МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
робота на правах рукопису

Скуратовський Руслан Вячеславович

УДК 512.55, 512.58, 512.723

ДИСЕРТАЦІЯ

Ідеали бімодальних особливостей плоских кривих

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших співавторів мають посилання на відповідне
джерело ___________ Р. В. Скуратовський

Науковий керівник
Дрозд Юрій Анатолійович,
професор,
доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Скуратовський Р. В. Ідеали бімодальних особливостей плоских кривих. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Робота виконана на кафедрі інформаційної безпеки факультету комп’ютерних та інформаційних технологій Міжрегіональної Академії управління персоналом.

Вивчення ідеалів кілець це класичний розділ комутативної алгебри, який створеним під впливом теорії чисел і алгебраїчної геометрії, а у XX сторіччі, у роботах Е. Нетер, Е. Артіна, А. Шпайзера та інших сформувався як самостійний напрямок. Для 0цілозамкнених (тобто неособливих) кілець ця теорія здобула повноту й завершеності: кожен ідеал є обертовним і кожен модуль без скруту є прямою сумою ідеалів. Водночас, для кілець із особливостями залишається багато нерозв’язаних питань. Зокрема, це питання про кількість і будову класів ідеалів. Перші результати тут одержали Д. Фаддєєв і З. Боревич для квадратичних кілець. Надалі ці результати узагальнили вони і Х. Басс для широкого класу кілець, відомих зараз як бассові. А саме, було встановлено, що для таких кілець будь-який ідеал є обертовним (над своїм кільцем множників) і кожен модуль без скруту розкладається на пряму суму ідеалів. Надалі Д. Фаддєєв показав, що для кубічних кілець кожен ідеал локально є або обертовним, або дуальним до обертовного, а Ю. Дрозд узагальнив цей результат для широкого класу кілець. Г. Якобінський, Ю. Дрозд і А. Ройтер дали критерій того, що кільце має скінченну кількість класів ізоморфізму нерозкладних модулів без скруту. Якщо поле лишків нескінченне, лише такі кільця мають скінченну кількість класів ідеалів. У роботі Ґ.-М. Ґройеля та Г. Кнеррера був

встановлений зв'язок цих результатів з класифікацією особливостей за В. Арнольдом. Саме, для кільця геометричного типу було доведено, що воно має скінченну кількість класів ідеалів (або, що рівносильно, скінченну кількість класів ізоморфізму нерозкладних модулів без скруту) тоді й лише тоді, коли воно домінує одну з простих плоских особливостей типів A-D-E. У випадку, коли кількість класів ідеалів стає нескінченною, важливим є поняття модальності, або кількості параметрів, які визначають класи ідеалів. Перший крок тут зробив А. Шапперт, який встановив, що плоскі особливості з однопараметричними сім'ями ідеалів – це унімодальні й бімодальні особливості в розумінні В. Арнольда (у роботах Ч. Уолла ці особливості звуться строго унімодальними). Ю. Дрозд і Ґ.-М. Ґройель узагальнили цей результат, довівіши, що в загальному випадку особливості з однопараметричними сім'ями ідеалів – це ті, які домінують плоскі унімодальні та бімодальні особливості. Варто зауважити, що в цьому випадку відповідь на питання про однопараметричність («ручність») для нерозкладних модулів без скруту виявилася зовсім інакшою: Ю. Дрозд і Ґ.-М. Ґройель довели, що ручними є лише ті особливості, які домінують «серійні» плоскі унімодальні особливості, тобто особливості типу *T*. Унімодальні й бімодальні особливості типів *E* й *W* є «дикими», тобто кількість параметрів, від яких залежать сім'ї нерозкладних модулів без скруту, для них необмежена. У роботі Ю. Дрозда, Ґ.-М. Ґройеля й І. Кашуби був одержаний аналогічний результат для двовимірних особливостей. При цьому були використані результати Ю. Дрозда і Ґ.-М. Ґройеля про параметризацію векторних розшарувань над проективними кривими.

Усе це показує, що вивчення ідеалів комутативних кілець, зокрема, питання про параметризацію сімей ідеалів, є актуальною задачею сучасної алгебри. До цього часу не вивчено питання про те, які кільця, що виникають із особливостей кривих, мають щонайбільше m-параметричні сім'ї ідеалів при $m>1$ і як це пов'язано зі класифікацією особливостей за В. Арнольдом. У теорії кубічних кілець залишалося питання про локальну класифікацію таких кілець і їхніх ідеалів, зокрема питання про їхню ґоренштейновість. Отже, дослідження в цьому напрямку, яким і присвячена дисертація, є перспективними й важливими як для самої теорії ідеалів, так і для теорії особливостей і суміжних розділів алгебраїчної геометрії.

У теорії кодування і криптографії, де широко використовуються скінченні поля, у багатьох випадках для ефективності обчислень потрібно мати нормальний базис поля. Тому розробка нових алгоритмів побудови такого базису має як теоретичне, так і практичне значення.

У дисертації розглянуті такі питання:

- Класифікація локальних кубічних кілець.
- Обчислення ідеалів кубічних кілець і (в геометричному випадку) знаходження кількості параметрів, від яких залежать сім'ї ідеалів;
- Знаходження критеріїв того, що одногілкова особливість кривої (тобто така, що її поповнене локальне кільце — це кільце без дільників нуля) має щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів, дослідження їхніх зв'язків зі класифікацією особливостей за В. Арнольдом;
- Побудова нового алгоритму для знаходження нормального базису скінченного поля.

У першому розділі дається огляд робіт щодо теорії ідеалів комутативних кілець. Тут також наведено відомі технічні засоби, які використовуються при дослідженні ідеалів кілець, і методи лінійної алгебри, потрібні для побудови номального базису.

У другому розділі розглядаються локальні кубічні кільця, тобто розширення локального дедекіндового кільця (кільця дискретної оцінки), які містяться в кубічному розширенні його поля часток. Тут одержано такі результати:

- Дано повний опис локальних кубічних кілець;
- Описано ідеали кубічних кілець;

- Встановлено, що лише кубічні кільця, які є особливостями плоских кривих, є ґоренштейновими. (Цей результат перестає бути правильним для особливостей степеню $d > 3$);
- У геометричному випадку, тобто для локальних кілець алгебраїчних кривих над алгебраїчно замкненим полем, обчислено максимальну кількість параметрів у сім'ях ідеалів. Встановлено, що ця кількість не перебільшує n тоді й тільки тоді, коли це кільце домінує одну з плоских особливостей типів E_{12n+i} $(6 \le i \le 8)$ або $E_{2n+i,q}$ $(q \ge 0)$ у розумінні В. Арнольда.

Подальші два розділи присвячені критерієві того, що одногілкова особливість алгебраїчної кривої має щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів. У розділі 3 формулюється основний результат, який дає критерій двопараметричності сімей ідеалів і пов'язує це питання зі класифікацією особливостей за В. Арнольдом. А саме, доводиться, що одногілкова особливість S алгебраїчної кривої над алгебраїчно замкненим полем $\boldsymbol{k}$ має щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1. Якщо char $\boldsymbol{k} \neq 2$, то S домінує одну з цих особливостей:

$E_{30}, E_{32}, W_{24}, W_{2*}^{\#}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}$;

2. Якщо char $\boldsymbol{k} = 2$, то S домінує одну з цих особливостей:

$E_{30}, E_{32}, W_{18}, W_{1,*}^{\#}, N_{20}, N_{24}$.

Оскільки обчислення в характеристиці 2 майже повторюють обчислення в інших характеристиках і навіть є простішими від них, оскільки треба перевіряти меншу кількість випадків, у дисертації всі обчислення дано для випадку, коли char $\boldsymbol{k} \neq 2$.

У першому підрозділі третього розділу доводиться, що лише особливості, які домінують плоску особливість типу *E, T, W* або *N,* можуть мати щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів. Оскільки для особливостей, які домінують особливість типу *T*, це завжди так (вони взагалі є ручними, зокрема, мають лише

однопараметричні сім'ї ідеалів), а для особливостей типу E відповідь випливає з результатів розділу 2, у третьому розділі розглядаються особливості типу W, а в четвертому – особливості типу N. Разом це дає доведення основної теореми. Спочатку для кілець, які не домінують одне з кілець зазначеного списку, будуються трипараметричні сім'ї ідеалів. Після цього залишається обчислити ідеали кілець, які належать цьому списку і перевірити, що отримуємо лише двопараметричні сім'ї. Для обчислення ідеалів використовується техніка з розділу 1. А саме, для кожного кільця S будується така башта надкілець, що останнє кільце є цілозамкненим (тобто кільцем дискретної оцінки), а ідеали кожного кільця з башти отримуються з ідеалів наступного кільця за допомогою обчислень у деякому скінченновимірному просторі (принцип таких обчислень описаний у першому розділі). У третьому розділі такий спосіб застосовано до кілець типів W_{24} й W_{30} (обчислення для кілець типу $W^{\#}_{2*}$ аналогічні). У четвертому розділі проведено обчислення для кілець типів N_{20} і N_{24}.

Зрештою, п'ятий розділ присвячений задачі про побудову нормальної бази у скінченному полі. Це важливо для комп'ютерних обчислень у скінченних полях, зокрема для пов'язаних з кодуванням і криптографією. Тут дається новий детермінований алгоритм побудови нормального базису за час порядку $O(n^3\log^2 p)$, якщо кількість елементів у полі дорінює p^n. Цей алгоритм ґрунтується на методі Данилевського для зведення матриці до нормальної форми Фробеніуса. У випадку, коли отримується кілька клітин Фробеніуса, дається спосіб їхнього «об'єднання». Зауважимо, що цей алгоритм має найкращу оцінку часу порівняно з іншими відомими алгоритмами.

Ключові слова: локальне кільце, сім'ї ідеалів, плоска особливість, кубічне кільце, скінченне поле, нормальна база.

ABSTRACT

Singularities of curves with two-parameter families of ideals. – Qualificational scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences (doctor of philosophy) for the specialty 01.01.06 – algebra and theory of numbers (111 - mathematics). - Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

This work is performed at the Department of Computer Sciences and Information Technology of the Interregional Academy of Personnel Management.

The study of ideals of rings is a classical section of the commutative algebra, which began under the influence of the theory of numbers and algebraic geometry, and in the 20th century, in works of E. Noeter, E. Artin, A. Speiser and others, formed an independent area.

For the integrally closed (regular) rings, this theory has gained completeness and completeness, then for rings with singularities there are many unsolved problems. In particular, it is the question of the number and structure of classes of ideals. The first results here were obtained by D. Faddeev and Z. Borevich for quadratic rings. Then these results were generalized by themselves and H. Bass for a wide class of rings now known as Bass rings. It was proved that for such a ring any ideal is invertible (over its ring of multipliers). Later D. Faddeev showed that for a cubic ring each ideal is either invertible or dual to invertible, and Yu. Drozd extended this result for a wider class of rings. H. Yakobinsky, Yu. Drozd and V. Roiter gave a criterion for a ring to have a finite number of indecomposable torsionless modules. If the residue field is infinite, the same rings are just those with a finite number of ideal classes. In the work of G.-M. Greuel and H. Knörrer the relations of these results with the Arnold's classification of singularities were established. Namely, it was shown that the singularities with a finite number of classes of ideals are just those which dominate a simple plane curve singularity of type

A-*D*-*E*.

In ths case when there are infinitely mane ideal classes, an important notion is that of modality, or the number of parameters defining ideal classes. The first step here was by A. Schappert who established that plane curve singularities with at most one-parameter families of ideals are just unimodal and bimodal singularities in the sense of Arnold (in the works of C.T.C. Wall they are called strictly unimodal). Yu. Drozd and G.-M. Greuel generalized this result and proved that singularities with only one-parameter families of ideals are those which dominate unimodal and bimodal plane curve singularities. Note that this class does not coincide with singularities that have only one-parameter families of indecomposable torsionless modules ("tame" singularities). Namely, Yu. Drozd and G.-M. Greuel proved that only singularities which dominate those of type T are tame. Unimodal and bimodal singularities of types E and W are "wild", i.e. have *n*-parameter families of indecomposable torsionless modules for arbitrary big *n*. Yu. Drozd, G.-M. Greuel and I. Kashuba obtained an analogous result was obtained for two-dimension singularities. In their paper they used the result of Yu. Drozd and G.-M. Greuel about parametrization of vector bundles over projective curves.

Thus the study of ideals of commutative rings, in particular, the question about parametrization of classes of ideals is of current importance for the modern algebra. Till now almost nothing was known about the curve singularities with at most *m*-parametric families of ideals if $m>1$, in particular, how it relates with the Arnold's classification of singularities. In the study of cubic rings there was an open question about a local classification of such rings and their ideals, in particular about Gorenstein cubic rings. So the investigation of these problems are important and prospective for the theory of ideals itself as well as for the theory of singularities and related field of the algebraic geometry.

In cryptography and coding theory finite fields are widely used. In many cases, to make calculations more effective, it is important to know a normal basis of such a field. Thus construction of new algorithm for calculating normal bases is both of theoretical and of practical importance.

The main results of the thesis are the following:

- Classification of cubic rings and their ideals;
- Finding criteria for a one-branch curve singularity to have at most two-parametric families of ideals and establishing relations to the Arnold's classification of singularities;
- Construction of a new effective algorithm for finding a normal basis in a finite field.

The first chapter is devoted to a survey of results on the theory of ideals of commutative rings. Here also some known technical tools are presented which are used in the investigation of ideals, as well as tools from linear algebra nessesary for the construction of normal basis.

In the second chapter the local cubic rings are studied, i.e. extensions of a local Dedekind ring (discrete valuation ring) which are contained in a cubic extension of its field of fractions. The following results are obtained:

- A complete description of cubic rings is given;
- The ideals of cubic rings are described;
- It is proved that, among cubic rings, only plane curve singularities are Gorenstein. (It is no more true for singularities of degree $d > 3$);
- In the geometric case, i.e. for local rings of curve singularities over an algebraically closed field, the maximal number of parameters in families of ideals is calculated. It is proved that this number is at most n if and only if the ring dominates a plane curve singularity of type E_{12n+i} $(6 \le i \le 8)$ or $E_{2n+i,q}$ $(q \ge 0)$.

The next two sections are devoted to the criterion for a one-branch curve singularity to have at most two-parameter families of ideals. In chapter 3 the main result is formulated, which gives such a criterion and relates it to the Arnold's classification. Namely, it is proved that a one-branch curve singularity S has at most two-parameter families of ideals if and only if the following condition holds:

1. If char $\boldsymbol{k} \neq 2$, S dominates one of the following singularities:

   $E_{30}, E_{32}, W_{24}, W^{\#}_{2*}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28};$

2. If char $\boldsymbol{k} = 2$, S dominates one of the following singularities:

   $E_{30}, E_{32}, W_{18}, W^{\#}_{1,*}, N_{20}, N_{24}.$

Since the calculations in characteristic 2 are almost the same, even easier (as less cases are involved), in the thesis all calculations are presented for the case char $\boldsymbol{k} \neq 2$. In the first section of chapter 3 it is proved that only singularities that dominate a plane curve singularity of type E, T, W or N can have at most two-parametric families of ideals. As singularities of type T are tame, hence have at most one-parameter familes, and for singularities of type E the answer follows from the results of chapter 2, chapter 3 is devoted to singularities of type W and chapter 4 is devoted to singularities of type N. Altogether it gives the proof of the main theorem. First, for the rings which do not dominate any rings from the given list three-parameter families of ideals are constructed. Then it remains to show that the rings from the list only have two-parameter families. To do it, the technic from chapter 1 is used. Namely, for any such ring S a tower of over-rings is constructed so that the last ring of this tower is integrally closed (hence discrete valuation ring) and the ideals of every ring from the tower can be obtained from those of the next one using some calculations in finite dimensional vector spaces. In chapter 3 this procedure is applied to the singularities of types W_{24} and W_{30} (calculations for type $W^{\#}_{2*}$ are analohous). In chapter 4 it is applied to the singularities of types N_{20} and N_{24}.

Chapter 5 is devoted to the construction of normal bases in finite fields, which is important for computer calculations in finite fields. A new determined algroritm is given with the estimated complexity $O(n^3 \log^2 p)$ for the field of p^n elements. This algorithm uses the Danilevski method of reduction of a matrix to the Frobenius normal form. If several Frobenius cells are obtained, a way to combine them is given. Note that this algorithm has the best time estimation in comparison with other known algorithms.

Key words: local ring, family of ideals, flat singularities, cubic ring, finite field, normal base.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в п’яти статтях у фахових виданнях, три з яких – у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, і в шести збірках тез конференцій, три з яких міжнародні:

1[a]) *Скуратовський Р. В.* “Особливості плоских алгебраїчних кривих типу *N*.” // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки 2012 р. Вип. 1. ст. 33-40.

2[a]) *Скуратовський Р. В.* Побудова нормального базису скінченного поля за детермінований поліноміальний час. // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, серія механіка-математика. Видавництво: ВПЦ «Київський університет». 2011 р. С. 49-54.

3[a]) *Skuratovskii R. V.* Ideals of one branch curve singularities of type *W*. // Ukrainian Math. J. 62, No. 4 (2010), p. 530-536.

4[a]) *Drozd Y. A., Skuratovskii R. V.* Cubic rings and their ideals (in Ukraniane) // Ukr. Mat. Zh. – 2010.–V. 62, №11–P. 464-470. (arXiv:1001.0230 [math.AG])

5[a]) *Drozd Y., Skuratovskii R.* One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideals. // Algebra and Discrete Math. 13, no.2 (2012), 209-219. (arXiv 1201.6579 [math.AC]).

6[a]) *Скуратовський Р. В.* Ідеали одногілкових особливостей степеня 5. Шевченківська весна Частина 1. Київ. – 2012. – 43 с.

7[a]) *Скуратовський Р. В.* Нормальні базиси скінченного поля і їх властивості. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні наукові проблеми математики у вищій школі». присвячена Левіщенко С.С., НПУ ім. М. П. Драгоманова, 7-8 жовтня –

2016.– ст. 78 *www.fmi.npu.edu.ua/ua/levischenko-conf*

8^{a}) *Скуратовський Р. В.* “One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideals” Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, КМУ СПММ – 2011. – с. 273. http://iapmm.lviv.ua/cpmm2011/

9^{a}) *Скуратовський Р. В.* “Про іделали одногілкових особливостей” Міжнародній науковій конференції молодих учених, присвяченій 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, – 2010 р. – с. 37.

10^{a}) *Скуратовський Р. В., Мовчан А. А.* Дослідження особливостей скручених кривих Едвардса над F_p. П’ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених. “Актуальні проблеми сучасної математики та фізики”. – 2016. – ст. 56.

11^{a}) *Скуратовський Р. В.* “Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих”.// Сучасні проблеми механіки та математики Збірник наукових праць. збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

12^{a}) *Popovych R. B., Skuratovskii R. V.* Normal bases and elements of high order in finite field extensions based on cyclotomic polynomials. Th**e** 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko 2017 at Taras Shevchenko National University of Kiev (Kiev, Ukraine). https://www.imath.kiev.ua/~algebra/iacu2017/

13^{a}) *Skuratovskii R.* “A criterion for two-modality of ideals for one-branch one-dimensional singularities of type W”. 7th International Algebraic Conference in Ukraine. “Ukrainian mathematical congress”. 18 - 23 August, – 2009. – P. 132.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень

N – множина натуральних чисел,

Z – множина цілих чисел,

R – множина дійсних чисел,

K – комутативне кільце,

$Q(A)$ – повне кільце часток кільця A,

$O(I)$ – кільцем множників дробового ідеалу I,

$\nu(a)$ – вектором оцінок елемента a,

$\mu_A(M)$ *– кількість твірних* A-модуля M, тобто найменшу кількість елементів у множинах твірних цього модуля,

$\mu^*(A)$ – максимальна кількість серед усіх $\mu_A(M)$,

$\Phi_n(\chi(x))$– клітина Фробеніуса з характеристичним многочленом $\chi(x)$, яка має розмірність n;

ВСТУП

Роботу присвячено дослідженню особливостей алгебраїчних кривих і їхніх зображень.

Актуальність теми. Вивчення ідеалів комутативних кілець бере свій початок у теорії чисел, зокрема0 з робіт Куммера, який і побудував теорію ідеалів (“ідеальних чисел”) у кільцях цілих алгебраїчних чисел. У XX сторіччі в роботах Е. Нетер, Е. Артіна, А. Шпайзера та інших було розроблено загальнішу теорію ідеалів у дедекіндових кільцях.

Якщо ця теорія у своїх загальних рисах є фактично завершеною, то в теорії ідеалів нецілозамкнених кілець залишається велика кількість нерозвязаних проблем. Зокрема, це пов’язано з питаннями про будову й кількість класів ідеалів. Перші загальні результати тут одержали З.І. Боревич і Д. К. Фаддєєв [2] для квадратичних кілець. Надалі вони й Х. Басс [3, 24, 25] ці результати узагальнили на набагато ширший клас кілець, які зараз звуться бассовими кільцями або кільцями з циклічним індексом. Науковці довели, що кожен ідеал такого кільця є обертовним (тобто локально проективним) над своїм кільцем множників. Зокрема, в локальному випадку такі кільця мають лише скінченну кількість класів ідеалів. Для кубічних кілець Д. К. Фаддєєв [22] довів, що кожен ідеал є або обертовним, або дуальним до обертовного над своїм кільцем множників.

Ю. А. Дрозд [4] узагальнив цей результат на ширший клас кілець, який містить зокрема всі локальні кільця особливостей типу Е в розумінні книжки [1]. У роботах Г. Якобінського, Ю. А. Дрозда й А. В. Ройтера [40, 19, 36] було дано критерії того, що комутативне локальне кільце без нільпотентних елементів розмірності Крулля 1 має лише скінченну кількість нерозкладних неізоморфних модулів без скруту. Надалі такі кільця ми називатимемо одновимірними особливостями. Якщо це кільце є локальним із нескінченним полем лишків, ті самі умови є необхідними й достатніми для того, щоб це кільце мало скінченну кількість класів ідеалів [13]. Ґ.-М. Ґройель і Г. Кнеррер [38] установили, що в “геометричному випадку” скінченнопороджених алгебр над алгебраїчно замкненим полем ці умови рівнозначні тобто, що дане кільце домінує одну зі простих плоских особливостей у розумінні В. І. Арнольда. Вивчення модулів без скруту й ідеалів у випадку, коли їх стає нескінченно багато, ґрунтується на понятті модальності або кількості параметрів, які визначають такі модулі, зокрема ідеали. Перший крок тут зробив А. Шапперт [43], який встановив, що ідеали плоских геометричних (одновимірних) особливостей складають лише однопараметричні сім’ї тоді і тільки тоді, коли ці особливості є унімодальними або бімодальними у класифікації книжки В. І. Арнольда. В інших термінах, прийнятих у роботі [45], такі особливості звуться строго унімодальними. Ю. А. Дрозд і Ґ.-М. Ґройель [34] встановили, що без умови плоскості необхідною й достатньою умовою однопараметричності сімей ідеалів є те, щоб дане кільце домінувало унімодальну або бімодальну плоску особливість. Гіпотеза про те, що такою самою є й умова однопараметричності для модулів без скруту, виявилася неправильною: більшість таких особливостей є дикими в розумінні теорії зображень, зокрема мають сім’ї модулів без скруту з як завгодно великою кількістю параметрів. Саме Ю. А. Дрозд і Ґ.-М. Ґройель установили, що необхідною й достатньою умовою того, щоб модулі без скруту над геометричною одновимірною особливістю складали щонайбільше однопараметричні сім’ї, є те, щоб ця особливість домінувала особливість типу T в розумінні книжки [1]. Зокрема, унімодальні плоскі особливості типів E й W дика. У роботі Ю.А. Дрозда, Ґ.-М. Ґройеля та І. Кашуби [33] аналогічний результат було отримано для мінімальних еліптичних особливостей поверхонь.

Усе це показує, що вивчення ідеалів комутативних кілець, зокрема параметризації класів ідеалів, є актуальною задачею сучасної алгебри. При цьому досі не розглядалося питання про особливості, які б мали сім’ї ідеалів, щонайбільше

p-параметричні при $p > 1$. Зокрема, важливим є вивчення їхніх зв'язків зі класифікацією особливостей за Арнольдом у книжці [1].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проводилося на факультеті комп'ютерних та інформаційних технологій Міжрегіональної академії управління персоналом за темою, що відповідає загальному планові досліджень у рамках науково-дослідної теми «Онтологічний інженеринг освітніх процесів».

Мета й завдання дослідження. *Метою дослідження* дисертаційної роботи є вивчення будови ідеалів особливостей алгебраїчних кривих і їхніх параметризацій.

Об'єктом дослідження є вивчення ідеалів локальних сімейств кілець особливих точок одновимірних одногілкових алгебраїчних кривих і кубічних кривих, класифікація особливостей алгебраїчних кривих і їхніх ідеалів.

Предмет дослідження — кубічні кільця і їхніх ідеали, сімейства ідеалів одногілкових особливостей, критерії їхньої двопараметричності (залежно від характеристики основного поля), нормальні базиси скінченних полів.

Завдання дослідження: дати опис кубічних кілець і їхніх ідеалів, знайти критерії двопараметричності сімей ідеалів для одногілкових особливостей, установити зв'язки отриманих результатів зі класифікацією особливостей за Арнольдом, описати ідеали у двопараметричному випадку, розробити новий ефективний алгоритм для побудови нормального базису у скінченному полі.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи алгебраїчної геометрії, теорії особливостей, теорії кілець і полів а також теорії зображень, зокрема, при розгляді проблем класифікації використнана техніка матричних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, отримані в роботі, яка виноситься на захист, є новими і полягають у подальшому:

- Описано кубічні кільця над дискретно нормованим кільцем і їхні ідеали. У геометричному випадку визначено кількість параметрів, від яких залежать класи ідеалів;
- Дано критерій того, що одногілкова особливість алгебраїчної кривої мала щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів. Цей критерій пов'язаний зі класифікацією плоских особливостей Арнольда;
- Для особливостей зі двопараметричними сім'ями ідеалів дано повний опис ідеалів із точністю до ізоморфізму;
- Розроблено новий метод побудови нормального базису в полі F_q, де $q=p^n$. Складність методу оцінюється зверху як $O(n^3)$.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має переважно теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані в подальших дослідженнях особливостей кривих. Метод побудови нормального базису скінченного поля може бути основою для найшвидшого на цей час алгоритму побудови нормального базису скінченного поля.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

1) 7th International Algebraic Conference in Ukraine. «Ukrainian mathematical congress». Ukraine, (Kharkov, 18 - 23 August, 2009);

2) Міжнародній науковій конференції молодих вчених, присвяченій 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка КНУ ім. Тараса Шевченка (Київ, 2010 р.);

3) Всеукраїнській науково-методичній конференції «Сучасні наукові проблеми математики у вищій школі». присвячена Левіщенко С.С.;

4) 11-ій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю українського математика Володимира Васильовича Кириченка (Київ, 2017 р.);

5) Міжнародній IV Конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. (Львів, 2018р.).

6) 10-тій Міжнародній науковій міждисциплінарній конференції студентів аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна». (Київ 19-23 березня, 2012) .

7) Міжнародній Конференції молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, КМУ СПММ – 2011;

8) алгебраїчних семінарах Інституту математики НАН України м. Київ, (керівник — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд);

9) Засіданні семінару з фрактального аналізу відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України, м. Київ, 2019 р.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 5-х статтях [1^a – 5^a] у фахових виданнях і тезах доповідей 6-х міжнародних наукових конференцій [6^a – 13^a].

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, які виносяться на захист, автором отримано особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівникові. У спільних науковим керівником публікаціях за темою дисертації внески співавторів однакові.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, висновку, списку використаних джерел і п’яти розділів. Загальний обсяг роботи становить 147 сторінок. Перелік використаних джерел налічує 46 посилань.

Короткий зміст дисертації.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, подано короткий аналіз сучасного стану проблеми, сформульовано мету й завдання дослідження, наукову новизну, практичне значення одержаних результатів і подано відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Розділ 1 присвячено історичному оглядові робіт, які стосуються теми дисертаційного дослідження.

У **другому розділі** досліджено кубічні кільця. Описано всі такі кільця і їхні ідеали. Як наслідок, було показано, що кубічне кільце є ґоренштейновим тоді й тільки тоді, коли це – кільце плоскої особивості. Нехай **D** — кільце дискретного нормування, t – твірний максимального ідеалу, **C** – *кубічне кільце,* тобто підкільце у тривимірній алгебрі **L** над полем часток **K** кільця **D**, ціле над **D**. Через **A** позначимо максимальне ціле підкільце у **L** і позначатимемо, що $\mathrm{A}_m = t^m\mathrm{A}+\mathrm{D}$ і $\mathrm{J}_m = t^m\mathrm{A}+\mathrm{D} = rad\mathrm{A}_m$. У залежності від алгебри **L** одержано опис кубічних кілець.

Одногілковий випадок розгалужений: $\mathbf{L}$ є полем, максимальний ідеал кільця $\mathbf{A}_0$ дорівнює $\tau\mathbf{A}$, $\mathbf{A}/\tau\mathbf{A}, \mathbf{k}$ і $t\mathbf{A} = \tau^3\mathbf{A}$. Позначимо

$$\mathrm{C}_{2r}(\alpha) = \mathrm{D} + t^r\alpha\mathrm{D} + t^{2r}\mathrm{A},\ \text{де}\ v(\alpha) = 1,$$

$$\mathrm{C}_{2r}(\alpha) = \mathrm{D} + t^r\alpha\mathrm{D} + t^{2r+1}\mathrm{A},\ \text{де}\ v(\alpha) = 2.$$

Теорема 2.3.1. *Кожне надкільце з* A_m *збігається з* $t^k\mathrm{C}_r(\alpha)+\mathrm{D}$ *для деяких* k, r, *таких, що* $r+k \le m$, *і деякого* α. *Кільця* $\mathbf{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості алгебраїчних кривих у цьому випадку.*

Одногілковий випадок нерозгалужений: тут $\mathbf{L}$ є полем, максимальний ідеал $\mathbf{A}$ дорівнює $t\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}/\tau\mathbf{A}=\mathbf{k}[\bar{\theta}]$ є кубічним розширенням поля $\mathbf{k}$, де $\bar{\theta}$ є коренем незвідного кубічного многочлена $f(x) \in \mathbf{k}[\bar{\theta}]$. Позначимо $\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r}\mathrm{A}_0$, де $\alpha \in A^* \setminus \mathbf{D}$.

Теорема 2.3.2. *Кожне надкільце* A_n *збігається з* $t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$ *для певних* k, r *і* α *з* $2r+k \le m$. *Кільця* $\mathrm{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Двогілковий випадок із розгалуженням: $\mathbf{L} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}$, де $\mathbf{K}_1$ є квадратичним розширенням $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}$ і $t\mathbf{D}_1=\tau^2\mathbf{D}$, де τ — первинний елемент з $\mathbf{D}_1$. Позначатиемо $\mathrm{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$, де $r=2l+q$ і

$\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}\mathbf{A}$, де $t=\lambda\tau^2$.

Теорема 2.3.3. *Кожне надкільце кільця* $\mathbf{A}_m$ *збігається чи із* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$ *чи з* $t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$, *де* $k+r\le m$. *Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ *і* $\mathbf{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Двогілковий випадок без розгалуження: $\mathbf{L}=\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}$, де $\mathbf{K}_1$ є квадратичним розширенням $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}=\langle 1,e,\alpha\rangle$, максимальний ідеал кільця $\mathbf{D}_1$ це $t\mathbf{D}_1$ і $\mathbf{D}_1/t\mathbf{D}_1=\mathbf{k}[\bar{\theta}]$ є квадратичним розширенням поля $\mathbf{k}$, де $\bar{\theta}$ — це корінь незвідного квадратичного полінома $f(x)\in\mathbf{k}[x]$.

Позначимо $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e_1+t^q\alpha\mathbf{D})+t^r\mathbf{A}$.

Теорема 2.3.4. *Кожне надкільце кільця* $\mathbf{A}_m$ *збігається з одним з кілець* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$, *де* $k+r\le m$. *Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Тригілковой випадок: $\mathbf{L}=\mathbf{K}^3$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}^3$. Позначатимемо $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l\alpha\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$, де $\alpha=e+t^q ae'$, $e\neq e'$ — примітивні ідемпотенти.

Теорема 2.3.5. *Кожне надкільце кільця* $\mathbf{A}_m$ *збігається з* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$ *для деякого* α *і деяких* l,q *з* $k+r\le m$. *Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Також у розділі 2 обчислено всі іделали і знайдено кількість параметрів у класах ідеалів.

Теорема 2.3.7. *Дуальні ідеали до кубічних кілець є такими:*

Випадок одногілковий із розгалуженням:

Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^{[r/2]}\alpha\mathrm{D} + t^{k+r}\mathrm{A}$.

Випадок одногілковий без розгалуження:

Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^{[r/2]}\alpha\mathrm{D} + t^{k+2r}\mathrm{A}$.

Випадок двогілковий із розгалуженням:

(a) Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_{l,q}(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^l(e + t^q\alpha)\mathrm{D} + t^{k+2l+q}\mathrm{A}$.

(b) Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^r\alpha\mathrm{D} + t^{k+2r+1}\mathrm{A}$.

Випадок двогілковий без розгалуження:

Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_{l,q}(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^l(e + t^q\alpha)\mathrm{D} + t^{k+2l+q}\mathrm{A}$.

Випадок тригілковий:

Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_{l,q}(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^r\alpha\mathrm{D} + t^{k+2r}\mathrm{A}$.

Також у цьому випадку знайдено критерій ґоренштейновості кубічних кілець.

Наслідок 2.3.2. *Кубічне кільце є ґоренштейновим тоді й тільки тоді, коли воно є плоскою особливістю кривої.*

Нагадаємо, що для інших особливостей це не завжди правильно.

Для кілець геометричної природи, тобто у випадку, коли $\mathrm{D} = k[[x]]$ (кільце формальних степеневих рядів над полем), визначено найбільшу кількість параметрів $par\,(C)$ у сім'ях ідеалів. Зауважимо, що для таких кілець нерозгалужені випадки неможливі.

Теорема 2.4.1. *Якщо* $\mathbf{C}$ *є кубічним кільцем геометричної природи, то* $\mathrm{par}(\mathbf{C}) \le n$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{C}$ *домінує одну з особливостей типу* $E_{12n+i}\ (6 \le i \le 8)$ *чи* $E_{2n+1,q}\ (q \ge 0)$.

У 3-му розділі сформульовано теорему, яка дає критерій того, що найбільша кількість параметрів *par(S)* у сім'ях ідеалів одногілкової особливості S не перебільшує 2 (критерій двопараметричності ідеалів).

Основна теорема. Нехай S є одногілковою особливістю. Тоді такі умови є еквівалентними:

1) $par(\mathrm{S}) \leq 2$.

2) Якщо $char\,\mathrm{k} \neq 2$, то S домінує одну з таких особливостей:

$E_{30}, E_{32}, W_{24}, W^{\#}_{2*}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}$;

2a) Якщо $char\,\mathrm{k} = 2$, то S домінує одну з наступних особливостей: $E_{30}, E_{32}, W_{18}, W^{\#}_{1,*}, N_{20}, N_{24}$.

Для особливостей типу *E* це випливає з результатів розділу 2. У розділі 3 основна теорема доведена для особливостей типу *W*.

Вставлено теорему 3.2.1.

Теорема 3.2.1. *Одногілкова особливість* S *типу W допускає щонайбільше 2-параметричні сімейства ідеалів тоді й лише тоді, коли вона домінує плоску особливість типу* $W_{24}, W_{30}, W^{\#}_{2,2q-1}$.

Розділ 4 присвячений дослідженню особливостей типу *N*.

Означення 4.1.1. Особливістю типу ***N*** називається одногілкова особливість, тобто підалгебра *K* в k[[t]], така, що найменший показник, який зустрічається в елементах з K є 5. Вочевидь, тоді можна вважати, що $t^5 \in K$. Якщо це — плоска особливість із вектором нормування (5, *k*+1), вона зветься особливістю типу N_{4k}.

У **розділі 4** доведено критерій двопараметричності ідеалів для особливостей типу *N*.

Теорема 4.1.1. Якщо $char\,\mathrm{k} \neq 2$, то одногілкова особливість типу *N* має не більше, ніж 2-параметричні сім'ї ідеалів тоді й тільки тоді, коли вона домінує особливість типу N_{4k} при $k \leq 7$. Якщо $char\,\mathrm{k} = 2$, то N повинна домінувати одну з особливостей N_{20}, N_{24}.

Тут також явно обчислені ідеали у двопараметричному випадку.

Зауважимо, що в дисертації всі обчислення проводяться для випадку, коли $char\,\mathrm{k} \neq 2$. Випадок, коли $char\,\mathrm{k} = 2$ цілком аналогічний, навіть простіший, оскільки треба розглядати менше випадків.

У **п'ятому розділі** дисертації запропоновано новий метод побудови нормального базису у скінченному полі, який у класі детермінованих алгоритмів має найкращу побітову оцінку складності $O\left(n^3\log_2 p\right)$. У випадку побудови нормального базису передбачається, що поле F_q вже задане. Тобто вже знайдено деякий незвідний над F_p многочлен P(x) степені n (де n – таке, що $p^n = q$). Завдання методу пошуку нормального базису полягає лише в тому, щоб при готовій структурі поля F_q (при готовому поліноміальному базисі) знайти елемент, що породжує нормальний базис.

Основні кроки нашого алгоритму побудови нормального базису:

1) Обираємо поліноміальний базис для F_q;

2) Будуємо оператор A: $Af = f^q$;

3) Зводимо матрицю оператора A методом тріангуляції до форми Фробеніуса або, якщо цей метод не дає можливості це зробити, то зводимо її до блочно-Фробеніусової форми зі клітинами Фробеніуса по діагоналі;

4) У другому випадку з п.3 після отримання матриці блочно діагонального виду, де блоки на діагоналі – це клітини Фробеніуса, потрібно послідовно поєднати сусідні блоки методом заміни твірних векторів, що детально описано в цьому розділі.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові Юрію Анатолійовичу Дроздові за постановку завдань і постійну увагу й підтримку в роботі.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ І ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Надалі всі кільця вважаються комутативними кільцями з одиницею. Ми посилаємося на книжку Бурбакі [7], як на стандартне джерело загальновідомих результатів з комутативної алгебри. Надалі ми розглядатимемо переважно кільця A, які мають такі властивості:

- A є *нетеровим*, тобто кожен його ідеал має скінченну кількість твірних;
- A є *редукованим*, тобто не містить нільпотентних елементів;
- A має *розмірність Крулля* 1, тобто будь-який його первинний ідеал є або мінімальним, або максимальним. Якщо A — *область*, тобто не містить дільників нуля; це означає, що кожен ненульовий первинний ідеал є максимальним.

Ми позначатимемо через $Q(A)$ *повне кільце часток* кільця A, тобто кільце часток виду $\frac{a}{b}$, де $a,\ b \in A$, причому b не є дільником нуля. Якщо A — область, то $Q(A)$ — її поле часток. У загальному випадку редукованих кілець — це добуток полів: $Q(A) \simeq \prod_{i=1}^{s} Q(A/P_i)$, де $P_1, P_2, ..., P_s$ — усі мінімальні первинні ідеали кільця A.

Дробовим ідеалом кільця A (а часто просто *ідеалом*) називатимемо скінченнопороджений A-підмодуль $I \subset Q(A)$, такий, що $Q(A)I = Q(A)$. Ця умова означає, що I містить обертовний елемент λ кільця $Q(A)$. Тоді $\lambda^{-1}A$, вочевидь, також є дробовим ідеалом, причому $\lambda^{-1}A \supseteq A$. Зі другого боку, якщо $d \in A$ — спільний знаменник деякої множини твірних ідеалу I, то $dI \subseteq A$. Обидві умови бувають корисними за деяких обчислень.

Кажуть, що два дробові ідеали — I, I' *належать одному класові*, якщо вони ізоморфні як A-модулі. Рівнозначна умова: $I' = \lambda I$ для деякого обертовного елемента $\lambda \in Q(A)$. Якщо дробовий ідеал I є підкільцем (із одиницею) в кільці $Q(A)$, він зветься *надкільцем* кільця A. Вочевидь, тоді $I \supseteq A$.

Кільцем множників дробового ідеалу I зветься підкільце $O(I) = \{\lambda \mid \lambda I \subseteq I\}$ кільця $Q(A)$. Легко помітити, що $O(I)$ також є дробовим ідеалом, тобто надкільцем кільця A. Кажуть, що ідеал I *належить кільцю* $O(I)$. Якщо $O(I) = A$, ідеал I називається *точним*. Дробовий ідеал I називається *обертовним*, якщо існує такий дробовий ідеал I^{-1}, що $II^{-1} = O(I)$. Вочевидь, тоді $O(I^{-1}) = O(I)$, причому ідеал I^{-1} визначений однозначно, а саме $I^{-1} = \{\lambda \in Q(A) \mid \lambda I \subseteq O(I)\}$. Відомо [21, розділ X], що ідеал I є обертовним тоді й лише тоді, коли він є проективним $O(I)$-модулем. У цьому випадку $I^{-1} \simeq Hom_A(I, O(A))$.

1.1. Дедекіндові кільця

Означення 1.1.1. Кільце A називається *дедекіндовим*, якщо воно є нетеровою областю розмірності Крулля 1 і є *цілозамкненим* у полі $Q(A)$. Ця умова означає, що якщо елемент $\lambda \in Q(A)$ задовольняє рівність $\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_m = 0$, де всі елементи a_i належать A, то й $\lambda \in A$.

Зокрема, будь-яке кільце головних ідеалів (наприклад, кільце цілих чисел Z або кільце $k[x]$ многочленів від однієї змінної над довільним полем k) є дедекіндовим. Інакший класичний приклад дедекіндового кільця, з якого, власне, й починається ця теорія, — це кільце всіх цілих алгебраїчних чисел, які належать деякому скінченному розширенню поля раціональних чисел.

Оскільки дедекіндове кільце A є цілозамкненим, кожен його дробовий ідеал точний. Нагадаємо основні властивості дедекіндових кілець і модулів над ними (дивися [7]).

Теорема 1.1.2. Нехай A – дедекіндове кільце. Тоді:

1. Кожен дробовий ідеал I кільця A є обертовним і однозначно розкладається на добуток $I = \prod_p p^{m_p}$, де p пробігає максимальні ідеали кільця A, а m_i — цілі числа, причому майже всі вони (тобто всі, крім скінченного числа) дорівнюють 0.

2. Кожен скінченнопороджений A-модуль розкладається на пряму суму періодичного модуля і модуля без скруту.

3. Кожен скінченнопороджений A-модуль без скруту M ізоморфіний до $A^{r-1} \oplus I$, де r — ранг модуля M, а I — ідеал, визначений однозначно з точністю до ізоморфізму. Зокрема, $I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_r \simeq A^{r-1} \oplus I_1 I_2 \ldots I_r$.

4. Кожен скінченнопороджений періодичний A-модуль однозначно (з точністю до перестановки доданків) розкладається на пряму суму циклічних примарних модулів виду A/p^k, де p — максимальний ідеал.

Локальне дедекіндове кільце (або ж локальне кільце головних ідеалів) називається *кільцем дискретної оцінки*. Якщо A — кільце дискретної оцінки, m — його максимальний ідеал, то цей ідеал є головним: $m = tA$ і кожен дробовий ідеал кільця A збігається з $m^n = t^n A$ для деякого $n \in Z$. У цьому випадку кожен елемент поля $Q(A)$ однозначно подається у формі ut^n, де $n \in Z$, а u — обертовний елемент кільця A. Число n зветься *оцінкою* (точніше, m-адичною оцінкою) елемента a й позначається $v_m(a)$ або $v(a)$. Кожен скінченнопороджений A-модуль без скруту є вільним, а кожен періодичний скінченнопороджений A-модуль є прямою сумою модулів, ізоморфних до $A/t^m A$ для деяких натуральних m.

Надалі нам часто зустрічатимуться кільця A, які є підкільцями прямого добутку $\tilde{A} = \prod_{i=1}^{s} A_i$ кілець дискретної оцінки. У такому випадку ми позначатимемо через $\nu_i(a)$, де $a=(a_1,a_2,...,a_s)$, $a_i \in A_i$, оцінку $\nu(a_i)$. Вектор $\nu(a)=(\nu_1(a),\nu_2(a),\ldots,\nu_s(a))$ зватимемо *вектором оцінок* елемента a.

Теорію ідеалів дедекіндових кілець було узагальнено й розповсюджено на некомутативний випадок у роботах Артіна, Брандта, Дойрінга, Хассе та інших математиків у 30-і роки XX сторіччя. Відповідні результати повно викладені в монографії Джекобсона [10, розділ 6]. Оскільки ми не користуватимемося цими результатами, обмежимось лише цим посиланням.

1.2. Кільця з циклічним індексом

Мабуть, першим кроком до розширення класу кілець, для яких досліджувалася будова ідеалів і модулів без скруту, була робота Боревича й Фаддєєва [21], у якій було розглянуто *квадратичні кільця*, тобто кільця алгебраїчних чисел у квадратичних розширення поля раціональних чисел. Вони довели, що над таким кільцем кожен модуль без скруту розкладається на пряму суму ідеалів. При цьому всі доданки крім одного можна вважати надкільцями даного кільця (тоді вони визначені однозначно), а останній ідеал визначений із точністю до ізоморфізму.

Цей результат узагальнили незалежно Басс у роботах [24, 25] і Боревич і Фадєєв у роботах [22, 23]. Результати, які вони отримали, мають важливе значення, зокрема й для подальших обчислень. Тому ми наведемо їх детально (у сучасному викладі). Надалі ми завжди вважаємо, що кільце A задовольняє умови, наведені на ст. 26, і має *максимальне надкільце*.

(Останнє є цілим замиканням кільця A в кільці часток $Q(A)$). Ця умова завжди виконується, якщо A є скінченнопородженою алгеброю над полем або над кільцем цілих чисел, зокрема для всіх кілець алгебраїчних чисел або алгебраїчних функцій, їхніх локалізацій і поповнень. Вона також виконується, якщо A є повним локальним кільцем. Ми позначаємо через $\mu_A(M)$ *кількість твірних* A-модуля M, тобто найменшу кількість елементів у множинах твірних цього модуля, і нехай

$$\mu^*(A) = \max\{\mu_A(I) \mid I - \text{ідеал кільця } A\}.$$

Означення 1.2.1. ([14]). Кільце A зветься *ґоренштейновим*, якщо $\mathrm{inj.dim}_A A = 1$, тобто $Ext_A^2(M, A) = 0$ для будь-якого A-модуля A. Якщо кільце A і всі його надкільця є ґоренштейновими, кільце A зветься *бассовим*.

Подальший результат встановлює зв'язок між цим означенням і поняттям *порядку з циклічним індексом*, введеним у роботі [3].

Теорема 1.2.2. (див. [24, 25] і [12, Теорема 2]) Рівнозначними є такі умови:

1. Кільце A є бассовим;

2. $\mu^*(A) \le 2$;

3. Якщо A' — максимальне надкільце кільця A, то фактормодуль A'/A є циклічним (рівнозначно: $\mu_A(A') \le 2$);

4. Кільце A є *ґоренштейновим* і для кожного максимального ідеалу $p \subset A$ його кільце множників також є *ґоренштейновим*. (Звичайно, цю умову достатньо перевіряти для таких ідеалів p, що кільце A_p не є цілозамкненим).

Доведення цієї теореми істотно спирається на такий результат, яким ми користуватимемося й при описові ідеалів.

Теорема 1.2.3. (див. [25, 12]). Локальне кільце A є ґоренштейновим тоді і лише тоді, коли A'/A є циклічним A-модулем, де $A' = O(m)$ — кільце множників максимального ідеалу m кільця A.

Вочевидь, квадратичне кільце напевне задовольняє умову (2) цієї теореми, тобто всі квадратичні кільця є бассовими. Будь-яке дедекіндове кільце також бассове.

Нам буде потрібен іще один факт про ідеали горненштейнових і бассових кілець.

Твердження 1.2.4. (див. [24, 25]).

1. Кожен точний ідеал ґоренштейнового кільця обертовне. Зокрема, якщо ґоренштейнове кільце локальне, то кожен його точний ідеал головний.

2. Кожен ідеал бассового кільця є обертовний. Навпаки, якщо кожен ідеал кільця A обертовний, то це кільце бассове.

3. Локальне ґоренштейнове кільце має єдине мінімальне надкільце — а саме, кільце множників максимального ідеалу.

Теорія модулів без скруту над бассовими кільцями нагадує таку саму теорію для дедекіндових кілець, хоча має й деяку специфіку.

Теорема 1.2.5. (див. [24, 25]). Нехай A — бассове кільце, M – скінченнопороджений A-модуль без скруту. Тоді M ізоморфний до прямої суми ідеалів кільця A. Точніше, існують такі надкільця кільця A: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_r$ (де r — ранг модуля M), що $M \simeq A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_{r-1} \oplus I$, де I — ідеал кільця A, визначений із точністю до ізоморфізму (вочевидь, I можна вважати точним ідеалом кільця A_r).

З іншого боку, будова періодичних і мішаних модулів над бассовими кільцями докорінно відрізняється від випадку дедекіндових кілець. Передусім, періодична частина не завжди виділяється прямим доданком. По-друге, існує «багато» нерозкладних нециклічних періодичних модулів. Так, для кожного натурального m існують нерозкладні періодичні A-модулі M, для яких $\mu_A(M) = m$. Понад те, якщо A – локальне кільце з нескінченним полем лишків, яке не є дискретно нормованим, кількість таких модулів нескінченна. Якщо ж, окрім того, A не є «особливістю типу A_1», то задача опису періодичних A-модулів *дика*, тобто містить у собі класифікацію довільних наборів матриць стосовно одночасних перетворень подібності [7]. Нагадаємо, що *особливість типу* A_1 (за класифікацією Арнольда, див. [1, розділ 2, п.15]) або *простий вузол* – це таке локальне кільце A, що кільце множників $A' = O(m)$ його максимального ідеалу m є максимальним надкільцем A,

$radA' = m$, де $radA$ позначає радикал Джекобсона кільця A, і $\mu_A(A') = 2$.

Теорія бассових кілець також була розповсюджена на некомутативний випадок у роботах [14, 19]. При цьому виявилося, що всі порядки з $\mu^*(A) \leq 2$ є бассовими в розумінні означення 1.2.1, але в некомутативному випадку ця умова лише достатня. Втім, якщо розглядаються порядки над повним кільцем дискретної оцінки, то кожен бассів порядок є *Моріта-еквівалентним* до порядку A з $\mu^*(A) \leq 2$, (це випливає з опису бассових порядків, який міститься у [25]). Знову-таки, оскільки ми не використуватимемо результататів для некомутативних кілець, ми обмежимося лише цим зауваженням.

У роботі [25] Басс сформулював також критерій того, що всі модулі без скруту над локальним кільцем A розкладаються на пряму суму ідеалів. Утім, його формулювання виявилося дещо неточним. Остаточний результат, одержаний у роботі [18], можна сформулювати так.

Теорема 1.2.6. Нехай A — локальне кільце розмірності Крулля 1 без нільпотетних ідеалів, причому його ціле замикання в повному кільці часток є скінченнопородженим A-модулем[1]. Усі A-модулі без скруту розкладаються на пряму суму ідеалів, якщо виконується одна з таких умов:

1. A є бассовим;
2. A ізоморфне до тріади кілець дискретної оцінки;
3. A є ґоренштейновим, а його (єдине) мінімальне надкільце ізоморфне до тріади кілець дискретної оцінки.

Нагадаємо, що *тріадою локальних кілець* A_1, A_2, A_3 зі спільним полем лишків називається підкільце прямого добутку A_1, A_2, A_3, яке складається з таких трійок (a_1, a_2, a_3), що образи елементів a_1, a_2, a_3 у спільному полі лишків збігаються. Зокрема, тріада кілець, ізоморфних до кільця степеневих рядів $k[[t]]$ над полем k —

---

[1] Остання умова виконується, наприклад, якщо кільце A є повним локальним.

це особливість типу D_4 за Арнольдом [1].

1.3. Двоїстість для модулів без скруту

Нагадаємо результати, які стосуються двоїстості для модулів без скруту над одновимірними кільцями. Далі в цьому розділі A позначає комутативне локальне кільце розмірності Крулля 1 без нільпотентних елементів.

Означення 1.3.1.

1. Дробовий A-ідеал A^* зветься дуалізуючим A-модулем, якщо $\text{inj.dim}_A D = 1$.

2. Якщо A^* – дуалізуючий A-модуль, а M – A-модуль без скруту, то A-модуль $M^* = Hom_A(M, A^*)$ називається двоїстим до M.

Можна впевнитися, що в цьому випадку поняття дуалізуючого модуля збігається з поняттям *канонічного модуля* зі книжки [26]. Якщо дуалізуючий модуль існує, то він єдиний (із точністю до ізоморфізму). Якщо A – порядок над дискретно нормованим кільцем D, то дуалізуючий модуль існує і дорівнює $Hom_D(A, D)$. Також дуалізуючий модуль існує, якщо кільце A є повним локальним [12]. Кільце A є ґоренштейновим тоді й лише тоді, коли $A^* \simeq A$.

Подальший результат [26, 12] пояснює термін ***дуалізуючий***.

Теорема 1.3.2. *Якщо A^* – дуалізуючий A-модуль, то функтор $M \mapsto M^*$ є точним контраваріантним функтором на категорії скінченнопороджених A-модулів буз скруту, а природний гомоморфізм $M \to M^{**}$ є ізоморфізмом.*

Зауважимо, що обмеження цього функтора на множину дробових ідеалів встановлює двоїстість для ідеалів. Якщо фіксувати занурення $A^* \rightarrowtail Q(A)$, то двоїстий ідеал I^* до ідеалу I можна обчислювати як $(A^* : I) = \{\lambda \in Q(A) \mid \lambda I \subseteq A^*\}$.

Ідеал I зватимемо *кообертовним*, якщо він двоїстий до обертовного. Рінозначна умова полягає в тому, що I є дуалізуючим модулем для свого кільця множників.

У розділі 2 ми використаємо ще один факт.

Твердження 1.3.3. Нехай $B \subseteq A$ – локальне ґоренштейнове підклільце в A, таке, що A – скінченнопороджений A-модуль. Тоді дуалізуючим A-модулем є $A^* = Hom_B(A,B)$.

Доведення. Легко помітити, що A^* – це (дробовий) ідеал. Окрім того, для довільного A-модуля M має місце функторний ізоморфізм $Hom_A(M,A^*) = Hom_B(M,B)$. Звідси випливає, що $Ext^i_A(M,A^*) = Ext^i_B(M,B)$. Оскільки $Ext^2_B(M,B) = 0$ (бо кільце B ґоренштейнове), то й $Ext^2_A(M,A^*) = 0$, тобто $\text{inj.dim}_A A^* = 1$.

1.4. Кільця з кубічними особливостями.

У роботі [22] Д. К. Фаддєєв дослідив *кубічні кільця*, тобто підкільця у тривимірних напівпростих алгебрах над полем раціональних чисел і їхні локілізації. Користуючись зв'язком кубічних кілець із бінарними кубічними формами, він установив, зокрема, такі важливі результати.

Теорема 1.4.1. ([18, Наслідки 4.1 і 4.2]).

1. Якщо A – кубічне кільце, то квадрат кожного A-ідеалу обертовний;
2. Крім того, якщо кільце A локальне, то кожен його ідеал або обертовний, або кообертовний.

Насправді перше твердження цієї теореми є частковим випадком результату Дейда, Тausської й Цассенхауса [30].

Теорема 1.4.2. ([30, Theorem C]) Якщо A є алгеброю над дедекіндовим кільцем D, причому $\dim_K Q(A) = n$, де K – поле часток D, то ідеал I^{n-1} є обертовний для кожного A-ідеалу I.

Результати Фаддєєва про кубічні кільця були узагальнені в роботі [12]. Саме в ній були встановлені такі результати.

Теорема 1.4.3. ([12, Теорема 3]) Якщо $\mu^*(A) \leq 3$, то:

1. Будь який A-ідеал або обертовний, або кообертовний;
2. Ідеал I^2 завжди обертовний.

За деяких незначних обмежень там установлено також, що з (1) або (2) випливає, що $\mu^*(A) \leq 3$.

Вочевидь, для кубічних кілець умова $\mu^*(A) \leq 3$ завжди виконується. Кільця з умовою $\mu^*(A) \leq 3$ звуться *кільцями з кубічними особливостями*. Якщо ціле замикання A_0 кільця A в повному кільці часток $Q(A)$ є скінченнопородженим A-модулем (наприклад, якщо A – повне локальне), ця умова рівнозначна до того, що $\mu_A(A_0 / A) \leq 2$.

Теорему Дейда-Таусської-Цасенхауса було уточнено й узагальнено в роботі [12] таким чином.

Теорема 1.4.4. *Якщо* $\mu^*(A) = m$, *то для довільного дробового* A*-ідеалу* I *ідеал* I^{m-1} *є обертовний.*

Також там встановлено, що за деяких незначних обмежень показник $m-1$ є найменшим можливим.

Очевидно, з умови теореми 1.4.2 випливає, що $m \leq n$, тому ця теорема є наслідком теореми 1.4.4.

1.5. Кількість класів ідеалів

Питання про кількість класів ідеалів важливе в теорії чисел і теорії особливостей. Відомо (дивись, наприклад, [20, 21, 16]), що такі питання розпадаються на дві частини: локальну теорію, яка вивчає випадок, коли кільце A локальне, й теорію родів, яка вивчає перехід від локального випадку до «глобального». Для дедекіндових і бассових кілець локальний випадок простий: над локальним дедекіндовим кільцем, тобто кільцем дискретної оцінки, кожен ідеал є головним, для локального бассового кільця класи ідеалів збігаються з надкільцями. Так само для кілець із кубічними особливостями класи ідеалів — це або надкільця, або, якщо надкільце не є ґоренштейновим, а ще додається дуалізуючий модуль для цього кільця.

У роботі [12] показано, що при $\mu^*(A) > 3$ поведінка класів ідеалів стає принципово іншою. А саме, кількість класів ідеалів залежить від поля лишків. Зокрема, має місце такий результат [8, Теорема 4].

Теорема 1.5.1. Нехай $\mu^*(A) > 3$. Якщо поле лишків є нескінченним, то в A є таке надкільце B, яке має нескінченно багато класів точних ідеалів. У загальному випадку B можна обрати так, що для скінченних розширень поля лишків число класів ідеалів відповідного нерозгалуженого розширення кільця B прямує до нескінченності.

Нагадаємо, як будуються нерозгалужені розширення локального кільця B з полем лишків k. Нехай $k' = k[\theta]$ — скінченне сепарабельне розширення поля k, $\overline{f}(x)$ — мінімальний многочлен елемента θ і $f(x) \in B[x]$ — такий многочлен, що $\overline{f}(x)$ є його образом у $k[x]$. Тоді відповідне нерозгалужене розширення кільця B — це факторкільце $B' = B[x]/(f(x))$. Це знову локальне кільце з полем лишків k', причому максимальним ідеалом кільця B' є mB', де m — максимальний ідеал B.

У роботі [9] також встановлено критерій того, що кільце A має скінченну кількість класів ідеалів.

Теорема 1.5.2. ([13, Теорема 2]) *Кільце A має скінченну кількість класів ідеалів або його поле лишків скінченне, чи виконані умови:*

1. $\mu_A(A_0 / A) \le 2$, *де* A_0 — *максимальне надкільце* A;
2. $\mu_A(A + mA_0 / A) \le 1$.

Зауважимо, що $A + mA_0 / A$ *— це радикал модуля* A_0 / A.

Умови (1) і (2) цієї теореми збігаються з умовами того, що кільце A має лише скінченну кількість нерозкладних модулів без скруту (з точністю до ізоморфізму). Отже, якщо поле лишків нескінченне, то кількість класів ідеалів є скінченною тоді й лише тоді, коли скінченною є кількість класів ізоморфізму нерозкладних модулів без скруту.

У роботі [38] Гройель і Кнеррер дали цікаву інтерпретацію цих умов. А саме, вони встановили такий факт.

Твердження 1.5.3. *Припустимо, що поле лишків кільця* A *є алгебраїчно замкнене. Кільце* A *задовольняє умови теореми 1.5.2 (або, що рівносильно, має лише скінчену кількість класів ізоморфізму модулів без скруту) воно домінує одну зі* ***простих плоских особливостей*** *(або ADE-особливостей) за класифікацією Арнольда* [1].

Нагадаємо, що *плоска особливість* — це факторкільце вигляду $k[[x,y]]/(f(x,y))$, де $f(x,y)$ — степеневий ряд без вільного члена та без лінійних членів. *Прості плоскі особливості* в розумінні Арнольда [1] — це ті, для яких ряд $f(x,y)$ може бути обрано як:

$x^2 - y^{n+1}$ – особливість типу $A_n (n \geq 1)$,

$x^2 y - xy^{n-1}$ – особливість типу $D_n \ (n \geq 4)$,

$x^3 - y^4$ – особливість типу E_6,

$x^3 - xy^3$ – особливість типу E_7,

$x^3 - y^5$ – особливість типу E_8.

1.6. Однопараметричні особливості

У цьому розділі ми вважаємо, що кільце A є повним, локальним і «геометричним». Це означає, що поле лишків k алгебраїчно замкнене, а $char\, A = char\, k$. Тоді, як відомо [42, Theorem 28.3], A містить *підполе представників*, тобто підполе k', яке ізоморфно відображається на k. Надалі ми ототожнватимемо ці поля.

Нагадаємо означення числа параметрів, які визначають ідеали (дивися [25, 26]). Нехай A_0 — ціле замикання A у повному кільці часток $Q(A)$.

Воно є скінченнопородженим A-модулем (оскільки A повне) і кожен дробовий ідеал I ізоморфний до деякого ідеалу I', такого, що $A \subseteq I' \subseteq A_0$ [26, Proposition 2.4]. Нехай $V = A_0 / A$, $\mathrm{Gr}(d,V)$ позначає многовид підпросторів корозмірності d у просторі V, а $M(d,A)$ – підмноговид у $\mathrm{Gr}(d,V)$, утворений тими підпросторами, прообрази яких у A_0 є A-ідеалами. Позначимо через $I(x)$ ідеал, який відповідає точці $x \in M(d,A)$, а через $M(x)$ — підмножину в $M(d,A)$, утворену тими точками y, для яких $I(y) \simeq I(x)$. Ця підмножина є локально замкненою в $M(d,A)$. Позначимо через $r(x)$ її розмірність, а через $M(d,k) \subseteq M(d,A)$ підмножину, яка складається з усіх точок x, для яких $r(x) = k$. Це теж локально замкнена підмножина [25, Corollary 3.8]. Тоді *кількість параметрів, які визначають ідеали* кільця A — це число

$$\mathrm{par}(1,A) = \max_{d,k}(\dim M(d,k) - k).$$

Вочевидь, $\mathrm{par}(1,A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли A має лише скінченну кількість класів ідеалів. У роботі [34] було описано ті кільця, для яких $\mathrm{par}(1,A) = 1$. [2]

Теорема 1.6.1. $\mathrm{par}(1,\mathrm{A}) \le 1$ *тоді й лише тоді, коли* A *домінує* ***унімодальну або бімодальну*** *плоску особливість (за класифікацією Арнольда).* [3]

Зауважимо, що на відміну від випадку скінченної кількості класів ідеалів,

---

[2] Ця робота була узагальненням попередньої роботи Шапперта [29], в якій аналогічний результат був одержаний лише для плоских особливостей.

[3] У роботі [26] ці особливості звалися, як це робить Т. Уолл [30], *строго унімодальними*. Це пов'язано з різницею в означеннях модальності в [1] та в [30].

розглянутої вище у розділі 1.5, в однопараметричному випадку є велика різниця між поведінкою ідеалів і модулів без скруту вищих рангів. У роботі [32] було одержано критерій того, що $\mathrm{par}(n,A)\le 1$ для всіх рангів n, де $\mathrm{par}(n,A)$ позначає кількість параметрів, від яких залежать нерозкладні A-модулі без скруту рангу n.

Такі кільця звуться *ручними*. У тій самій роботі було доведено, що всі інші кільця є *дикі*. Це означає, що класифікація модулів без скруту над таким кільцем містить у собі задачу про класифікацію довільних наборів матриць одночасними подібними перетвореннями (формальне означення дивись у [32]). Для диких кілець числа $\mathrm{par}(n,A)$ нескінченно зростають з ростом n.

Сформулюймо основний результат роботи [32].

Теорема 1.6.2. *Кільце A ручне тоді й лише тоді, коли воно домінує одну з особливостей типу T_{pq}, тобто плоску особливість, визначену рівнянням*

$$x^p+y^q-\lambda x^2y^2, де\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le\frac{1}{2}.$$

Особливості типу T_{pq} є унімодальними, але крім них є ще 14 *«виняткових» унімодальних особливостей, а також дві серії і* 14 *«виняткових» двомодальних особливостей (дивись* [1, Розділ 15.1]*). Вони вже дикі, але для них* $\mathrm{par}(1,A)=1$.

1.7. Техніка обчислення ідеалів.

Надалі ми будемо користуватимемося технікою обчислення ідеалів, запропонованою в роботі [12]. Вона коротко описана в подальшій лемі, а її доведення (дивись [**12**, С.342]). Ми вважаємо, що A — повне локальне кільце розмірності Крулля 1 без нільпотентних елементів, і позначаємо через $m=radA$ його радикал, тобто єдиний максимальний ідеал, а через $k={}^{A}\!/_{m}$ – його поле лишків.

Лема 1.7.1. *Позначимо через* $A' = O(m)$ *кільце множників ідеалу* m*, а через* F k*-алгебру* A'/m.

1. Нехай I – ідеал кільця A, $I' = A'I$. Тоді $I' \supset I \supset Im = I'm$, а I/mI – підпростір у $W = I'/mI'$, який містить деяку множину твірних W як F-модуля.

2. Навпаки, якщо I' є A'-ідеалом, V – підпростір у $W = I'/mI'$, який містить деяку множину твірних W як F-модуля, то його прообраз $I = I(V)$ у I' є таким A-ідеалом, що $A'I = I'$ і $V = I/mI$.

3. Якщо V' – інший підпростір у W, який містить деяку множину твірних W як F-модуля, то $I(V) \simeq I(V')$ тоді й лише тоді, коли $V' = aV$ для деякого обертовного елемента $a \in F$.

4. A-ідеал $I = I(V)$ точний тоді й лише тоді, коли точним є A'-ідеал I', а з того, що $aV \subseteq V$ для будь-якого $a \in F$, випливає, що $a \in k$.

Підпростори $V \subseteq W$, які містять деяку множину твірних W як F-модуля, назвемо *породжуючими підпросторами.* Очевидно, це рівносильно тому, що $FV = W$.

З цієї леми випливає такий спосіб обчислення ідеалів кільця A.

- Будуємо ланцюг надкілець

$$A = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m,$$

в якому

$$A_{k+1} = O(m_k), \text{ де } m_k = A_k,$$

$$A_m - \text{ціле замикання } A \text{ у повному кільці часток.}$$

Такий ланцюг існує, оскільки, доки A_k не є цілозамкненим, $O(m_k) \neq A_k$.

- Обчислюємо ідеали кілець A_k оберненою рекурсією, починаючи з A_m, для якого кожен ідеал є головним, тобто ізоморфним A_m. Для обчислення A_k-ідеалів, якщо відомі всі A_{k+1}-ідеали, користуємося лемою 1.7.1.

• При цьому, якщо кільце A_k є ґоренштейновим, тобто $A_{k+1}/A_k \simeq A_k/m_k$, кожен A_k-ідеал, крім головних (ізоморфних A_k), є насправді A_{k+1}-ідеалом (дивись твердження 1.2.3 та 1.2.4).

Наступна лема дозволяє істотно скоротити перебір ідеалів над попередніми кільцями.

Лема 1.7.2. *Нехай* J *— такий* A_{k+2}*-ідеал, що* $\mu_{A_{k+2}}(J) = \mu^*(A)$. *Тоді кожен* A_k*-ідеал* I, *для якого* $A_{k+1}I = J$, *є насправді* A_{k+1}*-ідеалом.*

Отже, при обчисленні A_k-ідеалів цей ідеал можна не розглядати.

Доведення. Позначимо $F_k = A_{k+1}/m_k$, $F_{k+1} = A_{k+2}/m_{k+1}$. Вочевидь, $\mu^*(A) \geq \mu_{A_{k+1}}(J) \geq \mu_{A_{k+2}}(J)$, тому $\mu_{A_{k+1}}(J) = \mu_{A_{k+2}}(J)$, звідки випливає, що $Jm_k = Jm_{k+1}$ і кожна множина твірних $W = J/m_k$ як F_k-модуля є його множиною твірних як F_{k+1}-модуля. Отже, якщо $V \subseteq W$ — такий підпростір у W, що $F_k V = W$, то й $F_{k+1}V = W$, тому $I(V)$ є A_{k+1}-ідеалом.

1.8. Метод побудови базису скінчнного поля

Означення 1.8.1. *Базис* $(f_1,...,f_n)$ *скінченного поля* F_q *називається нормальним, якщо* $f_i = f_{i-1}^q$ *для всіх* $i = 2,...,n$.

Оскільки елементи поля F_q подаються у вигляді векторів над F_q, то при побудові нормального базису спочатку будується оператор A піднесення до степеня в звичайному базисі, а потім знаходиться базис, в якому цей оператор є подібним до оператора B циклічного зсуву. Побудова нормального базису важлива хоч би тому, що операція піднесення до квадрату у полі F_{2^n} є лише циклічним зсувом координат у нормальному базисі над F_2 [9]. На операції піднесення до квадрату базуються деякі обчислення у групі точок еліптичної кривої над скінченним полем, що може бути використано в алгоритмі цифрового підпису на еліптичній кривій над полем F_{2^n} [9].

Нагадаємо, що найшвидший зі ймовірнісних методів [***37***] побудови нормального базису має складність $O\left(n^3+n^2\log^2 p\right)$. У [44] дано детермінований алгоритм, складність якого становить $O\left(n^4\sqrt{p}\right)$. Серед детермінованих алгоритмів найкращими є алгоритми Льонстри і Лунберґа [37], складність яких становить $O\left(n^4\log^2 p+n^2\log^3 p\right)$. Остання оцінка отримана за умови наявності незвідного полінома малої ваги над скінченним полем, наявність якого в таблиці незвідних поліномів не гарантована, а задача його знаходження складна.

У нашій роботі запропоновано новий метод побудови нормального базису в F_q, де $q=p^4$. Метод ґрунтується на теорії λ-матриць і нормальної форми Фробеніуса, його складність для довільного скінченного поля $O\left(n^3\log_2 p\right)$.

Створений метод ґрунтується на теорії λ-матриць і нормальної форми Фробеніуса, його складність для довільного скінченного поля $O(n^3\log_2 p)$.

Оскільки елементи поля скінченного поля F_q подаються у вигляді векторів над F_q, то при побудові нормального базису спочатку будується оператор A піднесення до степеня у звичайному базисі, а потім знаходиться базис, у якому цей оператор є подібним до оператора B циклічного зсуву.

Використання методу Данилєвського, при знаходженні власних значень, зводиться до приведення матриці з допомогою певних перетворень подібності до так званої форми Фробеніуса.

Результатом такого перетворення буде **матриця, перший рядок якої містить коефіцієнти характеристичного многочлена вхідної матриці**. Знайшовши корені даного многочлена, отримуємо шукані власні значення.

Суть методу Данілєвського полягає у приведенні характеристичного визначника (характеристичного рівняння) матриці до так званої нормальної форми Фробеніуса:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} p_1-\lambda, p_2, \ \dots \ , p_n \\ 1, \quad -\lambda, \quad \dots \ ,0 \\ 0, \quad 1, -\lambda, \dots, 0 \\ .., \ .., \ .., \quad .., \\ .., \ .., \ .., \quad ., -\lambda \end{vmatrix} \qquad (1)$$

і розклад його, в подальшому, на елементи першого рядка. Таким чином ми тримаємо характеристичний многочлен степені n, коефіцієнтами при невідомих якого є елементи першого рядка матриці Фробеніуса:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (p_1-\lambda)\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}+p_3\lambda^{n-3}-\ldots+(-1)^{n-1}p_n = \\ &= (-1)^n\left(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-p_3\lambda^{n-3}-\ldots-p_n\right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Очевидно, що рівняння (2) має n коренів $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, які можна знайти, використовуючи будь-який з методів призначених для знаходження розв'язку нелінійного рівняння (метод хорд, метод дотичних, метод простої ітерації та інші).

Отже, після того, як основна ідея методу відома, розгляньмо, яким чином, виходячи з матриці A, переходимо до матриці P.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad P=\begin{vmatrix} p_1, & p_2, & \ldots & , \ p_n \\ 1, & 0, & \ldots & , \ 0 \\ 0, & 1, \ 0, & \ldots, & 0 \\ .., & .., \ .., & & ..,\ldots \\ .., & .., \ .., & & 1, \ 0 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Згідно з методом Данілевського, робиться це за $(n-1)$-ин етап, на кожному з яких виконується таке перетворення подібності:

$$A^{(k)} = M_{n-k}^{-1} A^{(k-1)} M_{n-k},\ k = 1,\ldots,n-1,\ A^{0} = A, P = A^{(n-1)}, \tag{4}$$

і кожне з яких послідовно приводить рядки матриці A, починаючи з останнього, у відповідних рядків матриці P. Також зазначимо, що на кожному етапі елементи матриць M_k та M_k^{-1}, $(k = 1,\ldots,n-1)$ визначаються згідно наступних формул:

$$M_k : \begin{cases} m_{ij} = e_{ij} : i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}; i \neq k; \\ m_{kj} = -\dfrac{a_{k+1j}}{a_{k+1}^{(n-k-1)}};\ j = \overline{1,n};\ j \neq k; \\ m_{kk} = \dfrac{1}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}. \end{cases} \quad M_k^{-1} : \begin{cases} m_{ij} = e_{ij};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq k; \\ m_{kj} = a_{k+1,j}^{(n-k-1)};\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

і кожне з яких послідовно приводить рядки матриці A починаючи з останнього, у відповідні рядки матриці P.

Означення 1.8.2. *Матриця A називається простою, якщо її характеристичний поліном співпадає з мінімальним поліномом [8].*

Теорема 1.8.1. *Характеристичний визначник вихідної й подібної матриці співпадають.*

Ідея методу Данілєвського полягає в тому, що матриця *A* подібними перетвореннями зводиться, до так званої *нормальної форми Фробеніуса*.

Висновки до розділу 1

Отже, у цьому розділі дано огляд класичних і сучасних результатів про будову ідеалів та модулів над одновимірними особливостями, а також викладені технічні засоби, які використовуються при обчисленнях ідеалів і не належать авторові.

РОЗДІЛ 2

КУБІЧНІ КІЛЬЦЯ І ЇХНІ ІДЕАЛИ

2.1. Вступ

В цьому розділі досліджено кубічні кільця. Описано всі такі кільця, що їх ідеали і, зокрема, встановлено зміну $\mathrm{par}(\mathbf{C})$ для кубічного кільця $\mathbf{C}$. Як наслідок, було показано, що кубічне кільце є ґоренштейновим тоді і тільки тоді це є плоска особливість кривої. Тобто розмірність занурення дорівнює 2.

2.2. Загальні відомості

Позначимо через D дискретно нормоване кільце з полем часток $\mathbf{K}$, максимальним ідеалом $m = t\mathbf{D}$ і полем лишків $\mathbf{k} = \mathbf{D}/t\mathbf{D}$. Кубічне кільце над D за означенням є D. Кубічне кільце над D є за означенням D-підалгеброю $\mathbf{C}$ в тримірній напівпростій K-алгебрі $\mathbf{L}$, яка є вільним D-підмодулем рангу 3. Також позначимо через A ціле замикання $\mathbf{D}$ в $\mathbf{L}$ і завжди вважатимемо, що А є скінченно породженим як С-модуль. Рівнозначна умова наведена в [4]: m-адичне поповнення $\hat{\mathbf{C}}$ кільця $\mathbf{C}$ не має нільпотентних елементів. Це завжди так у випадку, коли алгебра $\mathbf{L}$ сепарабельна, скажімо, якщо $char\mathbf{K} = 0$. Також ми припускаємо $\mathbf{A}_m = t^m\mathbf{A} + \mathbf{D}$ і $\mathbf{J}_m = t\mathbf{A}_{m-1} = \mathrm{rad}\mathbf{A}_m$ $(m > 0)$.

Добре відомо, наприклад, зі [**21**], що має місце однозначна відповідність між $\mathbf{C}$-ідеалами і $\hat{\mathrm{C}}$-ідеалами, яка відображає M у його m-адичне поповнення. Ця відповідність відбиває ізоморфізми, тобто відображає неізоморфні ідеали в неізоморфні. Тому можна вважати (що ми й робитимемо), що $\mathbf{D}$ повне в m-адичній топології.

Означення 2.2.1. *Розмірністю занурення* $\mathrm{edim}\mathbf{C}$ *локального нетерового кільця* $\mathbf{C}$ *з максмальним ідеалом* J *із полем лишків* $\mathbf{k}$ *називається величина* $\dim_{\mathrm{k}} \mathbf{J}/\mathbf{J}^2$. *Якщо* $\mathbf{C}$ *є кільцем Круля розмірності* 1 *і* $\mathrm{edim}\mathbf{C}=2$, *то таке кільце* $\mathbf{C}$ *називають особливістю плоскої кривої.*

З погляду геометрії, коли $\mathbf{C}$ містить підполе представників із поля $\mathbf{k}$, це фактично означає, що існує плоска крива $\mathbf{C}$, така, що $\mathbf{C}$ є поповннням локального кільця особливої точки $x \in C$.

З загальної теорії розгалужень у скіненному розширенні ми бачимо, що можливі такі випадки:

Одногілковий випадок із розгалуженням: $\mathbf{L}$ є полем, максимальний ідеал кільця $\mathbf{A}$ дорівнює $\tau\mathbf{A}$, $\mathbf{A}/\tau\mathbf{A}, \mathbf{k}$ і $t\mathbf{A}=\tau^3\mathbf{A}$.

Одногілковий випадок нерозгалужений: $\mathbf{L}$ є полем, максимальний ідеал $\mathbf{A}$ рівний $t\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}/t\mathbf{A}=\mathbf{k}[\overline{\theta}]$ — це кубічне розширенням поля $\mathbf{k}$, де $\overline{\theta}$ є коренем незвідного кубічного многочлена $f(x)\in\mathbf{k}[x]$.

Двогілковий випадок із розгалуженням: $\mathbf{L}=\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}$, де $\mathbf{K}_1$ — це квадратичне розширенням $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}$ і $t\mathbf{D}_1=\tau^2\mathbf{D}_1$, де τ – первинний елемент із D_1.

Двогілковий випадок без розгалуження: $\mathbf{L}=\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}$ де $\mathbf{K}_1$ є квадратичним розширенням $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}=\langle 1, e, \alpha\rangle$, максимальний ідеал кільця $\mathbf{D}_1$ — це $t\mathbf{D}_1$, а $\mathbf{D}_1/t\mathbf{D}_1=\mathbf{k}[\overline{\theta}]$ є квадратичним розширенням поля $\mathbf{k}$ (тобто нерозгалужений випадок), де $\overline{\theta}$ — це корінь незвідного квадратичного полінома $f(x)\in\mathbf{k}[x]$.

Тригілковой випадок: $\mathbf{L}=\mathbf{K}^3$, $\mathbf{A}=\mathbf{D}^3$.

Нагадаємо [22, 12, 13] що для кубічного кільця $\mathbf{C}$ кожен ідеал $\mathbf{C}$ є ізоморфним або до надкільця $\mathbf{C}$, тобто до кубічного кільця $\mathbf{B}$, що задовольняє умову $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{B}\subset\mathbf{L}$, або до дуального ідеалу $\mathbf{B}^*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{B},\mathbf{D})$ до такого надкільця. Щоб описати всі ідеали кільця $\mathbf{C}$, нам потрібно описати надкільця кільця $\mathbf{C}$. Зрозуміло, що кожне кубічне кільце з поля $\mathbf{L}$ містить деяке $\mathbf{A}_m$. Отже, щоб описати всі кубічні кільця, а також їхні ідеали, нам тільки треба описати надкільця $\mathbf{A}_m$. Якщо $\mathbf{B}$ є ідеалом кільця $\mathbf{C}$, ми також будемо казати, що $\mathbf{B}$ *домінує* $\mathbf{C}$.

Завдяки тому, що (з точністю до ізорфізму) $\mathbf{A}$-ідеал є саме $\mathbf{A}$, можна продовжити по індукції: покладаючи, що всі надкільця кільця $\mathbf{A}_n$ відомі, знайдемо усі надкільця $\mathbf{A}_{n+1}$. Якщо $\mathbf{C}$ є надкільцем кільця $\mathbf{A}_{n+1}$, тоді $\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{A}_n$ — це ідеал для $\mathbf{A}_n$, $t\mathbf{B}\subset\mathbf{C}$ і $\mathbf{C}/t\mathbf{B}$ є $\mathbf{k}$-підалгеброю в $\mathbf{B}/t\mathbf{B}$. Якщо $\mathbf{B}\supseteq\mathbf{A}_{m-1}$, то $t\mathbf{B}\supseteq\mathbf{J}_m$, зрозуміло, що $\mathbf{C}\supseteq\mathbf{J}_m+\mathbf{D}=\mathbf{A}_m$. Таким чином, наступна процедура дає змогу для знаходження всіх надкілець кільця $\mathbf{A}_{n+1}$, які не є надкільцями кільця $\mathbf{A}_m$.

Процедура

- Для кожного ідеалу $\mathbf{B}$ над $\mathbf{A}_m$, яке не є надкільцем кільця $\mathbf{A}_{m-1}$, обчислимо $\bar{\mathbf{B}}=\mathbf{B}/t\mathbf{B}$. Покладаємо $\bar{\mathbf{A}}=(\mathbf{A}_m+t\mathbf{B})/t\mathbf{B}\subseteq\bar{\mathbf{B}}$.
- Знайдемо всі власні підалгебри $\mathbf{S}\subset\bar{\mathbf{B}}$, такі, що $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{S}=\bar{\mathbf{B}}$.
- Для кожного такого S знайдемо його прообраз у $\mathbf{B}$.

2.3. Обчислення

2.3.1. Одногілкові, розгалужений випадок. Припустимо

$\mathbf{C}_{2r}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r}\mathbf{A}$, де $v(\alpha)=1$,

$\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}\mathbf{A}$, де $v(\alpha)=2$,

тут v є дискретним нормуванням, яке відповідає кільцю $\mathbf{A}$, тобто $v(\alpha)=k$ означає, що $\alpha\in\tau^k\mathrm{A}\setminus\tau^{k+1}\mathrm{A}$. Зокрема, $\mathbf{C}_0(\alpha)=\mathbf{A}$. Зрозуміло, що α може бути єдиним чином обране як $\tau+a\tau^2$ для $\mathbf{C}_{2r}$ і як $\tau^2+at\tau$ для $\mathbf{C}_{2r+1}$, де $a\in\mathbf{D}$ визначено за модулем t^r.

Теорема 2.3.1. *Кожне надкільце з* $\mathbf{A}_m$ *збігається з* $t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$ *для деяких* k,r, *таких, що* $r+k\le m$, *і деякого* α. *Кільця* $\mathbf{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості алгебраїчних кривих у цьому випадку.*

Доведення. Якщо $m=1$, то $\mathrm{A}_1=t\mathrm{A}+\mathrm{D}$ і $m=k+r$, але $k>0$, тому $r=0$, отже

$B = \mathbf{D} + t^k \mathbf{C}_0(\alpha) = \mathbf{D} + t^k \mathbf{A}$.

Нехай тепер $m > 1$, покладемо $B = \mathbf{D} + t^k \mathbf{C}_{2r}(\alpha)$, $B-$ ідеали, де $k > 0$, $m = k + r$. Базис B складають елементи $1, t^h\alpha, t^m\tau^s$, де $h = k + \left[{r}/{2} \right]$, а $s \in \{1, 2\}$, причому $s \equiv r(2)$. Оскільки $t^h\alpha \notin J_m$, то підалгебра S обовязково містить клас $t^h\alpha + ct^m\tau^s$ для певного $c \in D$. Якщо $k = 0$, то $m = r$ і $v(t^m\tau^s) = 2v(t^h\alpha)$. Тому B не має власних підалгебр, що містять клас $t^h\alpha + ct^m\tau^s$. Якщо ж $k > 0$, то прообраз кільця $\mathbf{S}$ співпадає з $\mathbf{D} + (t^h\alpha + ct^m\tau^s)\mathbf{D} + t^{m+1}\mathrm{A}$, тобто співпадає з $t^{k-1}\mathbf{C}_{r+2}(\alpha') + \mathbf{D}$, де $\alpha' = \alpha + ct^{m-h}\tau^s$. Отже, надкільця A_m є у бієктивній відповідності з $t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$ $r + k \leq m$ *і деякого* α. Тепер неважко впевнитися, що $e\dim C_r(\alpha) = 2$, але для решти кілець $e\dim C = 3$. Перевіримо це.

Нагадаємо, що $\mathbf{A}_m = t^m\mathbf{A} + \mathbf{D}$ і $\mathbf{J}_m = t\mathbf{A}_{m-1} = \mathrm{rad}\,\mathbf{A}_m \ (m > 0)$, де D – дискретно нормоване кільце з полем часток $\mathbf{K}$, максимальний ідеал $\mathrm{m} = t\mathbf{D}$. Також позначимо A ціле замикання $\mathbf{D}$ в $\mathbf{L}$, тобто у цьому випадку $A = D + \alpha D + \alpha^2 D$ і завжди покладатимемо, що А є скінченно породженим як С-модуль.

Розглянемо випадок $r = 2k$, тоді як відомо $\mathbf{C}_{2k}(\alpha) = \mathbf{D} + t^k\alpha\mathbf{D} + t^{2k}\mathbf{A}$, де $v(\alpha) = 1$ і $\alpha \in A$, а $m = tD + t^k\alpha\mathbf{D} + t^{2k}\mathbf{A}$ і $m^2 = t^2D + t^{k+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2k+1}A + t^{2k}\alpha^2 D = t^2D + t^{k+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2k+1}A$, головний ідеал $t^{2k}\alpha\mathbf{D}$ не записано як породжуючий у m^2, бо $t^{2k}\alpha\mathbf{D} \subset t^{k+1}\alpha\mathbf{D}$, тому ${m}/{m^2} = < t, t^k\alpha >$. Якщо ж $r = 2k + 1$, то $\mathbf{C}_{2k+1}(\alpha) = \mathbf{D} + t^k\alpha\mathbf{D} + t^{2k+1}\mathbf{A}$, де $v(\alpha) = 2$. Тоді $m = tD + t^k\alpha\mathbf{D} + t^{2k+1}\mathbf{A}$ і $m^2 = t^2D + t^{k+2}\alpha\mathbf{D} + t^{2k}\alpha^2\mathbf{D} + t^{2k+2}\mathbf{A} + t^{3k+1}\mathbf{A} = t^2D + t^{k+2}\alpha\mathbf{D} + t^{2k+2}\mathbf{A}$, звідси ${m}/{m^2} = < t, t^k\alpha >$. Отже, в обох випадках розмірність занурення рівна 2. Таким чином, це перевірено для випадків $r = 2k$ і $r = 2k + 1$.

Нехай тепер $B = \mathbf{D} + t^k\mathbf{C}_{2r}(\alpha)$, $B-$ ідеали, де $k > 0$, тобто $B =$

$\mathrm{D} + t^{k+r}\alpha\mathrm{D} + t^{2r+k}\mathrm{A}$. Перевіримо решту випадків, де $k > 0$ у виразі $\mathbf{A} = t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$, тому $\mathbf{C}_{2k}(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r}\mathbf{A}$, звідси $\mathbf{A} = \mathbf{D} + t^k\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathrm{D} + t^{k+r}\alpha\mathrm{D} + t^{2r+k}\mathrm{A}_0$, оскільки $\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r}\mathbf{A}_0$. Отже, ідеал цього кільця *A* з особливістю $t^k\mathbf{C}_r(\alpha)$ має вигляд $m = t\mathbf{D} + t^{k+r}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k}\mathbf{A}$ звідси $m^2 = t^2D + t^{k+r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+1}A + t^{2k+2r}$, $A = t^2D + t^{k+r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+1}A$, бо $t^{2r+k+1}A \supset t^{2k+2r}A$. Отже, ${m}/{m^2} = < t, t^{r+k}\alpha, t^{2r+k}\alpha^2 >$ тобто $e\dim A = 3$.

Нехай $\mathbf{A} = t^k\mathbf{C}_{2k+1}(\alpha) + \mathbf{D}, k > 0$, де $\mathbf{C}_{2k+1}(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$, $k > 0$. Тоді $m = t\mathbf{D} + t^{k+r}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+1}\mathbf{A}$ і

$$m^2 = t^2D + t^{k+r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+2}A + t^{2k+2r+1}A = t^2D + t^{k+r+2}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+2}A.$$

Отже, ${m}/{m^2} = < t, t^{r+k}\alpha, t^{2r+k+1}\alpha^2 >$, тобто $e\dim A = 3$.

Теорему доведено.

2.3.2. Одногілковий нерозгалужений випадок. Позначимо $\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r}\mathbf{A}_0$, де $\alpha \in \mathbf{A}^\times \setminus \mathbf{D}$. Як і раніше $\mathbf{C}_0(\alpha) = \mathrm{A}_0$. Зауважимо, що α може бути однозначно обраний як $\theta + a\theta^2$, де θ – фіксований прообраз елемента $\widehat{\theta}$ в D_1 і $a \in \mathrm{D}$ є однозначно визначеним за модулем t^r.

Теорема 2.3.2. *Кожне надкільце* $\mathbf{A}_m$ *збігається з* $t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$ *для певних* k, r *і* α *з* $2r + k \le m$. *Кільця* $\mathrm{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Доведення. Для $m = 1$ це очевидно. Тому, використовуючи процедуру для $m > 1$, ми покладаємо $\mathbf{B} = t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$ де $2r + k = m$. Тоді базис кільця $\bar{\mathbf{B}}$ складається з класів елементів $\{1, t^{r+k}\alpha, t^m\alpha^2\}$ причому $\alpha^2 \in \mathbf{A}^\times \setminus (\mathbf{D} + \alpha\mathbf{D})$. Оскільки $t^{r+k}\alpha \notin \mathbf{J}_m$, $\mathbf{S}$ повинно містити клас елепентів $t^{r+k}\alpha' = t^{r+k}\alpha + ct^m\alpha^2$ для деякого $c \in \mathbf{D}$. Як і раніше, це неможливо при $k = 0$. Якщо $k > 0$, то прообраз $\mathbf{S}$ — це $\mathbf{D} + t^{r+k}\alpha' + t^{m+1}\mathbf{A} = t^{k-1}\mathbf{C}_{r+1}(\alpha') + \mathbf{D}$.

Знайдімо $e\dim C_r(\alpha)$. Оскільки $\mathbf{C}_r(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r}\mathbf{A}_0$, то $m=t\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r}\mathbf{A}_0$, де $v(\alpha)=1$ і $\alpha\in\mathbf{A}_0$. Знайдемо m/m^2, тут $m=t\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r}\mathbf{A}_0$ і $m^2=t^2D+t^{r+1}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}A_0+t^{2r}\alpha^2D=t^2D+t^{r+1}\alpha\mathbf{D}+t^{2r}A_0$, оскільки $t^{2r}A_0=t^{2r}D+t^{2r}\alpha D+t^{2r}\alpha^2D\subseteq t^2D+t^{r+1}\alpha D+t^{2r}\alpha^2D$, де $\langle 1,e,\alpha\rangle=A \quad m^2$, зокрема $t^{2r}\alpha\mathbf{D}\subset t^{r+1}\alpha\mathbf{D}$, тому $m/m^2=<t,\, t^k\alpha>$. Отже, $e\dim C_r(\alpha)=2$.

Тепер знайдемо розмірність занурення для всіх інших кілець.

Якщо ж $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}=\mathbf{D}+t^k\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0=\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0$, то $m=t\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0$, де $\alpha\in A_0$. Тоді $m^2=t^2\mathbf{D}+t^{r+k+1}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k+1}\mathbf{A}_0$, бо $t^{3r+2k}\alpha\mathrm{A}_0\subset t^{2r+k}\mathrm{A}_0$ отже $m/m^2=<t^k,\, t^{r+k}\alpha,\, t^{2r+k}>$. Отже, $e\dim C_r(\alpha)=3$.

Тепер знайдемо розмірність занурення для всіх інших кілець.

Якщо ж $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}=\mathbf{D}+t^k\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0=\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0$, то $m=t\mathbf{D}+t^{r+k}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k}\mathbf{A}_0$, де $\alpha\in A_0$. Тоді $m^2=t^2\mathbf{D}+t^{r+k+1}\alpha\mathbf{D}+t^{2r+k+1}\mathbf{A}_0$, бо $t^{3r+2k}\alpha\mathrm{A}_0\subset t^{2r+k}\mathrm{A}_0$ отже $m/m^2=<t^k,\, t^{r+k}\alpha,\, t^{2r+k}>$. Отже, $e\dim C_r(\alpha)=3$.

2.3.3. Двогілковий, розгалужений випадок. Позначимо через v_1 нормування визначене кільцем $\mathbf{D}_1$, де e такий ідемпотент в K, що $eA=D_1$, $eA=D_1$ і покладемо

$\mathrm{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$, де $r=2l+q$.

$\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}\mathbf{A}$, де $t=\lambda\tau^2$.

В обох випадках $\alpha\in\mathbf{D}_1$ і $v(\alpha)=1$, бо $\alpha=\tau+a\tau^2$, де v це нормування визначене в кільці $\mathbf{D}_1$. Зрозуміло, що α може бути єдиним чином вибрано як $a\tau$, де $a\in\mathbf{D}$ за модулем r. Помітимо, що $\mathbf{C}_{0,q}(\alpha)=\mathbf{D}+e_1\mathbf{D}+t^q\mathbf{A}$ – це всі розкладні кільця в цьому випадку і $\mathbf{C}_{0,0}(\alpha)=\mathbf{A}$.

Теорема 2.3.3. *Кожне надкільце кільця* A_m *збігається чи з* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$ *чи з*

$t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$, *де* $k+r\le m$. *Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ *і* $\mathbf{C}_r(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих в цьому випадку.*

Доведення. Випадок $m=1$ є очевидним. Тому, використовуючи Процедуру, ми покладаємо що $m>1$ і $k+r=m$. Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$, базис кільця $\bar{\mathbf{B}}$ складається з класів $\{1,t^{k+l}(e+t^q\alpha),t^m\tau\}$. Оскільки $t^{k+l}(e+t^q\alpha)\notin\mathbf{J}_m$ тобто є $t^{k+l}(e+t^q\alpha)$ обовязковим, підалгебра $\mathbf{S}$ має містити клас $t^{k+l}(e+t^q\alpha')$ для деякого $\alpha'\in\mathbf{D}_1$ з $v(\alpha')=1$. Знову випадок $k=0$ є неможливим. Якщо ж $k>0$, то праобраз кільця $\mathbf{S}$ співпадає з $t^{k-1}\mathbf{C}_{l+1,q}+\mathbf{D}$. Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$, то обчислення є повністю подібними.

Тепер ще залишилася довести, що $\mathrm{edim}\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathrm{edim}\mathbf{C}_r(\alpha)=2$, в той час як $\mathrm{edim}\mathbf{C}=3$ для всіх інших кілець. Доведемо це. Розглянемо випадок $r=2l+q$. Оскільки, $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A},$ де $r=2l+q,$ то $m=t\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A},\ \alpha\in\mathbf{A}$, де елементи $\langle 1,e,\alpha\rangle$ де α такий, що $v(\alpha)=1$ $\alpha=\tau+a\tau^2$ утворюють базу *A* над *D*, $A=eD+\alpha D+(1-e)D$. Зауважимо, що елемент e є ідемпотентом, тобто $e^2=e$. Крім того $\langle 1-e,e,\alpha\rangle$, $(1-e)^2=1-e$ теж є базою *A* над *D* і виконується властивість ортогональності $e(1-e)=0$. Тоді враховуючи, що $r=2l+q\ge 2$ і $D_1=\langle e,\alpha\rangle$, $D_1=eA$ у цьому випадку маємо $m^2=t^2\mathbf{D}+t^{l+1}(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^{r+1}\mathbf{A}+t^{2l}(e\ \ +2t^q\alpha+t^{2q}\alpha^2)\mathbf{D}$ а оскільки $2l\ge l+1$, то $t^{l+1}eD\supset t^{2l}eD$, отже можна записати попередню рівність так $t^2\mathbf{D}+t^{l+1}(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^{2l+q}(\alpha+t^q\alpha^2)\mathbf{D}+t^{r+1}\mathrm{A},\ \alpha\in D_1$.

Елементи $t^2\mathbf{D},\ t^{l+1}(e+t^q\alpha)\mathbf{D},\ t^{2l+q}(\alpha+t^q\alpha^2)\mathbf{D}$ містять елементи $t^r\mathbf{D},\ t^r(e+t^q\alpha)\mathbf{D},\ t^r(\alpha+t^q\alpha^2)\mathbf{D}$ а тому породжують $t^r(\mathbf{D}+(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+(\alpha+t^q\alpha^2)\mathbf{D})=t^rA$. Звідси випливає, що

$m = m^2 + tD + t^l(e + t^q\alpha)\mathbf{D}$, тобто розмірність занурення дорівнює двом.

Для $\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$ маємо $m = t\mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$, крім того $\mathbf{A} = D[\theta] = \langle 1,\theta,\theta^2 \rangle$ і елемент $\alpha \in \mathbf{A}$ має розклад $\alpha = \theta^2 + \dots$. Зауважимо, що $t^{2r+1}\theta^2 \in \alpha^2 t^{2r}$, тому $t^{2r+1}\theta^2 A \subset \alpha^2 t^{2r} D$. Це так, бо $v(t) = 3$ тобто $\theta^3 | t$ і $v(\theta) = 1$, $v(\alpha) = 2$, $v(\alpha^2) = 4$. В результаті $t\theta^2 | \theta^5$ і $\alpha^2 | \theta^5$, тому $t\theta^2 \in \alpha^2$ що рівносильно $t^{2r+1}\theta^2 \in \alpha^2 t^{2r}$. Знайдемо $m^2 = t^2 D + t^{r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+2}A + t^{2r}\alpha^2 D = t^2 D + t^{r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r}\alpha^2 D = t^2 D + t^{r+1}\alpha D + t^{2r+1}A$, бо $\alpha^2 = \tau^2 + \beta$, де $\alpha^2 = \beta \in \tau^3 D_1 = \tau t D_1$.

Тому ${}^{m}\!/\!_{m^2} = \langle t, t^r\alpha \rangle$. Отже, розмірність занурення рівна двум.

Для $R = t^k\mathbf{C}_{l,r}(\alpha) + \mathbf{D}$, *де* $\mathbf{C}_r(\alpha) = D + t^r\alpha D + t^{2r+1}\theta^2 D$, тоді $m = t\mathbf{D} + t^{r+k}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1+k}\mathbf{A}$ і $m^2 = t^2\mathbf{D} + t^{r+k+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+2+k}\mathbf{A}$. Звідси ${}^{m}\!/\!_{m^2} = \langle t, t^{r+k}\alpha, t^{2r+k+1} \rangle$. У випадку $\mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$, $R = A_n = t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$ маємо $m = t\mathbf{D} + t^k\mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A} = t\mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$. Звідси $m^2 = t^2\mathbf{D} + t^{r+1}\alpha\mathbf{D} + {}$ ${} + t^{2r+2}\mathbf{A} + t^{2r}\alpha^2\mathbf{D} + t^{3r+1}\mathbf{A} = t^2\mathbf{D} + t^{r+1}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+2}\mathbf{A}$.

Звідси ${}^{m}\!/\!_{m^2} = \langle t, t^k, t^r\alpha \rangle$, отже, $e\dim\mathbf{C}_r(\alpha) = 3$. Аналогічно розмірність занурення кільця $t^k\mathbf{C}_r(\alpha) + \mathbf{D}$ теж дорівнює 3.

2.3.4. Двогілковий, нерозгалужений випадок. Покладемо, що $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha) = \mathbf{D} + t^l(e_1 + t^q\alpha)\mathbf{D} + t^r\mathbf{A}$, де $2k + 2r$ і $\alpha \in \mathbf{D}_1 \setminus (e_1\mathbf{D} + t\mathbf{D})$. Тоді α може бути вибраний як $a\theta$, де θ це фіксований праобраз елемента $\bar{\theta}$ в $\mathbf{D}_1$ і $a \in \mathbf{D}$ єдиним чином визначається за модулем t^l. Елементи $\{1, e, \alpha\}$ утворюють базу A_0.

Знову $\mathbf{C}_{0,q}(\alpha) = \mathbf{D} + e_1\mathbf{D} + t^q\mathbf{A}$ це всі нерозкладні кільця в цьому випадку. Головним чином, $\mathbf{C}_{0,0}(\alpha) = \mathbf{A}$.

Теорема 2.3.4. *Кожне надкільце кільця* $\mathbf{A}_m$ *збігається з одним з кілець* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$*, де* $k+r\le m$*. Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Випадок $m=1$ очевидним. Тому, використовуючи процедуру, ми покладаємо що $m>1$ і $k+r=m$. Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$, базис кільця $\bar{\mathbf{B}}$ складається зі класів $\{1,t^{k+l}(e+t^q\alpha),t^m\tau\}$. Оскільки $t^{k+l}(e+t^q\alpha)\notin\mathbf{J}_m$, підалгебра $\mathbf{S}$ повинна містити класи $t^{k+l}(e+t^q\alpha')$ для деякого $\alpha'\in\mathbf{D}_1$ з $v(\alpha')=1$. Знову випадок $k=0$ неможливий. Якщо ж $k>0$, то праобраз кільця $\mathbf{S}$ співпадає з $t^{k-1}\mathbf{C}_{l+1,q}+\mathbf{D}$. Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$, то обчислення є повністю подібними.

Для подальших міркувань нам потрібно знати, що $1, e+t^q\alpha, \alpha+t^q\alpha^2$ це база для A над D. Спочатку доведемо, що $e+t^q\alpha, \alpha+t^q\alpha^2$ це база D_1 над D. Нагадаємо, що $D_1=\langle e,\alpha\rangle$ над D, тому $\alpha^2=a\alpha+be$, причому, оскільки $v(\alpha)=1, v(\alpha^2)=2$, то $t|a,\ t|b$. Нехай це не так, тоді у випадку $t\nmid b$ маємо, що $v(\alpha^2)=0$, у випадку $t\nmid a$ маємо $v(\alpha^2)=1$. Це суперечить умові $v(\alpha^2)=2$.

Тепер ще залишилася нескладна перевірка того, що $e\dim\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=e\dim\mathbf{C}_r(\alpha)=2$, в той час як $e\dim\mathbf{C}=3$ для всіх інших кілець. Оскільки $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A},\ a\in D^\times$, де $D^\times$– обертовні елементи з D, то $m=t\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$ і $m^2=t^2\mathbf{D}+t^{l+1}(e+t^q\alpha)D+t^{r+1}\mathbf{A}$. Зазначимо, що базою для m є $\left\{t, t^l(e+t^qae), t^re\right\}$. Твірними для m^2 є $\left\{t^2, t^{l+1}(e+t^qae), t^{r+1}e\right\}$.

Перевіримо, що твірними для ${}^{m}\!/_{m^2}$ є класи елементів $t,\ t^l(e+t^qae)$. Для цього треба довести, що виконується належність $t^rA\subset m^2+tD+t^l(e+t^qae')\mathrm{D}=M$. Очевидно, що $t^r\in M$ і $et^r\in M$.

Залишилось перевірити, що $t^r\alpha\in M=\left(m^2+\left\langle t, t^l(e+t^q\alpha)\right\rangle\right)$. Оскільки базові елементи t^r, $t^l(e+t^q\alpha)$ належать до M, то залишилось довести, що $t^r(\alpha+t^q\alpha^2)\in M$. Але квадрат елемента $t^l(e+t^q\alpha)$ рівний $t^{2l}(e+2\alpha t^q+\alpha^2t^{2q})=t^{2l}(e+\alpha t^q)+t^r(\alpha+\alpha^2t^q)$ належить до m^2, а перший доданок справа – $t^{2l}(e+\alpha t^q)$ належить до M. Отже, і останній доданок $t^r(\alpha+\alpha^2t^q)$ належить до M.

Таким чином, $e\dim\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=e\dim\mathbf{C}_r(\alpha)=2$.

2.3.5. Тригілковий випадок**.** Покладемо, що $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l\alpha\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$, де $\mathbf{A}=\{1,e,e'\}$ причому $\alpha=e+t^qae'$, $e\neq e'$ – два примітивні ідемпотенти в $\mathbf{A}$, $r=2l+q$, $\alpha\in\mathbf{D}^*$ і $a\neq 1(\mathrm{mod}\,t)$ якщо $q=0$. Знову $\mathbf{C}_{0,q}(\alpha)=\mathbf{D}+e\mathbf{D}+t^q\mathbf{A}$ це всі розкладні кільця в цьому випадку і $\mathbf{C}_{l,q}=\mathbf{A}$. Зауважимо також, що якщо $\mathbf{C}=\mathbf{D}+t^l\alpha\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$, де $\alpha=e+ae'$ як вище з $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,t)$, то, для $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,t^l)$, $\mathbf{C}=t^l\mathbf{C}_{0,q}(1-e-e')+\mathbf{D}$, і для $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,t^q)$ з $0<q<l$, $\mathbf{C}=\mathbf{C}_{l,q}(\alpha')$ для деякого α'.

Теорема 2.3.5. *Кожне надкільце кільця* $\mathbf{A}_m$ *збігається з* $t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$ *для деякого* α *і деяких* l,q *з* $k+r\leq m$. *Кільця* $\mathbf{C}_{l,q}$ *— це всі плоскі особливості кривих у цьому випадку.*

Випадок $m=1$ є очевидним. Тому, використовуючи Процедуру, ми покладаємо що $m>1$ і $k+r=m$.

Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)+\mathbf{D}$, базис кільця $\bar{\mathbf{B}}$ складається з класів $\{1,t^{k+l}(e+t^q\alpha),t^m\tau\}$. Оскільки $t^{k+l}(e+t^q\alpha)\notin\mathbf{J}_m$, підалгебра S має містити класи $t^{k+l}(e+t^q\alpha')$ для деякого $\alpha'\in\mathbf{D}_1$ з $v(\alpha')=1$. Знову випадок $k=0$ є неможливим. Якщо ж $k>0$, то праобраз кільця S співпадає з $t^{k-1}\mathbf{C}_{l+1,q}+\mathbf{D}$. Якщо $\mathbf{B}=t^k\mathbf{C}_r(\alpha)+\mathbf{D}$, то обчислення є повністю подібними.

Для обґрунтування останнього переходу доведемо, що $1, e+t^q\alpha, \alpha+t^q\alpha^2$ теж база для A над D. Спочатку доведемо, що $e+t^q\alpha, \alpha+t^q\alpha^2$ це база D_1 над D. Нагадаємо, що $D_1=\langle e,\alpha\rangle$ над D, тому $\alpha^2=a\alpha+be$, причому оскільки $v(\alpha)=1, v(\alpha^2)=2$, то $t|a,\ t|b$. Нехай це не так, тоді у випадку $t\nmid b$, маємо, що $v(\alpha^2)=0$, у випадку $t\nmid a$, маємо, що $v(\alpha^2)=1$. Це суперечить умові $v(\alpha^2)=2$.

Тепер іще залишилася перевірка того, що $\mathrm{edim}\,\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathrm{edim}\,\mathbf{C}_r(\alpha)=2$, в той час як $\mathrm{edim}\,\mathbf{C}=3$ для всіх інших кілець. Розглянемо випадок $r=2l+q$. Оскільки, $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^qae')\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}, a\in D^\times$, де $D^\times$ — обертовні елементи з D, то $m=t\mathbf{D}+t^l(e+t^qa)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A},\ a\in D^\times$, де елементи $\langle 1,e,\alpha\rangle$ утворюють базу A над D, $A=eD+\alpha D+(1-e)D$. Зауважимо, що елемент e є ідемпотентом, тобто $e^2=e$. Крім того, $(1-e)^2=1-e$, тобто є ідемпотентом і виконується властивість ортогональності $e(1-e)=0$. Тоді враховуючи, що $r=2l+q\geq 2l\geq l+1$ і $D_1=\langle e,\alpha\rangle$, $D_1=eA$ а оскільки $2l\geq l+1$, то $t^2\supset t^r\mathbf{D}, t^{l+1}\mathbf{D}\supset t^r\mathbf{D},\ t^{2q+1}\mathbf{D}\supset t^r\mathbf{D}, t^{l+1}eD\supset t^{2l}eD$, то у цьому випадку маємо $m^2=t^2\mathbf{D}+t^{l+1}(e+t^qae')D+t^{r+1}\mathbf{A}+t^{2l}(e+t^{2q}a^2e')D=t^2\mathbf{D}+t^{l+1}(e+t^qae')D+t^{r+1}\mathbf{A}$.

Зрозуміло, що базою для m є $\langle t, t^l(e+t^qae'), t^re'\rangle$. Перевірьмо, що твірними для m/m^2 є $t,\ t^l(e+t^qae')$. Для цього треба довести, що виконується належність $t^rA\subset m^2+\langle t,\ t^l(e+t^qae')\rangle=M$. Очевидно, що $t^r\in M$ і $et^r\in M$.

Залишилось перевірити, що $t^re'\in M=\left(m^2+\langle t, t^l(e+t^qae')\rangle\right)$. Ідеал M містить $t^{2l}e+t^rae'$ і $t^{2l}e+t^{r+q}ae'$. Віднімемо ці елементи їх різниця $t^r(a-t^qa^2)e'$ знову належить до M і $t^re'\in M$ а елемент $a(e-\mathrm{t}^q a^2)$ – обертовий. Тому m збігається з M. Отже, $e\mathrm{dim}\,\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathrm{edim}\,\mathbf{C}_r(\alpha)=2$.

2.3.6. Таблиця плоских особливостей кубічних кривих. Наведемо в таблиці 1 усі плоскі особливості кубічних кривих. У цій таблиці кількість гілок позначено як s, позначка * означає нерозгалужений випадок (пов'язаний із полем лишків, однак цей випадок неможливий якщо $\mathbf{k}$ алгебраїчно замкнене); x,y – це твірні максимального ідеалу $v(a)$ позначає мультинормування елемента $a \in \mathbf{A}$, тобто вектор норм його компонент, що відповідають **прямому розкладові** $\mathbf{A}$ на добуток дискретно нормованих кілець.

Колонка "тип" встановлює відповідність із Арнольдівською класифікацією [1]. Якщо $char\mathbf{k}=0$ і $\mathbf{A}$ є розгалуженим, це дійсно показує місце кілець в цій класифікації. Якщо $char\mathbf{k}=0$ і $\mathbf{A}$ є нерозгалуженим, це показує місце у класифікації після природнього розширення поля $\mathbf{k}$. Підтвердження точності цієї колонки наведене у [34, розділ 2.3]. Зауважимо, що ми позначили як $E_{l,q}$ особливості $J_{l,q}$ в сенсі [1]. Такі позначення є більш універсальнішими. Помітимо також, що такі особливості типів E_1 і E_2 справді є не кубічними, а квадратичними, і співпадають з тими, що мають типи A_1 і A_2 з [1]. Нарешті, в останній колонці, «par»' наведено кількість параметрів p з поля лишків $\mathbf{k}$, які визначають окреме кільце цього типу. Ми розглянемо це значення (цю величину) в останньому параграфі. Воно не співпадає з модальністю в сенсі [1], а пізніше вона дорівнює $p-1$.

Таблиця 1. Класифікація особливостей.

S	Назва	$v(x)$	$v(y)$	Тип	Кількість параметрів
1	$\mathbf{C}_{2r}(\alpha)$ $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$	3 3	(3r+1) (3r+2)	E_{6r} E_{6r+2}	r r

1*	$\mathbf{C}_r(\alpha)$	1	(r)		r
2	$\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$ $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$	(2,1) (2,1)	$(2r+1,\infty)$ $(2l, +\infty)$	E_{6r+1} $E_{l,2q}$	r l
2*	$\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$	(1,1)	(l, ∞)	$E^{*}_{l,2q+1}$	l
3	$\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$	(1,1,1)	(l,$l+q$, ∞)	$E_{l,2q+1}$	l

Зауваження. *Ручні кубічні плоскі особливості* $T_{3,q}$ $(q \geq 6)$ [5, 6] — *це особливості типів* $E_{2,q-6}$ у позначеннях даної таблиці.

2.3.7. Ідеали. Як ішлося вище кожен ідеал кубічного кільця C є ізоморфним або до надкільцю $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{C}$, або до його дуальному надкільцю. Якщо $\mathbf{C}$ ґоренштейнове (наприклад, якщо це плоска кубічна особливість) [2], тоді $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$, тому $\mathbf{B}^*$=Hom$_{\mathrm{D}}$(**B,C).** Внаслідок цього, щоб підрахувати $\mathbf{B}^*$, треба обрати ґоренштейнове підкільце $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$ й облічити

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathbf{B},\mathbf{C}) \simeq \{\lambda \in \mathbf{L} | \lambda\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}\} = \{\lambda \in \mathbf{C} | \lambda\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}\}.$$

Зауважимо, що остання рівність виконується, оскільки $1 \in \mathbf{B}$. З цього зауваження легко випливає такий результат.

Теорема 2.3.7. *Дуальні ідеали до кубічних кілець такі:*

Випадок одногілковий із розгалуженням:

якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^{[r/2]}\alpha\mathrm{D} + t^{k+r}\mathrm{A}$.

Випадок одногілковий без розгалуження:

якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$, *то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^r \alpha\mathrm{D} + t^{k+2r}\mathrm{A}$.

Випадок двогілковий з розгалуженням:

(a) *Якщо* $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_{l,q}(\alpha)$ *, то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^l (e + t^q \alpha)\mathrm{D} + t^{k+2l+q}\mathrm{A}$.

(b) *Якщо* $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_r(\alpha)$*, то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^r \alpha \mathrm{D} + t^{k+2r+1}\mathrm{A}$.

Випадок двогілковий без розгалуження:

Якщо $\mathrm{B} = \mathrm{D} + t^k \mathrm{C}_{l,q}(\alpha)$*, то* $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^l (e + t^q \alpha)\mathrm{D} + t^{k+2l+q}\mathrm{A}$.

Випадок тригілкових кривих:

Якщо $\mathbf{B} = \mathbf{D} + t^k \mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$*, то* $\mathbf{B}^* \simeq \mathbf{D} + t^l \alpha \mathbf{D} + t^{k+2l+q}\mathbf{A}$.

Доведення. Оскільки обчислення в усіх випадках аналогічні, ми розглянемо тільки деякі з них.

Двогілковий випадок із розгалуженням.

Якщо $\mathbf{B} \simeq \mathbf{D} + t^k C_{l,q}(\alpha) = \mathbf{D} + t^{k+l}(e + \alpha t^q)\mathbf{D} + t^{k+2l+q}\alpha\mathbf{D}$, оберемо $C = C_{l+k.q}(\alpha) = \mathrm{D} + t^{k+l}(e + t^q \alpha)\mathrm{D} + t^{2k+2l+q}\alpha\mathrm{D}$; треба знайти всі елементи з **C,** для яких $\lambda\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$. Нехай $\lambda = x + yt^{k+l}(e + t^q\alpha) + zt^{2l+2k+q}\alpha$. Треба визначити, коли $\lambda \cdot t^{2l+k+q}\alpha \in C$. Інші базисні елементи кільця B належать C, тому і їхні добутки з λ також належать C.

Перевіряємо $\lambda \cdot t^{2l+k+q}\alpha \in C$, $\lambda \cdot t^{2l+k+q}\alpha = xt^{2l+k+q}\alpha + yt^{3l+2k+q}(\alpha + t^q\alpha^2) + zt^{4l+3k+2q}\alpha^2$ другий і третій доданки належать C завжди, а перший – тоді й тільки тоді, коли $t^k | x$.

Отже, $\mathrm{B}^* = t^k D + t^{k+l}(e + t^q\alpha)D + t^{2k+2l+q}\alpha D \simeq D + t^l (e + t^q\alpha)D + t^{k+2l+q}\alpha D$. Тут виконана редукція множника t^k, бо справедлива ізоморфність модулів $t^k M \simeq M$.

Нехай тепер $\mathbf{B} = \mathbf{D} + t^k \mathbf{C}_r(\alpha) = \mathbf{D} + t^{k+r}\alpha\mathbf{D} + t^{2r+k+1}\mathbf{A}$, де $\alpha \in \mathbf{D}$. У цьому випадку припускаємо, що $\mathbf{C} = \mathbf{D} + t^r\alpha\mathbf{D} + t^{2r+1}\mathbf{A}$. Тоді з $\lambda \in \mathbf{C}$ випливає $\lambda = x + yt^r\alpha\mathbf{D} + zt^{2r+1}$. Умови $\lambda \cdot 1 \in C$, $\lambda t^{k+r}\alpha \in C$ виконуються, бо легко помітити, що $\lambda \cdot t^{k+2r+1} \in C$. Отже, $\mathrm{B}^* = \mathrm{D} + t^r\alpha\mathrm{D} + t^{k+2r+1}\mathrm{A}$.

Двогілковий випадок без розгалужень.

$\mathbf{B} \simeq \mathbf{D} + t^k C_{l,q}(\alpha) = \mathbf{D} + t^{k+l}(e + t^q\alpha)\mathbf{D} + t^{r+k}\mathbf{A}$**,** оберемо $r = 2l + q$,

$\mathbf{C}_{l,2q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e_1+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^{r+q}\mathbf{A}$, І $q>k$, $\alpha\in D_1\setminus(eD_1+tD)$, тому $\lambda=x+yt^l(e+t^q\alpha)+zt^{r+q}$. Умови $\lambda\cdot 1\in C$, $\lambda t^{k+l}(e+t^q\alpha)\in C$ виконані, бо степені базиса 1, t^{k+l} належать C, треба перевірити $\lambda t^{r+q}\in C$. Помножимо $\lambda t^{r+k}=xt^{r+k}+y(e_1+t^q\alpha)t^{l+r+k}+zt^{2r+q+k}$. З отриманих доданків лише xt^{r+q} може не належати до C. Він буде належати до C тоді і тільки тоді, коли $t^{q-k}|x$.

Отже, $\mathbf{B}^*\simeq\{\lambda\in\mathbf{C}|\lambda\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}\}=t^{2k}\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^{r+q}\mathbf{A}$.

Випадок тригілкових кривих

Якщо $\mathbf{B}=\mathbf{D}+t^k\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$, оберемо $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l\alpha\mathbf{D}+t^r\mathbf{A}$. Тоді $\lambda=x+yt^l\alpha+zt^r\alpha.$ Отже, $\mathbf{B}^*\simeq\{\lambda\in\mathbf{C}|\lambda\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}\}=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^{k+2l}\mathbf{A}$.

Наслідок 2.3.2. *Якщо кубічне кільце є ґоренштейнове, то воно є плоскою особливістю кривої.*

Зауважимо, що для особливостей вищих степенів це вже неправильне. Наприклад, кільця P_{pq} з роботи [6], які є особливостями степеня 4, є ґоренштейновими (як повні перетини) але розмірність занурення дорівнює 3.

2.4 Геометричний випадок.

2.4.1. Кількість параметрів. У цьому розділі ми припускаємо, що наші кільця мають геометричну природу, тобто $\mathbf{D}=\mathbf{k}[[t]]$, де $\mathbf{k}$ -алгебраїчно замкненене поле. Зауважимо, що для таких кілець нерозгалужені випадки неможливі. Тоді можна розглянути *число параметрів* $\operatorname{par}(\mathbf{C})$, які визначають $\mathbf{C}$- ідеали (див. [5, розділ 2.2] чи [7, розділ 3], де це позначено через $\operatorname{par}(1;\mathbf{C},\mathbf{A})$).

Фактично, воно збігається з найменшим можливим числом *p,* таким, що існує скінченний набір сімей ідеалів I_k $(1\le k\le m)$ щонайбільше розмірності *p,* такий, що кожен C ідеал ізоморфний до якогось ідеалу з одного з сімейств I_k. Рівносильно, *p* –

це найбільше можливе *p,* таке, що існує *p*-параметрична сім'я ідеалів, у якій кожен клас зустрічається лише скіченну кількість разів. *У роботі* [8] *встановлено* критерій того, що $par(C) \le 1$. Подальша теорема дає точне значення величини $par(C)$ для всіх кубічних кривих геометричної природи. (Зауважимо, що для таких кілець нерозгалужені випадки неможливі).

Теорема 2.4.1. *Якщо* $\mathbf{C}$ *є кубічним кільцем геометричної природи, то* $\mathrm{par}(\mathbf{C}) \le n$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{C}$ *домінує одну з особливостей типу* $E_{12n+i}\ (6 \le i \le 8)$ *чи* $E_{2n+1,q}\quad q \ge 0$.

Доведення. Звичайно, нам потрібно довести таке:

1. Кожне кільце з наведеного списку має щонайбільше n -параметричні сім'ї ідеалів;
2. Якщо $\mathbf{C}$ не домінує жодного з кілець із наведеного списку, то воно має $(n+1)$-параметричні сім'ї ідеалів.

Розглянь мо спочатку одногілковий випадок (звісно, рогалужений).

Зауважимо передовсім, що кільця $\mathbf{C}_{2r}(\alpha)$ так само, як і кільця $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$ утворюють r-параметричну сім'ю. Справді, ми можемо обрати в першому випадку $\alpha = \tau + a\tau^2$, у другому випадку $\alpha = \tau^2 + a\tau^4$, де $a \in \mathbf{D}$ визначене за модулем t^r, причому таке представлення єдине. Це залишається справедливим також для $t^k\mathbf{C}_{2r}(\alpha)+\mathbf{D}$ і $t^k\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)+\mathbf{D}$ і будь-яких k. Оскільки $\mathbf{C}_{2r}(\alpha) \supseteq \mathbf{A}_{2r}$ для всіх α, ми маємо, що $\mathrm{par}(\mathbf{A}_{2r}) \ge r$.

Нехай $\mathbf{C}$ не домінує жодного кільця ані типу E_{12n+6} (тобто $\mathbf{C}_{4n+2}(\alpha)$), ані типу E_{12n+8} (тобто $\mathbf{C}_{4n+3}(\alpha)$). Тоді воно не містить елементів із нормуваннями меншими, ніж $6n+6$, отже, $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}_{2n+2}$. Тому $\mathrm{par}(\mathbf{C}) \ge n+1$.

З іншого боку, розглянь мо кільце $\mathbf{C}_{2r+q}(\alpha)$, де $q \in \{0,1\}$. Усі його надкільця мають вид $\mathbf{D}+t^k\mathbf{C}_{2m+q}(\beta)$, де $k+m \le r$ і $k+m \le 2r$. Понад те, нехай $\alpha = \tau^{q+1} + a\tau^{2q+2}$ і

$\beta=\tau^{q+1}+b\tau^{2q+2}$. Тоді b визначений за модулем t^m і $b\equiv a(\mathrm{mod}\, t^{r-m-k})$. Отже, надкільця з фіксованими m,k утворюють p-параметричну сім'ю, де $p=\min(m,r-m-k)$. Звідси, $2p\le r$ і $p\le[r/2]$. Якщо покласти, що $r=2n+1$, то ми отримаємо, що $\mathrm{par}(E_{6n+6}(\alpha))=$ $\mathrm{par}(\mathbf{C}_{4n+2}(\alpha))\le n$ і $\mathrm{par}(E_{6n+8}(\alpha))=\mathrm{par}(\mathbf{C}_{4n+3}(\alpha))\le n$ для всіх можливих α.

Отже, кількість параметрів обмежена значенням n.

Двогілковий випадок. Вид особлиостей у цьому випадку такий: $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)=\mathbf{D}+t^l(e+t^q\alpha)\mathbf{D}+t^r\mathbf{A},$ де $r=2l+q$ і $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}\mathbf{A}$, де $t=\lambda\tau^2$, $v(\alpha)=(1,0)$. Кільця $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ утворюють l-1-параметричну сім'ю, оскільки у виразі $\alpha=\tau+a\tau^2, a\in D$ коефіцієнт a: $a=a_0+a_1t+...+a_rt^r+...,\ a\in k\left[\left|t\right|\right]$, визначений за модулем t^{l-1}. Аналогічно, кільця $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$ утворюють r-параметричну сім'ю, тобто параметр a визначено за модулем t^r. Оскільки $\mathbf{C}_{2n+1}(\alpha)\supseteq A_{2n+1}$, для всіх α кільце з A_{2n+1} має принаймні n параметрів: $par(A_{2n+1})\ge n$.

Якщо $\mathbf{C}$ не домінує жодного кільця ані типу E_{12n+7} (тобто $\mathbf{C}_{4n+1}(\alpha)$), ані типу $E_{2n+1,q}(\alpha)$ (тобто $\mathbf{C}_{2n+1,q}(\alpha)$), то воно не містить елементів з D_1 з нормуванням меншим або рівним за 2n+2. Тому $\mathbf{C}\subseteq A_{2n+3}$ звідси $par(\mathbf{C})\ge par(\mathrm{A}_{2n+3})\ge n+1$. Знайдемо надкільця кільця $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$. Його база: $\left\langle 1, t^le+t^{l+q}(\tau+ate), t^{2l+q}e\right\rangle$. Можливі випадки:

1) $B(\beta)=t^kC_{2r+1}(\beta)+D$, де $\beta=\tau+bte$. База $B(\beta)$ така $\left\langle 1, t^{k+r}(\tau+bte), t^{2r+k+1}e\right\rangle$, де b визначено за модулем t^r.

Якщо $t^le+t^{l+q}(\tau+ate)=xt^{k+r}(\tau+bte)+yt^{2r+k+1}e$, то $\tau: t^{l+q}=xt^{k+r}$;

то звідси $x=t^{l+q-k-r}$ і тому $k+r\le l+q$.

Тоді $t^l+at^{l+q+1}=bt^{l+q+1}+yt^{2r+k+1}$, звідки $l=2r+k+1, y=1, a=b$, тому $l\ge 2r$.

Отже, $r\le\left[\frac{l}{2}\right]$, тобто β залежить щонайбільше від $\left[\frac{l}{2}\right]$ параметрів.

2) $B(\beta)=t^kC_{m,p}(\beta)+D\supseteq \mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$.

База сімейсва $B(\beta)$ така $<1, t^{k+m+p}\tau+(t^{m+k}+bt^{m+k+p+1})e, t^{2m+p+k}e>$, де b залежить що- найменше від $m-1$ параметрів.

Звідси $2m+p+k\le 2l+q$ $t^{l+q}\tau+\left(t^l+at^{l+q+1}\right)e=xt^{k+m+p}\tau+x\left(t^{m+k}+bt^{m+k+p+1}\right)e+yt^{2m+p+k}e$. Так $t^{l+q}=xt^{k+m+p}$, $x=t^{l+q-k-m-p}$, а також використаємо знайдене x у рівності: $e: t^l+at^{l+q+1}=t^{l+q-p}+bt^{l+q+1}+yt^{2m+p+k}$, звідси $q=p$, інакше степінь справа більша, тому $x=t^{l-k-m}$, отже, $k+m\le l$. Підставивши $q=p$ в $2m+p+k\le 2l+q$, отримаємо $2m+k\le 2l$. Отже, $a\equiv b \bmod t^{2m-l-1+k}$.

Розглянемо випадки:

1) $2m+k\le l+1$ (немає обмежень на b)

$m\le\frac{l+1}{2}$, тобто b залежить щонайменше від $\left[\frac{l+1}{2}\right]-1=\left[\frac{l-1}{2}\right]$.

2) $2m+k>l+1$ $m>\frac{l-k+1}{2}$, тоді в b залишається $m-1-2m+l+1-k=l-m-k$ параметрів, де $l-m-k<l-\frac{l-k+1}{2}-k<\left[\frac{l-1}{2}\right]$.

Отже, надкільця $\mathbf{C}_{l,q}(\alpha)$ утворюють щонайбільше $\left[\frac{l+1}{2}\right]-1=\left[\frac{l-1}{2}\right]$-параметричні сімейства. Зокрема $par(\mathbf{C}_{2n+1,q}(\alpha))\le n$.

Знайдімо надкільця кільця $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$. Його база $\left\langle 1, t^r(\tau+a\tau^2), t^{2r}\tau^2\right\rangle$, де $\alpha\in D$, визначено за модулем t^r. Тепер розгляньмо надкільця кільця $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$ вид $B=\mathbf{D}+t^k\mathbf{C}_{2m+1}(\beta)$, де $\beta=(\tau+b\tau^2)$ і β залежить від m параметрів.

Його базис $\left\langle 1, t^{k+m}(\tau+b\tau^2), t^{k+2m}\tau^2\right\rangle$. Дослідимо, коли $C_{2r+1}(\alpha)\subseteq\mathbf{D}+t^k\mathbf{C}_{2m}(\beta)=B$, для цього визначимо, коли виконується умова належності елемента базису $t^r(\tau+b\tau^2)\in B$, для цього виразимо цей елемент $t^r(\tau+a\tau^2)$ через базисні елементи з B: $t^r(\tau+a\tau^2)=xt^{k+m}(\tau+b\tau^2)+yt^{k+2m}\tau^2$. При елементі τ маємо $t^r=xt^{k+m}$, звідки $k+m\le r$, тому $x=t^{r-k-m}$. При елементі τ^2: після підстановки $x=t^{r-k-m}$ маємо $at^r=bt^r+yt^{k+2m}$. Звідси $a=b(\mathrm{mod}\,t^{k+2m-r})$, тобто $k+2m-r$ параметрів у коефіцієнта b такі самі, як у коефіцієнта a, тобто фіксовані. Крім того, маємо, що коефіцієнт b визначений за $\mathrm{mod}\,t^m$, тобто b має m параметрів, із яких залишається після розвя'зання рівняння $at^r=bt^r+yt^{k+2m}$ за модулем t^{k+2m} лише $m-(k+2m-r)=r-k-m$ параметрів. Оскільки $k+m\le r$, то $t^{2r}\tau^2$ теж належить до B.

Отже, надкільце B залежить від $\min\{m,r-k-m\}$ параметрів. Очевидно, це число завжди не більше за $\left[r/2\right]$, оскільки $k+m\le r$.

Тепер розглянемо надкільця кільця $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)$ виду $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)\subseteq t^k\mathbf{C}_{l,q}(\beta)+D$.

Розглянемо для цього надкільця вигляду $B(\beta)=t^kC_{2r+1}(\beta)+D$, де β залежить від $l-1$ параметрів.

Базу $\mathbf{C}_{2r+1}(\alpha)=\mathbf{D}+t^r\alpha\mathbf{D}+t^{2r+1}\mathbf{A}$, де $t=\lambda\tau^2$, представимо у формі $\left\langle 1,t^r(\tau+ate),t^{2r+1}e\right\rangle$. Пригадаємо, що базис $C_{l,q}(\alpha)$ має вид $\left\langle 1,t^{l+q}\tau+t^l(1+t^{q+1}a)e,t^{2l+q}e\right\rangle=\left\langle 1,t^le+t^{l+q}(\tau+ate),t^{2l+q}e\right\rangle$.

Базу $B(\beta)=t^kC_{2r+1}(\beta)+D$, де $\beta=\tau+bte$, представимо у вигляді $\left\langle 1,t^{l+k}(e+t^{l+q+k}(\tau+ate)),t^{2l+q+k}e\right\rangle$, що еквівалентно до $\left\langle 1,t^{l+q+k}\tau+t^{l+k}(1+t^{q+1}a)e,t^{2l+q+k}e\right\rangle$.

Якщо $t^r(\tau+ate)=xt^{k+l}(e+t^{l+q+k}(\tau+ate))+yt^{2l+q+k}e$, то $t^r=xt^{k+l+q}$, тобто $x=t^{r-k-l-q}$, причому $k+l+q\le r$. Також можна записати рівність множників при e: $at^{r+1}=t^{r-q}+bt^{r+1}+yt^{2l+q+k}$. Звідси випливає, що $2l+k+q\le r-q$. Враховуючи можливість варіації степені при коефіцієнті y, виводимо умови на сам y так, щоб була можливою рівність. Крім того, маємо $r-q=2l+q+k$, тому $r=2(l+q)+k$. З останньої рівності слідує оцінка на кількість параметрів $l<[r/2]$. Отже, b залежить від $l-1<[r/2]$ параметрів.

Отже, $par(\mathbf{C}_{2n+1,q}(\alpha)) \le \left[\frac{r}{2}\right]$ параметрів, де $r = 2n+1$, що й потрібно було довести.

Тригілковий випадок.

Як доведено в Теоремі 3.2.5. [4^{a}] в цьому випадку кожне надкільце кільця A_m має вигляд $t^k \mathbf{C}_{l,q}(\alpha) + \mathbf{D}$ причому $k + r \le m$. Тому тут існує сім'я $C_{l,q}(\alpha) = D + t^l \alpha D + t^r A$, де $\alpha = e + t^q a e'$ і e, e' – примітивний ідемпотент з A, $2l + q = r$.

Дослідимо чи можливе існування вкладеності $C_{l,q}(\alpha) \subset B$. База кільця $C_{l,q}(\alpha) \subset B$ є $\left\{1, t^l (e + t^q a e'), t^{2l+q} e'\right\}$. Очевидно, що параметр α визначено за модулем t^l, тобто залежить від числових l параметрів. Оскільки $A_{2l} \subset C_{l,0}(\alpha)$, звідки $\mathrm{par}\, A_{2l} \ge l$. Якщо кільце C не містить $C_{2n+1,q}$, то $C \subseteq A_{2n+2}$, отже $\mathrm{par}(C) \ge n+1$.

Припустимо, що $C_{l,q} \subseteq B(\beta) = D + t^k C_{m,p}(\beta)$, де $\beta = e + t^p b e'$ і β залежить від m параметрів. Базою надкілець $B(\beta) = D + t^k C_{m,p}(\beta)$, являється $\left\{1, t^{k+m}(e + t^{k+m+p} b e'), t^{k+2m+p} e'\right\}$. Тому $t^l (e + t^q a e') = x t^{k+m}(e + t^p b e') + y t^{2m+p+k} e'$ для деяких $x, y \in D$.

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. $e: t^l = x t^{m+k}$ звідси $x = t^{l-m-k}$ і також має виконуватися умова $l \ge m + k$. $\tau: t^{l+q} a = x t^{k+m+p} b + y t^{k+2m+p}$, але $x = t^{l-m-k}$, тому підставивши маємо $t^{l+q} a = t^{l+p} b + y t^{k+2m+p}$, де $x, y \in D$. Якщо $k + 2m \le l$, то це обмеження порожнє, а $m \le [\frac{l}{2}]$.

Якщо ж $2m + p \le l$, то з цього випливає, що p=q і $b \equiv a \,\mathrm{mod}(t^{k+2m-l})$ (mod $t^{\mathrm{k}} + 2m -$ l).

Тоді у b залишається $l - k - m$ вільних параметрів а це число не більше ніж $[\frac{l}{2}]$.

Отже, $par(\mathrm{C}_{l,q}(\alpha)) = [\frac{l}{2}]$, зокрема $par(C_{2\mathrm{n}+1,q}) \le [\mathrm{n}]$, що й потрібно було довести.

Наслідок 2.4.2. Мають місце наступні рівності

$$par(\mathrm{C}_r(\alpha)) = [\frac{r}{2}],$$

$$par(\mathrm{C}_{l,q}(\alpha)) = [\frac{l}{2}],$$

$$par(\mathrm{A}_m(\alpha)) = [\frac{m}{2}].$$

Наслідок 2.4.3. Особливість є такою, що виконується нерівність $par(C_r(\alpha)) \leq 2$ тоді і тільки тоді коли c доміну одну з особливостей типу $E_m, (30 \leq m \leq 32)$, або $E_{5,q}, (q \geq 0)$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі описно всі кубічні кільця, серед них знайдено кліьця, які відповідають плоским особливостям. Описано також ідеали кубічних кілець. У геометричному випадку обчислена кількість параметрів, які визначають ідеали довільного кубічного кільця.

РОЗДІЛ 3

3. ІДЕАЛИ ОДНОГІЛКОВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ КРИВИХ ТИПУ *W*

В цьому розділі вивчаються особливості кривих типу W. Точніше цей розділ присвячений дослідженню кривих типу W, що мають сімейства ізоморфних класів *R*-ідеалів (тобто вільних від скруту R-модулів рангу 1), які допускають максимальну кількість незалежних параметрів не більше ніж 2 і 3. Техніка обчислень які будуть використанні в данному дослідженні обгрунтована в Лемі 1.7.1 з Розділу 1.

3.1. Основний результат.

Означення 3.1. *Одногілкова особливість – це повна локальна нетерова* k *-алгебра* S *розмірності Круля 1 без дільників нуля і така, що* $S/m = k$, *де* m *– максимальний ідеал* S. *Особливість називається* ***плоскою****, якщо ідеал* m *породжений двома твірними.*

Очевидно, що *плоска особливість* ізоморфна факторкільцю вигляду $k[[x,y]]/(f(x,y))$.

Позначимо через *R* максимальне надкільце кільця *S* (тобто його ціле замикання в полі часток, див. розділ 1, пункт 2). В нашому випадку *R* ізоморфне кільцю формальних степеневих рядів $k[[t]]$, причому *R* є скінченнопородженим *S*-модулем.

Для довільного елемента $x \in R$ позначимо $v(x)$ це його m-адичне нормування.

У випадку плоскої особливості S і $m = (x, y)$ вважаємо, що $v(x) < v(y),\ v(x) \nmid v(y)$ і покладемо $v = (v(x), v(y))$.

Називатимемо v *вектором нормування* плоскої особливості *S*.

Ми казатимемо, що плоска особливість *S* має тип:

E_{6k} якщо $v = (3,3k+1)$,

E_{6k+2} якщо $v = (3,3k+2)$,

W_{6k} якщо $v = (4,2k+1)$,

$W^{\#}_{k,*}$ якщо $v = (4,4k+2)$,

N_{4k} якщо $v = (5,k+1)$.

Основна Теорема. Нехай *S* є одногілковою особливістю. Тоді наступні умови є еквівалентними:

1) $par(\mathrm{S}) \leq 2$.

2) Якщо $char\,\mathrm{k} \neq 2$, то S домінує одну з таких особливостей:

$E_{30}, E_{32}, W_{24}, W^{\#}_{2*}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}$;

2a) Якщо $char\,\mathrm{k} = 2$, то S домінує одну з наступних особливостей: $E_{30}, E_{32}, W_{18}, W^{\#}_{1,*}, N_{20}, N_{24}$.

Доведення. Доведення проведемо у припущенні, що $char\,\mathrm{k} \neq 2$. Якщо $char\,\mathrm{k} = 2$, то обчислення будуть цілком аналогічні (навіть дещо простішими, оскільки меншу кількість випадків потрібно розглядати).

Позначимо через *d* розмірність фактор простору $\dim(R/_{\mathrm{m}R})$ або мінімальна кількість його твірних, де m це максимальний ідеал кільця *S*.

Якщо $d = 2$, то S є басовим кільцем [Розділ 1, ст. 7], тому має скінченну кількість ідеалів з точністю до ізоморфізму.

Якщо $d = 3$, то результат випливає з [Розділ 2, Теорема 4.1].

Для $d = 4$ це досліджується і детально викладається в цьому розділі, а для $d = 5$ – у наступному розділі.

Покажемо, що $Par(1,S) \geq 3$, якщо $d \geq 6$.

Позначимо $A = R/_{\mathrm{m}R}$, де $m = rad\,S$ – максимальний ідеал кільця *S*.

Розгляньмо фактор алгебру A. Якщо $d > 5$, то розгляньмо підмножину $Gr_0(r, A)$ Грасманіана $Gr(r, A)$, яка складається з підпросторів V, таких, що $AV = A$, де r – розмірність підпростору V. Це відкрита підмножина, а Грасманіан – незвідний многовид, тому її розмірність, як алебраїчного многовиду над k дорівнює розмірності всього Грасманіану, тобто $r(d - r)$. Розгляньмо випадок $r = 3$, $d=6$. Тоді $r(d - r) = 9$.

Алгебраїчна група $G = A^* / k^*$ діє на цьому многовиді й орбіти цієї дії взаємно однозначно відповідають класам ідеалів, які походять із підпросторів V вказаного виду. $\dim G = \dim A - \dim k = 5$. Відомо, що кількість параметрів, які визначають орбіту, не менша, ніж розмірність многовиду мінус розмірність алгебраїчної групи, що діє на ньому. Тому $Par(1, S) \geq 9 - 5 = 4$. В цьому розділі ми вивчаємо особливості типу W, тобто такі одногілкові особливості S, що $d=4$. Тоді можна вважати, що S містить елемент t^4. Якщо S плоска, то $S=k[[t^4, y]]$ для деякого елемента y, причому $v(y)=l$ не ділиться на 4. Для спрощення викладу ми вважаємо, що $y=t^l$.

3.2. Дослідження одногілкових особливостей типу *W*.

Сформулюймо основний результат цієї глави. Нагадаємо, що кажуть, що S домінує S', якщо $S \supseteq S'$. Зрозуміло, що у цьому випадку кожен S-ідеал є S'-ідеалом.

Теорема 3.1.1. *Одногілкова особливість* S *типу W допускає щонайбільше 2-параметричні сімейства ідеалів тоді й лише тоді, коли вона домінує плоску особливість типу* $W_{24}, W_{30}, W^{\#}_{2,2q-1}$.

Доведення ґрунтується на процедурі, яка описана у підрозділі 1.7. Дамо відповідні означення. Як завжди, ми позначаємо через $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ векторний простір над k, породжений елементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Означення 3.2.1. *Нехай* S *– це деяка одногілкова особливість,* $M = radS$, $S' = EndM$ *і* $M' = radS'$. *Якщо* X *– це деякий* S'*-ідеал, то нехай* $W = {}^{X}\!/_{MX} = \langle a_1,...,a_k,b_1,...,b_m\rangle$, *де* $M'W = \langle b_1,...,b_m\rangle$. *Називатимемо базисні елементи* $a_1,...,a_k$ ***обов'язковими****, а* $b_1,...,b_m$ *–* ***вільними.***

Нагадаємо, що підпростір $V \subseteq W$ зветься *твірним*, якщо $SV = W$. Очевидно, підпростір $V \subseteq W$ є твірним тоді й тільки тоді, коли його образ у $W / M'W$ містить образи всіх обов'язкових елементів.

Кожен твірний підпростір $V \subseteq W$ визначає S-ідеал I – прообраз V в X, і кожен S-ідеал одержується таким чином із якогось S' ідеалу. Якщо V і V' – два твірні підпростори у W, вони визначають ізоморфні ідеали тоді й тільки тоді, коли $V' = \alpha V$ для якогось елемента $\alpha \in EndX$. Такі підпростори називатимемо *еквівалентними*. Завжди можна вважати, що $X \supseteq S'$, тобто $1 \in X$. Тоді 1 напевно можна додати до базису W, причому як один із обов'язкових елементів. Більше того, завжди можна вважати, що 1 є одним із базисних елементів *V*. Якщо обмежитись лише такими підпросторами, то з $\alpha V \subseteq V'$ випливає, що образ α міститься у V'.

Доведення необхідності. Якщо кільце R не домінує $W_{24}, W^{\#}_{2,2q-1}$ або W_{30}, то в R немає елементів із нормуванням меншим, ніж 12, тобто R міститься в кільці $K_0 = k[[t^4,t^8,t^{12},\ldots]]$ (тут крапки позначають, що всі вищі степені t належать R). Отже, достатньо побудувати 3-параметричну сім'ю для кільця K_0. У цьому випадку $K_1 = End(M_0) = k[[t^4,t^8\ldots]]$ і $K_2 = End(M_1) = k[[t^4,\ldots]]$, де $M_0 = radK_0$, $M_1 = radK_1$.

Розглянемо K_2-модуль $A_\gamma =< 1,t^2 + \gamma t^3 > +M_2$. Це надкільце K_2, тому при різних γ K_2-ідеали A_γ не ізоморфні (бо $EndA_\gamma = A_\gamma$) $A_\gamma / M_1 A_\gamma =< 1,t^2 + \gamma t^3,t^5,t^7 >$.

Доведьмо, що твірні підпростори $V_{\gamma\beta} =< 1,t^2 + \gamma t^3 + \beta t^7 >= V_1$ в $A_\gamma / M_1 A_\gamma$ за різних

β неееквівалентні, тобто визначають не ізоморфні K_1-ідеали $X_{\gamma\beta} =< 1, t^2+\gamma t^3+\beta t^7, t^4, t^6+\gamma t^7, t^8, \dots >$. Нехай $V_2 =< 1, t^2+\gamma t^3+\beta' t^7 >$. Тоді не існує множника $\alpha \in \boldsymbol{V}_2$, тобто $\alpha = 1 - x\left(t^2+\gamma t^3+\beta' t^7\right)$ і $\alpha\left(t^2+\gamma t^3+\beta t^7\right)$ має належати $\boldsymbol{V}_2$. Але очевидно, що це можливо лише при $\beta = \beta'$.

Тоді $X_{\gamma\beta}/M_0 X_{\gamma\beta} =< 1, t^2+\gamma t^3+\beta t^7, t^9, t^{11} >$.

Доведімо тепер, що породжуючі підпростори $V_1 = V_{\gamma,\beta,\lambda} =< 1, t^2+\gamma t^3+\beta t^7+\lambda t^{11} > \subseteq X_{\gamma\beta} / M_0 X_{\gamma\beta}$ за різних λ неееквівалентні. Позначимо $V_1 =< 1, t^2+\gamma t^3+\beta t^7+\lambda t^{11} >$ і $V_2 =< 1, t^2+\gamma' t^3+\beta' t^7+\lambda' t^{11} >$. Нехай $\alpha = 1 - \boldsymbol{x}(\mathrm{t}^2+\gamma \mathrm{t}^3+\beta' \mathrm{t}^7)$ такий, що $\alpha V_1 = V_2$. Тоді має виконуватися $\alpha(\mathrm{t}^2+\gamma \mathrm{t}^3+\beta \mathrm{t}^7+\lambda \mathrm{t}^{11}) = \boldsymbol{t}^2+\gamma \mathrm{t}^3+\beta \mathrm{t}^7+\lambda \mathrm{t}^{11}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}^4+\boldsymbol{x}\gamma' \mathrm{t}^5+\boldsymbol{x}\beta' \mathrm{t}^9+\boldsymbol{x}\lambda' \mathrm{t}^{13}$ належить V_2. Знов-таки, це можливо лише при $\lambda = \lambda'$.

Отже, одержали 3-параметричну сім'ю ідеалів.

Для доведення достатності, вочевидь, достатньо перевірити, що кільця типу $W_{24}, W^{\#}_{2,2q-1}, W_{30}$, де $q \geq 1$, мають лише 2-параметричні сімї ідеалів. Нагадаємо, що особливість типу W_{24} – це така, що має породжуючі $\left\langle t^4, t^l \right\rangle$, де $l = 9$. Для особливості W_{30} маємо $l = 11$. Оскільки обчисленя в усіх випадках подібні, ми наведемо їх лише у «найскладнішому» випадку W_{30}, тобто, $l = 9$. Це буде зроблено в наступному розділі.

3.3. Ідеали кілець типу W_{24} .

Розгляньмо особливість K_0 типу W_{24}. Для спрощення викладу вважатимемо, що $K_0 = [[t^4, t^9]]$. Ми скористаємося процедурою з розділу 1.7. Отже, розглянемо ланцюг надкілець K_i, де $K_{i+1} = End(M_i)$, а $M_i = rad(K_i)$. Тоді

$K_0 = 1, t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, t^{24}, \dots,$

$K_1 = 1, t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{20}, \dots,$

$K_2 = 1, t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{16}, \dots,$

$K_3 = 1, t^4, t^5, t^8, t^9, t^{10}, t^{12}, \dots,$

$K_4 = 1, t^4, t^5, t^8, \dots,$

$K_5 = 1, t^4, \dots,$

$K_6 = [[t]].$

Кожен K_6-ідеал головний. Знайдімо K_5-ідеали I. Можна вважати, що $K_6 I = K_6$, тоді $M_5 I = M_5$. Оскільки $W = K_6 / M_5 = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ і єдиний обов'язковий елемент тут — це 1, можливі такі варіанти.

1. $V = \langle 1, t + \lambda t^3, t^2 + \beta t^3 \rangle$. Якщо $\alpha = 1 - \lambda(t^2 + t^3)$, то $\alpha V = \langle 1, t, t^2 + \beta t^3 \rangle$. У цьому і в аналогічних випадках ми казатимемо, що λ *редукується*. Отже, можна вважати, що $V = \langle 1, t, t^2 + \beta t^3 \rangle$. Якщо тепер покласти $\alpha = 1 - \beta t$, одержимо, що $V = \langle 1, t, t^2 \rangle$. Отже, β теж редукується, так ми одержимо єдиний ідеал $I_1^5 = \langle 1, t, t^2 \rangle + M_5$.

2. $V = \langle 1, t^2, t^3 \rangle$ дає ідеал $I_2^5 = \langle 1, t^2, t^3 \rangle + M_5$.

3. $V = \langle 1, t^2 + \lambda t^3 \rangle$. Покажемо, що різним значенням λ відповідають нееквівалентні підпростори. Справді, нехай $\alpha V = V' = \langle 1, t^2 + \lambda' t^3 \rangle$. Тоді можна вважати, що $\alpha = 1 - x(t^2 + \lambda' t^3)$ для деякого $x \in \mathrm{K}$. Має також бути $\alpha(t^2 + \lambda t^3) = t^2 + \lambda t^3 \in V'$, що можливо лише при $\lambda = \lambda'$, тобто $V = V'$. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_3^5(\lambda) = \langle 1, t^2 + \lambda t^3 \rangle + M_5$.

4. $V = \langle 1, t + \lambda t^2 + \beta t^3 \rangle$. Якщо $\alpha = 1 - \lambda(t + \beta' t^3)$, де $\beta' = \beta + \lambda$, то легко бачити, що $V = \langle 1, t + \beta' t^3 \rangle$, тобто λ редукується. Отже, можна вважати, що $V = \langle 1, t + \beta t^3 \rangle$.

Покажемо, що різним значенням β відповідають нееквівалентні підпростори. Дійсно, нехай $\alpha V = V' = \langle 1, t + \beta' t^3 \rangle$. Тоді можна вважати, що $\alpha = 1 - x(t + \beta' t^3)$ для деякого $x \in \mathrm{K}$. Має також бути $\alpha(t + \beta t^3) = t + \beta t^3 + xt^2 \in V'$, що можливо лише при $x = 0$, тобто $\alpha = 1$ і $V = V'$. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_4^5(\beta) = \langle 1, t + \beta t^3 \rangle + M_5$.

5. $V = \langle 1, t^3 \rangle$ дає ідеал $I_5^5 = \langle 1, t^3 \rangle + M_5$.

6. $V = \langle 1, t + \lambda t^2, t^3 \rangle$. Припустивши, що $\alpha = 1 - \lambda t$, ми редукуємо λ. Тому отримуємо один ідеал $I_6^5 = \langle 1, t, t^3 \rangle + M_5$.

7. $V = \langle 1 \rangle$ дає саме кільце K_5.

Цим завершене обчислення K_5-ідеалів. Перейдімо до пошуку K_4-ідеалів I залежно від того, чому дорівнює $X = K_5 I$ і, відповідно, $M_4 I = M_4 X$. Зауважимо, що, оскільки $\dim {}^{K_6}\!\big/_{M_5} = 4$, випадок $X = K_6$ не дає нових ідеалів (дивись лему 1.7.2).

Далі знайдімо K_4 - ідеали.

1. $X = K_5,\ M_4 X = M_4$ і $W = {}^{X}\!\big/_{M_4} =< 1, t^6, t^7 >$. Єдиний обов'язковий елемент тут – 1.

a) $V = \langle 1, t^6 + \lambda t^7 \rangle$. Легко перевірити, що різні значення λ дають нееквівалентні підпростори. Отже, отримуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_1^{4,5} = \langle 1, t^6 + \lambda t^7 \rangle + M_4$.

b) $V = \langle 1, t^7 \rangle$ дає ідеал $I_2^{4,5} = \langle 1, t^7 \rangle + M_4$.

c) $V = 1$ дає саме кільце K_4.

2. Якщо $X \in I_1^5, I_2^5, I_3^5(\lambda)$ або $X = I_4^5(\beta)$ з $\beta \neq 0$, то $XM_4 = XM_5$, а тому у просторі W всі базисні елементи обов'язкові, отже, єдиний твірний підпростір — це

$V = W$, тобто $I = X$ і ніяких нових ідеалів не виникає.

3. $X = I_4^5(0)$. Тоді $XM_4 = \left\langle t^4, t^5, t^6, t^8, \ldots \right\rangle$, $X \big/ XM_4 = \left\langle 1, t, t^7 \right\rangle$ і обов'язковими є елементи $1, t$. Тому $V = \left\langle 1, t + \lambda t^7 \right\rangle$, а тоді $(1 - \lambda t^6)V = \langle 1, t \rangle$. Таким чином, отримуємо єдиний ідеал $I_{2,4}^{4,5} = \langle 1, t \rangle + XM_4$.

4. $X = I_5^5$, тоді $XM_4 = \left\langle 1, t^5, t^7, \ldots \right\rangle$, $X / XM_4 = \left\langle 1, t^3, t^6 \right\rangle$, де $1, t^3$ — обов'язкові. Тому $V = \left\langle 1, t^3 + \lambda t^6 \right\rangle$ і елемент $\alpha = 1 - \lambda t^3$ редукує параметр λ. Отримуємо єдиний ідеал $I_{1,5}^{4,5} = \left\langle 1, t^3 \right\rangle + XM_4$.

Цим завершене обчислення K_4-ідеалів.

Список K_4 ідеалів:

$I_0^4 = K_4$,

$I_{2,4}^{4,5} = \langle 1, t \rangle + XM_4$,

$I_{1,6}^{4,5} = \left\langle 1, t^3 \right\rangle + I_6^5 M_4 = \left\langle 1, t^3 \right\rangle + XM_4$,

$I_1^{4,5} = \left\langle 1, t^6 + \lambda t^7 \right\rangle + XM_4$,

$I_2^{4,5} = \left\langle 1, t^7 \right\rangle + XM_4$.

Отже, серед K_4-ідеалів, виникають лише однопараметричні сім'ї ідеалів.

Оскільки кільце K_3 ґоренштейнове, то єдиний K_3-ідеал, який не є K_4-ідеалом – це саме K_3.

Перейдімо до обчислення K_2-ідеалів I. Знов-таки, покладемо $X = K_3 I$, $W = X \big/ XM_2$.

Оскільки кільце K_3 ґоренштейнове, єдиний K_3-ідеал, який не є K_4-ідеалом – це саме K_3.

Перейдемо до обчислення K_2-ідеалів I. Знов-таки, покладемо $X = K_3 I$,

$W = X \big/ XM_2$.

1. $X = K_3$. Тоді $W = K_3 / M_2 = \left\langle 1, t^5, t^{10}, t^{15} \right\rangle$, причому єдиний обов'язковий елемент – 1. Очевидно, тут обчислення цілком аналогічні до тих, які були при переході від K_6 до K_5, якщо всюди замінити t на t^5. Отже, отримуємо такі ідеали:

$I_1^{2,3} = \left\langle 1, t^5, t^{10} \right\rangle + M_2,$

$I_2^{2,3} = \left\langle 1, t^5, t^{15} \right\rangle + M_2,$

$I_3^{2,3} = \left\langle 1, t^{10}, t^{15} \right\rangle + M_2,$

$I_4^{2,3}(\lambda) = \left\langle 1, t^5 + \lambda t^{15} \right\rangle + M_2,$

$I_5^{2,3}(\lambda) = \left\langle 1, t^{10} + \lambda t^{15} \right\rangle + M_2,$

$I_6^{2,3} = \left\langle 1, t^{15} \right\rangle + M_2$.

і саме кільце $K_2 = \left\langle 1 \right\rangle + M_2$.

2. $X = K_4$, $XM_2 = \left\langle t^4, t^8, t^9, t^{12}, \ldots \right\rangle$, $W = X / XM_2 = \left\langle 1, t^5, t^{10}, t^{11} \right\rangle$. Обов'язковими є елементи 1, t^{11}. Отже, для V існують такі можливості:

a) $V = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5 + \beta t^{10} \right\rangle$. Якщо $\lambda \neq 0$, множення на $\alpha = 1 - \frac{\beta}{\lambda}(t^{11} + \lambda t^5 + \beta t^{10})$ редукує β. Очевидно, різні значення пераметрів λ дають неізоморфні ідеали. Отже, отримуємо сім'ю ідеалів $I_1^{2,4}(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5 \right\rangle + XM_2$.

b) $V = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5 + \beta t^{10} \right\rangle$ у випадку $\lambda = 0$ маємо $I_2^{2,4}(\beta) = \left\langle 1, t^{11} + \beta t^{10} \right\rangle + XM_2$. Легко перевірити, що різні значення β дають нееквівалентні підпростори. Отже, отримуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_2^{2,4}(\beta) = \left\langle 1, t^{11} + \beta t^{10} \right\rangle + XM_2$.

c) $V = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^{10}, t^5 + \beta t^{10} \right\rangle$. Множення на $\alpha = 1 - \beta t^5$ редукує β, а різним значенням λ відповідають нееквівалентні підпростори. Тому отримуємо сім'ю ідеалів $I_3^{2,4}(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^{10}, t^5 \right\rangle + XM_2$.

d) $V=\left\langle 1,t^{11}+\lambda t^5,t^{10}\right\rangle$. Легко переконатися, що різні значення λ дають нееквівалентні підпростори. Отже, отримуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_4^{2,4}(\lambda)=\left\langle 1,t^{11}+\lambda t^5,t^{10}\right\rangle+XM_2$.

3) $X=I_2^{4,5}=\left\langle 1,t^6+\lambda t^7\right\rangle+M_4$. Тоді $XM_3=\left\langle t^4,t^5,t^6,t^8,t^9,t^{10}\right\rangle+M_4$, $XM_2=\left\langle t^4,t^5,t^6,t^8,t^9,t^{10}+\lambda t^{11},t^{12},...\right\rangle$, звідси $t^{10}\equiv-\lambda t^{11}\left(\mathrm{mod}\,M_2\right)$

$X/XM_2=\left\langle 1,t^6+\lambda t^7,t^5,t^{11}\right\rangle$, де обов’язкові твірні — це $\left\langle 1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7\right\rangle$,

тому для твірного підпростору є такі можливості:

a) $\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^{11},\boldsymbol{t}^5+\beta\boldsymbol{t}^{11}>$. Нехай $\beta'=\beta(1+\lambda)$.

Поклавши елемент $\alpha=(1-\gamma(\boldsymbol{t}^5+\beta'\boldsymbol{t}^{11}))$. Тоді $\alpha\cdot\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7,\boldsymbol{t}^5+\beta'\boldsymbol{t}^{11}>$.

Поклавши $\alpha'=(1-\beta'(\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7))$ отримуємо $\alpha'\cdot\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7,\boldsymbol{t}^5>$. Отже, маємо однопараметричну сім’ю ідеалів $X=I_{1,2}^{2,4,5}=\left\langle 1,t^6+\lambda t^7,t^5\right\rangle+XM_2$.

b) $\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5,\boldsymbol{t}^{11}>$ Покажемо, що різним значенням параметра γ відповідають нееквівалентні підпростори. Нехай $\boldsymbol{V}_1=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5,\boldsymbol{t}^{11}>$, $\boldsymbol{V}_2=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma_1\boldsymbol{t}^5,\boldsymbol{t}^{11}>$ і $\alpha\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2$ для якогось $\alpha\in\boldsymbol{V}_2$. Можна вважати, що $\alpha=1-x(t^6+\lambda t^7+\gamma_1 t^5)$. Тоді $\alpha(\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5)$=$\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5(mod\,\boldsymbol{M}_2)$, а цей елемент належить V_2 лише за $\gamma=\gamma_1$.

Отже, отримуємо сім’ю ідеалів $\boldsymbol{I}_{2,2}^{2,4,5}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5,\boldsymbol{t}^{11}>+\boldsymbol{XM}_2$.

c) $\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5+\beta\boldsymbol{t}^{11}>$. Припустимо, що $\gamma\neq0$, припустимо $\alpha=1-\frac{\beta}{\gamma}(\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5+\beta\boldsymbol{t}^{11})$ цей множник редукує параметр β. Отже, отримали двопараметричну сім’ю ідеалів $\boldsymbol{I}_{3,2}^{2,4,5}=<1,\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^5>+\boldsymbol{XM}_2$.

А якщо $\gamma=0$, то маємо двопараметричну сім’ю ідеалів

$\boldsymbol{I}^{2,4,5}_{3,2,\gamma=0} =< 1,\boldsymbol{t}^6+\lambda \boldsymbol{t}^7+\beta \boldsymbol{t}^{11}> + \boldsymbol{XM}_2$. В обох випадках різним значенням γ або різним значеням β відповідають нееквівалентні підпростори.

4) $X = I_1^5 = \left\langle 1, t, t^2 \right\rangle + M_5$, тоді $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_3 = < \boldsymbol{t}^4, \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^6, t^7, \boldsymbol{t}^8, \ldots >$, $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_2 =$ $< \boldsymbol{t}^4, \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^6,\ \boldsymbol{t}^8, \ldots >$, $W = X\big/_{XM_2} =< 1, t,\ t^2,\ t^7 >$, де $1, t, t^2$ – обов’язкові.

Твірний підпростір $\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}+\beta \boldsymbol{t}^7, \boldsymbol{t}^2+\lambda t^7 >$. Припустивши, що $\alpha = 1-\lambda t^5$, отримуємо $\alpha\cdot\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}+\beta \boldsymbol{t}^7, \boldsymbol{t}^2 >$. Припустивши, що $\alpha' = 1-\beta \boldsymbol{t}^6$, отримуємо $\alpha'\cdot\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^2 >$. Отже, маємо ідеал $I_{1,1}^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2 \right\rangle + M_2$.

5) $X = I_2^5 = \left\langle 1, t^2, t^3 \right\rangle + M_5$, тоді

$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_3 = < \boldsymbol{t}^4, \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^6, t^7, \boldsymbol{t}^8,\ \ldots >$, $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_2 = < \boldsymbol{t}^4, , \boldsymbol{t}^6, \boldsymbol{t}^7, \boldsymbol{t}^8,\ \ldots >$

$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} / \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_2 =< 1, \boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}^3, t^5 >$, де $1, t^2, t^3$ – обов’язкові.

Твірний підпростір $\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}^3+\beta \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^2+\lambda t^5 >$. Позначивши, що $\alpha = 1-\lambda(t^3+\beta t^5)$, отримуємо $\alpha\cdot\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}^3+\beta \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^2 >$. Позначивши, що $\alpha = 1-\beta t^2$, отримуємо $\alpha\cdot\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}^3, \boldsymbol{t}^2 >$. Отже, маємо ідеал $I_{1,2}^{2,5} = \left\langle 1, t^3, t^2 \right\rangle + XM_2$.

6) $X = I_3^5(\lambda) = \left\langle 1, t^2+\lambda t^3 \right\rangle + M_5$, тоді $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_3 = < \boldsymbol{t}^4, \boldsymbol{t}^5, \boldsymbol{t}^6, t^7, \boldsymbol{t}^8, \ldots >$, $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_2 =$ $< \boldsymbol{t}^4, , \boldsymbol{t}^6+\lambda \boldsymbol{t}^7, \boldsymbol{t}^8, \ldots >$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} / \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{M}_2 =< 1, \boldsymbol{t}^2+\lambda \boldsymbol{t}^3, t^5, \boldsymbol{t}^7 >$, де $1,\ t^2+\lambda t^3$– обов’язкові.

a) $\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}^2+\lambda \boldsymbol{t}^3+\beta t^7, t^5+\gamma \boldsymbol{t}^7 >$; якщо $a = 1-\beta\left(t^5+\gamma t^7\right)$, то множник редукує параметр β. Припустивши, що $a = 1-\gamma(t^2+\lambda t^3)$, редукуємо параметр γ. Отже, ми отримали однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{1,3}^{2,5} = \left\langle 1, t^2+\lambda t^3, t^5 \right\rangle + XM_2$.

b) $\boldsymbol{V} =< 1, \boldsymbol{t}^2+\lambda \boldsymbol{t}^3+\beta t^5, \boldsymbol{t}^7 >$. Припустимо, що $\lambda \neq 0$, припустимо $\alpha = 1-\dfrac{\beta}{\lambda}(\boldsymbol{t}^2+\lambda \boldsymbol{t}^3)$ цей множник редукує параметр β. Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $I^{2,5}_{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3,\ t^7 \right\rangle + XM_2$. Вочевидь, при $\lambda = 0$ маємо $I^{2,5}_{2,3,\lambda=0} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^5,\ t^7 \right\rangle + XM_2$ і різні значення β дають неізоморфні ідеали.

c) $\boldsymbol{V} = < 1, \boldsymbol{t}^2 + \lambda \boldsymbol{t}^3 + \beta t^5 + \gamma \boldsymbol{t}^7 >$. Припустімо, що $\lambda \neq 0$ і $\alpha = 1 - \dfrac{\beta}{\lambda}(\boldsymbol{t}^2 + \lambda \boldsymbol{t}^3 + \gamma \boldsymbol{t}^7)$ цей множник редукує параметр β. Отже, отримали двопараметричну сім'ю ідеалів $I^{2,5}_{3,3} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3 + \gamma t^7 \right\rangle + XM_2$. Якщо $\lambda = 0$, то покладемо $\alpha = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}(\boldsymbol{t}^2 + \beta \boldsymbol{t}^5)$ цей множник редукує параметр γ і отримуємо однопараметничну сім'ю ідеалів $I^{2,5}_{2,3,\lambda=0} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^5 \right\rangle + XM_2$. У випадку $\beta = 0$ редукувати параметри λ і γ неможливо і різним значенням параметра γ відповідають нееквівалентні підпростори, що дає двопараметричний ідеал $I^{2,5}_{3,3,\beta=0} = I^{2,5}_{3,3}$. Отже, маємо такі сімейства ідеалів: $I^{2,5}_{1,3} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3 + \gamma t^7 \right\rangle + XM_2$, $I^{2,5}_{2,3,\lambda=0} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^5 \right\rangle + XM_2$.

Список K_2-ідеалів:

$I^{2,3}_1 = \left\langle 1, t^5, t^{10} \right\rangle + M_2$,

$I^{2,3}_2 = < 1, t^5, t^{15} > + M_2$,

$I^{2,3}_2 = < 1, t^{10}, t^{15} > + M_2$,

$I^{2,3}_4 = < 1, t^5 + \lambda t^{15} > + M_2$,

$I^{2,3}_5(\lambda) = \left\langle 1, t^{10} + \lambda t^{15} \right\rangle + M_2$,

$I^{2,3}_6 = \left\langle 1, t^{15} \right\rangle + M_2$,

$I^{2,4}_2(\beta) = \left\langle 1, t^{11} + \beta t^{10} \right\rangle + XM_2$,

$I^{2,4}_1(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5 \right\rangle + XM_2$,

$I^{2,4}_4(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5, t^{10} \right\rangle + XM_2$,

$I^{2,4}_3(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^{10}, t^5 \right\rangle + XM_2$,

$I_{1,2}^{2,4,5} =< 1, t^6 + \lambda t^7, t^5 > + XM_2,$

$I_{2,2}^{2,4,5} =< 1, t^6 + \lambda t^7 + t^5, t^{11} > + XM_2$

$I_{3,2}^{2,4,5} =< 1, t^6 + \lambda t^7 + \gamma t^5 > + XM_2,$

$I_{3,2,\gamma\neq 0}^{2,4,5} =< 1, t^6 + \lambda t^7 + \beta t^{11} > + XM_2$

$I_{1,\lambda\neq 0}^{2,4} =< 1, t^6 + \lambda t^7 + \gamma t^{11}, t^5 > + XM_2$

$I_{1,1}^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2 \right\rangle + M_2,$

$I_{1,3}^{2,5} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3, t^5 \right\rangle + XM_2,$

$I_{2,3}^{2,5} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3, t^7 \right\rangle + XM_2,$

$I_{2,3,\lambda=0}^{2,5} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^5, t^7 \right\rangle + XM_2,$

$I_{3,3,\lambda=0}^{2,5} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^5 \right\rangle + XM_2,$

$I_{3,3}^{2,5} = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^3 + \gamma t^7 \right\rangle + XM_2.$

$I_{1,2}^{2,5} = \left\langle 1, t^3, t^2 \right\rangle + XM_2.$

Далі отримаємо K_1 - ідеали.

1) Нехай $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_{1,\lambda\neq 0}^{2,4} =< 1, \boldsymbol{t}^6 + \lambda \boldsymbol{t}^7 + \gamma \boldsymbol{t}^{11}, \boldsymbol{t}^5 > + \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{M}_2;$ тоді $XK_1 = \left\langle t^4,, t^9, t^{10}, \ldots \right\rangle = XK_2$. Отже, нових ідеалів не породжує.

Зауваження. Умова $XK_1 = XK_2$ буде завжди виконана, якщо *виконується умова*: в ідеалі X міститься хоч один зі множини $S_{14} = \ t^2, t^5, t^6, t^{10}$ і один із наступної множини $S_{19} = \ t^2, t^6, t^7, t^{10}, t^{11}, t^{15}$ водночасно.

Це так, бо K_1 і K_2 відрізняються лише елементами t^{14} і t^{19}, які можна отримати множенням елементів з S_{14} і S_{19} на відповідний елемент радикала M_1, бо $t^8, t^9, t^{13}, t^4 \in M_1$. Помітимо, що зі множини S_{19} достатньо наявності входження елемента навіть у лінійній комбінації з іншими степенями (наприклад, $\boldsymbol{t}^6+\lambda\boldsymbol{t}^7+\gamma\boldsymbol{t}^{11}$) завдяки степеневій структурі M_1, яка гарантує наявність у XM_1 результатів множення всіх інших степенів з цієї лінійної комбінації. Залишаються лише ідеали $I_1^{2,4}(\lambda)=\left\langle 1,t^{11}+\lambda t^5\right\rangle+XM_2$ за умови, що $\gamma\neq 0$ $\boldsymbol{I}_6^{2,3}=<1,\boldsymbol{t}^{15}>+\boldsymbol{M}_2$, які не містять елементів з S_x і S_y водночас. Перевірьмо ці випадки.

2) Нехай $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_6^{2,3}=<1,\mathrm{t}^{15}>+\boldsymbol{radK}_2$, тоді $XradK_2=\left\langle t^4,,t^8,t^9,t^{12},t^{13},t^{14},,t^{16},...\right\rangle$

$W=X\big/XM_1=\left\langle 1,t^{14},t^{15}\right\rangle$, де t^{14} – обов'язковий.

а) $\boldsymbol{V}=<1,\boldsymbol{t}^{14}+\lambda\boldsymbol{t}^{15}>$ зрозуміло, що різним значенням параметра λ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $\boldsymbol{I}_{1,6}^{1,2,3}=<1,\boldsymbol{t}^{14}+\lambda\boldsymbol{t}^{15}>+\boldsymbol{XradK}_1$.

3) Очевидно, що $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_{0,3}^{5,7}=<1,\boldsymbol{t}^{11}+\gamma\boldsymbol{t}^5>+\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{M}_2$ у випадку $\gamma=0$ не задовольняє вище сформульованій умові, тому маємо одно параметричну сім'ю ідеалів $\boldsymbol{I}_{0,3}^{1,5,7}=<1,\boldsymbol{t}^{11}+\lambda\boldsymbol{t}^{14}>+\boldsymbol{XM}_1$, бо $W=X\big/XM_1=\left\langle 1,t^{11},t^{14}\right\rangle$, де обов'язкові лише $1,t^{11}$. Тому маємо підпростір $V=\left\langle 1,t^{11}+\lambda t^{14}\right\rangle$. Легко перевірити, що різним значенням параметра λ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, маємо одно параметричну сім'ю ідеалів $\boldsymbol{I}_{0,3}^{1,5,7}=<1,\boldsymbol{t}^{11}+\lambda\boldsymbol{t}^{14}>+\boldsymbol{XM}_1$.

4) $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_{0,3}^{2,4}=<1,\boldsymbol{t}^{11}+\gamma\boldsymbol{t}^5>+\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{M}_2$ при $\gamma=0$ також не задовольняє вищезгадану умову.

При $\gamma=0$ він набуває вигляду $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_{0,3,\gamma=0}^{2,4}=<1,\boldsymbol{t}^{11}>+\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{M}_2$, який співпав з попереднім.

5) Розглянемо $\boldsymbol{I}_4^{2,3}=<1,\boldsymbol{t}^5+\lambda\boldsymbol{t}^{15}>+\boldsymbol{M}_2$ при $\lambda=0$, тоді він набуває вигляду $\boldsymbol{I}_4^{2,3}=<1,\boldsymbol{t}^5>+\boldsymbol{M}_2$ звідси $XM_1=\left\langle t^4,t^8,t^9,t^{12},t^{13},t^{14},t^{16},t^{17},t^{18},t^{20},...\right\rangle$. Тому

$W = {}^{X}\!/_{XM_1} = \left\langle 1, t^5, t^{19} \right\rangle$, де $1, t^5$ обов'язкові. Звідси маємо підпростір $V = \left\langle 1, t^5 + \lambda t^{19} \right\rangle$. Зрозуміло, що якщо вибрати $\alpha = 1 - \lambda t^{14}$, то отримаємо $\alpha V = V'$, де $V' = \left\langle 1, t^5 \right\rangle$. Отже, маємо один ідеал $I^{1,2,3}_{1,4,\lambda=0} = \left\langle 1, t^5 \right\rangle + XM_1$.

6) $X = I^{2,4}_{1,\lambda=0,\beta=0} = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^5 \right\rangle + XM_2$ тоді при $\lambda = 0$ і $\beta = 0$ маємо $XM_1 = \left\langle t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, , t^{16}, t^{17}, ... \right\rangle$. Тому маємо фактор простір:

$W = {}^{X}\!/_{XM_1} = \left\langle 1, t^{11}, t^{14} \right\rangle$, де $1, t^{11}$ обов'язкові. Звідси маємо підпростір $V = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^{14} \right\rangle$ зрозуміло, що різним значенням параметра відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, маємо однопараметричний ідеал $I^{1,2,4}_{1,1}(\lambda) = \left\langle 1, t^{11} + \lambda t^{19} \right\rangle + XM_1$.

7) $X = K_2 = 1, t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{16}, \ldots$, тоді $XM_1 = \left\langle t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{20}, \ldots, \right\rangle$, $XM_2 = M_2$.

Тому $W = \left\langle 1, t^{14}, t^{19} \right\rangle$ де обовязковий тільки 1. Отже, підпростори:

a) $V = \left\langle 1, t^{14} + \lambda t^{19} \right\rangle$ зрозуміло, що різним значенням параметра відповідають нееквівалентні підпростори.

$K_1 = 1, t^4, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{20}, \ldots,$

Припустивши тут $a = 1 - \gamma(t^2 + \lambda t^3)$, редукуємо параметр γ. Отже, отримали однопараметричний ідеал $I^{1,2}_1 = \left\langle 1, t^{14} + \lambda t^{19} \right\rangle + XM_1$.

b) $V = \left\langle 1 + \lambda t^{14} + \gamma t^{19} \right\rangle$ зрозуміло, що різним значенням параметрів відповідають не еквівалентні підпростори. Отже, маємо двопараметричну сім'ю ідеалів $I^{1,2}_2 = \left\langle 1, t^{14} + \lambda t^{14} + \gamma t^{19} \right\rangle + XM_1$.

3.4. Ідеали кілець типу W_{30}.

Нехай R особливість типу W_{30}, $l = 11$. Тоді ланцюг надкілець K_i, де $K_i = End(M_i), M_i = rad(K_i)$, має такий вигляд:

$K_0=[t^{4},t^{11}]$

$K_0 = <1, t^{4}, ,t^{8}, t^{11},t^{12}, ,t^{15},t^{16}, , t^{19},t^{20}, ,t^{22},t^{23},t^{24}, ,t^{26}, t^{27}, ...>$

кільце $K_1 = K_0 + < t^{29} >$.

$K_1 = <1, t^{4}, ,t^{8}, t^{11},t^{12}, ,t^{15},t^{16}, , t^{19},t^{20}, ,t^{22},t^{23},t^{24}, ,t^{26}, t^{27} ,t^{28} ,t^{29},t^{30}, ...>$

$K_2= <1, t^{4}, ,t^{8}, t^{11},t^{12}, ,t^{15},t^{16}, ,\mathbf{t}^{\mathbf{18}}\mathbf{,}t^{19},t^{20}, ,t^{22},t^{23},t^{24},t^{25},t^{26},...>$

$K_3 = <1, t^{4}, ,\mathbf{t}^{\mathbf{7}},t^{8}, ,t^{11},t^{12}, ,\mathbf{t}^{\mathbf{14}},t^{15},t^{16}, \mathbf{,}t^{18},t^{19},t^{20}, \mathbf{t}^{\mathbf{21}},t^{22},t^{23},, ...>$

$K_4 = <1,t^{4}, ,t^{7},t^{8}, ,t^{11},t^{12},t^{14},t^{15},t^{16}, \mathbf{t}^{\mathbf{17}}\mathbf{,}t^{18},t^{19},t^{20},t^{21},t^{22},t^{23},t^{24},t^{25}, ...>$

$K_5 =<1,t^{4}, ,t^{7},t^{8}, ,\mathbf{t}^{\mathbf{10}},t^{11},t^{12},\mathbf{t}^{\mathbf{13}},t^{14},t^{15},t^{16},t^{17}\mathbf{,}t^{18},t^{19},...>$

$K_6 =<1,\mathbf{t}^{\mathbf{3}},t^{4}, ,\mathbf{t}^{\mathbf{6}},t^{7},t^{8}, \mathbf{t}^{\mathbf{9}},t^{10},t^{11},t^{12},t^{13},t^{14},t^{15},t^{16},t^{17},...>$

$K_7 =<1,t^{3},t^{4},\mathbf{t}^{\mathbf{5}},t^{6},t^{7},t^{8},t^{9},t^{10},t^{11},t^{12},t^{13},t^{14},t^{15},t^{16},t^{17}\mathbf{,...}>$

$K_8 =<1,\mathbf{t,t}^{\mathbf{2}},t^{3},t^{4}, t^{5} t^{6},t^{7},t^{8},t^{9},t^{10},t^{11},t^{12},t^{13},t^{14},t^{15},t^{16},t^{17},...>$

$K_7 = K_6 + < \mathbf{t}^{\mathbf{9}} >$.

Зростання нових елементів у надкільцях (точніше, в їхніх дробових ідеалах) від K_1 до K_6 δ_i: 1, 2, 3, 1, 2, 3 відповідно.

Зауважимо, що кільця K_0, K_3, K_6 є ґоренштейновими, тому нових ідеалів не дають.

Підкреслимо, що якщо $F_i = K_i/K_{i-1}$, то $1 \le dimF_i \le 3$ і $dimF_i \equiv i(mod 3)$. Згідно з твердженням 1.2.3, якщо $i \equiv 0(mod 3)$, то кожен K_i ідеал, (окрім самого K_i) є насправді K_{i+1}-ідеалом, зокрема кожен K_0-ідеал є або K_0 або є K_1-ідеалом. Отже, насправді достатньо обчислити K_1-ідеали.

$K_8 = k[[t]]$, тому єдиний K_8-ідеал (з точністю до ізоморфізму) — це саме K_8.

Знаходимо K_7-ідеали. Маємо $K_8M_7 = M_7, K_8/M_7 =<1,t,t^2>=V$ і тому будь-який підпростір, який містить 1, є породжуючим. Тепер легко знаходяться всі породжуючі підпростори W для $K_8/M_7 = V$ із точністю до еквівалентності.

1) $W =<1>$, йому відповідає K_7.

2) $W =<1, t+\gamma t^2>$. Легко помітити, що $(1-\gamma t)W =<1,t>$, отже, всі ці

підпростори еквівалентні. Тому одержуємо єдиний з точністю до ізоморфізму K_7-ідеал $I_1^{7,8} =< 1,t > +XM_7$.

3) $W =< 1,t^2 >$ дає $I_2^{7,8} =< 1,t^2 > +M_7$.

Як було зауважено вище, з $6 \equiv 0(mod3)$ випливає, що кожен K_6-ідеал, окрім самого K_6 є насправді K_7-ідеалом, іншими словами це можна пояснити так, оскільки K_6 є ґоренштейновим кільцем, то власними K_6 ідеалами є лише саме K_6.

Увесь список K_6 ідеалів такий: K_8, K_7, $I_1^{7,8} =< 1,t > +XM_7$, $I_2^{7,8} =< 1,t^2 > +M_7$, K_6.

3.4.1. Пошук K_5-ідеалів. При цьому врахуємо, що для K_6-ідеалів є такі 5 можливостей:

1) Нехай $X = I_2^{7,8} =< 1,t^2 > +M_7$. Тоді $XM_5 =< t^4, ,t^6, ... >$, $XM_6 =< t^3, ... >= M_7$, $X / XM_5 =< 1,t^2 ,t^3, t^5,>$, тому t,t^2 — обов'язкові базисні елементи, а t^3,t^5 – вільні. Породжуючі підпростори:

1.1. Нехай $W =< 1,t^2 + \gamma t^5, t^3 + \beta t^5 >$. Якщо $\alpha = 1 - \gamma(t^3 + \beta t^5)$, то $\alpha(t^2 + \gamma t^5) \equiv t^2 modXM_5$, $\alpha(t^3 + \beta t^5) \equiv (t^3 + \beta t^5) modXM_5$. Звідки $\alpha W =< 1,t^2,t^3 + \beta t^5 >$, тобто можна вважати, що $\gamma = 0$. У таких випадках ми кажемо, що параметр γ редукується. Тепер, для $\alpha = 1 - \beta t^2$ маємо $\alpha(t^3 + \beta t^5) \equiv t^3 modXM_5$, отже, так само β редукується. Звідси отримуємо єдиний ідеал $I_{1,2}^{5,7,8} =< 1,t^2,t^3 > +XM_5$.

1.2. Нехай $W =< 1,t^2 + \gamma t^3,t^5 >$. Легко переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{2,2}^{5,7,8} =< 1,t^2 + \gamma t^3,t^5 > +XM_5$.

1.3. Нехай $W =< 1,t^2 + \gamma t^3 + \beta t^5 >$. Припустивши, що $\alpha = 1 - \beta / \gamma(t^2 + \gamma t^3)$, ми редукуємо β, бо $\alpha(t^2 + \gamma t^3 + \beta t^5) \equiv (t^2 + \gamma t^3) modXM_5$. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{3,1}^{5,7,K8} =< 1,t + \gamma t^3 > +XM_5$. Після цього перевіримо, що підпростори з різними значеннями γ нееквівалентні. Впевнимося, що різним значенням параметра γ відповідають різні ідеали; це означатиме нередуковність параметра γ. Нехай $\alpha = 1 - x\left(t + \gamma' t^3\right)$, $\alpha \in W' = \left\langle 1, t + \gamma' t^3 \right\rangle$. Перевіримо, чи можливо $\alpha W = W'$ за різних значень параметра γ. Маємо $\alpha(t + \gamma t^3) = t + \gamma t^3 - xt^2 + x\gamma\gamma' t^6 (\mathrm{mod}\, K_5)$. Цей елемент належить до W' лише коли $\gamma = \gamma'$ і $x = 0$, бо $t^6 \notin radK_5$ а це означає, що $\alpha = 1$. Так, одержимо однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{3,2}^{5,7,K8} =< 1, t^2 + \gamma t^3 > + XM_5$.

2. Нехай $X = I_1^{7,8} =< 1, t > + M_7$. Тоді $XM_5 =< t^4, t^5, t^7 ... >$, $XM_6 =< t^3, t^4, t^5, t^6, t^7 ... >$. Тому $X/XM_5 =< 1, t, t^3, t^6 >$, де t – обовязковий, а t^3, t^6 – вільні. Породжуючі підпростори:

a) Нехай $W =< 1, t + \gamma t^6, t^3 + \beta t^6 >$. Можна перевірити, що множник $\alpha = 1 - \gamma t^5$ редукує γ, а множник $\alpha = 1 - \beta(t^3 + \beta t^6)$ редукує β.

Так, отримуємо один ідеал $I_{1,1}^{5,7,K8} =< 1, t, t^3 > + XM_5$.

b) Нехай $W =< 1, t + \gamma t^3, t^6 >$. Можна перевірити, що γ не редукується, бо $t^2 \notin XM_5$. Отже, отримуємо однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{2,1}^{5,7,K8} =< 1, t + \gamma t^3, t^6 > + XM_5$.

c) $W =< 1, t + \gamma t^3 + \beta t^6 >$, якщо $\alpha = 1 - \beta t^5$, ми редукуємо β. Після цього можна переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори.

3. $X = K_8$, тоді $XM_6 =< t^3, t^4, t^5, t^6, ... > \neq XM_5 =< t^4, t^5, t^6, ... >$. Звідси $X/XM_5 =< 1, t, t^2, t^3 >$, причому обовязковими є елементи $1, t, t^2$. Твірні підпростори наступні:

a) Нехай $W =< 1, t + \gamma t^3, t^2 + \beta t^3 >$, тут легко перевіряється, що параметри β і γ редукуються, а саме множник $\alpha = 1 - \beta(t + \gamma t^3)$ редукує параметр β, а множник $\alpha = 1 - \gamma t^2$ редукує параметр γ.

Отже, отримуємо один ідеал $I_1^{5,K8} =< 1, t, t^2 > + XM_5$.

4. $X = K_7$, тоді $XM_5 = \left\langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, ... \right\rangle$, $XM_6 = M_6$, звідси $X/XM_5 =< 1, t^3, t^5, t^6 >$, де $1, t^5$ — обов’язкові, t^3, t^6 — вільні.

a) Нехай $W=<1,t^5+\gamma t^6,t^3+\beta t^6>$. Якщо $\alpha=1-\beta/\gamma(t^5+\gamma t^3)$, отримуємо, що параметр β редукується, а різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори.

Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_1^{5,K7}=<1,t^5+\gamma t^6,t^3>+XM_5$.

b) Нехай $W=<1,t^5+\gamma t^3,t^6>$. Можна переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Таким чином, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів. Отже, маємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_2^{5,K7}=<1,t^5+\gamma t^3,t^6>+XM_5$.

3. Нехай $W=<1,t^5+\gamma t^3+\beta t^6>$. Можна перевірити, що множник $\alpha=1-\beta/\gamma(t^5+\gamma t^3+\beta t^6)$ редукує параметр β, а різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори.

Тому одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_3^{5,K7}=<1,t^5+\gamma t^3>+XM_5$.

5. $X=K_6$. Тоді $XM_6=M_6$, $XM_5=M_5$. $X/_{XM_5}=\langle 1,t^3,t^6,t^9\rangle$ 1 – обов'язкова усі інші вільні.

a) Нехай $W=\langle 1,t^3+\gamma t^6,t^6+\beta t^9\rangle$. Якщо позначимо $\alpha=1-\gamma t^6$; а потім, $\alpha=1-\beta t^3$ легко перевірити, що параметри редукуються. Отже, одержимо один ідеал $I_1^{5,K6}=\langle 1,t^3,t^6\rangle+XM_5$.

b) Нехай $W=\langle 1,t^3+\gamma t^6,t^9\rangle$. Тут множник $\alpha=1-\gamma t^3$ редукує параметр γ. Отже, отримаємо один новий ідеал $I_2^{5,6}=\langle 1,t^3,t^9\rangle+XM_5$.

c) Нехай $W=<1,t^3+\gamma t^6+\beta t^9>$. Якщо множники $\alpha=1-\gamma t^3$ і $\alpha=1-\beta t^6$ редукують параметри γ,β. Тому легко перевірити, що параметри редукуються. Отже, одержимо один новий ідеал $I_3^{5,K6}=<1,t^3>+XM_5$.

d) Нехай $W=<1,t^6+\gamma t^9>$. Легко перевірити, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, отримали нове однопараметичну сім'ю ідеалів $I_4^{5,K6} =< 1, t^6 + \gamma t^9 > + XM_5$.

5. Підпростір $W =< 1, t^6, t^9 >$ дає один ідеал: $I_5^{5,K6} =< 1, t^6, t^9 > + XM_5$.

6. Підпростір $W =< 1, t^9 >$ дає один ідеал: $I_6^{5,K7} =< 1, t^9 > + XM_5$.

Шукаємо K_4-ідеали:

1. $X = I_4^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, бо $t^{10} = t^4 t^6$, $t^{13} = t^7 t^6$, тому $W =< 1, t^6 + \gamma t^9 >$, де всі елементи обов'язкові. Отже, не отримали нового ідеалу.

2. $X = I_5^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, бо $t^{10} = t^4 t^6$, $t^{13} = t^7 t^6$, $W =< 1, t^6, t^9 >$, де всі елементи обов'язкові. Тобто не отримали нового ідеалу.

3. $X = I_6^{5,K6}$, $XM_4 =< t^4,\ t^7,\ t^8,\ t^{10},\ t^{11}, \ldots >= XM_5 = M_5$,

$X / XM_4 =< 1, t^9, t^{10} >$ де $1, t^9$ обов'язкові.

a) $W =< 1, t^9 + \gamma t^{10} >$. Отримали *нову* однопараметричну сім'ю ідеалів. $I_{1,6}^{4,5,K6} =< 1, t^9 + \gamma t^{10} > + XM_4$.

b) $W =< 1, t^{10} >$. Отримали *новий* ідеал. $I_{2,6}^{4,5,K6} =< 1, t^{10} > + XM_4$.

4. $X = I_1^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, $W = \left\langle 1,\, t^3,\, t^6 \right\rangle$, де всі елементи обов'язкові. Тому отримали такий самий ідеал.

5. $X = I_3^{5,K6}$, тоді $XM_4 =< t^4,\ t^7,\ t^8,\ t^{10},\ t^{11}, \ldots >= XM_5 = M_5$, $X/XM_4 =< 1, t^3, t^{13} >$ $1, t^3$ – обов'язкові.

a) $X = I_3^{5,K6} =< 1, t^3 + \gamma t^{13} >$. Множник $\alpha = 1 - \gamma t^{10}$ редукує параметр γ.

Отже, маємо один новий ідеал $I_{1,3}^{4,5,K6} =< 1, t^3 > + XM_4$.

6. $X = I_2^{5,K6} =< 1, t^3, t^9 >$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, тому $W =< 1, t^3, t^9 >$, де всі обов'язкові. Отже, не отримуємо нових ідеалів.

Тепер знаходимо, що породять знайдені $I_3^{5,8}$ $I_2^{5,8}$, $I_1^{5,8}$ в K_4 ідеалах

7. $X = I_3^{5,K8}$, тоді $XM_4 =< t^4,, t^6, \ldots >= XM_5$, $X/XM_4 =< 1, t^2, t^3, t^5 >$, де всі обов'язкові. Тому нового ідеалу не отримуємо.

8. $X = I_2^{5,K8}$, $XM_4 =< t^4, t^5,, t^7, \ldots >= XM_5$, $X/XM_4 =< 1, t, t^3, t^6 >$ де всі обов’язкові. Отже, нового ідеалу не виникає.

9. $X = I_1^{5,K8}$, тоді $XM_4 =< t^4, t^5, t^6, t^7, \ldots >= XM_5$, тому $X/XM_4 =< 1, t, t^2 >$, де у факторі всі обов’язкові.

Тому нового ідеалу не отримуємо.

10. $X = I_1^{5,K7}$, тоді $XM_4 =< t^4,, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots >= XM_5$ і $X/XM_4 =< 1, t^5 + \gamma t^6, t^3 >$, де всі обов’язкові. Тому нового ідеалу не дає.

11. $X = I_2^{5,K7}$, тоді $XM_5 =< t^4,, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots >= XM_4$, тому $X/XM_4 =< 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 >$, де всі обов’язкові. Тому нового ідеалу не дає.

12. $X = I_{1,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t, t^3 \rangle + t^4, t^5, t^7, \ldots = I_{1,1,1}^{5,6,7,K8}$. Тоді $XM_5 =< t^4, t^5, t^7, t^8, t^9, \ldots >= XM_4$. Тому нового ідеалу не отримаємо.

13. $X = I_{1,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 =< t^4, t^6, t^7, \ldots >= XM_4$, $X\diagup XM_4 =< 1, t^2, t^3 >$, всі обов’язкові. Тому нового ідеалу не буде.

14. $X = I_{2,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 =< t^4, t^6, t^7, \ldots >= XM_4$, $X\diagup XM_4 =< 1, t^2 + \gamma t^3, t^5 >$, всі обов’язкові. Тому нового ідеалу не буде.

15. $X = I_{3,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 =< t^4, t^6, t^7, \ldots >= XM_4$, $X\diagup XM_4 =< 1, t^2 + \gamma t^3 >$, всі обов’язкові. Тому нового ідеалу не буде.

16. $X = I_1^{7,K8} =< 1, t,, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9 \ldots >$, тоді $XM_5 =< t^4, t^5,, t^7, t^8, t^9 \ldots >= XM_4$, тому $X/XM_4 =< 1, t, t^3, t^6 >$, де всі обов’язкові, тому нового ідеалу не буде.

17. $X = I_2^{7,K8}$, $XM_5 =< t^4, t^6, t^7, \ldots >= XM_4$, $X\diagup XM_4 =< 1, t^2, t^3, t^5 >= V$, тут усі обов’язкові, тому нового ідеалу не отримуємо. І (згідно з лемою 1.7.2) ідеал $I_{1,2}^{7,K8}$ далі нових не породжує, бо дав вже чотиривимірний фактор.

18. $X = K_7$, $XM_5 =< t^4, t^7, t^8, \ldots >= XM_4$, $X\diagup XM_4 =< 1, t^3, t^5, t^6 >= V$, де

всі обов’язкові, отже нових ідеалів не буде.

19. $X = I_1^{5,K6}$, тоді $XM_5 = M_5$, $XM_4 =< t^4,,t^7,t^8,t^9... >$, тому $X/XM_4 =< 1,t^3,t^5,t^6 >$, де $t^6 -$ не обов’язковий.

a) Нехай $W =< 1,t^3+\gamma t^6,t^5+\beta t^6 >$, множник $\alpha = 1-\gamma(t^3+\gamma t^6)$ редукує параметр γ. Параметр β не редукується.

Отже, отримали однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{1,1}^{4,5,K6} =< 1,t^3,t^5+\beta t^6 > +XM_4$.

b) Нехай $W =< 1,t^3+\gamma t^5,t^6 > +XM_4$ параметр γ-не редукується. Отже, отримали однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{2,1}^{4,5,K6} =< 1,t^3+\gamma t^5,t^6 > +XM_4$.

c) Нехай $W =< 1,t^3+\gamma t^5+\beta t^6 >$, множник $\alpha = 1-\beta(t^3+\gamma t^5+\beta t^6)$ редукує параметр β, різним значенням параметра γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отримали однопараметричну сім’ю ідеалів $I_{3,1}^{4,5,\text{K}6} =< 1,t^3+\gamma t^5,t^6 > +XM_4$.

Згідно зі зазначеним вище зауваженням в K_3 не буде нових ідеалів окрім самого K_3.

3.4.2. Знаходження K_2-ідеалів. Згідно з лемою 1.7.2 нові ідеали можуть виникати з таких:

1. $X = I_{1,6}^{4,5,K6} =< 1,t^9+\gamma t^{10} > +XM_4$, тоді

$$XM_2 =< t^4,t^8,t^{11},t^{12},t^{13}+\gamma t^{14},t^{17},t^{15},t^{16},\mathbf{t^{18}},t^{19},t^{20},t^{21},t^{22},\ldots > \neq XM_3$$

$$XM_3 =< t^4,\mathbf{t^7},t^8,t^{11},t^{12},t^{13},\mathbf{t^{14}},t^{15},t^{16},t^{17},t^{18},t^{19},\ldots >,$$

$X\big/_{XM_2} = \left\langle 1,t^7,t^9+\gamma t^{10},t^{13} \right\rangle$ де $1,t^9+\gamma t^{10}$ – обов’язкові елементи.

а) Нехай $W = \left\langle 1,t^9+\gamma t^{10}+\beta t^{13},t^7+\chi t^{13} \right\rangle$. Легко помітити, що параметри β й χ редукуються. Отже, отримали нову двопараметричну сім’ю ідеалів

$I_{1,1,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10}, t^7 \right\rangle + XM_2$.

Покажімо неізоморфність ідеалів $I_{1,1,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10}, t^7 \right\rangle + XM_2$ і $I_{1,1,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^9 + \gamma' t^{10}, t^7 \right\rangle + XM_2$. Нехай $W_1 = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10}, t^7 \right\rangle$, $W_2 = \left\langle 1, t^9 + \gamma' t^{10}, t^7 \right\rangle$. Візьмемо $\alpha = 1 - x\left(t^9 + \gamma' t^{10} + t^7\right)$, $\alpha \in W_2$ і дослідімо, за яких α виконується $\alpha W_1 = W_2$.

$\alpha\left(t^9 + \gamma t^{10}\right) = \left(t^9 + \gamma t^{10} + x t^{18} + x\gamma t^{19}\right)$ звідси випливає, що $\alpha W_1 = W_2$ лише при $\gamma = \gamma'$.

b) Нехай $W = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7, t^{13} \right\rangle$. Отже, отримали *нову двопараметричну* сім'ю ідеалів $I_{2,1,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + t^7, t^{13} \right\rangle + XM_2$.

c) Нехай $W = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7 + \chi t^{13} \right\rangle$. Легко помітити, що параметр χ редукується. Отже, отримали *нову двопараметричну* сім'ю ідеалів $I_{3,1,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^{13} \right\rangle + XM_2$.

2. $X = I_{2,6}^{4,5,K6} =< 1, t^3 + \gamma t^5, t^6 > + XM_4$, тоді

$XM_2 =< t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{17}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \ldots > \neq XM_3$, де

$XM_3 =< t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, \ldots >$, тому

$X/_{XM_2} = \left\langle 1, t^7, t^{10}, t^{17} \right\rangle$, де $1, t^{10}$ — обов'язкові елементи.

a) Нехай $W = \left\langle 1, t^{10} + \gamma t^{17}, t^7 + \beta t^{17} \right\rangle$. Легко помітити, що параметр γ не редукується.

Отже, отримали *новий ідеал* $I_{1,2,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^7, t^{10} + \gamma t^{17}, t^7 + \beta t^{17} \right\rangle + XM_2$.

b) Нехай $W = \left\langle 1, t^7, t^{10} + \gamma t^7, t^{17} \right\rangle$ Легко помітити, що параметри β й γ

редукуються.

Отже, отримали *новий ідеал* $I_{2,2,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^7, t^{10} + \gamma t^{17}, t^7 + \beta t^{17} \right\rangle + XM_2$.

c) Нехай $W = \left\langle 1, t^{10} + \gamma t^7 + \beta t^{17} \right\rangle$. Легко помітити, що параметр β й γ не редукується. Отже, отримали *новий ідеал* $I_{3,2,6}^{2,4,5,6} = \left\langle 1, t^7, t^{10} + \gamma t^7 \right\rangle + XM_2$.

3. $X = I_6^{5,K6} = < 1, t^6, t^9 > + XM_5$

$XM_2 = < t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \ldots > \neq XM_3$,

$XM_3 = < t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, \ldots >$,

$X/XM_2 = \left\langle 1, t^6, t^7, t^9 \right\rangle$, де 1, t^6, t^9 – обов'язкові елементи.

a) Нехай $W = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^7, t^9 + \beta t^7 \right\rangle$, тоді параметри не рудукуються. Отже, отримали нову двопараметричну сім'ю ідеалів. $I_{1,6}^{2,5,6} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^7, t^9 + \beta t^7 \right\rangle + XM_2$.

4) $X = I_2^{5,K6} = < 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 > + XM_5$ тоді

$XM_2 = < t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots > \neq XM_3$, $XM_3 \neq < t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots >$ $t^9 = -\gamma t^7$, тому

$X/XM_2 = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6, t^9 \right\rangle$де 1, $t^5 + \gamma t^3, t^9$, t^6 – обов'язкові елементи.

a) Нехай $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^9, t^6 + \chi t^9 \right\rangle$, тоді параметри не редукуються, тому маємо $I_{1,2}^{2,5,7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \right\rangle + XM_2$;

b) $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^6, t^9 \right\rangle$. Параметр β редукується, тому маємо нову сім'ю ідеалів $I_{2,2}^{2,5,7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 \right\rangle + XM_2$;

c) $W = \left\langle 1, t^6, t^9 \right\rangle$. Отримаємо новий ідеал $I_{3,2}^{2,5,7} = \left\langle 1, t^6, t^9 \right\rangle + XM_2$.

5) $X = K_5$, $XM_3 = M_3$, тому $X/XM_2 = \left\langle 1, t^7, t^{10} \right\rangle$, де $1, t^{10}$– обов'язкові елементи.

a) $W = \left\langle 1, t^7 + \gamma t^{10} \right\rangle + XM_2$. Параметр γ не редукується. Отримали нову сім'ю ідеалів $I_1^{2,5} = \left\langle 1, t^7 + \gamma t^{10} \right\rangle + XM_2$.

6) $X = I_3^{5,K7}$, $XM_3 = \left\langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \right\rangle \neq \left\langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{11}, \dots \right\rangle = XM_2$, звідки $X \big/ XM_2 = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^7, t^{10} \right\rangle$, де 1, $t^5 + \gamma t^3$ – обов'язкові елементи.

b) $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^{10}, t^7 + \chi t^{10} \right\rangle$. Параметри β, χ редукуються. Отже, отримали нову сім'ю ідеалів $I_{1,3}^{2,5,K7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^{10}, t^7 + \chi t^{10} \right\rangle + XM_2$.

c) $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7 + \chi t^{10} \right\rangle$. Легко перевірити, що параметр χ редукується. Отже отримали нову сім'ю ідеалів $I_{2,3}^{2,5,K7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7 \right\rangle + XM_2$.

d) $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7, t^{10} \right\rangle$. Легко перевірити, що різним значенням γ і β відповідають не ізоморфні підпростори. Отже, отримали *нову* сім'ю ідеалів $I_{3,3}^{2,5,K7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7 \right\rangle + XM_2$.

7. $X = I_2^{7,K8}$, $XM_3 = \left\langle t^4, t^6, t^7, \dots \right\rangle = XM_2$, тому $X \big/ XM_2 = 1, t^2, t^3, t^5$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, нового ідеалу не породжує.

8. $X = I_2^{5,K7}$, $XM_3 = \left\langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \right\rangle \neq XM_2 = \left\langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, \dots \right\rangle$. $X \big/ XM_2 = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6, t^9 \right\rangle$, де $t^5 + \gamma t^3, t^6$ – обов'язкові елементи. Розгляньмо підвипадки.

а) $W = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^9, t^6 + \chi t^9 \right\rangle$. Легко перевірити, що параметри β, χ редукуються. Отже, отримали *нову однопараметричну* сім'ю ідеалів $I_{1,2}^{2,5,K7} = \left\langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \right\rangle + XM_2$.

9. $X = I_2^{7,K8} = \left\langle 1, t^2 \right\rangle + M_2$, $XM_3 = \left\langle t^4, t^6, t^7, \dots \right\rangle = XM_2$, $X \big/ XM_2 = \left\langle 1, t^2, t^3, t^5 \right\rangle$, де

всі елементи є обовязковими. Отже, маємо єдиний ідеал $I_{1,2}^{2,5,K7}=\left\langle 1,t^2,t^3,t^5\right\rangle+XM_2$.

10. $X=I_2^{5,K7}$, тоді $XM_2=\left\langle t^4,t^9+\gamma t^7,t^8,...\right\rangle\neq XM_3=\left\langle t^4,t^7,t^8,t^9,...\right\rangle$,

$X\big/XM_2=\left\langle 1,t^4,t^5+\gamma t^3,t^6,t^9\right\rangle$, де $t^5+\gamma t^3,t^6$ є обовязковими.

a) $W=\left\langle 1,t^5+\gamma t^3+\beta t^9,t^6+\chi t^9\right\rangle$. Легко перевірити, що параметри β,χ редукуються. Отже отримали нову однопараметричну сім'ю ідеалів. $I_{1,2}^{2,5,K7}=\left\langle 1,t^5+\gamma t^3,t^6\right\rangle+XM_2$.

3.4.3. Знаходження K_1 - ідеалів. Згідно з лемою 1.7.2 нові ідеали можуть породити такі:

1. $X=I_{2,3}^{2,5,K7}$, $XM_2=XM_1=M_2$**,** тому нового ідеалу не буде.
2. $X=I_{2,3}^{2,5,K7}$, $XM_2=XM_1=M_2$, тому нового ідеалу не буде.
3. $X=I_{1,3}^{2,5,K7}$, $XM_2=XM_1=M_2$, тому нового ідеалу не буде.
4. $X=I_{1,2}^{2,5,K7}$, $XM_2=\left\langle t^4,t^9+\gamma t^7,t^8,t^{10},t^{11},...\right\rangle=XM_1$, тому нового ідеалу не буде.
5. $X=I_{3,2}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2=\left\langle t^4,t^9+\gamma t^7,t^8,t^{10},t^{11},...\right\rangle=XM_1$. Отже, нового ідеалу не буде.
6. $X=I_{2,2}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2=XM_1$. Отже, нового ідеалу не буде.
7. $X=I_{2,2}^{2,5,K7}$, тоді $X=I_{1,6}^{4,5,K_6}=\left\langle 1,t^9+\gamma t^{10}\right\rangle+XM_4$.

$XM_1=\left\langle t^4,t^8,t^{11},t^{12},t^{15},t^{16},t^{17}+\gamma t^{18},t^{19},t^{20},t^{21},...\right\rangle\neq XM_2=\left\langle t^4,t^8,t^{11},t^{12},t^{15},t^{16},t^{17},t^{18},t^{19},t^{20},t^{21},...\right\rangle$

$X\big/XM_1=\left\langle 1,t^7,t^9+\gamma t^{10},t^{17}\right\rangle$, де $t^7,t^9+\gamma t^{10}$ — обов'язкові елементи. Тоді маємо підпростори:

a) $W=\left\langle 1,t^7+\chi t^{17},t^9+\gamma t^{10}+\beta t^{17}\right\rangle$. Легко перевірити, що параметри β,χ редукуються, тому одержуємо *нову двопараметричну* сім'ю ідеалів $I_{1,1,6}^{1,4,5,K_6}=\left\langle 1,t^7+\chi t^{17},t^9+\gamma t^{10}+\beta t^{17}\right\rangle+XM_1$.

8. $X = I_{2,6}^{4,5,K_6} = \left\langle 1, t^{10} \right\rangle + XM_4$. Тоді $XM_1 = \left\langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, ... \right\rangle$, $K_1 = K_0 + \left\langle t^{29} \right\rangle$, ${}^{X}\!\diagup_{XM_1} = \left\langle 1, t^7, t^{10}, t^{13} \right\rangle$, де всі елементи обов'язкові.

Тобто ідеали $I_{i,6}^{4,5,K_6}$ породили лише дві сімї в K_1 ідеалах.

9. $X = I_5^{5,K_6}$, тоді $XM_1 = \left\langle t^4, t^8, t^{11}, \right\rangle$, тож $XM_1 = \left\langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, ... \right\rangle = XM_2$, ${}^{X}\!\diagup_{XM_1} = \left\langle 1, t^6, t^7, t^9 \right\rangle$, де $1, t^6, t^7, t^9$ – обов'язкові. Таким чином, нових ідеалів не породить.

10. $X = I_6^{5,K6}$, тоді $XM_1 =< t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots >= XM_2$, ${}^{X}\!\diagup_{XM_1} = \left\langle 1, t^6, t^7, t^9 \right\rangle$, де $1, t^6, t^7, t^9$ – обов'язкові. Отже, нового ідеалу не отримаємо.

11. $X = I_4^{5,K6}$, тоді $XM_1 =< t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t^6 + \gamma t^9, t^7 >$ де $1, t^6 + \gamma t^9, t^7$ – обов'язкові. Отже, нового ідеалу не отримаємо.

12. $X = I_3^{5,K6}$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7 + \gamma t^{10}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t^3 + \gamma t^6 + \beta t^9, t^7 >$, де $1, t^3 + \gamma t^6 + \beta t^9, t^7$ – обов'язкові. Отже, нового ідеалу не отримаємо.

13. $X = I_1^{5,K6} =< 1, t^3, t^6 >$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t^3, t^6, t^{13}, >$, де всі обов'язкові. Тому нового ідеалу не отримуємо.

14. $X = I_2^{5,K6} =< 1, t^3, t^9 >$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t^3, t^9, t^{10}, >$, де всі обов'язкові. Тому нового ідеалу не отримуємо.

15. $X = I_3^{5,K6} =< 1, t^3 >$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t^9, t^{10}, t^{13} >$, де всі обов'язкові. Тому нового ідеалу не отримуємо.

16. $X = I_{1,1}^{5,7,K8} =< 1, t, t^3 > + XM_5$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, тому $X/XM_1 =< 1, t, t^3, t^{10} >$, таким чином тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів

немає.

17. $X = I_{2,1}^{5,7,K8} =< 1, t+\gamma t^3, t^6 > + XM_5$, тоді $XM_1 =< t^4, t^7,\ t^8,\ t^{11},\ t^{12}, t^{13},\ t^{14},\ t^{15}, t^{16},\ t^{17},\ t^{18},\ t^{19}, t^{20},\ t^{22}, \ldots >= XM_2$, $X \,/\, XM_1 =< 1, t+\gamma t^3, t^4+\gamma t^7, t^6 >$ тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів немає.

18. $X = I_{3,1}^{5,7,K8} =< 1, t+\gamma t^3 > + XM_5$, тоді отримуємо $XM_1 =< t^4, t^7,\ t^8,\ t^{11},\ t^{12}, t^{13},\ t^{14},\ t^{15}, t^{16},\ t^{17},\ t^{18},\ t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, звідси $X/XM_1 =< 1, t+\gamma t^3, t^4+\gamma t^7 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів немає.

19. $X = I_{1,2}^{5,7,8} =< 1, t^2, t^3, > + XM_5$, тоді $XM_1 =< t^4, t^6, t^7, t^8,\ t^9, t^{11}, t^{12}, \ldots >= XM_2$, $X/XM_1 =< 1, t^2, t^3, t^5 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже нових ідеалів немає.

20. $X = I_{2,2}^{5,7,8} =< 1, t^2+\gamma t^3, t^5 > + XM_5$, тоді $XM_1 =< t^4, t^6+\gamma t^7,\ t^8, t^9, t^{11},\ t^{12}, t^{13},\ t^{14},\ t^{15}, t^{16},\ t^{17},\ t^{18},\ t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, $X/XM_1 =< 1, t^2+\gamma t^3, t^5, t^7 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів немає.

21. $X = I_{3,2}^{5,7,K8} =< 1, t^2+\gamma t^3 > + XM_5$, тоді отримуємо $XM_1 =< t^4, t^6+\gamma t^7,\ t^8, t^9, t^{11},\ t^{12}, t^{13},\ t^{14},\ t^{15}, t^{16},\ t^{17},\ t^{18},\ t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= XM_2$, $X/XM_1 =< 1, t^2+\gamma t^3, t^5, t^7 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів немає.

22. $X = I_1^{5,K_7}$, $XM_1 =< t^4, t^9+\gamma t^{10}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots >= = XM_2$, звідси $X/XM_1 =< 1, t^5+\gamma t^3, t^9+\gamma t^{10}, t^7 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів немає.

23. $X = I_2^{5,K7}$ тоді отримуємо $XM_1 =< t^4, t^9+\gamma t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23} \ldots >= XM_2$, звідси $X/XM_1 =< 1, t^5+\gamma t^3, t^9+\gamma t^7, t^6 >$, тому тут усі елементи обов’язкові. Отже, нових ідеалів

немає.

24. $X = I_3^{5,K7}$, тоді $XM_1 =< t^4, t^9 + \gamma t^7, t^6, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, ... >= XM_2$, звідси $X/XM_1 =< 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 + \gamma t^7, t^{10} >$, тому тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів немає.

25. $X = I_{1,1}^{5,7,K8}$, тоді $XM_1 =< t^5, t^7, t^8, t^9, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, ... >$ і $XM_1 = XM_2$, $X / XM_1 =< 1, t, t^3, t^7, t^{10}, >$. Тому тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів немає.

26. $X = I_{2,1}^{5,7,K8}$, тоді $XM_1 =< t^4 + \gamma t^7, t^5, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, ... >= XM_2$, $X/XM_1 =< 1, t + \gamma t^3, t^6 > + XM_1$. Тому тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів немає.

27. $X = I_{3,1}^{5,7,K8}$, тоді $XM_1 =< t^4 + \gamma t^7, t^5, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, ... >= XM_2$, тому тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів немає.

28. $X = K_8$, $XM_1 = XM_2$, $X/XM_1 =< 1, t, t^2, t^3 >$. Тому тут усі елементи обов'язкові. Отже, нових ідеалів немає.

Згідно з наведеними вище зауваженнями в K_0 не буде нових ідеалів, окрім самого K_0.

Висновки до розділу 3

Виявлено, що особливість типу W має лише двопараметричні сім’ї ідеалів тоді й тільки тоді, коли вона домінує особливість одного з типів $W_{24}, W_{30}, W^{\#}_{2,2q-1}$. Для особливостей типів W_{24} та W_{30} дано повний опис класів ідеалів.

РОЗДІЛ 4

ІДЕАЛИ ОДНОГІЛКОВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ КРИВИХ ТИПУ *N*

У цьому розділі вивчаються особливості кривих типу N. Точніше, цей розділ присвячений дослідженню кривих типу N, що мають сімейства ізоморфних класів R-ідеалів (тобто вільних від скруту R-модулів рангу 1), які допускають максимальну кількість незалежних параметрів не більше, ніж 2 і 3.

4.1. Дослідження особливостей N_{20} і N_{24}.

Означення 4.1.1. Особливістю типу ***N*** називається одногілкова особливість, тобто підалгебра K в k[[t]], така, що найменший показник, який зустрічається в елементах із K — це є 5. Очевидно, тоді можна вважати, що $t^5 \in K.$ Якщо це – плоска особливість з вектором нормування (5,*k*+1), вона зветься особливістю типу N_{4k}. Очевидно, тоді $k \geq 6$.

Теорема 4.1.1. *Якщо* $\mathit{char}\,\mathrm{k} \neq 2$*, то одногілкова особливість типу N має не більше, ніж двопараметричні сім'ї ідеалів тоді й тільки тоді, коли вона домінує особливість типу* N_{4k} *при* $k \leq 7$*. Якщо* $\mathit{char}\,\mathrm{k} = 2$*, то* N *повинна домінувати одну з особливостей* N_{20}, N_{24}.

Доведення. Перевіримо, що якщо S не домінує N_{4k} при $k \leq 7$, то ця особливість має трипараметричні сім'ї ідеалів. Таким чином, ми повинні показати, що кількість параметрів: $par\ 1, K\ \geq 3,$ якщо не виконані умови теореми, тобто степінь $n = 5$ і K не містить жодного елемента y із умовою нормування $6 \leq v(y) \leq 8$, тобто K не домінує N_{20}, N_{24}, N_{28}. У цьому випадку $K \subseteq K_0$, де $K_0 = k + kt^5 + t^9 R$. Максимальний ідеал кільця K_0 — це $m_0 = kt^5 + t^9R$. Доведімо, що ідеали $I(\alpha,\beta,\gamma) = \left\langle 1, t + \alpha t^3 + \beta t^4 + \gamma t^8 \right\rangle + m_0$, де $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{k}$, яким відповідають підпростори $W(\alpha,\beta,\gamma) = \left\langle 1, t + \alpha t^3 + \beta t^4 + \gamma t^8 \right\rangle$ у просторі ${}^{R}\!/\!{}_{Rm_0} = \left\langle 1, t, t^3, t^4, t^8 \right\rangle$, є попарно неізоморфні, тобто рівність $W(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda W(\alpha',\beta',\gamma')$ можлива лише за $\lambda = 1$.

Якщо $W(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda W(\alpha',\beta',\gamma')$, то $\lambda \in W(\alpha',\beta',\gamma')$, тому можна припустити, що $a = 1 - \lambda(t + \alpha' t^3 + \beta' t^4 + \gamma' t^8)$. Тоді $a(t + \alpha t^3 + \beta t^4 + \gamma t^8) = t + \alpha t^3 + \beta t^4 + \gamma t^8 - \lambda t^2 - w$, де w містить члени степеня 4 і вище. Оскільки $W(\alpha',\beta',\gamma')$ не містить членів з t^2, це можливо лише при $\lambda = 0$, тобто a =1. Тому ідеали $I(\alpha,\beta,\gamma)$ попарно неізоморфні. Звідси випливає, що $par(1,\ K_0) \geq 3$, тому й $par(1,\ K) \geq 3$ для кожного $K \subseteq K_0$.

Залишилося перевірити, що особливість типу N_{4k} при $5 \leq k \leq 7$ має не більше, ніж двопараметричні сім'ї ідеалів. У цьому параграфі ми доведемо це для особливості N_{24}, а в наступному – для N_{28}. Обчислення для N_{20}, які є найпростішими й аналогічними до обчислень для N_{24}, ми пропускаємо.

Знайдімо серії надкілець для $K_0 = \left\langle t^5, t^7 \right\rangle$ – N_{24}, *позначатимемо через* M_i *радикал кільця* K_i.

$$K_0 = \left\langle 1, t^5,,,, t^7,, t^{10},\ , t^{12},, t^{15}, t^{14}, t^{15},, t^{17},, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$
$$K_1 = \left\langle 1, t^5,,, t^7,, t^{10},\ , t^{12},, t^{15}, t^{14}, t^{15}, \mathrm{t}^{16}, t^{17}, \mathrm{t}^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$
$$K_2 = \left\langle 1, t^5,,, t^7,, \mathrm{t}^9, t^{10}, \mathrm{t}^{11}, t^{12}, \mathrm{t}^{13}, t^{15}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17},, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$
$$K_3 = \left\langle 1, \mathrm{t}^2, \mathrm{t}^4, t^5, \mathrm{t}^6, t^7, \mathrm{t}^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{15}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17},, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$
$$K_4 = \left\langle 1, t^2, \mathrm{t}^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{15}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17},, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$
$$K_5 = \left\langle 1, \mathrm{t}, t^2, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{15}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17},, t^{19}, t^{20}, t^{21}, \ldots \right\rangle$$

Оскільки всі K_3-ідеали – це надкільця, тобто K_3, K_4, K_5, то дослідимо K_2-ідеали, які породжені K_3- ідеалами.

Теорема 4.1.2. *Нижче наведено* K_2-ідеали, які не є K_3-ідеалами і впорядковані за порядком, індукованим K_3 ідеалами, при цьому позначатимемо $I' = IK_3$.

Наведемо список отриманих K_2 - ідеалів, що породжені K_4 , K_5 - ідеалами і K_3.

1. $I_1^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3, t^4 \right\rangle$,
2. $I_2^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4, t^6 \right\rangle$,
3. $I_3^{2,4} = \left\langle 1, t^3, t^4, t^6 \right\rangle + XM_2$,
4. $I_4^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$,
5. $I_{4a}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \beta t^4 \right\rangle + XM_2$,
6. $I_5^{2,4} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 \right\rangle + XM_2$,
7. $I_6^{2,4} = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$,
8. $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$,
9. $I_{7,\lambda}^{2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right\rangle + XM_2$,
10. $I_{10}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4, t^6 \right\rangle + XM_2, \ \gamma \neq 0$,
11. $I_9^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \right\rangle + XM_2, \quad \gamma \neq 0$.

Список ідеалів отриманих з K_5 у яких $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \ldots \right\rangle$ є таким:

1. $I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + XM_2$,
2. $I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + XM_2$,
3. $I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$,
4. $I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$,
5. $I_5^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3 + \mu t^4 \right\rangle + XM_2$,
6. $I_6^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$
7. $I_{6,14}^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$.

K_3 - ідеали вже відомі – це надкілця, тобто K_3, K_4, K_5.

Тепер наведемо список породжених ними ідеалів.

Ми позначимо, K_3 -ідеали $I' = IK_3$ і покладемо $R_2 = I'M_2$, де $I' = K_3$, $M_2 = R_2$. Тоді

1. $I_1^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^6 \right\rangle + R_2$,
2. $I_2^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
3. $I_3^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,
4. $I_4^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,
5. $I_5^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,
6. $I_6^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6 + \alpha t^8 \right\rangle + R_2$,
7. $I_7^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \alpha t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
8. $I_8^{2,3} = \left\langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,
9. $I_9^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
10. $I_{10}^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
11. $I_{12}^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \right\rangle + R_2$,
12. $I_{13}^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6 \right\rangle + R_2$,
13. $I_{14}^{2,3} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^8 \right\rangle + R_2$,
14. $I_{15}^{2,3} = \left\langle 1, t^8 \right\rangle + R_2$.

Тепер список породжених ними ідеалів.

Ми позначимо, K_3 - ідеали $I' = IK_3$ і покладемо $R_2 = I'M_2$, де $I' = K_3$, $M_2 = R_2$. Тоді

1. $I_1^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^6 \right\rangle + R_2$,
2. $I_2^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
3. $I_3^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,
4. $I_4^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,
5. $I_5^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,
6. $I_6^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6 + \alpha t^8 \right\rangle + R_2$,
7. $I_7^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \alpha t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
8. $I_8^{2,3} = \left\langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,
9. $I_9^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
10. $I_{10}^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,
11. $I_{12}^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \right\rangle + R_2$,
12. $I_{13}^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6 \right\rangle + R_2$,
13. $I_{14}^{2,3} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^8 \right\rangle + R_2$,
14. $I_{15}^{2,3} = \left\langle 1, t^8 \right\rangle + R_2$.

Кінець формулювання теореми.

Доведення. Дослідимо K_2 -ідеали породжені K_4. Оскільки всі K_3 -ідеали вже відомі, то дослідимо K_2 -ідеали, які породжені K_4 -ідеалами.

1) $X = K_4$, $XM_3 = \left\langle t^2, t^4, t^5, \ldots \right\rangle = M_3$, $XM_2 = \left\langle t^5, t^7, t^8, t^9, \ldots \right\rangle$

$X \big/ XM_2 = \left\langle 1, t^2, t^3, t^4, t^6 \right\rangle$, де $t^3 -$ обов'язковий.

Розгляньмо твірні підпростори W в X/XM_2. Якщо dim*W*=4, є такі можливості:

1. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^6,t^3+\beta t^6,t^4+\chi t^6\right\rangle$. Припустимо $\lambda=1-\gamma(t^4+\chi t^6)$, як результат маємо $\lambda W=W'=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^6,t^4+\chi t^6\right\rangle$. Тепер припускаємо $\alpha=1-\chi t^2$. Тоді отримуємо $\alpha W'=W''=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^6,t^4\right\rangle$. Далі нехай $\eta=1-\beta(t^3+\beta t^6)$, тоді $\eta W''=W'''$, де $W'''=\left\langle 1,t^2,t^3,t^6\right\rangle$. Прообраз W''' у S_2 є $I_1^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3,t^6\right\rangle+XM_2$ зі списку.

2. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^4,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle$. Припускаємо $\lambda=1-\gamma(t^2+\gamma t^4)$, тоді $\lambda W=W(\beta)=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle$. Прообраз λW у S_2 є $I_2^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle+XM_2$.

Якщо припустимо, що виконується $\alpha W(\beta)=W(\beta')$, то $\alpha\in W(\beta')$, тому можемо покласти, що $\alpha=1+at^2+b(t^3+\beta t^4)+ct^6$. Тоді з умови $\alpha W(\beta)=W(\beta')$ випливає, що $\alpha\left(t^3+\beta t^4\right)=W(\beta')$, звідки випливає наступне $t^3+\beta t^4+\alpha\beta t^6+b\alpha t^6\in W(\beta')=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta' t^4,t^6\right\rangle$, що можливо лише при $\beta=\beta'$. Отже, всі ідеали $I_2^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle+XM_2$ є попарно не ізоморфними.

Якщо припустимо, що виконується $\alpha W(\beta)=W(\beta')$, то $\alpha\in W(\beta')$, тому можемо покласти, що $\alpha=1+at^2+b(t^3+\beta t^4)+ct^6$. Тоді з умови $\alpha W(\beta)$=$W(\beta')$ випливає, що $\alpha(t^3+\beta t^4)\in W(\beta')$, звідки випливає наступне $t^3+\beta t^4+a\beta t^6+b\alpha t^6\in W(\beta')=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta' t^4,t^6\right\rangle$, що можливо лише при $\beta=\beta'$. Отже, всі ідеали $I_2^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle+XM_2$ є попарно не ізоморфними.

3. $W=\left\langle 1,t^3,t^4,t^6\right\rangle$, тому $I_3^{2,4}=\left\langle 1,t^3,t^4,t^6\right\rangle+XM_2$.

4. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^3,t^4,t^6\right\rangle \quad \gamma\neq 0$ дає $I_{10}^{2,4}=\left\langle 1,t^2+\gamma t^3,t^4,t^6\right\rangle+XM_2,\ \gamma\neq 0$. Перевірьмо, що ці ідеали не ізоморфні: $W(\gamma)=\left\langle 1,t^2+\gamma t^3,t^4,t^6\right\rangle$, тоді

$W(\gamma') = \left\langle 1, t^2 + \gamma' t^3, t^4, t^6 \right\rangle$. Якщо $aW(\gamma) = W(\gamma')$, то $a \in W(\gamma')$, тому можна припустити, що $a = 1 - \lambda(t^2 + \gamma' t^3)$. Так умова $a(t^2 + \gamma t^3) = t^2 + \gamma t^3 + \lambda t^4 + \lambda\gamma' t^5 + \ldots \in W(\gamma')$ виконується лише, коли $\gamma = \gamma'$.

Якщо dim*W*=3, то є такі можливості:

1. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6 + \beta t^4, t^3 + \eta t^4 + \chi t^6 \right\rangle$ дає $I_4^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$.

2. $W = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 + \chi t^6 \right\rangle$ дає $I_5^{2,4} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 \right\rangle + XM_2$.

3. $W = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle$ дає $I_6^{2,4} = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$.

4. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^6, t^4 + \eta t^6 \right\rangle + XM_2,\ \gamma \neq 0$ дає $I_9^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \right\rangle + XM_2, \quad \gamma \neq 0$.

Якщо dim*W*=2, то є такі можливості:

1. $W = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6 \right\rangle$, де $XM_2 = \left\langle t^5,, t^7, t^8, t^9, \ldots \right\rangle$ дає $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$, у випадку $\lambda \neq 0$, маємо $\lambda t^2 \neq 0$, звідси $\alpha = 1 - \chi\ \ \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6$, параметр χ не редукується, бо $t^4 \notin XM_2$ звідси $I_{7,\lambda}^{2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right\rangle + XM_2$. Множники $\alpha = 1 - \dfrac{\chi}{\gamma}\ \ \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6$, $\alpha = 1 - \dfrac{\chi}{\lambda}\ \ \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4$, дають двопараметричні сім'ї виду $W = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 \right\rangle$, випадок $\lambda = 0$ дає $\alpha = 1 - \chi\ \ t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6$ і звідси $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$.

2) $X = K_5,\ XM_3 = \left\langle t^2, t^3, t^4, t^5, \ldots \right\rangle = M_4,\ XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \ldots \right\rangle$, тому

$X \big/ XM_2 = \left\langle 1, t, t^2, t^3, t^4 \right\rangle,\ t -$це обов'язковий.

Підпростори

1. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^4,t^2+\eta t^4,t^3+\chi t^4\right\rangle$ дає $I_1^{2,5}=\left\langle 1,t,t^2,t^3\right\rangle+XM_2$;

2. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^2,t^3,t^4\right\rangle$ параметри редукються $I_2^{2,5}=\left\langle 1,t,t^3,t^4\right\rangle+XM_2$;

3. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^3,t^2+\eta t^3,t^4\right\rangle$ параметри редукються $I_3^{2,5}=\left\langle 1,t,t^2,t^4\right\rangle+XM_2$.

Якщо dim$W$=3, є такі можливості:

4. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^3+\beta t^4,t^2+\eta t^3+\mu t^4\right\rangle$ дає ідеал $I_4^{2,5}=\left\langle 1,t+\gamma t^3,t^2+\eta t^3\right\rangle+XM_2$.

5. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^2+\beta t^4,t^3+\mu t^4\right\rangle$ дає $I_5^{2,5}=\left\langle 1,t,t^3+\mu t^4\right\rangle+XM_2$.

6. $W=\left\langle 1,t+\gamma t^2+\beta t^3,t^4\right\rangle$ дає $I_{6,14}^{2,5}=\left\langle 1,t+\gamma t^2,t^4\right\rangle+XM_2$.

Якщо dim$W$=2, є такі можливості:

1. $W=\left\langle 1,t+\beta t^2+\gamma t^3+\eta t^4\right\rangle$ дає $I_6^{2,5}=\left\langle 1,t+\beta t^3+\gamma t^4\right\rangle+XM_2$, де $XM_2=\left\langle t^5,t^6,t^7,\dots\right\rangle$.

Список ідеалів, отриманих із K_5:

$I_1^{2,5}=\left\langle 1,t,t^2,t^3\right\rangle+XM_2$, $I_2^{2,5}=\left\langle 1,t,t^3,t^4\right\rangle+XM_2$, $I_3^{2,5}=\left\langle 1,t,t^2,t^4\right\rangle+XM_2$,

$I_4^{2,5}=\left\langle 1,t+\gamma t^3,t^2+\eta t^3\right\rangle+XM_2$, $I_5^{2,5}=\left\langle 1,t,t^3+\mu t^4\right\rangle+XM_2$, $I_6^{2,5}=\left\langle 1,t+\beta t^3+\gamma t^4\right\rangle+XM_2$,

де $XM_2=\left\langle t^5,t^6,t^7,\dots\right\rangle$, $I_{6,14}^{2,5}=\left\langle 1,t+\gamma t^2,t^4\right\rangle+XM_2$.

Знайдімо K_1-ідеали.

1) $X=I_6^{2,5}$, тоді $XM_2=\left\langle t^5,t^6,t^7,\dots\right\rangle$, $XM_1=\left\langle t^5,t^6+\gamma t^9,t^7,t^8,\ ,t^{10},\dots\right\rangle$.

звідси маємо $X\big/XM_2=\left\langle 1,t+\beta t^4+\gamma t^3,t^9\right\rangle$, $t+\beta t^4+\gamma t^3$ – обов'язковий.

Підпростір $W=\left\langle 1,t+\beta t^4+\gamma t^3+\mu t^9\right\rangle$ дає $I_1^{1,2,5}=\left\langle 1,t+\beta t^4+\gamma t^3\right\rangle+XM_1$.

Список породжених ідеалом $X=I_6^{2,5}$:

1) $I_1^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + XM_1$,

2) $X = I_5^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4, t^3 + \mu t^4 \right\rangle$ дає при $\mu = 0$.

$XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, ... \right\rangle$,

$XM_1 = \left\langle t^5, t^6 + \beta t^9, t^7, t^8 + \mu t^9, t^8 + \beta t^{11}, t^{10}, ... \right\rangle = \left\langle t^5, t^6, t^7, ... \right\rangle = XM_2$.

Отже, нового не дає.

3) $X = I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$, де $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, ... \right\rangle$, то

$XM_1 = \left\langle t^5, t^6 + \gamma t^8, t^7, t^8 + \gamma t^{10}, t^9 + \eta t^{10}, t^{10}, ... \right\rangle = \left\langle t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, ... \right\rangle = XM_2$.

Отже, нового не дає.

4) $X = I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$, де $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, ... \right\rangle$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, ... \right\rangle$.

Зрозуміло, нового в K_1 не дасть.

5) $X = I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + XM_2$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, ... \right\rangle = XM_2$.

6) $X = I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + XM_2$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, ... \right\rangle = XM_2$ нового в K_1 не дасть.

Список отриманих з $I_j^{2,5}$: $I_1^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + XM_1$.

7) $X = I_{6,14}^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + \dot{X}M_2$, де $\dot{X}M_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, ... \right\rangle$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, ... \right\rangle = XM_2$, тому нових не породить.

Ми позначимо K_3-ідеали як $I' = K_3 I$ і припускаємо $R_2 = I'M_2$,

- якщо $I' = K_3$, $M_2 = R_2$, то

1. $I_1^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^6 \right\rangle + R_2$,

2. $I_2^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,

3. $I_3^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,

9. $I_9^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,

10. $I_{10}^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,

11. $I_{1,2}^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \right\rangle + R_2$,

4. $I_4^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^4, t^8 \right\rangle + R_2$,

5. $I_5^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,

6. $I_6^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6 + \alpha t^8 \right\rangle + R_2$,

7. $I_7^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \alpha t^6, t^8 \right\rangle + R_2$,

8. $I_8^{2,3} = \left\langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \right\rangle + R_2$,

12. $I_{13}^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6 \right\rangle + R_2$,

13. $I_{14}^{2,3} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^8 \right\rangle + R_2$,

14. $I_{15}^{2,3} = \left\langle 1, t^8 \right\rangle + R_2$.

- якщо $I' = K_4$, $M_2 = R_2 I'$, $M_2 = \left\langle t^5,, t^7, t^8, t^9, ... \right\rangle$, то:

1. $I_1^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3, t^4 \right\rangle + M_2$,

2. $I_2^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4, t^6 \right\rangle + M_2$,

3. $I_3^{2,4} = \left\langle 1, t^3, t^4, t^6 \right\rangle + M_2$,

4. $I_4^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + M_2$,

5. $I_5^{2,4} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 \right\rangle + M_2$,

6. $I_6^{2,4} = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + M_2$,

7. $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + M_2$,

8. $I_{7,\lambda}^{2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right\rangle + M_2$,

9. $I_{10}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4, t^6 \right\rangle + M_2$, $\gamma \neq 0$,

10. $I_9^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \right\rangle + M_2$, $\gamma \neq 0$,

11. $I_{10}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^6 \right\rangle + M_2$.

- якщо $I' = K_5$ і $M_2 = R_2 I' = \left\langle t^5, t^6, t^7, ... \right\rangle$, то:

1. $I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + M_2$,

2. $I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + M_2$,

3. $I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + M_2$,

4. $I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + M_2$,

5. $I_5^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3 + \mu t^4 \right\rangle + M_2$,

6. $I_6^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + M_2$,

7. $I_7^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + M_2$.

Ми розглянемо, як приклад, одержання ідеалів $I_j^{2,3}$. Інші випадки цілком аналогічні. У цьому випадку $I' = K_3$, $I'R_3 = \left\langle t^2,, t^4, ... \right\rangle = R_3$, $I'R_2 = \left\langle t^5,, t^7,, t^9, ... \right\rangle = M_2$,

${I'}\!\big/_{I'K_2} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^6, t^8 \right\rangle,\ t^2, t^4, t^6, t^8$ – вільні. Тому тут можливі такі варіанти **чотиривимірних підпросторів**:

1. $W = \left\langle 1, t^2 + \lambda t^8, t^4 + \beta t^8, t^6 + \gamma t^8 \right\rangle + R_2$. Візьмімо множник $\alpha = 1 - \lambda\left(t^6 + \gamma t^8\right)$ він редукує параметр λ. Аналогічно інші параметри також редукуються. Отже, отримали $I_1^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^6 \right\rangle + R_2$.

2. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^4, t^6, t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \gamma\left(t^2 + \beta t^4\right)$ дає $I_2^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6, t^8 \right\rangle$.

3. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle$, $\alpha = 1 - \gamma\left(t^4 + \beta t^6\right)$дає $W = \left\langle 1, t^2, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \beta t^2$, звідси $I_3^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^4, t^8 \right\rangle$.

4. $W = \left\langle 1, t^4, t^6, t^8 \right\rangle$, тому $I_4^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^4, t^8 \right\rangle$.

Тривимірні підпростори.

1. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6 + \beta t^8, t^4 + \eta t^6 + \mu t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \mu\left(t^4 + \eta t^8\right)$

$\alpha = 1 - \dfrac{\beta}{\eta}\left(t^4 + \eta t^8\right)$, отримуємо $I_5^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^8, t^4 + \mu t^8 \right\rangle$.

2. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^4 + \beta t^8, t^6 + \mu t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \gamma\left(t^2 + \gamma t^4 + \beta t^8\right)$, після цього множення знищуємо t^6, віднявши $t^6 + \mu t^8$, потім $\alpha = 1 - \beta\left(t^6 + \mu t^8\right)$, отже, $I_6^{2,3} = \left\langle 1, t^2, t^6 + \alpha t^8 \right\rangle$.

3. $W = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \gamma\left(t^2 + \gamma t^4 + \beta t^6\right)$ дає $I_7^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6, t^8 \right\rangle$.

4. $W = \left\langle 1, t^4 + \beta t^8, t^6 + \mu t^8 \right\rangle,\ \alpha = 1 - \beta t^4$ дає $I_8^{2,3} = \left\langle 1, t^4, t^6 + \mu t^8 \right\rangle + XM_2$.

5. $W = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle$ дає $I_9^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^8 \right\rangle + XM_2$.

6. $W = \left\langle 1, t^6, t^8 \right\rangle$ дає $I_{10}^{2,3} = \left\langle 1, t^6, t^8 \right\rangle + XM_2$.

7. $W = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 \right\rangle$, звідси $I_7^{2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 \right\rangle + XM_2$.

Двовимірні підпростори.

1. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^4+\beta t^6+\chi t^8\right\rangle$ $\alpha=1-\dfrac{\beta}{\gamma}t^4$ дає $I_{10}^{2,3}=\left\langle 1,t^2+\beta t^6+\chi t^8\right\rangle$.

2. $W=\left\langle 1,t^4+\gamma t^6+\chi t^8\right\rangle$ $\alpha=1-\chi t^4$ дає $I_{11}^{2,3}=\left\langle 1,t^4+\gamma t^6\right\rangle+XM_2$.

3. $W=\left\langle 1,t^6+\gamma t^8\right\rangle$ дає $I_{12}^{2,3}=\left\langle 1,t^6+\gamma t^8\right\rangle+XM_2$.

4. $W=\left\langle 1,t^8\right\rangle$ дає $I_{13}^{2,3}=\left\langle 1,t^8\right\rangle+XM_2$.

Одновимірний підпростір — саме K_2.

Розгляньмо ідеали, породжені K_4:

4) $X=K_4$, $XM_3=\left\langle t^2,,t^4,t^5,...\right\rangle=M_3$, $XM_2=\left\langle t^5,,t^7,t^8,t^9,...\right\rangle$.

$X\big/_{XM_2}=\left\langle 1,t^2,t^3,t^4,t^6\right\rangle$, де t^3 — обов'язковий.

1. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^6,t^3+\beta t^4,t^4+\chi t^6\right\rangle$, β не знищується. Тому

$I_1^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^4\right\rangle$, але тоді, віднявши третю компоненту, маємо $I_1^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3,t^4\right\rangle$.

2. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^4,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle$. Параметр β не знищується. Тобто

$I_2^{2,4}=\left\langle 1,t^2,t^3+\beta t^4,t^6\right\rangle$.

3. $W=\left\langle 1,t^3,t^4,t^6\right\rangle$, тому $I_3^{2,4}=\left\langle 1,t^3,t^4,t^6\right\rangle+XM_2$.

4. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^3,t^4,t^6\right\rangle$, $\gamma\neq 0$ дає $I_{10}^{2,4}=\left\langle 1,t^2+\gamma t^3,t^4,t^6\right\rangle+XM_2$, $\gamma\neq 0$.

Розгляньмо тривимірні підпростори:

5. $W=\left\langle 1,t^2+\gamma t^6+\beta t^4,t^3+\eta t^4+\chi t^6\right\rangle$ дає

$\alpha=1-\beta\left(t^2+\beta t^4+\gamma t^6\right)$ редукує β. А $\alpha=1-\chi\left(t^3+\eta t^4+\chi t^6\right)$ редукує параметр χ.

Отже, маємо $I_4^{2,4}=\left\langle 1,t^2+\gamma t^6,t^3+\eta t^4\right\rangle+XM_2$.

6. $W=\left\langle 1,t^4+\beta t^6,t^3+\chi t^6\right\rangle$ дає $I_5^{2,4}=\left\langle 1,t^4+\beta t^6,t^3\right\rangle+XM_2$.

7. $W = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle$ дає $I_6^{2,4} = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$.

$W_7^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^6, t^4 + \eta t^6 \right\rangle + XM_2 \quad \gamma \neq 0$ дає $I_9^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \right\rangle + XM_2, \quad \gamma \neq 0$.

Розгляньмо двомірні підпростори:

8. $W = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6 \right\rangle$, де $XM_2 = \left\langle t^5,, t^7, t^8, t^9, \ldots \right\rangle$ дає

$I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$ випадок $\lambda \neq 0$**,** тоді маємо $\lambda t^2 \neq 0$, звідси

$\alpha = 1 - \chi \left(\lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right)$, не редукується, бо $t^4 \notin XM_2$, звідси

$I_{7,\lambda}^{2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right\rangle + XM_2$. Візьмімо множник $\alpha = 1 - \dfrac{\chi}{\gamma} \; \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6$,

отримаємо $W = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4 \right\rangle$.

Потім $\alpha = 1 - \dfrac{\chi}{\lambda} \; \lambda t^2 + t^3 + \gamma t^4$, дає знову 2 параметри. Отже, при $\lambda \neq 0$ маємо двопараметричну сім'ю ідеалів.

Випадок $\lambda = 0$ дає $\alpha = 1 - \chi \; t^3 + \gamma t^4 + \chi t^6$ і звідси $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$,

$I_1^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3, t^4 \right\rangle$, $I_2^{2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4, t^6 \right\rangle$, $I_3^{2,4} = \left\langle 1, t^3, t^4, t^6 \right\rangle + XM_2$,

$I_4^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$, $I_{4a}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^6, t^3 + \beta t^4 \right\rangle + XM_2$,

$I_5^{2,4} = \left\langle 1, t^4 + \beta t^6, t^3 \right\rangle + XM_2$, $I_6^{2,4} = \left\langle 1, t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$, $I_{7,\lambda=0}^{2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$,

$I_{7,\lambda}^{2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 \right\rangle + XM_2$, $I_{10}^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4, t^6 \right\rangle + XM_2$, $\gamma \neq 0$ — новий.

$I_9^{2,4} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^4 \right\rangle + XM_2, \quad \gamma \neq 0$ — це новий.

5) $X = K_5$, $XM_3 = \left\langle t^2, t^3, t^4, t^5, \ldots \right\rangle = M_4$, $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \ldots \right\rangle$

${}^{X}\!/_{XM_2} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle$, де t — обов'язковий.

Підпростори:

1. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^4, t^2 + \eta t^4, t^3 + \chi t^4 \right\rangle$ все знищується

$I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + XM_2$.

2. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^3, t^4 \right\rangle$ параметр знищується $I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + XM_2$.

3. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3, t^4 \right\rangle$ γ, η знищується $I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$.

Розглянемо тримірні підпростори:

4. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^3 + \beta t^4, t^2 + \eta t^3 + \mu t^4 \right\rangle$

$\alpha = 1 - \mu \;\; t^2 + \eta t^3 + \mu t^4$, тоді $I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3 + \beta t^4, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$.

Далі $\alpha = 1 - \dfrac{\beta}{\eta} \;\; t^2 + \eta t^3$, звідси $I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$.

Цілком аналогічними перетвореннями можна отримати такий двопараметричний ідеал: $I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^4, t^2 + \eta t^4 \right\rangle + XM_2$.

5. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^2 + \beta t^4, t^3 + \mu t^4 \right\rangle$ дає $I_5^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3 + \mu t^4 \right\rangle + XM_2$.

6. $W = \left\langle 1, t + \gamma t^2 + \beta t^3, t^4 \right\rangle$ дає $I_{6,14}^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$.

Розгляньмо двомірні підпростори:

7. $W = \left\langle 1, t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \eta t^4 \right\rangle$ дає $I_6^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2$, де

$XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \ldots \right\rangle$.

Список ідеалів, отриманих із K_5:

$I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + XM_2$,

$I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + XM_2$,

$I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$,

$I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$,

$$I_5^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3 + \mu t^4 \right\rangle + XM_2,$$

$$I_{6,14}^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + XM_2,$$

$$I_6^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + XM_2, \text{ де } XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \dots \right\rangle.$$

Знайдімо K_1 ідеали.

1) $X = I_6^{2,5}$, тоді $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \dots \right\rangle$, $XM_1 = \left\langle t^5, t^6 + \gamma t^9, t^7, t^8, \ , t^{10}, \dots \right\rangle$.

Звідси маємо $X/XM_2 = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3, t^9 \right\rangle$, $t + \beta t^4 + \gamma t^3 -$ обов’язковий.

Підпростір

1. $W = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 + \mu t^9 \right\rangle$ дає $I_1^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + XM_1$.

Список породжених $X = I_6^{2,5}$: $I_1^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + XM_1$.

2) $X = I_5^{2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4, t^3 + \mu t^4 \right\rangle$ дає при $\mu = 0$

$$XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \dots \right\rangle,$$

$$XM_1 = \left\langle t^5, t^6 + \beta t^9, t^7, t^8 + \mu t^9, t^8 + \beta t^{11}, t^{10}, \dots \right\rangle = \left\langle t^5, t^6, t^7, \dots \right\rangle = XM_2.$$

Отже, нового не дає.

3) $X = I_4^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \eta t^3 \right\rangle + XM_2$, де $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \dots \right\rangle$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6 + \gamma t^8, t^7, t^8 + \gamma t^{10}, t^9 + \eta t^{10}, t^{10}, \dots \right\rangle = \left\langle t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \right\rangle = XM_2$.

Отже, нового не дає.

4) $X = I_3^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + XM_2$, де $XM_2 = \left\langle t^5, t^6, \dots \right\rangle$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, \dots \right\rangle$

Зрозуміло, нового в K_1 не дасть.

5) $X = I_2^{2,5} = \left\langle 1, t, t^3, t^4 \right\rangle + XM_2$ тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, \dots \right\rangle = XM_2$.

6) $X = I_1^{2,5} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + XM_2$, тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, \dots \right\rangle = XM_2$. Нового в K_1 не дасть.

Список отриманих з $I_j^{2,5} : I_1^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + XM_1$.

7) $X = I_{6,14}^{2,5} = \left\langle 1, t + \gamma t^2, t^4 \right\rangle + \dot{X}M_2$, де $\dot{X}M_2 = \left\langle t^5, t^6, t^7, \ldots \right\rangle$, тоді

тоді $XM_1 = \left\langle t^5, t^6, \ldots \right\rangle = XM_2$, тому нових не породить.

Аналогічно, при переході до кілець K_1 і K_2 одержуємо такі результати.

Теорема 4.1.3. Повний список K_1-ідеалів, які не є K_2-ідеалами, наведено нижче. Ми позначимо $I' = K_1 I$ і покладемо $M_1 = R_1 I'$.

- $I' = I_j^{2,4}$. Тоді для $0 < j < 7$, $M_1 = \left\langle t^5,, t^7, t^8 + \gamma t^9, t^{10}, t^{11}, \ldots \right\rangle$. При $j = 7, \lambda \neq 0$ для $I_{1,7,\lambda}^{1,2,4}$ маємо $M_1 = \left\langle t^5,, t^7, t^8 + \chi t^{11}, t^9, t^{10},, t^{12}, \ldots \right\rangle$, у випадку $j = 7, \lambda = 0$ маємо $M_1 = \left\langle t^5,, t^7, t^8 + \gamma t^9, t^{10}, t^{11}, \ldots \right\rangle$.

1. $I_{1,2}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^2, t^3 + \beta t^4 + \gamma t^9, t^6 \right\rangle + M_1$,
2. $I_{1,4}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + M_1$,
3. $I_{1,4,\gamma}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^3 + \mu t^9, t^3 + \eta t^4 \right\rangle + M_1$,
4. $I_{1,4,\eta}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^3 + \beta t^9 \right\rangle + M_1$,
5. $I_{1,6}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^6 + \mu t^9, t^3 + \beta t^4 \right\rangle + M_1$,
6. $I_{1,6,\beta=0}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^6 + \mu t^9, t^3 + \gamma t^9 \right\rangle + M_1$,
7. $I_{1,7,\lambda=0}^{1,2,4} = \left\langle 1, t^3 + \gamma t^4 \right\rangle + M_1$,
8. $I_{1,7,\lambda}^{1,2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6, t^{11} \right\rangle + M_1$,
9. $I_{2,7,\lambda}^{1,2,4} = \left\langle 1, \lambda t^2 + t^3 + \chi t^6 + \eta t^{11} \right\rangle + M_1$.

- $I' = I_j^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$, $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, , , t^{10}, , t^{12}, t^{13}, t^{14}, \ldots \right\rangle$.

Для j=14, j=13 маємо $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, , t^9, t^{10}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, , t^{14}, \ldots \right\rangle$,

Для j=12, $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, , t^9 + \gamma t^{13}, t^{10}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, , t^{14}, \ldots \right\rangle$

Для j=9, $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, , t^9 + \gamma t^{11}, t^{10},, t^{12}, t^{13}, \ldots \right\rangle$,

1. $I_{1,15}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^8 + \gamma t^9, t^{11} \right\rangle + M_1$,
2. $I_{2,15}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^8 + \gamma t^9 + \chi t^{11} \right\rangle + M_1$,

3. $I_{3,15}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^8 + \beta t^{11}, \gamma t^9 + \chi t^{11} \right\rangle + M_1$,

4. $I' = I_{14}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$ породжує $I_{1,14}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^8 \right\rangle + M_1$,

5. $I' = I_{13}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$ породжує $I_{1,13}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6 \right\rangle + M_1$,

6. $I' = I_{12}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$ породжує $I_{12}^{2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6 + \chi t^8 \right\rangle + M_1$,

7. $I' = I_{9}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$ породжує $I_{1,9}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6, t^8 + \mu t^{11} \right\rangle + M_1$,

8. $I' = I_{7}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$ породжує $I_{1,7}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^2 + \beta t^6, t^8 + \mu t^{11} \right\rangle + M_1$,

9. $I' = I_{8}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$, $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, t^9, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{10}, \ldots \right\rangle$ породжує

$I_{1,6}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^2 + \gamma t^{13}, t^6 + \beta t^8 \right\rangle + M_1$,

10. $I' = I_{10}^{2,3}$, $M_1 = R_1 I'$, $M_1 = \left\langle t^5, , t^7, , , t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, \ldots \right\rangle$ породжує $I_{1,10}^{1,2,3} = \left\langle 1, t^6 + \gamma t^9, t^8 + \beta t^9 \right\rangle + M_1$.

11. $I' = I_{7}^{2,5}$, $M_1 = R_1 I'$, $M_1 = \left\langle t^5, t^6 + \gamma t^9, t^7, t^8, , t^{10}, \ldots \right\rangle$ породжує $I_{1,7}^{1,2,5} = \left\langle 1, t + \beta t^4 + \gamma t^3 \right\rangle + M_1$.

Теорема 4.1.4. *Повний список K_0 ідеалів, які не є K_1 ідеалами, наведено нижче.* Ми позначимо K_1- ідеал як $I' = K_1 I$ і покладемо $M_0 = R_0 I'$.

12. $I' = I_{i,j}^{1,2,3}$, $M_0 = R_0 I'$.

$M_0 = \left\langle t^5, , t^7, , t^9 + \gamma t^{11}, t^{10}, t^{11} + \gamma t^{13}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16} + \gamma t^{18}, t^{17}, \ldots \right\rangle$.

Породжує $I_{1,1,13}^{0,1,2,3} = \left\langle 1, t^4 + \gamma t^6 \right\rangle + X M_0$.

Для всіх інших K_1- ідеалів I' виконується рівність $R_0 I' = R_1 I'$, а тому вони не дають нових K_0- ідеалів.

Висновки до параграфа

У цьому параграфі доведено що, одновимірні одногілкові особливості типу N_{20}, N_{24} (особливості степеня 5) і ті, що їх домінують, мають щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів. Для особливостей N_{20}, N_{24} зроблено повний опис усіх попарно не ізоморфних ідеалів. Сформульовано необхідні і достатні умови того, що одногілкова особливість типу N має не більше, ніж двопараметричні сім’ї ідеалів.

4.2. Дослідження одногілкової особливості N_{28}

Зауваження. У джерелі [34] показано, що у випадку W_{6k} якщо $char\mathrm{k}=0$, то дані нами означення типів E і W, які ми навели, співпадають з тим, що наведене в [1, §15] у термінах нормальних форм їхніх рівнянь. Ми не відокремлюємо рівняння для особливості типу N тому, що особливості типу N вони лише ускладнять класифікацію викладення матеріалу і ми їх не використовуємо.

Опис ідеалів особливостей типу N_{28}.

Оскільки випадки N_{20}, N_{24} ми вже було розглянули, то розглянемо особливість найбільш “глибоку» особливість типу N_{28}, що має **вектор нормування** (5, 8). Доведемо основну теорему для випадку N_{28}, бо випадки N_{20}, N_{24} ми вже розглянули.

Тому нехай $S \subset R = \mathbf{k}[[t]]$ є породженим (як повна локальна алгебра) елементами x, y, де $v(x) = 5$, $v(y) = 8$. Ми можемо допустити, що $t=\dfrac{y^2}{x^3}$. Можна припусти, що $y=t^8$, $z=t^3$. Ми також покладаємо, що $z=\dfrac{y}{x}=t$. Тоді $S\supset t^{28}R$. Окрім того, оскільки S є ґоренштейнове, то кожен S-ідеал є або головним, або S_0-ідеалом, де $S_0 = \mathrm{End}\,\mathrm{m} = S + \left\langle t^{27}\right\rangle = \left\langle 1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2, x^2y, x^4, xy^2\right\rangle + t^{23}R$.

Розгляньмо ланцюжок кілець $S_0\subset S_1\subset S_2\subset S_3\subset S_4$, де

$S_1=\mathrm{End}\,m_0=\left\langle 1,x,y,x^2,xy,x^3,y^2\right\rangle+t^{18}R,$

$S_2=\mathrm{End}\,m_1=\left\langle 1,x,y,x^2,tx^2\right\rangle+t^{13}R,$

$S_3=\mathrm{End}\,m_2=\left\langle 1,z,x\right\rangle+t^{8}R,$

$S_4=\mathrm{End}\,m_3=\left\langle 1,z\right\rangle+t^{5}R,$

де $m_i = radS_i$. S_3-ідеали досліджені у [15, 32]; вони є (за винятком R_4, S_4, S_3) такими:

$$R_2 = \langle 1 \rangle + t^2 R,$$
$$R_3 = \langle 1 \rangle + t^3 R,$$
$$R_3^* = \langle 1, t \rangle + t^3 R,$$
$$S_4^* = \langle 1, t^2, t^3 \rangle + t^5 R.$$

Ідеали R_4^*, S_4^* дуальні до R_3, S_4 відповідно, однак ми далі не використовуємо цієї властиврсті. Помітимо, що це випливає з [5], а саме, кожен (S_3-ідеал) ізоморфний або до надкільця S_3 або до дуального ідеалу до такого надкільця.

Зауважимо, що ідеали R_3^*, S_3^* насправді дуальні до R_3, S_3, відповідно ми це будемо використовувати. Зауважимо, що це випливає з [5], що кожен S_3-ідеал або дуальний до його надкільця, або до дуального для нього ідеалу до його надкільця відповідно.

$I' = S_3$; $\tilde{I} = m_2$:

1) S_2,

2) $F_1(\alpha,\beta) = \langle 1, z + az^3 + \beta z^4 \rangle + m_2$,

3) $F_2(\alpha,\beta) = \langle 1, z^2 + az^3 \rangle + m_2$,

4) $F_3(\alpha,\beta) = \langle 1, z^3 + az^4 \rangle + m_2$,

5) $I_1 = \langle 1, z^4 \rangle + m_2$,

6) $F_4(\alpha) = \langle 1, z + \alpha z^4, z^2 + \beta z^4 \rangle + m_2$,

7) $F_5(\alpha) = \langle 1, z, z^3 + \alpha z^4 \rangle + m_2$,

8) $F_6(\alpha) = \langle 1, z + \alpha z^3, z^4 \rangle + m_2$,

9) $F_7(\alpha) = \langle 1, z^2, z^3 + \alpha z^4 \rangle + m_2$,

10) $F_8(\alpha) = \langle 1, z^2 + \alpha z^3, z^4 \rangle + m_2$,

11) $I_2 = \langle 1, z^2, z^3 \rangle + m_2$,

12) $I_3 = \langle 1, z, z^2, z^3 \rangle + m_2$,

13) $I_4 = \langle 1, z, z^2, z^4 \rangle + m_2$,

14) $I_5 = \langle 1, z, z^3, z^4 \rangle + m_2$,

15) $I_6 = \langle 1, z^2, z^3, z^4 \rangle + m_2$,

$I' = S_4$; $\tilde{I} = \langle x, y \rangle + t^{10}R$:

1) $F_9(\alpha, \beta) = \langle 1, z + \alpha t z^2 + \beta z^3 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$,

2) $F_{10}(\alpha, \beta) = \langle 1, z^2 + \alpha t z^2 + \beta z^3 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$,

3) $F_{11}(\alpha, \beta) = \langle 1, t z^2 + \alpha z^3 \rangle + \tilde{I}$, $I'S_4$: $\bar{I} = m_4 I' = \langle 1, z^2 \rangle = \langle 1, t^2 \rangle$,

4) $F_{12}(\alpha, \beta) = \langle 1, z + \alpha t z^2, z^2 + \beta t z^2 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$ або $\beta \neq 0$,

$F_{13}(\alpha, \beta) = \langle 1, z + \alpha z^3, t z^2 + \beta z^3 \rangle + \tilde{I}$,

5) $F_{14}(\alpha) = \langle 1, z + \alpha t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$,

6) $F_{15}(\alpha, \beta) = \langle 1, z^2 + \alpha z^3, t z^2 + \beta z^3 \rangle + \tilde{I}$,

7) $F_{16}(\alpha) = \langle 1, z^2 + \alpha t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$,

8) $I_7 = \langle 1, t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$,

9) $F_{17}(\alpha) = \langle 1, z, z^2, t z^2 + \alpha z^3 \rangle + \tilde{I}$,

10) $F_{18}(\alpha, \beta) = \langle 1, z + \alpha t z^2, z^2 + \beta t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$, де $\alpha \neq 0$ або $\beta \neq 0$,

11) $I_8 = \langle 1, z, t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$,

12) $I_9 = \langle 1, z^2, t z^2, z^3 \rangle + \tilde{I}$,

13) $F_{19}(\alpha, \beta) = \langle 1, t^2 + \alpha z + \beta z^2 \rangle + \tilde{I}$,

14) $F_{20}(\alpha, \beta) = \langle 1, t^2 + \alpha z^2, z + \beta z^3 \rangle + \tilde{I}$,

15) $F_{21}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z,z^2+\beta z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

16) $F_{22}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z+\beta z^2,z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

17) $F_{23}(\alpha)=\left\langle 1,t^2,z+\alpha z^3,z^2\right\rangle+\tilde{I}$,

18) $F_{23}(\alpha)=\left\langle 1,t^2,z+\alpha z^3,z^2\right\rangle+\tilde{I}$,

19) $F_{24}(\alpha)=\left\langle 1,t^2+\alpha z,z^2,z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

20) $F_{25}(\alpha)=\left\langle 1,t^2+\alpha z^2,z,z^3\right\rangle+\tilde{I}$.

1) $I_9=\left\langle 1,z^2,tz^2,z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

2) $F_{19}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z+\beta z^2\right\rangle+\tilde{I}$,

3) $F_{20}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z^2,z+\beta z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

4) $F_{21}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z,z^2+\beta z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

5) $F_{22}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,t^2+\alpha z+\beta z^2,z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

6) $F_{23}(\alpha)=\left\langle 1,t^2,z+\alpha z^3,z^2\right\rangle+\tilde{I}$,

7) $F_{24}(\alpha)=\left\langle 1,t^2+\alpha z,z^2,z^3\right\rangle+\tilde{I}$,

8) $F_{25}(\alpha)=\left\langle 1,t^2+\alpha z^2,z,z^3\right\rangle+\tilde{I}$.

$I'=R_3$; $\tilde{I}=\left\langle x\right\rangle+t^8R$:

1) $F_{26}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,z+\alpha tz+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

2) $F_{27}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,tz+\alpha z^2+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

3) $F_{28}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,z,tz+\alpha z^2+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

4) $F_{29}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,z+\alpha tz,z^2+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

5) $F_{30}(\alpha)=\left\langle 1,z+\alpha tz,tz^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

6) $F_{31}(\alpha,\beta)=\left\langle 1,tz+\alpha tz^2,z^2+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

7) $F_{32}(\alpha)=\left\langle 1, tz+\alpha z^2, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

8) $F_{33}(\alpha)=\left\langle 1, z, tz, z^2+\alpha tz^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

9) $I_{10}=\left\langle 1, z, tz, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

10) $F_{34}(\alpha)=\left\langle 1, z+\alpha tz, z^2, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

11) $I_{11}=\left\langle 1, z, z^2, tz^2+\alpha z^3\right\rangle+\tilde{I}$.

$I'=R_3^*;\ \ \tilde{I}=\left\langle x, z^2\right\rangle+t^8R:$

1) $F_{35}(\alpha,\beta)=\langle 1, t+\alpha z+\beta tz\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

2) $F_{36}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t, z+\alpha tz+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

3) $F_{37}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t+\alpha z, tz+\beta tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

4) $F_{38}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t+\alpha z, tz+\beta tz, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

5) $F_{39}(\alpha)=\left\langle 1, t, z+\alpha tz^2, tz\right\rangle+\tilde{I}$,

6) $F_{40}(\alpha)=\left\langle 1, t, z+\alpha tz, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$,

7) $F_{41}(\alpha)=\left\langle 1, t+\alpha z, tz, tz^2\right\rangle+\tilde{I}$.

$I'=R_2,\ \tilde{I}=\langle x\rangle+t^7R:$

1) $F_{42}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t^2+\alpha z^2, z+\beta tz\right\rangle+\tilde{I}$, де $\beta\neq 0$,

2) $F_{43}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t^2+\alpha z, tz\right\rangle+\tilde{I}$,

3) $I_{12}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t^2, z, tz\right\rangle+\tilde{I}$,

4) $F_{44}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t^2, z+\alpha tz, z^2\right\rangle+\tilde{I}$, де $\alpha\neq 0$,

5) $F_{45}(\alpha)=\left\langle 1, t^2+\alpha z, tz, z^2\right\rangle+\tilde{I}$.

$I'=R_2,\ \tilde{I}=t^5R:$

1) $F_{46}(\alpha,\beta)=\left\langle 1, t+\alpha t^4, t^2+\beta t^4\right\rangle+\tilde{I}$,

2) $I_{13} = \left\langle 1, t, t^2, t^3 \right\rangle + \tilde{I}$,

3) $I_{14} = \left\langle 1, t, t^2, t^4 \right\rangle + \tilde{I}$.

У цих формулах α й β визначають деякі елементи з поля k. Оскільки, всі фактор-простори $W = I' / m_2 I'$ мають розмірність 5, то всі $S-$ідеали I, такі як $S_2 I = I'$, є фактично S_2-ідеалами. Тому немає необхідності розглядати їх у подальших обчисленнях.

Доведення. Нехай спочатку $I' = S_4$. Тоді $W = \left\langle 1, z, z^2, tz^2, z^3 \right\rangle$, де клас елементу позначається тим самим символом, що й сам елемент, а $\tilde{W} = \left\langle 1, tz^2 \right\rangle$. Тому розмірність породжуючого підпростору V є принаймні 2. Також припускаємо, що 1 — це елемент базису підпростору V.

Якщо $\dim V = 2$, то існує кілька випадків:

1) $V = \langle 1, v \rangle$, де $v = z + \gamma z^2 + \alpha tz^2 + \eta z^3$, а $\alpha \neq 0$, оскільки V проектується на $\tilde{W}$. Покладаємо $\beta = \eta - \gamma^2$ і $a = 1 - tu$, де $u = z + \alpha tz^2 + \beta z^3$. Тоді $aV = \langle 1, u \rangle$ і прообраз aV у S_4 є $F_9(\alpha, \beta)$ зі списку. З другого боку, образ $F_9(\alpha, \beta)$ у W є $V(\alpha, \beta) = \left\langle 1, z + \alpha tz^2 + \beta z^3 \right\rangle$. Якщо $V(\alpha', \beta') = aV(\alpha, \beta)$, то $a \in V(\alpha', \beta')$, тому можна припустити, що $a = 1 - \lambda(z + \alpha' tz^2 + \beta' z^3)$. Тоді умова $a(z + \alpha tz^2 + \beta z^3) \in V(\alpha', \beta')$ означає, що $\alpha = \alpha'$, а $\beta = \beta'$. Тому ідеали $F_9(\alpha, \beta)$ є попарно не ізоморфними. Надалі можна опустити перевірки на не ізоморфність, оскільки вони очевидні.

2) $V = \left\langle 1, z^2 + \alpha tz^2 + \beta z^3 \right\rangle$ породжує $F_{10}(\alpha, \beta)$. Так само легко перевірити, що всі ці ідеали є не ізоморфні.

3) $V = \left\langle 1, tz^2 + \alpha z^3 \right\rangle$ породжує $F_{11}(\alpha)$.

Якщо $\dim V = 3$, існує кілька випадків:

4) $V = \langle 1, u, v \rangle$, де $u = z + \alpha tz^2 + \gamma z^3$, $v = z^2 + \beta tz^2 + \eta z^3$ при цьому $\alpha = 0$ або $\beta = 0$.

Нехай $a = 1 - \eta u' - \gamma v'$, де $u' = z + \alpha tz^2$, $v' = z^2 + \beta tz^2$; тоді $aV = \left\langle 1, u', v' \right\rangle$, таким чином породжує $F_{12}(\alpha, \beta)$.

5) $V = \langle 1, u, v \rangle$ де $u = z + \gamma tz^2 + \eta z^3$, $v = tz^2 + \beta z^3$. Множина $\alpha = \eta - \gamma^2$ та $u' = z + \alpha z^3$. Тоді $(1 - \gamma u')V = \left\langle 1, u', v \right\rangle$, таким чином породжує $F_{13} = (\alpha, \beta)$.

6) Так само $V = \left\langle 1, z + \beta z^2 + \alpha tz^2, z^3 \right\rangle$ зводиться до $\left\langle 1, z + \alpha tz^2, z^3 \right\rangle$ і породжує $F_{14}(\alpha)$.

7) $V = \left\langle 1, z^2 + \alpha z^3, tz^2 + \beta z^3 \right\rangle$ і породжує $F_{15}(\alpha, \beta)$.

8) $V = \left\langle z^2 + \alpha tz^2, z^3 \right\rangle$ породжує $F_{16}(\alpha)$.

9) $V = \left\langle z^2, tz^2, z^3 \right\rangle$ породжує I_7.

Нарешті, якщо $\dim V = 4$, то існує кілька випадків:

10) $V = \langle 1, u, v, w \rangle$, де $u = z + \beta z^3, v = z^2 + \gamma z^3, w = tz^2 + \alpha z^3$. Тоді $(1 - \gamma z - \beta z^2)V = \left\langle 1, z, z^2, tz^2 + \alpha z^3 \right\rangle$ породжує $F_{17}(\alpha)$.

11) $V = \left\langle 1, z + \alpha tz^2, z^2 + \beta tz^2, z^3 \right\rangle$породжує $F_{18}(\alpha, \beta)$.

12) $V = \left\langle 1, z + \alpha z^2, tz^2, z^3 \right\rangle$. Тоді $(1 - \alpha z)V = \left\langle 1, z, tz^2, z^3 \right\rangle$ та породжує I_8.

13) $V = \left\langle 1, z^2, tz^2, z^3 \right\rangle$ породжує I_9.

Нехай тепер $I' = S_3$. Тоді $S_3 m_2 = \left\langle t^5, , , t^8, , t^{10}, t^{11}, , t^{13} ... \right\rangle$, тому $W = {I'}/{I' m_2} = \left\langle 1, t^3, t^9, t^{12} \right\rangle = \left\langle 1, z, z^3, z^4 \right\rangle$, t^3, t^9, t^{12} — не обов'язкові, бо $t^3, t^9, t^{12} \in S_3 m_3$.

1) $V_1 = \left\langle 1, z + \alpha z^3 + \beta z^4 \right\rangle$. Позначимо, що $V(\alpha,\beta) = \left\langle 1, z + \alpha tz^3 + \beta z^4 \right\rangle$. Якщо виконується $\lambda V(\alpha,\beta) = V(\alpha',\beta')$, то $\lambda \in V(\alpha',\beta')$, і можемо покласти, що $\lambda = 1 - a(z + \alpha' tz^3 + \beta' z^4)$. Тоді з умови $\lambda V(\alpha,\beta) = V(\alpha',\beta')$ маємо, що повинно виконуватися $\lambda(z + \alpha tz^3 + \beta z^4) \in V(\alpha', \beta')$, тобто

$\left(1-a(z+\alpha' tz^3+\beta' z^4)\right)\left(z+\alpha tz^3+\beta z^4\right)\in V(\alpha',\beta')$ або детальніше $\left(1-a(z+\alpha' tz^3+\beta' z^4)\right)\left(z+\alpha tz^3+\beta z^4\right)=z+\alpha tz^3+\beta z^4-az^2-a\alpha tz^4-a\beta' z^5-a\alpha' tz^4\ldots$ звідси випливає, що виконання умови $\lambda V(\alpha,\beta)=V(\alpha',\beta')$ можливо лише при $a=0$, а тому $\alpha=\alpha',\ \beta=\beta'$ тобто усі ідеали породжені $V_1=\left\langle 1, z+\alpha z^3+\beta z^4\right\rangle$ є попарно не ізоморфними. Отже, отримуємо сім’ю ідеалів $F_1(\alpha,\beta)=\left\langle 1, z+\alpha z^3+\beta z^4\right\rangle+\tilde{I}$.

2) $V_2=\left\langle 1, z^3+\alpha z^4\right\rangle$ породжує ідеал $F_3=\left\langle 1, z^3+\alpha z^4\right\rangle+S_3m_2$.

Доведемо що серед тих, що породжені $V_2=\left\langle 1, z^3+\alpha z^4\right\rangle$ не існує ізоморфних. Нехай навпаки, існує множник λ: $\lambda V(\alpha,\beta)=V(\alpha',\beta')$, де $\lambda\in V(\alpha',\beta')$ тобто такий який встановлює ізоморфізм. Отже, $\lambda=1-a\left(z^3+\alpha' z^4\right)$, тоді $\lambda\left(z^3+\alpha z^4\right)\in V(\alpha',\beta')$ виконується тоді й тільки тоді, коли $\alpha=\alpha'$.

3) $V_3=\left\langle 1, z^4\right\rangle$ дає $I_3=\left\langle 1, z^4\right\rangle$.

4) $V(\alpha,\beta)=\left\langle 1, z+\alpha z^4,\ z^2+\beta z^4\right\rangle$ породжує ідеал $F_4=\left\langle 1, z+\alpha z^4,\ z^2+\beta z^4\right\rangle+S_3m_2$.

Доведемо що серед тих, що породжені $V(\alpha,\beta)=\left\langle 1, z+\alpha z^4, z^2+\beta z^4\right\rangle$, не існує ізоморфних. Нехай, навпаки, існує множник λ: $\lambda V(\alpha,\beta)=V(\alpha',\beta')$, де $\lambda\in V(\alpha',\beta')$, тобто такий, що встановлює ізоморфізм. Отже, $\lambda=1-a\left(z+\alpha z^4\right)$ тоді $\lambda\left(z^2+\beta z^4\right)\in V(\alpha',\beta')$ виконується тоді й тільки тоді, коли $\beta=\beta'$, аналогічно $\lambda\left(z+\alpha z^4\right)\in V(\alpha',\beta')$ тільки тоді, коли $\alpha=\alpha'$.

$I^1=S_4^*,\ \tilde{I}=\left\langle x, tz^2, y\right\rangle+t^{10}R$.

Інші випадки цілком аналогічні (навіть простіші), тому ми їх пропускаємо. Доведення завершене.

Зрештою, потрібно довести, що для кожного S_2-ідеал I зі списку, усі S_1- ідеали I^1 мають такий вигляд $S_2I^1=I$, далі, довести, що для кожного I^1, всі S_0-

ідеали I_0 мають такий вигляд $S_1 I^0 = I^1$ або $S_1 I^0 = I$. Оскільки обчислення схожі для всіх ідеалів I й подібні до обчислень із попередніх доказів, розгляньмо кілька «типових» випадків.

Випадок 1. $I = S_2, m_1 S_2 = m_0 S_2 = m_1$.

Це породжує нові S_1-ідеали:

1) S_1,
2) $I_1^1(\alpha,\beta) = \langle 1, u(\alpha,\beta)\rangle + m_1$, де $u(\alpha,\beta) = z^2 x(1+\alpha z+\beta z^2)$,
3) $I_2^1(\alpha) = \langle 1, z^3 x + \alpha z^4 x\rangle + m_1$,
4) $I_3^1 = \langle 1, z^4 x\rangle + m_1$,
5) $I_4^1(\alpha,\beta) = \langle 1, z^2 x + \alpha z^4 x, z^3 x + \beta z^4 x\rangle + m_1$,
6) $I_5^1(\alpha) = \langle 1, z^2 x + \alpha z^3 x, z^4 x\rangle + m_1$,
7) $I_6^1 = \langle 1, z^3 x, z^4 x\rangle + m_1$.

$S_1 / m_0 = \langle 1, t^{19}, t^{22}\rangle$. Це породжує нові S_0-ідеали:

S_0, $I_1^0 = \langle 1, t^{19} + \alpha t^{22}\rangle, I_2^0 = \langle 1, t^{22}\rangle$.

$m_0 I_1^1(\alpha,\beta) = m_1 I_1^1(\alpha,\beta)$, якщо $\beta \neq \alpha^2$. Якщо $\beta = \alpha^2$, то $I_1^1(\alpha,\alpha^2) / m_0 I_1^1(\alpha,\alpha^2) = \langle 1, u, t^{19}\rangle$, що породжує нові $S_0 -$ ідеали $\langle 1, u(\alpha,\alpha^2) + \gamma t^{19}, z^2 xy + \alpha z^3 xy\rangle + m_0$.

Випадок 2. $I = F_1(\alpha,\beta); m_1 I = m_0 I = \langle \alpha yz^2 + \beta yz^3, yz + \alpha yz^3\rangle + m_1$.

А. $\alpha \neq 0$. Тоді виникають такі можливості:

$I^1 = \langle 1, z + \alpha z^3 + \beta z^4\rangle + m_1 I$,

$I^0 = \langle 1, z + \alpha z^3 + \beta z^4\rangle + m_0 I^1$, де $m_0 I^1 = \langle \alpha yz^2 + \beta yz^3, yz + \alpha yz^3 + \beta yz^4\rangle + m_0$.

Б. $\alpha = 0, \beta \neq 0.$ Тоді виникають нові випадки:

$I^1 = \langle 1, z + \beta z^4\rangle + m_1 I.$

Оскільки $m_0 I^1 = m_1 I^1$, тому не трапляється жодного I^0 .

В. $\alpha = \beta = 0.$ То виникають нові можливості:

$I^1 = V + m_1 I$, де V - один із наступних підпросторів: $\left\langle 1, z + \gamma yz^3 \right\rangle$ або $\left\langle 1, z + \gamma yz^3, yz^2 + \gamma' yz^3 \right\rangle$, або $\left\langle 1, z, yz^3 \right\rangle$. В усіх випадках $m_0 I^1 = m_1 I^1$, тому не виникне жодного I^0.

Випадок 3. $I = I_1$; $m_1 I = m_0 I = \left\langle x, y, x^2, xy \right\rangle + t^{15} R.$

Єдиний новий випадок — це $I^1 = \left\langle 1, \alpha tx^2 + z^4 \right\rangle + m_1 I$.

Оскільки $m_0 I^{\,1} = m_1 I^1$, то не виникає жодного I^0.

Випадок 4. $I = F_{11}(\alpha); m_1 I = m_0 I = \left\langle x, y, x^2 \right\rangle + t^{13} R.$

Єдина нова можливість — це $I^1 = \left\langle 1, tz^2 + \alpha z^3 + \beta tx^2 \right\rangle + m_1 I.$

Оскільки $m_0 I^{\,1} = m_1 I^1$, то не виникає жодного I^0.

Випадок 5. $I = F_{20}(\alpha, \beta)$. Якщо $\beta \neq 0$, тоді $m_0 I = m_1 I = m_2 I$, тому виникнуть нові S_1-та S_0-ідеали. Якщо $\beta = 0$, то $m_0 I = m_1 I = m_2 I \left\langle t^2 x, zy, z^4 \right\rangle + m_1$ і отримуємо нові S_1-ідеали $I^1(\alpha) = \left\langle 1, t^2 + \alpha z^2, z \right\rangle + m_0 I.$

Знову $m_0 I^1(\alpha) = m_1 I_1(\alpha)$, тому не виникне жодного нового S_0-ідеалу.

Висновки до параграфу

Отже, одновимірні одногілкові особливості типу N_{28} (особливості степеня 5) і ті, що їх домінують, мають щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів.

4.3. Підрахунок індексів Мілнора для N_{20} і N_{24}.

Означення 4.3.1. *Індексом* ***Мілнора*** $\mu(f)$ *особливості, заданої многочленом* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *зветься розмірність факторпростору* ${}^{k[x_1, \dots, x_n]}\big/_{J_j}$, *де* J_j *ідеал Якобі, породжений частковими похідними* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, *що відповідає певній особливості.*

Підрахуємо індекс Мілнора $\mu(f) = \dim {}^{k[x, y]}\big/_{J_j}$ для ідеалу, породженого $x^5 - y^6$. Оскільки $J_f - \left\langle 5x^4,\ 6y^5 \right\rangle$, то фактор породжується одночленами $x^i y^j$, де $0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 4$. Тому розмірність цього простора дорівнює 24, отже $\mu(f) = 20$.

Підрахуємо індекс Мілнора $\mu(f) = \dim {}^{k[x, y]}\big/_{J_j}$ для ідеалу, породженого $x^5 - y^7$. Оскільки $J_f = \left\langle 5x^4,\ 7y^6 \right\rangle$, то фактор породжується одночленами $x^i y^j$, де $0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 5$. Тому розмірність цього простора дорівнює 24, отже $\mu(f) = 24$.

Висновки до розділу 4

Отже, в цьому розділі було доведено основну теорему для особливостей типу N, що повністю завершує її доведення.

Отже, в цьому розділі встановлено, що для особливостей S кривих степеня 5 такі умови рівносильні:

1) S має щонайбільше двопараметричні сім'ї неізоморфних ідеалів;
2) S домінує одну з плоских особливостей N_{4n}, $(n \leq 7)$ згідно з класифікацією Арнольда.

Цим завершено доведення основної теореми про особливості з двопараметричними сім'ями неізоморфних ідеалів.

Для особливостей N_{4n}, $(n \leq 7)$ дано повний опис усіх попарно неізоморфних ідеалів.

РОЗДІЛ 5

ПОБУДОВА НОРМАЛЬНОГО БАЗИСУ СКІНЧЕННОГО ПОЛЯ

Питання побудови нормального базису вкрай важливе для теорії скінченних полів. У цьому базисі обчислення степеня елемента стає еквівалентним до зсуву у векторному представленні елеменів скінченного поля. Саме для такого базису скінченного поля в цьому розділі й запропоновано метод побудови, чия швидкість рекордна серед відомих детермінованих методів [9, 37, 45], що мають складність $O\left(n^4\right)$. Перевагою нормальних базисів є можливість швидкого виконання операції Фробеніуса (піднесення у степінь виду p^k) завдяки тому, що довільна операція Фробеніуса (автоморфізм Фробеніуса $x \to x^{p^j}$ в F_{p^n}, $j = 1,\dots,n-1$) у нормальному базисі — це просто циклічний зсув координат елемента в цьому базисі й тому має нульову алгоритмічну складність і не потребує витрат при схемній реалізації на відміну від поліноміальних базисів, де для виконання операції Фробеніуса $x \to x^{p^j}$, $j = 1,\dots,n-1$ потрібно здійснити понад $O\left(n\right)$ операцій.

Так, серед найшвидших методів, якими є метод Брента–Кунга [27] із оцінкою складності, що залежить від алгоритму матричного множення [28, 39] і на сьогодні складає $O(n^{1,667})$, і метод з [41], що при великих значеннях n є посиленням результату попереднього результату авторів [27] методу Брента–Кунга $O\left(n\log n\right)^{\frac{3}{2}}$, бо $1,5 < 1,667$, а логарифм у асимптотиці стає меншим навіть за значення довільного кореня фіксованого степеня $\sqrt[k]{n}$ з [39]; також варто згадати про метод Уманса складність якого становить $O\left(n^{1+o(1)}\log^{1+o(1)} p\right)$ [28]. Мінімальний поліном $\mu\left(x\right)$ для елемента $\theta \in F_q$ згідно з методом Берлікемпа-Месі [19] визначається за

$O\left(n^2\right)M\left(log_2 p\right)$ операцій.

Завдяки застосуванню властивостей нормального базису знаходження степеня елемента стає еквівалентним до зсуву у векторному представленні елеменів скінченного поля. Великою перевагою нормального базису є те, що обчислення сліду елемента скінченного поля у цьому базисі має складність рівносильну складності додавання.

Відомо, що мінімальний поліном $\mu(x)$ для елемента $\theta \in F_q$ згідно з методом Берлікемпа-Месі [19] визначається за $O\left(n^2\right)M\left(log_2 p\right)$ операцій.

Найшвидшим для операції Фробеніуса в поліноміальному базисі є метод Уманса $O\left(n^{1+o(1)}\log^{1+o(1)} p\right)$ [28]. А в нормальному базисі складність піднесення до степеня дорівнює складності операції лінійного зсуву. Тому нормальний базис зручний для використання.

5.1. Метод побудови нормального базису для F_q

У данному розділі запропоновано новий метод побудови нормального базису в F_q, де $q = p^n$. Метод ґрунтується на теорії характеристичних многочленів і нормальної форми Фробеніуса, його складність для довільного скінченного поля є $O(n^3 \log^2 p)$. Оскільки елементи скінченного поля F_q подаються у формі векторів над F_p, то при побудові нормального базису спочатку будується оператор A піднесення до степеня у звичайному базисі, а потім знаходиться базис, в якому матриця цього оператора A є матрицею циклічного зсуву.

5.2. Формулювання основних результатів

Нагадаємо спочатку, що складність побудови довільного базису для F_q менша за $O(n\log^2 p)$ [19, 22], хоча нашою основною задачею є побудова нормального базису у випадку, коли F_q вже задано.

У випадку побудови нормального базису передбачається, що поле F_q вже задано. Тобто вже знайдено деякий незвідний над F_p многочлен $P(x)$ степені n (де n — таке, що $p^n = q$). Тоді всі елементи поля F_q можна виразити як $c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1}$, де $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ – деякі елементи поля F_p, а α – корінь многочлена $P(x)$. Тобто вся арифметика поля F_q вже задана, а відповідний $P(x)$ шукати не потрібно. Задача метода пошуку нормального базису складається лише в тому, щоб за готової структури поля F_q (за готового поліноміального базису) знайти елемент, який породжує нормальний базис.

Добре відомо, що оператор $\mathrm{A}f = f^q$ $\left(f \in F_{p^n},\ q = p^n \right)$ лінійний над полем F_p. Це відображення називається автоморфізмом Фробеніуса.

Відомо, що многочлен $x^n - 1$ — це мінімальний многочлен оператора A [8, 17, 23]. Степінь многочлена $x^n - 1$ дорівнює розмірності простору, тому він є і характеристичним поліномом для оператора A. Отже, матриця оператора A проста [розділ 1, означення 1.8.2].

Основні кроки алгоритму побудови нормального базису:

1) Обираємо поліноміальний базис для F_q;

2) Будуємо оператор A: $Af = f^q$;

3) Зводимо матрицю оператора A методом тріангуляції до форми Фробеніуса або, якщо цей метод не дає змоги це зробити, то зводимо до блоково-Фробенісової форми зі клітинами Фробеніуса над діагоналлю;

4) У другому випадку з п.3 після отримання матриці виду блочно діагонального виду, де блоки на діагоналі — це клітини Фробеніуса, потрібно послідовно поєднати сусідні блоки *методом заміни твірних векторів*, що детально описано нижче.

Оцінімо складність побудови оператора A піднесення до степеня у довільному поліноміальному базисі. Нехай α — даний корінь незвідного над F_p многочлена.

Для отримання оператора піднесення до степеня A треба знайти представлення елементів $1^p, \alpha^p, \left(\alpha^2\right)^p, ..., \left(\alpha^{n-1}\right)^p$ у поліноміальному базисі $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1}$, тобто обчислити лишки від ділення за модулем $P(x)$: $x^p \bmod P(x), \dots, x^{2p} \bmod P(x), \dots, x^{(n-1)p} \bmod P(x)$.

Якщо $kp \geq n$, треба ще звести одержаний многочлен за $\bmod P(x)$. Тобто якраз і отримаємо многочлен α^p, завдяки цьому й обчислюємо $\alpha^p (\bmod P(x))$, $\alpha^{2p} (\bmod P(x))$, $\alpha^{3p} (\bmod P(x))$, …, $\alpha^{(n-1)p} (\bmod P(x))$, $\deg P(x) = n$.

У випадку $p >> n$ доцільно обчислювати лишки за оптимальнішою схемою:

$$x^{2p} \bmod P(x) = \left(x^p \bmod P(x)\right)\left(x^p \bmod P(x)\right) \bmod P(x)$$

$$x^{3p} \bmod P(x) = \left(x^{2p} \bmod P(x)\right)\left(x^p \bmod P(x)\right) \bmod P(x)$$

…

$$x^{(n-1)p} \bmod P(x) = \left(x^{(n-2)p} \bmod P(x)\right)\left(x^p \bmod P(x)\right) \bmod P(x)$$

Означення 5.2.1. Ступінчасто-Фробеніусовою матрицею M називатимемо блоково-трикутну матрицю, в якій на діагоналі стоять клітини Фробеніуса:

$$M' = \begin{pmatrix} \Phi_{k_1}(\chi(x)) & B_{12} & B_{13} \\ 0 & \Phi_{k_2}(\chi(x)) & B_{23} \\ 0 & 0 & \Phi_{k_3}(\chi(x)) \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

Щоб знайти базис $B = (\vec{u}_1,,,,\vec{u}_n)$, у якому оператор A має форму (1), застосуємо метод тріангуляції для отримання циклічних векторів, які було означено у частині 1, для відповідних клітин.

У якості $\vec{c}_1$ візьмімо довільний ненульовий вектор, наприклад, $\vec{c}_1 = \vec{e}'_1 = (0,1,0,\dots,0) = \vec{u}_1$. Далі для кожного $k \in \{2,3,\dots,n-1\}$ $\vec{u}_{k+1}$ визначається так:

1. Якщо $A\vec{u}_k$ лінійно не виражається через $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$, тобто через $\vec{u}_1,\dots,A^k\vec{u}_1$, то припускаємо $\vec{u}_{k+1} = A\vec{u}_k$.

2. Якщо ж $A\vec{u}_k \in \langle \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k \rangle$, то як $\vec{u}_{k+1}$, позначимо як такий, що дорівнює $\vec{c}_2$, обираємо довільний вектор, що не належить $V = \langle \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k \rangle$. Побудова базису здійснюється на основі степенів циклічного вектора $\vec{c}$, що був означений у частині 1, який отримується склейкою циклічних векторів, які будуються послідовно а потім знаходиться один циклічний вектор $\vec{c}$, що був означений у першому розділі, для всього W, що описано нижче.

Для прискорення побудови такого вектора $\vec{u}_k$ застосуємо ***метод тріангуляції,*** подібний до тих перетворень, які є у методі Гауса розв’язання СЛР. Опишемо його.

Щоб звести ланцюжок отриманих векторів до зручного для перевірки наявності ЛЗ, можна разом з послідовністю $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k$, будувати “тріангульовану» послідовність $\vec{\tau}_1,\dots,\vec{\tau}_k$. Для наведеної послідовності опишемо процедуру тріангуляції, яка у відповідність до кожного $\vec{c}_i$ ставить $\vec{u}_i$. У наведеній послідовності $\vec{u}_1 = \vec{c}_1$, $\vec{u}_2 = A\vec{c}_1$ а $\vec{u}_i$ будується наступним чином $\vec{u}_i = A\vec{u}_{i-1}$. Оберімо індекс $i_1\left(1\le i_1\le n\right)$, такий, що i_1 координата вектора $\vec{u}_1$ відмінна від 0. У нашому випадку для $\vec{b}_1=\vec{e}'_1$ як i_1 можна взяти 2.

Нехай тепер $\vec{\tau}_2=\vec{u}_2-c_{11}\vec{u}_1$, де c_{11} обраний так, щоб i_1 координата (*тобто активна координата з* $\vec{u}_1$*)* координата вектора $\vec{u}_2$ дорівнювала 0. Зрозуміло, що існує ***активна***, тобто не нульова координата в $\vec{u}_2$: індекс цієї координати дорівнює i_2 $(i_2\ne i_1)$ і її значення $\vec{u}_2(i_2)\ne 0$, така координата завжди існує. Дійсно, якби такої координати не було, то вектори $\vec{c}_2$ і $\vec{c}_1$ були б ЛЗ.

Для побудови $\vec{\tau}_3$, оберімо такі $c_{31},\ c_{32}$, щоб i_1-та й i_2-га координати вектора $\vec{u}_3$ стали нульовими у векторі $\vec{\tau}_3=\vec{u}_3-c_{31}\vec{\tau}_1-c_{32}\vec{\tau}_2$ в координатах i_1 і i_2. Тоді існує координата i_3, для якої $\left(\vec{\tau}_3\right)_{i_3}\ne 0$, бо якби її не було, то вектори $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ були б лінійно залежними.

У загальному випадку для рекурентної побудови вектора $\vec{\tau}_k$, $k<n$ на основі вже побудованих $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2,\ldots,\vec{\tau}_{k-2}$, і $\vec{\tau}_{k-1}$, які вже мають свої обрані активні координати $i_1,...,i_{k-2}$, обираємо активну координату i_k у векторі $\vec{u}_k$ такою, що $i_k\notin\{i_1,...,i_{k-1}\}$ та $\left(\vec{\tau}_k\right)_{i_k}\ne 0$. Треба зауважити, що така координата існує, бо інакше вектори $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2,\ldots\vec{\tau}_{k-2}$, і $\vec{\tau}_{k-1}$ були б лінійно залежними. Тепер, щоб виконати редукцію обраних раніше активних координат $i_1,i_2,i_3,...,i_{k-1}$ у векторі $\vec{u}_k$, оберемо такі $c_{k,1},c_{k,2},...,c_{k,k-1}$, щоб у вектора $\vec{\tau}_k:=\vec{u}_k-c_{k,1}\vec{\tau}_1-c_{k,2}\vec{\tau}_2-...-c_{k,k-1}\vec{\tau}_{k-1}$ усі значення його координат, які були раніше у векторах $\vec{u}_j,\ j<k$ активними, почали дорівними 0 у векторі $\vec{\tau}_k$, де $\vec{u}_k=A\vec{u}_{k-1}$. Цей вектор і беремо за тріангульований $\vec{\tau}_k$.

Якщо на деякому етапі вектор $M\vec{u}_k$ виявився лінійно залежним від $\vec{u}_1,...,\vec{u}_k$, де $\vec{u}_k=M\vec{u}_{k-1}$, то, як було сказано вище, замість $M\vec{u}_k$ у якості $\vec{u}_{k+1}=\vec{c}_2$ ми обираємо довільний вектор, який є ЛНЗ від $\vec{u}_1,....,\vec{u}_k$.

Для вибору $\vec{c}_2 = \vec{e}_m$, $c_2 = (\underbrace{0,...,0,}_{m}1,...,0)^T$ достатньо обрати координату m, наприклад, таку, що значення вектора у цій координаті m не нульове, точніше, $\vec{c}_2(i_m) = 1$ і кожна координата, що була активною у процесі тріангуляції векторів із V не дорівнює m**,** тобто $i_{k+1} = m \notin \{i_1,...,i_k\}$**.** Можна сказати, що m не дорівнює індексу жодної незалежної змінної системи лінійних неоднорідних рівнянь для векторів з W, що має такий самий ранг як і $\dim V$, де $\dim V = k$, де у якості коефіцієнтів при k незалежних змінних взято координати k векторів із V.

Якби описаний вище $c_2 = (\underbrace{0,...,0,}_{m}1,...,0)^T$ лінійно виражався б через $\vec{c}_1, M\vec{c}_1, M^2\vec{c}_1,..., M^{k-1}\vec{c}_1$, то ранг тріангульованої системи з k векторів був би більшим за k, що неможливо.

Позначатимемо $U = \left\langle \vec{c}_2, M\vec{c}_2, M^2\vec{c}_2,..., M^{l-1}\vec{c}_2 \right\rangle$ і вектор $\vec{c}_3$ обиратимемо з умови: $\vec{c}_3 \notin \left\langle \vec{c}_2, M\vec{c}_2, M^2\vec{c}_2,..., M^{l-1}\vec{c}_2 \right\rangle + V = U + V$.

Помітимо, що підпростір V є інваріантним й існує ізоморфізм $U \simeq W/V$.

Після цього ми застосуємо процес тріангуляції для другого підпростору, доповнивши систему $\vec{u}_1,...,\vec{u}_k$ з набором активних координат $i_1,...,i_k$ новим вектором. Так продовжуємо, доки не досягнеться рівність $k = n$ або не з'явиться лінійна залежність.

Здійснимо **оцінку складності методу тріангуляції**, який тісно пов'язаний з поняттям анулятора, що буде сформульовано нижче.

Оскільки для тріангуляції кожного наступного вектора щодо попередніх ми будуємо ланцюжки виду $M^k\vec{e}_1 - \beta_1\vec{g}_1 - \beta_2\vec{g}_2 - \beta_3\vec{g}_3 - ... - \beta_{k-1}\vec{g}_{k-1} = \vec{g}_k$, кожен із яких має щонайбільше k віднімань векторів, помножених на відповідний коефіцієнт, де k

— кількість базисних векторів у даному підпросторі. Окрім того, кількість координат у кожного з векторів дорівнює r. Тому **кожне віднімання має не більше** r координат. Перший вектор не потребує віднімання від нього вектора, другий вимагає віднімання попереднього вектора $\vec{u}_1 = M\vec{u}_0 - c_{01}\vec{u}_0$, а кожен наступний вектор вимагає на одне віднімання з відповідного вектора $M^l\vec{u}_{l-1}$ більше, останній потребує k віднімань і k домножень на потрібні коефіцієнти. Загалом матимемо $\frac{k(k-1)}{2}$, тому загальна складність цього методу порядка $O(k^2 n)$**. Позначатимемо тріангульований вектор як** $\vec{\tau}_i$**.**

Щоб знайти мінімальний анулятор вектора $\vec{c}_2$, потрібно побудувати ланцюжок векторів $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{k-1}$, які обчислюються за вище описаними формулами.

Мінімальний анулятор вектора $\vec{v}$ щодо матриці M – це такий *поліном* мінімальної степені $P(x) = x^k - \beta'_{l-1}x^{k-1} - ... - \beta_1'x - \beta_0'$, що $M^k\vec{u}_0 - \beta_{k-1}M^{k-1}\vec{u}_0 - ... - \beta_1 M\vec{u}_0 - \beta_0\vec{u}_0 = \vec{0}$.

Для побудови анулятора на кожному кроці будемо перевірятимемо вектори $\vec{c}_1, M\vec{c}_1, M^2\vec{c}_1, ..., M^k\vec{c}_1$ на лінійну залежність. Перше k, для якого вона з’явиться, буде степенем мінімального **анулятора**. Якщо знайти такі $\beta_0, ..., \beta_{k-1}$, які не всі дорівнюють 0, що $\beta\vec{\tau}_0 + \beta_1\vec{\tau}_1 + ... + \beta_{k-1}\vec{u}_{k-1} = \vec{0}$, то мінімальний анулятор вектора $\vec{c}_1$ виду $P(x) = x^k - \beta'_{l-1}x^{k-1} - ... - \beta_1'x - \beta_0'$.

Продовжуємо таким чином, доки не вдасться виразити деякий $\vec{u}_k$ як $\beta_0\vec{u}_0 + \beta_1\vec{u}_1 + ... + \beta_{k-1}\vec{u}_{k-1}$, де $\beta_0, ..., \beta_{k+1}$ – деякі числа, а $\vec{v}_i = \vec{u}_i$, $\vec{\tau}_2 = \vec{u}_{\mathbf{2}} + c_{20}\vec{\tau}_0 + c_{21}\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_3 = \vec{v}_3 + c_{30}\vec{\tau}_0 + c_{31}\vec{\tau}_1 + c_{32}\vec{\tau}_2, \ldots,$ $\vec{\tau}_{n+1} = \vec{v}_{n+1} + c_{30}\vec{\tau}_0 + c_{31}\vec{\tau}_1 + ... + c_{3n}\vec{\tau}_n$, і нехай так трапилося, що вектор $\vec{\tau}_{n+1} = \vec{0}$. Тоді нехай $\vec{\tau}_0 = \vec{v}_0$, $\vec{\tau}_1 = c_{10}\vec{v}_0 + \vec{v}_1$, $\vec{\tau}_3 = \vec{v}_3 + c_{30}\vec{\tau}_3 + c_{31}\vec{\tau}_1 + c_{32}\vec{\tau}_2$,

$$\vec{\tau}_2 = \vec{v}_2 + c_{20}\vec{\tau}_0 + c_{21}\vec{\tau}_1 = c_{20}\vec{v}_0 + c_{21}(c_{10}\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + \vec{v}_2 = (c_{20} + c_{21}c_{10})\overline{v}_0 + c_{21}\overline{v}_1 + \overline{v}_2.$$

Аналогічно виводиться, що

$$\vec{\tau}_3 = \vec{v}_3 + c_{30}\vec{\tau}_0 + c_{31}\vec{\tau}_1 + c_{32}\vec{\tau}_2 = c_{30}\vec{v}_0 + c_{31}(c_{10}\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + c_{32}((c_{20} + c_{21}c_{10})\vec{v}_0 + c_{21}\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 =$$

$= (c_{30} + c_{31}c_{10} + c_{32}c_{20} + c_{32}c_{21}c_{10})\vec{v}_0 + (c_{31} + c_{32}c_{21})\overline{v}_1 + c_{32}\overline{v}_2 + \overline{v}_3, \ldots$, для довільного $0 < k \le n$.

$$\vec{\tau}_k = (c_{k0} + c_{kk-2}c_{k-2,0} + c_{kk-1}c_{k-10} + c_{kk-1}c_{k-11}c_{10})\vec{v}_0 + (c_{k1} + c_{kk-1}c_{k-1,1} + \ldots + c_{k2}c_{21})\overline{v}_1 +$$

$\ldots + c_{kk-1}\overline{v}_{k-1} + \overline{v}_k$. Тут коефіцієнт при $\vec{v}_i$ дорівнює β_i' із виразу для анулятора.

$$\vec{\tau}_k = (c_{k0} + c_{kk-2}c_{k-2,0} + c_{kk-1}c_{k-10} + c_{kk-1}c_{k-11}c_{10})\vec{v}_0 + (c_{k1} + c_{kk-1}c_{k-1,1} + \ldots + c_{k2}c_{21})\overline{v}_1 +$$

$$\ldots + c_{kk-1}\overline{v}_{k-1} + \overline{v}_k.$$

$$\vec{\tau}_k = (c_{k0} + c_{kk-2}c_{k-2,0} + c_{kk-1}c_{k-10} + c_{kk-1}c_{k-11}c_{10})\vec{v}_0 + (c_{k1} + c_{kk-1}c_{k-1,1} + \ldots + c_{k2}c_{21})\overline{v}_1 +$$

$$+ \ldots + c_{kk-1}\overline{v}_{k-1} + \overline{v}_k,\ \vec{\tau}_k = \sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=1}^{k-i} \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j \\ k=k_0>k_1>\ldots>k_j=i}} \prod_{\substack{r_i=2 \\ r_i}}^{j} c_{k_{l-1},k_l})\vec{v}_i + \vec{v}_k.$$

Звідси коефіцієнти можна виписати в явній формі таким чином:

$$\beta_0' = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j, \\ k=k_0>k_1>\ldots>k_j=0}} \prod_{l=1}^{j} c_{k_{l-1},k_l},\quad \beta_i' = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i} \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j, \\ k=k_0>k_1>\ldots>k_j=i}} \prod_{l=1}^{j} c_{k_{l-1},k_l},$$

$\beta_{k-1}' = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{1} \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_j, \\ k=k_0>k_1>k_j=0}} \prod_{l=1}^{2} c_{k_{l-1},k_l} = c_k$. Тут змінна j визначає довжину добутку коефіцієнтів, а змінна k задає кількість добутків різної довжини.

Для найменшого k, для якого це буде можливим, многочлен $P(x) = x^k - \beta'_{k-1}x^{k-1} - \ldots - \beta_1'x - \beta_0'$, що отримується шляхом серії підстановок виду $\vec{u}_1 = M\vec{u}_0, \vec{u}_2 = M\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1} = M\vec{u}_{k-2}$ і який буде анулятором вектора $\vec{u}_1$ (і всього простору, який він породить) щодо матриці M.

Складність даної процедури складає $O(k^2 n + kn^2)$, де $O(k^2 n)$ займає тріангуляція оскільки кожне віднімання має не більше n координат перший вектор не потребує віднімання від нього вектора, другий вимагає віднімання попереднього вектора $\vec{v}_1 = M\vec{v}_0 - c_{01}\vec{v}_0$, а кожний наступний вектор вимагає на одне віднімання з відповідного вектора більше, останній потребує k віднімань і k домножень на потрібні коефіцієнти в сумі матимемо $\frac{k(k-1)}{2}$, тому всього порядка $O(k^2n)$, а $O(kn^2)$ – це складність виконання k множень матриці M на довільний вектор $\vec{v}$ з F_{p^n}. Отже, разом маємо $O\left(kn^2 + kn^2\right) = O\left(kn(n+k)\right) = O\left(kn^2\right)$.

Оскільки базис в якому вектор є циклічним під дією оперетора A є таким у якому цей оператор приймає вигляд оперетора зсуву а останній є частковим випадком матриці Фробеніуса, що можна за $O(k_1^2n)+(k_2^2n)+(k_3^2n))$ операцій (ця оцінка для методу тріангуляції доведена нижче), де $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Твердження 5.2.1. *Складність побудови трианульованої системи векторів (та анулятора для підпростору* V *) дорівнює* $O(k^2n)$*, де* $k = \dim V$.

Якщо після застосування *вищеописаного методу тріангуляції* базисних векторів після утворення з них матриці, кількість блоків у ній більша за 1, потрібно послідовно поєднати сусідні блоки методом *заміни двох породжуючих векторів на один.*

Нехай $M = \begin{bmatrix} \Phi_k(\chi(x)) & B \\ 0 & \Phi_l(\chi(x)) \end{bmatrix}$, де $\Phi_k(\chi(x)), \Phi_l(\chi(x))$ — це клітини Фробеніуса розмірностей k й l. Це означає, що вектор $c_1 = (0,1,0,...,0)^T$ — це циклічний вектор, що був означений у першому розділі **інваріантного простору** V. Позначимо V, породжений вектором $\vec{c}_1$: $V = \left\langle c_1, Ac_1, A^2c_1, ..., A^{k-1}c_1 \right\rangle$. Зауважимо, що ми обрали $k \geq 1$ таким, що вектори $c_1, Ac_1, A^2c_1, ..., A^{k-1}c_1$ лінійно незалежні, а вектори $c_1, Ac_1, A^2c_1, ..., A^{k-1}c_1$ уже лінійно залежні, тобто $A^kc_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^i c_1$, $\lambda_i \in F_p$. Тоді многочлен, який анулює вектор $\vec{c}_1$ — це $Q(x)=x^k-\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i x^i$.

Тепер $W=U+V$. Мінімальний многочлен матриці M — це найменше спільне кратне $P(x)$ і $Q(x)$.

Нехай ми отримали два підпростори V і U. Опишімо метод пошуку одного циклічного вектора для всього простору. Для цього *потрібно* застосувати процедуру виводу векторів зі взаємно простими мінімальнимиануляторами, яка буде описана далі.

Опишімо метод побудови взаємно простих мінімальнихануляторів для векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ тобто $p(x)=P_0(x)$, $q(x)=Q_0(x)$ відповідно до $P(x), Q(x)$.

1. Знаходимо $R(x)=\text{НСД}(P(x),Q(x))$, домінантною частиною в $P(x)$ буде $p_1(x)=P(x)/R(x)$, якщо ця $p_1(x)$, і аналогічно $q_1(x)=Q(x)/R(x)$. Обираємо з $p_1(x)$ і $q_1(x)$ той, що має меншу степінь.

2. Виділяємо з $R(x)$ усі незвідні многочлени, які потрапили в домінантну частину: $p_2(x)=\text{НСД}(p_1(x),R(x))$, $p_3(x)=(p_2(x),R(x)/p_2(x))$, $p_4(x)=(p_3(x),R(x)/(p_2(x)\cdot p_3(x)))$. Коли виконується $p_{\tilde{k}}(x)=const$, завершуємо ділення.

3. Формуємо шуканий многочлен $P_0(x)=p_1(x)p_2(x)...p_{\tilde{k}}(x)$. Зауважимо, що $\tilde{k}$ дорівнює числу знаходжень НСД в попередньому пункті. Тоді $P_1(x)=\dfrac{P(x)}{P_0(x)}$.

Обґрунтуємо побудову $P_0(x), Q_0(x)$. Розгляньмо $P(x)=r_1^{i_1}(x)\cdot...\cdot r_s^{i_s}(x)$, $Q(x)=t_1^{j_1}(x)\cdot...\cdot t_l^{j_l}(x)$, де $r_i(x), t_j(x)-$незвідні многочлени в розкладі $P(x)$, $Q(x)$ на незвідні многочлени. Позначимо $m=\max\{l,s\}$. Доведемо, що степінь кожного з них у $\text{НСК}(P_0(x), Q_0(x))$ такий самий, як і в $\text{НСК}(P(x), Q(x))$. Доведемо це для $r_1^{i_1}(x)$, бо для інших це показується аналогічно.

Введемо *позначення* $\deg_1 P(x)=\deg r_1^{i_1}(x)=i_1$, тобто це — степінь незвідного многочлена $r_1(x)$ в $P(x)$.

4. Нехай $\deg_1 P(x)>\deg_1 Q(x)$, $\deg_1 p_1(x)>\deg_1 R(x)$, де $p_1(x)=P(x)/R(x)$. Тоді $p_2(x)=\left(p_1(x),R(x)\right)$, тому $\deg_1 p_2(x)=\deg_1 R(x)$, звідси $\deg_1 p_1(x)\,p_2(x)=\deg_1 p_1(x)+\deg_1 R(x)$, але $p_1(x)=P(x)/R(x)$, тому

$\deg_1 p_1(x)\,p_2(x)=\deg_1 p_1(x)+\deg_1 R(x)=\deg_1 P(x)$, що і треба було довести. Зрозуміло, що в цьому випадку $\deg_1\left(q_1(x)\right)=\deg_1\left(Q(x)/R(x)\right)=0$.

5. Нехай $\deg_1 p_1(x)\le\deg_1 R(x)$, $\deg\left(Ann_M P(x)\right)=\dim A'=k$. Позначимо $\left[\deg_1 R(x)/\deg_1 p_1(x)\right]=k,\ k\le\tilde{k}$; зрозуміло, що $\deg_1 R(x)=j_1$. Тоді з $p_2(x)=\left(p_1(x),R(x)\right)$ випливає $\deg_1 p_2(x)=\deg_1 p_1(x)$, бо $\deg_1 p_2(x)=\min\left\{\deg_1 p_1(x),\deg_1 R(x)\right\}$, навіть $\deg_1 p_2(x)=\deg_1 p_1(x)$, тому степінь $r_1^{i_1}(x)$ однаковий у $p_2(x)$ і в $p_1(x)$. Тоді $\deg_1 p_2(x)=\deg_1 p_1(x)$, при цьому $\deg_1 p_3(x)=\min\left\{\deg_1 p_1(x),\deg_1\left(R(x)/p_2(x)\right)\right\}=\min\left\{\deg_1 p_1(x),\deg_1\left(R(x)/p_1(x)\right)\right\}=$ $\deg_1\left(R(x)/p_1(x)\right)=k-1$, бо відбулося одне ділення на $p_1(x)$, який містить $r_1^{i_1}(x)$. Тоді $\deg_1 p_4(x)=\min\left\{\deg_1 p_1(x),\deg_1\left(R(x)/p_1^2(x)\right)\right\}=\deg_1 p_1(x)$, звідки $\deg_1\left(R(x)/p_1^2(x)\right)=k-2$.

На k+2-ому кроці $\deg_1 p_{k+2}(x)=\min\left\{\deg_1 p_1(x),\deg_1\left(R(x)/p_1^k(x)\right)\right\}$ $=\deg_1\left(R(x)/p_1^k(x)\right)=\deg_1 R(x)-\deg_1\left(p_1^k(x)\right)$;

$\deg_1 P_0(x)=\deg_1 p_1(x)\,p_2(x)...p_k(x)=\deg_1\left(p_1(x)\,p_2(x)...p_{k+1}(x)\cdot\left(R(x)/\left(p_1^k(x)\right)\right)\right)=$
$=\deg_1\left(p_1^{k+1}(x)\cdot\left(R(x)/\left(p_1^k(x)\right)\right)\right)=\deg_1\left(p_1(x)\cdot R(x)\right)=\deg_1 P(x)$.

Тому в НСК$\left(P(x),Q(x)\right)$ степінь незвідного многочлена $r_1(x)$ буде таким, як і в НСК$\left(P_0(x),Q_0(x)\right)$. Аналогічно з рештою $r_i(x)$.

Зрозуміло, що в цьому випадку $\deg_1\left(q_1(x)\right)=\deg_1 Q(x)/R(x)=0$. Тобто якщо степінь незвідного многочлена $r_1(x)$ виявився більшим у $P(x)$, то він після виконання процедури буде зібраний у $P_0(x)$ і його зовсім не буде у $Q_0(x)$. Тому $\left(P_0(x),Q_0(x)\right)=1$. Процес ділення на цьому не завершується на кроці k, він триватиме $\tilde{k}=\max\left\{\left|i_l-j_l\right|\right\}$ разів до виділення останнього незвідного многочлена $r_l^{i_l}(x)$ чи $t_l^{j_l}(x)$.

Аналогічно $Q_0(x)$. Тоді $Q_1(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_0(x)}$. Складність обчислення НСД для поліномів з степенями $\deg p(x)=r_1, \deg R(x)=d, \deg p_i(x)=r_i,\ 1\le i\le\tilde{k}$ є $O\left(d_1 d_2\right)$ — це згідно з алгоритмом Евкліда, ця оцінка ґрунтується на тому, що на одне ділення поліномів потрібно $\left(\deg f-\deg g\right)\deg g$ дій. Тоді обчислення всіх $p_i(x), 1\le i\le\tilde{k}$ потребує не більше, ніж $r_1(x)d+r_2d+...+r_{\tilde{k}}d\le r_1d_1+(r_2+...+r_{\tilde{k}})d\le \deg(P(x))d+d^2$, де $\deg R(x)\le n$. Помітимо, що $r_2+...+r_{\tilde{k}}\le \mathrm{d}$ тому $R(x)\vdots p_2(x),...,p_k(x)$. Тому дана кількість кроків — це не більше, ніж $r_1d+r_2d+...+r_{\tilde{k}}d\le r_1d+(r_2+...+r_{\tilde{k}})d\le r_1d+d^2\le\deg P(x)d+d^2\le$ $\le p\min\{p,q\}+(\min\{p,q\})^2\le 2pq$, де $p=\deg P(x),\ q=\deg Q(x)$. Зрозуміло, що $\deg P(x)\le n,\ \deg Q(x)\le n$, бо $\deg AnnV\le n$.

Складність цього підметоду є такою самою, як і складність знаходження НСД $\left(f(x), \mathrm{g}(x)\right)$, бо ми виконуємо ділення доти, доки не отримаємо остачі. Точна оцінка складності алгоритму Евкліда: $O\left(deg(f(x))\cdot deg(g(x))\right)$; застосовуючи це до нашого випадку, маємо $O\left(\min\{\deg P(x), \deg Q(x)\}\deg R(x)\right)$. Оскільки в процедурі виводу взаємно простих анулюторів ми шукаємо НСД щонайбільше n раз, то складність алгоритму Евкліда, отриману для нашого випадку, доведеться помножити на n. Отже, загалом складність становить $O(n^3)$.

Тобто до векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, які породжують під дією M інваріантні простори U і V відносно дії оператора A, потрібно застосувати процедуру виводу векторів зі взаємно простими анулюторами. Тобто для векторів $\vec{u} = \vec{c}_1$, $\vec{v} = \vec{c}_2$ знайти $\vec{u} = R(M)\vec{c}_1$ і $\vec{v} = S(M)\vec{c}_2$, де $R(M)$ і $S(M)$ — це многочлени від матриці M, які виражаються як $R(x) = \frac{P(x)}{P_0(x)}$, тобто в $R(x)$ зібрано надлишкові множники, що не є необхідними для занулення векторів з V, а після їхньої редукції анулятивні поліноми $P(x)$ і $Q(x)$ стають взаємно простими, або можна записати як $P_0(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$ і аналогічно $Q_0(x) = \frac{Q(x)}{S(x)}$.

Якщо ж $\vec{c}_1 \notin \left\langle \vec{c}_2, M\vec{c}_2, M^2\vec{c}_2, ..., M^{l-1}\vec{c}_2 \right\rangle$, то ми застосовуємо заміну векторів $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ на суму $P_1(M)\vec{c}_1 + Q_1(M)\vec{c}_2$, $Q_1(x) = Q(x) : Q_0(x)$, $P_1(x) = P(x) : P_0(x)$, де $Q_1(x), P_1(x)$ — це многочлени, побудовані так, що вектори $Q_1(M)\vec{c}_1, P_1(M)\vec{c}_2$ матимуть взаємно прості анулятори, але при цьому породжувати простір із такою самою розмірністю суми (цих підпросторів), що й $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$.

Висновки до розділу 5

Запропоновано новий метод побудови нормального базису над скінченним полем, який у класі детермінованих алгоритмів має найкращу побітову оцінку складності $O(n^3 \log_2 p)$.

ВИСНОВОК

У дисертації одержано наступні нові наукові результати:

1. Описано локальні кубічні кільця і їхні ідеали.
2. Встановлено, що кубічне кільце є ґоренштейнове тоді й тільки тоді, коли воно є плоскою особливістю.
3. У геометричному випадку знайдено кількість параметрів, які визначають ідеали кубічного кільця, і встановлено зв'язок цих результатів зі класифікацією особливостей за В. Арнольдом.
4. Доведено, що одногілкова особливість алгебраїчної кривої над алгебраїчно замкненим полем має щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів тоді й тільки тоді, коли вона домінує одну з наступних плоских особливостей:
    - Якщо характеристика поля не дорівнює 2, то

    $E_{30}, E_{32}, W_{24}, W_{2*}^{\#}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}.$

    - Якщо характеристика поля дорівнює 2, то

    $E_{30}, E_{32}, W_{18}, W_{1,*}^{\#}, N_{20}, N_{24}.$
5. Повністю описано ідеали перерахованих плоских особливостей.
6. Розроблено новий алгоритм побудови нормального базису у скінченному полі з оцінкою ефективності порядку $O(n^3)$, де число елементов поля дорівнює p^n.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / Арнольд. В. И., Варченко А., Гусейн-Заде С. М. – М.: МЦНО, 2009. – 672 с.

[2] Боревич З. И. Целочисленные представления квадратичных колец / Боревич З. И., Фаддеев Д. К. // Вестн. Ленингр. унив. – 1960. – № 19. – С. 52 - 64.

[3] Боревич З. И. Представления порядков с циклическим индексом / Боревич З. И., Фаддеев Д. К. // Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР – 1965. – С. 51 - 65.

[4] Боревич З. И. Замечание о порядках с циклическим индексом / Боревич З.И., Фаддеев Д. К. // ДАН СССР – 1965.– № 2. – С. 727 - 728.

[5] Болотов А. А. Элементарное введение в эллиптическую криптографию / Болотов А. А., Гашков С. Б., Фролов А. Б., Часовских А. А. – М.: Комкнига. – 2006. – Кн. 1. – 321 с.

[6] Боревич З.И. Расширение локального кольца с нормальным базисом для главных единиц. Алгебраическая теория чисел и представления /З. И. Боревич, А.И. Скопин // Тр. МИАН СССР – Т. 80. – М.-Л.: Наука. – 1965. – С. 45-50.

[7] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра / Н. Бурбаки. – М.: Мир. – 1971. – 708 с.

[8] Глазман И.М. Конечномерный линейный анализ в задачах / Глазман. И. М., Любич Ю. И. – М.: Наука. – 1969. – 476 с.

[9] Глухов В. С. Порівняння поліноміального і нормального базисів представлення елементів полів Галуа / В.С. Глухов // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка» – 2007. – № 591. – С. 22 - 27.

[10] Джекобсон Н. Теория колец / Н. Джекобсон. – М.: ИЛ, 1947. – 287 с.

[11] Дрозд Ю. А. Представления коммутативных алгебр / Дрозд Ю. А.//

Функц. анализ и прилож. – 1972. – № 4. – С. 41-43.

[12] Дрозд Ю. А. Идеалы коммутативниых колец / Ю. А. Дрозд // Математический сборник. – 1976. – № 3. – С. 334 - 348.

[13] Дрозд Ю. А. О полугруппе дивизоров коммутативного кольца / Ю. А. Дрозд // Труды матем. ин-та им. Стеклова АН СССР. – 1978. – С. 156 - 167.

[14] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В. О наследственных и бассовых порядках / Ю. А. Дрозд // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1967. – № 6. – С. 1415 - 1436.

[15] Картан А. Гомологическая алгебра / Картан А., Эйленберг С. – М.: ИЛ. – 1960. – 512 с.

[16] Кэртис Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Кэртис. Ч., Райнер И. – М. – Наука. – 1969. – 668 с.

[17] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / Курош. А. Г. – М.: Наука. – 1965. – 431 с.

[18] Назарова Л. А., Ройтер А. В. Уточнение одной теоремы Басса /Л. А. Назарова // Докл. АН СССР. – 1967. – 176, № 2. – С. 266 - 268.

[19] Ройтер А. В. Аналог одной теоремы Басса для модулей представлений некомутативных порядков /А. В. Ройтер // Докл. АН СССР. – 1966. – 168, №6. – С. 1261 - 1264.

[20] Фаддеев Д. К. О полугруппе родов в теории целочисленных представлений /Д. К. Фаддеев // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – 28, № 2. – С. 475 - 478.

[21] Фаддеев Д. К. Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений /Д. К. Фаддеев // Труды матем. ин-та им. Стеклова АН СССР. – 1965. – Т. 80. – С. 145 - 182.

[22] Фаддеев Д. К. К теории кубических Z-колец / Д. К. Фаддеев // Труды матем. ин-та им. Стеклова АН СССР. – 1965. – Т. 88 – С. 183 - 187.

[23] Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К., Фаддеев. В. Н. Фаддеева – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – 733 с.

[24] Bass H. Torsion free and projective modules / H. Bass // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 102, № 2. – P. 319 - 327.

[25] Bass H. On the ubiquity of Gorenstein rings / H. Bass // Math. Z. – 1963. – 82. – P. 8 - 28.

[26] Bruns W. Cohen–Macaulay Rings /W. Bruns., Herzog J. – Cambridge: Cambridge University Press; 2 edition, July 28, 1998. – 468 p.

[27] Brent R. Fast algorithms for manipulating formal power series / R.J. Brent, Kung H., // ACM – 1978. – 25, №4 – P. 581-595.

[28] Cohn H. Group-theoretic Approach for Matrix Multiplication / H.Cohn, Kleinberg R., Szegedy B., Umans C. // http//arxiv.org. math/ 051F60v1 [math. GR] 18 Nov. 2005.

[29] Coppersmith D. Matrix multiplication via arithmetic progressions / D. Coppersmith, Winograd S. // Symbolic Computation. – 1990. – № 9. – P. 251 - 280.

[30] Dade E. C. On the theory of orders, in particular on the semigroup of ideal classes and genera of an order in an algebraic number field / E. C. Dade, Taussky O., Zassenhaus H. // Math. Ann. – 1962. – P. 31-64.

[31] Dedekind R. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen /R. Dedekind // Supplement XI von Dirichlets Vorlesungen über Zahelentheorie. 4. Aufl. – 1894. – P. 434 - 657.

[32] Drozd Y. Cohen–Macaulay module type / Y.Drozd, Greuel G.-M. // Compositio Math. – 1993. – 89, № 3. – P. 315 - 338.

[33] Drozd Y. On Cohen-Macaulay modules on surfacesingularities/ Y. Drozd, Greuel, G.-M., Kashuba, I. // Moscow Math. J. – 2003 – 3, № 2. – P. 397 - 418.

[34] Drozd Y. On Schappert's characterization of strictly unimodal plane curve singularities / Drozd Y., Greuel G.-M. – Singularities: The Brieskorn Anniversary:

– 1998. – Vol. 162, 3. – P. 3 - 26.

[35] Y. A. Drozd. On the existence of maximal orders / Y. Drozd // Matem. Zametki. 1985. – Vol. 37, Issue 3. – P. 177 - 178.

[36] Y. A. Drozd, A. V. Roiter. Commutative rings with a finite number of integral indecomposable representations / Y. Drozd // Izvestia Acad. Nauk SSSR. Ser. matem. – 1967. – Vol. 31. – P. 783 - 798.

[37] Gao Sh. Normal Bases over Finite Fields: Ph. thesis in Combinatorics and Optimization / Sh. Gao // Waterloo. – 1993. – 119 p.

[38] Greuel G.M., Knörrer H. Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln / G. M. Greuel // Math. Ann. – 1985. – № 270, 3. – P. 417 - 425.

[39] Huang X. Complexity Fast rectangular matrix multiplication and applications / X.Huang, Pan V. J. // Journal of complexity. – 1998. – 14. – P. 257 - 299.

[40] H. Jacobinski. Surles ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indécomposables /H. Jacobinski // Acta Math. – 1967. – 118. – P. 1-31.

[41] Kiran S. “Fast Modular Composition in any Characteristic /S. Kiran, Kedlaya, Christopher Umans // Foundations of Computer Science. – FOCS '08. IEEE 49th Annual IEEE. – 2008. – P. 146 - 155.

[42] Matsumura H. Commutative Ring Theory / H. Matsumura. – Cambridge University Press. – 1987. – 320 p.

[43] Schappert A. A characterization of strict unimodal plane curve singularities / A.Schappert // Lecture Notes in Math. – 1987. – Vol. 1273. – P. 168-177.

[44] Stepanov S. A. On construction of primitive elements and primitive normal bases in a finite field / S. A.Stepanov, Shparlinskiy I. E. // Computational Number Theory, ed. A. Peth, M.E., Pohst, H.C. Williams, H.G. Zimmer. – 1991. – P. 189 - 192.

[45] Von Shur Gathen G. Constructing normal bases in finite fields / Von Shur Gathen G., Giesbrecht M. // J. Symbolic Computation. – 1990. – №. 10. – P. 547 - 570.

[46] Wall C. T. C. Classification of unimodal isolated singularities of complete

intersections / C.Wall // Singularities Arcata – Proc. Symp. Pure Math. – 1981. –V. 2. – P. 625 - 640.

ДОДАТКИ

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в шести статтях у фахових виданнях, три з яких у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, а також у тринадцятьох збірках тез конференцій, сім із яких міжнародні:

1[a]) *Скуратовський Р. В.* Особливості плоских алгебраїчних кривих типу *N*. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки 2012р. Вип. 1. ст. 33-40.

2[a]) *Скуратовський Р. В.* Побудова нормального базису скінченного поля за детермінований поліноміальний час // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія механіка-математика. Видавництво: ВПЦ "Київський університет". Рік: 2011. Сторінок: С. 49-54.

3[a]) *Skuratovskii R.V.* Ideals of one branch curve singularities of type *W* // Ukrainian Math. J. 62, No. 4 (2010), С. 530-536.

4[a]) *Drozd Y.A., Skuratovskii R.V.* Cubic rings and their ideals (in Ukraniane) // Ukr. Mat. Zh. – 2010.–V. 62, №11–P.464-470. (arXiv:1001.0230 [math.AG])

5[a]) *Drozd Y., Skuratovskii R.* One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideals // Algebra and Discrete Math. 2012. – 13, № 2 – P. 209-219. (arXiv 1201.6579 [math.AC]).

6[a]) Скуратовський Р.В. Ідеали одногілкових особливостей степеня 5 Шевченківська весна Частина 1. Київ. 2012р. ст. 43.

7[a]) Скуратовський Р.В. Нормальні базиси скінченного поля і їх властивості. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні наукові проблеми математики у вищій школі». присвячена Левіщенко С.С., НПУ ім. М. П. Драгоманова, 7-8 жовтня 2016 р. ст. 78 *www.fmi.npu.edu.ua/ua/levischenko-conf*

8^a) Скуратовський Р.В. One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideals. «Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка **Я.** С. Підстригача». КМУ СПММ – 2011. – ст. 273. http://iapmm.lviv.ua/cpmm2011/

9^a) *Скуратовський Р. В., Мовчан А. А.* Дослідження особливостей скручених кривих Едвардса над F_p. П’ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених. “Актуальні проблеми сучасної математики та фізики». ст. 56.

10^a) Popovych R. B., Skuratovskii R. V. Normal bases and elements of high order in finite field extensions based on cyclotomic polynomials. The 11th International Algebraic Con ference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko 2017 at Taras Shevchenko National University of Kiev (Kiev, Ukraine). https://www.imath.kiev.ua/~algebra/iacu2017/

11^a) Скуратовський Р. В. Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих. Сучасні проблеми механіки та математики. – Збірник наукових праць. збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018

12^a) Скуратовський Р. В. Суперсингулярність еліптичних кривих і кривих Едвардса над F_{p^n} // Research in mathematics and mechanics. – 2018. – Т 31, №1, с. 67-78.