

## ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу Дворак Інни Ярославівни  
*«Метод симетризації в задачах про екстремальне  
розбиття комплексної площини»,*

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

**Актуальність теми дисертаційного дослідження.** Дисертаційна робота Дворак І. Я. присвячена дослідженню класичного напрямку геометричної теорії функції комплексної змінної, а саме задачам про екстремальне розбиття комплексної площини. Основним методом дослідження є метод розділяючого перетворення, який має симетризаційну природу і розроблений В. М. Дубініним наприкінці 70-х років ХХ століття. Широке застосування методу симетризації в геометричній теорії функції здійснено в роботах таких відомих вчених як Г.Г.Харді і Д.І. Літтвуда, Г. Полія і Г.Сеге, В.К. Хеймана, Дж.А. Дженкінса, М.Маркуса, А. Бернштейна, І.П. Мітюка, П.М. Тамразова, А.Ю. Солиніна, В.А. Шлика та ін. В 1934 році в роботі «К теории конформных отображений» М.О. Лаврентьев поклав початок цілому напрямку в геометричній теорії функції комплексної змінної, а саме дослідженню екстремальних задач для неперетинних та частково перетинних областей. Цими задачами в різні часи займалися М.А. Лаврентьев, Х. Гретч, О. Тейхмюллер, Г.М.Голузин, К. Льовнер, П.П. Куфарев, Дж.А. Дженкінс, Ю.Є. Аленіцин, Н.А. Лебедев, П.М. Тамразов, М. Шиффер і П. Дюррен, Л.І. Колбіна, Г.В. Кузьміна, В.Я. Гутлянский, Л.Л. Громова, А.З. Гріншпан, Е.Г. Ємельянов та ін.

У 1968 році П.М. Тамразов висунув нову на той час ідею про те, що цікаво вивчати задачі, які відповідають квадратичним диференціалам, полюси яких мають певну степінь свободи. Екстремальні задачі, яким відповідають квадратичні диференціали з вільними полюсами другого порядку вперше розглянуто в роботах Г. П. Бахтіної в 1974-1975 роках.



У подальшому, задачі такого типу були розвинені в роботах Г.В. Кузьміної, Е.Г. Ємельянова, В.М. Дубініна, О.К. Бахтіна, А.Л. Таргонського, І. В. Денеги, В.Є. В'юн, Я. В. Заболотного та інших математиків і отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами. Дисертаційна робота Дворак І. Я. присвячена дослідженню трьох задач такого типу, дві з яких було поставлено у вигляді відкритих проблем в 1994 році в роботі «Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного» В.М. Дубініним. Таким чином, тематика досліджень дисертаційної роботи є достатньо актуальною.

Варто відзначити також, що робота виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060.

**Ступінь обґрунтованості наукових положень, їх достовірність та новизна.** Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 79 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок.

У **Розділі 1** дисертаційної роботи зроблено огляд літератури, викладено основні ідеї методів дослідження вище згаданих задач, наведено означення і теореми, необхідні для формулювання і доведення основних результатів дисертації. У розділі 1, також, наведено три відкриті проблеми, які вивчаються в дисертаційній роботі. Дано короткий опис основного методу дослідження, який використовується в роботі, а саме симетризаційного методу розділяючого перетворення.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **Розділу 2**. У цьому розділі розглядається задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на деяку додатню степінь  $\gamma$  внутрішнього радіусу деякої області відносно початку координат. Вище згадану задачу розв'язано у випадку  $\gamma \in (1; n^{0.45}]$ ,  $n \geq 12$ . За умови  $n \geq 126$  вказану задачу розв'язано для значень



параметра  $\gamma$ , які належать інтервалу  $\gamma \in (1; n^{0.5}]$ . При  $n=4$  вище зазначена задача розв'язана для  $\gamma \in (1; 2,09]$ .

У 3 Розділі вивчається задача про максимум добутку внутрішніх радіусів  $n$  частково перетинних областей відносно  $n$ -променевої систем точок на степені  $\gamma$  внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки. Для кожного  $n \geq 2$  розв'язано вище згадану задачу при будь-якому  $\gamma \in (0; \gamma_n^0)$ , де  $\gamma_n^0$  – деяке додатне число, яке визначається однозначно, але задане в неявному вигляді. Результати розділу 3 подані у вигляді двох теорем. Крім того, сформульовано ряд наслідків, які випливають з теорем та наведено таблицю, яка наочно демонструє перевагу отриманого результату у порівнянні із результатами попередників.

У 4 Розділі розглянуто значне узагальнення однієї відкритої проблеми В.М. Дубініна, а саме наступну задачу: для кожних фіксованих  $n \geq 2$  і  $\gamma \in (0; n]$  знайти максимум функціонала  $I_n(\gamma) = [r(G_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^n [r(G_k, a_k)]$ , де  $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$  –  $n$ -променева система точок, така, що  $M(A_n) = 1$ , де  $G_1, \dots, G_n$  – система неперетинних областей з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю  $G_0 \in K$ ,  $a_k \in G_k \subset C, k = \overline{1, n}$ , де означення класу  $K$  наведено на с.111 дисертаційної роботи.

Ця задача виявилась достатньо складною. В дисертаційній роботі отримано розв'язок цієї для  $\gamma \in (0; \frac{3}{2}]$  при  $n \geq 9$  та точок, розташованих на одиничному колі і у випадку, коли  $\overline{G_0} \subset U$ , де  $U$  – відкритий одиничний круг.

Усі основні результати дисертації є чітко доведеними, тому їх достовірність не викликає сумнів.

**Теоретичне і практичне значення.** Дисертаційна робота має, насамперед, теоретичне значення. Одержані результати і методика їхнього отримання можуть бути використані при вивченні питань комплексного аналізу, голоморфної динаміки, теорії функцій і теорії апроксимації.

**Апробація і повнота викладу результатів.** Основні результати дисертації опубліковано у 12 роботах, серед яких: 9 фахових, зокрема 3 статті у журналах,



що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах 4 конференцій, 2 з яких міжнародні. Результати мають достатньо широку апробацію, оскільки доповідались на семінарах в наукових установах України та за кордоном.

Автореферат достатньо повно відображає основні положення та висновки дисертації.

**Зауваження.** Дисертаційну роботу не позбавлено недоліків, про що, зокрема, свідчать наступні зауваження:

1. Бажано було б навести безпосереднє доведення виносних формул без номерів на сторінці 115. Доведення будь-якого факту, навіть самого простого, має міститись в дисертації, хоча, звичайно, в нас немає сумнівів у вірності цих формул.
2. Є не зовсім коректні посилання на літературу. Так, наприклад, в останньому рядку на сторінці 118 читаємо: «Враховуючи роботу [11, 15, 65-67], отримаємо». Тут мають бути номери конкретних теорем, тверджень, розділів і т.п., а не просто номери робіт. До того ж, замість «роботу» має бути «роботи», а в кінці речення, після слова отримаємо, має стояти кома. Аналогічне зауваження: фраза «Згідно методу роботи [15, с.255]» (див. с. 58, 4 рядок знизу).
3. На сторінці 126, 14 рядок зверху: «Будемо користуватися методом, використаємо в роботі [13]» – неінформативне речення, до того ж, в кінці речення відсутня крапка. Якщо мова йде про метод, має бути докладно написано, в чому він полягає, до того ж, в тексті відсутня кома після слова «методом».
4. На с. 18, у Вступі у списку відомих вчених, які займалися розвитком методу симетризації наведено лише прізвища вчених без ініціалів, які варто було б вказати. Аналогічне зауваження до с.19, 4 абзац зверху;
5. На с. 41 та с.42 замість  $\exp^y$  треба писати  $\exp y$ .
6. Також на с.42 варто було би надати означення виразу  $o(1)$ .



7. Оскільки в роботі дуже широко використовується теорія квадратичних диференціалів, варто було б, наприклад, дати означення їх кругових областей (див., напр., с. 90).
8. На с. 51 в теоремі 2.2.1 та на с. 54, 1 абзац зверху треба було написати, що вираз  $\left[ e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}} \right]$  – означає цілу частину числа  $e^{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2}}$ .
9. У доведенні теореми 2.2.1 варто було би уточнити, що при  $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$  екстремальних конфігурацій не існує.
10. На с. 59, 2 та 7 рядок варто написати номер теореми, номер пункту чи параграфу.
11. На с. 62 та с. 66 при посиланні на малюнок у фразі «див рис.» після «див» відсутня крапка.
12. На с. 66 рекомендовано знак похідної винести за знак логарифма.
13. На с.68 в десяткових дробах варто використовувати стандартний запис або через кому або через крапку.
14. У підписах до малюнків при доведенні теореми 2.2.1 та теореми 2.2.3 варто писати функцію залежну від  $x$ .
15. На с. 69 у таблиці у величині  $a_n(\gamma)$  треба писати  $a_n(\gamma)$ .
16. На с. 73, 5 рядок знизу замість  $f_n(\gamma)$  треба писати  $J_n(\gamma)$ .
17. На с. 73, 4 рядок знизу, словосполучення «рокудля» треба писати окремо.
18. На с. 85 у доведенні Теореми 2.2.3 треба було відзначити, що всі обчислення виконуються для  $n = 4$ ,  $\gamma = 2.09$ .
19. На с. 107, с. 118 та деяких інших треба було б дотримуватися уніфікованого позначення досліджуваних функціоналів.
20. У списку використаних джерел на с. 141 у п. 17 та на с. 143 у п. 20, п.36 допущено неточності при оформленні літератури.
21. На с. 144 пропущено джерело під номером 38.



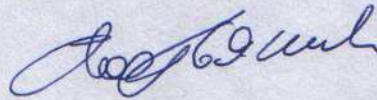
Усі наведені вище недоліки не впливають на загальну високу оцінку результатів дисертації та їх правильність.

**Загальний висновок.** Дисертаційна робота Дворак І.Я. є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обґрунтовані, результати що в сукупності є істотним внеском у розвиток теорії екстремальних задач з вільними полюсами геометричної теорії функції комплексної змінної.

Вважаю, що дисертаційна робота Дворак Інни Ярославівни «*Метод симетризації в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини*», за рівнем наукових досліджень, їх науковою новизною, актуальністю, кількістю публікацій у наукових фахових виданнях і рівнем апробації відповідає вимогам пп.9, 11-13 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013), щодо кандидатських дисертацій, а її автор Дворак Інна Ярославівна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

### **Офіційний опонент**

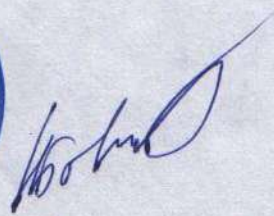
доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник,  
професор кафедри математичного  
аналізу Житомирського державного  
університету імені Івана Франка



Є. О. Севостьянов

### **Підпис засвідчую:**

Проректор з навчальної роботи  
Житомирського державного  
університету імені Івана Франка  
кандидат біологічних наук, доцент



Н.М. Корнійчук