

В І Д Г У К

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Дмитришина Романа Івановича

”Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з
нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди”,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за
спеціальністю

01.01.01 - математичний аналіз

Дисертаційна робота присвячена дослідженню гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Ланцюгові дроби є одним з найбільш інтригуючих розділів класичного аналізу, що має тісні зв'язки з теорією чисел, проблемою моментів, теорією ортогональних многочленів, квадратурними формулами, інтерполяційними задачами теорії функцій комплексної змінної, спектральною теорією самоспряжених лінійних операторів та ін. Значний внесок до теорії ланцюгових дробів було зроблено такими визначними математиками, як Леонард Ейлер, Карл Фрідріх Гаус, Адрієн-Марі Лежандр, Карл Густав Якобі, Бернхард Ріман, Томас Стілтєс, Пафнутій Чебишов та багато інших.

В минулому сторіччі в зв'язку з розвитком обчислювальної техніки та запитами з боку природничих та інженерних наук інтерес до вивчення ланцюгових дробів значно зріс. Зокрема, виникли та отримали розповсюдження і розвиток багатовимірні узагальнення ланцюгових дробів — гіллясті ланцюгові дроби. Започаткував цей напрям визначний львівський математик Віталій Якович Скоробогатько, і зараз створена ним школа продовжує успішно працювати і збагачувати математичну науку глибокими і плідними результатами.

Гіллясті ланцюгові дроби є узагальненням класичних одновимірних ланцюгових дробів, тож вони успадковують багато їх властивостей, але з узагальненням однієї з найбільш важливих властивостей — властивості відповідності виникли суттєві проблеми. В двовимірному випадку ці труднощі в значній мірі були подолані Христиною Кучмінською шляхом розгляду так званих двовимірних ланцюгових дробів. Вирішенню цього питання в багатовимірному випадку слугують запропоновані Дмитром Ільковичем Боднаром у 1976 році гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Самим Дмитром Ільковичем та його ученицями Оксаною Баран та Марією Бубняк було отримано вагомні результати з теорії цих дробів. В дисертації Романа Дмитришина ця теорія набуває систематичного і доволі завершеного характеру. В ній вивчаються як питання збіжності вказаних дробів, так і алгоритми їх побудови і їх використання для наближення елементарних та спеціальних функцій кількох змінних. Тема дисертації таким чином є безумовно актуальною.

Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, списку використаних джерел та двох додатків.

В першому розділі наводяться основні положення і напрями досліджень аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Ланцюговий дріб — це вираз вигляду

$$b_0 + \mathbf{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots \frac{a_n}{b_n + \dots}}}}$$

В сучасних дослідженнях ланцюговий дріб визначається як відображення впорядкованої пари послідовностей коефіцієнтів $\langle \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} \rangle$ в послідовність підхідних дробів $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

Ланцюговий дріб можна розглядати як суперпозицію дробово-лінійних відображень вигляду

$$s_0(w) = b_0 + w, \quad s_k(w) = \frac{a_k}{b_k + w}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо замість дробово-лінійних відображень однієї змінної розглядати дробово-лінійні відображення багатьох змінних вигляду

$$s_0(w_1, w_2, \dots, w_d) = b_0 + w_1 + w_1 + \dots + w_d,$$

$$s_{\mathbf{k}}(w_1, w_2, \dots, w_d) = \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + w_1 + w_1 + \dots + w_d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^r,$$

отримаємо гіллясті ланцюгові дроби. Щоб отримати гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, треба послідовно використовувати дробово-лінійні відображення вигляду

$$s_0(w_1, w_2, \dots, w_d) = b_0 + w_1 + w_1 + \dots + w_d,$$

$$s_{\mathbf{k}}(w_1) = \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + w_1},$$

$$s_{\mathbf{k}}(w_1, w_2) = \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + w_1 + w_2},$$

$$\dots$$

$$s_{\mathbf{k}}(w_1, w_2, \dots, w_d) = \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + w_1 + w_1 + \dots + w_d},$$

$$\dots$$

Така конструкція, як виявилось, дозволяє перенести на багатовимірний випадок поняття відповідності, суттєво необхідне для багатьох питань застосування ланцюгових дробів.

В другому розділі вивчаються питання збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, зокрема, встановлено багатовимірну ознаку Ворпіцького, аналоги результатів О.Перрона, А.Прінсгейма, Е.Б. Ван Флека, Г.С.Волла, Дж.Ф. Пейдона.

Третій розділ присвячений зображенню аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. Описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних, мероморфних в околі початку координат.

В четвертому розділі побудовано алгоритми розвинення заданого формального степеневому ряду у гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними.

В п'ятому розділі вивчаються питання збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Досліджуються області і множини збіжності таких дробів.

Шостий розділ присвячено наближенню деяких елементарних та спеціальних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними, зокрема, побудовані такі дроби для наближення функцій багатьох змінних, що містять показникову функцію, логарифмічну функцію, степеневу функцію, тангенс, арктангенс, гіпергеометричну функцію Гауса. Проведено чисельні розрахунки, що ілюструють ефективність побудованих наближень.

Результати дисертації становлять вагомий внесок в сучасну теорію гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і можуть мати істотне прикладне значення.

До основних результатів дисертації можна віднести наступні:

- Ознака Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.
- Загальна теорія відповідності для послідовностей мероморфних функцій.
- Алгоритми розвинення заданого формального степеневому ряду у відповідний багатовимірний C -дріб з нерівнозначними змінними.
- Вивчення областей збіжності багатовимірних регулярних C -дробів з нерівнозначними змінними. Відзначимо, що ряд результатів відносно областей збіжності є новими також і у випадку одновимірних дробів.

До дисертаційної роботи є декілька зауважень, а саме:

- Наявні деякі невідповідності при цитуванні джерел:
 - (1) На сторінці 46 процитовано теорему з книги Дж.Бейкера та П.Р.Грейвс-Морріса, яка в джерелі формулюється суттєво іншим чином.
 - (2) На тій же сторінці процитовано теорему з книги Г.С.Волла, відповідний результат в першоджерелі знайти не вдалося.
 - (3) На сторінці 111 наводиться поняття формального ряду Лорана за статтею П.Хенрічі, що не співпадає з наведеним в джерелі. В дисертації формальний ряд Лорана — це

$$L_0(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{m}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad c_{\mathbf{m}} \neq 0,$$

у П.Хенрічі формальний ряд Лорана — це ряд

$$L_0(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

такий, що $\forall m \in \mathbb{Z}$ тільки скінченна кількість $c_{\mathbf{k}}$, для яких $|\mathbf{k}| < m$ є відмінною від нуля. Відповідно некоректним є означення (3.2). Потрібно писати

$$\lambda(L_0) = \max\{m \in \mathbb{Z} : L_0(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq m} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\}.$$

• Є ряд дрібних похибок і описок:

- (1) На сторінці 3, рядок 5 зверху замість "О.Е.Баран" слід писати "О.Є.Баран".
- (2) На сторінці 5, рядок 13 знизу замість "кругових" слід писати "кругових областей".
- (3) На сторінці 6, рядок 14 знизу замість "кратним" слід писати "кратними".
- (4) На сторінці 9, рядок 9 зверху і далі замість "fraction" слід писати "fractions".
- (5) На сторінці 11, рядок 5 знизу замість "absolutely" слід писати "absolute".
- (6) На сторінці 43, рядок 8 знизу замість " c_{k+l+1} " слід писати " c_{k+l-1} ".
- (7) На сторінці 59, рядок 2 зверху замість " q_{k-1} " слід писати " q_1 ".
- (8) На сторінці 84, рядок 5 знизу замість "значень" слід писати "значеннях".
- (9) На сторінці 85, рядок 8 зверху замість "не є узагальненням" слід писати "не є наслідком".
- (10) На сторінці 117, рядок 4–5 зверху замість "гіллястими ланцюговими дробами" слід писати "гіллястих ланцюгових дробів".
- (11) На сторінці 120, рядок 4 зверху замість "формальних" слід писати "формальним".
- (12) На сторінці 125, рядок 14 знизу замість "викрадені" слід писати "викладені".
- (13) На сторінці 127, рядок 7 зверху замість "координаті" слід писати "координат".
- (14) На сторінці 129, рядок 7 зверху замість " J -дріб" слід писати " J -дробами".
- (15) На сторінці 227, рядок 5 зверху замість "очевидні" слід писати "очевидна".

Ці недоліки не є суттєвими і не впливають на загальну оцінку дисертації.

Результати дисертації чітко сформульовані, строго доведені, вчасно і з належною повнотою опубліковані у фахових виданнях, затверджених МОН України (22 публікації, з яких 8 у виданнях, що індексуються наукометричними базами "Scopus" та "Web of Science"), що забезпечує достовірність основних дисертаційних положень та висновків з них. Особистий внесок здобувача у спільних публікаціях відображено в дисертації та авторефераті. Результати отримали належну апробацію на численних міжнародних конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

Автореферат правильно відображає зміст та основні положення дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди" за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною, теоретичною та практичною цінністю отриманих результатів повністю задовольняє вимоги пп.9,10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року №567 (зі змінами від 30.12.2015 р.) щодо робіт, поданих на здобуття наукового ступеня доктора наук, а її автор Дмитришин Роман Іванович заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент –
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
відділу обчислювальної математики
Інститут математики НАН України



А.П. Голуб

ЗАСВІДЧУЮ

Зав. канцелярії

Інститут математики НАН України

28. травня 2019

28.05.2019 р.

/Ситур О.Р./

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради D26.208.01
Секретар ради О.С.У

