Відгук

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук
Кадеця Володимира Михайловича
на дисертаційну роботу
Фещенка Івана Сергійовича
"Системи підпросторів гільбертових і банахових просторів, їх властивості та застосування"
поданої на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Дисертаційна робота присвячена актуальним питанням взаємного розташування елементів фіксованого скінченного набору підпросторів гільбертового або банахового простору у термінах проекторів на ці підпростори. Зокрема, автор вносить свій доробок у дуже класичне за постановкою коло питань щодо замкненості та доповнювальності (у банаховому випадку) лінійних підпросторів. Такі питання досліджувалися з самого початку існування функціонального аналізу, і дуже приємно, що автор винайшов свій власний підхід, який дозволив йому отримати нові нетривіальні результати.

Дисертація складається зі вступу та 4 розділів. У вступі достатньо повно висвітлена історія питання та наведені попередні результати інших авторів, що мотивують дослідження.

Перший розділ присвячений класифікації, з точністю до унітарної еквівалентності, наборів та незвідних наборів із n підпросторів $H_1, \ldots, H_n$ гільбертова простору H, таких що задовольняють фіксованому набору умов на "кути" між підпростором H_1 та підпросторами H_k, а також фіксованим умовам "комутування" чи ортогональності між рештою пар цього набору. "Комутування" тут використовується у сенсі комутування відповідних ортопроекторів, а "кут" $\theta \in (0, \pi/2)$ між підпросторами X, Y – це алгебраїчна умова $P_X P_Y P_X = \cos^2\theta P_X$, $P_Y P_X P_Y = \cos^2\theta P_Y$ на ортопроектори. Відмітимо, що назва "кут між підпросторами" для цієї умови може бути дещо оманливою: вона адекватно відповідає геометричному уявленню про кут між прямими на площині, а от, скажімо, для прямої та площини у тривимірному просторі цей кут аж ніяк не дорівнює тому куту, що ми пам'ятаємо зі шкільної геометрії (і взагалі у цьому випадку за цим означенням кут не визначений). За деяких умов на систему кутів існує, з точністю до унітарної еквівалентності, лише скінчена кількість незвідних наборів з заданими кутами, за деяких – нескінчена кількість, що допускає явну параметризацію, а у решті випадків задача виявляється "безнадійною" у тому сенсі, що її складність перевищує складність задачі про опис усіх унітарно нееквівалентних пар обмежених самоспряжених операторів.

Результати цього розділу викладені у спільній роботі здобувача з О.В.Стрільцем та споріднені ідеологічно до результатів статті Ю.С.Самойленка та О.В.Стрільця "On simple n-tuples of subspaces of a Hilbert space", УМЖ **61** (2009), no. 12, 1956 – 1994. Решта статей здобувача написана без співавторів.

Другий розділ присвячений достатнім умовам замкненості у гільбертовому просторі H суми образів n неперервних лінійних операторів $A_k\colon H_k \to H$. Зокрема, з однієї з основних теорем розділу (теореми 2.3.5) випливає, такою достатньою умовою є замкненість образів операторів A_k разом з компактністю попарних добутків $A_j^* A_k$, $k \neq j$. Умова компактності добутків послаблена у теоремі 2.4.1. А саме, вводиться у розгляд наступна дійсна симетрична $n \times n$ матриця M. Для кожного k діагональний елемент $m_{k,k} > 0$ обирається таким чином, що існує компактний самоспряжений оператор $T_k\colon H_k \ominus \ker A_k \to H_k \ominus \ker A_k$ такий, що $\langle (A_k^* A_k + T_k)x, x\rangle \geqslant m_{k,k}\|x\|^2$ для кожного $x \in H_k \ominus \ker A_k$, а при $j \neq k$ елемент $m_{j,k} < 0$ обирається таким чином, що існує компактний оператор $T_{j,k}\colon H_k \to H_j$ для якого $\|A_j^* A_k + T_{j,k}\| \leqslant -m_{j,k}$. Теорема 2.4.1 стверджує, що у вищенаведеному результаті компактність попарних добутків $A_j^* A_k$ може бути замінена на додатну визначеність матриці M. Результати отримані за допомогою витонченої гри зі самоспряженими операторами, їхніми спектральними мірами, допоміжними просторами та операторами, і аж ніяким чином не є тривіальними.

Як випливає з назви "Суми доповнювальних підпросторів банахового простору", у третьому розділі здобувач виходить з відносно комфортного середовища гільбертового простору. У загальних банахових просторах виникає багато патологічних ефектів, що ускладнюють роботу з підпросторами. Зокрема, підпростір може бути не доповнювальним; на доповнювальний підпростір не завжди можна знайти проектор одиничної норми (аналог ортопроектора), а якщо можна, то цей "ортопроектор" може бути не єдиним; для "ортопроектора" P відповідний проектор $I - P$ на доповнення може вже не бути "ортопроектором", більш того, є приклади, коли $\|P\| = 1$, але $\|I - P\| = 2$. Усі ці труднощі мав оминати здобувач при отриманні центрального результату – теореми 3.3.1. У цій теоремі, для простору X, доповнювальних підпросторів X_j з відповідними проекторами P_j, $j = 1, \ldots, n$, робиться припущення щодо існування $n \times n$ матриці $E = (e_{k,j})$ зі спектральним радіусом $r(E) < 1$ такої, що $e_{k,k} = 0$, а при $j \neq k$ для довільного $x \in X_j$ має місце нерівність $\|P_k x\| \leqslant e_{k,j}\|x\|$. За цих умов теорема стверджує, що $Z = X_1 + \ldots + X_n$ є доповнювальним підпростором, $\bigcap_{k=1}^n \ker P_k$ є доповненням до Z, і послідовність операторів $I - (I - \sum_{k=1}^n P_k)^N$ збігається за операторною нормою до відповідного проектора на Z. У теоремі 3.3.2 надана оцінка швидкості збіжності, а у теоремі 3.3.3 побудований приклад на точність умови $r(E) < 1$. Відмітимо, що у цьому прикладі Z виявляється замкненим, але не доповнювальним. Було б також цікаво знайти аналогічний приклад на точність з порушенням замкненості. Також надано конкретний приклад застосування теореми 3.3.1 до сум маргінальних підпросторів в L_p.

Оцінка швидкості збіжності у теоремі 3.3.2 зовні нагадує оцінку в теоремі Банаха про нерухому точку. Цікаво, чи не можна якимось чином звести цю теорему до теореми Банаха? Якщо б це вийшло, це, можливо, надало б змогу розповсюдити результати з лінійних проекцій на ліпшицеві ретракції. Інша ідея такого розповсюдження, яку мало б сенс спробувати – це лінеаризація за допомогою конструкції, відомої як "free Lipschitz spaces".

Мабуть не дуже правильним з точки зору апробації результатів третього розділу є те, що дисертація містить лише посилання на публікацію у вигляді анонсу у "Доповідях АН України" та на тези доповідей на конференціях, тобто не містить посилань на публікацію доведень. Така публікація, на щастя, зроблена в arXive в 2018 році: `https://arxiv.org/pdf/1606.08048.pdf`, інакше це було б порушенням правила про необхідність публікації усіх основних результатів (а в математиці основним є саме доведення).

Останній, четвертий розділ має назву "Зменшення" системи підпросторів до лінійно незалежної системи підпросторів із збереженням суми". Можливість такого зменшення є дуже природнім і передбачуваним фактом, і виглядає як вправа з підручника. Але, коли намагаєшся розв'язати цю "вправу" самостійно, з'ясовуєш, що все зовсім не так очевидно, як воно виглядає на перший погляд, і доведення основної теореми вимагає винахідливості і гарної техніки.

Відмічу, що наші зі здобувачем математичні навички істотно відрізняються: деякі речі, що мені здаються зрозумілими, у дисертації детально пояснюються, і навпаки, є випадки очевидних для здобувача речей, для перевірки яких мені доводилося докладати зусиль.

В цілому дисертаційна робота справляє дуже приємне враження. Вона ретельно написана, і я майже не побачив друкарських помилок. Винятками є, скажімо, відсутність лапок після слів "мало залежні" у четвертому рядку на сторінці 139, чи зміна позначення для скалярного добутку з $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $(\cdot,\cdot)$ у четвертому розділі. У тексті є деякі непотрібні повторення, найбільше за розміром – на сторінках 115 і 116, де з дев'яти пунктів у мотиваційному переліку сім повторюють дослівно перелік зі сторінки 83. Деяке запитання викликає в мене доцільність прикладу наприкінці першого розділу: як на мене, він небагато додає для розуміння основної класифікаційної теореми.

Решта запитань до якості тексту має суто лінгвістичний характер. Я не є носієм української мови, тому можу помилятися, але мені здається, що формули на кшталт $a = b$ не можна читати "a рівно b", як це робить здобувач, а лише "a дорівнює b". Замість "із збереженням" у назві четвертого розділу мало б бути "зі збереженням". Подекуди немає одноманітності у відмінюванні прикметників. Скажімо, зустрічаються вислови "щоб була доповнювальна", "щоб була замкнена", "щоб були лінійно незалежні" поряд з "щоб була доповнювальною", "щоб була замкненою", "щоб були лінійно незалежними" (перша форма мені здається помилковою). Подекуди проскакує форма "задовольняють умовам" (скажімо, у назві пункту 1.4.1) замість "задовольняють умови". На сторінці 41, третій рядок знизу, використане слово "наглядно" замість "наочно". На сторінці 105, восьмий рядок зверху, використане слово "замкнутим" замість "замкненим".

Висловлені вище зауваження не принципові і не применшують позитивного враження від дисертаційної роботи.

Робота демонструє високий рівень математичної кваліфікації її автора. Результати дисертаційної роботи є новими. Усі результати роботи супроводжуються строгими доведеннями, я їх перевірив, і правильність не викликає в мене сумнівів. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 5 наукових статтях, 4 з яких – у виданнях, що входять до бази SCOPUS, а одна – у Доповідях Національної академії наук України. Усі роботи прореферовані у Zentralblatt Math. Вони достатньо апробовані виступами на конференціях та семінарах. Анотації українською і англійською мовами та автореферат адекватно відображають зміст дисертації.

Усе вищесказане дозволяє зробити висновок про те, що дисертаційна робота Фещенка Івана Сергійовича задовольняє всі вимоги, що ставляться до кандидатських дисертацій з математики, зокрема у пунктах 9 та 11-14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабміну номер 567 від 24.07.2013), а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри фундаментальної
математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна

В.М.Кадець

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
Начальник відділу
кадрів

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.01 06.09.2019р
Секретар ради /Сатур О.Р./

Канцелярія