslant Y_1(\gamma, n) \cdot Y_2(\gamma, n) \cdot Y_3(\gamma, n) \cdot Y_4(\gamma, n) \cdot Y_5(\gamma, n),$$

$$Y_1(\gamma, n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_2(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_3(\gamma, n) = \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_4(\gamma, n) = \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

$$Y_5(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Дослідимо кожну функцію окремо $L_n(\gamma)$ і покажемо, що $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$ при $\gamma \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $n \geqslant 9$.

Розглянемо функцію

$$Y_1(\gamma, n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Фіксуємо $\gamma = \frac{3}{2}$ і дослідимо кожну функцію за допомогою стандартних

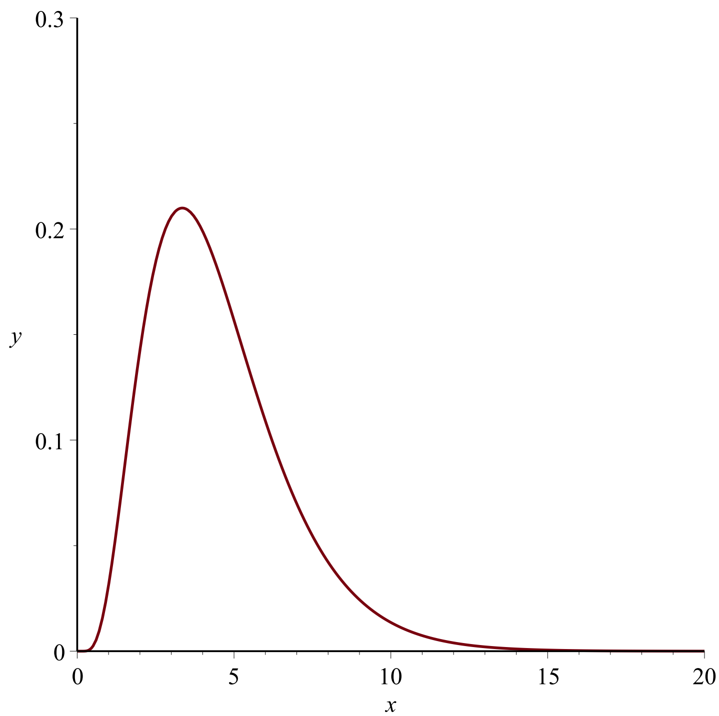

Рис. 4.3: Графік функції $Y_1(\gamma, n)$

методів математичного аналізу.

Отже,

$$Y_1(\gamma, n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{3}{2n}}.$$

Тоді,

$$Y_1(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2x}},$$

$$ln(Y_1(x)) = -\frac{5}{2} ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{5}{2} ln\left(\frac{x}{4}\right) + \left(x + \frac{3}{2x}\right) ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$(ln(Y_1(x)))\prime = \frac{5}{2x} + \left(1 - \frac{3}{2x^2}\right) ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Легко показати. що при $x > 5, (ln(Y_1(x)))\prime < 0$. Отже, функція $Y_1(x)$ монотонно спадає на проміжку $x \in [5, \infty]$. Таким чином для всіх $x \in [9, \infty], f_1(x)$ монотонно спадає, звідси отримаємо, $Y_1(x) < Y_1(9) \leqslant 0,024378, x \geqslant 9$.

Розглянемо функцію

$$Y_2(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}}.$$

При фіксованому $\gamma = \frac{3}{2}$ дослідимо функцію за допомогою стандартних

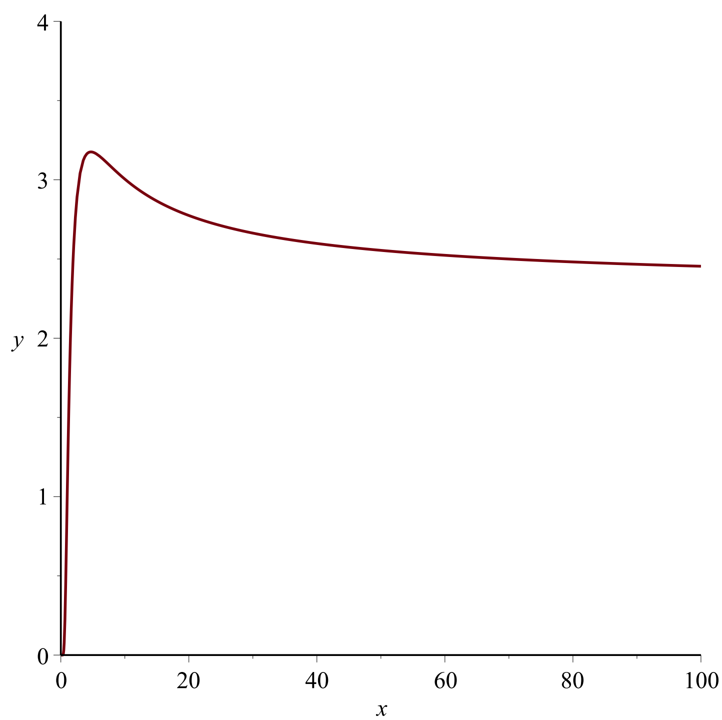

Рис. 4.4: Графік функції $Y_2(\gamma, n)$

методів математичного аналізу.

Отже,

$$Y_2(\gamma, n) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2n}}$$

$$Y_2(x) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2x}}.$$

Очевидно, що при $x > 9, (ln(Y_2(x)))\prime < 0$.Отже, функція $Y_2(x)$ монотонно спадає на проміжку $x \in [9, \infty]$. Таким чином для всіх $x \in [9, \infty], Y_2(x)$ монотонно спадає, звідси отримаємо, $Y_2(x) < Y_2(9) \leqslant 3.039342742, x \geqslant 9$.

Розглянемо функцію

$$Y_3(\gamma, n) = \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}.$$

При фіксованому $\gamma = \frac{3}{2}$ дослідимо функцію за допомогою стандартних

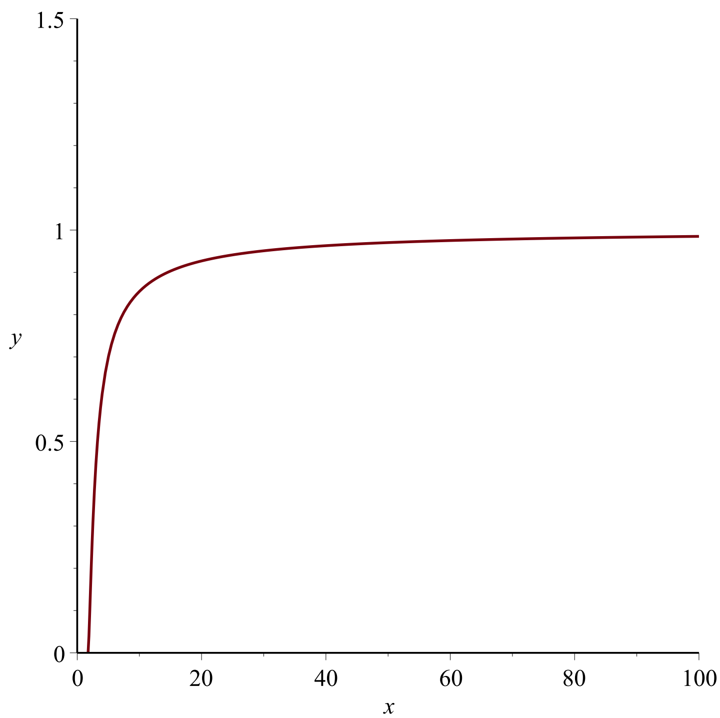

Рис. 4.5: Графік функції $Y_3(\gamma, n)$

методів математичного аналізу.

Отже,

$$Y_3(\gamma, n) = \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2n}},$$

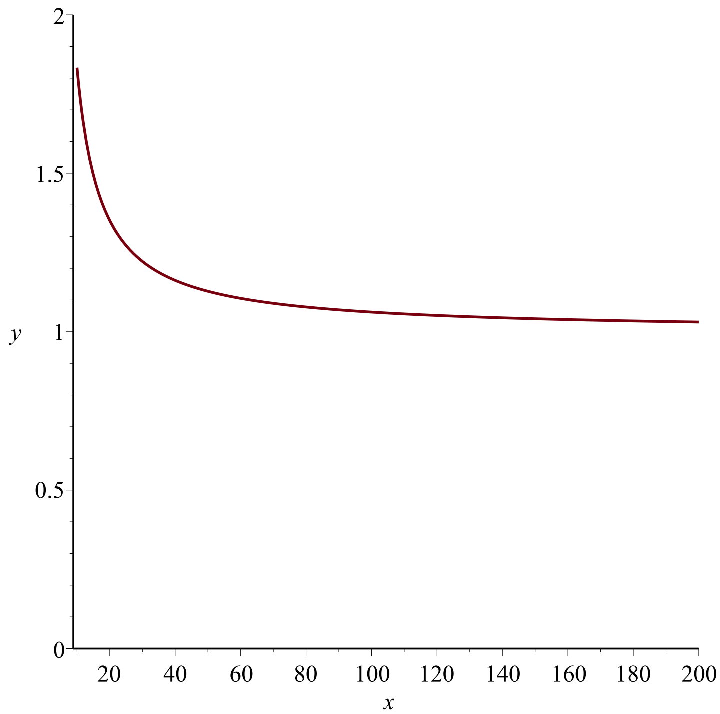

Рис. 4.6: Графік функції $Y_4(\gamma, n)$

$$Y_3(x) = \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{x}{2} + \frac{3}{2x}}.$$

Очевидно, що $Y_3(x)$ (див рис. 4.5), $Y_3(\gamma, n) \leqslant 1$.

Розглянемо функцію

$$Y_4(\gamma, n) = \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

При фіксованому $\gamma = \frac{3}{2}$ дослідимо функцію за допомогою стандартних методів математичного аналізу.

Отже,

$$Y_4(\gamma, n) = \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{n}}\right)^{\sqrt{3}},$$

$$Y_4(x) = \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{x}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{x}}\right)^{\sqrt{3}}.$$

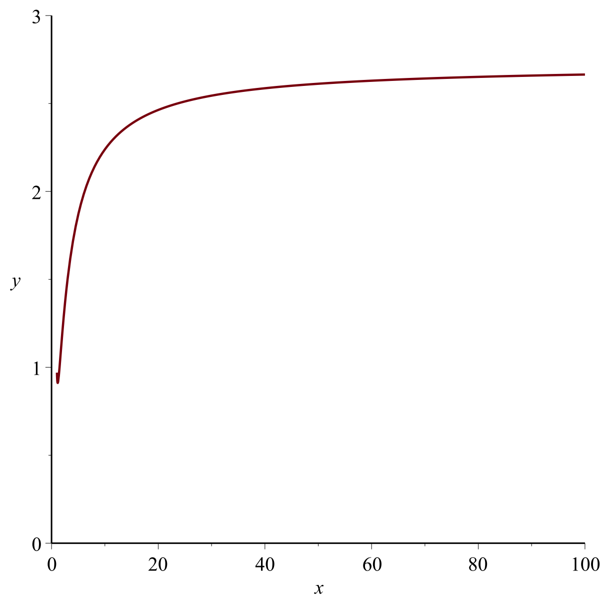

Рис. 4.7: Графік функції $Y_5(\gamma, n)$

$$ln(Y_4(x)) = \sqrt{3}ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{x}}{1-\frac{\sqrt{3}}{x}}\right).$$

$$ln(Y_4(x))\prime = \frac{-18}{X^2-9}.$$

Очевидно, що при $x > 9, (ln(Y_4(x)))\prime < 0$.Отже, функція $Y_4(x)$ монотонно спадає на проміжку $x \in [9, \infty]$. Таким чином для всіх $x \in [9, \infty], Y_4(x)$ монотонно спадає, звідси отримаємо, $Y_4(x) < Y_4(9) \leqslant 1.964199929, x \geqslant 9.$

Розглянемо функцію

$$Y_5(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Отже,

$$Y_5(\gamma, n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-\gamma\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\gamma\frac{n-1}{n}}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e < 3.$$

Враховуючи всі попередні результати при $n \geqslant 9$, отримуємо

$$Y_1(\gamma, n) \leqslant 0,024378,$$

$$Y_2(\gamma, n) \leqslant 3.039342,$$

$$Y_3(\gamma, n) \leqslant 1.$$

$$Y_4(\gamma, n) \leqslant 1.964199$$

$$Y_5(\gamma, n) \leqslant 3,$$

Отже,

$$O_n(\gamma) \leqslant Y_1(\gamma, n) \cdot Y_2(\gamma, n) \cdot Y_3(\gamma, n) \cdot Y_4(\gamma, n) \cdot Y_5(\gamma, n) =$$

$$\leqslant 0,024378 \cdot 3.039342 \cdot 1 \cdot 1.964199 \cdot 3 \leqslant 0,43661 < 1.$$

Таким чином при $n \geqslant 9$, $\gamma \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ і Залишається розглянути випадок, коли $n \geqslant 9$, $\gamma \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$, $\alpha_0 \sqrt{2\gamma} < 2$.

Доведемо, що при кожному фіксованому $n \geqslant 9$, функція $f_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$ монотоно зростає по γ на проміжку $(0; \frac{3}{2}]$. Будемо користуватися методом використаним в роботі [13]

Справедливі співввідношення

$$\ln(f_n(\gamma)) = (1 - \frac{\gamma}{n}) \times$$

$$\times \left[n \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \gamma + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) - (n-1) \ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(f_n(\gamma))]'_\gamma = -\ln 4 + \frac{1}{2n} \ln 2 + \frac{1}{2n} \ln \gamma - \frac{n-1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) + \frac{n-1}{n} \ln(n-1) +$$

$$+ (1 - \frac{\gamma}{n}) \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma} - 1} - 1\right).$$

Враховуючи наступні нерівності, отримаємо

$$0 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{8}{9} \ln 9 < \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{n-1}{n} \ln(n-1)$$

і

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\geqslant 0,\quad (1-\frac{\gamma}{n})\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{2\gamma}-1}-1\right)\geqslant 0,$$

Отже, $f_n(\gamma)$ монотонно при вказаних параметрах n і γ.

Тепер доведемо, що при фіксованому $n\geqslant 9$, функціонал $I_n^0(\gamma)$ монотонно спадає по γ на проміжку $(0;\frac{3}{2}]$.

Величина $I_n^0(\gamma)$ задовільняє наступній рівності

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\left[\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right]^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Так, як

$$\ln I_n^0(\gamma)=n\ln\frac{4}{n}+\frac{\gamma}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2}-\left(\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}\right)\ln(1-\frac{2\gamma}{n^2})+\sqrt{2\gamma}\ln\left[\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right],$$

то

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma=\frac{1}{n}\ln\frac{2\gamma}{n^2-2\gamma}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\ln\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right].$$

Позначимо $\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}=x$, тоді $\gamma=\frac{1}{2}n^2x^2$, $\sqrt{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{2}}nx$ и $0\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{n}$.

Отже, логарифмічна похідна $I_n^0(\gamma)$ набуде вигляду

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma=\frac{2}{n}\ln x-\frac{1}{n}\ln(1-x^2)+\frac{1}{nx}\ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right].$$

Дальше, скористаємось розкладом в ряди $\ln(1-x)$ і $\ln\frac{1-x}{1+x}$,

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^n}{n}-...,$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x}=-2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{1}{2k+1}x^{2k}+...\right),$$

Тоді,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma=\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{n}\left(x^2+\frac{x^4}{2}+...+\frac{x^{2n}}{n}+...\right)-$$

$$-\frac{2}{n}\left[1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+...+\frac{x^{2k}}{2k+1}\right]+....$$

Дальше,

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]_\gamma' = \frac{2}{n}\ln x - \frac{2}{n} + \frac{x^2}{n}\left(1-\frac{2}{3}\right) + \frac{x^4}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right) + ... + \frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}\right) + ...$$

Враховуючи, що $n \geqslant 9$, $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{n}$ і $\frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k(2k+1)} \leqslant \frac{1}{3}, k \geqslant 1$, отримаємо

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]_\gamma' \leqslant -\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^4+...+\frac{1}{3}x^{2k}+....\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\ln x+\frac{1}{27}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

В силу монотоного зростання функції $\frac{x^2}{1-x^2}$ на проміжку $[0,1)$ для $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{n}$, справедливі нерівності

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]_\gamma' \leqslant -\frac{2}{n}\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)<$$

$$<-\frac{2}{n}\left(1+\ln\frac{n}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{27}\left(\frac{\frac{3}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0.45+\ln n-\frac{1}{18}\frac{1}{1-\frac{3}{n^2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{n}\left(0.45+\ln n-\frac{1}{18}\right)<0,$$

Оскільки $\frac{1}{1-\frac{3}{n^2}}<1$, $n \geqslant 9$.

Очевидно, что $0.45+\ln n-\frac{1}{18}>0$ при всіх $n \geqslant 9$.

Таким чином, $I_n^0(\gamma)$ монотонн спадає по γ на проміжку $\gamma \in (\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{f_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{f_n(\frac{3}{2})}{I_n^0(\frac{3}{2})} < 1.$$

Згідно методу, запропонованого в [**?**]), отримаємо оцінку

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(E_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(E_k^{(1)}, 1\right) \cdot \alpha_{k-1} r\left(E_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

тоді

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(E_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 r\left(E_k^{(1)}, 1\right) r\left(E_k^{(2)}, -\right.\right.$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(E_k^{(0)}, 0\right) r\left(E_k^{(1)}, 1\right) r\left(E_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.7)$$

Аналогічно роботі [17], виконаємо оцінку функціонала $r^{\alpha_k^2\gamma}(E_0, 0)r(E_1, 1)r(E_2, -1)$, де області E_0, E_1, E_2 – попарно неперетиннні області комплексної площини, $0 \in E_0$, $1 \in E_1$, $-1 \in E_2$. До областей E_0, E_1, e_2 застосуємо розділяюче перетворення наступного виду. Нехай

$$M_k := \{z : (-1)^{k+1} Im\, z > 0\}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$D_1 = \overline{M_1} \cap K_1, \quad D_2 = \overline{\mathbb{C}} \backslash K_1 \cap \overline{M_1}, \quad D_3 = \overline{M_2} \cap K_1, \quad D_4 = \overline{\mathbb{C}} \backslash K_1 \cap \overline{M_2},$$

$$\zeta = \beta(z) = \frac{2z}{1+z^2},$$

где U_1 — відкритий одиничний круг комплексної площини. З означення функції $\beta(z)$, отримаємо наступні асимптотичні співвідношення

$$|\beta(z)| \sim 2|z|, \quad z \to 0, \quad z \in \overline{D_k},$$

$$|\beta(z) - 1| \sim \frac{1}{2}\left|z - 1\right|^2, \quad z \to 1, \quad z \in \overline{D_k},$$

$$|\beta(z) + 1| \sim \frac{1}{2}\left|z + 1\right|^2, \quad z \to -1, \quad z \in \overline{D_k}.$$

Нехай $E_k^{(0)}$, $k=\overline{1,4}$, позначає ту область комплексної площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті обєднання звязної компоненти множини $\beta(E_0\bigcap\overline{D}_k)$, яка містить точку 0, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Через $G_k^{(1)}$, $k=\overline{1,4}$, позначимо ту область площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті обєднання звязної компоненти множини $\beta(E_1\bigcap\overline{D}_k)$, яка містить точку 1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі. Кроме того, пусть $G_k^{(2)}$, $k=\overline{1,4}$, позначає ту область комплексної площини $\mathbb{C}_\zeta$, яка отримана в результаті обєднання звязної компоненти множини $\beta(E_2\bigcap\overline{D}_k)$, яка містить точку -1, зі своїм симетричним відображенням відносно дійсної осі.

Отже, справедливі нерівності

$$r\left(E_0,0\right)\leq\left[\frac{1}{2}r\left(E_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2}r\left(E_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(E_1,1\right)\leq\left[2r\left(E_1^{(1)},1\right)2r\left(G_1^{(2)},1\right)2r\left(E_1^{(3)},1\right)2r\left(G_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(E_2,-1\right)\leq\left[2r\left(E_2^{(1)},-1\right)2r\left(G_2^{(2)},-1\right)2r\left(E_2^{(3)},-1\right)2r\left(G_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Тоді,

$$r\left(E_0,0\right)\leq\left[\frac{1}{2^4}r^4\left(E_0^{(1)},0\right)\cdot\frac{1}{2^4}r^4\left(E_0^{(2)},0\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

Дальше,

$$\begin{gathered}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_0,0\right)r\left(E_1,1\right)r\left(E_2,-1\right)\leq\\ \leq[\frac{2^{8\alpha_k^2\gamma}}{2^8}r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(1)},0\right)r\left(E_1^{(1)},1\right)r\left(E_2^{(1)},-1\right)\times\\ \times r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(2)},0\right)r\left(E_1^{(2)},1\right)r\left(E_2^{(2)},-1\right)\times\\ \times r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(3)},0\right)r\left(E_1^{(3)},1\right)r\left(E_2^{(3)},-1\right)\times\\ \times r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(4)},0\right)r\left(E_1^{(4)},1\right)r\left(E_2^{(4)},-1\right)]^{\frac{1}{8}}\end{gathered}$$

Тоді,

$$r^{\alpha_k^2\gamma}\left(E_0,0\right)r\left(E_1,1\right)r\left(E_2,-1\right)\le$$
$$\le 2^{1-\alpha_k^2\gamma}\left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(1)},0\right)r\left(E_1^{(1)},1\right)r\left(E_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(3)},0\right)r\left(E_1^{(3)},1\right)r\left(E_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку, коли $2\alpha_k^2\gamma\le 4$, враховуючи результати роботи [4, 50], отримаємо

$$r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(E_0^{(s)},0\right)r\left(E_1^{(s)},1\right)r\left(E_2^{(s)},-1\right)\le r^{2\alpha_k^2\gamma}\left(\tilde{E}_0^{(s)},0\right)r\left(\tilde{E}_1^{(s)},1\right)r\left(\tilde{E}_2^{(s)},-1\right)=$$
$$=\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}},\quad s=1,3,$$

де $\tilde{E}_0^{(0)}$, $\tilde{E}_1^{(0)}$, $\tilde{E}_2^{(0)}$ – кругові області квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2=-\frac{(4-2\alpha_k^2\gamma)z^2+2\alpha_k^2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2,\tag{4.8}$$

и $0\in\tilde{E}_0^{(0)}$, $1\in\tilde{E}_1^{(0)}$, $-1\in\tilde{E}_2^{(0)}$.

Враховуючи, що $\alpha_k^2\gamma\le 2$, і все вище наведене, отримаємо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\le\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)\,2^{\frac{1-\alpha_k^2\gamma}{2}}\times$$
$$\times\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^8\,(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Нехай

$$\Psi(x)=2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

где $x=\alpha_k\sqrt{2\gamma}$, $x\in[0,2]$.

Розглянемо екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{2\gamma}, x_k = \alpha_k \sqrt{2\gamma}, \quad 0 < x_k < 2. \qquad (4.9)$$

Нехай $F(x) = \ln(\Psi(x))$ и $X^{(0)} = \left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{n}$ – довільна система екстремальних точок задачі (4.9).

Аналогічно роботі [65] отримаємо: якщо $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тоді маємо наступне співвідношення

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}),$$

і якщо деяке $x_j^{(0)} = 2$, тоді для довільного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}),$$

де $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{4}{x}$ (див. Рис.4.8).

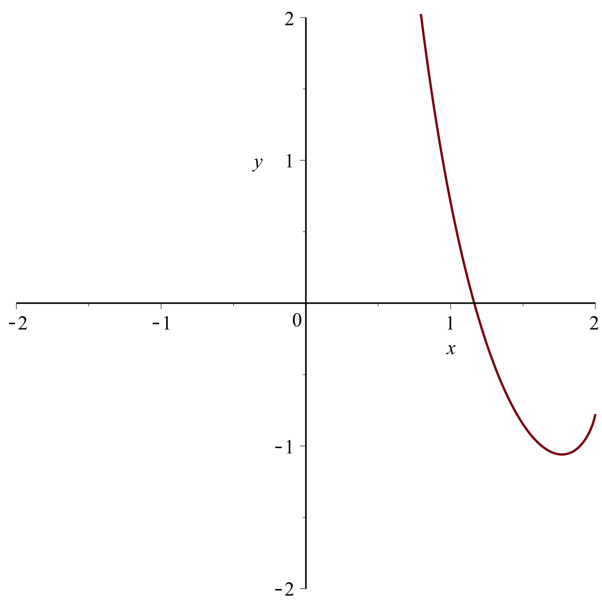

Рис. 4.8: Графік функції $F'(x)$

Доведемо, що в умовах теореми виконується умова

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Функція
$$F''(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4}{x^2}$$
строго зростає на $(0,2)$ та існує x_0, $x_0 \approx 1,768828$ таке, що
$$F''(x_0) = 0.$$

Функція $F'(x)$ монотонно спадає на проміжку $(0;x_0)$ і монотонно зростає на проміжку $[x_0;2]$, $x_0 \approx 1.7688$. Рівняння $F'(x) = t$ при $x \in (x_1;2)$, де $x_1 \approx 1.45$ має два кореня $x_1(t), x_2(t)$, де $1.45 < x_1 \leqslant x_1(t) \leqslant x_0 \leqslant x_2(t) < 2$

Припустимо, що один із коренів $x_k^{(0)}, k = \overline{1,n}$, належить проміжку $(x_0,2)$. Тоді, справджується нерівність $(x_1 - 1.45)n + (x_2 - x_1) \geqslant 0, n \geqslant 9$. Звідс випливає, що $(n-1)x_1 + x_2 \geqslant 1,45n$. З іншої сторони необхідно, щоб $(n-1)x_1 + x_2 = 2\sqrt{2\gamma}$. Таким чином, $2\sqrt{2\gamma} > 1.45n$, що неможливо при $n \geqslant 9$, $\gamma \in \left(0;\frac{3}{2}\right]$.

Отримане протиріччя означає, що ні одна із точок $x_k^{(0)}$ не може належати проміжку $(x_0,2)$. Таким чином, $x_2(t)$ має лежати на проміжку $(0,x_0]$. Зідси і зі [67] отримаємо, що $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Теорема 4.2.1 доведена.

4.4. Доведення Теореми 4.2.2.

Виконаємо наступні перетворення
$$J_\gamma = [r\,(B_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k) = [r\,(B_0,0)]^{\gamma/2}\,[r\,(B_0,0)]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k)$$

Використовуючи рівність $r\,(B_0,0) = r\left(\tilde{B}_0,\infty\right)$, де $\tilde{B}_0$ – образ області B_0 при відображенні $\tilde{\omega} = \frac{1}{\omega}$, отримаємо наступне:
$$J_\gamma = [r\,(B_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k) = \left[r\,(B_0,0)\,r\left(\tilde{B}_0,\infty\right)\right]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\,(B_k,a_k)$$

В результаті вказаних перетворень задача 4.2.4 звелась до задачі 3.2.2, тому із теореми 3.2.1 маємо оцінку

$$J_\gamma = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma/2} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\left[r\left(\Lambda_0, 0\right) r\left(\Lambda_\infty, \infty\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}} \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_∞, Λ_k і точки 0, ∞, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geq 2)$ — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала (3.5).

З останньої нерівності, виконуючи обернені перетворення, отримаємо наступну неівність:

$$\left[r\left(G_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right) \leqslant \left[r\left(\Lambda_0, 0\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

де області Λ_0, Λ_k і точки 0, λ_k $(k = \overline{1,n},\ n \geqslant 2,)$ —відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала 4.5

Теорема 4.2.2 доведена.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

З цього результату, в якості наслідку, отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу певної області відносно початку координат для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

В теоремі 4.2.2 для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n^1)$, що для будь-якого γ з цього інтервалу задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області вирішена повністю, де γ_n^1 – деяка величина, яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді;

З цього результату,отримано наслідок, в якому для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий пів інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \sigma_n], \sigma_n < \gamma_n^1$, де σ_n – деяка величина,яка задана в явному вигляді.

Результати розділу опубліковано в статтях [28, 40].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено три проблеми, дві з яких були поставлені в 1994 році В.М. Дубініним в якості відкритих проблем.

У першому розділі дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження проблем, які вивчаються в дисертаційній роботі, наведено необхідні означення (конформний радіус, функція Гріна, узугальнена функція Гріна, внутрішній радіус і т.д.), теореми, які використовуються при доведенні основних результатів дисертації.

Зокрема у розділі 1, сформульовані основні відкриті проблеми про екстремальне розбиття комплексної площини, наведено короткий історичний опис розвитку методу симетризації в геометричній теорії функції комплексної змінної. Представлено класичні результати М. О. Лаврентьєва та Г. М. Голузіна, з яких бере початок напрямок геометричної теорії функції про екстремальні задачі з неперетинними областями. Сформульованоідея П.М. Тамразова , яка дала поштовх для розвитку нового напрямку в задачах про неперетинні області, який в подальшому отримав назву "задачі про екстремальне розбиття площини з вільними полюсами".

У розділі 1, також, наведено три відкриті проблеми, які вивчаються в дисертаційній роботі. Дано короткий опис основного методу дослідження, який використовується вроботі, а саме симетризаційного методу розділяючого перетворення.

У розділі 2 в задачі про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат отримано наступні результати:

- в теоремі 2.2.1 для $n \geq 12$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.45})$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю;
- в теоремі 2.2.2 для $n \geq 126$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; n^{0.5})$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю;
- в теоремі 2.2.3 для $n = 4$ для кожного $\gamma, \gamma \in (1; 2.09)$ задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат вирішена повністю.

У розділі 3 розглянуто задачу про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів частинно неперетинних областей відносно n-променевих систем точок на деяку додатню степінь γ внутрішніх радіусів частково перетинних областей відносно початку координат та нескінченно віддаленої точки для значно більш широких інтервалів параметра γ, тобто в розділі 2 отримано наступні результати:

- в теоремі 3.2.1 для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n^0)$, що для будь-якого γ з цього інтервалу Задача 3.2.2 вирішена повністю, де γ_n^0 – деяка величина,яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді;

- теорема 3.2.2 доповнює результат теореми 3.2.1 в тому розумінні, що для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий пів інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n], \gamma_n < \gamma_n^0$, де γ_n – деяка величина,яка задана в явному вигляді.

Для теорем 3.2.1, 3.2.2 наведено кілька наслідків,, які дають розвязок задачі в деяких частинних випадках: для неперетинних областей та n – променевих систем точок, для неперетинних областей та точок одиничного кола. У найкраще вивченому випадку результати наслідків 3.2.6, 3.2.7 набагато покращують результати попередників.

У четвертому розділі отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

З цього результату, в якості наслідку, отримано розв'язок задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей симетричних відносно кола на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу певної області відносно початку координат для $\gamma \in (0; \frac{3}{2}], n \geq 9$.

В теоремі 4.2.2 для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \gamma_n^1)$, що для будь-якого γ з цього інтервалу задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається певною областю, якій належить початок координат на деяку додатню степінь γ внутрішнього радіусу цієї області вирішена повністю, де γ_n^1 – деяка величина,яка визначається однозначно, але задана в неявному вигляді;

З цього результату,отримано наслідок, який доповнює результат теореми 4.2.2 в тому розумінні, що для кожного $n \geqslant 2$ вказано такий пів інтервал $\gamma, \gamma \in (0; \sigma_n], \sigma_n < \gamma_n^0$, де σ_n – деяка величина,яка задана в явному вигляді.

Результати розділу опубліковано в статтях [14, 20–22, 28, 30, 36, 40, 41].

Отримані в дисертаційній роботі результати та розвинені в ній методи, можуть бути корисними в подальших дослідженнях комплексного аналізу та його застосуваннях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization / / Acta math. 1974. V. 133. №3-4. P. 139-169.

2. *Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Denega I.V.* Inequalities in problems on non-overlapping domains// arXiv:1108.2383.

3. *Bakhtin A. and Denega I.* Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations. – 2012. — V. LXII, no. 2. -– P.83 — 92.

4. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Denega I.V. An extremal decomposition of complex plain with fixed poles / A. K. Bakhtin, G. P. Bakhtina, I. V. Denega // Zb. Institute of mathematics of NAS, **14** (1), 34–38 (2017).

5. Bakhtina G., Dvorak I., Denega I. Problems on extremal decomposition of the complex plane//arXiv:1505.06435v1 [math.CV], Submitted on 24 May 2015

6. Inna Ya. Dvorak "On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES (2017), Vol. 221, No 5, 630-637

7. *Denega I.* Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles. Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia. – 2013. – V. LXVII, no. 1. – P. 11 – 22.

8. *Denega I.V.* Some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations. — 2011. — V. LXI, № 3. -– P.103 — 114

9. *Denega I.V., Targonskii A.L.* Separating problem on extermal decomposition of the complex plane / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2017. – Т.14, №1. – С. 147 – 1525.

10. Marcus M. Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions / / Pasif. J. math. 1964. V. 14. №2. P. 613-626.

11. Liudmyla V. Vyhivska "On the problem of V. N. Dubinin for symmetric multiply connected domains JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES (2018), Vol. 229, No 1, 108-113

12. Teichmuller O. Collected papers. - Berlin ect. Springer - 1982

13. Vyhivska L. V., On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences, 2018. — Vol. 229, No. 1. – P. 108 — 113.

14. Ya. Zabolotnii, I. Dvorak. Some Evaluation of Maximum of The Product of Conformal Radii for Pairwaise Vonoverlapping Domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, Vol. 38, No , pp. 554-559

15. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.

16. Бахтин А.К., Денега И.В., Выговская Л.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 9. — С. 1282 — 1288.

17. *Бахтин А.К.* Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Збірник праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2017. – Т. 14., № 3, – 25 – 33 с.

18. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Аналіз і застосування / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2012. – Т.9, №2. – С. 32 – 44.

19. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Об одной проблеме В.Н. Дубинина Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 401 – 411.

20. Бахтін О.К., Дворак І.Я., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей// Укр. мат. журн. – - 2017. – - Т. 69, №

2. – - С.261– -267 (Переклад англійською:Estimates for the Product of Inner Radii of Five Nonoverlapping Domains. -Ukrainian Mathematical Journalю – July 2017, Volume 69, Issue 2, pp 304–311)

21. Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В. Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости // Доп. НАН України. – 2015. – №12. – С. 7 – 12.

22. Бахтин А.К., Дворак И.Я., Денега И.В. Точные оценки произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей в комплексной плоскости // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №4. – С. 29 – 36

23. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т.8, №1. – С. 12 – 21.

24. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин //Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 5. – С. 596 – 610.

25. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Об одном частном случае известной проблемы В.Н. Дубинина//Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2015. – Т.29. – С. 17 – 22.

26. *Бахтін О.К., Заболотний Я.В.* Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України. – 2013. – № 10. – С. 7 – 10.

27. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей. // Український математичний вісник. — 2016. — Т. 13, № 1. — С. 68 — 75. (Переклад англійською: Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, No. 5. — P. 584 — 590.)

28. Бахтин А. К., Дворак И.Я. Задача об экстремальном разбиении плоскости // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – К.: 2018– Т.32 – С. 3-10.

29. *Бахтін А.К., Бахтіна Г.П., Вьюн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.:Ін-т матем. НАН України, 2014. – Т.11, №1. – С. 141 – 152.

30. Г.П. Бахтина, И.Я. Дворак, И.В. Денега. О произведении внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Доп. НАН України. – 2016. – №1. – С. 7 – 11.

31. *Бахтина Г.П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

32. *Бахтина Г.П.* Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 2. – С. 202 – 204.

33. *Бахтина Г.П.* Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология : Сб.науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.

34. Бахтина Г. П. Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного на неналегающие области / Г. П. Бахтина // Укр. мат. журн. – 1974. – **26,** № 5. – С. 646 – 648.

35. Бахтина Г. П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей / Г. П. Бахтина //Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев, (1984), 21–27.

36. Г. П. Бахтіна, В. Є.Вюн, І.Я. Дворак. Оцінки добутків внутрішніх областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2015. – Т.12, №3. – С. 29 – 36.

37. Выговская Л.В. О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 2. — С. 295 — 302. (Переклад англійською: Vyhivska L. On the problem of V.N. Dubinin for

symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, No. 1. — P. 108 — 113.)

38.

39. *ГолузинГ.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.

40. Дворак И.Я. Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости//Укр. матем. вiсник - 2018 р. т. 15, № 3,-с.345-357

41. Дворак I.Я. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей//Укр. матем. вiсник - Том 13 (2016), № 2, с. 157 – 166 (Переклад англiйською: Inna Ya. Dvorak. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 221, No. 5. — P. 630 — 637.

42. *Денега И.В.* Об одной экстремальной задаче о частично налегающих областях // Зб. праць Iн-ту матем. НАН України. – 2013. – Т.10, №4-5. – С. 439 – 446.

43. *Денега И.В.* Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 — 19.

44. *Денега И.В.* Об одной экстремальной задаче о частично неналегающих областях Комплексний аналiз, теорiя потенцiалу i застосування // Зб. праць Iн-ту матем. НАН України. – К.: Iн-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, №4-5. – С. 442 – 449.

45. *Денега И.В.* Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2012. – №5. – С. 19 – 22.

46. *Денега I.В.* Роздiляюче перетворення в геометричної теорiї функцiй комплексної змiнної. Автореф. дис. . . . канд. фiз.-мат. наук. – Київ, 2012. – 16 с.

47. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр.лит., 1962.—256с.

48. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

49. *Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г.* Об экстремальном разбиении пространственных областей // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1998. — Т.254. — С. 95 — 107.

50. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.

51. *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Владивосток "Дальнаука"ДВО РАН – 2009. – 390с.

52. *Дубинин В.Н.* О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 24 – 31.

53. Емельянов Е. Г. К задачам об экстремальном разбиении / Е. Г. Емельянов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1986. – **154.** – С. 76 – 89.

54. Емельянов Е. Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении / Е. Г. Емельянов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1987. — **160.** — С. 91 — 98.

55. Емельянов Е. Г. К задаче о максимуме произведения степеней кон- формных радиусов неналегающих областей / Е. Г. Емельянов // Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2002. — Т.286. — С. 103 — 114.

56. *Заболотний Я.В.* Деякі екстремальні задачі геометричної теорії функцій// Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т.8, №1. – С. 88 – 97.

57. *Заболотний Я.В.* Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т.10, №4-5. – С. 557 – 564.

58. *Заболотний Я.В.* Застосування розділяючого перетворення в задачах про неперетинні області// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2011. – № 4. – С. 20 – 24.

59. *Заболотний Я.В.* Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2011. – № 9. – С. 13 – 17.

60. *Заболотний Я.В.* Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, № 1. – С.24—31.

61. *Заболотний Я.В.* Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині// Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. - К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 557 – 564.

62. *Заболотний Я.В.* Екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2014. – 16 с.

63. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Український математичний вісник. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 441 — 452. (Переклад англійською: Zabolotnii Ya.V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 231, No. 1. — P. 101 — 109.)

64. *Заболотний Я.В.* Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей// Доп. Нац. Акад. наук України. – 2016. – № 3. – С. 7 – 13.

65. *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96 – 98.

66. Ковалев Л. В. О трех непересекающихся областях / Л. В. Ковалев // Дальневосточный математический журнал. – 2000. – **1,** № 1. – С. 3 – 7.

67. Ковалев Л. В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — **6**. — С. 3 – 7.

68. Колбина Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении / Л. И. Колбина // Доклады Академии Наук СССР, серия мат. — 1952. — **84**, № 5. — С. 865 — 868.

69. Колбина Л. И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области / Л. И. Колбина // Вестник Ленингр. ун-та. — 1955. — **5**. — С. 37 — 43.

70. *Кузъмина Г.В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – 302. – С. 52 – 67.

71. *Кузъмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253 – 275.

72. *Кузъмина Г.В.* О связи различных задач об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1998. – **254.** – С. 116 – 131.

73. *Лаврентъев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.

74. Митюк И.П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1980.

75. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.

76. *Тамразов П.М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.

77. Таргонский А. Л. Екстремальнi задачi теорiї однолистих функцiй: дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / А. Л. Таргонский. — К., 2006. — 143 с.

78. Таргонський А. Л. Екстремальнi задачi теорiї однолистих функцiй : автореферат дисертацiї на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук / Андрiй Леонiдович Таргонський ; Нацiональна академiя наук України, Iнститут математики. - Київ : [б.в.], 2006. - 21 с.

79. *Хейман В.К.* Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.