НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БЕЦКО ІВАННА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ–2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені І. Сікорського».

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕЛЮХ Григорій Петрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Черевко Ігор Михайлович,
Чернівецький національний
університет імені Юрія Федьковича,
декан факультету математики та інформатики.

доктор фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович,
Національний педагогічний
університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ,
професор кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист дисертації відбудеться « 1 » жовтня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий « 29 » серпня 2019 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Від початку вивчення різницевих і функціонально-різницевих рівнянь пройшло більше двох століть. Внаслідок цього в даний час існує багато праць, в яких розроблено цілий ряд ефективних методів дослідження окремих класів систем цих рівнянь, які мають широкі практичні застосування. Самий активний розвиток їх теорії почався у 60-ті роки XX ст. Саме в ці роки різницеві рівняння знаходять широкі застосування в теорії автоматичного регулювання, автоматиці і телемеханіці, при вивченні біофізичних проблем і т.ін. Важливим внеском для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь були роботи Джорджа Біркгофа та його учнів. В них було розроблено основи теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Це, а також різноманіття і складність проблем, які виникли при їх дослідженні, стимулювало всебічне вивчення важливих питань їх теорії. При цьому все більше математиків вибирають такі рівняння в якості основного об’єкту дослідження. У результаті різкого зростання інтересу багатьох математиків до вивчення широких класів різницевих рівнянь, з’явилася велика кількість робіт, в яких вивчаються різноманітні питання самої теорії цих рівнянь. Серед них відмітимо монографії Я. В. Бикова, В. Г. Ліненко, І. В. Гайшуна, О. О Гельфонда, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, О. М. Шарковського, Ю. Л. Майстренка, О. Ю. Романенко, А. А. Самарського, Ю. Н. Карамзіна, М. А. Солдатова, О. О. Миролюбова, В. Ю. Слюсарчука та інших відомих математиків. Теорія різницевих рівнянь знаходить широкі застосування майже в усіх галузях природознавства. Все частіше такі рівняння використовуються при моделюванні нелінійних явищ і процесів, що відбуваються в системах різноманітної природи. Більше цього, різницеві рівняння мають ряд специфічних властивостей і використовуються для моделювання складних коливних процесів у тих випадках, коли застосування звичайних диференціальних рівнянь є неможливим.

Разом із сказаним вище слід відмітити, що в сучасній теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом є ряд питань, які вивчені дуже мало. Перш за все, сюди відносяться питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків систем різницевих рівнянь та вивчення структури їх множин. Ці питання мають особливо важливе значення для розвитку теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом, а тому природно, що саме вони є основною метою дослідження даної дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» у відповідності до планів, передбачених у Національному технічному університеті «КПІ ім. І. Сікорського» згідно з темою «Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540).

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є дослідження властивостей неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь з неперервним аргументом.

Об'єктом дослідження є різницеві та функціонально-різницеві рівняння з неперервним аргументом.

Предметом дослідження є вивчення структури множини неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь.

Завдання дослідження:

– встановити умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+}(t \in \mathbb{R}^{-})$ розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– встановити умови існування неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– встановити структуру множини неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановити умови існування обмежених на всій дійсній осі розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і дослідити їх властивості.

Методи дослідження. У роботі використовуються основні методи теорії звичайних диференціальних і різницевих рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, полягають у наступному:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудовано сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+}(t \in \mathbb{R}^{-})$ розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– отримано умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих і функціонально-різницевих рівнянь в гіперболічному випадку і досліджено їх властивості;

– встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані в ній результати доповнюють результати робіт багатьох математиків, які є близькими до теми дисертаційної роботи, і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівникові Г.П. Пелюху.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

– Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 2015);

– XVI міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2015);

– VII міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Камянець-Подільський,2016);

– Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (м. Ужгород, 2016);

– XVII міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2016);

– International Conference on «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications» (Cherkasy, 2017);

– наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Національного технічного університету України «КПІ»;

– семінарах з диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, якими керують академіки Самойленко А. М. і Перестюк М. О.

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 12 наукових праць, у тому числі 6 статей у наукових фахових виданнях (з них 2 перекладено на англійську мову і опубліковано у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Scopus), 6 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською і англійською мовами, змісту, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, який містить 90 найменувань і додатку. Повний обсяг роботи складає 127 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

В *першому розділі* дисертації дається огляд публікацій, тематика яких є близькою до тематики дисертаційної роботи.

Другий розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q – деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків, досліджується структура їх множини, а також розробляється метод їх побудови.

Зокрема, в першому та другому підрозділах другого розділу розглянута система рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2}$$

де A, B – дійсні $(n \times n)$- матриці, q – дійсна стала, і показано, що при деяких умовах вона має неперервні розв'язки. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення λ_i, $i = 1,...,n$, задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,...,n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$- матриця, яка приводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt), \tag{3}$$

де $\tilde{B} = C^{-1}BC$, $J = diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i\end{pmatrix},\ i=1,\dots,m, m\le n.$$

Основними результатами даних підрозділів є теорема 2.1 та теорема 2.3, які дають можливість побудувати цілу сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+(t\in\mathbb{R}^-)$ розв'язків системи (3).

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $0<\lambda_i<1, i=1,\dots,m, q>1$;

2) $\lambda_*>\tilde{\lambda}^q, \lambda^*<\tilde{\lambda}<1, \Delta=\dfrac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q}<1$, де $\tilde{b}=\left|\tilde{B}\right|=\max\limits_i\sum\limits_j\left|b_{ij}\right|$,

$\lambda_*=\min\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}, \lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Показано, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(t), \tag{4}$$

де $y_i(t), i=0,1,\dots,$ – деякі неперервні вектор-функції, які є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1)=Jy_0(t), \tag{5_0}$$

$$y_i(t+1)=Jy_i(t)+\tilde{B}y_{i-1}(qt), i=1,2,\dots. \tag{5_i}$$

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i>1, i=1,\dots,m, q>1$*;*

2) $\bar{\lambda}^q>\lambda^*, 1<\bar{\lambda}<\lambda_*, \Delta=\dfrac{\tilde{b}\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^*+\delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}<1$*, де*

$\lambda_*=\min\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}, \lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}, \tilde{b}=\left|\tilde{B}\right|$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

У цих підрозділах розглянуто також систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\text{y}(t+1)=Jy(t)+\tilde{B}y(qt)+F(t), \tag{6}$$

де матриці $J = diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1) $0 < \lambda_i < 1, i = 1,...,m, q > 1$;
2) $\dfrac{\tilde{b}}{1-(\lambda^* + \delta_2)} = \tilde{\theta} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;
3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \bar{M} < \infty$.

Для системи (6) доведена така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (6) має неперервний обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)$ *у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{7}$$

де $\bar{y}_i(t), i = 0,1,...,$ *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Показано, що вектор-функції $\bar{y}_i(t), i = 0,1,...,$ задовольняють системи рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J\bar{y}_0(t) + F(t), \tag{8_0}$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J\bar{y}_i(t) + \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(qt), i = 1,2,.... \tag{8_i}$$

Рівняння (8_0) має розв’язок вигляду:

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} F(t-j). \tag{9_0}$$

Рівняння (8_i), $i = 1,2,...,$ мають розв’язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(q(t-j)), i = 1,2,.... \tag{9_i}$$

Аналогічну теорему доведено у випадку, коли $\lambda_i > 1, i = 1,...,m, q > 1$ при $t \in \mathbb{R}^-$.

У зв’язку з доведеними вище теоремами виникло питання про описання структури множини неперервних обмежених розв’язків у гіперболічному випадку. Саме цьому присвячений третій підрозділ другого розділу. Тут досліджено систему різницевих рівнянь (3) при таких припущеннях:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,m}, 0 \le m \le n, q > 1;$

2) $\lambda_* > \lambda^q, \lambda^* < \lambda < 1, \Delta = \max\{\frac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_5)\lambda^q}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)\lambda^q}\} < 1,$ де

$\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,$ $\tilde{b}_1 = |B_{11}| + |B_{12}|, \tilde{b}_2 = |B_{21}| + |B_{22}|,$

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$

Вводячи позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)),$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),...,y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),...,y_m(t)), \tag{10}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

систему рівнянь (3) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + B_{11} y^1(qt) + B_{12} y^2(qt), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + B_{21} y^1(qt) + B_{22} y^2(qt). \end{aligned} \tag{11}$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (11) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \ge 0$ *розв'язків, яка залежить від* $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій.*

Аналогічна теорема доведена, коли $t \le 0$ і виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,m}, 0 \le m \le n, q > 1;$

2) $\lambda^{**} < \bar{\lambda}^q, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_{**}, \bar{\Delta} = \max\{\frac{\bar{b}_1 \bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^* + \delta_7)\bar{\lambda}^{-q}}, \frac{\bar{b}_2 \bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**} + \delta_8)\bar{\lambda}^{-q}}\} < 1,$ де

$\bar{b}_1 = |B_{11}| + |B_{12}|, \bar{b}_2 = |B_{21}| + |B_{22}|,$

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних, обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, які залежать від* $\bar{\bar{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_j(t), j = \overline{k+1,m}.$

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + B_{11} y^1(qt) + B_{12} y^2(qt) + F^1(t), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + B_{21} y^1(qt) + B_{22} y^2(qt) + F^2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Для цієї системи, зокрема, доведена така теорема.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $0<\lambda_i<1<\lambda_j, i=1,...,k, j=k+1,...,m, q>0;$

2) $\theta=\max\{\frac{\tilde{b}_1}{1-(\lambda^*+\delta_9)}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_{10})}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_{10})}\}<1,$

$\tilde{b}_1=|B_{11}|+|B_{12}|, \tilde{b}_2=|B_{21}|+|B_{22}|,$

$\lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,...,k\}, \lambda_{**}=\min\{\lambda_j, j=k+1,...,m\};$

3) всі компоненти вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t\in\mathbb{R}$ функціями.

Тоді система рівнянь (12) має неперервний і обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $y(t)=(y^1(t), y^2(t))$.

Третій розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1)=Ax(t)+F(t,x(qt)), \qquad (13)$$

де $t\in\mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n\times n)$-матриця, q – дійсна стала, $F(t,x)$ – деяка дійсна неперервна при $t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$ вектор-функція. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення $\lambda_i, i=1,...,n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i|\neq 0,1, i=1,...,n.$$

В системі рівнянь (13) зробимо заміну змінних

$$x(t)=Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n\times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (13) до вигляду

$$y(t+1)=Jy(t)+\tilde{F}(t,y(qt)), \qquad (14)$$

де $\tilde{F}(t,y)=C^{-1}F(t,Cy), J=diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, i=1,...,m, m\leq n.$$

У підрозділі 3.1 в залежності від умов, яким задовольняють числа λ_i, $i=1,...,m$ для системи (14) доведені наступні теореми:

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<\lambda_i<1, i=1,...,m, q>0;$

2. $\Delta = \dfrac{L}{1-(\lambda^* + \delta_1)} < 1, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0,$

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,m\};$

3. $\left|\tilde{F}(t,y') - \tilde{F}(t,y'')\right| \le L\left|y' - y''\right|,$ *де* $t \in \mathbb{R},$ $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ *– деяка додатна стала;*

4. *всі елементи вектор-функції* $\tilde{F}(t,0)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями і* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t,0)\right| = M < \infty.$

Тоді система рівнянь (14) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок у вигляді функціонального ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{15}$$

де $y_i(t), i = 0,1,...,$ *– деякі неперервні вектор-функції.*

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1, i = 1,...,m, q > 0;$

2. $\theta = L\dfrac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_2)} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0,$

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,m\};$

3. $\left|\tilde{F}(t,y') - \tilde{F}(t,y'')\right| \le L\left|y' - y''\right|,$ *де* $t \in \mathbb{R},$ $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ *– деяка додатна стала;*

4. *всі елементи вектор-функції* $\tilde{F}(t,0)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями і* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t,0)\right| = M < \infty.$

Тоді система рівнянь (14) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{16}$$

де $\bar{y}_i(\mathrm{t}), \mathrm{i} = 0,1,...,$ *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Переписавши систему рівнянь (14) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \tag{17}$$

де $J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)), m \le n,$ доведена теорема для гіперболічного випадку.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 0$*;*

2) $\theta = \max\left\{ \frac{2L}{1-(\lambda^* + \delta_3)}, \frac{2L(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)} \right\} < 1,$

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, ..., k\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1, ..., m\};$

3) $\left|\tilde{F}^i(t, y_1^{'}, y_2^{'}) - \tilde{F}^i(t, y_1^{"}, y_2^{"})\right| \le L\left(\left|y_1^{'} - y_1^{"}\right| + \left|y_2^{'} - y_2^{"}\right|\right), i = 1, 2,$ *де* $t \in \mathbb{R}, y_1^{'}, y_2^{'}, y_1^{"}, y_2^{"} \in \mathbb{R}^n$, L *- деяка додатна стала;*

4) *всі компоненти вектор-функцій* $\tilde{F}^i(t, 0, 0), i = 1, 2$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (17) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right)$.

У другому підрозділі третього розділу досліджено систему рівнянь (14) у випадку, коли $t \in \mathbb{R}^+$ і виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1, i = 1, ..., m, q > 1;$
2. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y")\right| \le L|y' - y"|$, де $t \in \mathbb{R}^+$, $y', y" \in \mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;
3. $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_5)\tilde{\lambda}^q} < 1,$ $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,$ $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, ..., m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, ..., m\}$.

Доведена така теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (14) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Аналогічну теорему доведено у випадку, коли $t \le 0$ і виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i = 1, ..., m, q > 1;$
2. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y")\right| \le L|y' - y"|$, де $t \in \mathbb{R}$, $y', y" \in \mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;
3. $\bar{\lambda}^q > \lambda^*, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \frac{L\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^* + \delta_6)\bar{\lambda}^{-q}} < 1,$ $\delta_6 = \delta_6(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, ..., m\}, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, ..., m\};$

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (14) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

У пункті 3.3 побудовані неперервні розв'язки одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку.

Ввівши позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)),$$

$$J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)), m \le n,$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),..., y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),..., y_m(t)),$$

$$\tilde{F}(t,y) = (\tilde{F}^1(t,y), \tilde{F}^2(t,y))$$

перепишемо систему рівнянь (14) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)). \end{aligned} \tag{18}$$

Для системи (18) доведені такі теореми:

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 1;$

2. $\lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \tilde{\lambda}^q < \lambda_*, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\},$

$$\theta = \max\left\{2L \cdot \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_7}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_7)\tilde{\lambda}^q}, 2L \cdot \frac{\lambda_{**}^{-1} + \delta_8}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_8)\tilde{\lambda}^q}\right\} < 1.$$

3. $\left|\tilde{F}^i(t,x',y') - \tilde{F}^i(t,x'',y'')\right| \le L(|x'-x''| + |y'-y''|), i = 1,2,$ *де* $t \ge 0$,

$x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (18) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \ge 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 1;$

2. $1 < \bar{\lambda} < \lambda_{**}, \bar{\lambda}^q > \lambda^{**}, \theta = \max\left\{\dfrac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_9)}, \dfrac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^{**} + \delta_{10})}\right\} < 1,$

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$

3. $\left|\tilde{F}^i(t,x',y') - \tilde{F}^i(t,x'',y'')\right| \le L(|x'-x''| + |y'-y''|), i = 1,2,$ *де* $t \le 0$,

$x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (18) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $m-k$.

У *четвертому розділі* досліджується питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{19}$$

де A, q – деякі дійсні сталі, $t \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Встановлюються достатні умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків рівняння (19) і пропонується метод їх побудови.

Спочатку розглядається питання про існування неперервного обмеженого при $t \in \mathbb{R}$ розв'язку рівняння (19). Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція $F(t, x)$ є неперервною при всіх $t, x \in \mathbb{R}$ і задовольняє умові*
$$\left|F(t, \bar{x}) - F(t, \bar{\bar{x}})\right| \le L\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|,$$
де $L = const > 0, t, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}$;
2. $\sup\limits_{t}\left|F(t,0)\right| = M < \infty$;
3. $0 < a = |A| < 1, 0 < a + L = \Delta < 1, q \ne 0$.

Тоді рівняння (19) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\gamma(t)$.

Виконуючи в (19) заміну змінних
$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{20}$$
де $\gamma(t)$ – побудований вище розв'язок рівняння (19), отримаємо рівняння для $y(t)$:
$$y(t+1) = Ay(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{21}$$
де $\tilde{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \gamma(qt)) - F(t, \gamma(qt)), \tilde{F}(t,0) \equiv 0$, яке має, очевидно, розв'язок $y(t) \equiv 0$. Показано, що при $t \in \mathbb{R}^+$ для рівняння (21) справедливі наступні теореми.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і $A > 0, q > 1$. Тоді рівняння (21) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної періодичної функції періоду 1.*

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і $A < 0, q > 1$. Тоді рівняння (21) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної функції $\omega(t)$, яка задовольняє умові $\omega(t+1) = -\omega(t)$.*

При доведенні теореми 4.1 припускалось виконання умови 3), яка досить помітно обмежує її загальність. В силу цього виникло природнє питання – чи можна довести аналогічне твердження у випадку, коли ця умова не виконується. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція $F(t, x)$ є неперервною при всіх $t, x \in \mathbb{R}$ і задовольняє умові*
$\left|F(t, x') - F(t, x'')\right| \le L\left|x' - x''\right|$, *де* $L = const > 0, t, x', x'' \in \mathbb{R}$;

2. $\sup\limits_{t}\left|F(t,0)\right| = M < \infty$*;*

3. $\left|A\right| > 1, \left|A^{-1}\right| < 1, \dfrac{L\left|A^{-1}\right|}{1-\left|A^{-1}\right|} = \theta < 1, q \neq 0$.

Тоді рівняння (19) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\chi(t)$.

Виконуючи в (19) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \chi(t),$$

де $\chi(t)$ – неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок рівняння (19), отримаємо рівняння

$$y(t+1) = Ay(t) + \bar{F}(t, y(qt)), \tag{22}$$

де $\bar{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \chi(qt)) - F(t, \chi(qt)),$ яке має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t) \equiv 0$. Для рівняння (22) доведені такі теореми.

Теорема 4.5 . *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4.4 і* $A > 0, q > 1$. *Тоді рівняння (22) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції.*

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4.4 і* $A < 0, q > 1$. *Тоді рівняння (22) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, яка залежить від довільної неперервної функції* $\bar{\omega}(t)$*, яка задовольняє умові* $\bar{\omega}(t+1) = -\bar{\omega}(t)$.

У цьому розділі розглянуто також систему функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{23}$$

де A – дійсна $(n \times n)$-матриця, $q = const > 0$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Припускаємо, що власні числа $\lambda_i, i = 1,...,n$, матриці A задовольняють умовам:

$$\left|\lambda_i\right| \neq 0,1,$$
$$\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1,...,n.$$

Тоді існує неособлива заміна змінних

$$x(t) = Cy(t), \tag{24}$$

яка приводить систему (23) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{25}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_n), \tilde{F}(t, y(qt)) = C^{-1}F(t, Cy(qt)).$

Досліджено систему (25) у випадку, коли виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,n;$

2. вектор-функція $\tilde{F}(t,y)$ задовольняє умові

$$\left|\tilde{F}(t,\bar{y})-\tilde{F}(t,\bar{\bar{y}})\right|\le L\left|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\right|,$$

де $L=const>0,(t,\bar{y}),(t,\bar{\bar{y}})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\tilde{F}(0,0)=0.$

Якщо позначити

$$\Lambda_1=diag(\lambda_1,...,\lambda_k),\Lambda_2=diag(\lambda_{k+1},...,\lambda_n),,$$

$$y(t)=(y^1(t),y^2(t)),y^1(t)=(y_1(t),...,y_k(t)),y^2(t)=(y_{k+1}(t),...,y_n(t)),$$

$$\tilde{F}(t,y)=(\tilde{F}^1(t,y),\tilde{F}^2(t,y)),$$

$$\tilde{F}^1(t,y)=(\tilde{F}_1(t,y),...,\tilde{F}_k(t,y)),\tilde{F}^2(t,y)=(\tilde{F}_{k+1}(t,y),...,\tilde{F}_n(t,y)),$$

то систему рівнянь (25) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1)&=\Lambda_1y^1(t)+\tilde{F}^1(t,y^1(qt),y^2(qt)),\\ y^2(t+1)&=\Lambda_2y^2(t)+\tilde{F}^2(t,y^1(qt),y^2(qt)). \end{aligned}\tag{26}$$

Для системи рівнянь (26) мають місце наступні теореми.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1)-2), а також*

3. $q>1,\lambda^{*q}<\lambda_*,\theta=\max\left\{2L\cdot\frac{1}{\lambda_*-\lambda^{*q}},2L\cdot\frac{1}{\lambda_{**}-\lambda^{*q}}\right\}<1,$

$\lambda_*=\min\{\lambda_i,i=1,...,k\},\lambda^*=\max\{\lambda_i,i=1,...,k\},$

$\lambda_{**}=\min\{\lambda_j,j=k+1,...,n\}.$

Тоді система рівнянь (26) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\ge0$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega_1(t)$ розмірності k.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови 1)-2) і умова*

3) $q>1,\lambda_{**}^q>\lambda^{**},\theta=\max\left\{\frac{2L}{\lambda_{**}^q-\lambda^*},\frac{2L}{\lambda_{**}^q-\lambda^{**}}\right\},\lambda^*=\max\{\lambda_i,i=1,...,k\},$

$\lambda^{**}=\max\{\lambda_j,j=k+1,...,n\},\lambda_{**}=\min\{\lambda_j,j=k+1,...,n\}.$

Тоді система рівнянь (26) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\le0$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega_2(t)$ розмірності $n-k$.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена вивченню питань існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь і дослідженню їх властивостей. При цьому одержано наступні нові результати:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудовано сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– встановлено структуру множини неперервних обмежених розв’язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – №4. – С. 7-13.

2. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №1. – С. 35-40.

3. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2016. – №4. – С. 7-13.

4. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв’язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №3. – С. 27-30.

5. *Betsko I. V.* On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No. 3. – P. 205-213.

6. *Betsko I. V.* On the solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis and their properties / I. V. Betsko, H. P. Pelyukh // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 6. – P. 691-711.

7. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна конференція молодих математиків, (Київ, 3–6, червнь, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2015. – с.133.

8. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені

академіка Михайла Кравчука, (Київ, 14–15, травень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2015. – С. 29-30.

9. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2016. – С. 17-18.

10. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвячена 70-річчю акад. НАН України М.О. Перестюка, (Ужгород, 19–21, травень, 2016). – Ужгород: Ужгородський національний університет. – 2016. – С. 46.

11. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 19–20, травень, 2016). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2016. – С. 52-53.

12. *Betsko I. V.* On continuous solutions of systems of nonlinear functional-difference equations / I. V. Betsko // Book of Abstracts. International Conference «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications», (Ukraine, Cherkasy, 17–19, October, 2017). – Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy. – 2017. – p. 57.

АНОТАЦІЇ

Бецко І. В. Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 – Математика). – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань існування неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь і дослідженню їх властивостей. Розроблено метод побудови цілої сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+} (t \in \mathbb{R}^{-})$ розв’язків для широких класів однорідних систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу. Для систем

неоднорідних різницевих рівнянь встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків та досліджено структуру їх множини у гіперболічному випадку. Дослідження продовжені на системи нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, зокрема, встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків таких систем, досліджена структура множини неперервних обмежених розв'язків у гіперболічному випадку. В даній роботі також встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

Ключові слова: різницеве рівняння, функціонально-різницеве рівняння, неперервний розв'язок, обмежений розв'язок, сім'я неперервних обмежених розв'язків.

Бецко И. В. Исследование структуры множества непрерывных решений систем разностных уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения» (111 – Математика). – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского». – Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена изучению вопросов существования непрерывных решений систем разностных уравнений и исследованию их свойств. Разработан метод построения целой семьи непрерывных ограниченных при $t \in \mathbb{R}^{+} (t \in \mathbb{R}^{-})$ решений для широких классов однородных систем разностных уравнений с линейным отклонением аргумента. Для систем неоднородных разностных уравнений установлены условия существования непрерывных ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ решений и исследована структура их множества в гиперболическом случае. Исследование продлены на системы нелинейных функционально-разностных уравнений, в частности, установлены условия существования непрерывных ограниченных решений таких систем, исследована структура множества непрерывных ограниченных решений в гиперболическом случае. В данной работе также установлены условия существования ограниченных на всей действительной оси решений нелинейных функционально-разностных уравнений и исследованы их свойства.

Ключевые слова: разностное уравнение, функционально-разностное уравнение, непрерывное решение, ограниченное решение, семья непрерывных ограниченных решений.

Betsko I. V. Investigation of the structure of the set of continuous solutions of difference equations systems. – Manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.02 "Differential equations" (111 – Mathematics). – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute». – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of the problems of the existence of continuous bounded solutions of systems of difference equations and the study of their properties.

The thesis consists of summaries in Ukrainian and English, the introduction, four chapters of the main part, conclusions, the list of references and the appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, indicates the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific topics and the personal contribution of the applicant, it is also indicated where the results of the thesis were tested and published.

The first section of the thesis gives an overview of publications, the topics of which are close to the subject of the thesis.

The second section is devoted to the study of the structure of solutions of the system of difference equations of the form

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t),$$

where $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – real $(n \times n)$-matrices, $F(t)$ – a real vector of dimension n, q – some real constant. The problem of the existence of continuous bounded solutions at $t \in \mathbb{R}$ is studied, the structure of their set is investigated, and the method of their construction is developed.

In particular, a homogeneous system of equations of the following form is considered

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt),$$

where A, B – real $(n \times n)$- matrices, q – a real constant. Herewith, it is assumed in relation to the matrix A, that its eigenvalues λ_i, $i = 1,...,n$ satisfy the conditions

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,...,n.$$

Depending on the conditions satisfying the numbers λ_i, $i = 1,...,m$, the matrix $\tilde{B}$ and the constant q, a number of theorems on the existence of an entire family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions are proved, the structure of their set in critical and hyperbolic cases is investigated.

Investigations are continued in the case of an inhomogeneous system of equations.

The third section is devoted to the study of the structure of solutions of the system of difference equations of the form

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

where $t \in \mathbb{R}$, A – a real constant $(n \times n)$- matrix, q – a real constant, $F(t,x)$ – some real continuous at $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ vector-function. Herewith, the matrix A assumes that its own values $\lambda_i, i = 1,...,n$ satisfy the condition

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,...,n.$$

In particular, conditions for the existence of systems of nonlinear functional-difference equations at $t \in \mathbb{R}$ of continuous bounded solutions are established

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)),$$

where $J = diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1,...,m, m \leq n,$$

at different assumptions regarding $\lambda_i, i = 1,...,m.$ The method of constructing a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions is developed. Continuous solutions of a class of systems of nonlinear functional-difference equations in a hyperbolic case are constructed.

In the fourth section, we consider the existence of continuous solutions of nonlinear functional-difference equations of the form

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

where A, q – some real constants at $t \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. The conditions for the existence of a single continuous bounded at $t \in \mathbb{R}$ solution of the equation are established, and a method for its construction is proposed. The conditions for the construction of a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions for a given system are investigated. In addition, the conditions for the existence of a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions in a hyperbolic case are established, the structure of their set is investigated and a method for constructing such solutions is proposed.

The appendix contains a list of applicant's publications on the topic of the thesis and the details of the examination results of the thesis.

Key words: difference equation, functional-difference equation, continuous solution, bounded solution, family of continuous bounded solutions.

Підписано до друку 09.07.2019 р. Зам. № 889.
Формат 60×90 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9.
Друк ЦП «КОМПРИНТ». Свідоцтво ДК №4131 від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
095-941-84-99, 067-209-54-30
email: komprint@ukr.net