Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Бецко Іванна Володимирівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.______________________________ І.В. Бецко

Науковий керівник:
Пелюх Григорій Петрович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ–2019

АНОТАЦІЯ

Бецко І. В. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 – Математика). – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь і дослідженню їх властивостей.

Від початку вивчення різницевих і функціонально-різницевих рівнянь пройшло більше двох століть. Внаслідок цього в даний час існує багато праць, в яких розроблено цілий ряд ефективних методів дослідження окремих класів систем цих рівнянь, які мають широкі практичні застосування. Самий активний розвиток їх теорії почався у 60-ті роки XX ст. Саме в ці роки різницеві рівняння знаходять широкі застосування в теорії автоматичного регулювання, автоматиці і телемеханіці, при вивченні біофізичних проблем і т.ін. Важливим внеском для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь були роботи Джорджа Біркгофа та його учнів. В них було розроблено основи теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Це, а також різноманіття і складність проблем, які виникли при їх дослідженні, стимулювало всебічне вивчення важливих питань їх теорії. При цьому все більше математиків вибирають такі рівняння в якості основного об'єкту дослідження. У результаті різкого зростання інтересу багатьох математиків до вивчення широких класів різницевих рівнянь, з’явилася велика кількість робіт, в яких вивчаються різноманітні питання самої теорії цих рівнянь. Серед них відмітимо монографії Я. В. Бикова, В. Г. Ліненко, І. В. Гайшуна, О. О Гельфонда, Ю .О. Митропольського, А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, О. М. Шарковського, Ю. Л. Майстренка, О. Ю. Романенко, А. А. Самарського, Ю. Н. Карамзіна, М. А. Солдатова, О. О. Миролюбова, В. Ю. Слюсарчука та інших відомих математиків. Теорія різницевих рівнянь знаходить широкі застосування майже в усіх галузях природознавства. Все частіше такі рівняння використовуються при моделюванні нелінійних явищ і процесів, що відбуваються в системах різноманітної природи. Більше цього, різницеві рівняння мають ряд специфічних властивостей і використовуються для моделювання складних коливних процесів у тих випадках, коли застосування звичайних диференціальних рівнянь є неможливим.

Разом із сказаним вище слід відмітити, що в сучасній теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом є ряд питань, які вивчені дуже мало. Перш за все, сюди відносяться питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+} (t \in \mathbb{R}^{-})$ розв’язків систем різницевих рівнянь та вивчення структури їх множин. Ці питання мають особливо важливе значення для розвитку теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом, а тому природно, що саме вони є основною метою дослідження даної дисертації.

Дисертація складається з анотацій українською і англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об’єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв’язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

В першому розділі дисертації дається огляд публікацій, тематика яких є близькою до тематики дисертаційної роботи.

Другий розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q – деяка дійсна стала. Вивчено питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків, досліджено структуру їх множини, а також розроблений метод їх побудови.

Зокрема, розглянуто однорідну систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt),$$

де A, B – дійсні $(n \times n)$-матриці, q – дійсна стала. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення λ_i, $i = 1,...,n$, задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1,...,n.$$

В залежності від умов, яким задовольняють числа λ_i, $i = 1,...,m$, матриця $\tilde{B}$ і стала q, доведено ряд теорем про існування цілої сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків, досліджено структуру їх множини у критичному та у гіперболічному випадках. Дослідження продовжені на випадок неоднорідної системи рівнянь.

Третій розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$-матриця, q – дійсна стала, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення $\lambda_i, i=1,\ldots,n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i=1,\ldots,n.$$

Зокрема, встановлено умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)),$$

де $J = diag(J_1(\lambda_1),\ldots,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i=1,\ldots,m, m \leq n,$$

при різних припущеннях відносно $\lambda_i, i=1,\ldots,m.$ Розроблено метод побудови сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків. Побудовані неперервні розв’язки одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку.

У четвертому розділі розглянуто питання існування неперервних розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

де A, q – деякі дійсні сталі при $t \in \mathbb{R},\; F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Встановлені умови існування єдиного неперервного обмеженого при $t \in \mathbb{R}$ розв’язку рівняння і запропонований метод його побудови. Дослідженні умови побудови сім’ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків даної системи. Крім цього, встановлено умови існування сім’ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків у гіперболічному випадку, досліджено структуру їх множини та запропонований метод побудови таких розв’язків.

Отже, в роботі містяться наступні нові наукові результати:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв’язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудовано сім’ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^{+} (t \in \mathbb{R}^{-})$ розв’язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– отримано умови існування неперервних обмежених розв’язків систем різницевих і функціонально-різницевих рівнянь в гіперболічному випадку і досліджено їх властивості;

– встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані в ній результати доповнюють результати робіт багатьох математиків, які є близькими до теми дисертаційної роботи, і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

Ключові слова: різницеве рівняння, функціонально-різницеве рівняння, неперервний розв’язок, обмежений розв’язок, сім’я неперервних обмежених розв’язків.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – №4. – С. 7-13.
2. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2016. – №1. – С. 35-40.
3. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2016. – №4. – С. 7-13.
4. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв’язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №3. – С. 27-30.
5. *Betsko I. V.* On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No. 3. – P. 205-213.
6. *Betsko I. V.* On the solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis and their properties / I. V. Betsko, H. P. Pelyukh // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 6. – P. 691-711.
7. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна конференція молодих математиків, (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2015. – с.133.
8. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали

конференції. Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 14–15, травень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2015. – С. 29-30.

9. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2016. – С. 17-18.

10. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвячена 70-річчю акад. НАН України М.О. Перестюка, (Ужгород, 19–21, травень, 2016). – Ужгород: Ужгородський національний університет. – 2016. – С. 46.

11. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 19–20, травень, 2016). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2016. – С. 52-53.

12. *Betsko I. V.* On continuous solutions of systems of nonlinear functional-difference equations / I. V. Betsko // Book of Abstracts. International Conference «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications», (Ukraine, Cherkasy, 17–19, October, 2017). – Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy. – 2017. – p. 57.

SUMMARY

Betsko I. V. – “Investigation of the structure of the set of continuous solutions of difference equations systems”. – Qualification scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.02 “Differential equations” (111 – Mathematics). – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute». – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the study of the problems of the existence of continuous bounded solutions of systems of difference equations and the study of their properties.

More than two centuries passed from the beginning of the study of difference and functional-difference equations. As a result, there are currently many works in which a number of effective methods for studying the separate classes of systems of these equations, which have wide practical applications, have been developed. The most active development of their theory began in 1960s. It was during these years that the difference equations were widely used in the theory of automatic regulation, automation and telemechanics, in the study of biophysical problems etc. An important contribution to constructing the theory of difference and functional-difference equations was the work of George Birkhoff and his students. They developed the fundamentals of the theory of linear difference equations with a continuous argument. This, as well as the variety and complexity of the problems that arose during their study, stimulated a thorough study of the important issues of their theory. At the same time, more and more mathematicians choose such equations as the main object of research. As a result of the sharp increase in the interest of many mathematicians in the

study of broad classes of difference equations, a large number of papers appeared, in which various questions of the theory of these equations are studied. Among them, we should mention the monographs of Ya. V. Bykov, V.G. Linenko, I.V. Gayshun, O.O. Gelfond, Yu.O. Mytropolskyi, A. M. Samoilenko, D. I. Martyniuk, O. M. Sharkovsky, Yu. L. Maystrenko, O. Yu. Romanenko, A. A. Samarsky, Yu. N. Karamzin, M. A. Soldatov, O. O. Mirolyubov, V. Yu. Slyusarchuk and other well-known mathematicians. The theory of difference equations is widely used in almost all branches of science. Such equations are increasingly used in the simulation of nonlinear phenomena and processes occurring in systems of diverse nature. Moreover, the difference equations have a number of specific properties and are used to simulate complex oscillatory processes in cases where the use of ordinary differential equations is impossible.

Together with the abovementioned, it should be noted that in the modern theory of difference equations with a continuous argument there are a number of issues that have been studied very little. First of all, the issues of the existence of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions of systems of difference equations and the study of the structure of their sets. These issues are especially important for the development of the theory of difference equations with a continuous argument, and therefore it is natural that they are the main objective of the study of this thesis.

The thesis consists of summaries in Ukrainian and English, the introduction, four chapters of the main part, conclusions, the list of references and the appendix.

The introduction substantiates the relevance of the research, formulates the purpose, object, subject, tasks and methods of the research, indicates the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the connection of the work with scientific topics and the personal contribution of the applicant, it is also indicated where the results of the thesis were tested and published.

The first section of the thesis gives an overview of publications, the topics of which are close to the subject of the thesis.

The second section is devoted to the study of the structure of solutions of the system of difference equations of the form

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t),$$

where $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – real $(n \times n)$-matrices, $F(t)$ – a real vector of dimension n, q – some real constant. The problem of the existence of continuous bounded solutions at $t \in \mathbb{R}$ is studied, the structure of their set is investigated, and the method of their construction is developed.

In particular, a homogeneous system of equations of the following form is considered

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt),$$

where A, B – real $(n \times n)$-matrices, q – a real constant. Herewith, it is assumed in relation to the matrix A, that its eigenvalues λ_i, $i = 1,...,n$ satisfy the conditions

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,...,n.$$

Depending on the conditions satisfying the numbers λ_i, $i = 1,...,m$, the matrix $\tilde{B}$ and the constant q, a number of theorems on the existence of an entire family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions are proved, the structure of their set in critical and hyperbolic cases is investigated. Investigations are continued in the case of an inhomogeneous system of equations.

The third section is devoted to the study of the structure of solutions of the system of difference equations of the form

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

where $t \in \mathbb{R}$, A – a real constant $(n \times n)$- matrix, q – a real constant, $F(t,x)$ – some real continuous at $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ vector-function. Herewith, the matrix A assumes that its own values $\lambda_i, i = 1,...,n$ satisfy the condition

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,...,n.$$

In particular, conditions for the existence of systems of nonlinear functional-difference equations at $t \in \mathbb{R}$ of continuous bounded solutions are established

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)),$$

where $J = diag(J_1(\lambda_1),..., J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1,...,m, m \leq n,$$

at different assumptions regarding $\lambda_i, i = 1,...,m.$ The method of constructing a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions is developed. Continuous solutions of a class of systems of nonlinear functional-difference equations in a hyperbolic case are constructed.

In the fourth section, we consider the existence of continuous solutions of nonlinear functional-difference equations of the form

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

where A, q – some real constants at $t \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ The conditions for the existence of a single continuous bounded at $t \in \mathbb{R}$ solution of the equation are established, and a method for its construction is proposed. The conditions for the construction of a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions for a given system are investigated. In addition, the conditions for the existence of a family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ solutions in a hyperbolic case are established, the structure of their set is investigated and a method for constructing such solutions is proposed.

Consequently, the work contains the following new scientific results:

– the conditions for the existence of continuous bounded solutions of systems of difference equations with linear deviation of the argument are established;

– the family of continuous bounded at $t \in \mathbb{R}^{+} (t \in \mathbb{R}^{-})$ solutions of systems of difference equations with linear deviations of the argument is constructed;

– the structure of the set of continuous bounded solutions of nonlinear functional-difference equations is investigated;

– the conditions for the existence of continuous bounded solutions of systems of difference and functional-difference equations in the hyperbolic case are obtained and their properties are investigated;

– the conditions for the existence of solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis are established and their properties are studied.

The appendix contains a list of applicant's publications on the topic of the thesis and the details of the examination results of the thesis.

The practical value of the results obtained. The thesis is theoretical. The results obtained in it supplement the results of the work of many mathematicians who are close to the topic of the thesis, and will contribute to the further development of the theory of difference equations. They can also be used in the study of the problems of control theory, biology and other fields of science and technology, mathematical models of which are such equations.

Key words: difference equation, functional-difference equation, continuous solution, bounded solution, family of continuous bounded solutions.

LIST OF PUBLISHED WORKS ON THE TOPIC OF THESIS

1. *Betsko I. V.* Investigation of the structure of a set of continuous solutions of difference equations systems / I. V. Betsko // Naukovi visti NTUU «KPI». – 2015. – №4. – P. 7-13.

2. *Betsko I. V.* Continuous bounded solutions of nonlinear functional-difference equations systems / I. V. Betsko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv . Series: Physics & Mathematics. – 2016. – №1. – P. 35-40.

3. *Betsko I. V.* Construction of continuous solutions of nonlinear functional-difference equations systems / I. V. Betsko // Naukovi visti NTUU «KPI». – 2016. – №4. – P. 7-13.

4. *Betsko I. V.* Construction of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems / I. V. Betsko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2016. – №3. – P. 27-30.

5. *Betsko I. V.* On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No. 3. – P. 205-213.

6. *Betsko I. V.* On the solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis and their properties / I. V. Betsko, H. P. Pelyukh // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 6. – P. 691-711.

7. *Betsko I. V.* On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Abstracts. International Conference of Young of Mathematicians, (Kyiv, 3–6, June, 2015). – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2015. – P.133.

8. *Betsko I. V.* Investigation of the structure of a set of continuous solutions of difference equations systems / I. V. Betsko // Conference materials.

Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, (Kyiv, 14–15, May, 2015). – Kyiv: National Technical University of Ukraine «KPI». – 2015. – P. 29-30.

9. *Betsko I. V.* Investigation of the structure of a set of continuous solutions of difference equations systems / I. V. Betsko // Abstracts. Seventh International Conference «Modern Problems of mathematical modeling, forecasting and optimization», (Kamyanets-Podilsky, 21–22, April, 2016). – Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podilsky Ivan Ohienko National University. – 2016. – P. 17-18.

10. *Betsko I. V.* Investigation of the structure of a set of continuous solutions of difference equations systems / I. V. Betsko // Abstracts. International scientific conference «Differential equations and their applications», (Uzhhorod, 19–21, May, 2016). – Uzhhorod: Uzhhorod national university. – 2016. – P. 46.

11. *Betsko I. V.* Continuous bounded for $t \in \mathbb{R}$ solutions of nonlinear functional-difference equations systems / I. V. Betsko // Conference materials. Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, (Kyiv, 19–20, May, 2016). – Kyiv: National Technical University of Ukraine «KPI». – 2016. – P. 52-53.

12. *Betsko I. V.* On continuous solutions of systems of nonlinear functional-difference equations / I. V. Betsko // Book of Abstracts. International Conference «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications», (Ukraine, Cherkasy, 17–19, October, 2017). – Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy. – 2017. – p. 57.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Від початку вивчення різницевих і функціонально-різницевих рівнянь пройшло більше двох століть. Внаслідок цього в даний час існує багато праць, в яких розроблено цілий ряд ефективних методів дослідження окремих класів систем цих рівнянь, які мають широкі практичні застосування. Самий активний розвиток їх теорії почався у 60-ті роки XX ст. Саме в ці роки різницеві рівняння знаходять широкі застосування в теорії автоматичного регулювання, автоматиці і телемеханіці, при вивченні біофізичних проблем і т.ін. Важливим внеском для побудови теорії різницевих та функціонально-різницевих рівнянь були роботи Джорджа Біркгофа та його учнів. В них було розроблено основи теорії лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Це, а також різноманіття і складність проблем, які виникли при їх дослідженні, стимулювало всебічне вивчення важливих питань їх теорії. При цьому все більше математиків вибирають такі рівняння в якості основного об’єкту дослідження. У результаті різкого зростання інтересу багатьох математиків до вивчення широких класів різницевих рівнянь, з’явилася велика кількість робіт, в яких вивчаються різноманітні питання самої теорії цих рівнянь. Серед них відмітимо монографії Я. В. Бикова, В. Г. Ліненко, І. В. Гайшуна, О. О Гельфонда, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, О. М. Шарковського, Ю. Л. Майстренка, О. Ю. Романенко, А. А. Самарського, Ю. Н. Карамзіна, М. А. Солдатова, О. О. Миролюбова, В. Ю. Слюсарчука та інших відомих математиків. Теорія різницевих рівнянь знаходить широкі застосування майже в усіх галузях природознавства. Все частіше такі рівняння використовуються при моделюванні нелінійних явищ і процесів, що відбуваються в системах різноманітної природи. Більше цього, різницеві рівняння мають ряд специфічних властивостей і використовуються для моделювання складних коливних процесів у тих випадках, коли застосування звичайних диференціальних рівнянь є неможливим.

Разом із сказаним вище слід відмітити, що в сучасній теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом є ряд питань, які вивчені дуже мало. Перш за все, сюди відносяться питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків систем різницевих рівнянь та вивчення структури їх множин. Ці питання мають особливо важливе значення для розвитку теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом, а тому природно, що саме вони є основною метою дослідження даної дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» у відповідності до планів, передбачених у Національному технічному університеті «КПІ ім. І. Сікорського» згідно з темою «Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем» (номер державної реєстрації 0113U004540).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження властивостей неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь з неперервним аргументом.

Об'єктом дослідження є різницеві та функціонально-різницеві рівняння з неперервним аргументом.

Предметом дослідження є вивчення структури множини неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь.

Завдання дослідження:

– встановити умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудувати сім’ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– встановити умови існування неперервних обмежених розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– встановити структуру множини неперервних обмежених розв’язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановити умови існування обмежених на всій дійсній осі розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і дослідити їх властивості.

*Методи дослідження***.** У роботі використовуються основні методи теорії звичайних диференціальних і різницевих рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, полягають у наступному:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв’язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудовано сім’ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– отримано умови існування неперервних обмежених розв’язків систем різницевих і функціонально-різницевих рівнянь в гіперболічному випадку і досліджено їх властивості;

– встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв’язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані в ній результати доповнюють результати робіт багатьох математиків, які є близькими до теми дисертаційної роботи, і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівникові Г.П. Пелюху.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

– Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 2015);

– XVI міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2015);

– VII міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Камянець-Подільський,2016);

– Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (м. Ужгород, 2016);

– XVII міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2016);

– International Conference on «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications» (Cherkasy, 2017);

– наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Національного технічного університету України “КПІ”;

– семінарах з диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, якими керують академіки Самойленко А. М. і Перестюк М. О.

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 12 наукових праць, у тому числі 6 статей у наукових фахових виданнях (з них 2 перекладено на англійську мову і опубліковано у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Scopus), 6 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською і англійською мовами, змісту, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, який містить 90 найменувань і додатку. Повний обсяг роботи складає 127 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету, об’єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

В першому розділі дисертації дається огляд публікацій, тематика яких є близькою до тематики дисертаційної роботи.

Другий розділ присвячений дослідженню структури розв’язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{2.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q – деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків, досліджується структура їх множини, а також розробляється метод їх побудови.

Зокрема, в першому та другому підрозділах другого розділу розглянута система рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2.2}$$

де A, B – дійсні $(n\times n)$-матриці, q – дійсна стала, і показано, що при деяких умовах вона має неперервні розв'язки. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення λ_i, $i=1,...,n$, задовольняють умови

$$\left|\lambda_i\right| \neq 0,1, i=1,...,n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t)=Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n\times n)$- матриця, яка приводить систему рівнянь (2.2) до вигляду

$$y(t+1)=Jy(t)+\tilde{B}y(qt), \tag{2.3}$$

де $\tilde{B}=C^{-1}BC$, $J=diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},\ i=1,...,m, m\leq n.$$

Основними результатами даних підрозділів є теорема 2.1 та теорема 2.3, які дають можливість побудувати цілу сім'ю неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}^+ (t\in\mathbb{R}^-)$ розв'язків системи (2.3).

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $0<\lambda_i<1, i=1,...,m, q>1$;

2) $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \dfrac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q} < 1$, де $\tilde{b}=\left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|b_{ij}\right|$,

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1,...,m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1,...,m\}.$$

*Тоді система рівнянь (*2.3*) має сім'ю неперервних обмежених при* $t\in\mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Показано, що система рівнянь (2.3) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{2.4}$$

де $y_i(t), i=0,1,...,$ – деякі неперервні вектор-функції, які є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1)=Jy_0(t), \tag{2.5_0}$$

$$y_i(t+1)=Jy_i(t)+\tilde{B}y_{i-1}(qt), i=1,2,.... \tag{2.5_i}$$

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i>1, i=1,...,m, q>1$*;*

2) $\bar{\lambda}^q>\lambda^*, 1<\bar{\lambda}<\lambda_*, \Delta=\dfrac{\tilde{b}\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^*+\delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}<1$*, де* $\lambda_*=\min\{\lambda_i, i=1,...,m\}$,

$\lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,...,m\}$, $\tilde{b}=|\tilde{B}|$.

Тоді система рівнянь (2.3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

У цих підрозділах розглянуто також систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1)=Jy(t)+\tilde{B}y(qt)+F(t), \tag{2.9}$$

де матриці $J=diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1) $0<\lambda_i<1, i=1,...,m, q>1$;

2) $\dfrac{\tilde{b}}{1-(\lambda^*+\delta_2)}=\tilde{\theta}<1, \delta_2=\delta_2(\varepsilon)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t\in\mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t|F(t)|=\bar{M}<\infty$.

Для системи (2.9) доведена така теорема.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2.9) має неперервний обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)$ *у вигляді ряду*

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t), \tag{2.10}$$

де $\overline{y}_i(t), i = 0,1,\ldots,$ *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Показано, що вектор-функції $\overline{y}_i(t), i = 0,1,\ldots,$ задовольняють системи рівнянь

$$\overline{y}_0(t+1) = J\overline{y}_0(t) + F(t), \qquad (2.11_0)$$

$$\overline{y}_i(t+1) = J\overline{y}_i(t) + \tilde{B}\overline{y}_{i-1}(qt), i = 1,2,\ldots. \qquad (2.11_i)$$

Рівняння (2.11_0) має розв'язок вигляду:

$$\overline{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} F(t-j) \qquad (2.12_0)$$

Рівняння (2.11_i), $i = 1,2,\ldots,$ мають розв'язки у вигляді рядів:

$$\overline{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{B}\overline{y}_{i-1}(q(t-j)), i = 1,2,\ldots, \qquad (2.12_i)$$

Аналогічну теорему доведено у випадку, коли $\lambda_i > 1, i = 1,\ldots,m, q > 1$ при $t \in \mathbb{R}^-$ (теорема 2.4).

У зв'язку з доведеними вище теоремами виникло питання про описання структури множини неперервних обмежених розв'язків у гіперболічному випадку. Саме цьому присвячений третій підрозділ другого розділу. Тут досліджено систему різницевих рівнянь (2.3) при таких припущеннях:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,m}, 0 \le m \le n, q > 1;$

2) $\lambda_{*} > \lambda^{q}, \lambda^{*} < \lambda < 1, \Delta = \max\{\frac{\tilde{b}_1(\lambda_{*}^{-1} + \delta_5)}{1-(\lambda_{*}^{-1} + \delta_5)\lambda^{q}}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)\lambda^{q}}\} < 1,$ де

$\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,$ $\tilde{b}_1 = |B_{11}| + |B_{12}|, \tilde{b}_2 = |B_{21}| + |B_{22}|,$

$$\lambda_{*} = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^{*} = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$$
$$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$$

Вводячи позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)),$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),...,y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),...,y_m(t)), \quad (2.21)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

систему рівнянь (2.3) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + B_{11} y^1(qt) + B_{12} y^2(qt), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + B_{21} y^1(qt) + B_{22} y^2(qt), \end{aligned} \quad (2.22)$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (2.22) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geq 0$ *розв'язків, яка залежить від* $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій.*

Аналогічна теорема доведена, коли $t \leq 0$ і виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,m}, 0 \leq m \leq n, q > 1;$

2) $\lambda^{**} < \bar{\lambda}^{q}, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_{**}, \bar{\Delta} = \max\{\frac{\bar{b}_1 \bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{*} + \delta_7)\bar{\lambda}^{-q}}, \frac{\bar{b}_2 \bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**} + \delta_8)\bar{\lambda}^{-q}}\} < 1,$ де

$\bar{b}_1 = |B_{11}| + |B_{12}|, \bar{b}_2 = |B_{21}| + |B_{22}|,$

$$\lambda_{*} = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^{*} = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$$

$$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$$

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (2.3) має сім'ю неперервних, обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, які залежать від* $\overline{\overline{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_j(t),\ j = \overline{k+1, m}.$

Також розглянуто систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + B_{11} y^1(qt) + B_{12} y^2(qt) + F^1(t), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + B_{21} y^1(qt) + B_{22} y^2(qt) + F^2(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Для цієї системи, зокрема, доведена така теорема.

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k,\ j = k+1,...,m, q > 0;$

2) $\theta = \max\{\frac{\tilde{b}_1}{1-(\lambda^* + \delta_9)}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}\} < 1, \tilde{b}_1 = \left|B_{11}\right| + \left|B_{12}\right|,$

$\tilde{b}_2 = \left|B_{21}\right| + \left|B_{22}\right|, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j,\ j = k+1,...,m\};$

3) всі компоненти вектор-функції $F(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (2.29) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$.

Третій розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \tag{3.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$-матриця, q – дійсна стала, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція. При цьому відносно матриці A припускається, що її власні значення $\lambda_i, i = 1,...,n$, задовольняють умові

$$\left|\lambda_i\right| \ne 0, 1, i = 1,...,n.$$

В системі рівнянь (3.1) зробимо заміну змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$- матриця, яка приводить систему рівнянь (3.1) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{3.2}$$

де $\tilde{F}(t,y) = C^{-1}F(t,Cy), J = diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i = 1,...,m, m \le n.$$

У підрозділі 3.1 в залежності від умов, яким задовольняють числа λ_i, $i = 1,...,m$ для системи (3.2) доведені наступні теореми:

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1, i = 1,...,m, q > 0;$
2. $\Delta = \dfrac{L}{1-(\lambda^* + \delta_1)} < 1, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0,$

   $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,m\};$
3. $\left|\tilde{F}(t,y') - \tilde{F}(t,y'')\right| \le L|y' - y''|,$ *де* $t \in \mathbb{R}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ *– деяка додатна стала;*
4. *всі елементи вектор-функції* $\tilde{F}(t,0)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями і* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t,0)\right| = M < \infty.$

Тоді система рівнянь (3.2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок у вигляді функціонального ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{3.3}$$

де $y_i(t), i = 0,1,...,$ *– деякі неперервні вектор-функції.*

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови:*

1. $\lambda_i > 1, i = 1,...,m, q > 0;$

2. $\theta = L\dfrac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_2)} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0,$

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,m\};$

3. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')\right| \le L\left|y' - y''\right|,$ *де* $t \in \mathbb{R},$ $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ *– деяка додатна стала;*

4. всі елементи вектор-функції $\tilde{F}(t,0)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *функціями і* $\sup\limits_t \left|\tilde{F}(t,0)\right| = M < \infty.$

Тоді система рівнянь (3.2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.8}$$

де $\bar{y}_i(\mathrm{t}), \mathrm{i} = 0,1,...,$ *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Переписавши систему рівнянь (3.2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \tag{3.14}$$

де $J_1 = diag(J_1(\lambda_1),..., J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),..., J_m(\lambda_m)), m \le n,$ доведена теорема для гіперболічного випадку.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 0;$

2) $\theta = \max\left\{\dfrac{2L}{1-(\lambda^* + \delta_3)}, \dfrac{2L(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}\right\} < 1,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\};$

3) $\left|\tilde{F}^i(t,y_1',y_2')-\tilde{F}^i(t,y_1'',y_2'')\right|\le L\left(\left|y_1'-y_1''\right|+\left|y_2'-y_2''\right|\right), i=1,2,$ *де* $t\in\mathbb{R}, y_1',y_2',y_1'',y_2''\in\mathbb{R}^n,$ L *- деяка додатна стала;*

4) *всі компоненти вектор-функцій* $\tilde{F}^i(t,0,0), i=1,2$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t\in\mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (3.14) має неперервний і обмежений при $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)=\left(y^1(t),y^2(t)\right)$.

У другому підрозділі третього розділу досліджено систему рівнянь (3.2) у випадку, коли $t\in\mathbb{R}^+$ і виконуються умови:

1. $0<\lambda_i<1, i=1,\ldots,m, q>1;$
2. $\left|\tilde{F}(t,y')-\tilde{F}(t,y'')\right|\le L\left|y'-y''\right|,$ де $t\in\mathbb{R}^+,$ $y',y''\in\mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t,0)\equiv 0$;
3. $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta=\dfrac{L(\lambda_*^{-1}+\delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^q}<1,$ $\delta_5=\delta_5(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0,$ $\lambda_*=\min\{\lambda_i, i=1,\ldots,m\}, \lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,\ldots,m\}$.

Доведена така теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (3.2) має сім'ю неперервних обмежених при* $t\in\mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Аналогічну теорему доведено у випадку, коли $t\le 0$ і виконуються умови:

1. $\lambda_i>1, i=1,\ldots,m, q>1;$
2. $\left|\tilde{F}(t,y')-\tilde{F}(t,y'')\right|\le L\left|y'-y''\right|,$ де $t\in\mathbb{R},$ $y',y''\in\mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t,0)\equiv 0$;
3. $\bar{\lambda}^q > \lambda^*, 1<\bar{\lambda}<\lambda_*, \Delta=\dfrac{L\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^*+\delta_6)\bar{\lambda}^{-q}}<1,$ $\delta_6=\delta_6(\varepsilon)\to 0$ при

$$\varepsilon \to 0, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1,...,m\}, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1,...,m\}.$$

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (3.2) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

У пункті 3.3 побудовані неперервні розв'язки одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку

Ввівши позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)),$$

$$J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)), m \le n,$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),...,y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),...,y_m(t)),$$

$$\tilde{F}(t,y) = (\tilde{F}^1(t,y), \tilde{F}^2(t,y))$$

перепишемо систему рівнянь (3.2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Для системи (3.27) доведені такі теореми:

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i=1,...,k, j=k+1,...,m, q>1;$

2. $\lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \tilde{\lambda}^q < \lambda_*, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1,...,k\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j=k+1,...,m\},$

$$\theta = \max\left\{2L \cdot \frac{\lambda_*^{-1}+\delta_7}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_7)\tilde{\lambda}^q}, 2L \cdot \frac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_8}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)\tilde{\lambda}^q}\right\} < 1.$$

3. $\left|\tilde{F}^i(t,x',y') - \tilde{F}^i(t,x'',y'')\right| \le L(|x'-x''| + |y'-y''|), i=1,2$*, де* $t \ge 0$,

$x',x'',y',y'' \in \mathbb{R}^n$*,* L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3.27) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \ge 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови:*

1. $0<\lambda_i<1<\lambda_j, i=1,...,k, j=k+1,...,m, q>1;$

2. $1<\overline{\lambda}<\lambda_{**}, \overline{\lambda}^q>\lambda^{**}, \theta=\max\left\{\frac{L}{\overline{\lambda}^q-(\lambda^*+\delta_9)}, \frac{L}{\overline{\lambda}^q-(\lambda^{**}+\delta_{10})}\right\}<1,$

   $\lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,...,k\}, \lambda^{**}=\max\{\lambda_j, j=k+1,...,m\},$

   $\lambda_{**}=\min\{\lambda_j, j=k+1,...,m\}.$

3. $\left|\tilde{F}^i(t,x',y')-\tilde{F}^i(t,x'',y'')\right|\le L(|x'-x''|+|y'-y''|), i=1,2$, *де* $t\le 0$,

   $x',x'',y',y''\in\mathbb{R}^n$, L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t,0,0)\equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3.27) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $m-k$.

У четвертому розділі досліджується питання існування неперервних при $t\in\mathbb{R}$ розв'язків нелінійних функціонально різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1)=Ax(t)+F(t,x(qt)), \tag{4.1}$$

де A,q – деякі дійсні сталі, $t\in\mathbb{R}$, $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Встановлюються достатні умови існування неперервних обмежених при $t\in\mathbb{R}$ розв'язків рівняння (4.1) і пропонується метод їх побудови.

Спочатку розглядається питання про існування неперервного обмеженого при $t\in\mathbb{R}$ розв'язку рівняння (4.1). Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція* $F(t,x)$ *є неперервною при всіх* $t,x\in\mathbb{R}$ *і задовольняє умові*

$$\left|F(t,\overline{x})-F(t,\overline{\overline{x}})\right|\le L\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right|,$$

   де $L=const>0, t,\overline{x},\overline{\overline{x}}\in\mathbb{R}$;

2. $\sup\limits_t\left|F(t,0)\right|=M<\infty$;

3. $0<a=|A|<1, 0<a+L=\Delta<1, q\ne 0$.

Тоді рівняння (4.1) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\gamma(t)$.

Виконуючи в (4.1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{4.5}$$

де $\gamma(t)$ – побудований вище розв'язок рівняння (4.1), отримаємо рівняння для $y(t)$:

$$y(t+1) = Ay(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{4.6}$$

де $\tilde{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \gamma(qt)) - F(t, \gamma(qt)), \tilde{F}(t,0) \equiv 0,$ яке має, очевидно, розв'язок $y(t) \equiv 0$. Показано, що при $t \in \mathbb{R}^+$ для рівняння (4.6) справедливі наступні теореми.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і* $A > 0, q > 1$. *Тоді рівняння (4.6) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної періодичної функції періоду 1.*

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і* $A < 0, q > 1$. *Тоді рівняння (4.6) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної функції* $\omega(t)$, *яка задовольняє умові* $\omega(t+1) = -\omega(t)$.

При доведенні теореми 4.1 припускалось виконання умови 3), яка досить помітно обмежує її загальність. В силу цього виникло природнє питання – чи можна довести аналогічне твердження у випадку, коли ця умова не виконується. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція* $F(t,x)$ *є неперервною при всіх* $t, x \in \mathbb{R}$ *і задовольняє умові* $|F(t,x') - F(t,x'')| \le L|x' - x''|$, *де* $L = const > 0, t, x', x'' \in \mathbb{R}$;
2. $\sup\limits_{t} |F(t,0)| = M < \infty$;

3. $|A|>1, |A^{-1}|<1, \dfrac{L|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}=\theta<1, q\neq 0$.

Тоді рівняння (4.1) має єдиний неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $\chi(t)$.

Виконуючи в (4.1) заміну змінних

$$x(t)=y(t)+\chi(t),$$

де $\chi(t)$ – неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок (4.15), отримаємо рівняння

$$y(t+1)=Ay(t)+\bar{F}(t,y(qt)), \tag{4.16}$$

де $\bar{F}(t,y(qt))=F(t,y(qt)+\chi(qt))-F(t,\chi(qt))$, яке має єдиний неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $y(t)\equiv 0$. Для рівняння (4.16) доведені такі теореми.

Теорема 4.5 . *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4.4 і* $A>0, q>1$. *Тоді рівняння (4.16) має сім'ю неперервних обмежених при* $t\in\mathbb{R}^-$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції.*

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4.4 і* $A<0, q>1$. *Тоді рівняння (4.16) має сім'ю неперервних обмежених при* $t\in\mathbb{R}^-$ *розв'язків, яка залежить від довільної неперервної функції* $\bar{\omega}(t)$, *яка задовольняє умові* $\bar{\omega}(t+1)=-\bar{\omega}(t)$.

У цьому розділі розглянуто також систему функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1)=Ax(t)+F(t,x(qt)), \tag{4.21}$$

де A – дійсна $(n\times n)$-матриця, $q=const>0$, $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Припускаємо, що власні числа $\lambda_i, i=1,...,n$, матриці A задовольняють умовам:

$$|\lambda_i| \neq 0,1,$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1,...,n.$$

Тоді існує неособлива заміна змінних

$$x(t) = Cy(t), \tag{4.22}$$

яка приводить систему (4.21) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{4.23}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_n), \tilde{F}(t, y(qt)) = C^{-1}F(t, Cy(qt)).$

Досліджено систему (4.23) у випадку, коли виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,n;$
2. вектор-функція $\tilde{F}(t, y)$ задовольняє умові

$$\left|\tilde{F}(t, \bar{y}) - \tilde{F}(t, \bar{\bar{y}})\right| \leq L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|,$$

де $L = const > 0, (t, \bar{y}), (t, \bar{\bar{y}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tilde{F}(0,0) = 0.$

Якщо позначити

$$\Lambda_1 = diag(\lambda_1,...,\lambda_k), \Lambda_2 = diag(\lambda_{k+1},...,\lambda_n),,$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),...,y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),...,y_n(t)),$$

$$\tilde{F}(t, y) = (\tilde{F}^1(t, y), \tilde{F}^2(t, y)),$$

$$\tilde{F}^1(t, y) = (\tilde{F}_1(t, y),...,\tilde{F}_k(t, y)), \tilde{F}^2(t, y) = (\tilde{F}_{k+1}(t, y),...,\tilde{F}_n(t, y)),$$

то систему рівнянь (4.23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= \Lambda_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= \Lambda_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Для системи рівнянь (4.24) мають місце наступні теореми.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1)-2), а також*

3. $q > 1, \lambda^{*q} < \lambda_*, \theta = \max\left\{2L \cdot \frac{1}{\lambda_* - \lambda^{*q}}, 2L \cdot \frac{1}{\lambda_{**} - \lambda^{*q}}\right\} < 1,$

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,n\}.$

Тоді система рівнянь (4.24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови 1)-2) і умова*

3) $q > 1, \lambda_{**}^q > \lambda^{**}, \theta = \max\left\{\dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*}, \dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}}\right\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,\ldots,k\},$

$\lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,\ldots,n\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,\ldots,n\}.$

Тоді система рівнянь (4.24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $n-k$.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Різницево-функціональні рівняння поєднують в собі властивості різницевих та q–різницевих (функціональних) рівнянь. Розвитку їх теорії присвячено велику кількість робіт, в яких розроблено цілий ряд напрямків. Серед них особливо важливе значення має напрямок, завданням якого є побудова загального розв’язку та дослідження його структури.

Слід відмітити, що вперше побудувати загальний розв'язок для широкого класу систем лінійних різницевих рівнянь та дослідити його властивості вдалося Біркгофу та його учням в роботах [5-7]. В даний час при дослідженні різноманітних властивостей розв’язків систем різницевих рівнянь отримано дуже багато важливих результатів. Зокрема, в [55] досліджується система лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t), \tag{1.1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ – дійсна $(n \times n)$-матриця, для якої побудовано представлення загального розв'язку і досліджено його структуру. При цьому доведено наступні теореми.

Теорема 1.1. *Нехай* $\det A(t) \neq 0$ *при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$. *Тоді загальний розв’язок системи (1.1) має вигляд*

$$x(t) = \prod_{j=1}^{[t]} A(\tau + [t] - j)\omega(t), \tag{1.2}$$

де $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_m(t)), \omega_i(t), i = 1, \ldots, n$ *- довільні одноперіодичні функції.*

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови:*

1) *елементи матриці* $A(t)$ *є кусково-неперервними при* $t \in \mathbb{R}^+$, N-*періодичними функціями (* N *– ціле додатне число);*

2) $\det A(t) \neq 0$ *при* $t \in [0, N), \det \prod_{i=0}^{N-1} A(N-i-0) \neq 0.$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = C(t) y(t),$$

($C(t)$*– кусково-неперервна при* $t \in \mathbb{R}^{+}$*,* N*-періодична* $(n \times n)$*-матриця, яка має кусково-неперервну при* $t \in \mathbb{R}^{+}$ N*- періодичну обернену матрицю* $C^{-1}(t)$*), яка приводить систему рівнянь (1.1) до вигляду*

$$y(t+1) = \Lambda(t) y(t),$$

де $\Lambda(t)$ *– кусково-неперервна при* $t \in \mathbb{R}^{+}$*, 1-періодична* $(n \times n)$*-матриця, що задовольняє умову* $\det \Lambda(t) \neq 0$ *при* $t \in [0,1), \det \Lambda(1-0) \neq 0$.

Продовжуючи дослідження системи (1.1), в роботах [57-59] розроблено сам метод побудови загального неперервного розв'язку системи (1.1) для випадку, коли виконуються наступні умови:

1) елементи матриці $A(t)$ є неперервними N-періодичними (N – ціле додатне число) функціями;
2) $\det A(t) \neq 0$ при всіх $t \in \mathbb{R}$.

В роботі [68] досліджується побудова загального неперервного розв'язку системи рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t), \tag{1.3}$$

де $t \in \mathbb{R}^{+}$, $A(t)$ – дійсна $(n \times n)$-матриця, $f(t)$ – n-мірний дійсний вектор. Доведена, зокрема, така теорема.

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови:*

1. всі елементи матриці $A(t)$ *і вектора* $f(t)$ *є неперервними при* $t \in \mathbb{R}^{+}$ *функціями;*

2. $\det A(t) \neq 0$ *при* $t \in \mathbb{R}^{+}$,

$$\det \prod_{i=0}^{N-1} A(N-i-0) \neq 0\,.$$

Тоді довільний неперервний при $t \in \mathbb{R}^{+}$ *розв'язок* $x(t)$ *системи рівнянь (1.3) має вигляд*

$$x(t) = \prod_{i=1}^{[t]} A(\tau+[t]-j)\Phi(\tau)\omega(t) + \prod_{i=1}^{[t]} A(\tau+[t]-j)\phi(\tau) +$$

$$+\prod_{i=1}^{[t]-1} A(\tau+[t]-j)\, f(\tau) + \ldots + A(\tau+[t]-1)\, f(\tau+[t]-2) + f(\tau+[t]-1),$$

де неособлива при $\tau \in [0,1)$ *матрична функція* $\Phi(\tau)$ *і вектор-функція* $\varphi(\tau)$ *є неперервними і задовольняють умови*

$$\Phi(1-0) = \Phi^{1},\;\; \Phi^{1} = A(0)\Phi(0),\;\; \varphi^{1} = A(0)\varphi(0) + f(0)$$

відповідно, а $\omega(t)$ *- деяка неперервна при* $t \in \mathbb{R}^{+}$ *1-періодична вектор-функція.*

В роботі [75] досліджуються функціонально-різницеві рівняння вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + bx(qt), \tag{1.4}$$

де $t \in \mathbb{R}^{+} = [0,+\infty)$, a, b, q – деякі дійсні сталі, для яких доведена низка тверджень. При цьому припускаються виконаними умови:

1. $0 < a < 1,\; q > 1,$
2. $\Delta = \dfrac{|b|}{a - a^{q}} < 1$.

Лема 1.1. *Якщо виконуються умови 1,2, то рівняння* (1.4) *має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \geq 0$ *розв'язків* $x(t) = x(t,\omega(t))$, *що залежить від довільної неперервної 1–періодичної функції* $\omega(t)$.

Лема 1.2. *Якщо* $\gamma(t)$ *- довільний неперервний і обмежений при* $t \geq 0$ *розв'язок рівняння* (1.4) *і виконуються умови 1,2 леми 1, то при всіх* $t \geq 0$ *має місце оцінка*

$$|\gamma(t)| \leq \tilde{M} a^t,$$

де $\tilde{M}$ *- деяка додатна стала.*

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < a < 1,\ q > 1,$

2. $\Delta = \dfrac{|b|}{a - a^q} < \dfrac{1}{2}.$

Тоді довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *рівняння (1.4) можна зобразити у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

в якому функції $x_i(t) = x_i(t, \omega(t)),$ $i = 0,1,\ldots,$ *визначаються співвідношеннями*

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} b x_{i-1}(q(t+j)),\ i = 0,1,\ldots,$$

а $\omega(t)$ *- деяка неперервна 1–періодична функція.*

Рівняння (1.4) розглянуто також у випадку, коли $t \leq 0$ і виконуються умови:

1. $a > 1,\ q > 1,$

2. $\hat{\Delta} = \dfrac{|b|}{a^q - a} < 1.$

Доведені такі результати.

Лема 1.3. *Якщо виконуються умови 1,2, то рівняння* (1.4) *має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків* $x(t) = x(t, \omega(t))$, *які залежать від довільної неперервної 1–періодичної функції* $\omega(t)$.

Лема 1.4. *Якщо виконуються умови леми 1.3 і* $\hat{\gamma}(t)$ *- довільний неперервний і обмежений при всіх* $t \le 0$ *розв'язок рівняння* (1.4), *то при всіх* $t \le 0$ *виконується умова*

$$\left|\hat{\gamma}(t)\right| \le \hat{M} a^t,$$

де $\hat{M} = const > 0.$

Теорема 1.5. *Нехай виконуються умови:*

1. $a > 1,\ q > 1,$
2. $\hat{\Delta} = \dfrac{|b|}{a^q - a} < \dfrac{1}{2}.$

Тоді довільний неперервний і обмежений при всіх $t \le 0$ *розв'язок* $\hat{\gamma}(t)$ *рівняння (1.4) можна подати у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

в якому функції $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0,1,\ldots,$ *визначаються співвідношеннями*

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} b x_{i-1}(q(t-j)),\ i = 1,2,\ldots,$$

а $\omega(t)$ *- деяка неперервна 1–періодична функція.*

Отримані результати поширено також на випадок неоднорідних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + bx(qt) + f(t),$$

де $t \in \mathbb{R}$, a, b, q – деякі дійсні сталі, $f(t)$ – n-мірний дійсний вектор.

Продовжуючи дослідження в роботі [78] розглядається лінійне функціонально-різницеве рівняння вигляду

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)x(qt) + f(t), \tag{1.5}$$

де $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $a(t), b(t), f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(t)$, $b(t)$ – деякі дійсні матриці розмірності $n \times n$, q – деяка дійсна стала.

Досліджується структура множини неперервних розв'язків при виконанні наступних умов:

1. $0 < a_* \le a(t) \le a^* < 1$, $q > 0$,
2. функції $b(t)$, $f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що $\sup\limits_t |b(t)| = b^*, \sup\limits_t |f(t)| = f^*$,
3. $\Delta = \dfrac{b^*}{1 - a^*} < 1.$

Має місце наступна теорема.

Теорема. 1.6. *Якщо виконуються умови 1-3, то рівняння (1.5) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $x(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t)$, $i = 0,1,\dots$, - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ функції.

Дослідження розширено на випадок, коли виконуються такі умови:

1. $1 < a_* \le a(t) \le a^* < +\infty$, $q > 0$,
2. функції $b(t)$, $f(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що $\sup\limits_t |b(t)| = b^*, \sup\limits_t |f(t)| = f^*$,

3. $\theta = \dfrac{b^*}{a_* - 1} < 1.$

Доведена наступна теорема.

Теорема. 1.7. *Якщо виконуються умови 1-3, то рівняння (1.5) має неперервний обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\tilde{x}(t)$ *у вигляді ряду*

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{x}_i(t),$$

де $\tilde{x}_i(t),\ i = 0,1,\ldots,$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *функції.*

В [73,84] узагальнено отримані результати на випадок систем функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1.6}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$- матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q– деяка дійсна стала. Зокрема, в [73] досліджується система однорідних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{1.7}$$

де A, B – дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q – деяка дійсна стала. При цьому припускається, що власні значення λ_i, $i = 1,\ldots,n$ матриці A задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j;\ |\lambda_i| \neq 0,1;\ i, j = 1,\ldots,n.$$

Тоді, як відомо, існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де С – деяка стала неособлива $(n \times n)$- матриця, що приводить систему рівнянь (1.7) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(qt), \tag{1.8}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B} = C^{-1}BC$, для якої детально досліджено ряд випадків.

Наприклад, якщо виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ q > 1,$

2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1,$

де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|\tilde{b}_{ij}\right|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$,

то мають місце наступні результати.

Лема 1.5. *Нехай виконуються умови 1),2). Тоді система рівнянь (1.8) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Лема 1.6. *Нехай* $\gamma(t)$ *- довільний неперервний і обмежений при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язок системи рівнянь (1.8) і виконуються умови 1), 2) леми 1.5. Тоді при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$ *виконується оцінка*

$$|\gamma(t)| \le \tilde{\tilde{M}} \lambda^{*t},$$

де $\tilde{\tilde{M}}$ *- деяка додатна стала.*

Аналогічні результати отримані у випадку, коли $t \le 0$.

Лема 1.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1, i = 1, ..., n, q > 1;$

2) $\lambda_*^q > \lambda^*, \Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*} < 1,$ *де* $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$,

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}.$

Тоді система рівнянь (1.8) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Лема 1.8. *Нехай* $\gamma(t)$ *- довільний неперервний і обмежений при всіх* $t \le 0$ *розв'язок системи рівнянь (1.8) і виконуються умови леми 1.7. Тоді при всіх* $t \le 0$ *виконується оцінка*

$$|\gamma(t)| \le \widehat{M} \lambda_*^t ,$$

де $\widehat{M} = const > 0.$

Зауважимо, що у [84] вивчається випадок, коли серед власних чисел матриці A є однакові.

В [63] доведено існування та єдиність неперервного і обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи вигляду

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1.9}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = (-\infty, +\infty)$, Λ – дійсна, стала $(n \times n)$-матриця, $f(t,x)$ – задана дійсна вектор-функція, $x(t)$ – невідома вектор-функція у випадку, коли виконуються наступні умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, m$ матриці Λ задовольняють умові $0 < |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$

2) вектор-функція $f(t,x)$ є неперервною по всіх аргументах і задовольняє умові Ліпшица

$$| f(t,x) - f(t,y)| \le l |x - y|,$$

де $(t,x),(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $|x| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$, $l = const > 0;$

3) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} | f(t,0)| = M < \infty.$

В роботах [62,64-65] досліджується структура множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь (1.9), що знаходяться в околі її тривіального розв'язку $(f(t,0) \equiv 0)$.

Вивченню різних питань теорії різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \tag{1.10}$$

де $t \in \mathbb{Z} = (-\infty, +\infty)$, $f(t,x)$ – задана дійсна вектор-функція, присвячено цілий ряд робіт. В роботах [60-61,67] встановлено умови існування та єдиності періодичних розв'язків таких рівнянь і досліджено їх властивості.

В роботі [67] питання побудови періодичних розвязків різницевого рівняння (1.10) досліджується в припущенні, що виконуються умови:

1) функція $f(t,x)$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і N-періодичною по t;

2) для довільних $t, x, y \in \mathbb{R}$ функція $f(t,x)$ задовольняє умову

$$| f(t,x) - f(t,y)| \le \omega(t) \, | x - y |,$$

де $\omega(t)$ – деяка невід'ємна, N-періодична функція;

3) $\omega(t)\omega(t+1)...\omega(t+N-1) \le \theta < 1$, $t \in \mathbb{R}$.

В роботах [54, 66] розглядається асимптотична поведінка розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом. Зокрема, в [54] побудовано представлення асимптотично періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = f(x(t)),$$

де $t \in [0, \infty)$, $f \in C^2_{[a,b]}$, $x(t):[0,\infty) \to [a,b]$.

В [66] розроблено метод, який дозволяє досліджувати властивості розв'язків широких класів рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \lambda x(t) + f(t, x(t)),$$

де $t \in \mathbb{R} = [0, +\infty)$, $\lambda = const \ne 0$, $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для випадку, коли $\lambda = 1$ досліджується задача про існування неперервних при $t \ge 0$ розв'язків, що задовольняють умові

$$\lim_{t \to +\infty} [x(t) - \omega(t)] = 0,$$

де $\omega(t)-$неперервна *1*-періодична функція. При цьому припускаються виконаними умови:

1) функція $f(t,x)$ є неперервною при $t \geq 0$, $f(t,0) \equiv 0$ і задовольняє співвідношенню

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq \varphi(t)\,|x-y|,$$

де $\varphi(t)-$деяка невід'ємна функція і $x, y \in \mathbb{R}$;

2) ряд $\Phi(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(t+i)$ рівномірно збігається при всіх $t \in [0,+\infty)$ і $\Phi(t) \leq \theta < 1$.

Більш широкі класи рівнянь розглянуто в [76], зокрема, вивчається питання існування і єдиності неперервних періодичних розв'язків систем нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x(t)=F\big(t, x(q_1 t+f_1(t,x(t))),\ldots,x(q_k t+f_k(t,x(t)))\big), \qquad (1.11)$$

де $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $q_i = const \neq 0{,}1$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,k.$

РОЗДІЛ II

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Даний розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{2.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q – деяка дійсна стала. Вивчаються питання існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків, досліджується структура їх множини, а також розробляється метод їх побудови.

2.1. Про існування сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2.2}$$

де A, B – дійсні $(n \times n)$-матриці, q – дійсна стала, і покажемо, що при деяких умовах вона має неперервні розв'язки. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1,...,n$, задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1,...,n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (2.2) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt), \tag{2.3}$$

де $\tilde{B} = C^{-1}BC$, $J = diag(J_1(\lambda_1),..., J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},\ i=1,\dots,m, m\le n.$$

В залежності від умов, яким задовольняють числа λ_i, $i=1,\dots,m$, матриця $\tilde{B}$ і стала q, далі розглянемо ряд випадків, коли вдається не тільки дати відповідь на питання про існування неперервних розв'язків системи рівнянь (2.3), але й побудувати їх у вигляді деяких функціональних рядів.

Нехай виконуються умови:

1) $0<\lambda_i<1, i=1,\dots,m, q>1$;

2) $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \dfrac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q} < 1$, де $\tilde{b} = \left|\tilde{B}\right| = \max\limits_i \sum\limits_j \left|b_{ij}\right|$,

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1,\dots,m\}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (*2.3*) має сім'ю неперервних обмежених при* $t\in\mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2.3) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{2.4}$$

де $y_i(t), i=0,1,\dots,$ – деякі неперервні вектор-функції.

Дійсно, підставляючи (2.4) у (2.3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B}\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i=0,1,\dots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1)=Jy_0(t), \tag{2.5_0}$$

$$y_i(t+1)=Jy_i(t)+\tilde{B}y_{i-1}(qt), i=1,2,..., \tag{2.5_i}$$

то ряд (2.4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2.3).

Система рівнянь (2.5_0) має множину неперервних при $t \ge 0$ розв'язків, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції.

Приймаючи до уваги представлення загального неперервного розв'язку системи (2.5_0), а також умови теореми, отримаємо

$$|y_0(t)| \le M\tilde{\lambda}^t, \tag{2.6}$$

де $M=\max_i |\omega(t)|$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (2.5_i), $i=1,2,...,$ можна показати, що вони мають формальні при $t \ge 0$ розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t)=-\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)}\tilde{B}y_{i-1}(q(t+j)), i=1,2,.... \tag{2.7_i}$$

Для того, щоб (2.7_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (2.5_i), $i=1,2,...$ достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1,2,...,$ для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \le M\Delta^i\tilde{\lambda}^{qt}, i=1,2,.... \tag{2.8}$$

Далі, з огляду на (2.6), (2.7_1) та $|J^{-1}| \le \lambda_*^{-1}+\delta_1, \delta_1=\delta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$|y_1(\mathrm{t})| \le \sum_{j=0}^{\infty}|J^{-1}|^{j+1}|\tilde{B}||y_0(\mathrm{q}(\mathrm{t}+j))| \le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)^{j+1}\tilde{b}M\tilde{\lambda}^{q(\mathrm{t+j})} \le$$

$$\le M\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}\left((\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q\right)^j \le M\frac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q}\tilde{\lambda}^{qt} \le M\Delta\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Таким чином, оцінка (2.8) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$.

Згідно з (2.7_{k+1}) і (2.8) маємо

$$|y_{k+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|J^{-1}\right|^{j+1} |\tilde{B}| |y_k(q(t+j))| \le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}+\delta_1)^{j+1} \tilde{b} M \Delta^k \tilde{\lambda}^{q(q(t+j))} \le$$

$$\le M\Delta^k \tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^{q^2}\right)^j \le$$

$$\le M\Delta^k \tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^{q}\right)^j \le M\Delta^k \frac{\tilde{b}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \le$$

$$\le M\Delta^{k+1}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Отже,оцінки (2.8) мають місце при всіх $i \ge 1$. Цим самим ми довели, що ряди $(2.7_i), i=1,2,...$, рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1,2,...$, які задовольняють оцінки (2.8). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (2.4), в якому вектор-функції $y_i(t), i=0,1,...$ визначаються співвідношеннями $(2.7_i), i=0,1,...$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(\mathrm{t})| \le \frac{M}{1-\Delta}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Теорему 2.1. доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\mathrm{y}(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt) + F(t), \tag{2.9}$$

де матриці $J = diag(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1) $0<\lambda_i<1, i=1,...,m, q>1$;

2) $\dfrac{\tilde{b}}{1-(\lambda^*+\delta_2)}=\tilde{\theta}<1, \delta_2=\delta_2(\varepsilon)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t\in\mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)|=\bar{M}<\infty$.

Для системи (2.9) має місце наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2.9) має неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{y}_i(t), \tag{2.10}$$

де $\bar{y}_i(t), i=0,1,\ldots,$ – деякі неперервні й обмежені при $t\in\mathbb{R}$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (2.10) в (2.3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\bar{y}_i(t+1)=J\sum_{i=0}^{\infty}\bar{y}_i(t)+\tilde{B}\sum_{i=0}^{\infty}\bar{y}_i(qt)+F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i=0,1,\ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1)=J\bar{y}_0(t)+F(t), \tag{2.11$_0$}$$

$$\bar{y}_i(t+1)=J\bar{y}_i(t)+\tilde{B}\bar{y}_{i-1}(qt), i=1,2,\ldots, \tag{2.11$_i$}$$

то ряд (2.10) є формальним розв'язком системи рівнянь (2.9).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$\bar{y}_0(t)=\sum_{j=1}^{\infty}J^{j-1}F(t-j) \tag{2.12$_0$}$$

рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}$, задовольняє систему рівнянь (2.11$_0$) і виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)|\le\sum_{j=1}^{\infty}|J|^{j-1}|F(t-j)|\le\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^*+\delta_2)^{j-1}\sup_t|F(t)|\le$$

$$\le\frac{\bar{M}}{1-(\lambda^*+\delta_2)}=\bar{M}'. \tag{2.13$_0$}$$

З огляду на (2.12_0), (2.13_0) можна послідовно показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\tilde{B}\bar{y}_{i-1}(q(t-j)), i = 1, 2, ..., \qquad (2.12_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють відповідні системи рівнянь $(2.11_i), i = 0, 1, \ldots$, і виконуються оцінки

$$\left|\bar{y}_i(t)\right| \leq \bar{M}'\tilde{\theta}^i, i = 1, 2, \ldots . \qquad (2.13_i)$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $\bar{y}_i(t), i = 1, 2, \ldots$, що визначаються за допомогою співвідношень $(2.12_i), i = 1, 2, \ldots$, задовольняють умови $(2.13_i), i = 1, 2, \ldots$, то ряд (2.10) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $\bar{y}(t)$, яка є розв'язком системи (2.9) і задовольняє умову

$$\left|\bar{y}(t)\right| \leq \frac{\bar{M}'}{1-\tilde{\theta}}.$$

Теорему 2.2. доведено.

2.2. Про існування сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1, i = 1,...,m, q > 1$*;*

2) $\bar{\lambda}^q > \lambda^*, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \dfrac{\tilde{b}\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}} < 1$*, де* $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,m\}$,

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,m\}$, $\tilde{b} = |\tilde{B}|$.

Тоді система рівнянь (2.3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2.3) має сім'ю розв'язків у вигляді функціонального ряду (2.4). Для цього, очевидно, достатньо показати, що вектор-функції $y_i(t), i = 0,1,...$, є розв'язками послідовності систем рівнянь (2.5_i) і задовольняють оцінки

$$|y_i(t)| \le M\Delta^i \bar{\lambda}^{qt}, i = 0,1,2,..., \tag{2.14}$$

де $M = \max\limits_t |\omega(t)|$.

Справді, безпосередньою підстановкою в $(2.5_i), i = 1,2,...$, можна переконатися, що вектор-функції

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\tilde{B}y_{i-1}(q(t-j)), i = 1,2,..., \tag{2.15_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь $(2.5_i), i = 1,2,...$.

Покажемо тепер, що ряди $(2.15_i), i = 1,2,...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1,2,...$, для яких при всіх $i \ge 1$, $t \le 0$ виконуються оцінки (2.14). Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \le M\bar{\lambda}^t$ (випливає із представлення загального неперервного розв’язку системи (2.5_0)), то на підставі (2.15_1) маємо

$$\left|y_1(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|J\right|^{j-1}\left|\tilde{B}\right|\left|y_0(q(t-j))\right| \le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1}M\,\overline{\lambda}^{\,q(t-j)} \le$$

$$\le M\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\overline{\lambda}^{\,qt}\sum_{j=1}^{\infty}\left((\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q}\right)^j \le M\,\frac{\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q}}{(\lambda^* + \delta_3)(1-(\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q})}\overline{\lambda}^{\,qt} \le$$

$$\le M\,\frac{\tilde{b}\overline{\lambda}^{\,-q}}{1-(\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q}}\overline{\lambda}^{\,qt} \le M\Delta\overline{\lambda}^{\,qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (2.14) доведено для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (2.14), (2.15_{i+1}) отримуємо

$$\left|y_{i+1}(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|J\right|^{j-1}\left|\tilde{B}\right|\left|y_i(q(t-j))\right| \le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1}M\Delta^i\overline{\lambda}^{\,q(q(t-j))} \le$$

$$\le M\Delta^i\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\overline{\lambda}^{\,q^2t}\sum_{j=1}^{\infty}\left((\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q^2}\right)^j \le$$

$$\le M\Delta^i\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)^{-1}\overline{\lambda}^{\,qt}\sum_{j=1}^{\infty}\left((\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q}\right)^j \le$$

$$M\Delta^i\,\frac{\tilde{b}(\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q}}{(\lambda^* + \delta_3)(1-(\lambda^* + \delta_3)\overline{\lambda}^{\,-q})}\overline{\lambda}^{\,qt} \le M\Delta^{i+1}\overline{\lambda}^{\,qt}.$$

Отже, ми довели, що ряди $(2.15_i), i = 1,2,...,$ рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1,2,...,$ що задовольняють оцінки (2.14). Цим самим ми показали, що ряд (2.4) рівномірно збігається при $t \le 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$\left|y(t)\right| \le \frac{M}{1-\Delta}\overline{\lambda}^{\,qt}$$

і є розв’язком системи рівнянь (2.3).

Теорему 2.3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt) + \hat{F}(t), \tag{2.16}$$

у випадку, коли виконуються умови:

1) $\lambda_i > 1, i = 1,\ldots,m, q > 1$;

2) $\dfrac{(\lambda_*^{-1} + \delta_4)\tilde{b}}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_4)} = \theta < 1$;

3) всі елементи вектор-функції $\hat{F}(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t \left|\hat{F}(t)\right| = \hat{M} < \infty$.

Теорема2.4. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2.16) має неперервний, обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок*

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t), \tag{2.17}$$

де $\hat{y}(t), i = 0,1,\ldots$, *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Доведення. Підставляючи (2.17) в (2.16), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t+1) = J\sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(t) + \tilde{B}\sum_{i=0}^{\infty} \hat{y}_i(qt) + \hat{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\hat{y}(t), i = 0,1,\ldots$, є розв’язками послідовності систем рівнянь

$$\hat{y}_0(t+1) = J\hat{y}_0(t) + \hat{F}(t), \tag{2.18$_0$}$$

$$\hat{y}_i(t+1) = J\hat{y}_i(t) + \tilde{B}\hat{y}_{i-1}(qt), i = 1,2,\ldots, \tag{2.18$_i$}$$

то ряд (2.17) є формальним розв’язком системи рівнянь (2.16).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\hat{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)}\hat{F}(t+j) \tag{2.19$_0$}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняє систему рівнянь (2.18_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою в (2.18_0)) і виконується оцінка

$$\left|\hat{y}_0(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J^{-1}\right|^{j+1}\left|\hat{F}(t+j)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_4)^{j+1}\hat{M} \le$$

$$\le \frac{(\lambda_*^{-1}+\delta_4)\hat{M}}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_4)} = \hat{M}_*. \qquad (2.20_0)$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(2.18_i), i=1,2,...,$ можна за індукцією довести, що ряди

$$\hat{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)}\tilde{B}\hat{y}_{i-1}(q(t+j)), i=1,2,..., \qquad (2.19_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t\in\mathbb{R}$, задовольняють відповідні системи рівнянь $(2.18_i), i=1,2,...,$ і виконуються оцінки

$$\left|\hat{y}_i(t)\right| \le \hat{M}_*\theta^i, i=1,2,\dots . \qquad (2.20_i)$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (2.17) рівномірно збігається при $t\in\mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $\hat{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$\left|\hat{y}(t)\right| \le \frac{\hat{M}_*}{1-\theta}$$

і є розв’язком системи рівнянь (2.16).

2.3. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь у гіперболічному випадку

Розглянемо систему різницевих рівнянь (2.3) при таких припущеннях:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,m}, 0 \le m \le n, q > 1;$

2) $\lambda_* > \lambda^q, \lambda^* < \lambda < 1, \Delta = \max\{\dfrac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_5)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_5)\lambda^q}, \dfrac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)\lambda^q}\} < 1,$ де

$\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,\ \tilde{b}_1 = |B_{11}| + |B_{12}|, \tilde{b}_2 = |B_{21}| + |B_{22}|,$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$$
$$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$$

Вводячи позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),..., J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),..., J_m(\lambda_m)),$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),..., y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),..., y_m(t)), \quad (2.21)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

систему рівнянь (2.3) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + B_{11} y^1(qt) + B_{12} y^2(qt), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + B_{21} y^1(qt) + B_{22} y^2(qt), \end{aligned} \quad (2.22)$$

Доведемо наступну теорему.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (2.22) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \ge 0$ *розв'язків, яка залежить від* $\overline{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2.22) має розв'язки у вигляді рядів

$$y^1(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$
$$y^2(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \qquad (2.23)$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t\in\mathbb{R}^+$ вектор-функції. Дійсно, підставляючи (2.23) в (2.22), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1)=J_1\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t)+B_{11}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt)+B_{12}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt),$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1)=J_2\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t)+B_{21}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt)+B_{22}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0^1(t+1)=J_1 y_0^1(t),$$
$$y_0^2(t+1)=J_2 y_0^2(t), \qquad (2.24_0)$$

$$y_i^1(t+1)=J_1 y_i^1(t)+B_{11}y_{i-1}^1(qt)+B_{12}y_{i-1}^2(qt),$$
$$y_i^2(t+1)=J_2 y_i^2(t)+B_{21}y_{i-1}^1(qt)+B_{22}y_{i-1}^2(qt), \qquad i=1,2,..., \qquad (2.24_i)$$

то ряди (2.23) є формальним розв'язком системи рівнянь (2.22).

Дійсно, система рівнянь (2.24_0) має сім'ю неперервних обмежених при $t\geq 0$ розв'язків $(y_0^1(t),0)$, яка залежить від $\bar{n}=\sum_{i=1}^{k} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Тоді безпосередньою підстановкою в (2.24_i), $i=1,2,...,$ можна переконатися, що ряди

$$y_i^1(t)=-\sum_{j=0}^{\infty} J_1^{-(j+1)}[B_{11}y_{i-1}^1(q(t+j))+B_{12}y_{i-1}^2(q(t+j))],$$
$$y_i^2(t)=-\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)}[B_{21}y_{i-1}^1(q(t+j))+B_{22}y_{i-1}^2(q(t+j))], \qquad i=1,2,..., \qquad (2.25_i)$$

є формальними розв'язками послідовності систем рівнянь (2.24_i), $i=1,2,...$.

Покажемо, що ряди (2.25_i), $i=1,2,...$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(\mathrm{t}), i=1,2,...$, які задовольняють оцінки

$$\left|y_i^1(\mathrm{t})\right| \le M\Delta^i \lambda^{qt}, i=1,2,...,$$
$$\left|y_i^2(\mathrm{t})\right| \le M\Delta^i \lambda^{qt}, i=1,2,..., \tag{2.26}$$

де M – деяка додатна стала.

Справді, оскільки $\left|y_0^1(\mathrm{t})\right| \le M\lambda^t$ (випливає із представлення загального розв'язку системи (2.24_0)), де $M=\max\limits_t\left|\omega(t)\right|$, то з огляду на (2.25_1) отримуємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J_1^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{11}y_0^1(q(t+j))+B_{12}y_0^2(q(t+j))\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J_1^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{11}y_0^1(q(t+j))\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1}\tilde{b}_1 M\lambda^{q(t+j)} \le$$
$$\le M\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^q)^j \le M\,\frac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1}+\delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^q}\lambda^{qt} \le M\Delta\lambda^{qt}.$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_0^1(q(t+j))+B_{22}y_0^2(q(t+j))\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_0^1(q(t+j))\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)^{j+1}\tilde{b}_2 M\lambda^{q(t+j)} \le$$
$$\le M\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^q)^j \le M\,\frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^q}\lambda^{qt} \le M\Delta\lambda^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (2.26) доведено для деякого $i>1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від i до $i+1$. Згідно з (2.25_{i+1}) і (2.26) одержуємо

$$\left|y_{i+1}^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left|J_1^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{11}y_i^1(q(t+j))+B_{12}y_i^2(q(t+j))\right| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1}\tilde{b}_1 M\Delta^i\lambda^{q(q(t+j))} \le M\Delta^i\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{q^2t}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{q^2})^j \le$$

$$\le M\Delta^i\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{q})^j \le M\Delta^i\frac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1}+\delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\lambda^{q}}\lambda^{qt}\le$$

$$\le M\Delta^{i+1}\lambda^{qt},$$

$$\left|y_{i+1}^2(t)\right|\le\sum_{j=0}^{\infty}\left|J_2^{-1}\right|^{j+1}\left|B_{21}y_i^1(q(t+j))+B_{22}y_i^2(q(t+j))\right|\le$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)^{j+1}\tilde{b}_2M\Delta^i\lambda^{q(q(t+j))}\le M\Delta^i\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{q^2t}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{q^2})^j\le$$

$$\le M\Delta^i\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{q})^j \le M\Delta^i\frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)\lambda^{q}}\lambda^{qt}\le$$

$$\le M\Delta^{i+1}\lambda^{qt},$$

звідки випливають оцінки (2.26) при $i+1$. Цим ми довели, що ряди (2.25_i), $i=1,2,...$, рівномірно збігаються при $t\ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)=(y_i^1(t),y_i^2(t)),i=1,2,...$, які задовольняють оцінки (2.26). Звідси безпосередньо випливає, що ряди (2.23) рівномірно збігаються при $t\ge 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$, яка є розв'язком системи (2.22) і задовольняє умову

$$\left|y(\mathrm{t})\right|\le\frac{M}{1-\Delta}\lambda^{qt}.$$

Теорему 2.5. доведено.

Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t\le 0$ розв'язків системи різницевих рівнянь (2.3) у випадку, коли виконуються умови:

1) $0<\lambda_i<1<\lambda_j, i=\overline{1,k}, j=\overline{k+1,m}, 0\le m\le n, q>1;$

2) $\lambda^{**}<\bar{\lambda}^q, 1<\bar{\lambda}<\lambda_{**}, \bar{\Delta}=\max\{\dfrac{\bar{b}_1\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^*+\delta_7)\bar{\lambda}^{-q}},\dfrac{\bar{b}_2\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**}+\delta_8)\bar{\lambda}^{-q}}\}<1,$ де
$\bar{b}_1=\left|B_{11}\right|+\left|B_{12}\right|, \bar{b}_2=\left|B_{21}\right|+\left|B_{22}\right|, \lambda_*=\min\{\lambda_i, i=1,...,k\},$
$\lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,...,k\}, \lambda_{**}=\min\{\lambda_j, j=k+1,...,m\},$
$\lambda^{**}=\max\{\lambda_j, j=k+1,...,m\}.$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (2.3) має сім'ю неперервних, обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, які залежать від* $\overline{\overline{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_j(t),\ j = \overline{k+1, m}.$

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2.3) має розв'язки у вигляді рядів (2.23). Дійсно, якщо вектор-функції $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t)), i = 0,1,...,$ є розв'язками систем рівнянь (2.24_i), $i = 0,1,...$, то ряд (2.23) буде формальним розв'язком системи рівнянь(2.3).

Система рівнянь (2.24_0) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ розв'язків $(0, y_0^2(t))$, яка залежить від $\overline{\overline{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (2.24_i), $i = 1, 2, ...$, доведемо, що вони також мають неперервні при $t \le 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$\begin{aligned} y_i^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1}[B_{11} y_{i-1}^1(q(t-j)) + B_{12} y_{i-1}^2(q(t-j))], \\ y_i^2(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_2^{j-1}[B_{21} y_{i-1}^1(q(t-j)) + B_{22} y_{i-1}^2(q(t-j))], \end{aligned} \quad i = 1, 2, ..., \qquad (2.27_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (2.24_i), $i = 1, 2, ...$, то достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t)), i = 1, 2, ...$ Для цього, в свою чергу, достатньо показати, що при всіх $i \ge 1$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| y_i^1(\mathrm{t}) \right| &\le \overline{M}\, \overline{\Delta}^i\, \overline{\lambda}^{qt}, \\ \left| y_i^2(\mathrm{t}) \right| &\le \overline{M}\, \overline{\Delta}^i\, \overline{\lambda}^{qt}, \end{aligned} \qquad (2.28)$$

де $\overline{M} = \max_t \left| \overline{\omega}(t) \right|$.

Справді, оскільки $\left|y_0^2(\mathrm{t})\right| \le \overline{M}\,\overline{\lambda}^{\,t}$, то внаслідок (2.27_1) отримуємо

$$\left|y_1^1(\mathrm{t})\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_1\right|^{j-1} \left|B_{11} y_0^1(q(t-j)) + B_{12} y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_1\right|^{j-1} \left|B_{12} y_0^2(q(t-j))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_7)^{j-1} \bar{b}_1 \overline{M}\,\overline{\lambda}^{\,q(\mathrm{t-j})} \le$$

$$\le \bar{b}_1 \overline{M} (\lambda^* + \delta_7)^{-1} \overline{\lambda}^{\,qt} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q})^j \le \overline{M}\, \frac{\bar{b}_1 (\lambda^* + \delta_7)^{-1} (\lambda^* + \delta_7) \overline{\lambda}^{\,-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q}}\, \overline{\lambda}^{\,qt} \le$$

$$\le \overline{M}\, \frac{\bar{b}_1 \overline{\lambda}^{\,-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q}}\, \overline{\lambda}^{\,qt} \le \overline{M}\,\overline{\Delta}\,\overline{\lambda}^{\,qt},$$

$$\left|y_1^2(\mathrm{t})\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_2\right|^{j-1} \left|B_{21} y_0^1(q(t-j)) + B_{22} y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_2\right|^{j-1} \left|B_{22} y_0^2(q(t-j))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{**} + \delta_8)^{j-1} \bar{b}_2 \overline{M}\,\overline{\lambda}^{\,q(t-j)} \le$$

$$\le \bar{b}_2 \overline{M} (\lambda^{**} + \delta_8)^{-1} \overline{\lambda}^{\,qt} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^{**} + \delta_8)\overline{\lambda}^{\,-q})^j \le \overline{M}\, \frac{\bar{b}_2 (\lambda^{**} + \delta_8)^{-1} (\lambda^{**} + \delta_8) \overline{\lambda}^{\,-q}}{1 - (\lambda^{**} + \delta_8)\overline{\lambda}^{\,-q}}\, \overline{\lambda}^{\,qt} \le$$

$$\le \overline{M}\, \frac{\bar{b}_2 \overline{\lambda}^{\,-q}}{1 - (\lambda^{**} + \delta_8)\overline{\lambda}^{\,-q}}\, \overline{\lambda}^{\,qt} \le \overline{M}\,\overline{\Delta}\,\overline{\lambda}^{\,qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (2.28) доведені для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від i до $i+1$. Згідно з (2.27_{i+1}), (2.28) отримуємо

$$\left|y_{i+1}^1(\mathrm{t})\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_1\right|^{j-1} \left|B_{11} y_i^1(q(t-j)) + B_{12} y_i^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_7)^{j-1} \bar{b}_1 \overline{M}\,\overline{\Delta}^{\,i}\,\overline{\lambda}^{\,q(q(\mathrm{t-j}))} \le \bar{b}_1 \overline{M}\,\overline{\Delta}^{\,i} (\lambda^* + \delta_7)^{-1} \overline{\lambda}^{\,q^2 t} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q^2})^j \le$$

$$\le \bar{b}_1 \overline{M}\,\overline{\Delta}^{\,i} (\lambda^* + \delta_7)^{-1} \overline{\lambda}^{\,qt} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q})^j \le \overline{M}\,\overline{\Delta}^{\,i}\, \frac{\bar{b}_1 \overline{\lambda}^{\,-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_7)\overline{\lambda}^{\,-q}}\, \overline{\lambda}^{\,qt} \le$$

$$\le \overline{M}\,\overline{\Delta}^{\,i+1}\,\overline{\lambda}^{\,qt},$$

$$\left|y_{i+1}^2(\mathrm{t})\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_2\right|^{j-1} \left|B_{21} y_i^1(q(t-j)) + B_{22} y_i^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**}+\delta_8)^{j-1}\bar{b}_2\overline{M}\,\overline{\Delta}^{i}\,\overline{\lambda}^{q(q(t-j))} \le \bar{b}_2\overline{M}\,\overline{\Delta}^{i}(\lambda^{**}+\delta_8)^{-1}\overline{\lambda}^{q^2t}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^{**}+\delta_8)\overline{\lambda}^{-q^2})^{j} \le$$

$$\le \bar{b}_2\overline{M}\,\overline{\Delta}^{i}(\lambda^{**}+\delta_8)^{-1}\overline{\lambda}^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^{**}+\delta_8)\overline{\lambda}^{-q})^{j} \le \overline{M}\,\overline{\Delta}^{i}\frac{\bar{b}_2\overline{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**}+\delta_8)\overline{\lambda}^{-q}}\overline{\lambda}^{qt} \le$$

$$\le \overline{M}\,\overline{\Delta}^{i+1}\overline{\lambda}^{qt},$$

звідки випливають оцінки (2.28) при $i+1$.

Отже, ми довели, що ряди (2.27_i), $i=1,2,...$, рівномірно збігаються при $t\le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)=(y_i^1(t),y_i^2(t)), i=1,2,...$, які задовольняють оцінки (2.28). Цим ми довели, що ряд (2.23) збігається при $t\le 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$, яка є розв'язком системи (2.3) і задовольняє умову

$$|y(\mathrm{t})| \le \frac{\overline{M}}{1-\overline{\Delta}}\overline{\lambda}^{qt}.$$

Теорему 2.6 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1y^1(t)+B_{11}y^1(qt)+B_{12}y^2(qt)+F^1(t),\\ y^2(t+1) &= J_2y^2(t)+B_{21}y^1(qt)+B_{22}y^2(qt)+F^2(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $0<\lambda_i<1<\lambda_j, i=1,...,k,\ j=k+1,...,m, q>0;$

2) $\theta=\max\{\frac{\tilde{b}_1}{1-(\lambda^{*}+\delta_9)},\frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_{10})}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_{10})}\}<1, \tilde{b}_1=|B_{11}|+|B_{12}|,$

$\tilde{b}_2=|B_{21}|+|B_{22}|, \lambda^{*}=\max\{\lambda_i, i=1,...,k\}, \lambda_{**}=\min\{\lambda_j,\ j=k+1,...,m\};$

3) всі компоненти вектор-функції $F(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t\in\mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (2.29) має неперервний і обмежений при $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$.

Доведення. Розв'язок системи (2.29) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$
\begin{aligned}
y^1(\mathrm{t}) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(\mathrm{t}),\\
y^2(\mathrm{t}) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(\mathrm{t}),
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Дійсно, підставляючи (2.30) в (2.29), отримуємо

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) &= J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + B_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + B_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^1(t),\\
\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) &= J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + B_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + B_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^2(t).
\end{aligned}
$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$
\begin{aligned}
y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t) + F^1(t),\\
y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t) + F^2(t),
\end{aligned}
\tag{2.31_0}
$$

$$
\begin{aligned}
y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + B_{11} y_{i-1}^1(qt) + B_{12} y_{i-1}^2(qt),\\
y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + B_{21} y_{i-1}^1(qt) + B_{22} y_{i-1}^2(qt),
\end{aligned}
\qquad i = 1,2,..., \tag{2.31_i}
$$

то ряди (2.30) є формальним розв'язком системи рівнянь (2.29).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$
\begin{aligned}
y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} F^1(t-j),\\
y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} F^2(t+j)
\end{aligned}
\tag{2.32_0}
$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (2.31_0) і виконуються оцінки

$$\left|y_0^1(t)\right| \le \frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_9)},$$
$$\left|y_0^2(t)\right| \le \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}, \qquad (2.33_0)$$

де $M^1 = \sup\limits_t \left|F^1(\mathrm{t})\right|, M^2 = \sup\limits_t \left|F^2(\mathrm{t})\right|.$

Згідно з (2.33_0) отримуємо оцінку

$$\left|y_0(\mathrm{t})\right| \le M' = \{\frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_9)}, \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_{10})}\}. \qquad (2.34_0)$$

Враховуючи (2.31_0) та (2.33_0) можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1}(B_{11} y_{i-1}^1(q(t-j)) + B_{12} y_{i-1}^2(q(t-j))),$$
$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)}(B_{21} y_{i-1}^1(q(t+j)) + B_{22} y_{i-1}^2(q(t+j))), \qquad i = 1, 2, \ldots \quad (2.32_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють системи рівнянь (2.31_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються оцінки

$$\left|y_i^1(\mathrm{t})\right| \le M'\theta^i,$$
$$\left|y_i^2(\mathrm{t})\right| \le M'\theta^i, \qquad i = 1, 2, \ldots. \qquad (2.33_i)$$

Звідси випливає, що ряди (2.30) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв’язком системи рівнянь (2.29) і задовольняє умову

$$\left|y(\mathrm{t})\right| \le \frac{M'}{1-\theta}.$$

Теорему 2.7. доведено.

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ

У даному розділі досліджено структуру розв’язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ – дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ – дійсний вектор розмірності n, q – деяка дійсна стала. Тут встановлено умови існування неперервних обмежених розв’язків та досліджено структуру їх множини.

Основними результатами цього розділу є наступні:

– встановлено умови існування сім’ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків і запропоновано один підхід до їх побудови;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків таких систем рівнянь;

– встановлено умови існування сім’ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв’язків у гіперболічному випадку;

– досліджено структуру множини неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків в гіперболічному випадку, запропонований метод їх побудови;

РОЗДІЛ III

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Даний розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \tag{3.1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$-матриця, q – дійсна стала, $F(t,x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i, i = 1,\dots,n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0,1, i = 1,\dots,n.$$

3.1. Неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

В системі рівнянь (3.1) зробимо заміну змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (3.1) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{3.2}$$

де $\tilde{F}(t,y) = C^{-1}F(t,Cy), J = diag(J_1(\lambda_1),\dots,J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i = 1,\dots,m, m \leq n.$$

Дослідимо систему рівнянь (3.2) у випадку, коли виконуються умови:

1. $0<\lambda_i<1, i=1,\dots,m, q>0;$
2. $\Delta=\dfrac{L}{1-(\lambda^*+\delta_1)}<1, \delta_1=\delta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0,$

   $\lambda^*=\max\{\lambda_i, i=1,\dots,m\};$
3. $\left|\tilde F(t,y')-\tilde F(t,y'')\right|\le L|y'-y''|,$ де $t\in\mathbb{R},$ $y',y''\in\mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала;
4. всі елементи вектор-функції $\tilde F(t,0)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t\in\mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_t\left|\tilde F(t,0)\right|=M<\infty.$

Має місце теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (3.2) має неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок у вигляді функціонального ряду*

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(t) \tag{3.3}$$

де $y_i(t), i=0,1,\dots,$ – деякі неперервні вектор-функції.

Доведення. Якщо $|y_i(t)|\le M_*\Delta^i$ (що буде доведено пізніше), то

$$\tilde F(t,y_0(qt))+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j(qt))-\tilde F(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j(qt))\right)=\tilde F(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j(qt))\,.$$

Дійсно, оскільки при всіх $m\ge 1$ виконуються співвідношення

$$\tilde F(t,y_0(qt))+\sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde F(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j(qt))-\tilde F(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j(qt))\right)=\tilde F(t,\sum_{j=0}^{m}y_j(qt)),$$

то внаслідок умови 3) теореми отримуємо

$$\left|\tilde F(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j(qt))-\tilde F(t,\sum_{j=0}^{m}y_j(qt))\right|\le L\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j(qt)\right|\le$$

$$\le L\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j(qt)\right|\le L\sum_{j=m+1}^{\infty}M_*\Delta^j\le LM_*\frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta}.$$

Отже, в силу умови 2) знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $m \geq N$ має місце нерівність

$$LM_* \frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta} \leq \varepsilon .$$

Таким чином, для всіх $m \geq N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt)) \right| \leq \varepsilon ,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) .$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt))$.

Далі, підставивши (3.3) в (3.2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)) .$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0,1,...,$ є розв’язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t) + \tilde{F}(t,0) , \tag{3.4$_0$}$$

$$y_1(t+1) = Jy_1(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) - \tilde{F}(t,0) , \tag{3.4$_1$}$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)), i = 2,3,..., \tag{3.4$_i$}$$

то ряд (3.3) буде формальним розв’язком системи рівнянь (3.2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(3.4_i), i = 0,1,...,$ можна показати, що вони мають розв’язки у вигляді формальних рядів

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\tilde{F}(t-j,0), \qquad (3.5_0)$$

$$y_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\left[\tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j,0)\right], \qquad (3.5_1)$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\left[\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(t-j))) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(t-j)))\right], i = 2,3,\dots . \qquad (3.5_i)$$

Для того, щоб (3.5_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (3.4_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$\left|y_i(\mathrm{t})\right| \le M_* \Delta^i. \qquad (3.6)$$

Приймаючи до уваги (3.5_0), отримуємо

$$\left|y_0(t)\right| \le \left|\sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1}\tilde{F}(t-j,0)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|J\right|^{j-1}\left|\sup \tilde{F}\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_1)^{j-1} M \le \frac{M}{1-(\lambda^*+\delta_1)} = M_*. \qquad (3.7)$$

Далі, з огляду на (3.7) та (3.5_1) отримуємо

$$\left|y_1(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|J\right|^{j-1}\left|\tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j,0)\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^*+\delta_1)^{j-1} L\left|y_0(q(t-j))\right| \le M_* \frac{L}{1-(\lambda^*+\delta_1)} = M_*\Delta .$$

Таким чином, оцінка (3.6) має місце при $i = 0,1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Згідно з (3.5_{k+1}) і (3.6) маємо

$$|y_{k+1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \left| \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{k} y_j(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j))) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L \left| \sum_{j=0}^{k} y_j(q(t-j)) - \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j)) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L |y_k(q(t-j))| \le \frac{L}{1-(\lambda^* + \delta_1)} M_* \Delta^k \le M_* \Delta^{k+1}.$$

Цим самим оцінки (3.6) повністю доведено і, отже, ряд (3.3) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції $y(t)$, яка є розв’язком системи рівнянь (3.2) і задовольняє умові

$$|y(t)| \le \frac{M_*}{1-\Delta}.$$

Теорему доведено.

Дослідимо тепер систему рівнянь (3.2) у випадку, коли виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i = 1,\dots,m, q > 0;$
2. $\theta = L \dfrac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1-(\lambda_*^{-1} + \delta_2)} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,$

   $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,\dots,m\};$
3. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')\right| \le L|y' - y''|,$ де $t \in \mathbb{R},$ $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала;
4. всі елементи вектор-функції $\tilde{F}(t,0)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup_t \left|\tilde{F}(t,0)\right| = M < \infty.$

Має місце теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (3.2) має неперервний обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{3.8}$$

де $\bar{y}_i(\mathrm{t}), \mathrm{i} = 0,1,\ldots,$ *– деякі неперервні й обмежені при* $t \in \mathbb{R}$ *вектор-функції.*

Доведення. Як і в попередній теоремі, можна показати, що ряд

$$\tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$, $\left| \bar{y}_i(\mathrm{t}) \right| \le \bar{M}_* \theta^i, i \ge 0$ і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{y}_j(qt))$.

Отже, підставивши (3.8) в (3.2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt)),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i = 0,1,\ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J\bar{y}_0(t) + \tilde{F}(t,0), \tag{3.9_0}$$

$$\bar{y}_1(t+1) = J\bar{y}_1(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) - \tilde{F}(t,0), \tag{3.9_1}$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J\bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)), i = 2,3,\ldots, \tag{3.9_i}$$

то ряд (3.8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.2).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j,0) \tag{3.10}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняє систему (3.9_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою в (3.9_0)) і виконується оцінка

$$\left| \bar{y}_0(t) \right| \le \left| \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j,0) \right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left| J^{-1} \right|^{j+1} \left| \sup \tilde{F} \right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_2)^{j+1}\bar{M} \le \frac{\lambda_*^{-1}+\delta_2}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_2)}\bar{M} = \bar{M}_*. \qquad (3.11)$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(3.9_i), \mathrm{i}=1,2,...,$ можна за індукцією показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)}\left[\tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-1}\bar{y}_j(q(t+j))) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-2}\bar{y}_j(q(t+j)))\right], i=1,2,.... \qquad (3.12_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t\in\mathbb{R}$, задовольняють відповідні системи рівнянь $(3.9_i), \mathrm{i}=1,2,...$, і виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(\mathrm{t})| \le \bar{M}_*\theta^i, i=1,2,.... \qquad (3.13)$$

Таким чином, ряд (3.8) рівномірно збігається при $t\in\mathbb{R}$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(\mathrm{t})$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(\mathrm{t})| \le \frac{\bar{M}_*}{1-\theta}.$$

Теорему доведено.

Перепишемо систему рівнянь (3.2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \qquad (3.14)$$

де $J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)), J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)), m\le n$.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0<\lambda_i<1<\lambda_j, i=1,...,k, j=k+1,...,m, q>0$;

2) $\theta = \max\left\{\frac{2L}{1-(\lambda^*+\delta_3)}, \frac{2L(\lambda_{**}^{-1}+\delta_4)}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_4)}\right\}<1,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1,...,k\}$,

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j=k+1,...,m\}$;

3) $\left|\tilde{F}^i(t,y_1^{'},y_2^{'})-\tilde{F}^i(t,y_1^{''},y_2^{''})\right|\le L\left(\left|y_1^{'}-y_1^{''}\right|+\left|y_2^{'}-y_2^{''}\right|\right), i=1,2,$ *де* $t\in\mathbb{R}, y_1^{'},y_2^{'},y_1^{''},y_2^{''}\in\mathbb{R}^n,$ L *- деяка додатна стала;*

4) *всі компоненти вектор-функцій* $\tilde{F}^i(t,0,0), i=1,2$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t\in\mathbb{R}$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (3.14) має неперервний і обмежений при $t\in\mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t)=\left(y^1(t),y^2(t)\right).$

Доведення. Розв'язок системи (3.14) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t),$$
$$y^2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t), \tag{3.15}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...,$ - деякі неперервні й обмежені при $t\in\mathbb{R}$ вектор-функції.

Як і в попередніх теоремах, можна показати, що ряди

$$\tilde{F}^1(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}$, $\left|y_i^1(\mathrm{t})\right|\le M^{'}\theta^i$, $\left|y_i^2(\mathrm{t})\right|\le M^{'}\theta^i, i\ge 0$ і їх суми дорівнюють $\tilde{F}^1(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)),\tilde{F}^2(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt))$ відповідно.

Тоді, підставляючи (3.15) в (3.14), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt)),$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt)),$$

звідки безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t) + \tilde{F}^1(t,0,0), \\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t) + \tilde{F}^2(t,0,0), \end{aligned} \qquad (3.16_0)$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= J_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^1(t,0,0), \\ y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^2(t,0,0), \end{aligned} \qquad (3.16_1)$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)) - \tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)), \\ y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)) - \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)), \end{aligned} \qquad (3.16_i)$$

$$i = 2,3,...,$$

то ряди (3.15) є формальним розв'язком системи рівнянь (3.14).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \tilde{F}^1(t-j,0,0), \\ y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \tilde{F}^2(t+j,0,0). \end{aligned} \qquad (3.17_0)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (3.16_0) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| y_0^1(t) \right| &\le \frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_3)}, \\ \left| y_0^2(t) \right| &\le \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}, \end{aligned} \qquad (3.18_0)$$

де $M^1 = \sup_t \left| \tilde{F}^1(t,0,0) \right|, M^2 = \sup_t \left| \tilde{F}^2(t,0,0) \right|.$

Згідно з (3.18_0) отримуємо оцінку

$$|y_0(\mathrm{t})| \le M^{'} = \left\{ \frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_3)}, \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)} \right\}. \qquad (3.19_0)$$

Враховуючи (3.16_0) та (3.18_0) можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \left[\tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j)) \right) \right],$$

$$i = 1, 2, ..., \qquad (3.17_i)$$

$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \left[\tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t+j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t+j)) \right) \right],$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють системи рівнянь (3.16_i), $i = 1, 2, ...,$ і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_i^1(\mathrm{t})| &\le M^{'}\theta^i, \\ |y_i^2(\mathrm{t})| &\le M^{'}\theta^i, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots. \qquad (3.18_i)$$

Звідси випливає, що ряди (3.15) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв’язком системи рівнянь (3.14) і задовольняє умову

$$|y(\mathrm{t})| \le \frac{M^{'}}{1-\theta}.$$

Теорему 3.3 доведено.

3.2. Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

Дослідимо систему рівнянь (3.2) у випадку, коли $t \in \mathbb{R}^+$ і виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1, i = 1,...,m, q > 1;$
2. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')\right| \le L|y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}^+$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;
3. $\lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \dfrac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_5)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_5)\tilde{\lambda}^q} < 1,$ $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0,$

   $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,m\}$.

Має місце теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (3.2) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{3.19}$$

де $y_i(t), i = 0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції.

Оскільки

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt))\right) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt))$$

(що буде доведено пізніше), то підставивши (3.19) в (3.2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right)\right).$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i=0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1)=Jy_0(t), \tag{3.20$_0$}$$

$$y_1(t+1)=Jy_1(t)+\tilde{F}(t,y_0(qt)), \tag{3.20$_1$}$$

$$y_i(t+1)=Jy_i(t)+\tilde{F}\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j(qt)\right)-\tilde{F}\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j(qt)\right), i=2,3,..., \tag{3.20$_i$}$$

то ряд (3.19) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(3.20_i), i=0,1,...,$ можна показати, що вони мають розв'язки у вигляді формальних рядів

$$y_1(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}J^{-(j+1)}\tilde{F}(t+j,y_0(q(t+j))), \tag{3.21$_1$}$$

$$y_i(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}J^{-(j+1)}\left[\tilde{F}\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-1}y_j(q(t+j))\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-2}y_j(q(t+j))\right)\right], i=2,3,..., \tag{3.21$_i$}$$

де $y_0(t)$ є представлення загального розв'язку системи (3.20_0).

Для того, щоб (3.21_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (3.20_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1,2,...$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(\mathrm{t})|\le M\Delta^i\tilde{\lambda}^{qt}, i=1,2,.... \tag{3.22}$$

Приймаючи до уваги представлення загального розв'язку системи (3.20_0), отримуємо

$$|y_0(t)|\le M\tilde{\lambda}^t, \tag{3.23}$$

де $M=\max_i|\omega_i(t)|$.

Далі, з огляду на (3.23) та (3.21_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|J^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)))\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1} L \left|y_0(q(t+j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1} LM \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \le LM(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q})^{j} \le$$

$$\le M \frac{L(\lambda_*^{-1}+\delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q}} \tilde{\lambda}^{qt} \le M\Delta\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Таким чином, оцінка (3.22) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$.

Згідно з (3.21_{k+1}) і (3.22) маємо

$$|y_{k+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|J^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{k} y_j(q(t+j))) - \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t+j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1} L \left|y_k(q(t+j))\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}+\delta_5)^{j+1} LM\Delta^k \tilde{\lambda}^{q(q(t+j))} \le$$

$$\le LM\Delta^k (\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q^2}\right)^{j} \le$$

$$\le LM\Delta^k (\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q}\right)^{j} \le$$

$$\le M\Delta^k \frac{L(\lambda_*^{-1}+\delta_5)}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_5)\tilde{\lambda}^{q}} \tilde{\lambda}^{qt} \le M\Delta^{k+1}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Отже, оцінки (3.22) мають місце при всіх $i \ge 1$. Цим самим ми довели, що ряди (3.21_i), $i=1,2,\ldots$, рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1,2,\ldots$, які задовольняють оцінки (3.22). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (3.19), в якому вектор-функції $y_i(t), i=0,1,\ldots$, визначаються співвідношеннями (3.21_i), $i=0,1,\ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$\left|y(t)\right| \le \frac{M}{1-\Delta}\tilde{\lambda}^{t}.$$

Доведемо тепер, що

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt))\right) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Дійсно, оскільки співвідношення

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt))\right) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt))$$

виконуються при всіх $m \ge 1$, то внаслідок умови 2) теореми отримуємо

$$\left|\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt))\right| \le L\left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j(qt)\right| \le$$

$$\le L\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j(qt)\right| \le L\sum_{j=m+1}^{\infty} M\Delta^{j}\tilde{\lambda}^{qt} \le LM\frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Отже, в силу умови 3) знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $m \ge N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$LM\frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta}\tilde{\lambda}^{qt} \le \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \ge N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left|\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt))\right| \le \varepsilon,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{m} y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt))\right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^{+}$ і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt))$.

Теорему 3.4 доведено.

Розглянемо тепер систему рівнянь (3.2) у випадку, коли $t \le 0$ і виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i = 1,...,m, q > 1;$
2. $\left|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')\right| \le L\left|y' - y''\right|$, де $t \in \mathbb{R}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ – деяка додатна стала, $\tilde{F}(t,0) \equiv 0$;
3. $\overline{\lambda}^q > \lambda^*, 1 < \overline{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \dfrac{L\overline{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^* + \delta_6)\overline{\lambda}^{-q}} < 1,$ $\delta_6 = \delta_6(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,m\}, \lambda_* = \min\left\{\lambda_i, i = 1,...,m\right\};$

Має місце теорема.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (3.2) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3.2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t), \tag{3.24}$$

де $\overline{y}_i(t), i = 0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t \le 0$ вектор-функції.

Оскільки ряд

$$\tilde{F}(t, \overline{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1}\overline{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2}\overline{y}_j(qt))\right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ (доведення аналогічне тому, яке було проведене в теоремі 3.4) і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty}\overline{y}_j(qt))$, то підставивши (3.24) в (3.2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(t+1) = J\sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \overline{y}_0(t)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1}\overline{y}_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2}\overline{y}_j(qt)\right)\right).$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i=0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1)=J\bar{y}_0(t), \tag{3.25_0}$$

$$\bar{y}_1(t+1)=J\bar{y}_1(t)+\tilde{F}(t,\bar{y}_0(qt)), \tag{3.25_1}$$

$$\bar{y}_i(t+1)=J\bar{y}_i(t)+\tilde{F}(t,\sum_{j=0}^{i-1}\bar{y}_j(qt))-\tilde{F}(t,\sum_{j=0}^{i-2}\bar{y}_j(qt)), i=2,3,..., \tag{3.25_i}$$

то ряд (3.24) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3.2).

Згідно умовам теореми і представлення загального розв'язку системи (3.25_0) виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)|\le \bar{M}\bar{\lambda}^t.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(3.25_i), \mathrm{i}=1,2,...,$ можна показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t)=\sum_{j=1}^{\infty}J^{j-1}\left[\tilde{F}(t-j,\sum_{j=0}^{i-1}\bar{y}_j(q(t-j)))-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}(t-j,\sum_{j=0}^{i-2}\bar{y}_j(q(t-j)))\right], i=1,2,... \tag{3.26_i}$$

рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t), i=1,2,...,$ для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)|\le \bar{M}\Delta^i\bar{\lambda}^{qt}.$$

Звідси випливає, що ряд (3.24) рівномірно збігається при $t\le 0$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(\mathrm{t})$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(\mathrm{t})|\le \frac{\bar{M}}{1-\Delta}\bar{\lambda}^t.$$

Теорему 3.5 доведено.

3.3 Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку

Ввівши позначення

$$J_1 = diag(J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)),$$

$$J_2 = diag(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),...,J_m(\lambda_m)), m \le n,$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),..., y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),..., y_m(t)),$$

$$\tilde{F}(t, y) = (\tilde{F}^1(t, y), \tilde{F}^2(t, y))$$

перепишемо систему рівнянь (3.2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \tag{3.27}$$

Для системи (3.27) доведена така теорема:

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 1;$

2. $\lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \tilde{\lambda}^q < \lambda_*, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\},$

$$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\},$$

$$\theta = \max\left\{2L \cdot \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_7}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_7)\tilde{\lambda}^q}, 2L \cdot \frac{\lambda_{**}^{-1} + \delta_8}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_8)\tilde{\lambda}^q}\right\} < 1.$$

3. $\left|\tilde{F}^i(t, x', y') - \tilde{F}^i(t, x'', y'')\right| \le L(|x' - x''| + |y' - y''|), i = 1,2$*, де* $t \ge 0$,

$x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$*,* L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t, 0, 0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3.27) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \ge 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Доведення. Розв'язок системи (3.27) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t),$$
$$y^2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t), \tag{3.28}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t\geq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (що буде доведено пізніше)

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$
$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють $\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)$ і $\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)$ відповідно, то підставляючи (3.28) в (3.27), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t+1)=J_1\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t)+\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t+1)=J_2\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t)+\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...$ є розв’язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t), \end{aligned} \qquad (3.29_0)$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= J_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \\ y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \end{aligned} \qquad (3.29_1)$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \end{aligned} \qquad (3.29_i)$$

$$i = 2, 3, \dots,$$

то ряди (3.28) є формальним розв’язком системи рівнянь (3.27).

Приймаючи до уваги умови теореми і представлення загального розв’язку системи (3.29_0), можна переконатися, що існує сім’я розв’язків, яка задовольняє систему рівнянь (3.29_0) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left|y_0^1(t)\right| &\le M^1 \tilde{\lambda}^t, \\ \left|y_0^2(t)\right| &= 0, \end{aligned} \qquad (3.30_0)$$

де $M^1 = \max\left|\omega_1(t)\right|$.

Далі, з огляду на (3.29_1) та (3.30_0) отримаємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|J_1^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{F}^1(t+j, y_0^1(q(t+j)), y_0^2(q(t+j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_7)^{j+1} L(\left|y_0^1(q(t+j))\right| + \left|y_0^2(q(t+j))\right|) \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_7)^{j+1} L \left|y_0^1(q(t+j))\right| \le$$

$$\begin{aligned} &\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_7)^{j+1} L M^1 \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \le L M^1 \cdot \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_7}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_7)\tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \le M^1 \theta \tilde{\lambda}^{qt}, \\ &\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left|J_2^{-1}\right|^{j+1} \left|\tilde{F}^2(t+j, y_0^1(q(t+j)), y_0^2(q(t+j)))\right| \le \end{aligned} \qquad (3.30_1)$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)^{j+1}L\left(\left|y_0^1(q(t+j))\right|+\left|y_0^2(q(t+j))\right|\right)\le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)^{j+1}L\left|y_0^1(q(t+j))\right|\le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)^{j+1}LM^1\tilde{\lambda}^{q(t+j)}\le LM^1\cdot\frac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_8}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)\tilde{\lambda}^q}\tilde{\lambda}^{qt}\le M^1\theta\tilde{\lambda}^{qt},$$

де $\theta=\max\left\{2L\cdot\frac{\lambda_{*}^{-1}+\delta_7}{1-(\lambda_{*}^{-1}+\delta_7)\tilde{\lambda}^q},2L\cdot\frac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_8}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_8)\tilde{\lambda}^q}\right\}<1.$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.29_i) при $i=2,3,...,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}J_1^{-(j+1)}\left[\tilde{F}^1\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}^1\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right],$$

$$(3.31_i)$$

$$y_i^2(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}J_2^{-(j+1)}\left[\tilde{F}^2\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}^2\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right],$$

$$i=2,3,...$$

рівномірно збігаються при $t\ge 0$, задовольняють системи рівнянь (3.29_i) при $i=2,3,...,$ і виконуються оцінки

$$\left|y_i^1(\mathrm{t})\right|\le M^1\theta^i\tilde{\lambda}^{qt},\quad \left|y_i^2(\mathrm{t})\right|\le M^1\theta^i\tilde{\lambda}^{qt},\quad i=2,3,.... \qquad (3.30_i)$$

Звідси випливає, що ряди (3.28) рівномірно збігаються при $t\ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$, які є розв’язками системи рівнянь (3.27) і задовольняють умову

$$\left|y^1(\mathrm{t})\right| \le \frac{M^1}{1-\theta}\tilde{\lambda}^t, \left|y^2(\mathrm{t})\right| \le \frac{M^1}{1-\theta}\tilde{\lambda}^t.$$

Доведемо тепер, що

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \ge 1$ виконуються співвідношення

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

то внаслідок умови 2) теореми отримуємо

$$\left|\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right|\right)\le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^2(qt)\right|\right)\le L\sum_{j=m+1}^{\infty}2M^1\theta^i\tilde{\lambda}^{qt}\le 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde{\lambda}^{qt},$$

$$\left|\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right|\right)\le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^2(qt)\right|\right)\le L\sum_{j=m+1}^{\infty}2M^1\theta^i\tilde{\lambda}^{qt}\le 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde{\lambda}^{qt}.$$

Отже, в силу умови 3) знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $m\ge N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde{\lambda}^{qt}\le\varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m\ge N, t\in\mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\left|\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\le\varepsilon,$$

$$\left|\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\le\varepsilon,$$

і, отже, мають місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)=\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right),$$

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)=\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right).$$

Цим самим доведено, що ряди

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right),\ \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Теорему 3.6 доведено.

Аналогічну теорему можна довести у випадку, коли $t \le 0$.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 1;$

2. $1 < \bar{\lambda} < \lambda_{**}, \bar{\lambda}^q > \lambda^{**}, \theta = \max\left\{\frac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_9)}, \frac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^{**} + \delta_{10})}\right\} < 1,$

$\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\},$

$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}.$

3. $\left|\tilde{F}^i(t, x', y') - \tilde{F}^i(t, x'', y'')\right| \le L(|x' - x''| + |y' - y''|), i = 1,2,$ *де* $t \le 0$, $x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, L *– деяка додатна стала,* $\tilde{F}^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3.27) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $m - k$.

Доведення. Розв'язок системи (3.27) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$
$$y^2(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{3.32}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t\le 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (доведення аналогічне тому, яке було проведено у теоремі 3.6)

$$\tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$
$$\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^-$ і їх суми дорівнюють $\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ і $\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ відповідно, то підставляючи (3.32) в (3.27), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1)=J_1\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t)+\tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1)=J_2\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t)+\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,...$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{3.33_0}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= J_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \\ y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \end{aligned} \tag{3.33_1}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \end{aligned} \tag{3.33_i}$$

$$i = 2,3,...,$$

то ряди (3.32) є формальним розв'язком системи рівнянь (3.27).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що існують розв'язки, які задовольняють систему рівнянь (3.33_0) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left|y_0^1(t)\right| &= 0, \\ \left|y_0^2(t)\right| &\le M^2 \bar{\lambda}^t, \end{aligned} \tag{3.34_0}$$

де $M^2 = \max\left|\omega_2(t)\right|$.

Далі, з огляду на (3.33_1) та (3.34_0) отримаємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|J_1^{j-1}\right| \left|\tilde{F}^1(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_9)^{j-1} L \left|y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_9)^{j-1} L M^2 \bar{\lambda}^{q(t-j)} \le L M^2 \cdot \frac{1}{\lambda^* + \delta_9} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^* + \delta_9}{\bar{\lambda}^q}\right)^j \bar{\lambda}^{qt} \le$$

$$\le M^2 \cdot \frac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_9)} \cdot \bar{\lambda}^{qt} \le M^2 \theta \bar{\lambda}^{qt},$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|J_2^{j-1}\right|\left|\tilde{F}^2(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**}+\delta_{10})^{j-1} L\left|y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**}+\delta_{10})^{j-1} LM^2\bar{\lambda}^{q(t-j)} \le LM^2 \cdot \frac{1}{\lambda^{**}+\delta_{10}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{**}+\delta_{10}}{\bar{\lambda}^q}\right)^j \bar{\lambda}^{qt} \le$$

$$\le M^2 \cdot \frac{L}{\bar{\lambda}^q-(\lambda^{**}+\delta_{10})} \cdot \bar{\lambda}^{qt} \le M^2\theta\bar{\lambda}^{qt},$$

де $\theta = \max\left\{\frac{L}{\bar{\lambda}^q-(\lambda^{*}+\delta_9)}, \frac{L}{\bar{\lambda}^q-(\lambda^{**}+\delta_{10})}\right\}.$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3.33_i) при $i = 2,3,...,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1}\left[\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j))\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j))\right)\right],$$

$$(3.35_i)$$

$$y_i^2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_2^{j-1}\left[\tilde{F}^2\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j))\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j))\right)\right],$$

$$i = 2,3,...$$

рівномірно збігаються при $t \le 0$, задовольняють системи рівнянь (3.33_i) при $i = 2,3,...,$ і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} &\left|y_i^1(\mathrm{t})\right| \le M^2\theta^i\bar{\lambda}^{qt}, \\ &\left|y_i^2(\mathrm{t})\right| \le M^2\theta^i\bar{\lambda}^{qt}, \end{aligned} \quad i = 2,3,.... \qquad (3.34_i)$$

Звідси випливає, що ряди (3.32) рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (3.27) і задовольняють умову

$$\left|y^1(\mathrm{t})\right| \le \frac{M^2}{1-\theta}\bar{\lambda}^t, \left|y^2(\mathrm{t})\right| \le \frac{M^2}{1-\theta}\bar{\lambda}^t.$$

Теорему 3.7 доведено.

ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ

Даний розділ присвячений дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt))$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$-матриця, q – дійсна стала, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція.

Серед основних результатів цього розділу відмітимо наступні:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків при $t \in \mathbb{R}$, розроблено метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини у критичному та у гіперболічному випадках;

– побудовано сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків, що залежить від 1-періодичної функції;

– побудовано сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків у гіперболічному випадку.

РОЗДІЛ IV

ОБМЕЖЕНІ НА ВСІЙ ДІЙСНІЙ ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

В даному розділі досліджується питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків нелінійних функціонально різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{4.1}$$

де A, q – деякі дійсні сталі, $t \in \mathbb{R}, F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Встановлюються достатні умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків рівняння (4.1) і пропонується метод їх побудови.

Спочатку розглянемо питання про існування неперервного обмеженого при $t \in \mathbb{R}$ розв'язку рівняння (4.1). Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція $F(t, x)$ є неперервною при всіх $t, x \in \mathbb{R}$ і задовольняє умові*

$$\left|F(t, \bar{x}) - F(t, \bar{\bar{x}})\right| \le L\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|,$$

де $L = const > 0, t, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}$;

2. $\sup\limits_t \left|F(t, 0)\right| = M < \infty$;

3. $0 < a = |A| < 1, 0 < a + L = \Delta < 1, q \ne 0$.

Тоді рівняння (4.1) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\gamma(t)$.

Доведення. Побудуємо послідовність функцій

$$\begin{gathered} x_0(t+1) = F(t, 0), \\ x_i(t+1) = Ax_{i-1}(t) + F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-1}(qt)) - F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-2}(qt)), \\ i = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{4.2}$$

де $x_{-1}(t) \equiv 0$, і покажемо, що виконуються оцінки

$$\begin{gathered}|x_0(t)| \le M,\\ |x_i(t)| \le M\Delta^i, i \ge 1.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Дійсно, оскільки із (4.2) випливають співвідношення

$$x_0(t) = F(t-1,0),$$

$$x_i(t) = Ax_{i-1}(t-1) + F(t-1, x_0(q(t-1)) + ... + x_{i-1}(q(t-1))) -$$

$$-F(t-1, x_0(q(t-1)) + ... + x_{i-2}(q(t-1))), i \ge 1,$$

$$x_{-1}(t) \equiv 0,$$

то приймаючи до уваги умови теореми, послідовно знаходимо:

$$|x_0(t)| = |F(t-1,0)| \le M,$$

$$|x_1(t)| \le |A||x_0(t-1)| + |F(t-1, x_0(q(t-1))) - F(t-1,0)| \le$$

$$\le aM + LM \le M(a+L) = M\Delta,$$

....

$$|x_i(t)| \le |A||x_{i-1}(t-1)| + |F(t-1, x_0(q(t-1)) + ... + x_{i-1}(q(t-1))) -$$

$$-F(t-1, x_0(q(t-1)) + ... + x_{i-2}(q(t-1)))| \le$$

$$\le aM\Delta^{i-1} + LM\Delta^{i-1} \le M\Delta^{i-1}(a+L) = M\Delta^i.$$

Таким чином, оцінки (4.3) виконуються при всіх $t \in \mathbb{R}$ і $i \ge 0$. Тоді безпосередньо із (4.3) випливає, що ряд

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\gamma(t)$, яка задовольняє умові

$$|\gamma(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}.$$

Більше цього, покажемо, що функція $\gamma(t)$ є розв'язком рівняння (4.1). Дійсно, в силу (4.2) для цього достатньо показати, що ряд

$$F(\mathrm{t},0) + \sum_{i=0}^{\infty}\left[F(t, x_0(qt) + ... + x_i(qt)) - F(t, x_0(qt) + ... + x_{i-1}(qt))\right],$$

де $x_{-1}(t)\equiv 0,$ рівномірно збігається при всіх $t\in\mathbb{R}$ і його сумою є функція

$$F(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)).$$

Для цього, в свою чергу, достатньо довести, що при всіх $t\in\mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}F(t,\sum_{i=0}^{m}x_i(qt))=F(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)). \tag{4.4}$$

Дійсно, в силу (4.3) для довільного, як завгодно малого $\varepsilon>0$, можна вказати натуральне $\mathbb{N}$ таке, що при $m\geq\mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\frac{ML}{1-\Delta}\Delta^{m+1}\leq\varepsilon.$$

Тоді, приймаючи до уваги умову 1) теореми, при всіх $m\geq\mathbb{N}$ отримуємо

$$\left|F(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt))-F(t,\sum_{i=0}^{m}x_i(qt))\right|\leq L\sum_{i=m+1}^{\infty}\left|x_i(qt)\right|\leq LM\Delta^{m+1}\sum_{i=0}^{\infty}\Delta^i\leq M\Delta^{m+1}\frac{L}{1-\Delta}\leq\varepsilon.$$

Таким чином, при всіх $t\in\mathbb{R}$ співвідношення (4.4) має місце. Цим самим доведено, що при всіх $t\in\mathbb{R}$ виконується тотожність

$$F(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt))=F(t,0)+[F(t,x_0(qt))-F(t,0)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}[F(t,x_0(qt)+\ldots+x_i(qt))-F(t,x_0(qt)+\ldots+x_{i-1}(qt))].$$

Нехай існує ще один неперервний обмежений при $t\in\mathbb{R}$ розв'язок $\bar{\gamma}(t)$ рівняння (4.1). Тоді виконується співвідношення $\|\gamma(\mathrm{t})-\bar{\gamma}(\mathrm{t})\|=0$, де $\|\gamma(t)\|=\sup\limits_{t}|\gamma(t)|$, що можливо лише при $\gamma=\bar{\gamma}$. Отримане протиріччя доводить єдиність розв'язку.

Виконуючи в (4.1) заміну змінних

$$x(t)=y(t)+\gamma(t), \tag{4.5}$$

де $\gamma(t)$ – побудований вище розв'язок рівняння (4.1), отримаємо рівняння для $y(t)$:

$$y(t+1) = Ay(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{4.6}$$

де $\tilde{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \gamma(qt)) - F(t, \gamma(qt)), \tilde{F}(t,0) \equiv 0,$ яке має, очевидно, розв'язок $y(t) \equiv 0$. Покажемо, що при $t \in \mathbb{R}^+$ для рівняння (4.6) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і* $A > 0, q > 1$. *Тоді рівняння (4.6) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної періодичної функції періоду 1.*

Доведення. Побудуємо послідовність рівнянь

$$\begin{gathered} y_i(t+1) = Ay_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-1}(qt)) - \\ -\tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-2}(qt)), i \geq 1, \\ y_0(t) = A^t \omega(t), \end{gathered} \tag{4.7}$$

де $\omega(t)$ – довільна неперервна 1-періодична функція, $y_{-1}(t) \equiv 0$, і доведемо, що ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{4.8}$$

рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (4.6).

Легко переконатися, що рівняння (4.7) мають формальні розв'язки

$$\begin{gathered} y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \Big[\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_{i-1}(q(t+j))) - \\ -\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_{i-2}(q(t+j))) \Big], i = 1,2,..., \\ y_0(t) = A^t \omega(t), \end{gathered} \tag{4.9}$$

Покажемо, що ряди (4.9) рівномірно збігаються при $t \geq 0$ і виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i A^t, i \geq 0, \tag{4.10}$$

де $\Delta = \dfrac{L}{A - A^q} < 1.$

Дійсно, оцінка (4.10) виконується при $i=0$, тоді в силу (4.9) і умов 1) – 3) маємо

$$\left|y_1(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \left|F(t+j, y_0(q(t+j)) + \gamma(q(t+j))) - F(t+j, \gamma(q(t+j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} L \left|y_0(q(t+j))\right| \le L \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} M A^{q(t+j)} \le MLA^{qt-1} \sum_{j=0}^{\infty} A^{(q-1)j} \le$$

$$\le MLA^{qt-1} \frac{1}{1-A^{q-1}} \le ML \frac{A^{-1}}{1-A^{q-1}} A^{qt} \le M\Delta A^{t}.$$

Нехай оцінки (4.10) доведені уже при $i=1,2,...,k$. Тоді в силу (4.9) і умов 1) – 3) маємо

$$\left|y_{k+1}(t)\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \left|\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + ... + y_k(q(t+j))) - \right.$$

$$\left. - \tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + ... + y_{k-1}(q(t+j)))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} L \left|y_k(q(t+j))\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} LM\Delta^k A^{q(t+j)} \le M\Delta^k A^{-1} A^{qt} L \sum_{j=0}^{\infty} A^{(q-1)j} \le$$

$$\le M\Delta^k A^{qt} L \frac{A^{-1}}{1-A^{q-1}} \le M\Delta^{k+1} A^{t}.$$

Отже, оцінки (4.10) мають місце при всіх $i \ge 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4.8) рівномірно збігається при всіх $t \ge 0$ до деякої неперервної при $t \ge 0$ функції $y(t)$, яка є розв’язком рівняння (4.6) і такою, що виконується нерівність

$$y(\mathrm{t}) \le \frac{M}{1-\Delta} A^{t}.$$

Для цього достатньо довести, що виконується співвідношення

$$\tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt)) \equiv \tilde{F}(t,0) + [\tilde{F}(t, y_0(qt)) - \tilde{F}(t,0)] + ...,$$

що робиться аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 4.1.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови 1) - 3) і* $A<0, q>1$. *Тоді рівняння (4.6) має сім’ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^{+}$ *розв’язків, що* *залежить від довільної неперервної функції* $\omega(t)$, *яка задовольняє умові* $\omega(t+1) = -\omega(t)$.

Якщо побудувати послідовність рівнянь

$$y_i(t+1) = Ay_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt) + ... + y_{i-1}(qt)) - \tilde{F}(t, y_0(qt) + ... + y_{i-2}(qt)), i \geq 1, \quad (4.11)$$

$$y_0(t) = |A|^t \omega(t),$$

де $\omega(t)$ – довільна неперервна функція, що задовольняє умові $\omega(t+1) = -\omega(t)$, $y_{-1}(t) \equiv 0$, то аналогічно доведенню теореми 4.2 можна довести, що ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)$$

рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (4.6).

При доведенні теореми 4.1 припускалось виконання умови 3), яка досить помітно обмежує її загальність. В силу цього виникає природнє питання – чи можна довести аналогічне твердження у випадку, коли ця умова не виконується. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови:*

1. *Функція* $F(t,x)$ *є неперервною при всіх* $t, x \in \mathbb{R}$ *і задовольняє умові* $|F(t,x') - F(t,x'')| \leq L|x' - x''|$, *де* $L = const > 0, t, x', x'' \in \mathbb{R}$;
2. $\sup_t |F(t,0)| = M < \infty$;
3. $|A| > 1, |A^{-1}| < 1, \dfrac{L|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} = \theta < 1, q \neq 0$.

Тоді рівняння (4.1) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\chi(t)$.

Доведення. Розглянемо послідовність рівнянь

$$x_0(t+1)=Ax_0(t)+F(t,0),$$
$$x_i(t+1)=Ax_i(t)+F(t,x_0(qt)+\ldots+x_{i-1}(qt))-F(t,x_0(qt)+\ldots+x_{i-2}(qt)), i\geq 1, \tag{4.12}$$

де $x_{-1}(t)=0$, і покажемо, що вони мають неперервні обмежені при $t\in\mathbb{R}$ розв'язки, які задовольняють умовам

$$|x_i(t)|\leq \tilde{M}\theta^i, i=0,1,..., \tag{4.13}$$

де $\tilde{M}=M\dfrac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}$.

Дійсно, легко переконатися, що рівняння (4.12) мають формальні розв'язки

$$x_0(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}A^{-(j+1)}F(t+j,0),$$

$$x_i(t)=-\sum_{j=0}^{\infty}A^{-(j+1)}\left[F(t+j,x_0(q(t+j))+\ldots+x_{i-1}(q(t+j)))-\right. \tag{4.14}$$
$$\left.-\tilde{F}(t+j,x_0(q(t+j))+\ldots+x_{i-2}(q(t+j)))\right], i\geq 1,$$

де $x_{-1}(t)=0$. Приймаючи до уваги умови теореми, знаходимо

$$|x_0(t)|\leq |A^{-1}|M\sum_{j=0}^{\infty}|A^{-1}|^j\leq M\frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}=\tilde{M}.$$

Отже, оцінка (4.13) виконується при $i=0$. Розмірковуючи по індукції, припустимо, що вона доведена уже при $i=0,1,...,k$. Тоді в силу (4.14) і умов теореми, получимо

$$|x_{k+1}(t)|\leq |A^{-1}|\sum_{j=0}^{\infty}|A^{-j}[F(t+j,\mathrm{x}_0(q(t+j))+\ldots+x_k(q(t+j)))-$$
$$-F(t+j,\mathrm{x}_0(q(t+j))+\ldots+x_{k-1}(q(t+j)))]|\leq$$
$$\leq |A^{-1}|L\sum_{j=0}^{\infty}|A^{-1}|^j|x_k(q(t+j))|\leq |A^{-1}|L\tilde{M}\theta^k\sum_{j=0}^{\infty}|A^{-1}|^j\leq \tilde{M}\theta^k\frac{L|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}\leq \tilde{M}\theta^{k+1}.$$

Таким чином, оцінки (4.13) виконуються при всіх $i\geq 0$ і $t\in\mathbb{R}$.

Безпосередньо із (4.13) випливає, що ряд

$$\chi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \tag{4.15}$$

рівномірно збігається до деякої неперервної обмеженої при $t \in \mathbb{R}$ функції $\chi(t)$, яка є розв'язком рівняння (4.1) (доведення цього твердження є аналогічним тому, яке було проведене при доведенні теореми 4.1).

Виконуючи в (4.1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \chi(t),$$

де $\chi(t)$ – неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок (4.15), отримаємо рівняння

$$y(t+1) = Ay(t) + \bar{F}(t, y(qt)), \tag{4.16}$$

де $\bar{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \chi(qt)) - F(t, \chi(qt)),$ яке має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t) \equiv 0$. Для рівняння (4.16) має місце наступна теорема.

Теорема 4.5 . *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4 і* $A > 0, q > 1$. *Тоді рівняння (4.16) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції.*

Доведення. Побудуємо послідовність рівнянь

$$\begin{gathered} y_0(t+1) = Ay_0(t), \\ y_i(t+1) = Ay_i(t) + \bar{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-1}(qt)) - \\ -\bar{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-2}(qt)), i \geq 1, \end{gathered} \tag{4.17}$$

де $y_{-1}(t) = 0$, і доведемо, що вони мають неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язки $y_i(t), i = 0,1,\ldots$ такі, що ряд

$$\chi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{4.18}$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ до деякої неперервної обмеженої функції $\bar{\chi}(t)$, яка є розв'язком рівняння (4.16).

Легко безпосередньо переконатися, що рівняння (4.17) мають формальні розв'язки

$$y_0(t)=A^t\omega(t),$$

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1}\Big[\bar F(t-j,y_0(q(t-j))+\ldots+y_{i-1}(q(t-j)))- \tag{4.19}$$

$$-\bar F(t-j,y_0(q(t-j))+\ldots+y_{i-2}(q(t-j)))\Big],i=1,2,\ldots,$$

де $\omega(t)$ – довільна неперервна 1-періодична функція.

Покажемо, що при всіх $i\geq 0$ і $t\in\mathbb{R}^-$ виконуються оцінки

$$\left|y_i(t)\right|\leq \bar M\theta^i A^t, \tag{4.20}$$

де $\theta=\dfrac{L}{A^q-A}$.

Дійсно, оцінка (4.20) виконується при $i=0$. Тоді приймаючи до уваги (4.19) і умови теореми, послідовно отримуємо

$$\left|y_1(t)\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}A^{(j-1)}\left|\bar F(t-j,y_0(q(t-j)))\right|=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}A^{(j-1)}\left|F(t-j,y_0(q(t-j))+\bar\chi(q(t-j)))-F(t-j,\bar\chi(q(t-j)))\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1}L\left|y_0(q(t-j))\right|\leq L\bar M\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1}A^{q(t-j)}\leq \bar M L A^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}A^{(1-q)j-1}\leq$$

$$\leq \bar M A^{qt}\frac{LA^{-q}}{1-A^{1-q}}\leq \bar M\theta A^{qt}\leq \bar M\theta A^t,$$

……………………………………………………………………

$$\left|y_i(t)\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1}L\left|y_{i-1}(q(t-j))\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1}L\bar M\theta^{i-1}A^{q(t-j)}\leq \bar M L\theta^{i-1}(\sum_{j=1}^{\infty}A^{j-1-qj})A^{qt}\leq$$

$$\leq \bar M\theta^{i-1}A^{qt}\frac{L}{A^q-A}=\bar M\theta^i A^{qt}\leq \bar M\theta^i A^t.$$

Таким чином, оцінки (4.20) виконуються при всіх $i\geq 0$ і $t\in\mathbb{R}^-$. Звідси випливає, що ряд (4.18) рівномірно збігається при всіх $t\leq 0$ до деякої неперервної обмеженої при $t\leq 0$ функції $\bar\chi(t)$. Аналогічно доведенню теореми 4.1 можна довести, що функція $\bar{\chi}(t)$ задовольняє рівняння (4.16). Теорема 4.5 доведена.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 4 і* $A < 0, q > 1$ *. Тоді рівняння (4.16) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків, яка залежить від довільної неперервної функції* $\bar{\varpi}(t)$*, яка задовольняє умові* $\bar{\varpi}(t+1) = -\bar{\varpi}(t)$.

Доведення теореми 4.6 аналогічне доведенню теореми 4.5.

Розглянемо тепер систему функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{4.21}$$

де A – дійсна (n×n) - матриця, $q = const > 0$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Припустимо, що власні числа $\lambda_i, i = 1,...,n$, матриці A задовольняють умовам:

$$|\lambda_i| \neq 0,1,$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1,...,n.$$

Тоді існує неособлива заміна змінних

$$x(t) = Cy(t), \tag{4.22}$$

яка приводить систему (4.21) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{4.23}$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_n), \tilde{F}(t, y(qt)) = C^{-1}F(t, Cy(qt))$.

Дослідимо систему (4.23) у випадку, коли виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,n;$

2. вектор-функція $\tilde{F}(t, y)$ задовольняє умові

$$\left|\tilde{F}(t, \bar{y}) - \tilde{F}(t, \bar{\bar{y}})\right| \leq L\left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right|,$$

де $L = const > 0, (t, \bar{y}), (t, \bar{\bar{y}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tilde{F}(0,0) = 0.$

Якщо позначити

$$\Lambda_1 = diag(\lambda_1,...,\lambda_k), \Lambda_2 = diag(\lambda_{k+1},...,\lambda_n),,$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) = (y_1(t),..., y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),..., y_n(t)),$$

$$\tilde{F}(t, y) = (\tilde{F}^1(t, y), \tilde{F}^2(t, y)),$$

$$\tilde{F}^1(t, y) = (\tilde{F}_1(t, y),..., \tilde{F}_k(t, y)), \tilde{F}^2(t, y) = (\tilde{F}_{k+1}(t, y),..., \tilde{F}_n(t, y)),$$

то систему рівнянь (4.23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= \Lambda_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= \Lambda_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Для системи рівнянь (4.24) мають місце наступні теореми.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1)-2), а також*

3. $q > 1, \lambda^{*q} < \lambda_*, \theta = \max\left\{2L \cdot \dfrac{1}{\lambda_* - \lambda^{*q}}, 2L \cdot \dfrac{1}{\lambda_{**} - \lambda^{*q}}\right\} < 1,$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,..., k\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,..., k\},$$

$$\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,..., n\}.$$

Тоді система рівнянь (4.24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Доведення. Розв'язки системи (4.24) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{4.25}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ – деякі неперервні й обмежені при $t \geq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (що буде доведено пізніше)

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde F^2(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right) \text{ і } \tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)$$

відповідно, то підставляючи (4.25) в (4.24), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t+1)=\Lambda_1\sum_{i=0}^{\infty}y_i^1(t)+\tilde F^1(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t+1)=\Lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}y_i^2(t)+\tilde F^2(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t),y_i^2(t),i=0,1,...$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned}y_0^1(t+1)&=\Lambda_1y_0^1(t),\\ y_0^2(t+1)&=\Lambda_2y_0^2(t),\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}y_1^1(t+1)&=\Lambda_1y_1^1(t)+\tilde F^1(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt)),\\ y_1^2(t+1)&=\Lambda_2y_1^2(t)+\tilde F^2(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt)),\end{aligned}\tag{4.27}$$

$$y_i^1(t+1)=\Lambda_1y_i^1(t)+\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right),$$

$$i=2,3,..., \tag{4.28}$$

$$y_i^2(t+1)=\Lambda_2 y_i^2(t)+\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right),$$

то ряди (4.25) є формальним розв’язком системи рівнянь (4.24).

Приймаючи до уваги умови теореми і представлення загального розв’язку системи (4.26), можна переконатися, що існує сім’я розв’язків, яка задовольняє систему рівнянь (4.26) і виконуються оцінки

$$\begin{gathered}\left|y_0^1(t)\right|\le M^1\lambda^{*t},\\ \left|y_0^2(t)\right|=0,\end{gathered}\tag{4.29}$$

де $M^1=\max\left|\omega_1(t)\right|$.

Далі, з огляду на (4.27) та (4.29) отримаємо

$$\begin{gathered}\left|y_1^1(t)\right|\le\sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda_1^{-1}\right|^{j+1}\left|\tilde F^1(t+j,y_0^1(q(t+j)),y_0^2(q(t+j)))\right|\le\\ \le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1})^{j+1}L(\left|y_0^1(q(t+j))\right|+\left|y_0^2(q(t+j))\right|)\le\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_*^{-(j+1)}L\left|y_0^1(q(t+j))\right|\le\\ \le\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_*^{-(\mathrm{j}+1)}LM^1\lambda^{*q(t+j)}\le LM^1\lambda_*^{-1}\lambda^{*qt}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j\le\\ \le LM^1\cdot\frac{1}{\lambda_*-\lambda^{*q}}\lambda^{*qt}\le M^1\theta\lambda^{*qt},\\ \left|y_1^2(t)\right|\le\sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda_2^{-1}\right|^{j+1}\left|\tilde F^2(t+j,y_0^1(q(t+j)),y_0^2(q(t+j)))\right|\le\\ \le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1})^{j+1}L(\left|y_0^1(q(t+j))\right|+\left|y_0^2(q(t+j))\right|)\le\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{**}^{-(j+1)}L\left|y_0^1(q(t+j))\right|\le\\ \le\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{**}^{-(\mathrm{j}+1)}LM^1\lambda^{*q(t+j)}\le LM^1\cdot\frac{1}{\lambda_{**}-\lambda^{*q}}\lambda^{*qt}\le M^1\theta\lambda^{*qt},\end{gathered}\tag{4.30}$$

де $\theta=\max\left\{2L\cdot\dfrac{1}{\lambda_*-\lambda^{*q}},2L\cdot\dfrac{1}{\lambda_{**}-\lambda^{*q}}\right\}<1.$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (4.28) при $i=2,3,...,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_1^{-(j+1)} \left[\tilde{F}^1 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t+j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t+j)) \right) \right],$$

$$i = 2,3,..., \quad (4.31)$$

$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} \left[\tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t+j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2 \left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t+j)) \right) \right]$$

рівномірно збігаються при $t \geq 0$, задовольняють системи рівнянь (4.28) при $i = 2,3,...,$ і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| y_i^1(\mathrm{t}) \right| &\leq M^1 \theta^i \lambda^{*qt}, \\ \left| y_i^2(\mathrm{t}) \right| &\leq M^1 \theta^i \lambda^{*qt}, \end{aligned} \quad i = 2,3,.... \quad (4.32)$$

Звідси випливає, що ряди (4.25) рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (4.24) і задовольняють умову

$$\left| y^1(\mathrm{t}) \right| \leq \frac{M^1}{1-\theta} \lambda^{*t}, \left| y^2(\mathrm{t}) \right| \leq \frac{M^1}{1-\theta} \lambda^{*t}.$$

Доведемо тепер, що

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right) \right) =$$

$$= \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right) \right) =$$

$$=\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right).$$

Дійсно, оскільки при всіх $m\geq 1$ виконуються співвідношення

$$\tilde{F}^{1}(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^{1}\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^{1}\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)=$$

$$=\tilde{F}^{1}\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde{F}^{2}(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)=$$

$$=\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right).$$

то внаслідок умов теореми отримуємо

$$\left|\tilde{F}^{1}\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^{1}\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right|\right)\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^2(qt)\right|\right)\leq L\sum_{j=m+1}^{\infty}2M^1\theta^i\lambda^{*qt}\leq 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\lambda^{*qt},$$

$$\left|\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^{2}\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right|\right)\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^2(qt)\right|\right)\leq L\sum_{j=m+1}^{\infty}2M^1\theta^i\lambda^{*qt}\leq 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\lambda^{*qt}.$$

Отже, в силу умови 3) знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $m \ge N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$2LM^1 \frac{\theta^{m+1}}{1-\theta} \lambda^{*qt} \le \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \ge N, t \in \mathbb{R}^+$ виконуються нерівності

$$\left| \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt) \right) \right| \le \varepsilon,$$

$$\left| \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt) \right) \right| \le \varepsilon,$$

і, отже, мають місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt) \right) = \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right),$$

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt) \right) = \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right).$$

Цим самим доведено, що ряди

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right) \right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right) \right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right),\ \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) \right).$$

Теорему 4.7 доведено.

Аналогічну теорему можна довести у випадку, коли $t \le 0$.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови 1)-2) і умова*

3) $q>1, \lambda_{**}^{q}>\lambda^{**}, \theta=\max\left\{\frac{2L}{\lambda_{**}^{q}-\lambda^{*}}, \frac{2L}{\lambda_{**}^{q}-\lambda^{**}}\right\}, \lambda^{*}=\max\{\lambda_i, i=1,\ldots,k\},$

$\lambda^{**}=\max\{\lambda_j, j=k+1,\ldots,n\}, \lambda_{**}=\min\{\lambda_j, j=k+1,\ldots,n\}.$

Тоді система рівнянь (4.24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t\le 0$ *розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $n-k$.

Доведення. Розв'язок системи (4.24) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t)&=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),\\ y^2(t)&=\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{4.33}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i=0,1,\ldots,$ – деякі неперервні й обмежені при $t\le 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (доведення аналогічне тому, яке було проведено у теоремі 4.7)

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt))+$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t\in\mathbb{R}^-$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) \text{ і } \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$$

відповідно, то підставляючи (4.33) в (4.24), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = \Lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = \Lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= \Lambda_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= \Lambda_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= \Lambda_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \\ y_1^2(t+1) &= \Lambda_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$y_i^1(t+1) = \Lambda_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) -$$

$$-\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right),$$

$$i = 2,3,..., \tag{4.36}$$

$$y_i^2(t+1) = \Lambda_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) -$$

$$-\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right),$$

то ряди (4.33) є формальним розв'язком системи рівнянь (4.24).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що існують розв'язки, які задовольняють систему рівнянь (4.34) і виконуються оцінки

$$\left|y_0^1(t)\right| = 0,$$
$$\left|y_0^2(t)\right| \le M^2 \lambda_{**}^t, \tag{4.37}$$

де $M^2 = \max\left|\omega_2(t)\right|$.

Далі, з огляду на (4.35) та (4.37) отримаємо

$$\left|y_1^1(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\Lambda_1^{j-1}\right|\left|\tilde{F}^1(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^*)^{j-1} L \left|y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^*)^{j-1} L M^2 \lambda_{**}^{q(t-j)} \le LM^2 \cdot \frac{1}{\lambda^*} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^*}{\lambda_{**}^q}\right)^j \lambda_{**}^{qt} \le$$

$$\le M^2 \cdot \frac{L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*} \cdot \lambda_{**}^{qt} \le M^2 \theta \lambda_{**}^{qt},$$

$$\left|y_1^2(t)\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\Lambda_2^{j-1}\right|\left|\tilde{F}^2(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**})^{j-1} L \left|y_0^2(q(t-j))\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**})^{j-1} L M^2 \lambda_{**}^{q(t-j)} \le LM^2 \cdot \frac{1}{\lambda^{**}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{**}}{\lambda_{**}^q}\right)^j \lambda_{**}^{qt} \le$$

$$\le M^2 \cdot \frac{L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}} \cdot \lambda_{**}^{qt} \le M^2 \theta \lambda_{**}^{qt},$$

де $\theta = \max\left\{\frac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*}, \frac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}}\right\}$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (4.36) при $i = 2,3,...,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\Lambda_1^{j-1}\left[\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j))\right) - \right.$$
$$\left. - \tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j))\right)\right],$$
$$\tag{4.38}$$
$$y_i^2(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\Lambda_2^{j-1}\left[\tilde{F}^2\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j))\right) - \right.$$

$$-\tilde{F}^2\left(t-j,\sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)),\sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j))\right)\Bigg],$$

$$i=2,3,...$$

рівномірно збігаються при $t\le 0$, задовольняють системи рівнянь (4.36) при $i=2,3,...,$ і виконуються оцінки

$$\begin{aligned}&\left|y_i^1(\mathrm{t})\right|\le M^2\theta^i\lambda_{**}^{qt},\\&\left|y_i^2(\mathrm{t})\right|\le M^2\theta^i\lambda_{**}^{qt},\end{aligned}\qquad i=2,3,.... \tag{4.39}$$

Звідси випливає, що ряди (4.33) рівномірно збігаються при $t\le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (4.24) і задовольняють умову

$$\left|y^1(\mathrm{t})\right|\le\frac{M^2}{1-\theta}\lambda_{**}^{t},\left|y^2(\mathrm{t})\right|\le\frac{M^2}{1-\theta}\lambda_{**}^{t}.$$

Теорему 4.8 доведено.

ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ

В даному розділі досліджено питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків нелінійних функціонально різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)),$$

де A, q - деякі дійсні сталі, $t \in \mathbb{R}, F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Встановлено достатні умови існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків цього рівняння і запропонований метод їх побудови.

Основними результатами є наступні:

– встановлені умови існування єдиного неперервного обмеженого при $t \in \mathbb{R}$ розв'язку і запропоновано метод його побудови;

– досліджені умови побудови сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків даної системи;

– встановлено умови існування сім'ї неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-)$ розв'язків у гіперболічному випадку, досліджено структуру їх множини та запропонований метод побудови таких розв'язків.

ВИСНОВКИ

В даний час основні зусилля наукового середовища зосереджуються переважно на вивченні різницевих рівнянь з дискретним аргументом. Але розвиток теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом є не менш актуальною задачею, корисність якої викликана як потребами самої теорії різницевих рівнянь, так і потребами прикладного характеру. Саме тому у даній роботі досліджено властивості неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь з неперервним аргументом.

При цьому одержано наступні нові результати:

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– побудовано сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків систем різницевих рівнянь з лінійним відхиленням аргументу;

– встановлено умови існування неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь;

– встановлено структуру множини неперервних обмежених розв'язків різницевих і функціонально-різницевих рівнянь у гіперболічному випадку;

– встановлено умови існування обмежених на всій дійсній осі розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено їх властивості.

Отримані в дисертаційній роботі результати доповнюють результати робіт багатьох математиків і сприятимуть подальшому розвитку теорії різницевих рівнянь. Вони також можуть використовуватись при дослідженні задач теорії керування, біології та в інших галузях науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Adams C.R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations / C.R. Adams // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – Vol. 30, №3. – P. 507-541.

2. *Agarwal R.P.* On stable periodic solutions of difference equations / R.P. Agarwal, E.Yu. Romanenko // Appl. Math. Lett. – 1998. – 11, №4. – P.81- 84.

3. *Agarwal R.P.* Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications. Second Edition, Revised and Expanded / R.P. Agarwal. – 2000. – 971 P.

4. *Antonevich A.* Linear Functional Equations. Operator Approach. / A. Antonevich. // Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 83. – Birkhuser, 2012. – 184 p.

5. *Betsko I. V*. On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No. 3. – P. 205-213.

6. *Betsko I. V*. On the solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis and their properties / I. V. Betsko, H. P. Pelyukh // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 6. – P. 691-711.

7. *Betsko I. V*. On continuous solutions of systems of nonlinear functional-difference equations / I. V. Betsko // Book of Abstracts. International Conference «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications», (Ukraine, Cherkasy, 17–19, October, 2017). – Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy. – 2017. – p. 57.

8. *Birkhoff G.D.* General theory of Linear Difference Equations / G.D. Birkhoff // Trans. Amer. Soc. – 1911. – 12, №2. – P. 242-284.

9. *Birkhoff G.D.* Formal theory of irregualar linear difference equations / G.D. Birkhoff // Acta math. – 1930. – 54. – P. 205-246.

10. *Birkhoff G.D.* Analytic theory of singular difference equations / G.D. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky // Acta math. – 1932. – 60. – P. 1-89.

11. *Castillo E.* Functional Equations and Modelling in Science and Engineering. / E. Castillo, M. Reyes Ruiz-Cobo. – Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Vol. 161. - 1992. – 307 p.

12. Castillo Ron E. Ecuaciones funcionales y modelización en ciencia, ingeniería y economía. / E. Castillo Ron, ι M. Reyes Ruiz Cobo. – Reverte, 1993.– 360 p.

13. *Guldberg A.* Theorie der linearen differenzengleichungen / A. Guldberg, G. Wallenberg. – Berlin, 1911. – 288 p.

14. *Gumowski I.* Recurrences and discrete dynamic systems / I. Gumowski, C. Mira. – Berlin, 1980. – 272 p.

15. *Kolmanovskii V. B.* Control of Systems with After-effect . / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet . – Translations of Mathematical Monographs – 1996. – 340 p.

16. *Kuczma M.* Iterative Functional Equations. / M. Kuczma, B. Choczewski, R.Ger. – Encyclopaedia of Mathematics and its Applications. – Vol. 32. – Cambridge University Press. – 1990. – 552 p.

17. *Lakshmikantham V.* Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations. / V. Lakshmikantham. – Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. – Vol.90. – CRC Press, 1984. – 564 p.

18. *Martynyk D.I.* Periodic solutions of one class systems of dierence equations / D.I. Martynyk, N.A. Perestyuk, L.V. Khabarovskaya // Mat. Phiz. – 1974. – Vol.15. – P. 98-104.

19. *Michael G.* Difference Equations in Normed Spaces: Stability and Oscillations. / G. Michael. – North-Holland Mathematics Studies. – Vol. 206. – Elsevier, 2007. – 378 p.

20. *Murray J.D.* Mathematical biology / J.D. Murray. – Berlin. Heidelberg. Springer, 1989. – 767 p.

21. *Nurlund N.E.* Forlesungen ber Differenzenrechung / N.E. Nörlund. – Berlin, 1924. – 551 p.

22. *Poincare H.* /Sur les courbes denies equations differetielles / H. Poincare // J. Math. Ser. 4. – 1886. – 2. – P. 151-217.

23. *Stevic' S.* Asymptotic behaviour of solutions of a nonlinear difference equation with a continuous argument / S. Stevic' // Укр. мат. журн. – 2004. – Vol.56, №8. – c. 1095-1100.

24. *Stevic' S.* Unique existence of bounded continuous solutions on the real line of a class of nonlinear functional equations with complicated deviations. / S. Stevic' // Appl. Math. and Computation. 218 . – 2012. – P. 7813-7817.

25. *Stevic' S.* On some linear difference equations and inequalities with continuous argument./ S. Stevic' // Appl. Math. and Computation. 218 . – 2012. – P. 9831-9838.

26. *Wiener J.* Generalized Solutions of Functional Dierential Equations / J.Wiener. – Word Scientic Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore – 1993. – 412 p.

27. *Беллман Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К.Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 С.

28. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – №4. – С. 7-13.

29. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №1. – С. 35-40.

30. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв’язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2016. – №4. – С. 7-13.

31. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №3. – С. 27-30.

32. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна конференція молодих математиків, (Київ, 3–6, червнь, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2015. – с.133.

33. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 14–15, травень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2015. – С. 29-30.

34. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», (Кам'янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2016. – С. 17-18.

35. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвячена 70-річчю акад. НАН України М.О. Перестюка, (Ужгород, 19-21, травень, 2016). – Ужгород: Ужгородський національний університет. – 2016. – С. 46.

36. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка

Михайла Кравчука, (Київ, 19–20, травень, 2016). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2016. – С. 52-53.

37. *Богай Н. А*. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом / Н. А. Богай, Г.П. Пелюх // Нелінійні коливання. – 2005. – Т.8, №3. – С. 351-359

38. *Богай Н.А.* Неперервні розв'язки систем нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом і їх властивості / Н.А. Богай // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10, №2. – С. 177-183.

39. *Богай Н. А*. Глобальні розвязки систем нелінійних різницевих рівнянь і їх властивості / Н. А. Богай // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10, №3. – С. 291-297.

40. *Быков Я.В.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений / Я.В. Быков, В.Г. Линенко. – Фрунзе.: Илим, 1968. – 127 С.

41. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем / И.В. Гайшун. – Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2001. – 400 С.

42. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.:Наука, 1967. – 375 С.

43. *Герсеванов Н.М.* Итерационное исчисление и его приложения / Н.М. Герсеванов. – М.: Машстройиздат, 1950. – 69 С.

44. *Городній М.Ф.* Обмежені розвязки деяких класів різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами / М.Ф. Городній, О.А. Лагода // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №11. – С. 1495-1500.

45. *Колмановский В.Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б. Колмановский, И.Р. Носов. – М.: Наука, 1981. – 448 С.

46. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения / В.Г. Курбатов. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990. – 168 С.

47. *Майстренко Ю.Л.* Аналитическая теория разностных уравнений. // Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений / Ю.Л. Майстренко. – М.: Наукова думка, 1980. – 71-90 С.

48. *Марков А.А.* Исчисление конечных разностей / А.А. Марков. – Одесса, 1910. – 274 С.

49. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 С.

50. *Миролюбов А.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов. – М.: Наука, 1986. – 128 С.

51. *Митропольський Ю.А.* Периодические решения дискретных разностных уравнений второго порядка / Ю.А. Митропольський, Н.А. Михайловская // Укр. мат. журн. – 1972. – Т.24, №4. – С. 543-547.

52. *Митропольський Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условнопериодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольський, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. – К.: Наук. думка, 1985. – 216 С.

53. *Пелюх Г. П.* Введение в теорию функциональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковський // К.: ин-т мат. АН УССР, 1974. – 119с.

54. *Пелюх Г.П.* О представлении асимптотически периодических решений нелинейных разностных уравнений / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 1990. – №7. – С. 939-946.

55. *Пелюх Г.П.* Общее решение систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Докл. АН Украины. – 1994. – №1. – С. 16-21.

56. *Пелюх Г.П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений / Г.П. Пелюх // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30, №6. – С. 1083-1085.

57. *Пелюх Г.П.* О структуре общего непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / Г.П. Пелюх // Доклады Академии Наук. – 1994. – Т.336, №5. – С. 587-589.

58. *Пелюх Г.П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / Г.П. Пелюх // Доклады Академии Наук. – 1994. – Т.336, №4. – С. 450-452.

59. *Пелюх Г.П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / Г.П. Пелюх // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30, №3. – С. 514 - 519.

60. *Пелюх Г.П.* О существовании периодических решений дискретных разностных уравнений и их свойствах / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 1994. – Т.46, №10. – С. 1382-1387.

61. *Пелюх Г.П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48, №1. – С. 140-155.

62. *Пелюх Г.П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, №2. – С. 304-312.

63. *Пелюх Г.П.* О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, №12. – С. 1636-1645.

64. *Пелюх Г.П.* О структуре общего решения систем нелинейных разностных уравнений / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 1999. – №10.– С. 1368-1378.

65. *Пелюх Г.П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, №7. – С. 936-953.

66. *Пелюх Г.П.* Асимптотическое поведение решений нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, №1. – С. 138-141.

67. *Пелюх Г.П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, №12. – С. 1626-1633.

68. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т.73, №2. – С. 269-272.

69. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т.407, №5. – С. 600-603.

70. *Пелюх Г.П.* О структуре общего непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом / Г.П. Пелюх // Доповіді НАН України. – 2007. – №1. – С. 29-33.

71. *Пелюх Г.П.* Про періодичні розв’язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / Г.П. Пелюх, О.А. Сивак // Доповіді НАН України. – 2009. – №8. – С. 24-28.

72. *Пелюх Г. П.* О линеаризации систем нелинейных функционально-разностных уравнений в окрестности положения равновесия / Г. П. Пелюх // Докл. АН. – 2009. - №9. – С. 36-41.

73. *Пелюх Г.П.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / Г.П. Пелюх, О.А. Сивак // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12, № 3. – С. 307-335.

74. . *Пелюх Г.П.* Неперервні розв'язки нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості / Г.П. Пелюх, О.А. Сивак // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12, № 4. – С. 541-555.

75. *Пелюх Г.П.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом / Г.П. Пелюх, О.А. Сивак // Нелінійні коливання. – 2010. – Т.13, № 1. – С. 75-95.

76. *Пелюх Г. П.* Періодичні розвязки систем нелінійних функціональних рівнянь / Г. П. Пелюх, О. А. Сивак // Нелінійні коливання. – 2013. – Т.16, №1. – С. 90-93.

77. *Пелюх Г. П.* Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковський // Киев: Праці ін.-т мат. – 2013. – Т. 95. – С. 38-57.

78. *Поварова О. А.* Про структуру множини неперервних розв’язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь / О. А. Поварова // Нелінійні коливання. – 2014. – Т.17, №3. – С. 399-406.

79. *Романенко О.Ю.* Основи якісної теорії різницевих рівнянь з неперервним аргументом / О.Ю. Романенко // Автореферат дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук. – 2007. – 34 С.

80. *Самарський А.А.* Разностные уравнения / А.А. Самарський, Ю.Н. Карамзин. – М.: Знание, 1978. – 64 С.

81. *Самойленко А.М.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений / А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк, Н.А. Перестюк // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9, №10. – С. 1904-1910.

82. *Селиванов Д.Ф.* Курс исчисления конечных разностей / Д.Ф. Селиванов. – Санкт-Петербург, 1908. – 104 с.

83. *Сивак О.А.* Про існування неперервних при $t \in R$ розв’язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості /

О.А. Сивак // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, №2. – С. 450-459.

84. *Сивак О. А.* Структура множини неперервних розв’язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / О. А. Сивак // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2011. – №4. – С. 81-87.

85. *Слюсарчук В.Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів / В.Ю. Слюсарчук. – Рівне.: Видавництво НУВГП, 2005. – 234 с.

86. *Соколов Ю.Д.* Лінійні різницеві рівняння (з прикладами простіших застосувань) / Ю.Д. Соколов. – К.: Видавництво АН УРСР, 1935. – 51с.

87. *Солдатов М.А.* Линейные однородные разностные уравнения / М.А. Солдатов, А.А. Миролюбов. – М.: Наука, 1981. – 206 С.

88. *Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения / М.А. Солдатов, А.А. Миролюбов. – М.: Наука, 1986. – 127 С.

89. *Станжицький О.М.* Про зв’язок між властивостями розв’язків різницевих та відповідних диференціальних рівнянь / О.М. Станжицький, А.М. Ткачук // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №7. – С. 989-996.

90. *Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – №4. – С. 7-13.

2. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №1. – С. 35-40.

3. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2016. – №4. – С. 7-13.

4. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. Науки. – 2016. – №3. – С. 27-30.

5. *Betsko I. V.* On the existence of continuous solutions of systems of difference equations / I. V. Betsko // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No. 3. – P. 205-213.

6. *Betsko I. V.* On the solutions of nonlinear functional-difference equations bounded on the entire real axis and their properties / I. V. Betsko, H. P. Pelyukh // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 6. – P. 691-711.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна конференція молодих математиків, (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2015. – с.133.

2. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 14–15, травень, 2015). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2015. – С. 29-30.

3. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2016. – С. 17-18.

4. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Тези доповідей. Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» присвячена 70-річчю акад. НАН України М.О. Перестюка, (Ужгород, 19–21, травень, 2016). – Ужгород: Ужгородський національний університет. – 2016. – С. 46.

5. *Бецко І. В.* Неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ розв’язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь / І. В. Бецко // Матеріали конференції. Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 19–20, травень, 2016). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2016. – С. 52-53.

6. *Betsko I. V.* On continuous solutions of systems of nonlinear functional-difference equations / I. V. Betsko // Book of Abstracts. International

Conference «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications», (Ukraine, Cherkasy, 17–19, October, 2017). – Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy. – 2017. – p. 57.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

– Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 2015);

– XVI міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2015);

– VII міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (м. Камянець-Подільський,2016);

– Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (м. Ужгород, 2016);

– XVII міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (м. Київ, 2016);

– International Conference on «Differential Equations, Mathematical Physics and Applications» (Cherkasy, 2017);

– наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Національного технічного університету України «КПІ»;

– семінарах з диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, якими керують академіки Самойленко А. М. і Перестюк М. О.