Національна академія наук України
Інститут математики

Д.В. Гусак

Процеси з незалежними приростами в теорії ризику

Київ — 2011

УДК 519.21

Гусак Д.В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. — 544 с.

Мета монографії підсумувати результати дослідження розподілу граничних функціоналів для однорідних процесів з незалежними приростами та для випадкових блукань; звернути увагу на зв'язок граничних задач, пов'язаних з вивченням розподілу багатьох функціоналів для випадкових процесів та блукань, із задачами в теорії ризику і можливість застосування результатів теорії граничних задач до вивчення ризикових характеристик в актуарній математиці.

Книга розрахована на студентів, аспірантів та наукових співробітників, а також на інженерів, що цікавляться граничними задачами для стохастичних процесів та їх застосуваннями в теорії ризику, в теорії відновлення та надійності, в теорії систем масового обслуговування і в актуарній математиці.

Рецензенти: *академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук В.С. Королюк,*
д-р фіз.-мат. наук, професор Ю.С. Мішура

Монографія є виправленим і розширеним варіантом видання 2007 року.

Затверджено до друку вченою радою Інституту математики НАН України

ISBN 966-02-2571-7

ISBN 978-966-02-6045-0 (Т. 88)

Світлій пам'яті моєї дорогої дружини Тамари.

Чом, голубонько, замовкла,
Чом не чуть твоїх речей?
Ти ж, бувало, щебетала,
Як у саду соловей.

(з укр. народної пісні)

Д.В. Гусак

Процеси з незалежними приростами в теорії ризику

ПРАЦІ
Інституту математики НАН України

Математика та її застосування
Том 88

Засновано в 1994 році

Вступ

Монографія є переробленим і розширеним варіантом монографії [46], опублікованої в 2007 р., і присвячена подальшому дослідженню розподілів граничних функціоналів для процесів зі стаціонарно незалежними приростами та їх застосуванню в теорії ризику та в актуарній математиці.

Недавні результати, одержані автором за останні 3 роки, доповнюють розділи 3, 4, 6 та 7 згаданої монографії і викладені в §§ 3.5–3.6, § 4.4 та в §§ 6.4–6.5 і в § 7.4 її нового розширеного варіанту. Доповнення в основному стосуються деяких функціоналів для процесів масового обслуговування та ґратчастих пуассонівських процесів, а також дограничних узагальнень формули Полячека–Хінчина, кумулянтного зображення коренів рівняння Лундберга та спрощення формули Спітцера для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів.

Процеси ризику описуються складними пуассонівськими процесами (з дифузією або без неї), складними біноміальними процесами, які зводяться до випадкових блукань, пуассонівськими процесами з одностороннім або двостороннім відбиттям. Основні характеристики, що досліджуються в теорії ризику, тісно пов'язані з розподілами граничних функціоналів для однорідних процесів з незалежними приростами (екстремумів на скінченному інтервалі, абсолютних екстремумів, перестрибкових функціоналів та інших).

В більшості робіт з теорії ризику такий зв'язок не достатньо освітлюється і відомі результати для розподілу функціоналів процесів з незалежними приростами часто залишаються осторонь при вивченні задач ризику. В той же час для однорідних процесів з незалежними приростами та випадкових блукань багато результатів з розподілу екстремумів та інших функціоналів можна використати і пристосувати для опису основних характеристик як у теорії ризику, так і в теорії систем масового обслуговування (СМО).

Мета даної монографії: підсумувати одержані результати дослідження розподілу вище згаданих граничних функціоналів і привернути увагу на зв'язок теорії ризику з граничними задачами для випадкових процесів та блукань з незалежними приростами.

Для сум S_n розглядаються граничні задачі, пов'язані з розподілами різних граничних функціоналів, які мають не лише теоретичний інтерес, а й практичне застосування в теорії СМО, в теорії відновлення й надійності, в теорії ризику тощо. Граничні задачі, пов'язані з розподілами аналогічних функціоналів вивчаються й для однорідних процесів з н.п. та процесів на нескінченних ланцюгах Маркова (див. [45, 72, 130, 172, 174, 175] та інші).

Дослідження граничних задач, пов'язаних з розподілами граничних функціоналів, проводились прямими (ймовірнісними) та різними аналітичними методами. Прямі методи розвивались в роботах А.В. Скорохода, І.І. Гіхмана, G. Baxter'a, N.H. Bingham'a, J. Kemperman'a. Комбінаторним методам, тісно пов'язаним з прямими методами, присвячені роботи Ф. Спітцера, Л. Такача, аналітичним та асимптотичним методам — роботи В.С. Королюка та роботи новосибірських імовірнісників А.А. Боровкова, Б.А. Рогозіна та інших. Аналітичні методи, які грунтуються на методі потенціалу та факторизаційному підході розвивались в роботах В.С. Королюка, В.М. Шуренкова, Д.В. Гусака, М.С. Братійчука та інших.

В розділі 1 наводяться загальні відомості з теорії процесів з н.п., запозичені з монографій А.В. Скорохода [110, 111], та основні поняття і означення. Розділи 2–3 присвячені викладу результатів дослідження граничних задач для однорідних процесів, що грунтується на факторизаційно-проекційному підході розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь для розподілу екстремальних значень процесу, а також для розподілу перестрибкових та інших функціоналів.

Екстремальні значення процесу $\{\xi(t),\ t \geq 0,\ \xi(0) = 0\}$

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} (\inf) \xi(u), \quad \xi^{\pm} = \sup_{0 \leq u < \infty} (\inf) \xi(u),$$

можна вважати основними (базовими) функціоналами, оскільки розподіли всіх інших граничних функціоналів $f(\xi(t))$ (зокрема, таких функціоналів, що пов'язані з перетином фіксованого рівня, з часом перебування над заданим рівнем і т.д.) виражаються безпосередньо через розподіли цих функціоналів. Більшість граничних функціоналів задовольняють умови неперервності в топології Скорохода.

Щоб ввести метрику, яка породжує топологію Скорохода, позначимо Λ-клас строго зростаючих неперервних функцій $\lambda(t)$ на $[0, T]$ таких, що $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = T$. Тоді на класі $D_{[0,T]}$ функцій без розривів 2-го роду, неперервних справа з обмеженими лівосторонніми границями вводиться метрика Скорохода для $x_{1,2}(t) \in D_{[0,T]}$

$$\rho_D(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \inf_{\Lambda} \big\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(\lambda(t))| + \sup_{0 \leq t \leq T} |t - \lambda(t)| \big\}.$$

За допомогою цієї метрики визначається J-топологія Скорохода в $D_{[0,T]}$ (див. [110, гл. 8]). Згідно з теоремою 2 (див. И.И. Гихман, А.В. Скороход [20, гл. IX, § 5, с. 545]) для будь-якого неперервного в топології Скорохода функціоналу f_T на $D_{[0,T]}$ розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$ збігається до розподілу $f_T(\xi(\cdot))$ при $n \to \infty$. Тому спочатку вивчається розподіл функціоналу для східчастих або косо-східчастих процесів. Функціонали таких процесів задовольняють прості стохастичні співвідношення, на основі яких виводяться інтегро-диференціальні рівняння для їх розподілу. При розв'язанні таких рівнянь для інтегральних перетворень вводиться показниково розподілена випадкова величина θ_s, незалежна від $\xi(t)$ ($P\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t > 0$). Тоді можна позначити

$$\varphi(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(\theta_s)} = s\int_{-\infty}^{\infty} Ee^{i\alpha\xi(t)}e^{-st}dt, \quad \varphi_\pm(s,\,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)}$$

і розглядати $\xi(\theta_s)$ як випадково зупинений (randomly stopped) процес за термінологією Д.С. Сільвестрова [214]. Важлива роль при цьому відводиться основній факторизаційній тотожності (о.ф.т.).

Після інтегральних перетворень рівняння для розподілу функціоналу $f_T(\xi(\cdot))$ східчастого процесу $\xi(t)$ розв'язується шляхом застосування о.ф.т. та відповідних операцій проектування у термінах характеристичних функцій (х.ф.) $\varphi_\pm(s,\alpha)$.

Для загального випадку можна вибрати апроксимуючу послідовність східчастих процесів $\xi_n(t)$ з кумулянтами $\psi_n(\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\alpha)$, де $\psi(\alpha) = t^{-1}\ln Ee^{i\alpha\xi(t)}$ кумулянта загального однорідного процесу $\xi(t)$. Спочатку визначається розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$ в термінах $E\exp\{i\alpha\xi_n^\pm(\theta_s)\}$ $= \varphi_n^\pm(s,\,\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_\pm(s,\,\alpha)$. Якщо $f_T(\xi(\cdot))$ — неперервний в топології Скорохода функціонал, то розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$ збігається при $n \to \infty$ до шуканого розподілу $f_T(\xi(\cdot))$ в термінах $\varphi_\pm(s,\alpha)$. Немонотонні процеси $\xi(t)$ зі стрибками одного знаку, називають напівнеперервними зверху (або знизу). Для них мають місце уточнення компонент о.ф.т. $\varphi_\pm(s,\alpha)$. Відповідно і розподіли функціоналів $f_T(\xi(\cdot))$ напівнеперервного процесу $\xi(t)$ виражаються в термінах цих уточнень.

Для напівнеперервних процесів В.С. Королюк розвинув метод потенціалу, за допомогою якого досліджуються різні граничні задачі та розподіли функціоналів $f_T(\xi(\cdot))$ у термінах потенціалу та резольвенти (див. монографію В.С. Королюка [84]). Для цих же процесів та осцилюючих блукань та процесів різні зображення для компонент факторизації $\varphi_\pm(s,\alpha)$ одержано в роботах Д.В. Гусака [23–39,41–65,174–184], а деякі — в спільній монографії з М.С. Братійчуком [14]. Цим результатам присвячена перша частина монографії (розділи 1–4), доповнена §§ 3.5–3.6 та § 4.4.

Для майже напівнеперервного знизу процесу (процесу, від'ємна частина стрибків якого має показниковий розподіл) також одержано уточнення для компонент факторизації. Для цілозначних пуассонівських процесів так само можна ввести поняття неперервності та майже напівнеперервності знизу або зверху і одержати відповідні уточнення для компонент факторизації, що визначають генератриси розподілу екстремумів $\xi^\pm(\theta_s)$. Двограничні задачі для напівнеперервних (майже напівнеперервних) процесів та блукань розглядаються в розділах 4–5. Крім того, в цих розділах розглядаються процеси з відбиттям та їх зв'язок із різними прикладними задачами.В розділі 5 висвітлюється зв'язок граничних задач із задачами ризику для класичних процесів ризику та для процесів з випадковими преміями. Розділ 6 доповнений §§ 6.4–6.5, присвячено вивченню поведінки процесів ризику після момента банкрутства. В розділі 7, доповненому § 7.3, розглядаються граничні задачі для ґратчастих пуассонівських процесів та випадкових блукань і досліджуються ризикові характеристики для цих процесів.

Зауважимо, що граничні задачі, пов'язані з розподілом багатьох функціоналів розглядались раніше у відомих монографіях А.А. Боровкова [6,7], А.В. Скорохода [110], В.С. Королюка [84,86], Ф. Спітцера [112], Л. Такача [119], J. Kemperman'a [193] та інших авторів.

Розподілам граничних функціоналів для процесів ризику присвячені монографії (переважно зарубіжних авторів): S. Asmussen'a [130], H. Bühlmann'a [141], H.U. Gerber'a [166], J. Grandell'a [170], T. Rolsky, H. Shmidly, V. Shmidt'a, J. Teugels'a [210] та інших авторів [211–213].

Частково результати даної монографії використані в навчальному посібнику, підготовленому колективом авторів і двічі опублікованому у видавництві КНУ українською мовою [69] (2008 р., 2009 р.), а також англійською мовою у видавництві "Springer" (2010 р.).

В кінці монографії зібрані ілюстраційні графіки деяких напівнеперервних процесів та їх функціоналів. У додатках наведено порівняльні таблиці коренів рівняння Лундберга для процесів зі значеннями в R^1 та для цілозначних процесів, а також формули для ймовірності банкрутства $\Psi(u)$ та їх наближень ($u \to \infty$).

Розділ 1

Загальні відомості про процеси з незалежними приростами (н.п.)

1.1 Означення процесу з н.п. Приклади та основні властивості процесів з н.п.

Будемо розглядати випадкові процеси з н.п. $\{\xi(t),\ 0 \le t \le T\}$, визначені на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ з дійсними значеннями в фазовому просторі $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелівських множин на прямій $\mathbf{R}$.

Вважатимемо, що процес $\{\xi(t),\ 0 \le t \le T\}$ сепарабельний, а його вибіркові функції належать простору $D_{[0,T]}$ неперервних справа функцій без розривів II-го роду зі скінченними лівосторонніми границями.

Означення 1.1. Процес $\{\xi(t),\ 0 \le t \le T\}$ називається процесом з н.п., якщо для довільного $n \ge 1$ і для всіх $\{t_k\}_{k=\overline{0,n}}$

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le T$$

значення $\xi(t_0)$ та прирости

$$\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

є незалежними випадковими величинами.

Якщо для $\operatorname{Im}\alpha = 0$ і $t \geq 0$, $t_1 < t_2$ позначити характеристичні функції (х.ф.) $\varphi_t(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)}$, $\varphi_{t_1,t_2}(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t_2)-\xi(t_1))}$, то з означення 1.1 випливає важливе співвідношення

$$\mathbf{E}e^{i\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\xi(t_k)} = \varphi_{t_0}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Big)\varphi_{t_0,t_1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big)\cdots\varphi_{t_{n-1},t_n}(\alpha_n).$$

Отже для $A_k \in \mathcal{B}$, $k = \overline{0,n}$ скінченновимірні розподіли процесу $P_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \mathbf{P}\{\xi(t_0) \in A_0, \ldots, \xi(t_n) \in A_n\}$ визначаються розподілом $\xi(t_0)$ та розподілами приростів $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = \overline{0,n}$.

Означення 1.2. Процес з н.п. називається *однорідним*, якщо розподіл приростів $\xi(t) - \xi(s)$ залежить лише від $t - s$ при $s \leq t$.

Якщо $\xi(t)$ — однорідний процес з н.п., то будемо вважати, що $0 \leq t < \infty$, крім того, часто покладатимемо $\xi(0) = 0$.

Наведемо кілька прикладів процесу з н.п.

Приклад 1.1 (процес Пуассона)**.** Нехай $\{\xi(t), 0 \leq u < t \leq T < \infty\}$ — процес із н.п. і для цілих значень $n \geq 0$ знайдеться таке $\lambda(t,u) > 0$, що прирости $\xi(t)-\xi(u)$ мають пуассонівський розподіл з параметром $\lambda(t,u)$

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(u) = n\} = e^{-\lambda(t,u)}\frac{\lambda^n(t,u)}{n!}, \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

тоді $\{\xi(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ називається *неоднорідним* процесом Пуассона.

Оскільки

$$\lambda(t,u) = \mathbf{E}[\xi(t) - \xi(u)], \quad \lambda(t,0) = \mathbf{E}[\xi(t) - \xi(0)] = \lambda(t),$$

то

$$\lambda(t,u) = \mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(0)) + (\xi(0) - \xi(u))] = \lambda(t) - \lambda(u)$$

і з (1.1) випливає, що

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(u) = n\} = e^{\lambda(u)-\lambda(t)}\frac{(\lambda(t) - \lambda(u))^n}{n!},$$

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(0) = n\} = e^{-\lambda(t)}\frac{\lambda(t)^n}{n!}, \quad n \geq 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(0)]} = e^{\lambda(t)(e^{i\alpha}-1)}.$$

Параметр $\lambda(t) = \mathbf{E}[\xi(t) - \xi(0)] = \mathbf{D}[\xi(t) - \xi(0)] > 0$; $\lambda(t) \geq \lambda(u)$, $t > u$, що визначає неспадну функцію по t, називають інтегральною інтенсивністю стрибків пуассонівського процесу.

Процес $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ називається *однорідним* процесом Пуассона, якщо $\lambda(t) = \lambda t$. Розподіл його приростів визначається співвідношенням

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(u) = n\} = e^{-\lambda(t-u)}\frac{\lambda^n(t-u)^n}{n!}, \quad n \geq 0, \tag{1.3}$$

а параметр $\lambda > 0$ називається інтенсивністю стрибків $\xi(t)$.

Якщо $\xi(0) = 0$, то $\xi(t)$ — невід'ємний монотонний цілозначний процес з одиничними стрибками. Випадкові величини $\{\zeta_k\}_{k\geq 1}$, що визначають тривалість часу між послідовними (одиничними) стрибками, незалежні однаково розподілені з показниковим розподілом

$$\mathbf{P}\{\zeta_k > t\} = e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad \lambda > 0.$$

Розподіл простого однорідного пуассонівського процесу $\{\xi(t),\ t \geq 0,\ \xi(0) = 0\}$ згідно (1.3) має вигляд

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Його можна інтерпретувати як процес відновлення для послідовності $\{\zeta_k\}_{k\geq 1}$: $\nu(t) = \max\Big\{n : \sum\limits_{k\leq n}\zeta_k \leq t\Big\}$.

Приклад 1.2 (процес броунівського руху)**.** Процес $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ із н.п. називається процесом броунівського руху, якщо $\xi(t)$ і його прирости $\xi(t) - \xi(u)$ $(u < t)$ мають нормальний розподіл. Нехай

$$\xi(0) = 0, \quad \mathbf{E}\xi(t) = a(t), \quad \mathbf{D}\xi(t) = b^2(t),$$

тоді при $u < t$

$$\mathbf{E}[\xi(t) - \xi(u)] = a(t) - a(u), \quad D[\xi(t) - \xi(u)] = b^2(t) - b^2(u) > 0.$$

Розподіл приростів процесу визначається формулою

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(u) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,[b^2(t) - b^2(u)]}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{[z-a(t)+a(u)]^2}{2\left[b^2(t)-b^2(u)\right]}\right\} dz, \tag{1.4}$$

а його х.ф. має вигляд

$$\mathbf{E}e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(u)]} = \exp\left\{i\alpha(a(t)-a(u)) - \frac{\alpha^2}{2}\left[b^2(t)-b^2(u)\right]\right\}. \tag{1.5}$$

Процес броунівського руху $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ називається *однорідним*, якщо $\mathbf{E}\xi(t) = a(t) = at$, $D\xi(t) = b^2(t) = \sigma^2 t$, $\sigma^2 \geq 0$.

Процес $\xi(t) = w(t)$ з $a = 0$ та $b^2 = 1$ називається стандартним вінерівським процесом.

В однорідному випадку (1.4) та (1.5) записують так

$$\mathbf{P}\{\xi(t)-\xi(u) < x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-u)}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{[z-a(t-u)]^2}{2\sigma^2(t-u)}\right\} dz,$$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(u)]} = \exp\left\{i\alpha a(t-u) - \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2(t-u)\right\}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.3 (складний пуассонівський процес)**.** Нехай $\{\zeta_k\}_{k\geq 1}$ та $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ незалежні послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин, причому $\mathbf{P}\{\xi_k \neq 0\} = 1$;

$$\mathbf{P}\{\zeta_k > t\} = e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0;$$

$$\mathbf{P}\{\xi_k < x\} = F(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}.$$

Тоді $\nu(t) = \max\left\{n : \sum\limits_{k\leq n} \zeta_k \leq t\right\}$ — процес відновлення є простим однорідним пуассонівським процесом з інтенсивністю $\lambda > 0$.

Процес $\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\nu(t)} \xi_k$ $(\xi(0) = 0)$ називається узагальненим або складним однорідним пуассонівським процесом. Шляхом усереднення за розподілом $\nu(t)$ легко довести, що $(\xi(0) = 0)$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \exp\left\{t\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\alpha x} - 1\right) dF(x)\right\} = \exp\{t\lambda(\varphi(\alpha)-1)\}. \tag{1.7}$$

Приклад 1.4 (складний пуассонівський процес зі знесенням)**.** Цей процес має вигляд

$$\xi(t) = at + \sum_{k=0}^{\nu(t)} \xi_k, \quad a \text{ — довільного знаку.} \tag{1.8}$$

При $a = 0$, ми одержимо процес, розглянутий у прикладі 1.3.

Х.ф. процесу (1.8) має вигляд

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)}, \quad \psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda(\varphi(\alpha) - 1).$$

Траєкторії цього процесу є лінійно-східчастими функціями. Подібними процесами описується класичний процес ризику

$$\xi_u(t) = u + Ct - \sum_{k=0}^{\nu(t)} \xi_k, \quad u > 0, \quad C > 0, \quad \xi_k > 0, \tag{1.9}$$

u — початковий капітал, C характеризує інтенсивність надходження страхових внесків (премій), $\xi_k > 0$ — значення виплат (вимог). Процес $\xi_u(t)$ називають *резервним процесом ризику* (Reserve Risk Process). Іноді замість $\xi_u(t)$ зручніше розглядати процес

$$\zeta(t) = u - \xi_u(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k - Ct, \quad \zeta(0) = 0, \quad C > 0.$$

який називається *надлишковим процесом вимог* (Claim Surplus Process).

Приклад 1.5 (процес ризику з випадковими преміями)**.** Якщо в (1.9) замінити детерміновану лінійну функцію $C(t) = Ct$ на стохастичний процес

$$C(t) = \xi_1(t) = \sum_{k \le \nu_1(t)} \eta_k, \quad \eta_k > 0, \quad \eta_0 = 0,$$

де $\nu_1(t)$ незалежний від $\nu(t)$ простий пуассонівський процес з інтенсивністю λ_1, тоді

$$\xi_u(t) = u + C(t) - \xi(t), \quad \zeta(t) = \xi(t) - C(t).$$

Процеси $\xi_u(t)$ та $\zeta(t)$ називаються відповідно *резервними* та *надлишковими процесами ризику з випадковими преміями.*

Приклад 1.6 (цілозначні процеси Пуассона)**.** Нехай процес, розглянутий в прикладі 1.3, має цілозначні стрибки $\xi_k \neq 0$ з генератрисою $p(z) = \mathbf{E}z^{\xi_1} = \sum\limits_{k \neq 0} p_k z^k$, $|z| = 1$. Тоді процес $\xi(t) = \sum\limits_{k \le \nu(t)} \xi_k = S_{\nu(t)} = S(t)$ називається цілозначним складним пуассонівським процесом з генератрисою

$$\mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{tk(z)}, \quad k(z) = \lambda(p(z) - 1).$$

Крім цілозначних пуассонівських процесів в теорії страхування розглядаються цілозначні процеси з дискретним часом, зокрема, так звані біноміальні процеси.

Приклад 1.7 (біноміальні процеси)**.** *Складним біноміальним цілозначним процесом* називається процес

$$\xi(t) = S_{N(t)} = \sum_{k=0}^{N(t)} \xi_k, \quad \mathbf{P}\{N(t) = k\} = C_n^k p^k q^{t-k}, \quad 0 \le k \le t,$$

стрибки якого ξ_k дискретно розподілені

$$p(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1} = \sum_{k\neq 0} z^k p_k, \quad \sum_{k\neq 0} p_k = 1.$$

Легко показати, що генератриса цього процесу

$$\mathbf{E} z^{\xi(t)} = (q + pp(z))^t = (p_*(z))^t,$$

звідси випливає, що $\xi(t) \doteq S_t^* = \sum\limits_{k=0}^{t} \xi_k^*$. Це означає, що складний біноміальний процес зводиться до звичайного цілозначного випадкового блукання, крок ξ_1^* якого має генератрису

$$p_*(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1^*} = q + pp(z).$$

Біноміальний процес ризику з одиничним знесенням

$$\xi_u(t) = u + t - S_{N(t)}, \quad S_{N(t)} = \sum_{k=0}^{N(t)} \xi_k, \quad \xi_k > 0.$$

розглядається при цілих $t \ge 0$ та $u > 0$, $p(z) = \sum\limits_{z\ge 1} z^k p_k$.

Цей процес визначається генератрисою

$$\mathbf{E} z^{\xi_u(t)} = z^u \big[z p_*\big(z^{-1}\big)\big]^t, \quad u,\, t \text{ — цілі додатні.}$$

Структура процесів з н.п. та їх властивості. Для вивчення структури стохастично неперервних процесів з н.п. позначимо

$$U_\varepsilon = \{x : |x| \ge \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0; \quad I\{A\} = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \quad A \subset U_\varepsilon, \end{cases}$$

$\mathcal{B}_\varepsilon$ — σ-алгебра борелівських множин, що входить в U_ε. Число стрибків $\xi(t)$ на інтервалі $[0,t]$, які попали в $A \in \mathcal{B}_\varepsilon$ позначимо через

$$\nu(t,A) = \sum_{s \le t} I\{(\xi(s) - \xi(s-0)) \in A\}, \quad \Pi(t,A) = \mathbf{E}\nu(t,A),$$

а суму цих стрибків позначимо через

$$\xi_A(t) = \sum_{s \le t} I\{(\xi(s) - \xi(s-0)) \in A\}[\xi(s) - \xi(s-0)].$$

Процес $\xi_A(t)$ можна записати за допомогою стохастичного інтегралу по мірі $\nu(t,A)$

$$\xi_A(t) = \int_A x\nu(t,dx), \quad A \in \mathcal{B}_\varepsilon.$$

Наведемо без доведення найважливіші твердження з монографії А.В. Скорохода [110, гл. 2–5, 1964].

Теорема 1.1. *Нехай* $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $k = \overline{1,n}$, $A_k \bigcap A_r = \varnothing$, $k \ne r$. *Тоді* $\xi_A(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{A_k}(t)$; $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_A(t)} = \exp\left\{\int_A (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(t,dx)\right\}$. *Процеси* $\xi_A(t)$ *та* $\xi(t) - \xi_A(t)$ *— незалежні між собою, а процеси* $\xi_{A_k}(t)$ *та* $\xi_{A_r}(t)$ *також незалежні при* $k \ne r$.

Теорема 1.2. *Якщо* $A \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $s < t$, *то прирости* $\nu(t,A) - \nu(s,A)$ *мають пуассонівський розподіл*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\nu(t,A) - \nu(s,A) = k\} = \\ = \frac{\Pi(t,A) - \Pi(s,A)}{k!} e^{\Pi(s,A) - \Pi(t,A)}, \quad k \ge 0,\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \le 1} x^2 \Pi(t,dx) < \infty, \quad t \in [0,T]. \tag{1.11}$$

Наступні три теореми описують структуру стохастично неперервних процесів за допомогою міри $\nu(t,A)$ та центрованої міри $\widetilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - \Pi(t,A)$.

Теорема 1.3. *Якщо $\xi(t)$ — сепарабельний стохастично неперервний процес з н.п., то існує неперервний з імовірністю 1 процес $\xi_0(t)$, що не залежить від міри $\nu(t, A)$, такий, що*

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int_{|x|\le 1} x\widetilde{\nu}(t, dx) + \int_{|x|>1} x\nu(t, dx). \tag{1.12}$$

Теорема 1.4. *Для всякого стохастично неперервного процесу $\xi(t)$ з н.п. існують неперервні по t функції $a(t)$, $b^2(t)$ такі, що $b^2(t) - b^2(u) \ge 0$ при $u \le t$ і характеристична функція (х.ф.) розподілу приростів задається формулою Леві:*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(u))} = \exp\Big\{ & i\alpha(a(t) - a(u)) - \frac{1}{2}(b^2(t) - b^2(u))\alpha^2 + \\ & + \int_{|x|\le 1} (e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x)[\Pi(t, dx) - \Pi(u, dx)] + \\ & + \int_{|x|>1} (e^{i\alpha x} - 1)[\Pi(t, dx) - \Pi(u, dx)]\Big\}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Якщо позначити

$$\gamma(t) = a(t) - \int\limits_{|x|\le 1} \frac{x^3}{1+x^2}\Pi(t, dx) + \int\limits_{|x|>1} \frac{x}{1+x^2}\Pi(t, dx),$$

тоді з формули (1.13) одержується формула Леві–Хінчина для х.ф. $\xi(t) - \xi(0)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(0))} = \exp\{ & i\alpha\gamma(t) - \frac{\alpha^2 b^2(t)}{2} + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right)\Pi(t, dx)\}, \quad t \ge 0.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Теорема 1.5. *Для того, щоб стохастично неперервний процес $\xi(t)$ з н.п. був однорідним, необхідно й достатньо, щоб у формулі (1.13) $a(t) = at$, $b^2(t) = \sigma^2 t$, $b \ge 0$, $\Pi(t, A) = t\Pi(A)$, де міра $\Pi(A)$ задовольняє умову*

$$\int_{0<|x|\le 1} x^2\Pi(dx) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\le 1} x^2\Pi(dx) < \infty. \tag{1.15}$$

Х.ф. однорідного процесу $\xi(t)$, $t \geq 0$ *визначається співвідношенням (якщо* $\xi(0) \neq 0$)

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(0)}\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(0))},$$
$$\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(0))} = e^{t\psi(\alpha)}, \quad t \geq 0, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{1.16}$$

де функція $\psi(\alpha)$, *що називається кумулянтою процесу* $\xi(t)$, *має вигляд*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x I\{|x| \leq 1\})\Pi(dx). \tag{1.17}$$

Властивості процесу $\xi(t)$ як функцій часу описуються в теоремах 1.6–1.8, доведення яких можна знайти в [110, гл. 4, § 17, 1964].

Теорема 1.6. *Для того щоб сепарабельний стохастично неперервний процес з н.п.* $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, *був з імовірністю* 1 *кусково-сталим (східчастим) необхідно й достатньо, щоб міра* $\Pi(t, A)$ *задовольняла умову* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi(T, U_\varepsilon) < \infty$, *а х.ф.* $\xi(t) - \xi(0)$ *мала вигляд*

$$\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(0))} = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(t, dx)\right\}. \tag{1.18}$$

Теорема 1.7. *Для того, щоб сепарабельний стохастично неперервний процес* $\xi(t)$ *з н.п. був з імовірністю* 1 *неспадною функцією часу необхідно й достатньо, щоб для* $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(0))} = \exp\left\{i\alpha a(t) + \int_{0}^{\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(t, dx)\right\}, \tag{1.19}$$

де $a(t)$ — *неспадна функція, а міра* $\Pi(t, A)$ *задовольняє умову*

$$\int_0^1 x\Pi(T, dx) < \infty.$$

Теорема 1.8. *Для того щоб сепарабельний стохастично неперервний процес з н.п.* $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ *з імовірністю* 1 *мав на* $[0, T]$ *обмежену варіацію необхідно й достатньо, щоб х.ф. приросту* $\xi(t) - \xi(0)$ *мала вигляд*

$$\mathbf{E}e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(0)]} = \exp\left\{i\alpha a(t) + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(t, dx)\right\}, \tag{1.20}$$

а для $a(t)$ *та* $\Pi(t, A)$ *виконувались умови*

$$\operatorname*{var}_{0\le t\le T} a(t) < \infty, \quad \int_{|x|\le 1} |x|\Pi(t, dx) < \infty. \tag{1.21}$$

При виконанні цих умов процес $\zeta(t) = \operatorname*{var}_{0\le u\le t} \xi(u)$ *буде також процесом з н.п. з х.ф.*

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(t)} = \exp\left\{i\alpha\gamma(t) + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)G(t, dx)\right\}, \tag{1.22}$$

де $\gamma(t) = \operatorname*{var}_{0\le u\le t} a(u)$, $G(t, (c, d]) = \Pi(t, U_{(c,d]})$, $U_{(c,d]}$ *— множина тих* x, *для яких* $c < |x| \le d$.

Зауважимо, що для однорідного випадку східчасті (косо-східчасті) процеси $\{\xi(t),\ t \ge 0,\ \xi(0) = 0\}$ згідно з теоремою 1.6 мають х.ф. (див. (1.18))

$$\varphi_t(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)},$$

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \quad a = 0 \ \ (a \ne 0), \tag{1.23}$$

причому $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dx) < \infty$. Якщо позначити $dF(x) = \lambda^{-1}\Pi(dx)$, то з (1.23) випливає х.ф. (1.8) для узагальненого однорідного пуассонівського процесу зі знесенням.

Однорідні монотонно неспадні процеси з н.п. згідно з теоремою 1.7 мають х.ф. (див. (1.19))

$$\varphi_t(\alpha) = e^{t\psi(\alpha)}, \quad \psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx),$$

$$a > 0, \quad \int_0^1 x\Pi(dx) < \infty. \tag{1.24}$$

Однорідний процес $\xi(t)$ з н.п. має обмежену варіацію згідно з теоремою 1.8 тоді і тільки тоді, коли його кумулянта має вигляд

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \quad |a| < \infty, \tag{1.25}$$

$$\int_{0<|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty.$$

При умові (1.25) процес $\zeta(t) = \operatorname*{var}_{0\le u\le t}\xi(u)$ є також однорідним процесом з обмеженою варіацією, а його х.ф. (згідно з (1.22)) має вигляд

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(t)} = \exp\left\{t\left[i\alpha|a| + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)G(dx)\right]\right\}, \tag{1.26}$$

$G\{(c,d]\} = \Pi\{U_{(c,d]}\}$, $U_{(c,d]} = \{x:\, c<|x|\le d\}$.

Згідно з (1.24) $\zeta(t)$ — монотонно неспадний однорідний процес з н.п.

Для процесів з н.п., як і для сум незалежних випадкових величин із спільним розподілом, має місце посилений закон великих чисел.

Теорема 1.9. *Якщо для процесу $\xi(t)$ з н.п. існує $m = \mathbf{E}\xi(1)$ (можливо $m = \pm\infty$), тоді $\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty}\xi(t)t^{-1} = m\} = 1$. Якщо однорідний процес $\xi(t)$ має скінченні моменти перших двох порядків, то ці моменти безпосередньо обчислюються так:*

$$\mathbf{E}\xi(1) = \frac{\partial}{\partial(i\alpha)}\psi(\alpha)\Big|_{i\alpha=0}, \quad D\xi(1) = \frac{\partial^2}{\partial(i\alpha)^2}\psi(\alpha)\Big|_{i\alpha=0}.$$

Означення 1.3. Однорідний процес $\{\xi(t),\ t\ge 0\}$ з н.п. називається *стійким з показником стійкості* $\alpha_*\in(0;2)$, якщо для його кумулянти у формі Леві–Хінчина (див. (1.14)) $\gamma(t)=\gamma t$, $\Pi(t,dx) = t\Pi(dx)$

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma + ⨍_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right)\Pi(dx), \tag{1.27}$$

де $⨍$ — інтеграл з рискою означає, що $\{0\}$ виключено з області інтегрування, а спектральна міра стрибків має вигляд

$$\begin{aligned}&\Pi(dx) = c_1\frac{dx}{|x|^{\alpha_*+1}}I\{x<0\} + c_2\frac{dx}{x^{\alpha_*+1}}I\{x>0\},\\ &c_{1,2}\ge 0, \quad c_1+c_2>0.\end{aligned}$$

Якщо позначити

$$M(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad x<0; \quad N(x) = -\int_x^\infty \Pi(dy), \quad x>0,$$

то з (1.27) випливає, що

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right) dM(x) + \\ + \int_{0}^{\infty} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right) dN(x). \tag{1.28}$$

Однорідний процес броунівського руху $\xi_0(t) = \gamma t + \sigma w(t)$, $\sigma > 0$ називають стійким процесом з показником $\alpha_* = 2$ та кумулянтою $\psi_*(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2$.

Після відповідних перетворень комплекснозначних інтегралів у (1.27) та введення позначень $c = \alpha_*^{-1}\Gamma(1-\alpha_*)(c_1+c_2)\cos(\pi\alpha_*/2)$ при $\alpha_* \neq 1$, $c = \frac{\pi(c_1+c_2)}{2}$ при $\alpha_* = 1$, $\beta = \frac{c_2-c_1}{c_1+c_2}$, $|\beta| \leq 1$, одержується спрощений запис кумулянти $(0 < \alpha_* < 2)$

$$\psi(\alpha) = i\alpha\bar{\gamma} - c|\alpha|^{\alpha_*}\left(1 - \beta\frac{\alpha}{|\alpha|}\omega(\alpha,\alpha_*)\right), \tag{1.29}$$

де $\bar{\gamma} = \gamma + c_1 I^- + c_2 I^+, \alpha^* \neq 1$,

$$\omega(\alpha,\alpha_*) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}\alpha_*, & \alpha_* \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|\alpha|, & \alpha_* = 1, \end{cases}$$

$$I^- = \int_{-\infty}^{0} \frac{|x|dx}{(1+x^2)|x|^{\alpha_*+1}}, \quad I^+ = \int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)x^{\alpha_*+1}}.$$

Якщо $\alpha_* = 1$, то при $\beta = 0$ $(c_1 = c_2)$ стійкий процес $\xi(t)$ з кумулянтою $\psi_{0,1}(\alpha) = i\alpha\bar{\gamma} - \pi c_1|\alpha|$, $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi_{0,1}(\alpha)}$, називається процесом Коші. Якщо позначити $k = \pi c_1$, то розподіл $\xi(1)$ має щільність розподілу $(-\infty < x < \infty)$

$$f_{1,0}(x) = F'_{1,0}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{k}{k^2 + (x-\bar{\gamma})^2}, \\ F_{1,0}(x) = \mathbf{P}\{\xi(1) < x\} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-\bar{\gamma}}{k}. \tag{1.30}$$

Для симетричного процесу Коші $\mathring{\xi}(t)$ $(\bar{\gamma} = 0)$ $\mathbf{E}e^{i\alpha\mathring{\xi}(t)} = e^{-kt|\alpha|}$. Згідно (1.30) при $\bar{\gamma} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\mathring{\xi}(t) < x\} = \frac{kt}{\pi(k^2t^2 + x^2)},$$

$$\mathbf{P}\{\overset{\circ}{\xi}(t) < x\} = \frac{kt}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{k^2t^2 + x^2}. \tag{1.31}$$

Для несиметричного процесу Коші ($\bar{\gamma} \neq 0$)

$$\xi(t) = \xi^0(t) + \bar{\gamma}t, \quad \psi(\alpha) = i\alpha\bar{\gamma} - k|\alpha|^{\alpha_*},$$
$$\mathbf{P}\{\xi(t) < x\} = \mathbf{P}\{\overset{\circ}{\xi}(t) < x - \bar{\gamma}t\} = \frac{kt}{\pi} \int_{-\infty}^{x-\bar{\gamma}t} \frac{dy}{k^2t^2 + y^2}.$$

Таблиця характеристик кумулянти $\psi(\alpha)$ (див. (1.28) і відповідну таблицю в [22]) стійких процесів виглядає так: 2-й рядок таблиці відповідає $\alpha_* \in (0, 2)$, останній рядок — $\alpha_* = 2$.

α_*	$\Pi(dx) = dM(x)$, $x < 0$	$\Pi(dx) = dN(x)$, $x > 0$	σ	$c_{1,2}$
$0 < \alpha_* < 2$	$c_1\|x\|^{-1-\alpha_*}dx$	$c_2x^{-1-\alpha_*}dx$	0	$c_{1,2} \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$
$\alpha_* = 2$	0	0	>0	$c_{1,2} = 0$

Для довільного однорідного процесу $\xi(t)$ ($t \geq 0, \xi(0) = 0$) з незалежними приростами й обмеженою дисперсією $\mathbf{D}\xi(1) < \infty$ кумулянту $\psi(\alpha)$ можна записати у вигляді

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x)x^{-2}d\mathcal{K}(x), \tag{1.32}$$

де $\mathcal{K}(x)$ монотонно неспадна неперервна справа, обмежена функція ($\mathcal{K}(-\infty) = 0$, $\mathcal{K}(+\infty) < \infty$) з можливим розривом в 0 $\mathcal{K}(+0) - \mathcal{K}(-0) = \sigma^2 \geq 0$,

$$\mathbf{D}\xi(1) = \psi''_{i\alpha}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(+\infty) = \underset{x\in\mathbf{R}}{\operatorname{var}} \mathcal{K}(x).$$

Формула (1.32) називається формулою Колмогорова.

1.2 Неперервність основних функціоналів в топології Скорохода

Нехай $\xi(t)$ — однорідний процес з н.п. Крім екстремальних значень

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0\leq u\leq t}(\inf)\xi(u), \quad \xi^{\pm} = \sup_{0\leq t<\infty}(\inf)\xi(t), \tag{1.33}$$

введемо позначення момента першого виходу за рівень x та перестрибкових функціоналів

$$\begin{aligned}
&\tau^+(x) = \inf\{t : \xi(t) > x\}, \quad x > 0;\\
&\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x \text{ — 1-ий перестрибок через } x > 0, \qquad (1.34)\\
&\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0) \text{ — 1-ий недострибок через } x > 0,\\
&\gamma_x^+(x) = \gamma^+(x) + \gamma_+(x) \text{ — 1-ий стрибок, що накриває } x > 0.
\end{aligned}$$

Будем користуватись загальним позначенням $f_T(\xi(\cdot))$ довільного функціоналу від процесу $\{\xi(t),\ t \in [0,T]\}$ типу (1.33), (1.34), чи то адитивного типу або типу усереднення

$$\int_t^T f(x + \xi(s) - \xi(t))ds, \quad U_t(s,x) = \mathbf{E}f(x + \xi(s) - \xi(t)). \quad (1.35)$$

При дослідженні $f_T(\xi(\cdot))$ природньо розглянути ці функціонали спочатку для найпростіших процесів $\{\xi(t),\ t \in [0,T]\}$, скажімо для східчастих або лінійно-східчастих процесів. Для розподілу функціоналів (1.33), (1.34) таких процесів, легко вивести інтегро-диференціальні рівняння, які визначають шуканий розподіл. У випадку загального процесу $\xi(t)$ можна підібрати апроксимуючу послідовність $\xi_n(t)$ — східчастих або лінійно-східчастих процесів, для яких ми знаємо як шукати розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$.

Зауважимо, що вибірковий простір процесу з н.п. $\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ є простором $D_{[0,T]}$ неперервних справа функцій зі скінченними лівосторонніми границями (без розривів 2-го роду) на $[0,T]$. Виникає питання, коли розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$ збігається до розподілу $f_T(\xi(\cdot))$ $(n \to \infty)$?

Щоб одержати відповідь на поставлене питання, вводиться (див. [20, гл. IX, § 5]) в просторі $D_{[0,T]}$ метрика, дещо послаблена в порівнянні з класичною рівномірною метрикою

$$\rho_U(x,y) = \sup_{0 \le t \le T} |x(t) - y(t)|.$$

Для означення нової метрики розглянемо Λ — сукупність всіх неперервних монотонно зростаючих на $[0,T]$ числових функцій $\lambda(t)$ таких, що $\lambda(0) = 0$, $\lambda(T) = T$. Для всіх $\lambda(t) \in \Lambda$ існує $\lambda^{-1}(t) \in \Lambda$; якщо $\lambda_{1,2}(t) \in \Lambda$, то $\lambda_1(\lambda_2(t)) \in \Lambda$, $\lambda_2(\lambda_1(t)) \in \Lambda$.

Позначимо для $x(t)$, $y(t)$ з $D_{[0,T]}$ через

$$\rho_D(x,y) = \inf_{\Lambda} \big[\sup_{0\le t\le T} |x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_{0\le t\le T} |t-\lambda(t)|\big], \tag{1.36}$$

ρ_D визначає метрику в $D_{[0,T]}$ (ρ_D визначає J-топологію Скорохода в $D_{[0,T]}$). Згідно з результатами, одержаними в [19] (див. т. I, гл. VI, § 5), має місце твердження.

Теорема 1.10. *Нехай $\xi_n(t)$ — послідовність процесів, що апроксимують процес $\xi(t)$ ($t \in [0,T]$). Нехай $f_T(\xi(\cdot))$ функціонал на $D_{[0,T]}$ майже скрізь неперервний в топології Скорохода відносно міри $\mu_{[0,T]}$, яка відповідає процесу $\xi(t)$, ($t \in [0,T]$). Тоді розподіл функціоналу $f_T(\xi_n(\cdot))$ збігається при $n \to \infty$ до розподілу функціоналу $f_T(\xi(\cdot))$.*

Згідно з теоремою 3 (див. [19], т. II, гл. IV, § 2, с. 444) пара функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ є неперервними в топології Скорохода функціоналами, тому має місце твердження.

Теорема 1.11. *Якщо $\xi(t)$ — довільний однорідний процес з н.п. і кумулянтою $\psi(\alpha) = t^{-1}\ln \mathbf{E} e^{i\alpha\xi(t)}$, $\xi_n(t)$ — послідовність східчастих однорідних процесів з н.п. і відповідними кумулянтами $\psi_n(\alpha)$ такими, що $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} e^{i\alpha\xi_n(t)} = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi(t)}$ ($\lim_{n\to\infty} \psi_n(\alpha) = \psi(\alpha)$), тоді для всіх $x>0$, $s>0$, $u>0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[e^{-s\tau_n^+(x) - u\gamma_n^+(x)},\ \tau_n^+(x)<\infty\big] = \\ = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma^+(x)},\ \tau^+(x)<\infty\big]. \tag{1.37}$$

Аналогічно для $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma_x^+\}$ має місце співвідношення для всіх $x>0$, $s>0$, $u>0$, $v>0$, $\mu>0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[e^{-s\tau_n^+(x) - u\gamma_n^+(x) - v\gamma_+^{(n)}(x) - \mu\gamma_{x,n}^+},\ \tau_n^+(x)<\infty\big] = \\ = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma^+(x) - v\gamma_+(x) - \mu\gamma_x^+},\ \tau^+(x)<\infty\big]. \tag{1.38}$$

Якщо наближуваний процес $\xi(t)$ не має вінерівської компоненти ($\sigma^2 = 0$), то при виборі апроксимуючої послідовності східчастих або лінійно-східчастих процесів $\xi_n(t)$ достатньо вибрати відповідну послідовність кумулянт ($\mathbf{E}\exp\{i\alpha\xi_n(t)\} = \exp\{t\psi_n(\alpha)\}$)

$$\psi_n(\alpha) = i\alpha a_n + \int_{|x|>n^{-1}} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx),$$

$$a_n = a - \int_{n^{-1}<|x|\le 1} x\Pi(dx).$$

У противному разі ($\sigma^2 > 0$) до $\psi_n(\alpha)$ слід додати $\psi_n^0(\alpha)$ — кумулянту процесу $\xi_n^0(t)$, що апроксимує $\xi_0(t) = \sigma w(t)$:

$$\psi_n^0(\alpha) = \int_{|x|\le \sigma n^{-1}} (e^{i\alpha x} - 1)d\Pi_n^0(x),$$

$$\Pi_n^0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}n^2, & -\dfrac{\sigma}{n} \le x < 0, \\ -\dfrac{1}{2}n^2, & 0 < x \le \dfrac{\sigma}{n}. \end{cases}$$

Легко переконатись у тому, що

$$\lim_{n\to\infty} [\psi_n(\alpha) + \psi_n^0(\alpha)] = \psi(\alpha), \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_n(t)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{t(\psi_n(\alpha)+\psi_n^0(\alpha))} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)}.$$

Для класичного процесу ризику (див. (1.9) з $u = 0$, $a > 0$) лінійна функція премій $C(t) = at$ апроксимується східчастим пуассонівським процесом з параметром $\lambda_n = an$ ($n > 0$) і кумулянтою

$$\psi_n(\alpha) = \lambda_n \left(\frac{n}{n - i\alpha} - 1 \right) = an \frac{i\alpha}{n - i\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ai\alpha.$$

Нехай $f_T(x(\cdot))$ — довільний неперервний в топології Скорохода функціонал в $D_{[0,T]}$, $\rho_D(f_T(x_n(\cdot)),\ f_T(x(\cdot))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $f_T(\xi_n(\cdot))$ — відповідний функціонал процесу $\xi_n(t)$, $t \in [0,T]$, з кумулянтою $\psi_n(\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\alpha)$. Тоді при $n \to \infty$ розподіл $f_T(\xi_n(\cdot))$ збігається до розподілу $f_T(\xi(\cdot))$.

Аналогічне твердження має місце для функціоналів процесу $\{\xi(t), t \ge 0,\ \xi(0) = 0\}$, пов'язаних з досягненням від'ємного рівня:

$$\begin{aligned} &\tau^-(x) = \inf\{t : \xi(t) < x\}, \quad x < 0; \\ &\gamma^-(x) = \xi(\tau^-(x)) - x; \quad \gamma_-(x) = x - \xi(\tau^-(x) - 0); \\ &\gamma_x^-(x) = \xi(\tau^-(x)) - \xi(\tau^-(x) - 0), \quad x < 0. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Функціонали (1.34) називають верхніми межовими функціоналами, а функціонали (1.39) — нижніми.

1.3 Локально однорідні процеси з н.п. та інтегро-диференціальні рівняння для їх функціоналів

Означення 1.4. Процес $\{\xi(t), t \geq 0\}$ з н.п., х.ф. приростів якого визначається формулою(1.13), називається локально однорідним, якщо його характеристики $a(t)$, $b^2(t)$, $\Pi(t, A)$ абсолютно неперервні, тобто існують вимірні й локально інтегровані по t функції $a_*(t)$, $b_*^2(t)$, $\Pi_*(t, A)$ такі, що

$$a(t) = \int_0^t a_*(s)ds, \quad b^2(t) = \int_0^t b_*^2(s)ds,$$
$$\Pi(t, A) = \int_0^t \Pi_*(s, A)ds. \tag{1.40}$$

Х.ф. такого процесу у формі Леві записується так

$$\mathbf{E}e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(0)]} = \exp\left\{\int_0^t \left[i\alpha a_*(s) - \frac{1}{2}b_*^2(s)\alpha^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{x\neq 0}(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x I\{|x| \leq 1\})\Pi_*(s, dx)\right] ds\right\}. \tag{1.41}$$

Для функціоналів типу усереднення (див. (1.35))

$$U_t(s, x) = \mathbf{E}f(x + \xi(t) - \xi(s)) \quad (0 < s \leq t) \tag{1.42}$$

має місце твердження (див. [110, § 3.4, с. 197, 1986]).

Теорема 1.12. *Якщо для локально однорідного процесу* $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ *характеристики* $a_*(t)$, $b_*^2(t)$, $\Pi_*(t, A)$ *неперервні по* t,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 \Pi_*(s, dx) = 0, \quad f(x) \in C^2(\mathbf{R}),$$

тоді $U_t(s, x)$ *задовольняє інтегро-диференціальне рівняння* $(s \leq t)$ *з граничною умовою* (*див.* (3.56) *в* [110, 1986 р.])

$$\frac{\partial}{\partial s}U_t(s, x) + \mathbf{L}'_s U_t(s, x) = 0,$$
$$\lim_{s \uparrow t} U_t(s, x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.43}$$

$$\mathbf{L}'_s\varphi(x) = a_*(t)\varphi'(x) + \frac{1}{2}b_*^2(t)\varphi''(x) + \tag{1.44}$$
$$+ \int_{y\neq 0}[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x)I\{|x| \le 1\}]\Pi_*(t, dy).$$

Аналогічна теорема має місце у випадку звичайного однорідного процесу $\{\xi(t),\ t \ge 0\}$ для $U(t,x) = \mathbf{E}f(x+\xi(t)) = \mathbf{E}f(\xi_x(t))$.

Теорема 1.13. *Якщо $\xi(t)$ — звичайний однорідний процес з н.п. з характеристиками $a_*(t) = at$, $b_*^2(t) = \sigma^2 t$, $\Pi_*(t,dx) = t\Pi(dx)$, тоді $U(t,x)$ задовольняє рівняння з відповідною граничною умовою*

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \mathbf{L}'U(t,x) = 0, \quad U(0,x) = f(x), \tag{1.45}$$
$$\mathbf{L}'\varphi(x) = a\varphi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(x) +$$
$$+ \int_{y\neq 0}[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x)I\{|x| \le 1\}]\Pi(dy). \tag{1.46}$$

Для вивчення розподілу функціоналів адитивного (інтегрального) типу від локально однорідного процесу $\xi(t)$ $(t \in [0,T])$ з характерстиками $a_*(t)$, $b_*^2(t)$, $\Pi_*(t,A)$, $z_T(t,x) = \int_t^T g(s, \xi(s) - \xi(t) + x)ds$, $g(s,x)$, $s \in [0,T]$, $x \in \mathbf{R}$, зручно користуватись позначенням х.ф.

$$V_\alpha^T(t,x) = \mathbf{E}\exp\left\{i\alpha\int_t^T g(s, \xi(s) - \xi(t) + x)ds\right\}. \tag{1.47}$$

Має місце твердження (див. [110, § 3.4, с. 201, 1986]).

Теорема 1.14. *Якщо $g(s,x)$ — обмежена функція по обох змінних, що має неперервні обмежені похідні g'_x, g''_{xx}, то при $t < T$ х.ф. $V_\alpha(t,x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial}{\partial t}V_\alpha^T(t,x) + \mathbf{L}'_t V_\alpha^T(t,x) + i\alpha g(t,x)V_\alpha^T(t,x) = 0, \tag{1.48}$$

з умовою $V_\alpha^T(T,x) = 1$ і оператором $\mathbf{L}'_t$ в (1.44).

Для однорідних процесів з н.п. природно розглядати адитивні функціонали з функціями $g(x) \in C^2(\mathbf{R})$

$$z(t,x) = \int_0^t g(x+\xi(s))ds,$$

$$U_\alpha(t,x) = \mathbf{E}\exp\left\{i\alpha\int_0^t g(x+\xi(s))ds\right\}.$$

Зокрема для $\xi(t) = w(t)$ згідно з (1.46) такі х.ф. задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}U_\alpha(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_\alpha(t,x) + i\alpha g(x)U_\alpha(t,x), \qquad (1.49)$$
$$U_\alpha(0,x) = 1.$$

Після перетворення Лапласа для $U(\alpha,s,x) = \int_0^\infty e^{-st}U_\alpha(t,x)dt$ з (1.49) випливає рівняння

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\alpha,s,x) + [i\alpha g(x) - s]U(\alpha,s,x) = -1. \qquad (1.50)$$

Доцільність розгляду функціоналів $z(t,x)$ для частинного випадку $g(x) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} x)$ виправдовується хоча би тим, що

$$z(t,x)\big|_{x=0} = \int_0^t g(w(s)+x)ds\Big|_{x=0} = \int_0^t I\{w(s)>0\}ds$$

визначає час перебування $w(\cdot)$ над 0 на інтервалі $[0,t]$.

Наслідок 1.1. *Якщо $g(x) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} x)$, тоді для вінерівського процесу $w(t)$ інтегральне перетворення $U(\alpha,s,x)$ задовольняє диференціальні рівняння*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\alpha,s,x) - sU(\alpha,s,x) = -1, \quad x<0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\alpha,s,x) + (i\alpha - s)U(\alpha,s,x) = -1, \quad x>0, \qquad (1.51)$$

розв'язком яких є пара функцій

$$U(\alpha,s,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2-i\alpha s}} - \frac{1}{s}\right)e^{\sqrt{2s}\,x} + \frac{1}{s}, \quad x<0,$$
$$U(\alpha,s,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2-i\alpha s}} - \frac{1}{s-i\alpha}\right)e^{\sqrt{2s-2i\alpha}\,x} + \frac{1}{s-i\alpha}, \quad x>0.$$

З наслідку випливає, що при $x = 0$ $U(\alpha, s, 0) = (s^2 - i\alpha s)^{-\frac{1}{2}}$. А після обернення по s визначається х.ф. $z(t, 0)$ (див. далі табл. (1.97))

$$U_\alpha(t, 0) = \mathbf{E}e^{i\alpha z(t,0)} = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{i\alpha y} d\arcsin\sqrt{\frac{y}{t}} = \\ = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{i\alpha y}\frac{dy}{\sqrt{t^2 - y^2}}.$$

Отже розподіл $z(t, 0)$ часу перебування $w(u)$ над 0, $u \in [0, t]$ визначається законом арксинуса

$$\mathbf{P}\{z(t, 0) < y\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{y}{t}} \quad (0 \le y \le t). \tag{1.52}$$

Зауважимо, що локально однорідні процеси $\xi(t)$ з характеристиками $a_*(t)$, $b_*^2(t)$, $\Pi_*(t, A)$ є марковськими. Тому рівняння (1.43) та (1.45) з відповідним оператором $\mathbf{L}'_s$ в (1.44) та $\mathbf{L}'$ в (1.46) є рівняннями оберненого типу. Розподіл однорідного процесу $\xi(t)$ з х.ф. (1.41) з $b_*^2(t) = \sigma^2 > 0$, $a_*(t) = a$, $\Pi_*(t, dx) = \Pi(dx)$ $P_t(x) = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\}$, $x \in \mathbf{R}$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння (прямого типу)

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x) - \mathbf{L}P_t(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad P_0(x) = I\{x > 0\},$$
$$\mathbf{L}\varphi(x) = -a\varphi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(x) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x - y) - \varphi(x) + I\{|y| \le 1\}\varphi'(x)]\Pi(dx). \tag{1.53}$$

З (1.53) після перетворення Лапласа–Карсона для

$$P\{s, x\} = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x\} = s\int_0^\infty e^{-st}P_t(x)dt$$

випливає рівняння

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{L})P(s, x) = sI\{x > 0\}, \quad x \ne 0. \tag{1.54}$$

Аналогічні рівняння з відповідними правими частинами в (1.54) виводяться для розподілу різних межових функціоналів. Якщо застосувати до (1.54) перетворення Фур'є–Стільт'єса, то для $\varphi(s, \alpha)$ одержимо рівняння

$$(s - \psi(\alpha))\varphi(s, \alpha) = s. \tag{1.55}$$

Порівняння лівих частин (1.54) та (1.55) дає підставу для того, щоб кумулянту $\psi(\alpha)$ назвати символом інтегро-диференціального оператора $\mathbf{L}$ в (1.53). Похідна від $P(s,x)$ (навіть при умові $\sigma = 0$) у рівнянні (1.54) існує при всіх $x \neq 0$, якщо стрибки процесу $\xi(t)$ неперервно розподілені.

Довільний процес $\{\xi(t),\ t \in [0,T]\}$ з н.п., що розглядається на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, є також і марковським процесом.

Означення 1.5. Потік монотонно зростаючих неперервних справа σ-алгебр $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $(s < t)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+0} = \bigcap\limits_{u>t} \mathcal{F}_u$ називається фільтрацією.

Позначимо $\mathcal{F}_\infty = \sigma\big(\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\big)$ — мінімальну σ-алгебру, породжену потоком $\mathbf{F}$. Четвірка $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}\}$ називається оснащеним імовірнісним простором.

Означення 1.6. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ імовірнісний простір з фільтрацією $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $0 \leq s < t$. Тоді процес $\xi(t)$, заданий на оснащеному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ називається мартингалом (суб-, супермартингалом), якщо

1) $\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty, \forall\, t \geq 0$,

2) $\mathbf{E}[\xi(t)|\mathcal{F}_s] = \xi(s)$ $(\geq \xi(s), \leq \xi(s))$ для будь-яких $s \leq t$.

Прикладом мартингалу (суб-, супермартингалу) служить процес броунівського руху $\xi(t) = w(t) + at$, оскільки

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi(t)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[w(s) + (w(t) - w(s)) + at|\mathcal{F}_s] = \\ = \xi(s) + a(t-s) = \xi(s)\end{aligned}$$

лише при $a = 0$, $(< \xi(s)$, при $a < 0$; $> \xi(s)$, при $a > 0)$.

Означення 1.7. Невід'ємна випадкова величина $\tau = \tau(\omega)$ називається марковським моментом відносно $\mathbf{F}$, якщо для довільного $t > 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Кожному марковському моменту (моменту зупинки) τ відповідає σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, що складається з усіх подій $A \in \mathcal{F}_\infty$, для яких

$$A \bigcap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Означення 1.8. $\mathcal{F}_\tau$ називається σ-алгеброю, породженою марковським моментом τ. Якщо для всякої обмеженої дійснозначної вимірної функції $f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ і для довільного марковського моменту $\tau = \tau(\omega)$ виконується співвідношення майже напевно за мірою $\mathbf{P}$

$$\mathbf{E}[f(\xi(t+\tau))|\mathcal{F}_\tau] = \mathbf{E}[f(\xi(t))|\xi(\tau)](\operatorname{mod} \mathbf{P}),$$

то процес $\xi(t)$ називається строго марковським.

Зауважимо, що для узагальненого пуассонівського процесу $\xi(t)$ момент 1-го стрибка ζ_1 ($\mathbf{P}\{\zeta_1 > t\} = e^{-\lambda t}$, λ — інтенсивність стрибків $\xi(t)$), момент першого виходу за рівень x $\tau^+(x)$ $(x > 0)$ є марковським моментом. Тому в силу однорідності таких процесів легко складаються стохастичні співвідношення для межових функціоналів, на основі яких виводяться рівняння для розподілу цих функціоналів. Як буде видно далі це будуть інтегро-диференціальні рівняння типу (1.53) та (1.54) з оператором $\mathbf{L}$, символом якого служить кумулянта $\psi(\alpha)$ відповідного процесу $\xi(t)$.

1.4 Поняття про канонічну та безмежно подільну факторизацію

Інтегро-диференціальні рівняння з похідними по t і по x, які виводяться для розподілу межових функціоналів, після інтегрального перетворення відносно t зводяться до інтегральних рівнянь, якщо $a = \sigma = 0$. Так само як і інтегро-диференціальні рівняння в § 1.3. після перетворення вони містять похідні лише по x та інтегральну частину типу згортки. Якщо $a = \sigma^2 = 0$, тоді ці рівняння при відповідних умовах на від'ємній півосі зводяться до інтегральних рівнянь у згортках на додатній півосі. Теорія таких рівнянь розвинута М.Г. Крейном на основі ідеї факторизації Вінера–Гопфа в огляді [92] та в монографіях [18, 101] (див. також [98, 156, 173, 194, 207, 208]).

Нагадаємо деякі означення й позначення з огляду [92]. Вони стосуються інтегральних перетворень розв'язків інтегральних рівнянь типу згортки. Ними ми будемо користуватись і при розв'язуванні інтегро-диференціальних рівнянь для розподілу функціоналів.

Нехай L — лінійне нормоване кільце дійсних або комплекснозначних вимірних функцій, абсолютно інтегровних на $\mathbf{R}$,

$$L = \left\{ f(x),\ x \in \mathbf{R} : \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}, \quad \|f\|_L = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx,$$

з операцією "множення"

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Позначимо для функцій на $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{R}^- = (-\infty, 0]$ підкільця

$$L_{\pm} = \left\{ f(x), x \in \mathbf{R}^{\pm} : \int_{\mathbf{R}^{\pm}} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Введемо кільце інтегральних перетворень

$$\mathcal{L} =: \left\{ \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx,\ f(x) \in L \right\}$$

з операцією множення $\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha) \in \mathcal{L}$; $\varphi_{1,2}(\alpha) \in \mathcal{L}$. Функції $\varphi(\alpha) \in \mathcal{L}$ неперервні на замкненій прямій $\mathbf{R} = \{-\infty; +\infty\}$ і $\varphi(\pm\infty) = 0$.

Позначимо розширення кільця $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^0 = \left\{ \varphi_c(\alpha) = c + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx \right\}, \quad c \neq 0.$$

Відповідно підкільця та їх розширення будемо позначати

$$\mathcal{L}_{\pm} = \left\{ \varphi(\alpha) = \int_{\mathbf{R}^{\pm}} e^{i\alpha x} f(x) dx,\ f \in L_{\pm} \right\},$$
$$\mathcal{L}^0_{\pm} = \left\{ \varphi(\alpha) = c + \int_{\mathbf{R}^{\pm}} e^{i\alpha x} f(x) dx \right\}, \quad c \neq 0.$$

Операція проектування для $\varphi_c(\alpha) \in \mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^0_{\pm}$ визначається співвідношенням

$$[\varphi_c(\alpha)]^0_+ = \left[c + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \right]^0_+ = c + \int_0^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$[\varphi_c(\alpha)]_-^0 = c + \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{i\alpha x}dx$$

і відповідно операція проектування на $\mathcal{L}_\pm$

$$[\varphi_c(\alpha)]_\pm = \left[c + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx\right]_\pm = \int_{R_\pm} e^{i\alpha x} f(x)dx.$$

Справедливе твердження.

Лема 1.1 (лема Вінера)**.** *Якщо $\varphi_c(\alpha) \in \mathcal{L}_+^0$ відмінна від нуля на замкненій прямій* $\mathbf{R}$ *і не має нулів у верхній півплощині* $\operatorname{Im}\alpha > 0$, *тоді існує $c' \neq 0$ і $G(x) \in L_+$ такі, що*

$$(\varphi_c(\alpha))^{-1} = c' + \int_{0}^{+\infty} e^{i\alpha x} G(x)dx \in \mathcal{L}_+^0. \tag{1.56}$$

Означення 1.9. Нехай $\varphi(\alpha)$ неперервна на $\operatorname{Im}\alpha = 0$ комплекснозначна функція, $\varphi(\alpha) \in \mathcal{L}^0$. Кажуть, що $\varphi(\alpha)$ допускає *канонічну факторизацію* на осі $\operatorname{Im}\alpha = 0$, якщо виконується співвідношення

$$\varphi(\alpha) = \varphi_+(\alpha)\varphi_-(\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0,\ \varphi_\pm(\alpha) \in \mathcal{L}_\pm^0, \tag{1.57}$$

де $\varphi_\pm(\alpha)$ аналітичні при $\pm\operatorname{Im}\alpha > 0$, неперервні і $\varphi_\pm(\alpha) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\alpha = 0$; $\varphi_\pm(\alpha)$ називають компонентами факторизації.

Теорема 1.15. *Функція $\varphi(\alpha) \in \mathcal{L}^0$ допускає канонічну факторизацію тоді і тільки тоді, коли:*

a) $\varphi(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in \mathbf{R} = \{-\infty, +\infty\}$;

b) $\operatorname{ind}\varphi(\alpha) =: \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\arg\varphi(\alpha) = 0.$

Означення 1.10. Нехай $\varphi(\alpha)$ — характеристична функція (х.ф.) безмежно подільної випадкової величини з функцією розподілу $F(x)$. Співвідношення типу

$$\varphi(\alpha) = \varphi_+(\alpha)\varphi_-(\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{1.58}$$

де $\varphi_\pm(\alpha) = \int_{\mathbf{R}^\pm} e^{i\alpha x}dF_\pm(x)$, $F_\pm(x)$ $(\pm x \geq 0)$ — безмежно подільні розподіли на півосях $\mathbf{R}^\pm$, називається *безмежно подільною факторизацією* для х.ф. $\varphi(\alpha)$.

Множники канонічної факторизації (1.57) визначаються з точністю до сталого множника. Множники безмежно подільної факторизації (1.58) визначаються єдиним способом, при цьому множники $\varphi_{\pm}(\alpha)$ аналітичні при $\pm\mathrm{Im}\,\alpha > 0$, неперервні й обмежені при $\pm\mathrm{Im}\,\alpha \geq 0$.

В теорії випадкових блукань $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ важливу роль відіграє факторизаційна тотожність для х.ф. сум $S_{\widetilde{\nu}(s)}$ з геометрично розподіленим індексом

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s) = k\} = (1-s)s^k \quad (0 < s < 1,\ k \geq 0),$$
$$\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = 0.$$

Для $\varphi(s,\alpha)$ має місце основна факторизаційна тотожність

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \quad \mathrm{Im}\,\alpha = 0, \quad \varphi_{\pm} = \mathbf{E}e^{i\alpha S^{\pm}_{\nu(s)}}, \tag{1.59}$$

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} s^n \mathbf{E}[(1-e^{i\alpha S_n}), \pm S_n > 0]\right\} =$$
$$= \exp\left\{\int_{\mathbf{R}_{\pm}} (e^{i\alpha x} - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} s^n d\mathbf{P}\{S_n < x\}\right\}. \tag{1.60}$$

Співвідношення (1.60) називаються *тотожностями Спітцера* (див. [17, 112, 113]). Факторизаційний розклад (1.59) є тотожністю безмежно подільної факторизації для безмежно подільної х.ф.

$$\varphi(s,\alpha) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\alpha x} - 1) d\Pi_s(x)\right\},$$
$$d\Pi_s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n} d\mathbf{P}\{S_n < x\}.$$

Компоненти (1.60) розкладу (1.59) є безмежно подільні х.ф., що визначають х.ф. екстремумів $S_n^{\pm} = \max_{k\leq n}(\min) S_k$, $S_0 = S_0^{\pm} = 0$.

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)}} = \exp\left\{\int_{\mathbf{R}_{\pm}} (e^{i\alpha x} - 1) d\Pi_s(x)\right\}.$$

$\varphi_{\pm}(s,\alpha)$ називається додатною (від'ємною) *компонентою факторизації*.

Приклад 1.8. В актуарній математиці, крім цілозначних біноміальних процесів, про які йшла мова у прикладі 1.7, розглядаються біноміальні процеси з неперервно розподіленими стрибками

$$\xi(t) = \sum_{k\le N(t)} \xi_k = S_{N(t)}, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}, \tag{1.61}$$
$$\mathbf{P}\{N(t)=k\} = C_t^k p^k q^{t-k}; \quad p+q=1, \quad 0\le k\le t.$$

Легко обчислити х.ф. для $\xi(t)$:

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \sum_{k=0}^{t} C_t^k p^k q^{t-k}\varphi^k(\alpha) = (q+p\varphi(\alpha))^t.$$

Якщо позначити $\varphi_*(\alpha) = q + p\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k^*}$, $S_t = \sum\limits_{k=0}^{t}\xi_k^*$, $S_0 = \xi_0^* = 0$, тоді складний біноміальний процес $\xi(t) \doteq \sum\limits_{k=0}^{t}\xi_k^*$ є однорідним процесом з н.п., стохастично еквівалентним випадковому блуканню з кроком $\xi_k^* = \begin{cases} 0 & \text{з імов. } q, \\ \xi_k & \text{з імов. } p. \end{cases}$

Для випадкових блукань $S_n = \sum\limits_{k\le n}\xi_k$ $(S_0=\xi_0=0)$ розподіли всіх функціоналів виражаються через компоненти о.ф.т. (1.59), які є х. ф. екстремальних значень

$$S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)} = \max_{0\le n\le\widetilde{\nu}(s)}(\min) S_n, \mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s)=k\} = (1-s)s^k, \quad k\ge 0 \;\; (0<s<1)$$

і визначаються формулами Спітцера (1.60). Спрощення співвідношень для $\varphi_\pm(s,\alpha)$ в (1.60) можна одержати для так званих "майже напівнеперервних" випадкових блукань, х.ф. кроку яких задовольняє одну з умов

$$\varphi(\alpha) = \frac{b}{b+i\alpha}\varphi_1(\alpha), \quad b>0, \quad \varphi_1(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{i\alpha x}dF_1(x);$$
$$\varphi(\alpha) = \frac{c}{c-i\alpha}\varphi_2(\alpha), \quad c>0, \quad \varphi_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}dF_2(x). \tag{1.62}$$

Аналоги факторизаційних співвідношень (1.59), (1.60) встановлюються і для однорідних процесів $\{\xi(t),\ t\ge 0\}$, кумулянта яких визначається в (1.17). Нагадаємо, що θ_s показниково розподілена випадкова величина з параметром $s > 0$ ($\mathbf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $t > 0$). Тоді має місце твердження.

Теорема 1.16. *Для х. ф. $\xi(\theta_s)$ має місце співвідношення*

$$\varphi(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}, \tag{1.63}$$

а також основна факторизаційна тотожність (о.ф.т.), яка є також і тотожністю безмежно подільної факторизації (див. (1.58)),

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{1.64}$$

$$\varphi_\pm(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)} = \exp\left\{\pm\int_0^{\pm\infty}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^\pm(x)\right\}, \tag{1.65}$$

$N_s^\pm(x)$ виражаються через розподіли додатних (від'ємних) значень $\xi(\theta_s)$:

$$\begin{aligned} N_s^+(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt, \quad x > 0,\\ N_s^-(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}dt, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Співвідношення (1.65), (1.66) називають тотожностями Спітцера або Спітцера–Рогозіна для однорідних процесів з н.п.

Розподіли основних функціоналів для $\xi(t)$ визначаються через компоненти $\varphi_\pm(s,\alpha)$ в (1.65). Спрощення співвідношень для $\varphi_\pm(s,\alpha)$ можна одержати для напівнеперервних процесів (процесів зі знесенням, що мають стрибки одного знаку), та складних пуассонівських процесів без дифузії, стрибки яких мають х.ф. типу (1.62).

Крім (1.17) для однорідного процесу з н.п. $\{\xi(t),\ \xi(0)=0,\ t \ge 0\}$ користуються записом кумулянти (1.14) у формі Леві–Хінчина

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right)\Pi(dx). \tag{1.67}$$

$\int_{|x|\le 1} x^2\Pi(dx) < +\infty$, $\sigma^2 \ge 0$, γ — довільного знаку.

Для того, щоб безмежно подільна функція розподілу випадкової величини $\xi = \xi(1)$ була неперервною необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч би одна з умов

$$\sigma^2 > 0 \quad \text{або} \quad \int_{|x|\le 1}\Pi(dx) = +\infty.$$

Звідси випливає, що функція розподілу процесу

$$\mathbf{P}\{\xi(t) < x\} = F_t(x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

неперервна відносно x, якщо виконується хоч би одна із цих умов.

При $x > 0$ мають місце нерівності (див. [14, с. 33–34])

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{0 \le \xi(t) \le x\} \le c(x)t^{-1/2}, \quad 0 < t < 1, \\ &\overline{\lim_{t\to 0}}\, \mathbf{P}\{\xi(t) > x\}t^{-1} < \infty, \quad \overline{\lim_{t\to 0}}\, \mathbf{P}\{\xi(t) < -x\}t^{-1} < \infty, \end{aligned} \tag{1.68}$$

де $0 < c(x) < +\infty$, $c(x)$ не залежить від t.

Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1.17) або (1.67) розподіл

$$P(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x\} = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} dt$$

має похідну $P'(s,x) = \frac{\partial}{\partial x} P(s,x)$ при $x \neq 0$.

1.5 Напівнеперервні та майже напівнеперервні процеси

Означення 1.11. Процес $\xi(t)$, $t \ge 0$ називається *неперервним знизу (зверху)*, якщо

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(t-0) \ge 0 \ \forall\, t\} = 1 \quad (\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(t-0) \le 0 \ \forall\, t\} = 1).$$

Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу або зверху, то кажуть, що він є напівнеперервним. Якщо $\xi(t)$ не має від'ємних стрибків, то він є неперервним знизу і навпаки. Згідно з (1.67) кумулянта неперервного знизу процесу має вигляд

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \int_0^{+\infty} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2} \right) \Pi(dx). \tag{1.69}$$

Аналогічно кумулянта неперервного зверху процесу має вигляд

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2} \right) \Pi(dx). \tag{1.70}$$

Якщо для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою $\psi(\alpha)$ (1.69) або (1.70) знаменник в (1.63) при $i\alpha = r$ прирівняти до нуля, то одержимо рівняння

$$\psi(\alpha)\big|_{i\alpha=r} =: k(r) = s, \quad \pm\mathrm{Re}\, r \geq 0, \tag{1.71}$$

яке в теорії ризику називають *фундаментальним рівнянням Лундберга.* В силу опуклості $k(r)$ в околі 0 ($k''(0) > 0$) при достатньо малих s для неперервних зверху (знизу) $\xi(t)$ рівняння (1.71) має додатний корінь $r_s = \rho_+(s) > 0$ (від'ємний корінь $r_s = -\rho_-(s) < 0$), що визначає одну з компонент факторизації в (1.65)

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha} \quad \left(\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}\right). \tag{1.72}$$

На підставі (1.72) можна знайти співвідношення для $\varphi_-(s,\alpha)$ ($\varphi_+(s,\alpha)$) для напівнеперервних процесів, простіші за формули Спітцера.

Поведінка коренів $\rho_\pm(s)$ при $s \to 0$ залежить від знаку $m = \mathbf{E}\xi(1)$, $|m| < \infty$, $\mathbf{D}\xi(1) < \infty$. Нижче ми покажемо, що при $m = k'(0) = 0$ $\rho_\pm(s) \approx \sqrt{\frac{2s}{\mathbf{D}\xi(1)}}$, а при $m > 0$ ($m < 0$) $\rho_+(s) \approx m^{-1}s$ ($\rho_-(s) \approx |m|^{-1}s$, $s \to 0$). Якщо $\pm m < 0$, тоді $\rho_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_\pm > 0$ (див. Таблицю I в додатках).

Якщо процес з додатними стрибками монотонно неспадний, то рівняння (1.71) не має від'ємних коренів. Якщо процес з від'ємними стрибками монотонно незростаючий, то рівняння $k(r) = s$, $s > 0$ не має додатних коренів.

Означення 1.12. Складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = at + \sum_{k \leq \nu(t)} \xi_k, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}, \quad \forall\, k > 0, \quad t \geq 0 \tag{1.73}$$

називається *майже напівнеперервним знизу* (*зверху*), якщо $\pm a \geq 0$ і х.ф. стрибків $\varphi(\alpha)$ задовольняє першу (другу) умову в (1.62).

Інколи зручніше користуватися замість (1.62) умовою в термінах розподілу стрибків

$$F(x) = \begin{cases} qe^{bx} I\{x \leq 0\} + \{q + pF_1(x)\} I\{x > 0\}, & b > 0, \\ qF_1(x) I\{x \leq 0\} + \{q + p(1 - e^{-cx})\} I\{x > 0\}, & c > 0, \end{cases} \tag{1.74}$$

де $-\infty < x < +\infty$, тоді $\Pi(dx) = \lambda dF(x)$, $x \neq 0$.

Перша умова в (1.74) означає, що стрибки від'ємного знаку показниково розподілені, тому

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}\big|\xi_k<0]=\frac{b}{b+i\alpha},\quad \varphi(\alpha)=\frac{bq}{b+i\alpha}+p\varphi_1(\alpha), \tag{1.75}$$

$$\varphi_1(\alpha)=\int_{R_+}e^{i\alpha x}dF_1(x).$$

При першій умові (1.74) ($a\geq 0$) х.ф. $\varphi(s,\alpha)$ має вигляд

$$\varphi(s,\alpha)=\frac{s}{s-\psi(\alpha)}=\frac{s(b+i\alpha)}{(b+i\alpha)(s-i\alpha\lambda p\widetilde{F}_1(\alpha))-i\alpha(\lambda q+a)},$$

$$\widetilde{F}_1(\alpha)=\int_{R_+}e^{i\alpha x}\bar{F}(x)dx,\ \psi(\alpha)=i\alpha a+\lambda(\varphi(\alpha)-1). \tag{1.76}$$

Рівняння Лундберга (1.71) запишеться так

$$(b+r)[s-\lambda prh_1(r)]-(\lambda q+a)r=0,\quad h_1(r)=\widetilde{F}_1(\alpha)\big|_{i\alpha=r}. \tag{1.77}$$

Від'ємний корінь рівняння (1.77) $r_s=-\rho_-(s)$, $\rho_-(s)=bp_-(s)$ визначає х.ф. для $\xi^-(\theta_s)$:

$$\varphi_-(s,\alpha)=\frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha},\quad p_-(s)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=0\}>0. \tag{1.78}$$

Аналогічно для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ з умовною х.ф. $\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k>0]=c(c-i\alpha)^{-1}$ корінь $r_s=\rho_+(s)=cp_+(s)$, $p_+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=0\}>0$ кумулянтного рівняння (подібного до (1.77)) визначає х.ф. для $\xi^+(\theta_s)$:

$$\varphi_+(s,\alpha)=\frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha},\quad \rho_+(s)=cp_+(s),\quad c>0. \tag{1.79}$$

На підставі о.ф.т., (1.76) та (1.78) після нескладних перетворень можна одержати простіше за формулу Спітцера–Рогозіна співвідношення для $\varphi_+(s,\alpha)$ для майже напівнеперервних знизу процесів. Аналогічне співвідношення для $\varphi_-(s,\alpha)$ має місце у випадку майже напівнеперервності зверху процесів. Далі ми порівняємо ці спрощення для напівнеперервних і майже напівнеперервних процесів, які замітно відрізняються між собою (див. далі відповідні теореми 3.2 та 3.5).

Приклад 1.9. Розглянемо процес броунівського руху $\xi_0(t) = at + \sigma w(t)$, для якого виконуються обидві умови неперервності (і зверху і знизу) і о.ф.т. для $\varphi(s,\alpha)$ одержується дуже просто:

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{2s}{2s - 2i\alpha a - (i\alpha)^2\sigma^2} = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha),$$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \quad \varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha},$$

$$\rho_\pm(s) = \frac{\sqrt{2s\sigma^2 + a^2} \mp a}{\sigma^2} \text{– корені рівняння (1.71).}$$

Якщо $a = 0$, $\sigma = 1$, тоді

$$\rho_+(s) = \rho_-(s) = \sqrt{2s}, \quad p_\pm(s,x) = \sqrt{2s}e^{\mp\sqrt{2s}x}, \quad \pm x > 0,$$

$$p(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}P(s,x) = p_+(s,x) * p_-(s,x) = \int_{-\infty}^{0} p_+(x-y)p_-(y)dy,$$

$$p_\pm(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}P_\pm(s,x) = \rho_\pm(s)e^{\mp\rho_\pm(s)x}, \quad \pm x > 0.$$

Легко показати, що згортка $p(s,x) = \sqrt{\frac{s}{2}}e^{\mp\sqrt{2s}x}$ $(\pm x > 0)$. Отже,

$$p_+(s,x) = 2p(s,x), \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi_0^+(t) < x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x > 0.$$

Приклад 1.10. Розглянемо процес, що є сумою майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ (без від'ємних стрибків) із вінерівським: $\xi_\sigma(t) = \xi(t) + \sigma w(t)$ не є майже напівнеперервним зверху, хоча додатні стрибки $\xi(t)$ показниково розподілені з х.ф. $\varphi(\alpha) = \frac{c}{c-i\alpha}$. Процес $\xi_\sigma(t)$ буде лише неперервним знизу, для нього

$$\psi(\alpha) = \frac{\lambda i\alpha}{c - i\alpha} - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2},$$

$$\varphi_\sigma(s,\alpha) = \frac{2s(c - i\alpha)}{2sc + \sigma^2\alpha^2(c - i\alpha) - 2i\alpha(cs + \lambda)},$$

а компонента $\varphi_\sigma^-(s,\alpha)$ визначається так:

$$\varphi_\sigma^-(s,\alpha) = \frac{\rho_\sigma(s)}{\rho_\sigma(s) + i\alpha},$$

де $-\rho_\sigma(s)$ — від'ємний корінь рівняння (1.71): $\frac{\sigma^2 r^2}{2} + \frac{\lambda r}{c-r} = s$, що зводиться до кубічного: $\sigma^2 r^2(c-r) + 2\lambda r = 2s(c-r)$. Два додатні корені $\rho_{1,2}(s)$ останнього рівняння визначають

$$\varphi_\sigma^+(s,\alpha) = p(s)\frac{\rho_1(s)}{\rho_1(s)-i\alpha} + q(s)\frac{\rho_2(s)}{\rho_2(s)-i\alpha}, \quad p(s)+q(s)=1.$$

Надлишковий процес вимог $\zeta(t)$ (див. приклад 1.5 у § 1.1) з кумулянтою (яка виражається через $\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1}$, $a=0$)

$$\psi(\alpha) = \lambda(\varphi(\alpha)-1) + \lambda_1\left(\frac{b}{b+i\alpha} - 1\right), \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\eta_k} = \frac{b}{b+i\alpha},$$

є майже напівнеперервним знизу, а кумулянта $\psi(\alpha)$ зводиться до вигляду з $\Lambda = \lambda + \lambda_1$:

$$\psi(\alpha) = \Lambda\left(p(\varphi(\alpha)-1) - \frac{i\alpha q}{b+i\alpha}\right), \quad p = \lambda\Lambda^{-1}, \quad q = \lambda_1\Lambda^{-1}.$$

Х.ф. $\zeta^-(\theta_s)$ визначається від'ємним коренем $r_s = -\rho_-(s)$ рівняння

$$(c+r)[\lambda h(r) - s] = \lambda_1 r, \quad \mathbf{E}\exp\{i\alpha\zeta^-(\theta_s)\} = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha},$$

де $h(r) = \int\limits_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)dx$, $\overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 > x\}, x > 0$.

Для цілозначних складних пуассонівських процесів аналогічні поняття напівнеперервності вводяться за допомогою геометрично розподілених стрибків. Нехай $\xi(t)$ — цілозначний пуассонівський процес з кумулянтою

$$k(z) = \lambda(p(z)-1), \quad p(z) = \sum_{k\neq 0} z^k p_k, \quad \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{tk(z)}.$$

Означення 1.13. Цілозначний процес $\xi(t)$ з кумулянтою

$$\ln \mathbf{E}z^{\xi(1)} =: k(z) = \lambda(p(z)-1)$$

називається *майже напівнеперервним знизу*, якщо генератриса стрибків має вигляд ($q+p=1$, $\sum\limits_{k=1}^\infty p'_k = 1$)

$$p(z) = \frac{q(1-b)}{z-b} + p\sum_{k=1}^\infty z^k p'_k, \quad 0 \le b < 1; \tag{1.80}$$

якщо $b=0$, тоді $\xi(t)$ називається *напівнеперервним знизу.*

Для загального цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ має місце о.ф.т. (дискретний аналог формули (1.64))

$$g(s,z) =: \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-k(z)} = g_+(s,z)g_-(s,z), \quad |z|=1,$$
$$g_\pm(s,z) = \mathbf{E} z^{\xi^\pm(\theta_s)} \exp\left\{ \sum_{\pm k>0} (z^k-1) n_k^\pm(s) \right\}, \tag{1.81}$$
$$n_k^\pm(s) = \int_0^t t^{-1} e^{-st} p_{\pm k}(t)dt, \quad p_k(t) = \mathbf{P}\{\xi(t)=k\}, \quad k \geq 0.$$

Для процесів з генератрисою стрибків $p(z)$ (1.80) компонента $g_-(s,z)$ визначається коренем рівняння Лундберга $k(z)=s$, $s>0$,

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z(s)}, \quad b<z(s)<1, \tag{1.82}$$
$$p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=0\} = \frac{1-z(s)}{1-b}. \tag{1.83}$$

Означення 1.14. Цілозначний процес $\xi(t)$ з кумулянтою $k(z)$ називається *майже напівнеперервним зверху*, якщо

$$p(z) = qp_1(z) + p\frac{(1-c)z}{1-cz}, \quad \mathbf{E}[z^{\xi_1}|\xi_1 \geq 1] = \frac{(1-c)z}{1-cz}, \quad 0 \leq c < 1,$$
$$p_1(z) = \sum_{k<0} p'_k z^k, \quad p+q=1, \quad k(z) = \lambda(p(z)-1). \tag{1.84}$$

Для таких процесів корінь рівняння Лундберга $1 < z(s) < c^{-1}$ визначає генератрису $g_+(s,z)$ за допомогою дробово-лінійної функції

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)(1-cz)}{1-zz^{-1}(s)}, \quad p_+(s) = \frac{1-z^{-1}(s)}{1-c}, \quad s>0. \tag{1.85}$$

Приклад 1.11. Розглянемо цілозначний класичний біноміальний процес ризику з одиничним знесенням, про який ішла мова у прикладі 1.7 (аналог пуассонівського процесу ризику (1.9) в § 1.1)

$$\xi_u(t) = u + t - S_{N(t)}, \quad t = 0,1,2,\ldots, \quad u>0. \tag{1.86}$$

Цілозначні стрибки $\xi_k \geq 1$ відповідають значенням виплат (вимог), ціле $u>0$ — початковий капітал. Очевидно, що процес

$$\xi(t) = \xi_0(t) = t - S_{N(t)} \doteq \sum_{k=0}^{t} Y_k = S_t, \quad Y_k = 1 - \xi_{N(1)},$$

є неперервним зверху цілозначним випадковим блуканням з кроком Y_k і генератрисою $\mathbf{E}z^{S_t} = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = z^t(q + pp(z^{-1}))^t$, $t = 0, 1, \ldots$.

Якщо позначимо через $\widetilde{\nu}(s)$ геометрично розподілену випадкову величину $\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s) = k\} = (1 - s)s^k$ $(0 < s < 1)$, то

$$\mathbf{E}z^{\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1 - s}{1 - sz(q + pp(z^{-1}))}. \tag{1.87}$$

Прирівнявши до нуля знаменник в (1.87), одержимо рівняння Лундберга

$$1 - sz(q + pp(z^{-1})) = 0, \tag{1.88}$$

корінь $z(s) > 1$ якого визначає розподіл максимуму $\xi^+(\widetilde{\nu}(s))$

$$\mathbf{E}z^{\xi^+(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{p_+(s)}{1 - zz^{-1}(s)}, \quad p_+(s) = 1 - z^{-1}(s). \tag{1.89}$$

Приклад 1.12. Цілозначний біноміальний процес ризику з випадковими преміями вводиться за допомогою співвідношення

$$\xi(t) = \sum_{k \le N_1(t)} \xi_k - \sum_{k \le N_2(t)} \eta_k = S_{N_1(t)} - S'_{N_2(t)}, \tag{1.90}$$

де $N_1(t)$, $N_2(t)$ незалежні між собою біноміальні процеси з параметрами (p, q) та (u, v), $p + q = 1$, $u + v = 1$. Легко показати, що

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}z^{S_{N_1(t)}} = (q + pp_1(z))^t, \quad \mathbf{E}z^{S'_{N_2(t)}} = (v + up_2(z))^t,\\
&p_1(z) = \mathbf{E}z^{\xi_1}, \quad p_2(z) = \mathbf{E}z^{\eta_1}, \quad \mathbf{E}z^{\xi(t)} = p_*^t(z),\\
&p_*(z) = (q + pp_1(z))(v + up_2(z^{-1})),\\
&\mathbf{E}z^{\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1 - s}{1 - sp_*(z)}.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Якщо $p_1(z) = \dfrac{(1 - c)z}{1 - cz}$, тоді $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес. Тому корінь рівняння Лундберга $(1 - sp_*(z) = 0)$, $z_*(s) > 1$ визначає генератрису $\xi^+(\widetilde{\nu}(s))$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}z^{\xi^+(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{p_+(s)(1 - cz)}{1 - zz_*^{-1}(s)};\\
&p_+(s) = (1 - z_*^{-1}(s))(1 - c)^{-1}, 0 < s < 1.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

В розділі 3 буде доведено, що для напівнеперервних процесів із стрибками одного знаку та майже напівнеперервних пуассонівських процесів з неперервно розподіленим кроком при одній з умов

$$\mathbf{E}\left[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k>0\right]=\frac{c}{c-i\alpha},\quad \text{або}\quad \mathbf{E}\left[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k<0\right]=\frac{b}{b+i\alpha}$$

буде обґрунтовано, що х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ або $\xi^-(\theta_s)$ завжди визначаються відповідно дробово-лінійними функціями відносно $i\alpha$ (зокрема, правильними – для процесів із стрибками сталого знаку, див. (1.72)).

Надалі при знаходженні граничних розподілів екстремальних значень (абсолютних екстремумів процесів $\xi^\pm$ або абсолютних екстремумів сум $S^\pm=\max\limits_{0\le n<\infty}(\min)S_n)$ та перестрибкових функціоналів $\tau^\pm(\pm x),\ \gamma^\pm(\pm x)$ при $x\to+\infty$ або $x\to+0$, ми будемо користуватись теоремами тауберового типу, які наводяться нижче (у рандомізованій формі).

Теорема 1.17. *Нехай $f(x)$ обмежена на $[0,+\infty)$ функція й існують обмежені границі $f(+0)=\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)$, $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Нехай θ_μ показниково розподілена випадкова величина з параметром $\mu\in(0,+\infty)$ ($\mathbf{P}\{\theta_\mu>x\}=e^{-\mu x}$, $x>0$). Тоді інтегральне перетворення Лапласа–Карсона визначається середнім значенням*

$$\mathbf{E}f(\theta_\mu)=\mu\int_0^\infty e^{-\mu x}f(x)dx=\widetilde{f}(\mu),\tag{1.93}$$

граничні значення $f(+0)$, $f(+\infty)$ визначаються співвідношеннями

$$f(+0)=\lim_{\mu\to+\infty}\widetilde{f}(\mu),\quad f(+\infty)=\lim_{\mu\to 0}\widetilde{f}(\mu).\tag{1.94}$$

Теорема 1.18. *Нехай $\{g_n\}_{n>0}$ – обмежена числова послідовність й існують обмежені границі $g_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}g_n$ та $\lim\limits_{n\to 0}g_n$. Нехай $\widetilde{\nu}(s)$ геометрично розподілена випадкова величина з параметром $s\in(0;1)$ ($\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s)=k\}=(1-s)s^k$, $k\ge 0$). Тоді твірне перетворення для $\{g_n\}$ визначається середнім значенням*

$$\mathbf{E}g_{\widetilde{\nu}(s)}=(1-s)\sum_{n=0}^{\infty}g_ns^n=\widetilde{g}(s),\tag{1.95}$$

а граничні значення визначаються співвідношеннями

$$g_\infty=\lim_{s\to 1}\widetilde{g}(s),\quad \lim_{n\to 0}g_n=\lim_{s\to 0}\widetilde{g}(s).\tag{1.96}$$

Наведемо кілька прикладів відповідності між $f(x)$ та $\widetilde{f}(\mu)$ з [2,82]

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
f(x) & x & e^{-\lambda x} & xe^{-\lambda x} & \frac{1}{\sqrt{\pi x}} & 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} & \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-uy}d\arcsin\sqrt{y/x} \\
\hline
\widetilde{f}(\mu) & \mu^{-1} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} & \mu^{1/2} & \mu^{-1/2} & \sqrt{\mu/(\mu+u)}
\end{array} \tag{1.97}$$

Зауваження. Встановлені в § 1.3 рівняння для функціоналів (1.35) однорідного процесу $\xi(t)$ визначається твірним оператором $\mathbf{L}'$ (див. (1.45)). Функції розподілу (ф.р.) $\xi(\theta_s)$ і $\xi^{\pm}(\theta_s)$ задовольняють інтегро-диференціальні рівняння з оператором $\mathbf{L}$ (див. (1.53)), зокрема за теоремою 4.6 в [14] справедливе твердження

Теорема 1.19. *Генератриса $\tau^+(x)$ (як і ф.р. $\xi^+(\theta_s)$)*

$$T(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = 1 - P_+(s,x), \quad x > 0$$

задовольняє інтегро-диференціальне рівняння з оператором $\mathbf{L}$:

$$(s - \mathbf{L})\, T(s,x) = 0, \quad x > 0; \quad T(s,x) = 1, \quad x < 0. \tag{1.98}$$

Для напівнеперервного зверху процесу $\xi(t) = \sigma w(t) + \xi_1(t)$ ($\sigma \geq 0$, $\xi_1(t)$ має лише від'ємні стрибки) оператор L визначається згідно з (1.53) так

$$\begin{aligned}\mathbf{L}f(x) = -af'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \\ + \int_{y\neq 0}\big[f(x-y) - f(x) + yf'(x)\mathbb{1}_{|y|\leq 1}\big]\,\Pi(dy).\end{aligned} \tag{1.99}$$

А для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda_1 \frac{i\alpha}{c - i\alpha} + \int_{y<0}\big(e^{i\alpha x} - 1\big)\,\Pi(dx),$$

$$a \leq 0, \quad c > 0, \quad \int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty,$$

оператор $\mathbf{L}$ має вигляд

$$\begin{aligned}Lf(x) = -af'(x) + \lambda_1 c\int_{y>0}[f(x-y) - f(x)]\,e^{-cy}dy + \\ + \int_{y<0}[f(x-y) - f(x)]\,\Pi(dy).\end{aligned} \tag{1.100}$$

Розділ 2

Факторизаційні тотожності для процесів. Розподіли основних функціоналів

2.1 Тотожність безмежно подільної факторизації та наслідки з неї

Встановлені для сум незалежних однаково розподілених доданків основна тотожність (1.59) та тотожності Спітцера (1.60) (див. [17, 79,112,215]) встановлюються і для однорідних процесів з незалежними приростами. Сформульована для процесів $\xi(t)$ тотожність (1.64) доведена Б.А. Рогозіним в [108] шляхом використання дискретної схеми блукання для послідовності приростів процесу $\xi(t)$

$$S_n^{(m)} = \sum_{k\le n} \xi_k, \quad \xi_k = \xi\left(\frac{k}{2^m}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^m}\right), \quad k \ge 1, \quad n \ge 0,$$

із застосуванням формули Спітцера для $S_n^{(m)}$, з якої після граничного переходу ($m \to \infty$) одержується формула Спітцера для процесу $\xi(t)$. В нашій роботі з В.С. Королюком це доведення спрощене (див. [63]) і воно наводиться нижче.

Теорема 2.1. *Для х.ф.* $\xi(\theta_s)$

$$\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}$$

має місце факторизаційний розклад

$$\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^+}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^-}, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{2.1}$$

де $\xi_s^\pm$ *— безмежно подільні випадкові величини* $\pm\xi_s^\pm \geq 0$ *з х.ф.*

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^\pm} = \exp\left\{\pm\int_0^{\pm\infty}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^\pm(x)\right\}, \tag{2.2}$$

$$N_s^+(x) = -\int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt, \quad x > 0; \tag{2.3}$$

$$N_s^-(x) = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}dt, \quad x < 0.$$

Якщо $N_s^+(0) < \infty$, *тоді* $p_+(s) = \mathbf{P}\{\xi_s^+ = 0\} = e^{-N_s^+(0)} > 0$; *якщо* $N_s^-(0) < \infty$, *тоді* $p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi_s^- = 0\} = e^{-N_s^-(0)} > 0$.

Доведення. Користуючись формулою (інтегралом) Фруллані (див. [121])

$$\int_0^\infty x^{-1}(e^{-ax} - e^{-bx})dx = \ln\frac{b}{a},$$

можна записати, що

$$\begin{aligned}\ln\varphi(s,\alpha) &= \ln\frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \int_0^\infty t^{-1}(e^{t\psi(\alpha)}-1)e^{-ts}dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\alpha x}-1)d_x\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}dt = \\ &= I^+(s,\alpha) + I^-(s,\alpha),\end{aligned}$$

де

$$I^+(s,\alpha) = -\int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\int_0^\infty(e^{i\alpha x}-1)d_x\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt,$$

$$I^-(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\int_{-\infty}^0(e^{i\alpha x}-1)d_x\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}dt.$$

Розглянемо при дійсних s та α ($s > 0$, $\alpha > 0$) інтеграл

$$I_\delta^+ = -\int_\delta^\infty e^{-st}t^{-1}\int_0^\infty (e^{-\alpha x}-1)d\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt, \quad \delta > 0.$$

Для $x > 0$, $s > 0$ $t^{-1}e^{-st} > 0$, $1 - e^{-sx} > 0$, тому з узагальненої теореми Фубіні (див. [123, с. 147]) випливає, що $I_\delta > 0$ і

$$I_\delta^+ = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})d_x \int_\delta^\infty e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt.$$

З обмеженості I_δ^+ та монотонності відносно δ випливає граничне співвідношення

$$\lim_{\delta\to 0} I_\delta^+ = -\int_0^\infty (e^{-\alpha x}-1)d_x \int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt,$$

остання частина якого є аналітичною функцією від α в правій комплексній півплощині і неперервною на уявній осі. Тому

$$I^+(s,\alpha) = -\int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)dN_s^+(x).$$

Аналогічно доводиться, що

$$I^-(s,\alpha) = \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x}-1)dN_s^-(x).$$

Отже, співвідношення (2.1) доведено і називають його *тотожністю безмежно подільної факторизації*. Співвідношення про додатність атомарних імовірностей $p_\pm(s) > 0$ при $N_s^\pm(0) < \infty$ випливають із (2.2), (2.3) при $\pm i\alpha \to \infty$. □

Розглянемо спільний розподіл $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s)\}$.

Теорема 2.2. *Х.ф. розподілів для* $\xi^\pm(\theta_s)$ *та* $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s)\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\varphi_\pm(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^\pm} = \exp\left\{\int_{R_\pm}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^\pm(x)\right\},$$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)+i\beta\xi(\theta_s)} = \varphi_+(s,\alpha+\beta)\varphi_-(s,\beta), \tag{2.4}$$

$$\varphi(s,\beta) =: \mathbf{E}e^{i\beta\xi(\theta_s)} = \varphi_+(s,\beta)\varphi_-(s,\beta), \quad \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = 0.$$

Для східчастих процесів $\xi(t) = \sum\limits_{k\in\nu(t)} \xi_k$ *розподіли* $\xi^\pm(\theta_s)$ *мають атоми в* 0

$$\begin{aligned} &p_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\} = \exp\{\pm N_s^\pm(0)\} > 0, \\ &N_s^\pm(x) = \mp\sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}\{\pm S_k > x\}\frac{\lambda^k}{k(s+\lambda)^k}, \quad \pm x > 0, \\ &S_k = \sum_{r\le k}\xi_r, \quad |N_s^\pm(0)| < \infty \quad \textit{при} \quad s > 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для спільного розподілу $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s)\}$ *та розподілу доповнень до екстремумів* $\hat{\xi}^\pm(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^\mp(\theta_s)$ *справедливі співвідношення*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\big[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) < z\big] = \varphi_-(s,\alpha)\mathbf{E}\big[e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) < z\big], \\ &\mathbf{E}e^{i\alpha\hat{\xi}^\pm(\theta_s)} = \varphi_\pm(s,\alpha). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Доведення. Зауважимо, що для східчастих процесів остання тотожність в (2.4) реалізує безмежно подільну і канонічну факторизацію. Перша формула в (2.4) називаються *формулами Спітцера* (*Спітцера–Рогозіна*). Доведення цих формул проведемо спочатку для східчастих процесів з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = \lambda(\varphi(\alpha) - 1), \quad \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}dF(x) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1}, \quad \lambda > 0.$$

Для моменту першого досягнення рівня $x > 0$

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \ \xi(t) > x\}$$

має місце стохастичне співвідношення при $\tau^+(x) < \infty$

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta_1, \xi_1 > x, \quad \mathbf{P}\{\zeta_1 > t\} = \exp\{-\lambda t\}, \\ \zeta_1 + \tau^+(x - \xi_1), \quad \xi_1 \le x, \end{cases} \tag{2.7}$$

на основі якого виводиться рівняння для генератриси

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = \frac{\lambda}{s+\lambda}\mathbf{P}\{\xi_1 > x\} +$$

$$+\frac{\lambda}{s+\lambda}\int_{-\infty}^{x}\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x-y)},\tau^+(x-y)<\infty\big]dF(y).$$

Враховуючи, що

$$P_+(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)<x\}=1-\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)},\tau^+(x)<\infty\big],$$

з рівняння для генератриси випливає рівняння для $P_+(s,x)$ з нульовою умовою при $x<0$:

$$(s+\lambda)P_+(s,x)-\lambda\int_{-\infty}^{x}P_+(s,x-y)dF(y)=s,\quad x>0,$$
$$P_+(s,x)=0\quad\text{для}\quad x<0.$$

З нульової межової умови випливає, що це рівняння можна продовжити на всю пряму

$$(s+\lambda)P_+(s,x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}P_+(s,x-y)dF(y)=s,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Після застосування до останнього рівняння одностороннього інтегрального перетворення одержимо рівняння в термінах проекцій із § 1.4:

$$(s+\lambda)\varphi_+(s,\alpha)-\lambda[\varphi_+(s,\alpha)\varphi(\alpha)]_+^0=s,$$

або

$$(s-\psi(\alpha))\varphi_+(s,\alpha)=s-[\varphi_+(s,\alpha)\varphi(\alpha)]_-.$$

Звідси випливає рівняння

$$s\varphi^{-1}(s,\alpha)\varphi_+(s,\alpha)=s-[\varphi_+(s,\alpha)\varphi(\alpha)]_-. \tag{2.8}$$

На основі (2.1) та леми Вінера з рівняння (2.8) випливає співвідношення

$$s\varphi_+(s,\alpha)(\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^+})^{-1}=\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^-}\{s-[\varphi_+(s,\alpha)\varphi(\alpha)]_-\}.$$

Застосувавши до обох частин операцію проектування $[\,]_+^0$ з останнього випливає, що

$$\frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^+}}=C(s),$$

оскільки проекція функцій з $\mathcal{L}_-$ дає сталу відносно α.

З умови нормованості ($\varphi_+(s,0) = 1$) випливає, що $C(s) = 1$. Таким чином перша формула в (2.4) доведена для $\xi^+(\theta_s)$. Замінивши $\xi_1(t) = -\xi(t)$, можна довести першу формулу в (2.4) і для $\xi^-(\theta_s)$.

У східчастому випадку атомарні ймовірності $p_\pm(s)$ в (2.5) визначаються з (2.3) в теоремі 2.1, або із співвідношень

$$\mathbf{P}\{\pm\xi(t) > 0\} = \mathbf{P}\{\pm S_{\nu(t)} > 0\} = \sum_{k\geq 1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \mathbf{P}\{\pm S_k > 0\},$$

$$\int_0^\infty t^{k-1} e^{-(s+\lambda)t} dt = \Gamma(k)(s+\lambda)^{-k}, \quad \Gamma(k) = (k-1)!,$$

$$|N_s^\pm(0)| = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}\{\pm S_k > 0\} \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k < \infty, s > 0.$$

Для апроксимуючої послідовності східчастих процесів $\xi_n(t)$, що наближає будь-який процес $\xi(t)$, мають місце перші співвідношення (2.4). На основі теореми 1.10 з розділу I встановлюється їх справедливість для довільного процесу $\xi(t)$.

Для спільного розподілу $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s)\}$, крім (2.7), запишемо стохастичне зображення для східчастого процесу $\xi(t)$:

$$\xi(t) \doteq \begin{cases} 0, & \zeta_1 > t, \\ \xi(t - \zeta_1), & \zeta_1 \leq t. \end{cases} \tag{2.9}$$

На основі (2.7) та (2.9) для

$$P_z(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x + z,\ \xi^+(\theta_s) < z\}, \quad x \leq 0, \quad z > 0$$

подібно до рівняння для $P_+(s,x)$ виводиться інтегральне рівняння

$$(s+\lambda) P_z(s,x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P_{z-y}(s,x) dF(y) = sI\{x + z > 0\} \tag{2.10}$$

з межовими умовами

$$P_z(s,x) = 0, \quad z < 0; \quad P_z(s,x) = P_z(s,0), \quad x > 0. \tag{2.11}$$

Застосуємо одностороннє перетворення Лапласа–Стілт'єса по $x < 0$ до обох частин (2.10). Тоді для

$$P(s,u,z) = \mathbf{E}[e^{u(\xi(\theta_s) - z)}, \xi^+(\theta_s) - z < 0]$$

одержимо інтегральне рівняння

$$(s+\lambda)P(s,u,z)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}P(s,u,z-y)dF(y)=se^{-uz},\quad z>0.\qquad(2.12)$$

З (2.12) після одностороннього інтегрального перетворення по $z>0$ для $\widetilde{P}(s,u,\alpha)=\int_0^\infty P(s,u,z)e^{i\alpha z}dz$, $\operatorname{Im}\alpha=0$ одержимо рівняння:

$$(s+\alpha)\widetilde{P}(s,u,\alpha)-\lambda\widetilde{P}(s,u,\alpha)\varphi(\alpha)=\frac{s}{u-i\alpha}-\lambda[\widetilde{P}\varphi(\alpha)]_-,$$

яке зводиться до вигляду

$$(s-\psi(\alpha))\widetilde{P}(s,u,\alpha)=\frac{s}{u-i\alpha}-\lambda[\widetilde{P}\varphi(\alpha)]_-$$

або ($\widetilde{P}=\widetilde{P}(s,u,\alpha)$)

$$s\varphi^{-1}(s,\alpha)\widetilde{P}(s,u,\alpha)=\frac{s}{u-i\alpha}-\lambda[\widetilde{P}\varphi(\alpha)]_-.\qquad(2.13)$$

На основі (2.1) після застосування операції $[\ ]_+^0$ з рівняння (2.13) випливає співвідношення

$$\widetilde{P}(s,u,\alpha)=[(u-i\alpha)^{-1}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^-}]_+^0\,\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^+}=\left[\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{u-i\alpha}\right]_+^0\varphi_+(s,\alpha).$$

Обернувши по α (2.13), знаходимо співвідношення

$$\mathbf{E}[e^{u(\xi(\theta_s)-z)},\xi^+(\theta_s)<z]=\int_0^z\int_{-\infty}^0 e^{u(x+y-z)}dP_-(s,x)dP_+(s,y).$$

Скоротивши на e^{-uz}, ми одержимо перше співвідношення в (2.6).

Останнє доведене співвідношення при $u=i\beta$ запишеться так:

$$\mathbf{E}[e^{i\beta\xi(\theta_s)},\xi^+(\theta_s)<z]=\mathbf{E}e^{i\beta\xi^-(\theta_s)}\mathbf{E}[e^{i\beta\xi^+(\theta_s)},\xi^+(\theta_s)<z].$$

Звідси після застосування одностороннього перетворення Фур'є–Стілт'єса по z випливає центральне друге співвідношення в (2.4). З нього при $\alpha=0$ випливає останнє співвідношення в (2.4), яке називають *основною факторизаційною тотожністю* (о.ф.т.) або *першою факторизаційною тотожністю* (ф.т.1). □

Якщо в другому співвідношенні (2.4) покласти $\alpha = -\beta$, тоді одержимо останнє співвідношення в (2.6) про стохастичну еквівалентність екстремумів $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та їх доповнень $\hat{\xi}^{\pm}(\theta_s)$:

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\hat{\xi}^{\pm}(\theta_s)} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)} \;\Rightarrow\; \hat{\xi}^{\pm}(\theta_s) \doteq \xi^{\pm}(\theta_s).$$

Отже, теорема 2.2 повністю доведена для східчастих процесів. На основі теореми 1.10 справедливість всіх співвідношень можна довести і для несхідчастих процесів.

Зауважимо, що для східчастих процесів $\xi(t) = \sum\limits_{k\le\nu(t)} \xi_k$ при $\mathbf{E}\xi < 0$ (див. [7, с. 120]) із збіжності ряду

$$\sum_{k\ge1} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\} < \infty, \quad S_k = \sum_{i=0}^{k} \xi_i, \quad \xi_0 = S_0 = 0, \tag{2.14}$$

випливає збіжність ряду для $-N_s^+(0)$

$$\begin{aligned} -N_s^+(0) &= \sum_{k\ge1} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k \\ &\underset{s\to0}{\longrightarrow} \sum_{k\ge1} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\} = -N_0^+(0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Згідно з наслідком 4 п.2 (див. [7, с. 118]) умова (2.14) еквівалентна невиродженості розподілу абсолютного максимуму сум

$$S^+ = \max_{0\le n<\infty} S_n.$$

Для східчастих процесів збіжність ряду (2.14), яка має місце при умові $\mathbf{E}\xi_1 < 0$, еквівалентна невиродженості розподілу абсолютного максимуму східчастого процесу $\xi(t) = \sum\limits_{k\le\nu(t)} \xi_k$; $\xi^+ = \sup\limits_{0\le t<\infty} \xi(t)$.

При цьому

$$p_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = e^{N_0^+(0)}, \quad N_0^+(0) = -\sum_{k\ge1} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\}.$$

Якщо $\mathbf{E}\xi_1 \ge 0$, тоді

$$\sum_{k\ge1} \frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\} = \infty, \quad \mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1.$$

Якщо для несхідчастих процесів виконується умова (аналогічна (2.14))

$$\int_1^\infty t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}dt = J_{>1} < \infty, \tag{2.16}$$

яка виконується при умові $\mathbf{E}\xi(1)<0$, тоді для невласного інтегралу, що визначає $N_s(x)$, інтеграл по $t\in[1,\infty)$

$$\int_1^\infty t^{-1}e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt \underset{s\to 0}{\longrightarrow} J_{>1} < \infty. \tag{2.17}$$

Для доведення обмеженості інтегралу по $t\in[0,1]$ $J_{<1}$ використовується оцінка для $\mathbf{E}[\xi(t),\ 0\le\xi(t)\le 1]$, яка випливає з (1.68)

$$\int_0^1 x\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\} = O(\sqrt{t})$$
$$\Rightarrow \int_0^1 t^{-1}\int_0^1 x\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt = J_{<1} < \infty.$$

Звідси та з (2.17) випливає, що у першій формулі Спітцера

$$\varphi_+(s,iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi^+(\theta_s)} = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{-zx}-1)dN_s^+(x)\right\},$$

за умови (2.16) можна здійснити граничний перехід при $s\to 0$ і одержати х.ф. для ξ^+

$$\begin{aligned}\varphi_+(iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi^+} &= \exp\left\{\int_0^\infty (e^{-zx}-1)dN_0^+(x)\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_0^\infty t^{-1}\int_0^\infty (e^{-zx}-1)\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt\right\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

З обмеженості $J_{<1}<\infty$ випливає, що $\int_0^1 x dN_0^+(x) < \infty$,

$$N_0^+(x) = -\int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt, \quad x>0, \tag{2.19}$$

з теореми 2.2 на основі проведених міркувань доводиться

Наслідок 2.1. *Нехай для процесу $\xi(t)$ виконується умова* (2.16), *тоді абсолютний максимум процесу має невироджений розподіл з х.ф.* (2.18), *де $dN_0^+(x)$ визначається в* (2.19) *при $x > 0$ для довільного несхідчастого процесу $\xi(t)$. Якщо $\xi(t)$ — східчастий процес, для якого виконується умова* (2.14), *тоді х.ф. ξ^+ визначається в* (2.18) *з функцією*

$$N_0^+(x) = -\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > x\} < \infty, \quad x \geq 0. \tag{2.20}$$

Якщо для довільного процесу $\xi(t)$ виконується умова

$$\int_1^{\infty} t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) < 0\}dt < \infty, \tag{2.21}$$

тоді після граничного переходу ($s \to 0$) *з формули Спітцера* (2.4) *із знаком "$-$" одержується х.ф. для абсолютного мінімуму ξ^-*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} &= \exp\left\{\int_0^{\infty} t^{-1}\int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x}-1)\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_{\infty}^{0}(e^{i\alpha x}-1)dN_0^-(x)\right\},\end{aligned} \tag{2.22}$$

де $N_0^-(x) = \int_{t\geq 0} t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}dt$ при $x < 0$.

Якщо $\xi(t)$ — східчастий процес, для якого виконується умова

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k < 0\} < \infty, \tag{2.23}$$

то х.ф. його абсолютного мінімуму ξ^- визначається формулою (2.22) *з функцією*

$$N_0^-(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k < x\}, \quad x \leq 0. \tag{2.24}$$

Якщо $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, тоді виконується умова (2.16) (або (2.14) для східчастих процесів). Ці умови називаються умовами обмеженості росту $\xi(t)$ ($t \to \infty$), при яких ξ^+ має невироджений розподіл, а розподіл абсолютного мінімуму — вироджений $\mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 1$.

В цьому випадку кажуть, що при $t \to \infty$ $\xi(t)$ прямує в $-\infty$.

Якщо $\mathbf{E}\xi(1) > 0$, тоді виконуються умови (2.21) ((2.23)), які називаються умовами обмеженості спадання $\xi(t)$ $(t \to \infty)$, при яких ξ^- має невироджений розподіл, а розподіл абсолютного максимуму ξ^+ — вироджений $\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1$.

В цьому випадку кажуть, що при $t \to \infty$ $\xi(t)$ прямує в $+\infty$.

Якщо $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, тоді інтеграли в (2.16) та в (2.21) — розбіжні (ряди (2.14) і (2.23) також розбіжні). Абсолютні екстремуми $\xi^\pm$ мають вироджений розподіл $\mathbf{P}\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1$. В цьому випадку $\xi(t)$ називається процесом осцилюючого типу.

Для напівнеперервних процесів зі стрибками одного знаку з кумулянтою (1.69) або (1.70) та майже напівнеперервних з х.ф. стрибків (1.62) формули Спітцера спрощуються.

2.2 Друга факторизаційна тотожність (2 ф.т.) та деякі наслідки з неї

Розглянемо множину траекторій (реалізацій) $\xi(t)$, для яких виконується умова $\{\tau^+(x) < \infty\}(x \geq 0)$. Для таких реалізацій функціонал $\tau^+(x)$ задовольняє стохастичне співвідношення зв'язку з перестрибковим функціоналом $\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$:

$$\tau^+(x+z) \doteq \begin{cases} \tau^+(z), \quad \gamma^+(z) > x, \quad x > 0, \quad z > 0, \\ \tau^+(z) + \tau^+(x - \gamma^+(z)), \quad \gamma^+(z) \leq x. \end{cases} \tag{2.25}$$

На основі (2.25) встановлюється твердження, в якому використовується позначення θ'_μ для показниково розподіленої випадкової величини з параметром $\mu > 0$, незалежної від θ_s.

Теорема 2.3 (2 ф.т.). *Спільний розподіл пари $\{\tau^+(\theta'_\mu), \gamma^+(\theta'_\mu)\}$ визначається генератрисою*

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(s,\mu,u) &:= \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\theta'_\mu) - u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \tau^+(\theta'_\mu) < \infty\big] = \\ &= \frac{\mu}{\mu - u}\left\{1 - \frac{\varphi_+(s, i\mu)}{\varphi_+(s, iu)}\right\} \quad (s, u, \mu > 0). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Доведення. Зауважимо, що 2 ф.т. для блукань наводиться в [7] в іншій формі і

$$\bar{P}_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \ \tau^+(x) < \infty].$$

Із співвідношення (2.25) випливає рівняння для генератриси $\tau^+(x)$, в позначенні якої на деякий час пропускатимемо умову $\tau^+(x) < \infty$

$$\mathbf{E}e^{-s\tau^+(x+z)} = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) > x\big] + \\ + \int_0^x \mathbf{E}\big[e^{-s(\tau^+(z)+\tau^+(x-y))}, \gamma^+(z) \in dy\big]. \tag{2.27}$$

Оскільки доданки в другому рядку (2.25) незалежні, то генератриса суми $\tau^+(z)$ та $\tau^+(x-y)$ в правій частині (2.27) записується через добуток генератрис і рівняння (2.27) можна переписати в термінах ф.р. $P_+(s,x)$

$$\bar{P}_+(s,x+z) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) > x\big] + \\ + \int_0^x \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) \in dy\big](1 - P_+(s,x-y)) = \\ = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(z)} - \int_0^x P_+(s,x-y)\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) \in dy\big],$$

причому ($\mathbf{P}\{\tau^+(z) < \infty\} = 1$, якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) \geq 0$), тоді

$$\mathbf{P}\{z < \xi^+(\theta_s) < z + x\} = \int_0^x P_+(s,x-y)\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(z)}\gamma^+(z) \in dy\big].$$

Останнє рівняння після перетворення Лапласа–Стілт'єса по x запишеться так:

$$\mathbf{E}\big[e^{-u(\xi^+(\theta_s)-z)}, \xi^+(\theta_s) - z > 0\big] = \mathbf{E}e^{-u\xi^+(\theta_s)}T(s,z,u). \tag{2.28}$$

Отже генератриса $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$ визначається співвідношенням

$$T(s,z,u) := \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(z)-s\tau^+(z)}, \tau^+(z) < \infty\big] = \\ = \mathbf{E}[e^{-u(\xi^+(\theta_s)-z)}, \xi^+(\theta_s) > z](\varphi_+(s,iz))^{-1}.$$

Застосуємо до лівої частини (2.28) перетворення Лапласа по $z > 0$ і одержимо

$$\int_0^\infty e^{-\mu z} \int_z^\infty e^{-u(y-z)} dP_+(s,y)dz = \\ = \int_0^\infty e^{-uy} dP_+(s,y) \int_0^y e^{z(u-\mu)} dz =$$

$$= \frac{1}{u-\mu}\int_0^\infty (e^{-\mu y} - e^{-uy})dP_+(s,y) = \frac{1}{\mu - u}[\varphi_+(s,iu) - \varphi_+(s,i\mu)].$$

Після перетворення Лапласа правої частини одержимо рівняння:

$$\varphi_+(s,iu)\int_0^\infty e^{-\mu z}T(s,z,u)dz = \frac{1}{\mu-u}[\varphi_+(s,iu) - \varphi_+(s,i\mu)],$$

з якого після домноження на μ одержимо другу ф.т. (2.26). □

З тотожності (2.26) випливає твердження

Теорема 2.4. *Якщо пара функціоналів $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ має невироджений розподіл ($\mathbf{P}\{\tau^+(0) = \gamma^+(0) = 0\} = 0$), тоді їх генератриса визначається через генератрису $\xi^+(\theta_s)$ із (2.26) при $\mu \to \infty$:*

$$f_+(s,u) = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0) - s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = 1 - \frac{p_+(s)}{\varphi_+(s,iu)} \tag{2.29}$$

і відповідно генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається допограничним узагальненням формули Поллячека–Хінчина

$$\varphi_+(s,iu) =: \mathbf{E}e^{-u\xi^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(u)} = \frac{p_+(s)}{1 - f_+(s,u)}, \tag{2.30}$$

$$f_+(s,u) = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0] = q_+(s)\widetilde{g}_s(u),$$

$$\widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+(\theta_s) > 0]. \tag{2.31}$$

Якщо при цьому $0 \le \mathbf{E}\xi(1) < \infty$, тоді (див. [14, 15])

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > 0\} = 1, \quad f_+(s,u) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{E}e^{-u\gamma^+(0)}$$

і розподіли перестрибків $\gamma^+(0)$, $\gamma^+(\infty)$ пов'язані співвідношенням:

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(\infty)} = \frac{1}{u\mathbf{E}\gamma^+(0)}\big(1 - \mathbf{E}e^{-u\gamma^+(0)}\big). \tag{2.32}$$

Якщо ж $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, тоді для генератриси розподілу абсолютного максимуму має місце узагальнена формула Полячека–Хінчина

$$\mathbf{E}e^{-u\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{g}_0(u)}, \quad \widetilde{g}_0(u) = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+ > 0]. \tag{2.33}$$

Доведення. При умові невиродженості $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ з (2.26) при $\mu \to \infty$ випливає формула (2.29), згідно з якою генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається через умовну генератрису $\gamma^+(0)$. Формулу (2.30) назвемо дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина, з якої випливає, що

$$\xi^+(\theta_s) \doteq \sum_{k \le \widetilde{\nu}(q_+(s))} \widetilde{\xi}_k(s), \quad \mathbf{E}e^{-u\widetilde{\xi}_k(s)} = \widetilde{g}_s(u),$$

$\widetilde{\nu}(q_+(s))$ — геометрично розподілена з параметром $0 < q_+(s) < 1$.

При $s \to 0$ з (2.30) випливає формула (2.33), яку теж можна вважати її узагальненням. Класична формула Полячека–Хінчина доводилась лише для напівнеперервних пуассонівських процесів, де $\widetilde{g}_0(u)$ виражалась як генератриса нормованого хвоста розподілу стрибків. Формула (2.33) справедлива і без умови напівнеперервності, а $\widetilde{g}_0(u)$ має чітку ймовірнісну інтерпретацію. Якщо $m \ge 0$, тоді з (2.26) та (2.30) при $s \to 0$ випливає

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)} = \frac{\mu}{\mu - u}\left[1 - \frac{1 - \mathbf{E}e^{-u\gamma^+(0)}}{1 - \mathbf{E}e^{-\mu\gamma^+(0)}}\right],$$

звідки при $\mu \to 0$ одержуємо (2.32). Зауважимо, що розподіл $\gamma^+(x)$ при $x \to \infty$ вперше розглядався для S_n (див. [4, 70, 81]). □

Приклад 2.1. Нехай $\xi(t)$ — процес із кумулянтою

$$\psi(\alpha) = ai\alpha + \lambda(\varphi(\alpha) - 1), \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \exp\{t\psi(\alpha)\}, \quad a = -1,$$
$$\varphi(\alpha) = \frac{c}{c - i\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

Знайти спільний розподіл $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$.

Замітимо, що $\xi(t)$ — майже неперервний зверху і неперервний знизу (бо $a = -1 < 0$, а додатні стрибки ξ_k — показниково розподілені)

$$m = \mathbf{E}\xi(1) = k'(0) = \frac{\lambda - c}{c}, \quad \mathbf{D}\xi(1) = k''(0) = \frac{2\lambda}{c^2},$$
$$k(r) = \psi(\alpha)|_{i\alpha = r} = -r + \frac{\lambda r}{c - r} = \frac{r^2 + mcr}{c - r}.$$

Рівняння Лундберга ($k(r) = s$) зводиться до квадратного:

$$r^2 + (mc+s)r - cs = 0 \quad \text{при} \quad s > 0;$$
$$r^2 + mcr = 0 \quad \text{при} \quad s = 0.$$

Корені останнього рівняння залежать від знака m (нумерація коренів вибрана за порядком їх зростання)

a) $m > 0$ $(\lambda > c)$ $\quad r_1 = -mc = -\rho_-, \quad r_2 = 0;$
b) $m < 0$ $(\lambda < c)$ $\quad r_1 = 0, \quad r_2 = c|m|;$
c) $m = 0$ $(\lambda = c)$ $\quad r_{1,2} = 0.$

При $s > 0$ корені рівняння з дискримінантом $D_s = (mc+s)^2 + 4cs > 0$

$$-r_1(s) = \rho_-(s), \quad r_2(s) = \rho_+(s), \quad \rho_\pm(s) = \frac{\sqrt{D_s} \mp (mc+s)}{2},$$

визначають компоненти факторизації $\varphi_\pm(s,\alpha)$ для

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \frac{s(c-i\alpha)}{cs-(s+mc)i\alpha-(i\alpha)^2} =$$
$$= \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha),$$
$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}; \quad \varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}. \tag{2.34}$$

Якщо $m > 0$, тоді $\rho_+(s) \to 0$, $\rho_-(s) \to mc = \rho_- > 0$ $(s \to 0)$. Корінь $\rho_- = mc = \lambda - c$ визначає невироджений розподіл абсолютного мінімуму з х.ф. ($\varphi_+(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \xi^+ = +\infty$ з імовірністю 1)

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} = \rho_-(\rho_- + i\alpha)^{-1}. \tag{2.35}$$

Для $m < 0$ $\rho_-(s) \to 0$, $\rho_+(s) \to \rho_+ = |m|c > 0$ $(s \to 0)$. Корінь ρ_+ визначає невироджений розподіл ξ^+ з х.ф. ($\varphi_-(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \xi^- = -\infty$ з імовірністю 1, $\rho_+ = cp_+$, $p_+ = |\lambda - c|c^{-1} > 0$),

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = p_+(c-i\alpha)(\rho_+ - i\alpha)^{-1}. \tag{2.36}$$

При $m = 0$, $\rho_\pm(s) \to 0$ $(s \to 0)$ $\varphi_\pm(s,\alpha) \to 0 \;\Rightarrow\; \xi^\pm = \pm\infty$ з імовірністю 1.

На основі другої ф.т. спільна генератриса $\{\tau^+(\cdot), \gamma^+(\cdot)\}$ визначається так:

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\theta_\mu)-u\gamma^+(\theta_\mu)}, \tau^+(\theta_\mu) < \infty\big] = \tag{2.37}$$
$$= \frac{\mu}{\mu-u}\left[1 - \frac{(c+\mu)(\rho_+(s)+u)}{(\rho_+(s)+\mu)(c+u)}\right] = \frac{\mu c q_+(s)}{(c+u)(\rho_+(s)+\mu)}.$$

З (2.37) після обернення відносно μ знаходимо, що

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \tag{2.38}$$
$$= \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(x)}, \xi^+(\theta_s) > x] = \frac{cq_+(s)}{c+u} e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0.$$

З (2.38) випливає, що $\xi^+(\theta_s)$, $\gamma^+(x)$ незалежні,

$$\mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(x)}, \xi^+(\theta_s) > x] =$$
$$= \mathbf{E}e^{-u\gamma^+(x)}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\}, \quad x > 0, \tag{2.39}$$

при цьому

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(x)} = \frac{c}{c+u}, \quad \mathbf{P}\{\gamma^+(x) > z\} = e^{-cz}, \quad z > 0,$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0,$$
$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = q_+(s)\rho_+^{-1}(s), \quad \mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = \rho_-^{-1}(s). \tag{2.40}$$

2.3 Спільний розподіл перестрибкових функціоналів

Нехай $\xi(t)$ — однорідний процес з н.п. і кумулянтою (1.17). Розглянемо функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \geq 0$ (вони вводились на початку § 1.2):

$$\gamma_1(x) = \gamma^+(x) =: \xi(\tau^+(x)) - x, \ \tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\},$$
$$\gamma_2(x) = \gamma_+(x) =: x - \xi(\tau^+(x) - 0),$$
$$\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \xi(\tau^+(x)) - \xi^+(\tau^+(x) - 0),$$

перший з них — перестрибок, другий — недострибок, третій — стрибок, що накриває рівень x. Для розподілів пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$

розглянемо генератриси

$$
\begin{aligned}
V_k(s,x,u_k) &= \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)-u_k\gamma_k(x)}, \tau^+(x)<\infty] = \\
&= \mathbf{E}[e^{-u_k\gamma_k(x)}, \xi^+(\theta_s)>x], \qquad (2.41)\\
V(s,x,u,v,\mu) &= \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)-u\gamma_1(x)-v\gamma_2(x)-\mu\gamma_3(x)}, \tau^+(x)<\infty].
\end{aligned}
$$

Для косо-східчастих процесів $\xi(t)$ зі знесенням $a \le 0$ мають місце очевидні стохастичні співвідношення

$$
\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta, & \xi + a\zeta > x, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi-a\zeta), & \xi + a\zeta \le x; \end{cases}
$$

$$
\gamma^+(x) \doteq \begin{cases} \xi + a\zeta - x, & \xi + a\zeta > x, \\ \gamma^+(x-\xi-a\zeta), & \xi + a\zeta \le x; \end{cases}
$$

$$
\gamma_+(x) \doteq \begin{cases} x - a\zeta, & \xi + a\zeta > x, \\ \gamma_+(x-\xi-a\zeta), & \xi + a\zeta \le x; \end{cases} \qquad \gamma_x^+ \doteq \gamma^+(x) + \gamma_+(x).
$$

Для спрощення при $a < 0$ покладемо $a = -1$, тоді на основі цих стохастичних співвідношень встановлюється інтегральне рівняння для $V_+(s,x) = I\{x \ge 0\}V(s,x)$

$$
\begin{aligned}
V_+(s,x) - \int_{-\infty}^{0} e^{(s+\lambda)y} \int_{-\infty}^{+\infty} V_+(s,x-y-z)\Pi(dz)dy = \\
= \int_{-\infty}^{0} e^{(s+\lambda)y} A(x-y)dy + G_-(s,x), \qquad (2.42)\\
G_-(s,x) = -\int_{-\infty}^{0} e^{(s+\lambda)y} \int_{-\infty}^{+\infty} V_+(s,x-y-z)\Pi(dz)dy, \quad x<0;\\
G_-(s,x) = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+\lambda)y} \int_{-\infty}^{+\infty} V_+(s,x+ay-z)\Pi(dz)dy, \quad a<0.
\end{aligned}
$$

При умові $\int_{\mathbf{R}} \Pi(dx) = \lambda < \infty$ позначимо $\lambda dF(x) = \Pi(dx)$, і при $a = 0$ рівняння (2.42) має спрощений вигляд

$$
\begin{aligned}
&(s+\lambda)V(s,x) - \lambda \int_{-\infty}^{x} V(s,x-y)dF(y) = A(x),\\
&A(x) = A(x,u,v,\mu) = \int_{x}^{\infty} e^{(u-v)x-(u+\mu)z}\Pi(dz),
\end{aligned}
$$

$$\Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad d\Pi_+(x) = -\Pi(dx), \quad x > 0,$$
$$\Pi_-(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad d\Pi_-(x) = \Pi(dx), \quad x < 0.$$

Позначимо $v(s,\alpha) = v_+(s,\alpha,u,v,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} V_+(s,x,u,v,\mu)dx$ і надалі припускаємо, що $|m| = |\mathbf{E}\xi(1)| < \infty$, $\mathbf{D}\xi(1) < \infty$,

$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = \int_0^\infty \bar{P}_+(s,x)dx < \infty. \tag{2.43}$$

Введемо ще позначення згорток:

$$G(s,x,u,v,\mu) = \int_{-\infty}^0 A(x-y,u,v,\mu)dP_-(s,y),$$
$$K(s,x) = G(s,x,0,0,0) = \int_{-\infty}^0 \Pi(x-y)dP_-(s,y),$$
$$G_1(s,x,u) = G(s,x,u,0,0), \quad G_2(s,x,v) = G(s,x,0,v,0),$$
$$G_3(s,x,\mu) = G(s,x,0,0,\mu), \quad G(s,x,u,v) = G(s,x,u,v,0),$$
$$\bar{A}(x,u,v,\mu) = A(x,u,v,\mu) - A(x,0,0,0)$$

та їх інтегральних перетворень

$$\widetilde{G}(s,\alpha,u,v,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} G(s,x,u,v,\mu)dx,$$
$$\widetilde{G}_k(s,\alpha,u_k) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} G_k(s,x,u_k)dx,$$
$$k(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} K(s,x)dx,$$
$$a(\alpha) = a(\alpha,u,v,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} A(x,u,v,\mu)dx,$$
$$\bar{a}(\alpha,u,v,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} \bar{A}(x,u,v,\mu)dx.$$

На підставі рівняння (2.42) встановлюється (див. [24, 51, 53])

Теорема 2.5. *В умовах* (2.43) *інтегральне перетворення генератриси спільного розподілу* (2.41) *перестрибкових функціоналів визначається співвідношеннями:*

$$sv(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\Big\{\frac{\sigma^2}{2}P'_-(s,0) +$$

$$+ [\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha,u,v,\mu)]_+^0\Big\}, \quad \sigma^2 > 0,$$

$$sv(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\Big\{[a]^+ p_-(s) +$$

$$+ [\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha,u,v,\mu)]_+^0\Big\}, \quad \sigma^2 = 0, \qquad (2.44)$$

де

$$p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\}, \quad [a]^+ = \max(0,a);$$

$$p_-(s) = 0, \quad \textit{якщо} \quad \int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) = \infty.$$

(2.44) *еквівалентне співвідношенню:*

$$sv(s,\alpha) = s\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{P}_+(s,x)dx +$$

$$+ \varphi_+(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)\bar{a}(\alpha,u,v,\mu)]_+^0. \qquad (2.45)$$

Доведення. Доведення проведемо спочатку для східчастих процесів ($a = 0$), застосувавши до спрощеного рівняння (2.42) одностороннє перетворення Фур'є, одержимо рівняння для $v(s,\alpha) = v_+(s,\alpha)$

$$v(s,\alpha)(s - \psi(\alpha)) = a(\alpha,u,v,\mu) - \lambda[\varphi(\alpha)v(s,\alpha)]_-^0, \qquad (2.46)$$

яке можна записати так ($\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}, a(\alpha) = a(\alpha,u,v,\mu)$):

$$sv(s,\alpha)\varphi(s,\alpha)^{-1} = a(\alpha) - \lambda[\varphi(\alpha)v(s,\alpha)]_-^0.$$

Отже, на основі о.ф.т. (див. (2.4)) та леми Вінера можна записати співвідношення

$$sv(s,\alpha)\varphi_+^{-1}(s,\alpha) = \{a(\alpha) - \lambda(s+\lambda)[\varphi(\alpha)v(s,\alpha)]_-^0\}\varphi_-(s,\alpha),$$

з якого після операції проектування випливає, що при $\sigma^2 = 0$

$$sv(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha,u,v,\mu)]_-^0. \qquad (2.47)$$

Якщо процес $\xi(t)$ — косо-східчастий з $a < 0$, тоді з рівняння (2.42) після інтегрального перетворення одержимо рівняння з $g_-(s,\alpha) = -[\lambda\varphi v(\alpha)/(s+\lambda - i\alpha s)]_-$

$$v(s,\alpha)(s - \psi(\alpha)) = a(\alpha) + \lambda(s+\lambda - i\alpha a)g_-(s,\alpha),$$

з якого так само як і з рівняння (2.46) виводиться співвідношення (2.47), тобто теорема 2.5 доведена для косо-східчастих процесів $\xi(t)$ з $a \le 0$.

Якщо $\xi(t)$ — косо-східчастий з $a > 0$, тоді співвідношення для $\tau^+(x)$ та $\gamma_k(x)$ $(k = \overline{1,3})$ трохи зміняться,

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} xa^{-1}, \quad a\zeta > x, \\ \zeta I(\xi + a\zeta > x) + [\zeta + \tau^+(x - \xi - a\zeta)] \times \\ \quad \times I\{(\xi + a\zeta \le x)(a\zeta \le x)\}; \end{cases}$$

$$\gamma^+(x) \doteq \begin{cases} 0, \quad a\zeta > x, \\ (\xi + a\zeta - x) I(\xi + a\zeta > x) + \gamma^+(x - \xi - a\zeta) \times \\ \quad \times I\{(\xi + a\zeta \le x)(a\zeta \le x)\}; \end{cases}$$

$$\gamma_+(x) \doteq \begin{cases} 0, \quad a\zeta > x, \\ (x - a\zeta) I(\xi + a\zeta > x) + \gamma_+(x - \xi - a\zeta) \times \\ \quad \times I\{(\xi + a\zeta \le x)(a\zeta \le x)\}. \end{cases}$$

З інтегрального рівняння, що випливає з цих співвідношень, після перетворення Фур'є випливає рівняння для $v(s,\alpha)$:

$$\begin{aligned} v(s,\alpha)(s - \psi(\alpha)) &= sv(s,\alpha)\varphi^{-1}(s,\alpha) = \\ &= a + a(\alpha) - \lambda(s + \lambda - i\alpha a) \left[\frac{\varphi(\alpha)v(s,\alpha)}{s + \lambda - i\alpha a}\right]_-^0 . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Застосувавши о.ф.т. та операцію проектування $[\ ]_+^0$ з рівняння (2.48) випливає, що при $a > 0$

$$sv(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\{ap_-(s) + [\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha,u,v,\mu)]_+^0\} \tag{2.49}$$

і теорема доведена для косо-східчастих процесів (див. другу частину в (2.44), де операції $[\ ]_+^0$ відповідає згадана вище згортка $G(s,x,\dots)$, $x > 0$).

Якщо $\xi(t)$ — довільний процес без дифузії, тоді можна вибрати послідовність апроксимуючих східчастих або косо-східчастих процесів з кумулянтою $\psi_n(\alpha) \to \psi(\alpha)$, для яких справедливе відповідне співвідношення (2.47) або (2.49) для $v_n(s,\alpha)$. В силу теореми 1.10 з розділу 1 граничним переходом $(n \to \infty)$ встановлюється справедливість теореми для довільного процесу $\xi(t)$ без дифузії. При цьому слід відмітити, що для чисто розривного процесу $\xi(t)$ з необмеженою варіацією

$$p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = 0.$$

Для процесів з обмеженою варіацією при $a < 0$ також $p_-(s) = 0$. Якщо $\xi(t)$ має дифузійну складову $\xi_0(t) = \sigma w(t)$ $(\sigma > 0)$, тоді крім апроксимуючої складової $\psi_n(\alpha)$ (для інтегральної частини $\psi(\alpha)$) слід вибрати послідовність$\psi_0^{(n)}(\alpha)$, що апроксимує $\psi_0(\alpha) = -\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2$,

$$\psi_0^{(n)}(\alpha) = \int_{|x|\le\frac{\sigma}{n}} (e^{i\alpha x} - 1)d\Pi_0^{(n)}(x),$$
$$\Pi_0^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}n^2, & -\dfrac{\sigma}{n} \le x < 0, \\ -\dfrac{1}{2}n^2, & 0 < x \le \dfrac{\sigma}{n}. \end{cases}$$

Тоді в правій частині рівняння $A_n(x)$ з'явиться додаткова складова:

$$A_0^{(n)}(x) = \frac{n}{\sigma^2} e^{(u-v)x-(u+\mu)\frac{\sigma}{n}} I\left\{0 < x \le \frac{\sigma}{n}\right\}.$$

Її наявність приводить до появи у проекційних дужках доданка $a_0^{(n)}(\alpha)$:

$$[\varphi_-^{(n)}(s,\alpha)a_0^{(n)}(\alpha)]_+^0 = \int_0^\infty e^{i\alpha x} G_+^{(n)}(x)dx,$$
$$G_+^{(n)}(x) = \frac{n^2}{2}\int_{x-\varepsilon\sigma}^0 e^{(u-v)(x-y)-(u+\mu)\frac{\sigma}{n}} dP_-^{(n)}(s,y), \quad x > 0.$$

Щоб знайти границю при $n \to \infty$ для інтегрального перетворення

$$g_+^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\sigma/n} e^{i\alpha x} G_+^{(n)}(x)dx =$$
$$= \frac{n^2}{2(i\alpha + u - v)} \int_{-\sigma/n}^0 e^{-\frac{\mu}{n}\sigma}[e^{i\alpha y + (i\alpha - v)\frac{\sigma}{n}} - e^{(v-u)y - u\frac{\sigma}{n}}]dP_-^{(n)}(s,y)$$

замінимо $\varepsilon = n^{-1}$ і відповідно

$$p_-^{(\varepsilon)}(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}P_-^{(n)}(s,x), \quad g_\varepsilon^+(\alpha) = g_+^{(n)}(\alpha),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon^+(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma}{i\alpha+u-v}\frac{1}{\sigma\varepsilon} \times$$
$$\times \int_{-\varepsilon\sigma}^{0} p_-^\varepsilon(s,y)(y+\varepsilon\sigma)(i\alpha+u-v)\frac{dy}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma^2 p_-(s,0). \qquad (2.50)$$

Отже, з (2.50) випливає перша частина формули (2.44) і теорема доведена для довільного процесу з дифузійною компонентою $\sigma^2 \geq 0$.

Якщо підставити $u = v = \mu = 0$, тоді

$$v_+(s,\alpha,0,0,0) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{P}_+(s,x)dx =$$
$$= \varphi_+(s,\alpha)\left\{sC_*(s) + [\varphi_-(s,\alpha)a(\alpha)]_+^0\right\},$$

де

$$C_*(s) = \begin{cases} (2s)^{-1}\sigma^2 P_-'(s,0), & \sigma > 0, \\ s^{-1}p_-(s)[a]^+, & \sigma = 0, \quad [a]^+ = \max(0,a). \end{cases}$$

Тоді з (2.44) випливає (2.45) і теорема 2.5 повністю доведена. □

З теореми 2.5 випливає (див. [24, 51, 53])

Наслідок 2.2. *В умовах теореми* 2.5 *генератриса спільного розподілу* $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ $(k=\overline{1,3})$ *визначається співвідношенням:*

$$V(s,x,u,v,\mu) = C_*(s)P_+'(s,x) + \qquad (2.51)$$
$$+ s^{-1}\int_0^x G(s,x-y,u,v,\mu)dP_+(s,y), \quad x > 0,$$

$p_-(s) = 0$, *якщо* $\int_{|x|\leq 1}|x|\Pi(dx) = \infty$; $G(s,x) = A(x) * P_-'(s,x)$.

Розподіл $\xi^+(\theta_s)$ *визначає х.ф.*

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{1}{1 - i\alpha(C_*(s) + s^{-1}k(s,\alpha))},$$
$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = C_*(s) + s^{-1}k(s,0). \qquad (2.52)$$

Згідно (2.45) $V(s,x)$ *виражається через центровану згортку:*

$$\bar{G}(s,x,u,v,\mu) = G(s,x,u,v,\mu) - G(s,x,0,0,0),$$
$$sV(s,x) = s\bar{P}_+(s,x) + \int_{-0}^x \bar{G}(s,x-y)dP_+(s,y), \quad x > 0. \qquad (2.53)$$

Для генератрис пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ $(k = \overline{1,3})$ *справедливі співвідношення:*

$$s\int_0^\infty e^{-u_k z}\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_k(x) > z, \tau^+(x) < \infty]dz = \tag{2.54}$$
$$= -u_k^{-1}\int_{-0}^{x} \bar{G}_k(s, x-y, u_k)dP_+(s,y), \quad x > 0, \quad k = \overline{1,3}.$$

Якщо $C_*(s) > 0$*, тоді при* $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x, \gamma_k(x) = 0, k = \overline{1,3}\} = C_*(s)P'_+(s,x), \tag{2.55}$$
$$\mathbf{P}\{\gamma_k(x) = 0|\xi^+(\theta_s) > x\} = -(\ln \overline{P}_+(s,x))'_x C_*(s).$$

Якщо умовна х.ф. стрибків $\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k > 0] = c(c-i\alpha)^{-1}$*, тоді формула* (2.52) *набуває вигляду:*

$$\varphi_+(s,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{c-i\alpha}{c - i\alpha(1+\lambda s^{-1}\varphi_-(s,-ic))} = \\ \quad = \dfrac{p_+(s)(c-i\alpha)}{cp_+(s) - i\alpha}, \qquad C_*(s) = 0; \\ \dfrac{c-i\alpha}{(1-i\alpha C_*(s))(c-i\alpha) - i\alpha\varphi_-(s,-ic)s^{-1}}, \\ C_*(s) > 0. \end{cases} \tag{2.56}$$
$$p_+(s) = (1+\lambda s^{-1}\varphi_-(s,-ic))^{-1} = (1+\mathbf{E}\xi^+(\theta_s))^{-1},$$
$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = \frac{\lambda}{s}\varphi_-(s,-ic), \quad \text{якщо } C_*(s) = 0.$$

Доведення. З (2.44) після обернення по u випливає (2.51). Зауважимо, що

$$v(s,\alpha,0,0,0) = \frac{1}{i\alpha}(\varphi_+(s,\alpha) - 1), \quad \widetilde{G}(s,\alpha,0,0,0) = k(s,\alpha).$$

Тому з (2.51) після інтегрального перетворення по x при $u = v = \mu = 0$ одержимо (2.52). Для доведення (2.54) слід врахувати, що при інтегруванні частинами встановлюється співвідношення:

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x) - u_k\gamma_k(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \mathbf{E}[e^{-u_k\gamma_k(x)}, \xi^+(\theta_s) > x] =$$
$$= \bar{P}_+(s,x) + u_k\int_0^\infty e^{-u_k z}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x, \gamma_k(x) > z\}dz.$$

Тоді з (2.45) при $u = u_1 (v = \mu = 0)$; $v = u_2$, $u = \mu = 0$; $\mu = u_3$, $u = v = 0$ виводяться формули (2.54) з

$$\bar{A}_k(x, u_k) = \bar{A}(x, u_1, u_2, u_3)|_{u_r=0, r\neq k}.$$

Щоб довести (2.55), слід підставити $u = v = \mu = \infty$ в (2.51).

За умов невиродженості розподілу пари $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ розподіл $\xi^+(\theta_s)$ виражається через її (пари) генератрису (див. теорема 2.2 з розділу 2). Для довільного процесу $\xi(t)$ (2.52) визначає розподіл $\xi^+(\theta_s)$ в термінах $k(s, \alpha)$. Ці два способи визначення розподілу $\xi^+(\theta_s)$ значно простіші за формули Спітцера. Якщо для $\xi(t)$ виконується умова $\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}/\xi_k > 0] = c(c - i\alpha)^{-1}$, тоді

$$\Pi(x) = \lambda\bar{F}(x) = \lambda e^{-cx},$$
$$K(s, x) = \lambda e^{-cx} \int_{-\infty}^{0} e^{cy} dP_-(s, y), \quad x > 0,$$

тобто

$$K(s, x) = \lambda\varphi_-(s, -ic)e^{-cx}, \quad k(s, \alpha) = \frac{\lambda\varphi_-(s, -ic)}{c - i\alpha}, \quad x > 0.$$

Звідси на основі (2.52) доводиться (2.56). □

При умові невиродженості розподілу $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ і відповідно при умові $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ має місце

Наслідок 2.3. *Якщо розподіл пари $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ невироджений в умовах теореми 2.5, тоді розподіли пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$, $k = \overline{1,3}$ також невироджені і визначаються співвідношеннями:*

$$s\int_0^\infty e^{-u_k z}\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_k(0) > z]dz = -u_k^{-1}\bar{G}_k(s, 0, u_k)p_+(s), \quad (2.57)$$

$$\bar{G}_1(s, 0, u) = \int_0^\infty \Pi(dz) \int_{-z}^{0} (e^{-u(y+z)} - 1)dP_-(s, y) =$$
$$= -u\int_0^\infty e^{-uz} \int_{-\infty}^{0} \Pi(z - y)dP_-(s, y)dz,$$
$$\bar{G}_2(s, 0, v) = \int_0^\infty \Pi(dz) \int_{-z}^{0} (e^{vy} - 1)dP_-(s, y) =$$
$$= \int_0^\infty (e^{-vz} - 1)\Pi(z)dP_-(s, z),$$

$$\bar{G}_3(s,0,\mu) = \int_0^\infty (e^{-\mu z} - 1)\Pi(dz)\mathbf{P}\{-z \le \xi^-(\theta_s) \le 0\}.$$

Після обернення (2.57) по u_k знаходимо

$$\begin{aligned}
&s\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = p_+(s)\int_{-\infty}^0 \Pi(z-y)dP_-(s,y),\\
&s\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > z\} = p_+(s)\int_z^\infty \Pi(y)dP_-(s,-y), \qquad (2.58)\\
&s\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > z\} = p_+(s)\int_z^\infty \mathbf{P}\{|\xi^-(\theta_s)| \le y\}d\Pi(y).
\end{aligned}$$

Для довільного процесу $\xi(t)$ з н.п. при $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, х.ф. ξ^+ визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \left[1 - i\alpha C_*(0) - \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)d\mathcal{M}(x)\right]^{-1}, \qquad (2.59)$$

$$\mathcal{M}(x) = \int_{-\infty}^0 \Pi(x-y)d\mathbf{E}\tau^-(y), x > 0, \mathcal{M}(x) \nearrow 0 \text{ при } x \to \infty,$$

$$C_*(0) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\displaystyle\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\}dt\right]_{x=0}, & \sigma^2 > 0,\\ [a]^+|m|^{-1}, \quad \sigma = 0, & \displaystyle\int_{|x|\le 1}|x|\Pi(dx) < \infty. \end{cases}$$

Якщо $C_*(0) = 0$, тоді

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{1}{1 + |\mathcal{M}(0)| - |\mathcal{M}(0)|\widetilde{\varphi}(\alpha)} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \qquad (2.60)$$

$$\widetilde{\varphi}(\alpha) = |\mathcal{M}(0)|^{-1}\int_0^\infty e^{i\alpha x}d\mathcal{M}(x) = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+ > 0].$$

Якщо процес $\xi(t)$ неперервний знизу з $\sigma^2 = 0$ ($a < 0$, $m < 0$), тоді $C_*(0) = 0$, $p_+ = |m||a|^{-1}$, $\mathbf{E}\tau^-(x) = |m|^{-1}|x|$,

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{|m|}\int_x^\infty \Pi(y)dy,\ x > 0,\ \widetilde{\Pi}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi(x)dx,$$

$$\widetilde{\varphi}(\alpha) = \left[\int_0^\infty \bar{F}(x)dx\right]^{-1}\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{F}(x)dx = \widetilde{\Pi}(\alpha)\widetilde{\Pi}^{-1}(0),$$

а (2.60) збігається з класичною формулою Полячека–Хінчина.

Доведення. Співвідношення (2.57) випливає з (2.54), якщо підставити $x = 0$. Остання частина рівностей для $\bar{G}_{1,2}(s,0)$ одержується після інтегрування частинами із заміною $\Pi(dz)$ на $-d\Pi(z)$. Після обернення (2.57) відносно $u_{1,2}$ одержимо (2.58).

Якщо $m < 0$, тоді із (2.52) випливає, що

$$\lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = [1 - i\alpha(C_*(0) + k_s'(0,\alpha))]^{-1}.$$

Слід зауважити, що

$$\begin{aligned}
s^{-1}K(s,x) = -s^{-1}\int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)d\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) > y\} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} K_s'(0,x) = \\
= -\int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)dy\left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau^-(y) > t\}dt\right) = \\
= -\int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)d\mathbf{E}\tau^-(y).
\end{aligned}$$

Тоді після інтегрування частинами знаходимо

$$i\alpha k_s'(0,\alpha) = -i\alpha\int_0^\infty e^{i\alpha x}\mathcal{M}(x)dx = \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)d\mathcal{M}(x).$$

Отже (2.59) доведено.

Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес, тоді після обернення $\varphi_-(s,\alpha)$ (див. (1.72)) встановлюється, що при $m \le 0$

$$\begin{aligned}
&P_-(s,y) = \mathbf{E}e^{-s\tau^-(y)} = e^{\rho_-(s)y}, \quad y < 0, \quad \mathbf{P}\{\tau^-(y) < \infty\} = 1,\\
&\mathbf{E}\tau^-(y) = y\rho_-'(0), \quad \rho_-'(0) = |m|^{-1}, \quad \text{при } m < 0, \text{ тому}\\
&\mathcal{M}(x) = \int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)d\mathbf{E}\tau^-(y) = -|m|^{-1}\int_x^\infty \Pi(y)dy.
\end{aligned}$$

Якщо позначити через $\xi_*(t)$ монотонно зростаючий процес з кумулянтою

$$\psi_*(\alpha) = i\alpha a_* + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)d\mathcal{M}(x), \quad a_* = C_*(0),$$

тоді (2.59) можна записати так

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(\theta')}, \quad \mathbf{P}\{\theta' > t\} = e^{-t}, \quad t \ge 0.$$

Отже при умові $m < 0$ без обмежень напівнеперервності $\xi^+ \doteq \xi_*(\theta')$, де $\xi_*(t)$ монотонно зростаючий процес із невід'ємним знесенням і відповідною мірою Леві

$$a_* = C_*(0) \geq 0, \quad \Pi_*(dx) = d\mathcal{M}(x), \quad x > 0.$$

Якщо для кумулянти $\psi(\alpha)$ процесу $\xi(t)$ виконується одна з умов

$$\sigma > 0 \quad \text{або} \quad \left\{ a > 0, \int_{|x|\leq 1} |x|\Pi(dx) < \infty \right\},$$

тоді $a_* = C_*(0) > 0$. Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес з $\sigma > 0$, тоді $C_*(s) = \frac{\sigma^2}{2s}\rho_-(s) > 0$, і тоді в (2.59) при $m < 0$ $C_*(0) = \frac{\sigma^2}{2}|m| > 0$.

Якщо $a_* = 0$, тоді з (2.59) легко одержати (2.60), при цьому в останній частині (2.60) p_+ знаходиться граничним переходом ($\alpha \to \infty$)

$$p_+ = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{1 + |\mathcal{M}(0)| - |\mathcal{M}(0)|\widetilde{\varphi}(\alpha)} = \frac{1}{1 + |\mathcal{M}(0)|},$$
$$q_+ = \frac{|\mathcal{M}(0)|}{1 + |\mathcal{M}(0)|}.$$

Порівнюючи формулу (2.60) з (2.33) в § 2.2, знаходимо, що

$$\mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(0)}/\xi^+ > 0] = \widetilde{\varphi}(iu) = |\mathcal{M}(0)|^{-1} \int_0^\infty e^{-ux} d\mathcal{M}(x).$$

Отже обидві формули (2.60) та (2.33) встановлюються без умови напівнеперервності знизу процесу $\xi(t)$. Тому їх можна розглядати як узагальнення формули Полячека–Хінчина. Якщо $\xi(t)$ — напівнеперервний складний пуассонівський процес, тоді при $m = a + \lambda\mu < 0$ ($\mu = \mathbf{E}\xi_1 > 0$), $a < 0$,

$$d\mathcal{M}(x) = |m|^{-1}\lambda\bar{F}(x)dx, x > 0,$$
$$|\mathcal{M}(0)| = |m|^{-1}\lambda\mu, \quad |m| = |a| - \lambda\mu,$$

і справа в першому рядку в (2.60) одержується класична формула Полячека–Хінчина

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \quad q_+ = \frac{\lambda\mu}{|a|}, \quad \widetilde{\varphi}(\alpha) = \mu^{-1} \int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{F}(x)dx,$$

$$p_+ = [1 + |\mathcal{M}(0)|]^{-1} = [1 + |m|^{-1}\lambda\mu]^{-1} = 1 - \frac{\lambda\mu}{|a|} = |m||a|^{-1},$$

і наслідок 2.3 повністю доведено. □

У випадку напівнеперервності знизу розподіл $\xi^-(\theta_s)$ має показниковий розподіл. Тоді значно спрощуються всі співвідношення з наслідків 2.2, 2.3 і виражаються в термінах інтегральних перетворень

$$\int_0^\infty e^{-u_k z}\Pi(dz), \quad k = \overline{1,3}, \quad \int_0^\infty e^{-\rho(s)z}\Pi(z)dz = \widetilde{\Pi}(\rho(s)).$$

2.4 Розподіл часу перебування над рівнем

Позначимо час перебування процесу $\xi(t)$ над фіксованим рівнем x та його генератрису відповідно (див. [29, 30, 32])

$$Q_{(x,\infty)}(t) = Q_x(t) = \int_0^t I\{\xi(u) > x\}du,$$
$$D_{x,t}(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{(x,\infty)}(t)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Окремо розглянемо випадки для х.ф. $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)}$:

1) $\psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda[\varphi(\alpha) - 1], \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_K}, \quad \lambda > 0;$

2) $\psi(\alpha) = i\alpha a - \dfrac{\alpha^2}{2}\sigma^2 + \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx),$

$\displaystyle\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty;$

3) $\psi(\alpha) = i\alpha a - \dfrac{\alpha^2}{2}\sigma^2 + \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x I_{\{|x|\le 1\}})\Pi(dx),$

$\displaystyle\int_{|x|\le 1} |x|^2\Pi(dx) < \infty, \quad \int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) = \infty.$

У випадку 1) з $a = 0$ $\xi(t)$ — східчастий процес, а з $a \neq 0$ — косо-східчастий. У випадку 2) з $\sigma = 0$ $\xi(t)$ — процес з обмеженою варіацією. У випадку 2) з $\sigma > 0$ та у випадку 3) $\xi(t)$ — процес з необмеженою варіацією. Зауважимо, що $D_{x,t}(\mu), -\infty < x < +\infty$, та його перетворення (Лапласа–Карсона)

$$D_x(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{(x,\infty)}(\theta_s)}, \quad \mathbf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}, \quad s > 0,$$

можуть бути розривними лише в тих точках x, для яких

$$Q_{\{x\}}(t) = \int_0^t I\{\xi(u) = x\} du > 0.$$

Для несхідчастих $\xi(t)$ $Q_{\{x\}}(t) = 0$ майже напевно, отже, для них $D_{x,t}(\mu)$ та $D_x(s,\mu)$ неперервні по x. Для східчастих процесів з неперервним розподілом стрибків $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ $D_x(s,\mu)$ має розрив лише при $x = 0$, оскільки $Q_{\{0\}}(t) > 0$. Легко перевірити, що

$$\lim_{x\to+\infty} D_x(s,\mu) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} D_x(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}. \tag{2.61}$$

Для східчастих процесів ($a = 0$) виконуються стохастичні співвідношення:

$$\begin{gathered}
Q_{(x,\infty)}(t) \doteq \begin{cases} 0, \quad \zeta > t, \quad \mathbf{P}\{\zeta > t\} = e^{-\lambda t}; \\ Q_{(x-\xi,\infty)}(t-\zeta), \quad \zeta \le t, \quad x \ge 0; \end{cases} \\
Q_{(x,\infty)}(t) \doteq \begin{cases} t, \quad \zeta > t; \\ \zeta + Q_{(x-\xi,\infty)}(t-\zeta), \quad \zeta \le t, \quad x < 0. \end{cases}
\end{gathered} \tag{2.62}$$

На основі стохастичних співвідношень (2.62) неважко вивести інтегральні рівняння для $D_x = D_x(s,\mu)$:

$$\begin{aligned}
D_x^+ &= \frac{1}{s+\lambda}\left[s + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D_{x-z} dF(z)\right] I\{x \ge 0\}, \\
D_x^- &= \frac{1}{s+\lambda+\mu}\left[s + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D_{x-z} dF(z)\right] I\{x < 0\}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Їх можна об'єднати в одне рівняння при $-\infty < x < +\infty$

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda) D_x I\{x \ge 0\} + (s+\lambda+\mu) D_x I\{x < 0\} = \\
&\qquad = s + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D_{x-z} dF(z),
\end{aligned}$$

яке після перетворення Фур'є–Стілт'єса запишеться так:

$$(s+\lambda)(D_{+0}+\hat{D}_+(\alpha))+(s+\lambda+\mu)(\hat{D}_-(\alpha)-D_{-0})= \\ =\lambda\varphi(\alpha)\hat{D}(\alpha); \text{ оскільки при } x<0 \\ D_x(t)=D_{(x,0)}(t)+D_{\{0\}}(t)+D_0(t), \text{ то} \\ \hat{D}_\pm(\alpha)=\pm\int_{\pm 0}^{\pm\infty} e^{i\alpha x}dD_x^\pm(s,\mu), \\ \hat{D}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}dD_x=\hat{D}_+(\alpha)+D_{+0}+\hat{D}_-(\alpha)-D_{-0}.$$

Звідси після нескладних перетворень випливає рівняння:

$$(s-\psi(\alpha))(D_{+0}+\hat{D}_+(\alpha))+ \\ +(s+\lambda-\psi(\alpha))(\hat{D}_-(\alpha)-D_{-0})=0. \tag{2.64}$$

Для косо-східчастих процесів з $a\neq 0$ стохастичне співвідношення трохи ускладнюється, але рівняння для (2.64) для $\hat{D}_\pm(\alpha)$ і $\hat{D}(\alpha)$ не міняє вигляду (тільки в кумулянті $\psi(\alpha)$ появиться доданок $i\alpha a$).

Перш, ніж сформулювати теорему про розподіл $Q_{(x,\infty)}(\theta_s) = Q_x(\theta_s)$, наведемо ще одну факторизаційну лему для $\varphi(s+\mu,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\theta_{s+\mu})}$, яка випливає з о.ф.т. та співвідношення

$$\frac{s-\psi(\alpha)}{s+\mu-\psi(\alpha)}=1-\frac{\mu}{s+\mu}\varphi(s+\mu,\alpha)=\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi(s+\mu,\alpha)}{\varphi(s,\alpha)}.$$

Лема 2.1. *Має місце факторизаційний розклад:*

$$1-\frac{\mu}{s+\mu}\varphi(s+\mu,\alpha)=\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}, \\ \operatorname{Im}\alpha=0. \tag{2.65}$$

Якщо позначити $D_x^\pm = D_x(s,\mu)I\{\pm x\geq 0\}$, *тоді при зростанні* x $(x\uparrow)$ *функції* $\pm D_x^\pm$ *монотонно зростають і мають місце співвідношення:*

$$d_\pm(\alpha,s,\mu)=\int_{\mathbf{R}^\pm} e^{i\alpha x}dD_x^\pm(s,\mu)=\hat{D}_\pm(\alpha,s,\mu)\pm D_{\pm 0}(s,\mu), \\ \mathbf{E}e^{\mu Q_{\{0\}}(\theta_s)}=D_{+0}(s,\mu)-D_{-0}(s,\mu) \quad (a=0). \tag{2.66}$$

На основі(2.65) встановлюється (див. [32])

Теорема 2.6. *Для східчастих процесів* $D_{+0} \neq D_{-0}$

$$\int_{-0}^{+\infty} e^{i\alpha x} d_x D_x^+ = \hat{D}_+(\alpha) + D_{+0}(s,\mu) = \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}, \tag{2.67}$$

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{i\alpha x} d_x D_x^- = \hat{D}_-(\alpha) - D_{-0}(s,\mu) = -\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}{\varphi_-(s,\alpha)};$$

$$D_{+0}(s,\mu) = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)}, \quad p_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\},$$

$$D_{-0}(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{p_-(s+\mu)}{p_-(s)}. \tag{2.68}$$

Для несхідчастих процесів $D_{\pm 0}(s,\mu) = D_0(s,\mu) = \mathbf{E} e^{-\mu Q_0(\theta_s)}$

$$D_0(s,\mu) = \left[\frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}\right]_-^0 = \exp\{N_s^+(0) - N_{s+\mu}^+(0)\},$$

$$N_s^+(0) = -\int_0^\infty t^{-1} e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt; \tag{2.69}$$

$$\int_{-0}^{+\infty} e^{i\alpha x} d_x D_x^+(s,\mu) = \hat{D}_+(\alpha) + D_0(s,\mu) = \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}, \tag{2.70}$$

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{i\alpha x} d_x D_x^-(s,\mu) = \hat{D}_-(\alpha) - D_0(s,\mu) = -\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}{\varphi_-(s,\alpha)},$$

При $s \to 0$ *і* $m < 0$

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x} d_x E e^{-\mu Q_x(\infty)} = \lim_{s\to 0}\frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi(s+\mu,\alpha)} = \frac{\varphi_+(\alpha)}{\varphi_+(\mu,\alpha)}, \tag{2.71}$$

$$D_0(0,\mu) = \exp\left\{\int_0^\infty t^{-1}(e^{-\mu t} - 1)\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt\right\}.$$

Доведення. Для східчастих процесів з (2.64) випливає рівняння:

$$\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi(s+\mu,\alpha)}{\varphi(s,\alpha)}(\hat{D}_+(\alpha) + D_{+0}) = D_{-0} - \widehat{D}_-(\alpha).$$

Застосувавши о.ф.т., на підставі леми Вінера з останнього рівняння знаходимо співвідношення:

$$\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}{\varphi_+(s,\alpha)} d_+(\alpha,s,\mu) = d_-(\alpha,s,\mu)\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\varphi_-(s+\mu,\alpha)},$$

з якого після операції проектування $[\ ]_+^0$ випливає, що

$$\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}{\varphi_+(s,\alpha)}(\hat{D}_+(\alpha)+D_{+0})=\frac{p_-(s)}{p_-(s+\mu)}D_{-0}. \tag{2.72}$$

З першої умови (2.61) та з (2.72) при $\alpha\to 0$ знаходимо, що

$$\hat{D}_+(\alpha)\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 1-D_{+0};\quad \frac{s}{s+\mu}(1-D_{+0}+D_{+0})=\frac{p_-(s)}{p_-(s+\mu)}D_{-0}.$$

Останнє співвідношення визначає D_{-0} в (2.68).

Аналогічно після операції проектування $[\ ]_-^0$ знаходимо

$$(D_{-0}-\hat{D}_-(\alpha))\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}=\frac{s}{s+\mu}D_{+0}\frac{p_+(s+\mu)}{p_+(s)}. \tag{2.73}$$

З другої умови (2.61) та (2.73) при $\alpha\to 0$ знаходимо, що

$$\hat{D}_-(\alpha)\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} D_{-0}-\frac{s}{s+\mu},\quad \frac{s}{s+\mu}=\frac{s}{s+\mu}D_{+0}\frac{p_+(s+\mu)}{p_+(s)},$$

тобто — співвідношення для D_{+0} в (2.68). Підставивши значення D_{-0} в (2.72) та D_{+0} в (2.73), одержимо співвідношення (2.67).

Доведення для несхідчастих процесів грунтується на інтегро-диференціальному рівнянні, яке виводиться для генератриси адитивного функціоналу

$$Q_x^{(n)}(t)=\int_0^t g_n(\xi(u)-x)du,\quad D_x^{(n)}(s,\mu)=\mathbf{E}e^{-\mu Q_x^{(n)}(\theta_s)},$$

$\{g_n(x)\}$ — послідовність обмежених монотонних двічі диференційовних функцій, наприклад $g_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} nx\to g(x)=I\{x>0\}$.

Виведення рівняння наводиться в [110, § 28, 1964] і повне доведення (2.69) та (2.70) можна знайти в [29, 32].

Зауважимо, що значення проекцій

$$C_-(s,\mu)=\left[\frac{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}{\varphi_+(s,\alpha)}\right]_-^0=\exp\{N_{s+\mu}^+(0)-N_s^+(0)\},$$

$$C_+(s,\mu)=\left[\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}\right]_+^0=\exp\{N_s^-(0)-N_{s+\mu}^-(0)\},$$

$$N_s^-(0)=\int_0^\infty t^{-1}e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}dt \tag{2.74}$$

випливає із формул Спітцера–Рогозіна. □

Позначимо генератриси спільного розподілу $\{\xi(\theta_s), Q_x(\theta_s)\}$

$$L(x,s,\mu,u) = \mathbf{E}e^{-u\xi(\theta_s)-\mu Q_x(\theta_s)},$$
$$L_+(x) = L(x)I(x>0), \quad L_-(x) = L(x)I(x<0).$$

При цьому $L_\pm(\infty) = L_\pm(\pm\infty, s, \mu, u)$,

$$L_+(\infty) = \frac{s}{s-k(u)} = \varphi(s,iu),\ \ k(u) = \psi(iu),$$
$$L_-(-\infty) = \frac{s^2}{(s+\mu)(s-k(u))} = \frac{s}{s+\mu}\varphi(s,iu).$$

Для східчастих процесів на основі стохастичних співвідношень для $Q_x(t)$ та $\xi(t)$ виводяться рівняння:

$$L_+(x) = \frac{s}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{s+\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uz}L(x-z)dF(z), \quad x>0, \tag{2.75}$$
$$L_-(x) = \frac{s}{s+\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{s+\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uz}L(x-z)dF(z), \quad x<0.$$

Позначимо

$$l(v,s,\mu,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vx}dL(x), \quad l_\pm(v) = \pm\int_{\mp 0}^{\pm\infty} e^{-vx}dL(x),$$
$$\widetilde{d}_+(u) = \int_{-0}^{+\infty} e^{-ux}dD_x^+(s,\mu) = \frac{\varphi_+(s,iu)}{\varphi_+(s+\mu,iu)},$$
$$\widetilde{d}_-(u) = \int_{-\infty}^{+0} e^{-ux}dD_x^-(s,\mu) = -\frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_-(s+\mu,iu)}{\varphi_-(s,iu)}.$$

Дещо узагальнює теорему 2.6 наступне твердження

Теорема 2.7. *Генератриси $l_\pm(v)$ визначаються співвідношеннями:*

$$l_+(v) = \varphi_-(s,iu)\varphi_+(s+\mu,iu)\widetilde{d}_+(v+u),$$
$$l_-(v) = \varphi(s,iu)\frac{\varphi_-(s,iu)}{\varphi_-(s+\mu,iu)}\widetilde{d}_-(v+u). \tag{2.76}$$

Для східчастих процесів

$$L(+0,s,\mu,u) = \frac{p_+(s)\varphi_-(s,iu)\varphi(s,u)}{p_+(s+\mu)\varphi_-(s+\mu,iu)},$$

$$L(-0,s,\mu,u)=\frac{s}{s+\mu}\frac{p_+(s+\mu)}{p_+(s)}\varphi_-(s,iu)\varphi_+(s+\mu,iu). \tag{2.77}$$

Для несхідчастих процесів

$$L(\pm 0)=L(0)=\frac{\varphi_-(s,iu)\varphi(s,iu)}{\varphi_-(s+\mu,iu)}e^{N_s^+(0)-N_{s+\mu}^+(0)}. \tag{2.78}$$

Похідні (в узагальненому сенсі) $L'_\pm(x)$ визначаються співвідношеннями:

$$L'_+(x)=\varphi_-(s,iu)\varphi_+(s+\mu,iu)e^{-ux}\frac{\partial}{\partial x}D_x^+(s,\mu),\quad x>0,$$
$$L'_-(x)=\varphi(s,iu)\frac{\varphi_-(s,iu)}{\varphi_-(s+\mu,iu)}e^{ux}\frac{\partial}{\partial x}D_x^-(s,\mu),\quad x<0. \tag{2.79}$$

Доведення. З рівнянь (2.75) випливає рівняння

$$s\varphi^{-1}(s,i(u+v))l_+(\alpha)=-l_-(\alpha)(s+\mu)\varphi^{-1}(s+\mu,i(u+v)).$$

За допомогою процедур, аналогічних тим, які використовувались при доведенні теореми 2.6 на основі граничних значень

$$l_+(0)=L_+(+\infty)=\varphi(s,iu),\quad l_-(0)=-L(-\infty)=\frac{s}{s+\lambda}\varphi(s,iu)$$

доводяться всі співвідношення теореми 2.7. □

Приклад 2.2. Нехай $\xi(t)=at+w(t)$. Знайти компоненти о.ф.т., для $\varphi(s,\alpha)$, $D_0(s,\mu)$ та $\mathbf{D}_x^\pm(s,\mu)$.

$\xi(t)$ — процес броунівського руху (неперервний і зверху, і знизу) з $m=a$, $D\xi(1)=1$, для якого

$$\psi(\alpha)=i\alpha a-\frac{\alpha^2}{2},\quad \varphi(s,\alpha)=\frac{s}{s-\psi(\alpha)}=\frac{2s}{2s+2i\alpha a-\alpha^2}.$$

Рівняння Лундберга зводиться до квадратного з дискримінантом $D_s=4a^2+8s>0$

$$r^2+2ar-2s=0,\quad r_{1,2}(s)=\mp\rho_\mp(s);\quad \rho_\pm(s)=\sqrt{2s+a^2}\mp a.$$

Корені $r_{1,2}(s)$ визначають компоненти о.ф.т.

$$\varphi_\pm(\alpha)=\frac{\rho_\pm(s)}{\rho_\pm(s)\mp i\alpha}\quad (\rho_+(s)\rho_-(s)=2s). \tag{2.80}$$

Згідно (2.70) знаходимо

$$d_+(\alpha) = \hat{D}_+(\alpha) + D_0(s,\mu) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)} \frac{\rho_+(s+\mu) - i\alpha}{\rho_+(s) - i\alpha},$$

$$D_0(s,\mu) = \lim_{i\alpha \to -\infty} d_+(\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)}. \tag{2.81}$$

Отже,

$$\hat{D}_+(\alpha) = \frac{\rho_+(s+\mu) - \rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)} \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}. \tag{2.82}$$

Обернувши (2.82), маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^+(s,\mu) = \frac{\rho_+(s+\mu) - \rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)} \rho_+(s) e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \tag{2.83}$$

З умови (2.61) та (2.83) випливає, що при $x > 0$

$$D_x^+(s,\mu) = \mathbf{E} e^{-\mu Q_x(\theta_s)} =$$
$$= 1 - \frac{\rho_+(s+\mu) - \rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)} e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \tag{2.84}$$

Згідно з другим співвідношенням (2.70) визначається

$$d_-(\alpha) = -\frac{s}{s+\mu} \frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)} \frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s+\mu) - i\alpha}$$
$$\left(\frac{s}{s+\mu} = \frac{\rho_+(s)\rho_-(s)}{\rho_+(s+\mu)\rho_-(s+\mu)} \right),$$
$$\hat{D}_-(\alpha) = d_-(\alpha) + D_0(s,\mu) =$$
$$= \frac{s}{s+\mu} \frac{\rho_-(s+\mu) - \rho_-(s)}{\rho_-(s+\mu) - i\alpha} \frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}, \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x^- = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)} (\rho_-(s+\mu) - \rho_-(s)) e^{\rho_-(s+\mu)x}, \quad x < 0. \tag{2.86}$$

Отже, з (2.61) та (2.86) випливає, що при $x < 0$

$$D_x^-(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu} \left[1 - \frac{\rho_-(s) - \rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)} e^{\rho_-(s+\mu)x} \right]. \tag{2.87}$$

Для броунівського руху ($\sigma = 1$, $a \neq 0$) $\rho_+'(s) = (2s + a^2)^{-\frac{1}{2}}$, отже

$$\mathbf{E}Q_0(\theta_s) = \frac{1}{2s + a^2 - a\sqrt{2s + a^2}} \underset{s\to 0}{\to} \mathbf{E}Q_0(\infty) = \frac{1}{2a^2 I\{a < 0\}}.$$

Якщо $a = 0$, то $\mathbf{E}Q_0(\theta_s) = (2s)^{-1}$, це означає (див. 1-й стовпчик в (1.97)), що $\mathbf{E}Q_0(t) = 2^{-1}t \to \infty$ при $t \to \infty$.

Якщо $a = 0$, тоді $\rho_\pm(s) = \sqrt{2s}$, $D_0(s, \mu) = \sqrt{\frac{s}{s+\mu}}$. Отже,

$$s \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{E} e^{-\mu Q_0(t)} dt = \sqrt{\frac{s}{s + \mu}}. \tag{2.88}$$

Згідно з таблицею інтегральних перетворень (див. (1.97) або [82]) після обернення по s та μ одержимо розподіл $Q_0(t)$, який був знайдений іншим способом у наслідку 1.1 (див. (1.52)),

$$\mathbf{P}\{Q_0(t) < x\} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\frac{x}{t}} \quad (0 \le x \le t,\ Q_0(t) = z(t, 0)). \tag{2.89}$$

Приклад 2.3. Нехай $\xi(t) = -t + S(t)$ (див. приклад 2.1 § 2.2)

$$S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \varphi(\alpha) = \frac{c}{c - i\alpha}, \quad c > 0, \quad m = \frac{\lambda - c}{c}.$$

Знайти $D_0(s, \mu)$, $d_\pm(\alpha)$, $D_x^\pm(s, \mu)$, $\mathbf{E}Q_x(\theta_s)$, $Q_x(\theta_s) = Q_{(x,\infty)}(\theta_s)$.

Процес $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху і неперервний знизу ($\rho_+(s) = cp_+(s)$), тому $D_0(s, \mu) = p_+(s) p_+^{-1}(s + \mu)$,

$$\varphi_+(s, \alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \quad \varphi_-(s, \alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) - i\alpha},$$

$$d_\pm(\alpha) = \pm D_0(s, \mu) \left[\rho_\pm(s + \mu) \mp i\alpha)(\rho_\pm(s) \mp i\alpha)^{-1}\right]^{\pm 1},$$

$$\rho_\pm(s) = \frac{\sqrt{D_s} \mp (mc + s)}{2}, \quad D_s = (mc + s)^2 + 4cs > 0. \tag{2.90}$$

$$\rho_+(s) = \rho_-(s) - mc - s, \quad \rho_+' = \rho_-'(s) - 1 \underset{s\to 0}{\to} \frac{\lambda}{c - \lambda}, \quad c > \lambda.$$

Отже, компоненти $\varphi_+(s, \alpha)$ в (2.80) і (2.90) відрізняються. Але співвідношення (2.81)–(2.87) для $d_+(\alpha)$, $\hat{D}_\pm(\alpha)$, $D_x^\pm(s, \mu)$ не міняються (міняються лише значення $\rho_\pm(s)$, наведені в (2.90)).

Якщо $m = 0$, тоді $\rho_{\pm}(s) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s^2 + 4cs} \mp s\right)$. Отже,

$$D_0(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_0(s)} = \frac{\sqrt{s^2+4cs} - s}{\sqrt{(s+\mu)^2 + 4c(s+\mu)} - s - \mu}. \qquad (2.91)$$

Останню формулу не так легко обернути, як (2.88) для $w(t)$.

Середні значення $\mathbf{E}Q_x(\theta_s)$(при $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$) можна одержати шляхом диференціювання по μ, зокрема з (2.84) знаходимо

$$\mathbf{E}Q_x(\theta_s) = -\frac{\partial}{\partial\mu} D_x^+(s,\mu)|_{\mu=0} = \frac{\rho'_+(s)}{\rho_+(s)} e^{-x\rho_+(s)}, \quad x > 0;$$
$$\mathbf{E}Q_0(\theta_s) = \frac{\rho'_+(s)}{\rho_+(s)} \underset{s\to 0}{\to} \mathbf{E}Q_0(\infty) = \frac{\lambda}{\rho_+ c|m| I\{m<0\}}. \qquad (2.92)$$

Для процесу $\xi(t) = -t + S(t)$ з х.ф. стрибків $\varphi(\alpha) = \frac{c}{c - i\alpha}$ так само при $m = 0$ згідно (2.91) та (2.92) з відповідним значенням $\rho_+(s)$ у (2.90) встановлюється, що

$$\mathbf{E}Q_0(\theta_s) = \frac{\rho'_+(s)}{\rho_+(s)} = \frac{c - \rho_+(s)}{\rho_+(s)\sqrt{s^2+4cs}} \underset{s\to 0}{\to} \mathbf{E}Q_0(\infty) = \infty.$$

Зауважимо що у випадку розбіжності невласного інтегралу по $t \geq 0$ для $N_s^+(0)$ (див. (2.69)) інтеграли для $N_s^{\pm}(x)$ в (2.3) мають особливість в околі $t = 0$. Різниця невласних інтегралів $N_{s+\mu}^+(x) - N_s^+(x)$ визначає збіжний інтеграл в ε-околі $t = 0$

$$N_{s,\mu}^+(x) = N_{s+\mu}^+(x) - N_s^+(x) = \qquad (2.93)$$
$$= \int_0^\infty t^{-1} e^{-st}(1 - e^{-\mu t})\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt \underset{s\to 0}{\to} N_{0,\mu}^+(x),$$

оскільки інтеграл по довільному ε-околу особливої точки інтегрування ($t = 0$) буде обмежений для $x > 0$ і $\varepsilon \leq 1$

$$\int_0^\varepsilon t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) e^{-st}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt < \infty.$$

При умові (2.16) ($m < 0$) і для $s = 0$ із (2.93) випливає збіжність інтегралу $N_{0,\mu}^+(x)$ при $\forall\, x \geq 0$, що визначає $D_0(0,\mu)$ в (2.71).

2.5 Момент першого досягнення максимуму

Позначимо момент першого досягнення максимуму процесом $\{\xi(t), \xi(0) = 0, t \geq 0\}$ на інтервалі $[0, t]$:

$$T_+(t) =: \inf\{u > 0 : \xi(u) = \xi^+(t)\}.$$

Якщо $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ мають невироджений розподіл, тоді на події $\{\omega : \tau^+(0) > 0\}$ виконуються стохастичні співвідношення:

$$T_+(t) \doteq \tau^+(0) + T_+(t - \tau^+(0));$$
$$\xi^+(t) \doteq \gamma^+(0) + \xi^+(t - \tau^+(0)); \quad \xi(t) \doteq \gamma^+(0) + \xi(t - \tau^+(0)).$$

Для $\mu \geq 0$, $\operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2 = 0$ позначимо

$$T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu) = \mathbf{E}[e^{-\alpha_1\xi(\theta_s) - \alpha_2(\xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s)) - \mu T_+(\theta_s)}]. \tag{2.94}$$

Має місце твердження (див. [23], [64, § 5])

Теорема 2.8. *Генератриса трійки* $\{\xi(\theta_s), \widehat{\xi}^-(\theta_s), T_+(\theta_s)\}$, $\widehat{\xi}^-(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s)$, — $T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu)$ *визначається співвідношенням:*

$$T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu) =$$
$$= \mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi^+(\theta_{s+\mu})}\mathbf{E}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi^-(\theta_s)}C_-^{-1}(s, \mu), \quad \mu \geq 0, \tag{2.95}$$

де згідно з (2.74) *та* (2.93)

$$C_-(s, \mu) = \left[\frac{\varphi_+(s+\mu, \alpha)}{\varphi_+(s, \alpha)}\right]_-^0 = \exp\{N_{s,\mu}^+(0)\}.$$

Доведення. Нехай $\xi(t)$ — східчастий процес. На основі стохастичних співвідношень (2.94) для $T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu)$ виводиться рівняння:

$$T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu) = \mathbf{E}[e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) = 0] + \tag{2.96}$$
$$+ \mathbf{E}[e^{-\alpha_1\gamma^+(0) - (s+\mu)\tau^+(0)}]T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu).$$

В цьому параграфі ми пропускаємо умову $\{\tau^+(0) < \infty\}$ під знаком $\mathbf{E}[\ ]$. Згідно з (2.29) і (2.30) із § 2.2 знаходимо з (2.96), що

$$T_+(s, \alpha_1, \alpha_2, \mu)[1 - \mathbf{E}[e^{-\alpha_1\gamma^+(0) - (s+\mu)\tau^+(0)}]] =$$

$$= T_+(s,\alpha_1,\alpha_2,\mu)\frac{p_+(s+\mu)}{\varphi_+(s+\mu,i\alpha_1)} = \mathbf{E}[e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s)=0].$$

Отже, можна записати, що

$$T_+(s,\alpha_1,\alpha_2,\mu) = \varphi_+(s+\mu,i\alpha_1)\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbf{E}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi(\theta_s)-u\xi^+(\theta_s)}}{\mathbf{E}e^{-u\xi^+(\theta_{s+\mu})}}. \quad (2.97)$$

Зауважимо, що при $\mu=\alpha_2=0$

$$T_+(s,\alpha_1,0,0) = \mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi(\theta_s)} =$$
$$= \mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi^+(\theta_s)}\lim_{u\to\infty}[\mathbf{E}e^{-u\xi^+(\theta_s)}]^{-1}\mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi(\theta_s)-u\xi^+(\theta_s)}.$$

З урахуванням о.ф.т. звідси знаходимо, що

$$\mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi^-(\theta_s)} = \lim_{u\to\infty}\frac{\mathbf{E}e^{-\alpha_1\xi(\theta_s)-u\xi^+(\theta_s)}}{\varphi_+(s,iu)}.$$

Отже, границя в (2.97) обчислюється згідно (2.4) з § 2.1 так:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbf{E}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi(\theta_s)-u\xi^+(\theta_s)}}{\varphi_+(s+\mu,iu)} =$$
$$= \varphi_-(s,i(\alpha_1+\alpha_2))\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi_+(s,i(\alpha_1+\alpha_2+u))}{\varphi_+(s+\mu,iu)} =$$
$$= \mathbf{E}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi^-(\theta_s)}C_-^{-1}(s,\mu).$$

Таким чином, (2.95) доведено для східчастих процесів. В загальному випадку для $\xi(t)$ можна вибрати апроксимуючу послідовність $\xi_n(t)$ східчастих процесів і довести теорему 2.8 для послідовності $T_+^{(n)}(s,\alpha_1,\alpha_2,\mu)$, потім граничним переходом $n\to\infty$ довести справедливість (2.96). □

Для спільного розподілу $\{\xi^+(\theta_s), T_+(\theta_s)\}$ має місце

Теорема 2.9. *Розподіл $\{\xi^+(\theta_s), T_+(\theta_s)\}$ визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{E}[e^{-\mu T_+(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s)>x] = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_{s+\mu})>x\}\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi_+(s,iu)}{\varphi_+(s+\mu,iu)} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_{s+\mu})>x\}e^{-N^+_{s,\mu}(0)}. \quad (2.98)$$

Якщо $p_+(s) = 0$, *тоді генератриса* $T_+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{E}e^{-\mu T_+(\theta_s)} = s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}e^{-\mu T_+(t)}dt = D_0(s,\mu) = \\ = C_-^{-1}(s,\mu) = e^{-N^+_{s,\mu}(0)}, \tag{2.99}$$

де $N^+_{s,\mu}(0)$ *наводиться в* (2.93). *Це означає, що* $T_+(t) \doteq Q_0(t)$.

Для східчастих процесів $\xi(t) = S_{\nu(t)}$ $(S_k = \sum\limits_{r\le k}\xi_r)$

$$\mathbf{E}[e^{-\mu T_+(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) > 0] = q_+(s+\mu)\frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)} = \\ = \exp\left\{-\sum_{k\ge1}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k > 0\}\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k\right\}\times \\ \times\left[\exp\left\{\sum_{k\ge1}\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k>0\}\left(\frac{\lambda}{s+\lambda+\mu}\right)^k\right\} - 1\right]. \tag{2.100}$$

Якщо $p_+(s) = 0$, *тоді згідно з* (2.69) *та* (2.99) $T_+(\theta_s) \doteq Q_{[0,\infty)}(\theta_s)$, *а при* $p_+(s) > 0$ *згідно з* (2.68) *та* (2.98) *встановлюється, що*

$$\mathbf{E}[e^{-\mu T_+(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) > 0] = q_+(s+\mu)D_{+0}(s,\mu), \tag{2.101}$$

$$\mathbf{E}[e^{-\mu T_+(\theta_s)}\,|\,\xi^+(\theta_s) > 0] = \frac{q_+(s+\mu)}{q_+(s)}D_{+0}(s,\mu). \tag{2.102}$$

Доведення. (2.98) випливає із (2.95) при $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ після обернення відносно α, а (2.99) — із (2.95) при $\alpha = 0$. Якщо $p_+(s) > 0$, тоді з (2.98) при $x = 0$ випливає справедливість 1-го рядка в (2.100). При цьому для східчастих процесів атомарна імовірность $p_+(s)$ згідно (2.5) з теореми 1.2 визначається співвідношенням

$$p_+(s) = e^{N_s^+(0)} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}\mathbf{P}\{S_k>0\}\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k\right\}. \tag{2.103}$$

Тому з (2.103) одержується остання частина рівності (2.100).

Отже справедливість (2.98)–(2.100) доведена для східчастих процесів. За допомогою міркувань, використаних у попередній теоремі, встановлюється справедливість (2.98), (2.99) та (2.101)–(2.103) в загальному випадку. □

Приклад 2.4. Процес $\xi(t)$ задається співвідношенням

$$\xi(t) = at + S_1(t) - S_2(t), \quad S_{1,2}(t) = \sum_{k \le \nu_{1,2}(t)} \xi_k^{(1,2)}, \ a \le 0, \tag{2.104}$$

де $\{\xi_k^{(1,2)}\}_{k\ge1}$ — незалежні послідовності випадкових величин з х.ф.

$$\varphi_{1,2}(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k^{(1)}} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k^{(2)}} = \frac{1}{1-i\alpha},$$

$\nu_{1,2}(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з параметрами $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$. Показати, що $\xi(t) \doteq at + S(t)$

$$S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \zeta_k, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta_1} = \frac{1}{1+\alpha^2}, \tag{2.105}$$

$\nu(t)$ — пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda = 1$. Знайти компоненти $\varphi_\pm(s,\alpha)$, для $a = 0$ знайти $p_\pm(s)$, розподіл $\tau^\pm(0)$ та генератрису $T_+(s,\alpha_1,\alpha_2,\mu)$. При $a < 0$ знайти х.ф. ξ^+.

Спочатку спростимо вирази для кумулянти

$$\psi(\alpha) = ai\alpha + \left(\frac{1}{1+\alpha^2} - 1\right) = ai\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{1-(i\alpha)^2}.$$

Ми одержали кумулянту з $\lambda = 1$ із х.ф. $\varphi(\alpha)$ і тим самим довели (2.105). Для $\varphi(s,\alpha)$ одержимо зображення

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \frac{s(1-(i\alpha)^2)}{P_3(s,i\alpha)}; \tag{2.106}$$

при $i\alpha = r \quad P_3(s,r) = ar^3 - (1+s)r^2 - ar + s$.

Оскільки $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху при $a \le 0$, тоді при $a < 0$ рівняння Лундберга зводиться до кубічного рівняння

$$P_3(s,r) = 0 \ (\mathcal{L}_s) \quad \Rightarrow \quad ar^3 + r^2 - ar = 0 \quad (\mathcal{L}_0)$$

при $s > 0$ має єдиний додатний корінь $\rho_+(s)$, що визначає

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(1-i\alpha)}{p_+(s)-i\alpha}, \quad \rho_+(s) = p_+(s). \tag{2.107}$$

На основі о.ф.т. та розкладу $P_3(s,r) = (p_+(s) - r)P_2(s,r)$, знаходимо при $a < 0$

$$\varphi_-(s, i\alpha) = \frac{s(1+i\alpha)}{p_+(s)P_2(s,i\alpha)}, \tag{2.108}$$

де $P_2(s,r)$ знаходиться безпосереднім діленням $P_3(s,r)$ на $(r-p_+(s))$, вільний член P_2 визначається з умови прирівнювання остачі ділення до 0. В результаті одержимо

$$P_2(s,r) = ar^2 - (1+s+ap_+(s))r - sp_+^{-1}(s).$$

Зауважимо, що $m = \mathbf{E}\xi(1) = a$ (за умовою прикладу $a \le 0$).

Якщо $m = a < 0$, тоді рівняння $(\mathcal{L}_0)$ має додатний корінь p_+

$$p_+ = \lim_{s\to 0} p_+(s) = \frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2|a|} > 0,$$

який визначає х.ф. та функцію розподілу абсолютного максимуму

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{p_+(1-i\alpha)}{p_+ - i\alpha}, \tag{2.109}$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = q_+ e^{-p_+ x}, \quad x > 0.$$

Якщо $m = a = 0$, тоді рівняння $(\mathcal{L}_s)$ зводиться до квадратного, яке має корені

$$r_{1,2} = \pm p_\pm(s) = \pm\sqrt{\frac{s}{1+s}}, \quad s > 0, \quad p_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.110}$$

В цьому випадку $\xi(t)$ – симетричний майже напівнеперервний і зверху, і знизу процес. Обернувши (2.110) відносно s одержимо значення імовірностей $\mathbf{P}\{\xi^\pm(t) = 0\}$ та розподіл $\tau^\pm(0)$ при $\lambda = 1$

$$\mathbf{P}\{\tau^\pm(0) > t\} = \mathbf{P}\{\xi^\pm(t) = 0\} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{-tz} d\arcsin\sqrt{z}. \tag{2.111}$$

Ця формула випливає з останнього стовпчика таблиці (1.97), якщо покласти $u = 1$.

При $a = 0$ для симетричного процесу $\xi(t)$ з довільним $\lambda > 0$ маємо

$$\varphi_\pm(s,\alpha) = \frac{p_\pm(s)(1 \mp i\alpha)}{p_\pm(s) \mp i\alpha}, \quad p_\pm(s) = \sqrt{\frac{s}{s+\lambda}}, \quad \forall\, \lambda > 0, \tag{2.112}$$

для розподілу $\tau^{\pm}(0)$ за таблицею знаходимо, що

$$\mathbf{P}\{\tau^{\pm}(0) > t\} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{-\lambda t z} d\arcsin\sqrt{z} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Згідно з (2.95)

$$T_+(s,\alpha_1,\alpha_2,\mu) = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)}\varphi_+(s+\mu,\alpha_1)\varphi_-(s,\alpha_1+\alpha_2).$$

Після підстановки (2.112) звідси випливає, що спільний розподіл трійки

$$\{\xi(\theta_s), \widehat{\xi}^-(\theta_s), T_+(\theta_s)\}, \quad \widehat{\xi}^-(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s),$$

визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}e^{i\alpha_1\xi(\theta_s)+i\alpha_2\widehat{\xi}^-(\theta_s)-\mu T_+(\theta_s)} =$$
$$= \frac{s}{s+\lambda}\frac{1-i\alpha_1}{p_+(s+\mu)-i\alpha_1}\frac{1+i(\alpha_1+i\alpha_2)}{p_-(s)+i(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{2.113}$$

Приклад 2.5. Нехай $\xi(t)$ — процес із (2.104) з $a \geq 0$. Читачеві пропонується знайти $\varphi_{\pm}(s,\alpha)$ та х.ф. ξ^- при $a > 0$.

Наведемо цікавий результат про обернену випадкову функцію до максимуму вінерового процесу (див. [93, гл. VI, § 42, § 46]). Екстремуми $w(t)$ позначимо згідно з [93] та [197, 198]

$$M(t) = w^+(t), \quad m(t) = w^-(t), \quad w^{\pm}(t) = \sup_{0\le u\le t}(\inf) w(u).$$

Графік траєкторії $M(t)$ є монотонно неспадною функцією з поличками сталості. Позначимо згідно з [93] через $T(x)$ обернену до $M(t)$ випадкову функцію, яка має додатні стрибки (величина їх визначається довжиною поличок сталості). Має місце

Теорема 2.10. *Розподіл $M(t), |w(t)|$ та $-m(t)$ має вигляд*

$$\mathbf{P}\{M(t) < x\} = \mathbf{P}\{-m(t) < x\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2t}} dy, \quad x > 0. \tag{2.114}$$

Розподіл $T(x)$ визначається співвідношення при $x > 0$, $u > 0$

$$\mathbf{P}\{T(x) < ux^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}} dy. \tag{2.115}$$

Випадкова функція $T(x)$ є стійким процесом з обмеженою варіацією відносно x з параметром стійкості $\alpha_* = \frac{1}{2}$ і кумулянтою

$$\psi_*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (e^{i\alpha y} - 1) y^{-\frac{3}{2}} dy = (i-1)\sqrt{\alpha}. \tag{2.116}$$

Приклад 2.6. Нехай $\xi(t) = at + T(t)$, $a < 0$. Знайти розподіл основних функціоналів $\xi(t)$ ($\xi^\pm(\theta_s)$ та $\xi^\pm$).

Зауважимо, що $\xi(t)$ неперервний знизу процес з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + (i-1)\sqrt{\alpha}, \quad 0 < m = \mathbf{E}\xi(1) = +\infty. \tag{2.117}$$

Рівняння $(\mathcal{L}_0)$ після заміни $i\alpha = r$ та деяких перетворень визначає корінь $-\rho_-(0) = -\frac{2}{a^2}$, за допомогою якого при $m > 0$ знаходимо, що

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = e^{2xa^{-2}}, \quad x < 0. \tag{2.118}$$

Корінь рівняння $(\mathcal{L}_s)$ $-\rho_-(s)$ $(s > 0)$ визначає розподіл $\xi^-(\theta_s)$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = e^{x\rho_-(s)}, \quad x < 0, \quad \rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{a^2}. \tag{2.119}$$

Оскільки $m > 0$, то $\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1$, а генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається (див. (2.52)) згорткою $\Pi(x) = \sqrt{2/\pi}x^{-1/2}$ з $P_-(s,x)$

$$K(s,x) = \rho_-(s)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)} y^{-\frac{1}{2}} dy, \quad x > 0, \tag{2.120}$$

$$\widetilde{k}(s,\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x} K(s,x) dx = \frac{\sqrt{2}\rho_-(s)}{\rho_-(s) - \nu} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_-(s)}} \right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2\rho_-(s)}}{\sqrt{\nu}(\sqrt{\rho_-(s)} + \sqrt{\nu})}.$$

Після спрощень згідно з (2.52) генератриса $\xi^+(\theta_s)$ має вигляд

$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \frac{s}{s + \nu\widetilde{k}(s,\nu)} =$$
$$= \frac{s(\sqrt{\rho_-(s)} + \sqrt{\nu})}{s(\sqrt{\rho_-(s)} + \sqrt{\nu}) + \sqrt{2\nu\rho_-(s)}}. \tag{2.121}$$

Розділ 3

Розподіл функціоналів для напівнеперервних процесів

3.1 Компоненти о.ф.т. для напівнеперервних процесів

Немонотонні процеси $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0, t \geq 0$) зі стрибками одного знаку будемо називати напівнеперервними. Якщо $\xi(t)$ не має додатних (від'ємних) стрибків, тоді його кумулянта $\psi(\alpha) = t^{-1} \ln \mathbf{E} e^{i\alpha\xi(t)}$ записується так

$$\psi(\alpha) = i\gamma\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 \pm \int_{\mp\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1 - \frac{i\alpha x}{1+x^2} \right) \Pi(dx). \tag{3.1}$$

Такі процеси досягають додатний (від'ємний) рівень неперервно. Якщо $\int_{|x|\leq 1} |x| \Pi(dx) < \infty$, тоді кумулянта напівнеперервних процесів записується так

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 \pm \int_{\mp\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1 \right) \Pi(dx). \tag{3.2}$$

Процеси з кумулянтою (3.1) або (3.2) згідно з означенням 1.11 з § 1.5 є неперервним зверху (знизу), залежно від знаку $+$ $(-)$.

Якщо $\xi(t) = at + \sum\limits_{k \le \nu(t)} \xi_k$ $(a = 1,\ \xi_k < 0)$, тоді на основі стохастичного співвідношення

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\} \doteq \begin{cases} x, & \zeta > x, \\ \zeta + \tau^+(x - \zeta - \xi), & \zeta \le x, \end{cases}$$

для генератриси $\tau^+(x)$ (як і для хвоста ф.р. $\xi^+(\theta_s)$)

$$T(s,x) =: \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} \tag{3.3}$$

виводиться рівняння типу згортки

$$T(s,x) = e^{-(s+\lambda)x} + \lambda \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{x} e^{-(s+\lambda)y} T(s, x - y - z) dy dF(z). \tag{3.4}$$

Розв'язок рівняння (3.4) шукаємо у формі

$$T(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \tag{3.5}$$

Якщо показник $\rho_+(s)$ є додатним коренем кумулянтного рівняння

$$k(r) =: \psi(-ir)| = s, \quad \rho_+(s) = k^{-1}(s), \tag{3.6}$$

тоді після підстановки (3.5) у (3.4) одержимо співвідношення

$$(s - k(\rho_+(s)))\big(e^{-\rho_+(s)x} - e^{-(s+\lambda)x}\big) = 0,$$

згідно з яким (3.5) задовольняє рівняння (3.4).

Для загального неперервного зверху процесу $T(s,x)$ задовольняє функціональне рівняння

$$T(s, x + y) = T(s,x)T(s,y) \quad (x, y > 0), \quad T(s,0) = 1$$

та інтегро-диференціальне рівняння з оператором $\mathbf{L}$ із (1.53), розв'язок якого має вигляд (3.5) (див. [5,14,64,75,84,110]). Отже має місце

Лема 3.1. *Для неперервного зверху процесу $\xi(t)$ з кумулянтою* (3.1) *або* (3.2) *генератриса $T(s,x)$ визначається співвідношенням*

$$T(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}, \quad \rho_+(s) = k^{-1}(s), \quad k(\rho_+) = s; \tag{3.7}$$
$$x \ge 0, \quad (\psi(-ir) = k(r) \text{ із } (3.1)).$$

Доведення. Функціональне рівняння для генератриси $T(s,x)$ випливає з очевидного стохастичного співвідношення $\tau^+(x+y) - \tau^+(x) \doteq \tau^+(y)$ $(x, y > 0)$ і визначає її показникову форму, а ф.р. $P_+(s,x) = 1 - T(s,x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння (1.54) з оператором $\mathbf{L}$ в (1.53) на півосі $x > 0$ (з умовою $P_+(s,x) = 0$, $x \le 0$) і після підстановки в нього $P_+(s,x) = 1 - e^{-\rho_+(s)x}$ $(x > 0)$ в силу (3.6) одержується тотожність: $s - k(\rho_+(s)) = 0$ ($k(r) = \psi(-ir)$ див. (3.1)) або (3.2)). Рівняння (3.4) шляхом диференціювання по x можна звести до рівняння (1.54) з оператором (1.53), що містить першу похідну по x, розв'язком якого при умові $T(s,0) = 1$ є експонента (3.5). $\square$

Для неперервних зверху процесів з обмеженою варіацією після інтегрування частинами встановлюється, що $(a > 0)$

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx) = i\alpha \left(a - \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} \Pi(x) dx \right).$$

Якщо $\int_{-\infty}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty$, $\sigma^2 \ge 0$, тоді з (3.6) випливає рівняння

$$k(r) = ar + \frac{r^2}{2}\sigma^2 - r\widetilde{\Pi}(r) = s, \quad \widetilde{\Pi}(r) = \int_{-\infty}^{0} e^{rx} \Pi(x) dx, \qquad (3.8)$$
$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Pi(dy) \quad (x < 0;\ \text{якщо } \sigma = 0,\ \text{то } a > 0).$$

В теорії ризику рівняння (3.6) із $k(r)$ в (3.8), як відмічалось вище, прийнято називати рівнянням Лундберга (його позначатимемо $(\mathcal{L}_s)$ або $(\mathcal{L}_0)$ при $s = 0$). В силу випуклості $k(r)$ в нулі $(k''(0) > 0)$ рівняння $(\mathcal{L}_s)$ при достатньо малому s має в околі $r = 0$ два дійсні корені

$$r_1(s) < 0 < r_2(s), \quad s > 0; \quad r_1(s) r_2(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Для довільного неперервного зверху процесу зверху $\xi(t)$ лише корінь $r_2(s) = \rho_+(s) > 0$ визначає розподіл (3.7).

Введемо позначення

$$\widetilde{P}_<(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} P(s,x) dx; \quad \widetilde{P}_>(s,\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x} \overline{P}(s,x) dx;$$
$$\varphi(s,\alpha) = 1 + i\alpha\big(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)\big),$$

$$\varphi_-(s,\alpha) - 1 = -i\alpha \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} P_-(s,x)dx = -i\alpha \widetilde{\Phi}_-(s,\alpha), \tag{3.9}$$
$$\varphi_+(s,\alpha) - 1 = i\alpha \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x} \overline{P}_+(s,x)dx = i\alpha \widetilde{\Phi}_+(s,\alpha)$$

і сформулюємо теорему про уточнене (конкретизоване) зображення компонент о.ф.т. (про них уже частково йшла мова в § 1.5).

Теорема 3.1. *Нехай $\xi(t)$ неперервний зверху процес (див. (3.1)). Тоді корінь $r_s = \rho_+(s)$ рівняння (3.6) повністю визначає х.ф. $\xi^+(\theta_s)$*

$$\varphi_+(s,\alpha) =: \mathbf{E} e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}. \tag{3.10}$$

Розподіл $\xi^-(\theta_s)$ визначається співвідношенням

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \rho_+^{-1}(s) \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} dP(s,x) + \widetilde{P}_<(s,\alpha). \tag{3.11}$$

Існує щільність $P'(s,x)$ при $x \neq 0$, через яку визначається $\xi^-(\theta_s)$,

$$P'(s,x) = \frac{\partial}{\partial x} P(s,x) =$$
$$= \begin{cases} \rho_+(s) e^{-\rho_+(s)x} \varphi_-(s, -i\rho_+(s)), & x > 0, \\ \rho_+(s) \int_{-\infty}^{x} e^{\rho_+(s)(y-x)} dP_-(s,y), & x < 0, \end{cases} \tag{3.12}$$
$$P(s,x) = \begin{cases} 1 - \varphi_-(s, -i\rho_+(s)) \exp\{-\rho_+(s)x\}, & x > 0, \\ \int_{-\infty}^{x} \left(1 - e^{\rho_+(s)(y-x)}\right) dP_-(s,y), & x < 0, \end{cases} \tag{3.13}$$
$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = \rho_+^{-1}(s) P'(s,x) + P(s,x), \quad x < 0.$$

Якщо $\xi(t)$ має обмежену варіацію, тоді $P(s,+0) \neq P(s,-0)$,

$$p_-(s) = s/(a\rho_+(s))^{-1} > 0,$$
$$P'(s,+0) - P'(s,-0) = sa^{-1}, \quad \rho_+(s) = P'(s,+0)\overline{P}^{-1}(s,0); \tag{3.14}$$
$$P'(s,+0) = \rho_+(s)\varphi_-(s, -i\rho_+(s)), \quad \varphi_-(s, -i\rho_+(s)) = \frac{s\rho'_+(s)}{\rho_+(s)}.$$

Якщо $\xi(t)$ має необмежену варіацію, тоді $p_-(s) = 0$,

$$P(s,0) = P(s,\pm 0) = 1 - \varphi_-(s, -i\rho_+(s)). \tag{3.15}$$

Доведення. Після інтегрального перетворення з (3.7) одержимо (3.10). Тоді о.ф.т. має вигляд

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\varphi_-(s,\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0. \tag{3.16}$$

Звідси після обернення щільність $P'(s,x)$ виражається згорткою

$$P'(s,x) = \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \rho_+(s) e^{\rho_+(s)(y-x)} dP_-(s,y), \quad x \neq 0,$$

з якої випливає (3.12). При $\sigma = 0$ (3.16) можна переписати так

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s) - i\alpha}{\rho_+(s)} \frac{s}{s - i\alpha(a - \widetilde{\Pi}(i\alpha))},$$

і якщо $\int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty$, тоді $\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Pi(dy)$, $x < 0$; $\widetilde{\Pi}(0) < \infty$,

$$\widetilde{\Pi}(i\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}\Pi(x)dx, \quad p_-(s) = \lim_{i\alpha\to\infty} \varphi_-(s,\alpha) = \frac{s}{a\rho_+(s)}.$$

Для доведення (3.11) підставимо (3.9) у співвідношення

$$(\rho_+(s) - i\alpha)\varphi(s,\alpha) = \rho_+(s)\varphi_-(s,\alpha).$$

Тоді після деяких перетворень знаходимо співвідношення

$$\begin{aligned} &\rho_+(s)[1 + i\alpha(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha))] - i\alpha\varphi(s,\alpha) = \\ &\quad = \rho_+(s)(1 - i\alpha\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha)), \end{aligned}$$

з якого одержимо співвідношення

$$\rho_+(s)(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)) - \varphi(s,\alpha) = -\rho_+(s)\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha).$$

Звідси після проектування $[\ ]_-^0$ випливає (3.11).

Проінтегрувавши перший рядок в (3.12) по $y \in [x,\infty)$, знаходимо

$$\overline{P}(s,x) = \varphi_-(s, -i\rho_+(s)) \exp\{-\rho_+(s)x\} \quad (x > 0)$$

(тобто (3.13) доведено для $x > 0$), а після інтегрування другого рядка в (3.12) по $y \in (-\infty, x]$ $(x < 0)$ одержимо співвідношення (3.13) при

$x<0$. У випадку обмеженої варіації із згорток (3.12) випливає (3.14), оскільки $\left(\overline{P}(s,0)=\varphi_-(s,-i\rho_+(s))\right)$

$$P'(s,+0)-P(s,-0)=\lim_{x\uparrow 0}\int_{-\infty}^{+0}\rho_+(s)e^{\rho_+(s)(y-x)}dP_-(s,y)=$$
$$=\rho_+(s)p_-(s)=sa^{-1},\quad p_-(s)>0.$$

Для процесів з необмеженою варіацією $p_-(s)=0$, тому з (3.12) випливає (3.15).

Для косо-східчастих процесів з $a=1$ для $z>0$ і достатньо малих $h>0$

$$\mathbf{P}\{z\le\xi(t)<z+h\}=$$
$$=\int_0^t\mathbf{P}\{\tau^+(z)\in du\}\mathbf{P}\{0\le\xi(t-u)<h\}+o(h),$$
$$h^{-1}\mathbf{P}\{z\le\xi(\theta_s)<z+h\}=$$
$$=B(s,z)\mathbf{P}\{0\le\xi(\theta_s)<h\}h^{-1}+o(1)\to e^{-z\rho_+(s)}P(s,+0).$$

Отже, $P'(s,z)=P'(s,+0)\exp\{-z\rho_+(s)\}$, звідси після інтегрування по $z\in[0,\infty)$ знаходимо $\rho_+(s)$ в (3.14). Для процесів з необмеженою варіацією $p_-(s)=0,\ P'(s,\pm 0)=\rho_+(s)\varphi_-(s,-i\rho_+(s))$;

$$\varphi_-(s,-i\rho_+(s))=\lim_{r\to\rho_+(s)}\frac{s}{s-k(r)}\frac{\rho_+(s)-r}{\rho_+(s)}=\frac{s\rho'_+(s)}{\rho_+(s)}.$$

З (3.12) та (3.13) при $x\to\pm 0$ випливають формули (3.15). □

Слід зауважити, що рівняння (3.6) має і від'ємний розв'язок. Найближчий до 0 корінь $r_s=-R(s)<0$ ($R(s)\to 0$ при $m\le 0, s\to 0$) частково визначає $\varphi_-(s,\alpha)$. Зокрема, при $m=\mathbf{E}\xi(1)>0$ для напівнеперервного зверху процесу ризику

$$\rho_+(s)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}0,\quad \rho'_+(0)=m^{-1},\quad R(s)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}R>0,$$

і в термінах R визначається лише наближення для розподілу ξ^-, а отже і для ймовірності банкрутства $\Psi(\cdot)$

$$\mathbf{P}\{\xi^-<-u\}=\Psi(u)\sim\Psi_{\mathrm{CL}}(u)=$$
$$=\frac{m}{k'(-R)}e^{-Ru}\quad(x=-u\to-\infty),\tag{3.17}$$

яке називається апроксимацією Крамера–Лундберга.

З теореми 3.1 випливає наслідок про обернення (3.11) по α і по s.

Наслідок 3.1. *В умовах неперервності зверху теореми* 3.1 *розподіли* $\xi^{\pm}(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями*

$$P_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\} = 1 - e^{-\rho_+(s)x}, \quad x \geq 0, \tag{3.18}$$

$$P_-(s,x) = \frac{1}{\rho_+(s)} P'(s,x) + P(s,x), \quad x < 0, \quad \sigma^2 \geq 0. \tag{3.19}$$

При $\sigma = 0$, $a > 0$ *та* $\widetilde{\Pi}(0) = \int_{-\infty}^{0} \Pi(x)dx < \infty$, $p_-(s) = s(a\rho_+(s))^{-1}$, $P'(s,+0) - P'(s,-0) = sa^{-1}$, (3.19) *допускає обернення по* s

$$\mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\} = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} + \\ + a \int_0^t \mathbf{P}\{\xi^-(t-y) = 0\} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}\{\xi(y) < x\} dy, \quad x < 0. \tag{3.20}$$

При $\sigma > 0$ *або* $\widetilde{\Pi}(0) = \infty$ *(тобто для процесів з необмеженою варіацією)* $p_-(s) = 0$

$$P'(s, \pm 0) = P'(s,0) = \rho_+(s)\varphi_-(s, -i\rho_+(s)) = s\rho'_+(s).$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\rho_+(s) \to p_+ > 0$ *існує невироджений розподіл* ξ^+

$$\mathbf{P}\{\xi^+ < x\} = 1 - e^{-\rho_+ x}, \quad x \geq 0, \quad \rho_+ = (ap'_-(0))^{-1}. \tag{3.21}$$

Якщо $m > 0$, *тоді*

$$\rho_+(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \rho_+(s)s^{-1} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{m}, \quad p_- = \frac{m}{a},$$

а розподіл ξ^- *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = m \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} dt \right), \quad x < 0. \tag{3.22}$$

Якщо $m = 0$, *тоді* $\mathbf{P}\{\xi^{\pm} = \pm\infty\} = 1$,

$$\rho_{\pm}(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \rho_+(s)s^{-\frac{1}{2}} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = \sqrt{\mathbf{D}\xi(1)}.$$

Доведення. З (3.10) та (3.11) після обернення випливає справедливість (3.18) та (3.19). Якщо $m < 0$, тоді з (3.18) при $s \to 0$ випливає (3.21). Аналогічно з (3.19) та (3.13) при $x < 0$ після граничного переходу ($s \to 0, \rho_+(s) \to 0$) знаходимо (3.22). Якщо $\int |x|\Pi(dx) < \infty$

і $m = 0$, тоді при достатньо малих $s > 0$ та r на основі рівняння Лундберга

$$k(r) =: ar + \sigma^2 r^2/2 - r\widetilde{\Pi}(r) = s \quad (\mathcal{L}_s)$$

має місце асимптотична рівність ($r = r_s \to 0$, $s \to 0$)

$$\frac{1}{2}k''(0)r^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}r^2 \approx s, \quad \sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1) = \sigma^2 + \int_{-\infty}^{0} x^2\Pi(dx),$$

на основі якої нескінченно малі корені рівняння (3.6) одного порядку малості:

$$r_1(s) < 0 < r_2(s), \quad \mp r_{1,2}(s) \approx C_{\mp}\sqrt{s},$$
$$C_+ = C_- = \frac{2}{\sigma_1^2}, \quad \rho_+(s) = r_2(s) \approx C_+\sqrt{s}.$$

Формула (3.20) випливає з (3.19) після перепису в такій формі

$$P_-(s,x) = as^{-1}P'(s,x)p_+(s) + P(s,x), \quad x < 0.$$

З (3.10) при $s \to 0$ знаходимо, що

$$\varphi_+(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{тобто} \quad \mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1.$$

З о.ф.т. (3.16) випливає, що

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s) - i\alpha}{\rho_+(s)}\frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \frac{s}{\rho_+(s)}\frac{\rho_+(s)-i\alpha}{s-\psi(\alpha)}.$$

Отже

$$\lim_{s\to 0}\varphi_-(s,\alpha) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{\rho_+(s)}\frac{i\alpha}{\psi(\alpha)} = 0, \quad \mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 1. \qquad \square$$

Вище відмічалось, що розподіл ξ^- в загальному випадку для $m > 0$ не так просто знайти. Простіше обчислити наближення для нього.

В теорії ризику, крім (3.17), використовуються різні наближення, зібрані в лемі 3.2 (див. [94, 130, 169–171]), в термінах моментів

$$m = \mathbf{E}\xi(1) = a - \lambda\mu_1 > 0, \quad \mu_k = \mathbf{E}\xi_1^k, \quad k = \overline{1,3}.$$

В термінах страхової надбавки ρ і цих моментів обчислюється наближене значення R (оскільки для рівняння $(\mathcal{L}_0)$ не завжди можна знайти корінь $r_0 = -R$) і значення $q_- = \mathbf{P}\{\xi^- < 0\} = \Psi(0)$.

Лема 3.2. *Нехай* $\xi(t)$ *– напівнеперервний зверху процес ризику (див.* (1.9) *з* $u = 0$*). Для розподілу* ξ^-*, крім* (3.17) *(див.* [171]*) при* $x = -u \to -\infty$ *мають місце:*
наближення Реньї ($p_- = \frac{m}{a} = \frac{\rho}{1+\rho}$)

$$\mathbf{P}\{\xi^- < -u\} = \Psi(u) \sim \Psi_{\mathrm{R}}(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2(1+\rho)}} = q_- e^{-\frac{2p_-\mu_1}{\mu_2}u}; \quad (3.23)$$

наближення Де Вільдера ($\delta = \rho = m(\lambda\mu_1)^{-1}$)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\xi^- < -u\} &= \Psi(u) \sim \Psi_{\mathrm{DV}}(u) = \\ &= \frac{1}{1 + 2\rho\mu_1\mu_3\mu_2^{-2/3}} e^{-\frac{6\mu_1\mu_2\rho u}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2\rho}};\end{aligned} \quad (3.24)$$

дифузійне та експоненційне наближення

$$\Psi(u) \sim \begin{cases} \Psi_{\mathrm{D}}(u) = \exp\{-2\rho\mu_1\mu_2^{-1}u\}, \quad u \to \infty, \\ \Psi_{\mathrm{E}}(u) = \exp\left\{\dfrac{\mu_2 - 2\rho\mu_1 u}{\sqrt{\mu_2^2 + 4\rho\mu_1\mu_3/3}} - 1\right\}; \end{cases} \quad (3.25)$$

наближення Ове Лундберга, що покращує $\Psi_{\mathrm{D}}(u)$,

$$\Psi(u) \sim \Psi_{\mathrm{OL}}(u) = \Psi_{\mathrm{D}}(u)\left[1 + \left(\rho u - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) e^{\frac{4\rho\mu_1^2\mu_3}{3\mu_2^3}}\right]. \quad (3.26)$$

Приклад 3.1. Нехай $\xi(t)$ неперервний зверху процес з кумулянтою

$$\begin{aligned}&\psi(\alpha) = i\alpha a - \lambda\frac{i\alpha}{c + i\alpha} = i\alpha[a(c + i\alpha) - \lambda](c + i\alpha)^{-1}, \quad (3.27)\\ &a > 0, \quad m = a - \frac{\lambda}{c}, \quad \sigma_1^2 = \frac{2\lambda}{c^2}, \quad c > 0.\end{aligned}$$

Знайти компоненти о.ф.т. та розподіли $\xi^\pm$ при $\pm m < 0$.

Рівняння (3.6) зводиться до квадратного: $r[cm + ar] = (c + r)s$. Його корені $r_1(s) = -R(s) = -cp_-(s)$, $r_2(s) = \rho_+(s)$ визначають х.ф.

$$\begin{aligned}&\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(c + i\alpha)}{cp_-(s) + i\alpha}, \quad (3.28)\\ &\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \quad p_-(s) = \frac{s}{a\rho_+(s)}.\end{aligned}$$

Отже

$$P_-(s,x) = q_-(s)e^{R(s)x}, \quad x<0; \quad \overline{P}_+(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}, \quad x>0.$$

При $m<0$ $\rho_+(s) \to \rho_+ = c|m|a^{-1}$, отже

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = e^{-\rho_+ x}, \quad x \geq 0. \tag{3.29}$$

При $m=0$ $a=\frac{\lambda}{c}$ і з (3.27) випливає рівняння $\lambda r^2 = cs(c+r)$, корені якого $r_{1,2} \approx \pm c\sqrt{\frac{s}{\lambda}}$; отже

$$\varphi_\pm(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \mathbf{P}\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1.$$

При $m>0$ $r_1(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} -R = -cp_-,\ \rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0,\ R = mca^{-1}$. Тому

$$\begin{gathered}\varphi_+(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \varphi_-(s,\alpha) \to \frac{p_-(c+i\alpha)}{R+i\alpha}, \\ \mathbf{P}\{\xi^- < x\} = q_- e^{Rx}, \quad x<0, \quad p_- = \frac{m}{a}; \quad q_- = 1-p_-. \end{gathered} \tag{3.30}$$

Згідно з означеннями § 1.5 процеси з вище вказаною кумулянтою ($a>0$, $c>0$) неперервні зверху і майже напівнеперервні знизу. Лише для таких двосторонньо напівнеперервних процесів корені $\rho_+(s)$ та $-\rho_-(s) = -R(s)$ рівняння (3.6) повністю визначають розподіл $\xi^\pm(\theta_s)$.

Приклад 3.2. Розглянемо неперервний зверху процес $\xi(t)$ з кумулянтою

$$\begin{gathered}\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{i\alpha}{1+i\alpha}, \quad a>0, \\ k(r) = ra + \frac{r^2}{2} - \frac{r}{r+1}. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Знайти моменти $\xi(t)$ та компоненти о.ф.т., а також розподіли $\xi^\pm$ при $\pm m<0$.

Відмітимо, що

$$\begin{gathered}k'(r) = a + r - \frac{1}{(1+r)^2}, \quad m = k'(0) = a-1, \\ k''(r) = 1 + \frac{2}{(1+r)^3}, \quad \sigma_1^2 = k''(0) = 3.\end{gathered}$$

Рівняння (3.6) зводиться до кубічного рівняння

$$P_3(s,r) =: r^3 + (1+2a)r^2 + 2(m-s)r - 2s = 0. \tag{3.32}$$

При $s = 0$ (3.32) зводиться до квадратного рівняння: $r^2 + (1+2a)r + 2m = 0$ з дискримінантом $D_0 = (1+2a)^2 - 8m$. Рівняння (3.32) має єдиний додатний корінь $r_s = \rho(s) > 0$, що визначає $\varphi_+(s,\alpha)$,

$$P_3(s,r) = (r-\rho(s))P_2(s,r),$$
$$P_2(s,r) = r^2 + (1+2a+\rho(s))r + \frac{2s}{\rho(s)}.$$

Отже х.ф. $\xi(\theta_s)$ є дробово-раціональною функцією, що розкладається на множники

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{2s(1+i\alpha)}{P_3(s,i\alpha)} = \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\frac{s}{\rho(s)}\frac{2(1+i\alpha)}{P_2(s,i\alpha)}.$$

Таким чином

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}, \quad \varphi_-(s,\alpha) = \frac{s}{\rho(s)}\frac{2(1+i\alpha)}{P_2(s,i\alpha)}. \tag{3.33}$$

Якщо $m > 0$ $(a > 1)$, тоді $\rho(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$ $\rho'(0) = m^{-1}$. Отже $\varphi_+(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1$.

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} = \lim_{s\to 0}\varphi_-(s,\alpha) = \frac{2m(1+i\alpha)}{P_2(0,i\alpha)}, \tag{3.34}$$
$$P_2(0,i\alpha) = 2m + i\alpha(1+2a) - \alpha^2.$$

Якщо $m < 0$ $(a < 1)$, тоді $\rho(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho = 4|m|(\sqrt{D_0} + 1 + 2a)^{-1} > 0$,

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho}{\rho - i\alpha}, \quad \mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = e^{-\rho x}, \quad x \geq 0,$$
$$\lim_{s\to 0}\varphi_-(s,\alpha) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{\rho(s)}\frac{2(1+i\alpha)}{P_2(0,i\alpha)} = 0, \quad \mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} + 1. \tag{3.35}$$

Якщо $m = 0$, тоді при $a = 1$ з рівняння $P_2(s,r) = 0$ і того, що $\rho(s) \approx C_+\sqrt{s}$ випливає, що дискримінант $D_s \approx C_+(3 + C_+\sqrt{s})$ визначає корінь

$$r_s = -R(s) \approx \frac{\sqrt{D_s} - C_+(3 + C_+\sqrt{s})}{2C_+} \approx$$

$$\approx -\frac{2\sqrt{s}}{3C_+} = -C_+\sqrt{s}, \quad C_+^2 = \frac{2}{3}.$$

При $s \to 0$ $R(s) \to 0$, $\rho(s) \to 0$, тому з (3.33) випливає, що $\varphi_\pm(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\mathbf{P}\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1$.

Зауважимо, що при $m > 0$ і $s \to 0$

$$P_2(0,r) = (r+R)(r+\rho_2), \quad R = \lim_{s\to 0} R(s), \quad \rho_2 > R, \quad R\rho_2 = 2m.$$

Тому з (3.34) після розкладу на дробово-лінійні функції маємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} = p\frac{R}{R+i\alpha} + q\frac{\rho_2}{\rho_2+i\alpha}, \quad p+q=1, \quad q = \frac{R(2m-R)}{2m-R^2}; \\ &P_-(x) = \mathbf{P}\{\xi^- < x\} = pe^{Rx} + qe^{2mR^{-1}x}, \quad x \le 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Аналогічні твердження до теореми 3.1 та наслідку 3.1 мають місце для неперервних знизу процесів з кумулянтою (3.2), для яких при $\int x\Pi(dx) < \infty$ позначатимемо

$$\Pi(x) = \Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad x > 0, \quad d\Pi(x) = -\Pi(dx).$$

Теорема 3.2. *Якщо $\xi(t)$ неперервний знизу процес, тоді від'ємний корінь $r_s = -\rho_-(s) < 0$ рівняння (3.6) визначає*

$$\varphi_-(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)} = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}. \tag{3.37}$$

Х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ визначається співвідношенням

$$\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{\rho_-(s)} \int_0^\infty e^{i\alpha x} dP(s,x) + \widetilde{P}_>(s,\alpha), \tag{3.38}$$

а розподіли $\xi^\pm(\theta_s)$ — співвідношеннями

$$\begin{aligned} &P_-(s,x) = e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0; \\ &\overline{P}_+(s,x) = \frac{1}{\rho_-(s)} P'(s,x) + \overline{P}(s,x), \quad x > 0; \end{aligned} \tag{3.39}$$

при $\sigma = 0$, $a < 0$, $\overline{P}_+(s,x)$ допускає обернення по s

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t) > x\} = \mathbf{P}\{\xi(t) > x\} +$$

$$+|a|\int_0^t \mathbf{P}\{\xi^+(t-y)=0\}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(y)<x\}dy, \quad x>0. \tag{3.40}$$

$$p_+(s)=\frac{s}{|a|\rho_-(s)}, \quad \overline{P}_+(s,x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} q_+(s)=1-p_+(s).$$

При $\sigma>0$ *(або* $\widetilde{\Pi}(0)=\int_0^\infty \Pi(x)dx=\infty$*)* $p_+(s)=0$.

При $\sigma=0$ *для процесів з обмеженою варіацією і кумулянтою*

$$\psi(\alpha)=i\alpha a+\int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(dx)=i\alpha(a+\widetilde{\Pi}(i\alpha)), \quad a<0,$$

існує щільність при $x\neq 0$

$$P'(s,x)=\int_{\min(0,x)}^\infty \rho_-(s)e^{\rho_-(s)(x-y)}dP_+(s,y)=$$

$$=\begin{cases}\rho_-(s)e^{x\rho_-(s)}\varphi_+(s,i\rho_-(s)), & x<0,\\ \rho_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}dP_+(s,y), & x>0;\end{cases} \tag{3.41}$$

$$\rho_-(s)=P'(s,-0)P^{-1}(s,0),$$

$$P'(s,-0)-P'(s,+0)=p_+(s)\rho_-(s)=s|a|^{-1}, \quad \sigma=0, \quad a<0;$$

$$P'(s,\pm 0)=\rho_-(s)\varphi_+(s,i\rho_-(s))=s\rho'_-(s),$$

$$P(s,\pm 0)=\varphi_+(s,i\rho_-(s)), \quad \sigma>0. \tag{3.42}$$

Якщо $m<0$, *тоді* $\rho_-(s)s^{-1}\underset{s\to 0}{\longrightarrow}|m|^{-1}$ *і згідно* (3.39) *при* $s\to 0$

$$\mathbf{P}\{\xi^+>x\}=|m|\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt\right), \ x>0, \ p_+=\frac{m}{a}. \tag{3.43}$$

Якщо $m>0$, *тоді* $\rho_-(s)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}\rho_->0$ *і розподіл* ξ^- *невироджений,*

$$\mathbf{P}\{\xi^-<x\}=e^{\rho_- x}, \quad x\le 0, \quad \rho_-=(ap'_a(0))^{-1}. \tag{3.44}$$

Доведення теореми 3.2 аналогічне доведенню теореми 3.1 та наслідку 3.1.

Зауважимо, що рівняння (3.6) має додатний розв'язок $r_s=R(s)>0$ ($R(s)\to 0$ при $s\to 0$ для $m\ge 0$) такий, що $R(s)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}R_+>0$ при $m<0$. Цей корінь R_+ визначає наближення для розподілу ξ^+

$$\mathbf{P}\{\xi^+>x\}\sim\frac{|m|}{k'(R_+)}e^{-R_+x} \quad (x\to\infty). \tag{3.45}$$

Це наближення як і (3.17) називається апроксимацією Крамера–Лундберга для напівнеперервних знизу процесів.

Нехай $\xi_*(t)$ — монотонно незростаючий процес із кумулянтою

$$\psi_*(\alpha) = a_* + \frac{1}{m}\widetilde{\psi}(\alpha), \quad a_* = -\frac{\sigma^2}{2m} < 0, \quad m = a - \widetilde{\Pi}(0) > 0$$

та спектральною мірою стрибків $\Pi_*(dx) = \frac{1}{m}\Pi(x)dx$, $x < 0$, тоді для розподілу абсолютних екстремумів напівнеперервних процесів легко доводиться твердження (збірного типу)

Теорема 3.3. *а) Нехай $\xi(t)$ — неперервний зверху процес з кумулянтою ($a > 0$ якщо $\sigma = 0$)*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx). \tag{3.46}$$

Тоді при умові $\int_{-\infty}^{0}|x|\Pi(dx) < \infty,\ \Pi(x) = \int_{-\infty}^{x}\Pi(dy), x < 0$

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= -\frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + i\alpha(m - \widetilde{\psi}(\alpha)), \quad m = a - \widetilde{\Pi}(0),\\ \widetilde{\psi}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(x)dx.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Якщо $m > 0$, тоді $\rho_+(s) \to 0$, $\rho'_+(0) = m^{-1} > 0$ і з о.ф.т. випливає, що розподіл абсолютного мінімуму визначає х.ф.

$$\begin{aligned}\varphi_-(\alpha) &= \lim_{s\to 0}\frac{s}{s - \psi(\alpha)}\frac{\rho_+(s) - i\alpha}{\rho_+(s)} = \frac{i\alpha m}{\psi(\alpha)} =\\ &= \frac{m}{m - \widetilde{\psi}(\alpha) - \frac{i\alpha}{2}\sigma^2} = \frac{1}{1 - \psi_*(\alpha)},\end{aligned} \tag{3.48}$$

тобто, якщо $\mathbf{P}\{\theta_1 > t\} = e^{-t}$, $t > 0$, то

$$\varphi_-(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(\theta_1)} = \int_0^{\infty} e^{-t}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(t)}dt, \tag{3.49}$$

б) Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес з кумулянтою ($a < 0$ для $\sigma = 0$),

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_0^{\infty}(e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx); \tag{3.50}$$

тоді при умові $\int_0^\infty x\Pi(dx) < \infty$, $\Pi(x) = \int_x^\infty \Pi(dy)$, $x > 0$,

$$\psi(\alpha) = -\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + i\alpha(m + \widetilde{\psi}(\alpha)),$$
$$\widetilde{\psi}(\alpha) = \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(x)dx. \tag{3.51}$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\rho_-(s) \to 0$, $\rho'_-(0) = |m|^{-1}$ *і з о.ф.т. випливає, що розподіл абсолютного максимуму визначає х.ф.*

$$\varphi_+(\alpha) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s-\psi(\alpha)} \frac{\rho_-(s) + i\alpha}{\rho_-(s)} = -\frac{|m|i\alpha}{\psi(\alpha)} =$$
$$= \frac{|m|}{|m| - \frac{\sigma^2}{2}i\alpha - \widetilde{\psi}(\alpha)}, \quad p_+ = \frac{|m|}{c} = \frac{c - \widetilde{\Pi}(0)}{c}. \tag{3.52}$$

Якщо $\xi^*(t)$ — *монотонно неспадний процес із кумулянтою*

$$\psi^*(\alpha) = a^* i\alpha + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi^*(dx),$$

$a^* = \frac{\sigma^2}{2|m|} > 0$, $\Pi^*(dx) = \frac{1}{|m|}\Pi(x)dx$, $x > 0$, *тоді*

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^*(\theta_1)} = \frac{1}{1-\psi^*(\alpha)}, \tag{3.53}$$
$$\mathbf{P}\{\theta_1 > t\} = e^{-t}, \quad t > 0.$$

Очевидно, що при $\sigma = 0$ $a_* = a^* = 0$, (3.52) зводиться до (2.60).

Приклад 3.3. Нехай $\xi(t) = -t + w(t) + \sum\limits_{k\le\nu(t)} \xi_k$ з х.ф. стрибків $\varphi(\alpha) = \frac{c}{c-i\alpha}$,

$$\psi(\alpha) = -i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \lambda\frac{i\alpha}{c-i\alpha}, \quad c > 0, \quad \lambda > 0.$$

Знайти $\varphi_\pm(s,\alpha)$, $\overline{\mathbf{P}}_+(s,x)$, генератриси $\widetilde{T}(s,\mu,u)$, $L_x^\pm(s,\mu)$ і їх обернення по μ, u та х.ф. $D_0(s,\alpha)$ й обернення по α.

Процес $\xi(t)$ неперервний знизу, має моменти $m = \frac{\lambda}{c} - 1 = \frac{\lambda-c}{c}$, $\mathbf{D}\xi(1) = \lambda c^{-2} + 1$. При $i\alpha = r$

$$k(r) = \frac{-r^3 - (c+2)r^2 - 2mcr}{2(c-r)}$$

і кумулянтне рівняння $k(r) = s$ зводиться до кубічного

$$
\begin{aligned}
&r^3 - (2+c)r^2 - 2(mc+s)r + 2cs = 0, \quad s > 0;\\
&r^3 - (2+c)r^2 - 2mcr = 0, \ s = 0.
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

При $s = 0$ одержимо квадратне рівняння з дискримінантом

$$D_0 = 4 + 4c + c^2 + 8\lambda - 8c = (2-c)^2 + 8\lambda > 0$$

і нульовий корінь $r = 0$. Ненульові корені квадратного рівняння залежать від знаку m: $\sqrt{D_0} > c + m$, $m > 0$; $\sqrt{D_0} < c + m$, $m < 0$;

a) $m > 0$ $(\lambda > c)$, $r_{1,2} = \frac{2+c\mp\sqrt{D_0}}{2}$, $r_1 < r_0 = 0 < r_2$;

b) $m < 0$ $(\lambda < c)$, $r_1 = 0 < r_0 < r_2$;

c) $m = 0$ $(\lambda = c)$, $r_1 = r_0 = 0 < r_2 = 2 + c$.

Від'ємний корінь (3.54) при $s > 0$ визначає х.ф. $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad \rho_-(s) = -r_1(s), \quad r_1(s) < 0. \tag{3.55}$$

Якщо ліву частину (3.54) позначити $P_3(s,r)$, тоді

$$
\begin{aligned}
&\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s - \psi(\alpha)} = \frac{2s(c - i\alpha)}{P_3(s, i\alpha)},\\
&P_3(s,r) = (r + \rho_-(s))P_2(s,r),\\
&P_2(s,r) = r^2 - (2 + c + \rho_-(s))r + 2cs\rho_-^{-1}(s) =\\
&\qquad\quad = (r - r_0(s))(r - r_2(s)),\\
&r_{2,0}(s) = 2^{-1}(2 + c + \rho_-(s) \pm \sqrt{D_s}),\\
&r_0(s)r_2(s) = 2cs\rho_-^{-1}(s), \quad r_0(s) + r_2(s) = 2 + c + \rho_-(s).
\end{aligned}
$$

Отже $(r_2(s) - r_0(s) = \sqrt{D_s} > 0,\ s \geq 0)$

$$
\begin{aligned}
&\varphi(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}\frac{2s(c - i\alpha)}{\rho_-(s)P_2(s, i\alpha)};\\
&\varphi_+(s,\alpha) = \frac{2s(c - i\alpha)}{\rho_-(s)(r_0(s) - i\alpha)(r_2(s) - i\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

Після підстановки (3.56) в другу ф.т. одержуємо

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu\big] = \widetilde{J}_0(s,\mu) + \widetilde{J}_+(s,\mu,u) =$$

$$= \mu \frac{c(r_0(s)+r_2(s)) - r_0(s)r_2(s) + c\mu + u(\mu+c)}{(c+u)(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)} =$$

$$= \mu \frac{c(2+c+\rho_-(s)) - 2cs\rho_-^{-1}(s) + c\mu + u(\mu+c)}{(c+u)(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)}, \tag{3.57}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu\} = \mu \frac{2+c+\rho_-(s) - 2cs\rho_-^{-1}(s) + \mu}{(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)}. \tag{3.58}$$

Тому

$$\widetilde{T}(s,\mu,u) := \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu\big] = \frac{1}{c+u}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu\} +$$
$$+ \frac{u(c+\mu)}{c+u} \frac{\mu}{(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)},$$

а при $u \to \infty$ знаходимо $\widetilde{J}_0(s,\mu)$ незалежне від u

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\theta'_\mu) = 0, \xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu\} = \mu \frac{c+\mu}{(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)}; \tag{3.59}$$

$$\widetilde{J}_+(s,\mu,u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \xi^+(\theta_s) > \theta'_\mu, \gamma^+(\theta'_\mu) > 0\big] =$$
$$= \mu \frac{c(2+c+\rho_-(s)) - 2cs\rho_-^{-1}(s) - c^2}{(c+u)(r_0(s)+\mu)(r_2(s)+\mu)}. \tag{3.60}$$

Після розкладу правих частин (3.57)–(3.60) на дробово-лінійні функції, що обертаються відносно μ, і з них випливає співвідношення в термінах $r_{0,2}(s)$

$$\overline{\mathbf{P}}_+(s,x) := \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \tag{3.61}$$
$$= \frac{r_2(s)(1-r_0(s))e^{-r_0(s)x} + r_0(s)(r_2(s)-1)e^{-xr_2(s))}}{r_2(s)-r_0(s)}, \quad x > 0,$$
$$\mathbf{P}\{\gamma^+(x) > z | \gamma^+(x) > 0\} = e^{-cz}, \quad z > 0.$$

Щоб знайти $D_0(s,\mu)$, $D_x^\pm(s,\mu)$ $(\pm x > 0)$ використаємо співвідношення (2.70) з теореми 2.6 § 2.4. Згідно з (3.56) та з першим співвідношенням в (2.70), знаходимо

$$d_+(\alpha) = \widehat{D}_+(\alpha) + D_0(s,\mu) =$$
$$= \frac{s}{s+\mu} \frac{\rho_-(s+\mu)}{p_-(s)} \frac{(r_0(s+\mu) - i\alpha)(r_2(s+\mu) - i\alpha)}{(r_0(s) - i\alpha)(r_2(s) - i\alpha)},$$

$$D_0(s,\mu) = \lim_{i\alpha\to-\infty} d_+(\alpha) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}, \tag{3.62}$$

$$\widehat{D}_+(\alpha) = d_+(\alpha) - D_0(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\left[\frac{r_0(s+\mu)-r_0(s)}{r_0(s)-i\alpha} + \right. \tag{3.63}$$
$$\left. + \frac{r_2(s+\mu)-r_2(s)}{r_2(s)-i\alpha} + \frac{(r_0(s+\mu)-r_0(s))(r_2(s+\mu)-r_2(s))}{(r_0(s)-i\alpha)(r_2(s)-i\alpha)}\right].$$

Після обернення відносно α знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}D_x^+(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}\Big[&(r_0(s+\mu)-r_0(s))e^{-r_0(s)x} + \\ &+ (r_2(s+\mu)-r_2(s))e^{-r_2(s)x} + \\ &+ (r_0(s+\mu)-r_0(s))(r_2(s+\mu) - \\ &- r_2(s))\int_0^x e^{-r_0(s)(x-y)}e^{-r_2(s)y}dx\Big], \quad x>0.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Згідно з (3.55) та з другим співвідношенням в (2.70) знаходимо

$$\begin{aligned} d_-(\alpha) &= \frac{-s}{s+\mu}\frac{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}{\varphi_-(s,\alpha)} = \\ &= -\frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)(\rho_-(s)+i\alpha)}{\rho_-(s)(\rho_-(s+\mu)+i\alpha)},\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}\widehat{D}_-(s,\alpha) &= D_0(s,\mu) + d_-(\alpha) = \\ &= \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}\frac{\rho_-(s+\mu)-\rho_-(s)}{\rho_-(s+\mu)+i\alpha},\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}D_x^-(s,\mu) = \\ &= \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}(\rho_-(s+\mu)-\rho_-(s))e^{\rho_-(s+\mu)x}, \quad x<0.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Отже після інтегрування з урахуванням умови (2.61) з § 2.4

$$\begin{aligned}&D_x^-(s,\mu) = \\ &= \frac{s}{s+\mu}\left[\frac{(\rho_-(s+\mu)-\rho_-(s))}{\rho_-(s)}e^{x\rho_-(s+\mu)} + 1\right], \quad x<0.\end{aligned} \tag{3.68}$$

З уточнення о.ф.т. випливає результат, на основі якого визначається $P'(s,x)$ $(x<0)$ і легко доводиться відома формула двоїстості зв'язку між розподілами $\xi(t)$ та $\tau^-(x)$ для неперервних знизу процесів [5, 75, 192]. Щоб довести її, використаємо

Наслідок 3.2. *Для неперервного знизу процесу $\xi(t)$ за допомогою $\rho(s)$ визначаються $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s)$ та $\frac{\partial}{\partial x}P(s,x)$, $(x<0)$*

$$\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = \frac{1}{\rho(s)}, \quad s>0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}P(s,x) = s\rho'(s)e^{\rho(s)x}, \quad x<0. \tag{3.69}$$

Доведення. Очевидно, що (для стислості замінимо $\rho_-(s)$ на $\rho(s)$)

$$\rho^{-1}(s) = \int_{-\infty}^0 e^{\rho(s)x}dx = \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\}dx =$$
$$= s\int_0^\infty e^{-st}\int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{\xi^-(t)<x\}dxdt = s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}\xi^-(t)dt,$$

і перше співвідношення доведено. Користуючись уточненням о.ф.т.

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s)+i\alpha}\varphi_+(s,\alpha)$$

після операції проектування $[\;]_-$ знаходимо, що

$$[\varphi(s,\alpha)]_- = \left[\frac{\rho(s)}{\rho(s)+i\alpha}\varphi_+(s,\alpha)\right]_- .$$

Звідки після обернення по α знаходимо, що

$$P'(s,x) = \rho(s)\int_0^\infty e^{\rho(s)(x-y)}dP_+(s,y) =$$
$$= \rho(s)\varphi_+(s,i\rho(s))e^{\rho(s)x}, \quad x<0.$$

Оскільки $-\rho(s)$ є коренем рівняння Лундберга, $k(-\rho(s))=s$, то з о.ф.т. випливає, що

$$k'(-\rho(s)) = -\frac{1}{\rho'(s)}, \quad \frac{s}{k(-\rho)-k(r)} = \frac{\rho(s)}{r+\rho(s)}\varphi_+(s,ir),$$

$$\rho(s)\varphi_+(s,i\rho) = -s \lim_{-r\to\rho(s)} \frac{r+\rho(s)}{k(r)-k(-\rho)} = -\frac{s}{k'(-\rho(s))} = s\rho'(s)$$

і друга формула в (3.69) доведена. □

Теорема 3.4 (двоїстості)**.** *Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес, тоді зв'язок між розподілами $\xi(t)$ та $\tau^-(x)$ виражається співвідношенням*

$$\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{z}\mathbf{P}\{\tau^-(z)<t\}dz\right), \quad x<0. \tag{3.70}$$

Якщо при $x<0$ існує щільність розподілу $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\}$, тоді

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\} = -\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^-(x)<t\}, \quad x<0. \tag{3.71}$$

Аналогічно для неперервних зверху процесів $\xi(t)$, для яких існує щільність розподілу $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\}$, має місце співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\} = \frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(x)<t\}, \quad x>0. \tag{3.72}$$

Доведення. З (3.69) після інтегрування по x знаходимо, що

$$P(s,x) = s\rho'(s)\int_{-\infty}^{x} e^{\rho(s)z}dz = s\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{z}\left(e^{\rho(s)z}\right)'_s dz =$$
$$= s\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{z}(\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<z\})'_s dz.$$

Оскільки

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<z\} = s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi^-(t)<z\}ds =$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}d_t\mathbf{P}\{\tau^-(z)<t\},$$

то

$$P(s,x) = -s\int_{-\infty}^{x} z^{-1}\int_0^\infty te^{-st}(\mathbf{P}\{\tau^-(z)<t\})'_t dtdz =$$
$$= -s\int_0^\infty e^{-st}t\left(\int_{-\infty}^{x} z^{-1}\mathbf{P}\{\tau^-(z)<t\}dz\right)'_t dt.$$

Звідси після обернення по s випливає (3.70) і після диференціювання одержуємо формулу двоїстості (3.71). □

На основі наслідку 2.2 для напівнеперервних процесів встановлюються співвідношення для $\varphi_\pm(s,\alpha)$ в термінах

$$\widetilde{\Pi}(\rho) = \widetilde{\Pi}_+(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho x}\Pi_+(x)dx,$$
$$\Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad x > 0,$$

або

$$\widetilde{\Pi}(\rho) = \widetilde{\Pi}_-(\rho) = \int_{-\infty}^0 e^{\rho x}\Pi_-(x)dx,$$
$$\Pi_-(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad x < 0.$$

Наслідок 3.3. *Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес, тоді $\varphi_\pm(s,\alpha)$ визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned} \varphi_-(s,\alpha) &= \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \\ \varphi_+(s,\alpha) &= s(\rho_-(s)+i\alpha)\{s(\rho_-(s)+i\alpha) - i\alpha\rho_-(s)\times \\ &\quad\times[\widetilde{\Pi}_+(-i\alpha) + a + \sigma^2\rho_-(s) + i\alpha\sigma^2/2 - s/\rho_-(s)]\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Якщо $\xi(t)$ — неперервний зверху процес, тоді $\varphi_\pm(s,\alpha)$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \varphi_+(s,\alpha) &= \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)-i\alpha}, \\ \varphi_-(s,\alpha) &= s(\rho_+(s)-i\alpha)\{s(\rho_+(s)-i\alpha) - i\alpha\rho_+(s)\times \\ &\quad\times[\widetilde{\Pi}_-(i\alpha) + a + \sigma^2\rho_+(s) - i\alpha\sigma^2/2 - s/\rho_+(s)]\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

При $\sigma^2 \geq 0$, $x > 0$ для неперервного зверху процесу

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\} &= \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} + \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t-y) < x\}\mathbf{E}[\xi(y), \xi(y) > 0]\frac{dy}{y}, \\ \mathbf{P}\{\xi^-(t) = 0\} &= \frac{m}{a} + (at)^{-1}\mathbf{E}[\xi(t), \xi(t) < 0] \quad \text{\textit{при}} \;\; \sigma^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Доведення. Для неперервних знизу процесів $P_-(s,x) = e^{\rho_-(s)x}$ $(x \leq 0)$. Тому для згортки

$$K(s,x) = \int_0^\infty \Pi(x-y)dP_-(s,y) = \\ = \rho_-(s)\int_x^\infty \Pi(y)e^{\rho_-(s)(x-y)}dy, \quad x \geq 0,$$

враховуючи рівняння $(\mathcal{L}_s)$ для визначення $\widetilde{\Pi}(\rho)$, знаходимо її інтегральне перетворення, через яке в (2.52) визначалось $\varphi_+(s,\alpha)$,

$$\begin{aligned} k(s,\alpha) &= \int_0^\infty e^{i\alpha x}\rho_-(s)\int_x^\infty \Pi(y)e^{\rho_-(s)(x-y)}dydx = \\ &= \rho_-(s)\int_0^\infty \Pi(y)e^{-\rho_-(s)y}\int_0^y e^{(i\alpha+\rho_-(s))x}dx = \\ &= \rho_-(s)[\widetilde{\Pi}(-i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_-(s))](\rho_-(s)+i\alpha)^{-1} = \\ &= [\rho_-(s)\widetilde{\Pi}(-i\alpha) + a\rho_-(s) + \frac{\sigma^2}{2}\rho_-^2(s) - s](\rho_-(s)+i\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Згідно з (3.12) для неперервного знизу процесу $(C_*(s) = \frac{\sigma^2}{2s}\rho_-(s))$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{s - i\alpha[k(s,\alpha) + \sigma^2\rho_-(s)/2]}.$$

Звідси після підстановки знайденого значення $k(s,\alpha)$ одержимо другу формулу в (3.73).

Аналогічно для неперервних зверху процесів розподіл $\xi^+(\theta_s)$ показниковий з параметром $\rho_+(s)$. Для згортки $x \leq 0$

$$K(s,x) = \int_0^\infty \Pi_-(x-y)dP_+(s,y) = \\ = \rho_+(s)\int_{-\infty}^x e^{-\rho_+(s)(x-y)}\Pi_-(y)dy,$$

з рівняння Лундсберга $(\mathcal{L}_s)$ знаходимо значення

$$\rho_+\widetilde{\Pi}_-(\rho_+) = s - a\rho_+ - \frac{\sigma^2}{2}\rho_+^2,$$

після підстановки якого в співвідношення

$$k(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\big[\Pi_-(i\alpha) - \widetilde{\Pi}_-(\rho_+(s))\big],$$

отримаємо х.ф. $\varphi_-(s,\alpha)$ в (3.74). При доведенні (3.75) слід врахувати, що $\rho_+^{-1}(s) = \mathbf{E}\xi^+(\theta_s)$. Тому з (3.19) випливає, що

$$\mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\} = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t) < x - y\} d\mathbf{E}\xi^+(y).$$

За формулою двоїстості (3.72)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\xi^+(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau^+(z) < t\} dz =$$
$$= \int_0^\infty \frac{z}{t}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\{\xi(t) < z\} dz = t^{-1}\mathbf{E}[\xi(t), \xi(t) > 0].$$

Після підстановки $d\mathbf{E}\xi^+(y) = y^{-1}\mathbf{E}[\xi(y), \xi(y) > 0]dy$ у згортку з $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t) < x\}$ одержимо (3.75). □

Приклад 3.4. Нехай $\xi(t)$ — неперервний знизу процес з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \int_0^1 (e^{i\alpha x} - 1) d\ln x, \quad a < 0, \quad \text{якщо} \quad \sigma^2 = 0.$$

Знайти $\varphi_-(s,\alpha)$ та х.ф. $\xi^\pm$ при $\pm m < 0$.

Замінимо $i\alpha = r$ і позначимо

$$k(r) = \psi(\alpha)|_{i\alpha = r} = ar + \frac{\sigma^2 r^2}{2} + \int_0^1 (e^{rx} - 1) d\ln x =$$
$$= r\left(a + \frac{\sigma^2 r}{2} - \int_0^1 e^{rx}\ln x dx\right).$$

Тоді рівняння Лундберга зводиться до рівняння

$$ar + \frac{\sigma^2 r^2}{2} + r\int_0^1 e^{rx}\ln x^{-1} dx = s \quad (\mathcal{L}_s)$$

яке має від'ємний корінь, що визначає х.ф.

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad r_s = -\rho_-(s), \quad s > 0. \tag{3.76}$$

При умові $m = a + 1 < 0$, $\rho_-(s) \to 0$, $\rho'_-(0) = |m|^{-1}$, тому на підставі о.ф.т.

$$\lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = \lim_{s\to 0}\frac{(\rho_-(s) + i\alpha)s}{\rho_-(s)(s - \psi(\alpha))} = -\frac{i\alpha|m|}{\psi(\alpha)}.$$

Якщо позначити

$$\psi_1(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2} i\alpha + \int_0^1 (e^{i\alpha x} - 1) \ln x^{-1} dx,$$

тоді $\psi(\alpha)(i\alpha)^{-1} = m + \psi_1(s)$.

Отже при $m < 0$ х.ф. ξ^+ запишеться так:

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi^+} = \frac{|m|}{|m| - \psi_1(\alpha)}, \quad |m| = |a| - 1. \tag{3.77}$$

При умові $m > 0$ $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_- > 0$, тоді з (3.76) при $s \to 0$ випливає

$$\varphi_-(\alpha) = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi^-} = \frac{\rho_-}{\rho_- + i\alpha}, \quad \mathbf{P}\{\xi^- < x\} = e^{\rho_- x}, \quad x \le 0.$$

Якщо позначити $\xi^*(t)$ монотонно зростаючий процес зі знесенням $a_* = \frac{\sigma^2}{2}$ і кумулянтою $\psi_1(\alpha)$, тоді при $m < 0$

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi^*(\theta'_{|m|})}, \quad \mathbf{P}\{\theta'_{|m|} > t\} = e^{-t|m|}, \quad t > 0.$$

Якщо $\sigma^2 = 0$, $a < 0$, тоді $a_* = \sigma^2/2 = 0$ і х.ф. ξ^+ після нескладних перетворень можна записати так:

$$\varphi_+(\alpha) = \frac{|m|}{|m| + 1 - \varphi_*(\alpha)} = \frac{p_+}{1 - q_+\varphi_*(\alpha)},$$
$$\varphi_*(\alpha) = \int_0^1 e^{i\alpha x} \ln x^{-1} dx, \quad p_+ = \frac{|m|}{1 + |m|}, \quad q_+ = \frac{1}{1 + |m|}.$$

Останнє співвідношення для х.ф. ξ^+ означає, що

$$\xi^+ \doteq \sum_{k \le \widetilde{\nu}(q_+)} \xi_k^*, \quad \mathbf{E} e^{i\alpha\xi_k^*} = \varphi_*(\alpha),$$

де $\widetilde{\nu}(q_+)$ має геометричний розподіл з параметром q_+.

Зауважимо, що формула (3.75) виражає прямий зв'язок (без інтегральних перетворень) розподілу $\xi^-(t)$ з розподілом $\xi(t) < 0$. У формулі Спітцера залежність розподілу $\xi^-(\theta_s)$ від розподілу від'ємних значень $\xi(t) < 0$ значно складніша.

3.2 Компоненти о.ф.т. для майже напівнеперервних процесів

Спочатку дамо більш загальне означення напівнеперервних процесів ніж означення 1.11 та 1.12 для випадку $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dx) < \infty$.

Означення 3.1. Нехай $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$ — процес з обмеженою варіацією і кумулянтою $\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\alpha) = \lambda_1[\varphi_1(\alpha) - 1], \quad \varphi_1(\alpha) = \frac{d}{d \pm i\alpha}, \ d = b > 0 \ (d = c > 0),\\
&\psi_2(\alpha) = ai\alpha + \int_{\mathbf{R}^{\pm}} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \ \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(dx) \leq \infty, \\
&\int_{\mathbf{R}^{\pm}} |x|\Pi(dx) < \infty, \quad \pm a \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Тоді процес $\xi(t)$ назвемо майже напівнеперервним знизу (зверху).

Майже напівнеперервність знизу (зверху) означає, що процес $\{\xi(t), \ \xi(0) = 0, \ t \geq 0\}$ перетинає від'ємний (додатний) рівень лише від'ємними стрибками з показниковим розподілом. Процеси $\xi_{1,2}(t)$ з кумулянтами $\psi_{1,2}(\alpha)$ мають стрибки різних знаків.

Інколи зручно вважати, що майже напівнеперервний процес

$$\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$$

є різницею процесів $\xi_{1,2}(t)$, що мають лише додатні стрибки.

Приклад 3.5. В теорії страхування інколи розглядаються процеси ризику (див. приклад 1.5) з випадковими преміями

$$\begin{aligned}
&\xi_u(t) = u + C(t) - S(t), \quad u > 0, \quad C(t) = \xi_1(t) = \sum_{k \leq \nu_1(t)} \xi'_k,\\
&S(t) = \sum_{k \leq \nu_2(t)} \xi_k, \quad \mathbf{P}\{\xi_k > 0\} = \mathbf{P}\{\xi'_k > 0\} = 1,
\end{aligned}$$

$\nu_{1,2}(t)$ — прості пуасонівські процеси (незалежні між собою і незалежні від ξ_k та ξ'_k, $k \geq 0$) з параметрами інтенсивності $\lambda_{1,2} > 0$. Якщо премії ξ'_k мають х.ф. $\varphi_1(\alpha) = c(c - i\alpha)^{-1}$, тоді $\xi(t) = C(t) - S(t)$ є майже неперервним зверху процесом ризику з показниково розподіленими преміями і початковим капіталом $u = 0$. Знайти компоненти о.ф.т. для $\xi(t)$ та х.ф. ξ^-.

Кумулянта процесу $\xi(t)$ є сумою двох кумулянт

$$\psi(\alpha)=\psi_1(\alpha)+\psi_2(\alpha),$$
$$\psi_1(\alpha)=\frac{i\alpha\lambda_1}{c-i\alpha},\quad \psi_2(\alpha)=\mathbf{E}e^{-i\alpha S(1)}.$$

Оскільки $m=\frac{\lambda_1}{c}-\lambda_2\mu_1$, $\mu_1=\mathbf{E}\xi_1$, вона зводиться до вигляду

$$\psi(\alpha)=\frac{\lambda_1 i\alpha}{c-i\alpha}+\psi_2(\alpha)=(c-i\alpha)^{-1}i\alpha(cm-c\widetilde{\psi}_2(\alpha)-\psi_2(\alpha)),$$
$$s-\psi(\alpha)=\frac{i\alpha\lambda_1+(c-i\alpha)\psi_2(\alpha)}{c-i\alpha}=$$
$$=\frac{s(c-i\alpha)-i\alpha[mc-\psi_2(\alpha)-c\widetilde{\psi}_2(\alpha)]}{c-i\alpha},\tag{3.79}$$
$$\widetilde{\psi}_2(\alpha)=\lambda_2\int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x}-1)\mathbf{P}\{-\xi_1<x\}dx,$$
$$\psi_2(\alpha)=\lambda_2\int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x}-1)d\mathbf{P}\{-\xi_1<x\}.$$

Тоді х.ф. $\xi(\theta_s)$ має вигляд ($cm=\lambda_1-c\mu_1\lambda_2$)

$$\varphi(s,\alpha)=\frac{s}{s-\psi(\alpha)}=$$
$$=\frac{s(c-i\alpha)}{s(c-i\alpha)-i\alpha(mc-\psi_2(\alpha)-c\widetilde{\psi}_2(\alpha))}.\tag{3.80}$$

Як і для напівнеперервного випадку рівняння Лундберга

$$\psi(\alpha)|_{i\alpha=r}=:k(r)=s\tag{3.81}$$

має корінь $0<r_s<c$, що визначає першу компоненту о.ф.т.

$$r_s=\rho_+(s)=cp_+(s),\quad p_+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=0\}>0,$$
$$\varphi_+(s,\alpha)=:\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}=\frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}.\tag{3.82}$$

Тоді на основі о.ф.т. встановлюється співвідношення для другої компоненти о.ф.т.

$$\varphi_-(s,\alpha)=\frac{sc(\rho_+(s)-i\alpha)}{\rho_+(s)[s(c-i\alpha)-i\alpha(mc-\psi_2(\alpha)-c\widetilde{\psi}_2(\alpha))]}.\tag{3.83}$$

Якщо $m > 0$, тоді $\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho'_+(0) = m^{-1}$. Отже з (3.83) при $s \to 0$ визначається х.ф. абсолютного мінімуму ξ^-

$$\varphi_-(\alpha) = \lim_{s\to 0} \varphi_-(s,\alpha) = (1 - \psi_*(\alpha))^{-1}, \tag{3.84}$$
$$\psi_*(\alpha) = \frac{1}{cm}(\psi_2(\alpha) + c\widetilde{\psi}_2(\alpha)), \quad cm = c(a - \widetilde{\Pi}(0)) + \lambda_1.$$

Позначимо $\xi_*(t)$ монотонно незростаючий процес з кумулянтою $\psi_*(\alpha)$, а θ_1 — показниково розподілену випадкову величину з $s = 1$, тоді $\xi^- \doteq \xi_*(\theta_1)$

$$\varphi_-(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(t)}dt. \tag{3.85}$$

Нехай $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$ — загальний майже напівнеперервний зверху процес з $\int_{-\infty}^0 \Pi(dx) \le \infty$, для якого кумулянта $\psi(\alpha)$ визначається співвідношеннями

$$\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha), \quad \psi_1(\alpha) = \frac{i\alpha\lambda_1}{c - i\alpha},$$
$$\psi_2(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \quad a \le 0. \tag{3.86}$$

При умові $\int_{-\infty}^0 |x|\Pi(dx) < \infty$ позначимо

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad x < 0, \quad \widetilde{\Pi}_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}\Pi(x)dx,$$

тоді шляхом інтегрування частинами встановлюється, що

$$\psi_2(\alpha) = i\alpha a - i\alpha\widetilde{\Pi}_-(\alpha) = i\alpha[a - \widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\psi}_2(\alpha)],$$
$$\widetilde{\psi}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(x)dx, \quad \widetilde{\Pi}(0) = \widetilde{\Pi}_-(0) < \infty.$$

Тепер неважко довести лему для випадку міри $\Pi(\cdot)$ з необмеженою варіацією при $x < 0$ (зокрема, співвідношення (3.87)).

Лема 3.3. *Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою $\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)$, де $\psi_{1,2}(\alpha)$ визначається в* (3.86) *з $a \le 0$. Тоді $cm = c(a - \widetilde{\Pi}(0)) + \lambda_1$ і х.ф. $\xi(\theta_s)$ має вигляд*

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s(c - i\alpha)}{s(c - i\alpha) - i\alpha(cm - \psi_0(\alpha))},$$

$$\psi_0(\alpha) = \psi_2(\alpha) + c\widetilde{\psi}_2(\alpha). \tag{3.87}$$

Додатний корінь рівняння (3.81)

$$r_s = \rho_+(s) = cp_+(s) < c, \quad p_+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\}$$

визначає генератрису $\tau^+(x)$ *і х.ф.* $\varphi_+(s,\alpha)$, *тоді відповідно з о.ф.т. визначаєтьса і* $\varphi_-(s,\alpha)$

$$\begin{aligned} &T(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0; \\ &\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}, \quad p_+(s) = \frac{1}{1+\mathbf{E}\xi^+(\theta_s)}, \\ &\varphi_-(s,\alpha) = \left[\frac{sc(\rho_+(s)-i\alpha)}{\rho_+(s)[s(c-i\alpha)-i\alpha(cm-\psi_0(\alpha))]}\right]_-^0. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Якщо $m = a - \widetilde{\Pi}(0) + \lambda_1 c^{-1} > 0$, *тоді* $\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho'_+(0) = m^{-1} > 0$, *існує невироджений розподіл* ξ^- *з х.ф.*

$$\begin{aligned} &\varphi_-(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} = \frac{cm}{cm-\psi_0(\alpha)}, \\ &\psi_0(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x}-1)(\Pi(dx) + c\Pi(x)dx). \end{aligned} \tag{3.89}$$

Доведення. Згідно з (2.56) встановлюється перша формула в (3.88). Крім того, як і в лемі 3.1, із стохастичного співвідношення

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta, \quad \xi + a\zeta > x, \ a \le 0, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi-a\zeta), \ \xi + a\zeta \le x, \end{cases}$$

для генератриси $T(s,x)$ виводиться рівняння (1.98) з L в (1.100), розв'язком якого є експонента

$$T(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0.$$

На основі о.ф.т. та (3.87) знаходимо, що

$$\begin{aligned} \varphi_-(s,\alpha) &= \left[\varphi(s,\alpha)\varphi_+^{-1}(s,\alpha)\right]_-^0 = \\ &= \left[\frac{s}{s(c-i\alpha)-i\alpha(cm-\psi_0(\alpha))}\frac{\rho_+(s)-i\alpha}{p_+(s)}\right]_-^0, \end{aligned}$$

тоді справедлива друга формула в (3.88).

Якщо позначити $\xi_*(t)$ процес з відповідними характеристиками

$$a_* = a(cm)^{-1}, \quad \Pi_*(dx) = (cm)^{-1}[\Pi(dx) + c\Pi(x)dx], \quad x < 0,$$

тоді через його кумулянту

$$\psi_*(\alpha) = a_* i\alpha + \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi_*(dx)$$

визначається за допомогою θ_1:

$$\varphi_-(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_*(\theta_1)} = \frac{1}{1 - \psi_*(\alpha)}, \tag{3.90}$$

$$\mathbf{P}\{\theta_1 > 1\} = e^{-t}, \quad t > 0. \qquad \square$$

Якщо для майже напівнеперервних знизу процесів позначити

$$\Pi(x) = \int_x^{\infty} \Pi(dy) \quad (x > 0),$$

$$\widetilde{\Pi}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x}\Pi(x)dx, \quad \int_0^{\infty} \Pi(dx) \leq \infty,$$

тоді для них справедлива аналогічна

Лема 3.4. *Нехай $\xi(t)$ має кумулянту $\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)$*

$$\psi_1(\alpha) = -\frac{\lambda_2 i\alpha}{b + i\alpha},$$

$$\psi_2(\alpha) = ai\alpha + \int_0^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \quad a \geq 0, \quad b > 0. \tag{3.91}$$

Тоді

$$\psi_2(\alpha) = i\alpha(a + \widetilde{\Pi}(0)) + i\alpha\widetilde{\psi}_2(\alpha), \quad \widetilde{\psi}_2(\alpha) = \widetilde{\Pi}(\alpha) - \widetilde{\Pi}(0)$$

і х.ф. $\xi(\theta_s)$ має вигляд ($m = a + \widetilde{\Pi}(0) - \lambda_1 b^{-1}$, $\widetilde{\Pi}(0) < \infty$)

$$\varphi(s, \alpha) = \frac{s(b + i\alpha)}{s(b + i\alpha) - i\alpha(bm + \psi_0(x))}, \tag{3.92}$$

$$\psi_0(\alpha) = \psi_2(\alpha) + b\widetilde{\psi}_2(\alpha) = i\alpha a + \int_0^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)(\Pi(dx) + b\Pi(x)dx).$$

Від'ємний корінь рівняння Лундберга $r_s = -\rho_-(s)$; $\rho_-(s) = bp_-(s)$ *визначає*

$$\varphi_-(s,\alpha) = p_-(s)(b+i\alpha)[\rho_-(s)+i\alpha]^{-1},$$
$$\varphi_+(s,\alpha) = \left[\frac{sb(\rho_-(s)+i\alpha)}{\rho_-(s)[s(b+i\alpha)-i\alpha(mb+\psi_0(\alpha))]}\right]_+^0. \tag{3.93}$$

Якщо $m = a+\lambda_1\mu_1-\lambda_2 b^{-1} < 0$, *тоді* $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho'_-(0) = \frac{1}{|m|}$. *Тому існує невироджений розподіл* ξ^+ *з х.ф.*

$$\varphi_+(\alpha) = \frac{b|m|}{b|m|-\psi_0(\alpha)}, \quad \psi_0(\alpha) = \psi_2(\alpha) + b\widetilde{\psi}_2(\alpha) = \tag{3.94}$$
$$= i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)[\Pi(dx)+b\Pi(x)dx].$$

Якщо $\xi^*(t)$ *— монотонно неспадний процес з характеристиками*

$$a^* = \frac{a}{b|m|}, \quad \Pi^*(dx) = (b|m|)^{-1}[\Pi(dx)+b\Pi(x)dx], \quad x>0,$$

тоді $\xi^+ \doteq \xi^*(\theta_1)$, $\mathbf{P}\{\theta_1 > t\} = e^{-t}$, $t \geq 0$,

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^*(t)}dt = (1-\psi^*(\alpha))^{-1},$$
$$\psi^*(\alpha) = i\alpha a^* + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi^*(dx). \tag{3.95}$$

Співвідношення лем 3.3 та 3.4 в деякому сенсі є аналогами співвідношень (3.47)–(3.49) та (3.51)–(3.53) теореми 3.3 попереднього § 3.1. Щоб одержати аналоги теорем 3.1 та 3.2 з § 3.1 доведем твердження, яке частково випливає з попередньої леми.

Лема 3.5. *Для майже напівнеперервних зверху (знизу) процесів* $\xi(t)$ *розподіли* $\xi(\theta_s)$ *і* $\xi^\mp(\theta_s)$ *є неперервними в нулі* ($p(s) = p_\mp(s) = 0$), *якщо виконується хоча б одна з умов із знаком "−" ("+")*

$$\mp a > 0, \quad \pi_0^\mp = \int_{\mathbf{R}^\mp} \Pi(dx) = \infty. \tag{3.96}$$

Якщо $\xi(t)$ *— східчастий процес, тобто* $a = 0$ *і* $\lambda_{1,2} = \pi_0^\mp < \infty$, *тоді*

$$p(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = 0\} = \frac{s}{s+\lambda} > 0, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$p_+(s)p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda}, \quad p_\pm(s) > 0. \tag{3.97}$$

При цьому для $m = \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 b^{-1} < 0$ (3.94) *зводиться до формули Полячека–Хінчина* (*див.* (2.60))

$$\varphi_+(\alpha) = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \quad \Pi_0(dx) = \Pi(dx) + b\Pi(x)dx, \tag{3.98}$$
$$p_+ = \frac{b|m|}{b|m| + \lambda_0} = \frac{b|m|}{\lambda}, \quad \lambda_0 = \int_0^\infty \Pi_0(dx) = \lambda_1(1 + b\mu_1),$$
$$\widetilde{\varphi}(\alpha) = \lambda_0^{-1}\int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi_0(dx).$$

Доведення. Нехай $\xi(t)$ — процес з кумулянтою (3.86). Згідно з (3.87)

$$p(s) = \lim_{i\alpha\to\infty} \varphi(s,\alpha) =$$
$$= \lim_{r=i\alpha\to\infty} \frac{s(cr^{-1} - 1)}{s(cr^{-1} - 1) - cm + ar - \pi_0^- - c\widetilde{\Pi}(0) + \int_{-\infty}^0 e^{rx}\Pi_*(dx)}.$$

При виконанні хоча б однієї умови (3.96) з верхнім знаком $^-$ знаменник останнього виразу прямує до ∞ при $r \to \infty$, тому $p(s) = 0$. Якщо $a = 0$ і $\lambda_2 = \pi_0^- < \infty$, тоді $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \infty$ визначає показниковий розподіл момента 1-го стрибка ζ східчастого процесу $\xi(t)$. Тому

$$p(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = 0\} = s\int_0^\infty \mathbf{P}\{\zeta > t\}e^{-st}dt = \frac{s}{s+\lambda} > 0.$$

Оскільки для майже напівнеперервного зверху процесу $p_+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} > 0$, то при умові (3.96) з о.ф.т. випливає, що $p(s) = 0$ і з необхідністю $p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = 0$. Якщо умова (3.96) з верхнім знаком не виконується, точніше $a = 0$ і $\lambda_2 = \pi_0^- < \infty$, тоді з того, що $p(s) = \frac{s}{s+\lambda} > 0$ випливає, що $p_-(s) > 0$ і з о.ф.т. випливає друге співвідношення (3.97). □

Аналогічно для майже напівнеперервних знизу процесів з кумулянтою (3.91) встановлюється, що при умові (3.96) з нижнім знаком

$$p(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = 0\} = p_+(s) = 0.$$

Якщо $a = 0, \lambda_2 = \pi_0^+ < \infty$, тоді $p(s) = s(s+\lambda)^{-1} > 0$ і $p_+(s) > 0$.

Справедливі дещо складніші аналоги теорем 3.1 та 3.2 з § 3.1.

Теорема 3.5. *Нехай $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (3.86). *Тоді при умові* (3.96) *з верхнім знаком х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ визначається співвідношенням* (3.88) *і*

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \frac{1}{p_+(s)}\widetilde{P}_<(s,\alpha) - \frac{q_+(s)}{p_+(s)}\left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right]_-^0, \qquad (3.99)$$

$$q_-(s) = 1, \quad \text{якщо} \;\; \pi_0^- < \infty, \quad a < 0$$

$(\widetilde{P}_<(s,\alpha),\ \widetilde{P}_>(s,\alpha)$ *див. у* (3.9)).

Якщо $a = 0$, $\lambda_2 = \pi_0^- < \infty$, *тоді* $0 < q_-(s) < 1$, $p_\pm(s) > 0$ *в силу* (3.97) *із* (3.99) *випливає, що*

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \\ = \frac{(s+\lambda)p_-(s)}{s}\left\{\widetilde{P}_<(s,\alpha) - q_+(s)\left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right]_-^0\right\}. \qquad (3.100)$$

Розподіл екстремумів $\xi^\pm(\theta_s)$ згідно з (3.88), (3.99) *визначається співвідношеннями при $\lambda_2 = \infty$*

$$\overline{P}_+(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0, \qquad (3.101)$$

$$P_-(s,x) = \frac{1}{p_+(s)}[P(s,x) - cq_+(s)\int_0^\infty e^{-cy}P(s,x-y)dy], \quad x \le 0.$$

А при $a = 0$, $\lambda_2 = \pi_0^- < \infty$ згідно з (3.99) *після підстановки $p_+^{-1}(s) = s^{-1}(s+\lambda)p_-(s)$ при $x < 0$*

$$P_-(s,x) = s^{-1}(s+\lambda)p_-(s)[P(s,x) - q_+(s)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) - x < -\theta_c'\}],$$
$$p_-(s) = s\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \ge -\theta_c'\} \times \\ \times [s + (s+\lambda)\mathbf{P}\{-\theta_c' \le \xi(\theta_s) < 0\}]^{-1}. \qquad (3.102)$$

Якщо $m = a - \widetilde{\Pi}(0) + \lambda_1 c^{-1} > 0$, *тоді* $\rho_+(s) \to 0$, $q_+(s) \to 1 (s \to 0)$, $\rho_+'(0) = m^{-1}$ *і за умови* (3.96) ξ^- *має невироджений розподіл*

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = cm\int_0^\infty \mathbf{P}\{-\theta_c' \le \xi(t) - x < 0\}dt, \quad x \le 0. \qquad (3.103)$$

При умові $a = 0$, $\lambda_2 < \infty$ згідно з першою формулою в (3.102)

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = \lambda p_-\int_0^\infty \mathbf{P}\{-\theta_c' \le \xi(t) < x\}dx, \quad x < 0, \qquad (3.104)$$

$$p_- = \left[1 + \lambda \int_0^\infty \mathbf{P}\{-\theta'_c \le \xi(t) < 0\} dt\right]^{-1}.$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\rho_+(s) \to \rho_+ = cp_+ > 0$, *існує невироджений розподіл* ξ^+

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = q_+ e^{-x\rho_+}, \quad x > 0, \quad q_+ = 1 - p_+, \tag{3.105}$$

$$p_+ = \frac{\int_0^\infty \mathbf{P}\{-\theta'_c \le \xi(t) < 0\} dt}{\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) \ge -\theta'_c\} dt}, \tag{3.106}$$

$$\mathbf{P}\{\theta'_c > t\} = e^{-ct}, \quad t \ge 0.$$

Доведення. Х.ф. $\varphi_+(s,\alpha)$ згідно з (2.56) визначається співвідношенням (3.88). Після підстановки $\varphi_+(s,\alpha) = 1 + \frac{i\alpha q_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}$ в о.ф.т. одержимо співвідношення

$$\varphi(s,\alpha) = \left(1 + \frac{i\alpha q_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\right) \varphi_-(s,\alpha), \quad \rho_+(s) = cp_+(s),$$

яке на підставі позначень (3.9) з § 3.1 зводиться до вигляду

$$\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) = \\ = \widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) \frac{i\alpha p_+(s) - \rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha} + \frac{q_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}.$$

Звідси після нескладних перетворень знаходимо, що

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \\ = \frac{1}{p_+(s)} \left[(\widetilde{P}_<(s,\alpha) - \widetilde{P}_>(s,\alpha)) \left(1 - \frac{cq_+(s)}{c - i\alpha}\right) + \frac{q_+(s)}{c - i\alpha} \right]_-^0 = \\ = \frac{1}{p_+(s)} \widetilde{P}_<(s,\alpha) - \frac{q_+(s)}{p_+(s)} \left[\frac{c}{c - i\alpha} \widetilde{P}_<(s,\alpha) \right]_-^0.$$

Звідси з урахуванням (3.97) при $a = 0$ $\pi_0^- = \lambda_2 < \infty$ встановлюється (3.99). Співвідношення (3.101), (3.102) виводяться з (3.88), (3.99) шляхом обернення відносно α. Значення $p_+(s)$ в (3.101) одержується з першого співідношення (3.102) при $x = 0$ після підстановки $p_-(s) = s[(s+\lambda)p_+(s)]^{-1}$. В результаті цього з другого співвідношення в (3.102) одержується рівняння

$$(s+\lambda)p_+(s)[1 - \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < -\theta'_c\}] = s + (s+\lambda)\mathbf{P}\{-\theta'_c \le \xi(\theta_s) < 0\},$$

з якого випливає, що

$$p_+(s) = \frac{s + (s+\lambda)\mathbf{P}\{-\theta_c' \leq \xi(\theta_s) < 0\}}{(s+\lambda)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \geq -\theta_c'\}}. \tag{3.107}$$

Якщо $m > 0$, тоді з другого співвідношення в (3.101) при умові (3.96) випливає (3.103). Якщо $m > 0$ і $a = 0, \lambda_2 < \infty$, тоді з першого співвідношення в (3.102) випливає (3.104).

Якщо $m < 0$, тоді з першого співвідношення в (3.101) випливає (3.105), при цьому граничне значення $p_+(s)(s \to 0)$ визначається з останнього співвідношення для $p_+(s)$ (3.107). □

Сформулюємо без доведення аналог теореми 3.2, оскільки його доведення не відрізняється від доведення попередньої теореми.

Теорема 3.6. *Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (3.91). *Тоді при умові* (3.96) *з нижнім знаком х.ф. $\xi^-(\theta_s)$ визначається співвідношенням в* (3.93) *з $\rho_-(s) = bp_-(s)$ і*

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) &= \int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{P}_+(s,x)dx = \\ &= \frac{1}{p_-(s)}\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\left[\frac{b}{b+i\alpha}\widetilde{P}_>\right]_+^0, \quad q_+(s) = 1, \quad a > 0.\end{aligned} \tag{3.108}$$

Якщо $a = 0$, $\lambda_2 = \pi_0^+ < \infty$, тоді $0 < q_+(s) < 1$, $p_\pm(s) > 0$ і в силу (3.97)

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \\ &= \frac{(s+\lambda)p_+(s)}{s}\left\{\widetilde{P}_>(s,\alpha) - q_-(s)\left[\frac{b}{b+i\alpha}\widetilde{P}_>(s,\alpha)\right]_+^0\right\}.\end{aligned} \tag{3.109}$$

Якщо $\lambda = \lambda_2 + \int_0^\infty \Pi(dx) = \infty$ ($\int_0^1 x\Pi(dx) < \infty$), тоді розподіл $\xi^\pm(\theta_s)$ визначається відповідно при $\mp x > 0$ співвідношеннями

$$\begin{aligned}&P_-(s,x) = q_-(s)e^{x\rho_-(s)}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s), \quad x < 0,\\ &p_-(s) = \frac{\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \in [0,\theta_b']\}}{q_+(s) - \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \geq \theta_b'\}},\\ &\overline{P}_+(s,x) = \frac{1}{p_-(s)}[\overline{P}(s,x) - bq_-(s)\int_x^\infty \overline{P}(s,y)e^{b(x-y)}dy],\end{aligned} \tag{3.110}$$

та при $\lambda < \infty$, $a = 0$, $x > 0$ $(p_+(s)p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda})$

$$\overline{P}_+(s,x) = \frac{(s+\lambda)p_+(s)}{s}[\overline{P}(s,x) - q_-(s)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) > x + \theta_b'\}],$$
$$p_+(s) = s\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \le \theta_b'\}[s + (s+\lambda)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \in [0,\theta_b')\}]^{-1}. \quad (3.111)$$

Якщо $m = a + \widetilde{\Pi}(0) - \lambda_2 b^{-1} < 0$, *тоді* $\rho_-(s) \to 0$, $q_-(s) \to 1$, $\rho_-'(0) = |m|^{-1}$. *Тому при умові* (3.96) *з нижнім знаком з* (3.110) *при* $s \to 0$ *випливає, що* ξ^+ *має невироджений розподіл* (*аналог* (3.103))

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = b|m| \int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \xi(t) - x < \theta_b'\}dt, \quad x \ge 0. \quad (3.112)$$

При умові $a = 0$, $\lambda < \infty$ (*при* $m < 0, q_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1$) *з* (3.111) *випливає*

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = \lambda p_+ \int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \xi(t) - x < \theta_b'\}dt, \quad x > 0, \quad (3.113)$$
$$p_+ = [1 + \lambda \int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \xi(t) < \theta_b'\}dt]^{-1}, \quad \lambda = \lambda_2 + \int_0^\infty \Pi(dx).$$

Якщо $m > 0$, *тоді* $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_- = bp_- > 0$, $p_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, *тому існує невироджений розподіл* ξ^-

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = q_- e^{\rho_- x}, \quad x < 0, \quad q_- = 1 - p_-, \quad (3.114)$$
$$p_- = \frac{\int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \xi(t) < \theta_b'\}dt}{\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) < \theta_b'\}dt}. \quad (3.115)$$

Зауважимо, що для процесів $\xi(t)$ із сумарною кумулянтою (див. (3.78)) при умові $\int_{|x|<1} |x|\Pi(dx) = \infty$, не має сенсу поняття майже напівнеперервності. З другої о.ф.т. і леми 3.3 для майже напівнеперервних зверху процесів випливає

Наслідок 3.4. *Нехай* $\xi(t)$ — *майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (3.86). *Тоді генератриса* $\{\tau^+(\theta_\mu'), \gamma^+(\theta_\mu')\}$ *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\theta_\mu') - u\gamma^+(\theta_\mu')}, \tau^+(\theta_\mu') < \infty] = \frac{\mu q_+(s)}{\rho_+(s) + \mu}\frac{c}{c+u}, \quad (3.116)$$

з якого для пари $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ *встановлюється співвідношення*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(x)}, \xi^+(\theta_s) > x] =$$

$$= \mathbf{E}e^{-u\gamma^+(x)}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \frac{c}{c+u}q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \quad (3.117)$$

З (3.117) *випливає, що* $\gamma^+(x)$ *і* $\xi^+(\theta_s)$ *— незалежні. При цьому* $\gamma^+(x)$ *— показниково розподілена з параметром* $c > 0$. *Отже при* $x > 0$, $z > 0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(x) > z, \xi^+(\theta_s) > x\} = \quad (3.118)$$
$$= \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\}\mathbf{P}\{\gamma^+(x) > z\} = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}e^{-cz}.$$

Аналогічне твердження має місце для $\{\tau^-(x), \gamma^-(x)\}$ для майже неперервного знизу процесу.

Наслідок 3.5. *Нехай* $\xi(t)$ *— майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (3.91). *Тоді*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x)+u\gamma^-(x)}, \tau^-(x) < \infty] = \mathbf{E}[e^{u\gamma^-(x)}, \xi^-(\theta_s) < x] =$$
$$= \mathbf{E}e^{u\gamma^-(x)}\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}\frac{c}{c+u}. \quad (3.119)$$

А після обернення (3.119) *одержується співвідношення при* $x < 0$, $z < 0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^-(x) < z, \xi^-(\theta_s) < x\} = \quad (3.120)$$
$$= \mathbf{P}\{\gamma^-(x) < z\}\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}e^{cz}.$$

Встановлена в наслідках 3.4 та 3.5 незалежність $\tau^\pm(x)$ та $\gamma^\pm(x)$ має місце лише для майже напівнеперервних зверху (знизу) процесів.

Приклад 3.6. Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha),$$
$$\psi_1(\alpha) = -\frac{i\alpha}{c+i\alpha}, \quad \psi_2(\alpha) = \int_0^1 (e^{i\alpha x} - 1)d\ln x. \quad (3.121)$$

Знайти компоненти о.ф.т. $\varphi_\pm(s,\alpha)$ та розподіли $\xi^\pm$ при умові $\pm m < 0$.

Згідно (3.92)

$$\varphi(s,\alpha) = \quad (3.122)$$
$$= \frac{s(c+i\alpha)}{s(c+i\alpha) - i\alpha[c - 1 + \int_0^1 (e^{i\alpha x} - 1)(d\ln x + c|\ln x|dx)]}.$$

Рівняння Лундберга $\psi(\alpha)|_{i\alpha=r} = k(r) = 0$ запишеться так

$$r(c-1) + r\int_0^1 (e^{rx} - 1)(x^{-1} + c|\ln x|)dx = s(c+r).$$

Його від'ємний корінь $r_s = -\rho_-(s)$ визначає х.ф.

$$\begin{aligned} &\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(c+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \quad \rho_-(s) = cp_-(s), \\ &\varphi_+(s,\alpha) = \\ &\quad = \frac{sc(\rho_-(s)+i\alpha)}{\rho_-(s)[s(c+i\alpha) - i\alpha(c-1) + \int\limits_0^1 (e^{i\alpha x}-1)(\frac{1}{x} + c\ln\frac{1}{x})dx]}, \end{aligned} \tag{3.123}$$

$m = \mathbf{E}\xi(1) = k'(0) = 1 - c^{-1}$. Якщо $m < 0$ $(c < 1)$, тоді згідно з (3.94)

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{1-c}{1-c-\int_0^1 (e^{i\alpha x}-1)\Pi^*(dx)}, \\ &\Pi^*(dx) = \left(\frac{1}{x} + c\ln\frac{1}{x}\right)dx. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Позначимо $\xi^*(t)$ — монотонно неспадний процес з мірою $\Pi^*(dx)$, θ' — показниково розподілену випадкову величину з параметром $1-c > 0$, тоді

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^*(\theta')} = \frac{1-c}{1-c-\psi_*(\alpha)}, \\ &\psi_*(\alpha) = \int_0^1 (e^{i\alpha x}-1)\Pi^*(dx). \end{aligned} \tag{3.125}$$

При $m > 0$ $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} = p_-(c+i\alpha)(\rho_- + i\alpha)^{-1}$.

Приклад 3.7. Нехай

$$\xi(t) = S_1(t) - S_2(t), \quad S_1(t) = \sum_{k\le\nu_1(t)} \xi'_k, \quad S_2(t) = \sum_{k\le\nu_2(t)} \xi''_k,$$

$\nu_{1,2}(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з параметрами $\lambda_{1,2} = 1$,

$$\varphi_1(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi'_1} = c(c-i\alpha)^{-1}, \quad \varphi_2(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi''_1} = (1-i\alpha)^{-2}.$$

Знайти компоненти о.ф.т. та х.ф. для $\xi^\pm$ при $\pm m < 0$.

Процес $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху й має кумулянту

$$\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(-\alpha) = i\alpha \left[\frac{1}{c - i\alpha} - \frac{2 + i\alpha}{(1 + i\alpha)^2} \right],$$
$$m = \frac{1}{c} - 2 = \frac{1 - 2c}{c}.$$

Х.ф. $\xi(\theta_s)$ виражається дробово-раціональною функцією

$$\varphi(s, \alpha) = \frac{s(c - i\alpha)(1 + i\alpha)^2}{(c - i\alpha)[s(1 + i\alpha)^2 - i\alpha(2 + i\alpha)] + i\alpha(1 + i\alpha)^2}. \quad (3.126)$$

Рівняння Лундберга зводиться до кубічного

$$r^3(2 - s) + r^2[s(c - 2) + 4 - c] + r(2cs - s + mc) + cs = 0, \quad (3.127)$$
$$2r^2 + r(4 - c) + cm = 0, \quad s = 0, \quad D_0 = (4 - c)^2 - 8cm > 0.$$

Додатний корінь рівняння (3.127) $r_s = p_+(s)$ визначає

$$\varphi_+(s, \alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha},$$
$$\rho_+(s) = cp_+(s) < c, \quad p_+(s) = [1 + \mathbf{E}\xi^+(\theta_s)]^{-1}. \quad (3.128)$$

Тоді згідно з о.ф.т. та (3.126)

$$\varphi_-(s, \alpha) = \varphi(s, \alpha)\varphi_+^{-1}(s, \alpha) =$$
$$= \frac{s(1 + i\alpha)^2(\rho_+(s) - i\alpha)p_+^{-1}(s)}{[s(1 + i\alpha)^2 - i\alpha(2 + i\alpha)](c - i\alpha) + i\alpha(1 + i\alpha)^2}.$$

З урахуванням розкладу знаменника, який ми позначимо $P_3(s, i\alpha)$,

$$P_3(s, i\alpha) = (\rho_+(s) - i\alpha)P_2(s, i\alpha)$$

знаходимо

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{s}{p_+(s)} \frac{(1 + i\alpha)^2}{P_2(s, i\alpha)}, \quad P_2^{-1}(s, 0) = \frac{p_+(s)}{s}. \quad (3.129)$$

Якщо $m = 0$ ($c = \frac{1}{2}, \mathbf{D}\xi(1) = 2 + \frac{1}{c^2}\big|_{c=\frac{1}{2}} = 6$), тоді рівняння ($\mathcal{L}_0$) має корені $r_0 = -\frac{7}{4} < 0$, $\rho_+(0) = 0$, оскільки $\rho_+(s) \approx \sqrt{\frac{2s}{\mathbf{D}\xi(1)}} = \sqrt{\frac{s}{3}}$.

Отже згідно з (3.128), (3.129) при $m = 0$ $\varphi_\pm(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$. Це означає, що $\mathbf{P}\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1$.

Якщо $m < 0$ ($c > \frac{1}{2}$), тоді додатний корінь рівняння ($\mathcal{L}_0$) є граничним значенням $\rho_+(s) \to \rho_+ = 4^{-1}(c-4+\sqrt{D_0})$, $D_0 = (4-c)^2 - 8cm > 0$, $cm = 1-2c$. Цей корінь визначає х.ф. ξ^+

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(c-i\alpha)}{\rho_+ - i\alpha}, \quad \rho_+ = cp_+, \tag{3.130}$$

$$\varphi_-(s,\alpha) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 1.$$

Якщо $m > 0$ ($c < \frac{1}{2}$), тоді обидва корені ($\mathcal{L}_0$) від'ємні

$$r_{1,2} = 4^{-1}(c - 4 \pm \sqrt{D_0}), \quad D_0 = (4-c)^2 - 8(1-2c) > 0.$$

$\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $\rho_+'(0) = m^{-1}$. Тому з (3.129) і розкладу $P_2(0,r) = 2(r + R)(r - r_2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} &= \lim_{s\to 0}\varphi_-(s,\alpha) = \\ &= cm - \frac{(1+i\alpha)^2}{P_2(0,i\alpha)} = \frac{cm(1+i\alpha)^2}{2(R+i\alpha)(|r_2|+i\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.131}$$

Найближчий до 0 від'ємний корінь $r_1 = -R$ визначає показник експоненти в наближенні Крамера–Лундберга для розподілу ξ^- (див. (3.17)). Після розкладу в (3.131) на дробово-лінійні функції можна здійснити обернення по α й одержати розподіл ξ^-

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = \frac{2-c}{2}p_- R^{-1}e^{Rx} + p_-\frac{1}{|r_2|}e^{|r_2|x}, \quad x < 0, \tag{3.132}$$

$$p_- = \frac{cm}{2}, \quad |r_2|R = p_-, \quad |r_1| + |r_2| = 2 - c/2, \quad R < |r_2|.$$

3.3 Перестрибкові функціонали для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів

Нагадаємо, що для випадку напівнеперервності знизу в § 2.3, як і в [33, 41, 42, 51] та [46], ми позначали

$$K(s,x) = \int_{-\infty}^{0} \Pi(x-y)dP_-(s,y),$$

$$\Pi(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad x > 0, \quad K(s,x) = G(s,x,0,0,0), \tag{3.133}$$

$$G(s,x,u,v,\mu) = \int_{-\infty}^0 A(x-y,u,v,\mu)dP_-(s,y).$$

Розрізнятимемо два випадки:

а) $\xi(t)$ — напівнеперервний знизу, тоді $p_-(s) = 0$

$$P_-(s,y) = e^{\rho_-(s)y}, \quad y \le 0; \tag{3.134}$$

б) $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу, тоді $p_-(s) > 0$

$$P_-(s,y) = q_-(s)e^{\rho_-(s)y}, \quad y < 0; \quad \rho_-(s) = cp_-(s). \tag{3.135}$$

Отже відповідно у випадку а) або б) маємо

$$K(s,x) = \begin{cases} \rho_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\Pi(y)dy, \\ p_-(s)\Pi(x) + q_-(s)\rho_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\Pi(y)dy. \end{cases} \tag{3.136}$$

Аналогічно згортки $P_-(s,x)$ з $A(x,\ldots)$ відрізняються залежно від випадків а) або б)

$$G(s,x,u,v,\mu) = \tag{3.137}$$
$$= \begin{cases} \rho_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}A(y,\ldots)dy, \\ p_-(s)A(x,\ldots) + q_-(s)p_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}A(y,\ldots)dy. \end{cases}$$

Інтегральні перетворення згорток (3.136) та (3.137) виражаються через $\widetilde{\Pi}(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi(y)dy$.

Теорема 3.7. *Якщо $\xi(t)$ неперервний знизу процес лише з додатними стрибками (з кумулянтою (3.1)), тоді спільна генератриса перестрибкових функціоналів визначається співвідношенням*

$$V(s,x,u,v,\mu) = \int_0^\infty G(s,x-y,u,v,\mu)dP_+(s,y), \quad x > 0, \tag{3.138}$$

а інтегральне перетворення її

$$\widetilde{V}(s,\nu,u,v,\mu) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u\gamma^+(\theta'_\nu)-v\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}}, \tau^+(\theta'_\nu) < \infty]$$

визначається співвідношенням

$$s\widetilde{V}(s,\nu,u,v,\mu)=\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\widetilde{g}_s(\nu,u,v,\mu), \tag{3.139}$$
$$\widetilde{g}_s(\nu,u,v,\mu)=\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\rho(s)}{\rho(s)+v-u}[(\rho(s)+v+\mu)\widetilde{I}_1-(u+\mu)\widetilde{I}_2],$$
$$\widetilde{I}_1=\frac{1}{\rho(s)-\nu}[\widetilde{\Pi}(v+\mu+\nu)-\widetilde{\Pi}(v+\mu+\rho(s))],$$
$$\widetilde{I}_2=\frac{1}{u-v-\nu}[\widetilde{\Pi}(v+\mu+\nu)-\widetilde{\Pi}(u+\mu)].$$

Зокрема, генератриси пар визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_1(s,\nu,u)&=\mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)},\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu]=s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\times\\&\times\left\{\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho(s)-u}\left[\frac{u}{u-\nu}(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\nu))+\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{\rho(s)}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)))\right]\right\};\end{aligned} \tag{3.140}$$
$$\widetilde{V}_2(s,\nu,v)=\mathbf{E}[e^{-v\gamma_+(\theta'_\nu)},\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu]=$$
$$=s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\left[\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu+v)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)+v)\right];$$
$$\widetilde{V}_3(s,\nu,\mu)=\mathbf{E}[e^{-\nu\gamma^+_{\theta'_\nu}},\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu]=s^{-1}\nu\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\times$$
$$\times\left[\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\mu}{\nu}(\widetilde{\Pi}(\mu+\nu)-\widetilde{\Pi}(\nu))+\frac{\rho(s)+\mu}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\mu+\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)+\mu))\right],$$

а генератриса $\xi^+(\theta_s)$ має вигляд

$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}=\left[1+s^{-1}\nu\rho(s)\left[\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)))\right]\right]^{-1}.$$

Доведення. Теорема 3.7 випливає з теореми 2.5 та наслідку 2.2 після обчислення перетворення Лапласа по x для

$$G(s,x,u,v,\mu)=\int_x^\infty A(y,\ldots)\rho(s)e^{(x-y)\rho(s)}dy.$$

Якщо $m\le 0$, то $\mathbf{P}\{\tau^+(x)<\infty\}=1$, тому з (3.139) випливає, що

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u\gamma^+(\theta'_\nu)-v\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}}\big]=$$

$$= s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\widetilde{g}_s(\nu,u,v,\mu). \qquad (3.141)$$

Якщо $m>0$, тоді $\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_s\}<1$ і згідно з (3.139)

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)-u\gamma^+(\theta'_\nu)-v\gamma_+(\theta'_\nu)-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}}|\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\big]=$$
$$=\frac{\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}}{s\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\}}\widetilde{g}_s(\nu,u,v,\mu). \qquad (3.142)$$

Доведення співвідношення (3.139) випливає з (2.53) (див. наслідок 2.2) після інтегрального перетворення по $x>0$. Співвідношення (3.140) виводяться з (3.139) відповідно при $v=\mu=0$, $u=\mu=0$, $v=u=0$.

На основі (3.140) залежно від знаку m після граничного переходу ($s\to 0$, $\nu\to 0$) встановлюється твердження про розподіл перестрибкових функціоналів через рівень $x\to\infty$. Остання формула теореми для генератриси $\xi^+(\theta_s)$ випливає з першого співвідношення в (3.140) при $u=0$. □

Наслідок 3.6. *Нехай $\xi(t)$ неперервний знизу процес з кумулянтою (3.2) і обмеженими $m=\mathbf{E}\xi(1)$ та $\mathbf{D}\xi(1)=\sigma_1^2$. Тоді згідно з (2.52)*

$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}=\big[1+\nu s^{-1}(\rho(s)\sigma^2/2+k(s,i\nu))\big]^{-1}=$$
$$=\left[1+s^{-1}\nu\rho(s)\left\{\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu)-\frac{s}{\rho(s)}+a+\frac{\sigma^2}{2}\rho(s))\right\}\right]^{-1},$$
$$\lim_{s\to 0}s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}=\begin{cases}m_+(\nu)\rho, & \rho=\rho(0)>0,\quad m>0,\\ m_0(\nu), & \rho(s)\to 0,\quad m=0.\end{cases}$$

1. *При $m>0$ $m_+(0)=\big[\frac{1}{2}\sigma^2\rho+\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\rho)\big]^{-1}$ і розподіли $\gamma_k(\infty)$ $(k=\overline{1,3})$ визначаються генератрисами*

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(\infty)}=m_+(0)\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho+\frac{\rho}{\rho-u}(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\rho))\right],$$
$$\mathbf{E}e^{-v\gamma_+(\infty)}=m_+(0)\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho+\widetilde{\Pi}(v)-\widetilde{\Pi}(\rho+v)\right], \qquad (3.143)$$
$$\mathbf{E}e^{-\mu\gamma^+_\infty}=m_+(0)\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho+\mu\widetilde{\Pi}'(\mu)+\frac{\rho+\mu}{\rho}(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\rho+u))\right],$$

з яких після обернення знаходимо розподіли $(z > 0)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_+(0)\int_z^\infty (1 - e^{(z-y)\rho})\Pi(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_+(0)\int_z^\infty (1 - e^{-\rho y})\Pi(y)dy, \qquad (3.144)\\
&\mathbf{P}\{\gamma^+_\infty > z\} = m_+(0)\int_z^\infty (1 - e^{-\rho y} - \rho y)\Pi(dy).
\end{aligned}$$

Якщо $\sigma^2 > 0$, *то*

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) = \gamma_+(\infty) = \gamma^+_\infty = 0\} = m_+(0)\frac{\sigma^2}{2}.$$

2. *При* $m = 0$ $\ m_0(0) = \left[\frac{\sigma^2}{2} - \widetilde{\Pi}'(0)\right]^{-1}$ *і розподіли* $\gamma_k(\infty)$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_0(0)\int_z^\infty (y - z)\Pi(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_0(0)\int_z^\infty y\Pi(y)dy, \qquad (3.145)\\
&\mathbf{P}\{\gamma^+_\infty > z\} = \frac{1}{2}m_0(0)\int_z^\infty y^2\Pi(dy).
\end{aligned}$$

3. *При* $m < 0$

$$\rho'(0) = |m|^{-1} = \mathbf{E}\xi^+(\sigma^2/2 - \widetilde{\Pi}'(0))^{-1},$$

а умовні генератриси та розподіли $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{-u\gamma^+(\infty)}|\tau^+(\infty) < \infty] == \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\Pi}(u)}{u}\right],\\
&\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z|\tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\int_z^\infty (y - z)\Pi(y)dy; \qquad (3.146)\\
&\mathbf{E}[e^{-v\gamma_+(\infty)}|\tau^+(\infty) < \infty] = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\left[\frac{\sigma^2}{2} - \widetilde{\Pi}'(v)\right], \qquad (3.147)\\
&\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z|\tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\int_z^\infty y\Pi(y)dy;
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}[e^{-\mu\gamma^+_\infty}|\tau^+(\infty)<\infty] = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\left[\frac{\sigma^2}{2} - \widetilde{\Pi}'(\mu) - \frac{\mu}{2}\widetilde{\Pi}''(\mu)\right],$$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+_\infty > z|\tau^+(\infty)<\infty\} = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\int_z^\infty y^2\Pi(dy); \tag{3.148}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_k(\infty)=0|\tau^+(\infty)<\infty\} = \frac{\rho'(0)}{\mathbf{E}\xi^+}\frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2 m_0(0)}{2}, \quad k=\overline{1,3}.$$

Доведення. Перша формула для генератриси $\xi^+(\theta_s)$ випливає з (3.139) при $u=v=\mu=0$ після підстановки $\widetilde{\Pi}(\rho(s))$, визначеного з рівняння $(\mathcal{L}_s)$ При переході до границі $s\to 0$, $\nu\to 0$ в (3.140) одержуємо співвідношення для генератрис $\{\tau^+(\infty),\gamma_k(\infty)\}$. Після їх обернення знаходимо відповідні розподіли при $k=\overline{1,3}$.

При оберненні генератриси в (3.148) слід враховувати, що

$$\mu\widetilde{\Pi}'(\mu)+\widetilde{\Pi}(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu y}y\Pi(dy) = -\int_0^\infty ye^{-\mu y}d\Pi(y),$$

$$\mu\widetilde{\Pi}''(\mu) = -\int_0^\infty y^2\Pi(y)de^{-\mu y} = -2\widetilde{\Pi}'(\mu) - \int_0^\infty y^2e^{-\mu y}\Pi(dy).$$

При $m<0$ слід використати умовні генератриси

$$\mathbf{E}[e^{-u_k\gamma_k(\theta'_\nu)}|\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu] = \frac{\widetilde{V}_k(s,\nu,u_k)}{s\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\}},$$

що визначаються з (3.140), і врахувати, що

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>\theta'_\nu\} = 1-\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)},$$

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\nu\widetilde{V}_k(s,\nu,u_k)}{s\nu(1-\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)})} = \frac{1}{s\mathbf{E}\xi^+(\theta_s)}\lim_{\nu\to 0}\nu^{-1}\widetilde{V}_k(s,\nu,u_k). \qquad \square$$

Для неперервного знизу процесу $\xi(t)$ із співвідношення (2.54) за допомогою центрованих згорток

$$\overline{G}_k(s,x,u_k) = G_k(s,x,u_k) - G_k(s,x,0)$$

встановлюється твердження про спільний розподіл $\{\tau^+(0),\gamma^+(0)\}$. Оскільки розподіл $P_-(s,y)$ показниковий, то після позначення $\rho=\rho(s)$, $s>0$ одержимо

$$G_1(s,x,u) = \frac{\rho}{\rho-u}\int_0^\infty(\rho e^{-\rho y}-ue^{-ux})\Pi(x+y)dy,$$

$$G_2(s,x,v) = \rho \int_x^\infty e^{\rho x-(\rho+v)y}\Pi(y)dy, \tag{3.149}$$
$$G_3(s,x,\mu) = \int_0^\infty [[(\mu+\rho)e^{-\rho y} - \mu]e^{-\mu(x+y)}]\Pi(x+y)dy.$$

Відповідно

$$\overline{G}_1(s,x,u) = \frac{u\rho}{\rho-u}\int_0^\infty [e^{-\rho y} - e^{-uy}]\Pi(x+y)dy,$$
$$\overline{G}_2(s,x,v) = \rho \int_x^\infty e^{\rho(x-y)}(e^{-vy}-1)\Pi(y)dy, \tag{3.150}$$
$$\overline{G}_3(s,x,\mu) = \rho \int_x^\infty e^{\rho(x-y)}(e^{-\mu z}-1)\Pi(y)dy + $$
$$+ \mu \int_x^\infty e^{-\mu y}(e^{\rho(x-y)}-1)\Pi(y)dy.$$

Наслідок 3.7. *Якщо* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *мають невироджений розподіл, то при умові неперервності знизу*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma^+(0) > z, \tau^+(0) < \infty] =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty e^{(z-y)\rho(s)}\Pi(y)dy,$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty e^{-y\rho(s)}\Pi(y)dy, \tag{3.151}$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > z\} = \frac{1}{|a|\rho(s)}\int_z^\infty (1-e^{-\rho(s)y})\Pi(dy).$$

Оскільки $\rho(s)$ *є коренем рівняння Лундберга, то при* $z \to 0$ $q_+(s) = |a|^{-1}\widetilde{\Pi}(\rho(s))$, $p_+(s)\rho(s) = s|a|^{-1}$.

Доведення. (3.151) випливає з наслідку 2.2. Згідно з (2.54) при підстановці $x = 0$ знаходимо співвідношення

$$\int_0^\infty e^{-u_k z}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_k(0) > z\}dz = -\frac{1}{su_k}p_+(s)\overline{G}_k(s,0,u_k),$$

після обернення яких відносно u_k одержуються формули (3.151). □

Розглянемо тепер випадок, коли $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес. Тоді ускладнюються зображення для $G(s,x,u,v,\mu)$ та їх інтегральних перетворень, оскільки $p_-(s) > 0$. Нехай

$$\begin{aligned}
&p_- = p_-(s), \quad q_- = q_-(s), \quad \rho_- = \rho_-(s),\\
&G(s,x,u,v,\mu) = p_- A(x,u,v,\mu) + G^0(s,x,u,v,\mu),\\
&G^0(s,x,u,v,\mu) = q_- \int_{-\infty}^{-0} A(x-y,u,v,\mu)\rho_- e^{\rho_- y}dy; \qquad (3.152)\\
&\overline{G}(s,x,u,v,\mu) = p_- - \overline{A}(x-y,u,v,\mu) + \overline{G}^0(s,x,u,v,\mu),\\
&\overline{G}^0(s,x,u,v,\mu) = -\int_{-\infty}^{0} \overline{A}(x-y,u,v,\mu) q_- \rho_- e^{\rho_- y}dy.
\end{aligned}$$

Зокрема при $v = \mu = 0$ аналогічно до 1-ї формули в (3.149) знаходимо

$$\begin{aligned}
&G_1(s,x,u) = p_- \int_x^{\infty} e^{-uy}\Pi(dy) + G_1^0(s,x,u),\\
&G_1^0(s,x,u) = q_-\rho_- \frac{1}{\rho_- - u}\int_0^{\infty}(\rho_- e^{-\rho_- y} - ue^{-uy})\Pi(x+y)dy,\\
&\widetilde{G}_1(s,\nu,u) = \frac{p_-}{u-\nu}(u\widetilde{\Pi}(u) - \nu\widetilde{\Pi}(\nu)) + \widetilde{G}_1^0(s,\nu,u), \qquad (3.153)\\
&\widetilde{G}_1^0(s,\nu,u) = \frac{q_-\rho_-}{\rho_- - u}\left[\frac{\rho_-}{\rho_- - \nu}(\widetilde{\Pi}(\nu) - \widetilde{\Pi}(\rho_-)) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \frac{u}{u-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu) - \widetilde{\Pi}(u))\right].
\end{aligned}$$

При $u = \mu = 0$ аналогічно до 2-ї формули в (3.149) знаходимо

$$\begin{aligned}
&G_2(s,x,v) = p_- e^{-vx}\Pi(x) + G_2^0(s,x,v),\\
&G_2^0(s,x,v) = q_-\rho_- \int_x^{\infty} e^{\rho_- x - (\rho_- + v)y}\Pi(y)dy,\\
&\widetilde{G}_2(s,\nu,v) = p_-\widetilde{\Pi}(v+\nu) + \widetilde{G}_2^0(s,\nu,v), \qquad (3.154)\\
&\widetilde{G}_2^0(s,\nu,v) = \frac{q_-\rho_-}{\rho_- - \nu}(\widetilde{\Pi}(\nu+v) - \widetilde{\Pi}(\rho_- + v)).
\end{aligned}$$

Якщо $u = v = 0$, тоді аналогічно до 3-ї формули в (3.149) маємо

$$\begin{aligned}
&G_3(s,x,\mu) = p_- \int_x^{\infty} e^{-\mu y}\Pi(dy) + G_3^0(s,x,\mu), \qquad (3.155)\\
&G_3^0(s,x,\mu) = q_- \int_0^{\infty} [(\mu+\rho_-)e^{-\rho_- y} - \mu]e^{-\mu(x+y)}\Pi(x+y)dy,
\end{aligned}$$

$$\widetilde{G}_3(s,\nu,\mu) = p_-\nu^{-1}\int_0^\infty [e^{-\mu y} - e^{-(\mu+\nu)y}]\Pi(dy) + \widetilde{G}_3^0(s,\nu,\mu),$$
$$\widetilde{G}_3^0(s,\nu,\mu) = q_-\left[\frac{\rho_-(\mu+\nu)}{\nu(\rho_- - \nu)}\widetilde{\Pi}(\mu+\nu) - \widetilde{\Pi}(\mu) - \frac{\rho_- + \mu}{\rho_- - \nu}\widetilde{\Pi}(\rho_- + \mu)\right].$$

Для центрованих $\overline{G}(s,x,u_k)$ має місце також незначне ускладнення.

Для $v=\mu=0$ аналогічно до 1-ї формули в (3.150)

$$\overline{G}_1(s,x,u) = -p_-(s)u\int_x^\infty \Pi(y)e^{u(x-y)}dy + \overline{G}_1^0(s,x,u),$$
$$\overline{G}_1^0(s,x,u) = q_-\frac{u\rho_-}{\rho_- - u}\int_0^\infty [e^{-uy} - e^{-\rho_- y}]\Pi(x+y)dy. \tag{3.156}$$

Для $u=\mu=0$ аналогічно до 2-ї формули в (3.150)

$$\overline{G}_2(s,x,v) = -p_-(s)\Pi(x)(1-e^{-vx}) + \overline{G}_2^0(s,x,v), \tag{3.157}$$
$$\overline{G}_2^0(s,x,v) = q_-(s)\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(x-y)}(e^{-vy}-1)\Pi(y)dy.$$

Для $u=v=0$ аналогічно до 3-ї формули в (3.150)

$$\overline{G}_3(s,x,\mu) = p_-\left[(e^{-\mu y}-1)\Pi(x) - \mu\int_x^\infty \Pi(y)e^{-\mu y}dy\right] + \overline{G}_3^0(s,x,\mu),$$
$$\overline{G}_3^0(s,x,\mu) = q_-[\rho_-\int_x^\infty e^{\rho_-(x-y)}(e^{-\mu y}-1)\Pi(y)dy +$$
$$+\mu\rho_-^{-1}\int_x^\infty e^{-\mu y}(e^{\rho_-(x-y)}-1)\Pi(y)dy]. \tag{3.158}$$

Зокрема, при довільному $c>0$ $\rho_-(s) = cp_-(s)$, при $x>0$,

$$K(s,x) = p_-(s)\Pi(x) + q_-(s)\rho_-(s)\int_x^\infty \Pi(y)e^{\rho_-(s)(x-y)}dy,$$
$$\widetilde{K}(s,\nu) = \frac{p_-(s)}{\rho_-(s)-\nu}[(c-\nu)\widetilde{\Pi}(\nu) - cq_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))]. \tag{3.159}$$

Теорема 3.8. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з сумарною кумулянтою (3.91), тоді генератриса перестрибкових функціоналів визначається співвідношенням*

$$V(s,x,u,v,\mu) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x) - u\gamma_1(x) - v\gamma_s(x) - \mu\gamma_3(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] =$$

$$= \int_{-0}^{x} [p_-(s)A(x-y,\ldots) + G^0(s,x-y,u,v,\mu)]dP_+(s,y), \quad (3.160)$$

де $G^0(s,x,u,v,\mu)$ *задається в* (3.152).

Розподіли пар $\{\tau^+(x),\gamma_k(x)\}$ $(k=\overline{1,3})$ *визначаються генератрисами хвостів розподілу* $\gamma_k(x)$

$$\overline{V}_k(s,x,u_k) := \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)},\gamma_k(x)>z,\tau^+(x)<\infty]dz =$$
$$= \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>x,\gamma_k(x)>z)\}dz = \quad (3.161)$$
$$= -\frac{1}{su_k}\int_{-0}^{x}[p_-(s)\overline{A}(x-y,u_k)+\overline{G}_k^0(s,x-y,u_k)]dP_+(s,y).$$

Генератриса розподілу $\xi^+(\theta_s)$ *визначається через* $\widetilde{K}(s,\nu)$ *з* (3.159)

$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = [1+\nu s^{-1}\widetilde{K}(s,\nu)]^{-1}, \quad \mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = s^{-1}\widetilde{K}(s,0),$$
$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+} = [1+\nu\widetilde{K}'_s(0,\nu)]^{-1}, \quad \mathbf{E}\xi^+ = \left|\frac{\widetilde{\Pi}'(0)}{m}\right| + \frac{\widetilde{\Pi}(0)}{b|m|}, \quad (3.162)$$
$$\widetilde{K}'_s(0,\nu) = \frac{b\widetilde{\Pi}(0)-(b-\nu)\widetilde{\Pi}(\nu)}{b|m|\nu}, \; p_+ = (1+\widetilde{K}''_{s\nu}(0,0))^{-1}, \; m<0.$$

Доведення співвідношень (3.160), (3.161) (див. [51]) аналогічне доведенню відповідних тверджень для напівнеперервного випадку. Зокрема згідно з лемою 3.3 та (3.159) формула (3.161) при $k=1$ записується так

$$\int_0^\infty e^{-uz}\mathbf{P}\{\gamma^+(0)>z,\xi^+(\theta_s)>0\}dz =$$
$$= \frac{1}{s+\lambda}\left[\widetilde{\Pi}(u) + \frac{cq_-(s)}{\rho_-(s)-u}(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\rho_-(s)))\right]. \quad (3.163)$$

Аналогічно можна записати генератриси для розподілів

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(0)>z,\xi^+(\theta_s)>0\} \quad \text{та} \quad \mathbf{P}\{\gamma_0^+>z,\xi^+(\theta_s)>0\},$$

і шляхом обернення відносно u цих генератрис з незначними відмінностями від наслідку 3.7 доводиться наслідок про розподіл пар $\{\gamma_k(0),\xi^+(\theta_s)\}$ (якщо $\mathbf{P}\{\gamma_k(0)=0\}>0$).

Якщо для майже напівнеперервного знизу процесу виконується хоча б одна з умов: $a > 0$ або $\int_{R^+} \Pi(dx) = \infty$ при $a = 0$, тоді $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ мають вироджений розподіл.

У випадку невиродженості розподілу $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ для майже неперервних знизу процесів має місце твердження в певній мірі аналогічне наслідку 3.7.

Обмежимось випадком, коли $\xi(t)$ — східчастий процес з умовною х.ф. стрибків

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k} \mid \xi_k < 0] = \frac{c}{c + i\alpha} \tag{3.164}$$

і обмеженою мірою Леві ($\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$)

$$\lambda = \int_{\mathbf{R}} \Pi(dx) < \infty, \quad \lambda_{1,2} = \int_{\mathbf{R}^\pm} \Pi(dx) < \infty.$$

Наслідок 3.8. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу східчастий процес, тоді при умові (3.164) розподіли пар $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ невироджені і визначаються співвідношеннями при $z = 0$*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = \\
&\quad = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(z) + q_-(s)c\int_z^\infty e^{(z-y)\rho_-(s)}\Pi(y)dy\right], \\
&\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > z\} = \frac{c}{s+\lambda}q_-(s)\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}\Pi(y)dy, \\
&\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > z\} = \\
&\quad = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(z) + \frac{q_-(s)c}{\rho_-(s)}\int_z^\infty (1 - e^{-\rho_-(s)y})\right]\Pi(dy); \\
&q_+(s) = \frac{1}{s+\lambda}[\lambda_2 + q_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho(s))], \quad cp_-(s) = \rho_-(s) > 0.
\end{aligned} \tag{3.165}$$

При цьому розподіл $\gamma_+(0)$ має атом у нулі при $\lambda_1 = \Pi(0) < \infty$,

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) = 0\} = \frac{\lambda_2}{s+\lambda} < \infty, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Доведення (3.165) випливає з (3.161) з урахуванням відмінностей центрованих згорток $\overline{G}_k(s, x, u_k)$ в (3.156)–(3.158) від відповідних функцій $\overline{G}_k(s, x, u_k)$ для напівнеперервних знизу процесів, коли $P_-(s, x)$ не має стрибка в 0 ($p_-(s) = 0$).

Сформулюємо без доведення аналог наслідку 3.6 лише для розподілу перестрибкових функціоналів через нескінченно віддалений рівень ($\gamma_k(x), x \to \infty, k = \overline{1,3}$), не наводячи співвідношень для генератрис.

Наслідок 3.9. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з невиродженим розподілом $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$, тоді залежно від знаку $m = \mathbf{E}\xi(1)$ справедливі співвідношення*

1. *Якщо $m > 0$, тоді $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} cp_- > 0$, $m_+ = [\widetilde{\Pi}(0) - q_- \widetilde{\Pi}(\rho_-)]^{-1}$. $\mathbf{P}\{\tau^+(\infty) < \infty\} = 1$ і розподіли $\gamma_k(\infty)$ визначаються при $z > 0$ так*

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z\} = \\ = m_+ \left[p_- \int_z^\infty \Pi(y)dy + q_- \int_z^\infty (1 - e^{(z-y)\rho_-})\Pi(y)dy \right],$$
$$\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z\} = \\ = m_+ \left[p_- \int_z^\infty \Pi(y)dy + q_- \int_z^\infty (1 - e^{-\rho_- y})\Pi(y)dy \right], \qquad (3.166)$$
$$\mathbf{P}\{\gamma^+_\infty > z\} = \\ = m_+ \left[p_- \int_z^\infty y\Pi(y)dy + \frac{1}{2}\frac{q_-}{\rho_-} \int_z^\infty (1 - e^{-\rho_- y} - \rho_- y)\Pi(y)dy \right].$$

2. *Якщо $m = 0$ і $m_2 = \mathbf{E}\xi^2(1) < \infty$, тоді $\rho_-(s) \approx \sqrt{\frac{2s}{\mathbf{D}\xi(1)}} \to 0$,*

$$m_0(0) = [\widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\Pi}'(0)]^{-1} < \infty, \quad \mathbf{P}\{\tau^+(\infty) < \infty\} = 1$$

і розподіли $\gamma_k(\infty)$ визначаються так при $z \geq 0$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z\} = m_0(0) \left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty (y - z)\Pi(y)dy \right],$$
$$\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z\} = m_0(0) \left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty y\Pi(y)dy \right], \qquad (3.167)$$
$$\mathbf{P}\{\gamma^+_\infty > z\} = m_0(0) \left[\int_z^\infty y\Pi(dy) + \frac{1}{2} \int_z^\infty y^2\Pi(dy) \right].$$

3. *Якщо $m < 0$, тоді $p_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho_-'(0) = |m|^{-1}$, $p_-'(0) = \frac{1}{\lambda p_+}$, $\mathbf{P}\{\tau^+(\infty) < \infty\} < 1$ і умовні розподіли $\gamma_k(\infty)$ визначаються подібними до (3.167) співвідношеннями при $z \geq 0$ ($m_0(0) = [\widetilde{\Pi}(0) -$*

$\widetilde{\Pi}'(0)]^{-1} = (\lambda p_+ \mathbf{E}\xi^+)^{-1})$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z|\tau^+(\infty) < \infty\} = \\
&\quad = m_0(0)\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty (y-z)\Pi(y)dy\right], \\
&\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z/\tau^+(\infty) < \infty\} = \\
&\quad = m_0(0)\left[\int_z^\infty \Pi(y)dy + \int_z^\infty y\Pi(y)dy\right], \\
&\mathbf{P}\{\gamma_\infty^+ > z|\tau^+(\infty) < \infty\} = m_0(0)\int_z^\infty \left(y + \frac{1}{2}y^2\right)\Pi(dy). \qquad (3.168)
\end{aligned}$$

При $m > 0$ *і* $k = \overline{1,3}$ *має місце співвідношення* (*для* $k = 1$ $m(0) = m_+$)

$$\mathbf{P}\{\gamma_k(\infty) > z|\tau^+(\infty) < \infty\} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} m_0(0)(\widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\Pi}'(0)) = 1.$$

Розглянувши різні версії зображень х.ф. $\varphi_\pm(s,\alpha)$ та $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^\pm}$ для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів приходимо до висновку, що кожна з них виражається через

1) спрощені (порівняно з формулами Спітцера) співвідношення в термінах розподілу додатних або від'ємних значень $\xi(\theta_s)$ (див. теореми 3.1 та 3.2 в § 3.1);

2) спільну генератрису $\{\tau^\pm(0), \gamma^\pm(0)\}$ у випадку, коли $\mathbf{P}\{\tau^\pm(0) = \gamma^\pm(0) = 0\} = 0$ (див. формули (2.30), (2.33))) або формулою Полячека–Хінчина (див. (2.60));

3) інтегральні перетворення згорток $\Pi_\pm(x)(\pm x > 0)$ з показниковими розподілами $\xi^\pm(\theta_s)$ (з можливими ненульовими значеннями атомарних ймовірностей $p_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\}$)

$$K(s,x) = \begin{cases} K_+(s,x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+0} \Pi_+(x-y)dP_-(s,y), & x > 0, \\ K_-(s,x) = \displaystyle\int_{-0}^{\infty} \Pi_-(x-y)dP_+(s,y), & x < 0. \end{cases} \qquad (3.169)$$

Інтегральні перетворення $K(s,\alpha) = \int_{R_\pm} e^{i\alpha x}K(s,x)dx$ виражаються через $\widetilde{\Pi}_\pm(i\alpha) = \int_{R_\pm} e^{\mp i\alpha x}\Pi(x)dx$.

Розглянемо знову загальний неперервний зверху або знизу процес $\xi(t)$ з х.ф. $\mathbf{E}\exp\{i\alpha\xi(t)\} = \exp\{t\psi(\alpha)\}$ і кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha\gamma - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbf{R}^{\mp}} \left(e^{i\alpha x} - 1 + \frac{i\alpha x}{1+x^2}\right)\Pi(dx). \tag{3.170}$$

Наслідок 3.10. *Якщо $\xi(t)$ — неперервний зверху процес, тоді*

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \quad \rho_+(s) = \frac{\overline{P}(s,0)}{P'(s,+0)}, \tag{3.171}$$

$$\overline{P}_+(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0, \quad \rho'_+(0) = \frac{1}{|m|} \quad \text{при} \quad m < 0,$$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)} = \tag{3.172}$$

$$= \begin{cases} p_-(s) + [\varphi(s,\alpha)]_- - \rho_+^{-1}(s)[(i\alpha)\varphi(s,\alpha)]_-, \\ s\{s - i\alpha\rho_+(s)(\rho_+(s) - i\alpha)^{-1}[\widetilde{\Pi}_-(i\alpha) - \widetilde{\Pi}_-(\rho_+(s))]\}^{-1}, \end{cases}$$

де $p_-(s) = 0$, якщо $\xi(t)$ має необмежену варіацію, в противному разі $p_-(s) > 0$.

Якщо $\xi(t)$ — неперервний знизу процес, тоді

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad \rho_-(s) = \frac{P(s,0)}{P'(s,-0)}, \tag{3.173}$$

$$P_-(s,x) = e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0, \quad \rho'_-(0) = \frac{1}{m} \quad \text{при} \quad m > 0,$$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \tag{3.174}$$

$$= \begin{cases} p_+(s) + [\varphi(s,\alpha)]_+ + \rho_-^{-1}(s)[(i\alpha)\varphi(s,\alpha)]_+, \\ s\{s - i\alpha\rho_-(s)(\rho_-(s) + i\alpha))^{-1}[\widetilde{\Pi}_+(-i\alpha) - \widetilde{\Pi}_+(\rho_-(s))]\}^{-1}, \end{cases}$$

де $p_+(s) = 0$, якщо $\xi(t)$ має необмежену варіацію.

Якщо $\xi(t)$ має обмежену варіацію, сходинкові висоти $\{\tau^\pm(0), \gamma^\pm(0)\}$ мають невироджений розподіл, тоді має місце допграничне узагальнення формули Полячека–Хінчина незалежно від виконання умови напівнеперервності знизу (зверху)

$$\varphi_\pm(s,\alpha) = \frac{p_\pm(s)}{1 - q_\pm(s)\mathbf{E}[e^{i\alpha\gamma^\pm(0)}|\xi^\pm(\theta_s) > 0]}. \tag{3.175}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, *тоді із* (3.175) *при* $s \to 0$ *випливає класична формула Полячека–Хінчина для х.ф.* ξ^+ *за умови напівнеперервності знизу* $(a < 0, \mathrm{var}\xi(t) < \infty)$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)},\ \widetilde{\varphi}(\alpha) = \widetilde{\Pi}_+(-i\alpha)\widetilde{\Pi}_+^{-1}(0), p_+ = \frac{m}{a},\ \ (3.176)$$
$$\lim_{s\to 0}\mathbf{E}[e^{i\alpha\gamma^+(0)}|\xi^+(\theta_s) > 0] = \mathbf{E}[e^{i\alpha\gamma^+(0)}|\xi^+ > 0] = \widetilde{\varphi}(\alpha).$$

Доведення. Перші співвідношення в (3.171) та (3.172), як і доведення теорем 3.1 та 3.2 для

$$\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{P}_+(s,x)dx,$$
$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}P_-(s,x)dx,$$

випливає з о.ф.т. з застосуванням операції проектування. У першому випадку

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\varphi_-(s,\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_-(s,\alpha) = \left[\frac{\varphi(s,\alpha)(\rho_+(s) - i\alpha)}{\rho_+(s)}\right]_-^0 =$$
$$= p_-(s) + [(1 - i\alpha\rho_+^{-1})\varphi(s,\alpha)]_-.$$

Аналогічно в другому випадку доводиться (3.174)

$$\varphi_+(s,\alpha) = \left[\frac{\varphi(s,\alpha)(\rho_-(s) + i\alpha)}{\rho_(s)}\right]_+^0 =$$
$$= p_+(s) + [\varphi(s,\alpha)(1 + i\alpha\rho_-^{-1}(s))]_+.$$

Всі інші співвідношення наслідку були доведені раніше (див. (2.30) в теоремі 2.4). З формули (3.175) випливає (3.176) при $s \to 0$ і $m < 0$

$$\xi^+(\theta_s) \doteq \sum_{k \le \widetilde{\nu}(q_+(s))} \widetilde{\xi}_k(s), \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_k(s)} = \mathbf{E}[e^{i\alpha\gamma^+(0)}|\xi^+(\theta_s) > 0],$$

$\widetilde{\nu}(q_+(s))$ має геометричний розподіл з параметром $0 < q_+(s) < 1$. □

Для процесів без дифузії ($\sigma^2 = 0$) і з обмеженою варіацією ми ввели поняття майже напівнеперервності в термінах х.ф. стрибків (див. означення на початку § 3.2). Згідно з означенням 3.1 для процесу $\xi(t)$ зі знесенням a умову майже напівнеперервності зверху можна записати так

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k > 0] = \frac{c}{c - i\alpha} = \varepsilon_c^+(\alpha), \quad a \le 0,\ \sigma^2 = 0,\ c > 0. \tag{3.177}$$

Крім того, розглянем випадок, коли замість (3.177) виконується умова

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k > 0] = \frac{c}{c - i\alpha}, \quad a > 0, \quad \sigma^2 \ge 0, \quad c > 0. \tag{3.178}$$

Умова майже напівнеперервності знизу записується так

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k < 0] = \frac{b}{b + i\alpha} = \varepsilon_b^-(\alpha), \quad a \ge 0,\ \sigma^2 = 0,\ b > 0. \tag{3.179}$$

Наслідок 3.11. *а) Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес (див. (3.177)), тоді $\rho_+(s) = cp_+(s)$,*

$$\begin{aligned}
&\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \\
&\overline{P}_+(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0, && (3.180) \\
&\rho_+(s) = \frac{sc}{s + \varphi_-(s,-ic)} = \frac{\overline{P}(s,0)}{P'(s,+0)}, \\
&\varphi_-(s,\alpha) = && (3.181) \\
&= \begin{cases} p_+^{-1}(s)\{[\varphi(s,\alpha)]_- - q_+(s)\,[\varepsilon_c^+(\alpha)\varphi(s,\alpha)]_-\} + p_-(s), \\ s\{s + i\alpha\varphi_+(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}_-(i\alpha) - q_+(s)\varepsilon_c^+(\alpha)\widetilde{\Pi}_-(\rho_+(s))]\}^{-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

При умові (3.178) та $\sigma^2 > 0$ $\xi(t)$ не є майже напівнеперервним і має місце співвідношення (2.55) з $C_*(s) > 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s(c - i\alpha)}{sC_*(s)(i\alpha)^2 - i\alpha s(1 + cC_*(s)) + sc + \varphi_-(s,-ic)}, \\
&C_*(s) = \begin{cases} s^{-1}\dfrac{\sigma^2}{2}P'_-(s,0), \quad \sigma > 0, \\ s^{-1}ap_-(s), \quad \sigma = 0, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^0 |x|\Pi(dx) < \infty. \end{cases} && (3.182)
\end{aligned}$$

Якщо замість (3.144) *виконується умова*

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_1} \mid \xi_1 > 0] = \prod_{k=1}^{m} \frac{c_k}{c_k - i\alpha} \quad (c_k > 0, m > 1), \tag{3.183}$$

тоді при умові $C_*(s) > 0$

$$\begin{aligned} &\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s\prod\limits_{k=1}^{m}(c_k - i\alpha)}{P_{m+1}(s,i\alpha)}, \\ &P_{m+1}(s,i\alpha) = s(-i\alpha)^{m+1}C_*(s) + P_m(s,i\alpha), \end{aligned} \tag{3.184}$$

де $P_m(s,i\alpha)$ — *многочлен* m*-го порядку відносно* $i\alpha$.

Якщо $C_*(s) = 0$, *тоді* $\varphi_+(s,\alpha)$ *є дробово-раціональною функцією*

$$\begin{aligned} &\varphi_+(s,\alpha) = \prod_{k=1}^{m}(c_k - i\alpha)P_m^{-1}(s,i\alpha) \underset{i\alpha\to\infty}{\longrightarrow} p_+(s) > 0, \\ &p_+(s) = s\left[\sum_{k\le m} p_k\varphi(s,-ic_k)\right]^{-1}, \quad \sum_{k\le m} p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 > 0\}. \end{aligned} \tag{3.185}$$

б) Якщо $\xi(t)$ — *майже напівнеперервний знизу процес (див.* (3.179)), *тоді* $\rho_-(s) = bp_-(s) = \frac{sb}{s+\varphi_+(s,ib)} = \frac{P(s,0)}{P'(s,-0)}$,

$$\begin{aligned} &\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \quad \varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{s - i\alpha k(s,\alpha)}, \\ &P_-(s,x) = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0, \\ &k(s,\alpha) = \varphi_-(s,\alpha)\widetilde{\Pi}_+(-i\alpha) - \frac{q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\widetilde{\Pi}_+(\rho_+(s)), \end{aligned} \tag{3.186}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_+(s,\alpha) = \\ &= \begin{cases} p_+(s) + p_-^{-1}(s)\left([\varphi(s,\alpha)]_+ - q_-(s)\left[\dfrac{b\varphi(s,\alpha)}{b+i\alpha}\right]_+\right), \\ s\{s - i\alpha\varphi_-(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}_+(-i\alpha) - q_-(s)\varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}_+(\rho_-(s))]\}^{-1}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.187}$$

При $m < 0$ *х.ф.* $\varphi_+(\alpha) = \lim\limits_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha)$ *визначається граничною формулою Полячека–Хінчина* (3.98) (*або* (3.176)).

Доведення. Як у випадку а), так і у випадку б) перші із двоїстих зображень в (3.181) та в (3.187) одержуються на основі о.ф.т. із застосуванням операцій проектування. Другі зображення в (3.181) та в (3.187) одержуються із наслідку 2.2 (див. (2.52)). Доведення першої формули в (3.181) випливає з о.ф.т. та співвідношення

$$\varphi_+^{-1}(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s) - i\alpha}{p_+(s)(c - i\alpha)} = \frac{1}{p_+(s)}\left[1 - \frac{cq_+(s)}{c - i\alpha}\right].$$

Аналогічно для доведення першої формули в (3.187) слід використати співвідношення

$$\varphi_-^{-1}(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s) + i\alpha}{p_-(s)(b + i\alpha)} = \frac{1}{p_-(s)}\left[1 - \frac{bq_-(s)}{b + i\alpha}\right].$$

При виведенні (3.184) слід врахувати, що згортка $K(s,x)$ в (3.169) за умови (3.183) має інтегральне перетворення, що виражається правильною дробово-лінійною функцією

$$k(s,\alpha) = \sum_{k\le m} C_k(s)(c_k - i\alpha)^{-1} = \frac{Q_{m-1}(s,i\alpha)}{\prod\limits_{k\le m}(c_k - i\alpha)}. \tag{3.188}$$

Тоді із співвідношення (див. (2.52))

$$\varphi_+(s,\alpha) = [1 - i\alpha(C_*(s) + s^{-1}k(s,\alpha))]^{-1} \tag{3.189}$$

випливає (3.184) та (3.185), а з останнього при $C_*(s) = 0$ шляхом граничного переходу ($i\alpha \to \infty$) знаходимо значення $p_+(s) > 0$. Процеси з умовою (3.183) розглядались в монографіях [7, 14] та в [202]. □

3.4 Розподіл часу перебування для напівнеперервних процесів

На основі наслідків 3.10 та 3.11 встановлюються відповідно уточнення для генератрис (див. [29, 30, 32] та початок § 2.4)

$$D_x(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{(x,\infty)}(\theta_s)}, \quad D_x^\pm(s,\mu) \quad (\pm x > 0)$$

та для їх односторонніх інтегральних перетворень Фур'є–Стілт'єса

$$d_\pm(\alpha,s,\mu) = \widehat{D}_\pm(\alpha,s,\mu) \pm D_{\pm 0}(s,\mu) = \int_{\mathbf{R}^\pm} e^{i\alpha x} dD_x(s,\mu).$$

Теорема 3.9. *Нехай* $\xi(t)$ — *неперервний зверху процес (див.* (3.170), $\Pi(dx) \equiv 0,\ x > 0$). *Тоді* ($\widetilde{\Pi}(i\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}\Pi(x)dx$)

$$
\begin{aligned}
&d_+(\alpha,s,\mu) = \widehat{D}_+(\alpha,s,\mu) + D_0(s,\mu) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)}\frac{\rho_+(s+\mu)-i\alpha}{\rho_+(s)-i\alpha},\\
&D_0(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{[0,\infty)}(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s+\mu)},\\
&d_-(\alpha,s,\mu) = \widehat{D}_-(\alpha,s,\mu) - D_0(s,\mu) =\\
&\quad = \frac{s + i\alpha\varphi_+(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_+(s))]}{s+\mu + i\alpha\varphi_+(s+\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_+(s+\mu))]}.
\end{aligned}
\tag{3.190}
$$

Якщо $m_1 = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, *тоді* $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$

$$
\begin{aligned}
&D_0(\mu) = \lim_{s\to 0} D_0(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{[0,\infty)}(\infty)} = \frac{\rho_+}{\rho_+(\mu)},\\
&d_+(\alpha,\mu) = \lim_{s\to 0} d_+(\alpha,s,\mu) = \frac{\rho_+}{\rho_+(\mu)}\frac{\rho_+(\mu)-i\alpha}{\rho_+ - i\alpha},\\
&d_-(\alpha,\mu) = \lim_{s\to 0} d_-(\alpha,s,\mu) =\\
&\quad = \frac{i\alpha\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+}[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_+)]}{\mu + i\alpha\varphi_+(\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_+(\mu))]}.
\end{aligned}
\tag{3.191}
$$

Нехай $\xi(t)$ — *майже напівнеперервний зверху процес з х.ф. стрибків*

$$
\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k > 0] = \frac{c}{c - i\alpha} = \varepsilon_c^+(\alpha) \quad (a \le 0, \quad c > 0),
\tag{3.192}
$$

тоді

$$
\begin{aligned}
&d_+(\alpha,s,\mu) = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)}\frac{\rho_+(s+\mu)-i\alpha}{\rho_+(s)-i\alpha},\\
&\rho_+(s) = cp_+(s), \quad D_{+0}(s,\mu) = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)},\\
&d_-(\alpha,s,\mu) =\\
&= \frac{s + i\alpha\varphi_+(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \varepsilon_c^+(\alpha)q_+(s)\widetilde{\Pi}(\rho_+(s))]}{s+\mu + i\alpha\varphi_+(s+\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - q_+(s+\mu)\varepsilon_c^+(\alpha)\widetilde{\Pi}(\rho_+(s+\mu))]}.
\end{aligned}
\tag{3.193}
$$

Якщо для процесу $\xi(t)$ *з х.ф. стрибків* (3.192) $m < 0$, *тоді* $\rho_+(s) \to p_+c = \rho_+ > 0$, $q_+(s) \to q_+ < 1$ *при* $s \to 0$; *тому*

$$
d_+(\alpha,\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)}\frac{\rho_+(\mu)-i\alpha}{\rho_+ - i\alpha}, \quad D_{+0}(\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)},
\tag{3.194}
$$

$$d_-(\alpha,\mu) = \frac{i\alpha \mathbf{E} e^{i\alpha\xi^+}[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \varepsilon_c^+(\alpha) q_+ \widetilde{\Pi}(\rho_+)]}{\mu + i\alpha\varphi_+(\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \varepsilon_c^+(\alpha) q_+(\mu)\widetilde{\Pi}(\rho_+(\mu))]}.$$

Доведення. Згідно з результатами § 2.4 (див. (2.69), (2.70))

$$d_+(\alpha,s,\mu) = \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}. \tag{3.195}$$

Звідси після підстановки значень $\varphi_+(s,\alpha)$ з наслідку 3.10 знаходимо перше співвідношення (3.190), з якого граничним переходом ($i\alpha \to \infty$) визначається $D_0(s,\mu)$.

Після підстановки $\varphi_-(s,\alpha)$ з наслідку 3.10 у співвідношення

$$d_-(\alpha,s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}{\varphi_-(s,\alpha)} \tag{3.196}$$

одержуємо третє співвідношення в (3.190).

Якщо $m < 0$, тоді ($\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_+ > 0$) і існує невироджений розподіл ξ^+ з х.ф.

$$\mathbf{E} e^{i\alpha\xi^+} = \lim_{s\to 0}\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho_+}{\rho_+ - i\alpha}. \tag{3.197}$$

При переході до границі при $s \to 0$ в (3.190) одержуються всі співвідношення в (3.191).

Аналогічно для майже напівнеперервних зверху процесів після підстановки в (3.195) та (3.196) значень $\varphi_\pm(s,\alpha)$ з наслідку 3.11 одержимо співвідношення (3.192). Із (3.192) за умови $m < 0$ при $s \to 0$ встановлюються співвідношення (3.194). $\square$

Майже напівнеперервний знизу процес визначається х.ф. стрибків

$$\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_k} | \xi_k < 0] = \frac{b}{b+i\alpha} = \varepsilon_b^-(\alpha).$$

Нагадаємо, що для неперервних знизу (майже напівнеперервних знизу) процесів згідно з (3.174) та ((3.187)) відповідно встановлюється, що

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\left(\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}\right), \tag{3.198}$$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \tag{3.199}$$
$$= s\{s - i\alpha\rho_-(s)(\rho_-(s)+i\alpha)^{-1}[\widetilde{\Pi}_+(i\alpha) - \widetilde{\Pi}_+(-\rho_-(s))]\}^{-1};$$
$$\big(\varphi_+(s,\alpha) = s\{s - i\alpha\varphi_-(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - q_-(s)\varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}(-\rho_-(s))]\}^{-1}\big).$$

Теорема 3.10. *Нехай* $\xi(t)$ *— неперервний знизу процес (див.* (3.169), $\Pi(dx)=0,\ x<0$). *Тоді* ($\widetilde{\Pi}(i\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi(x)dx$)

$$d_-(\alpha,s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}\frac{\rho_-(s)+i\alpha}{\rho_-(s+\mu)+i\alpha},$$
$$D_0(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}, \tag{3.200}$$
$$d_+(\alpha,s,\mu) =$$
$$= \frac{s+\mu - i\alpha\varphi_-(s+\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(-\rho_-(s+\mu))]}{s - i\alpha\varphi_-(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(-\rho_-(s)]}\frac{s}{s+\mu}.$$

Якщо $m<0$, *тоді* $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho_-'(0) = |m|^{-1}$, *тому*

$$D_0(\mu) = \frac{|m|}{\mu}\rho_-(\mu), \quad d_-(\alpha,\mu) = \frac{|m|}{\mu}\frac{i\alpha\rho_-(\mu)}{\rho_-(\mu)+i\alpha}, \tag{3.201}$$
$$d_+(\alpha,\mu) = \frac{\mu - i\alpha\varphi_-(\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(-\rho_-(\mu)]}{\mu[1-|m|^{-1}(\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \widetilde{\Pi}(0))]}.$$

Для майже напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$

$$d_-(\alpha,s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}\frac{\rho_-(s)+i\alpha}{\rho_-(s+\mu)+i\alpha},$$
$$D_0(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\frac{\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}, \tag{3.202}$$
$$d_+(\alpha,s,\mu) = \frac{s}{s+\mu}\times$$
$$\times\frac{s+\mu - i\alpha\varphi_-(s+\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - q_-(s)\varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}(-\rho_-(s+\mu)]}{s - i\alpha\varphi_-(s,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - q_-(s)\varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}(-\rho_-(s)]}.$$

Якщо $m<0$, *тоді* $\varphi_-(s,\alpha)s^{-1} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{b+i\alpha}{b|m|i\alpha}$, $q_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1$; *тому*

$$D_0(\mu) = \frac{|m|}{\mu}\rho_-(\mu), \quad d_-(\alpha,\mu) = \frac{|m|}{\mu}\frac{i\alpha\rho_-(\mu)}{\rho_-(\mu)+i\alpha}, \tag{3.203}$$

$$d_+(\alpha,\mu) = \frac{1}{\mu}\frac{\mu - i\alpha\varphi_-(\mu,\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}(-\rho_-(\mu)]}{1-(b|m|)^{-1}(b+i\alpha)[\widetilde{\Pi}(i\alpha) - \varepsilon_b^-(\alpha)\widetilde{\Pi}(0)]}.$$

Доведення співвідношень (3.200)–(3.203) аналогічне доведенню теореми 3.9. На основі наслідків 3.10 та 3.11 можна одержати уточнення для спільного розподілу $\{\xi(\theta_s), Q_x(\theta_s)\}$ (див. теорему 2.7)

$$L(x,s,\mu) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s) - \mu Q_x(\theta_s)},$$
$$l_\pm(p,s,\mu,\alpha) = \int_{\mathbf{R}^\pm} e^{ipx} d_x L(s,x,\mu,\alpha).$$

Приклад 3.8. Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху процес зі знесенням $a<0$ та з х.ф. стрибків $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha}\right)$. Знайти $\psi(\alpha)$, $\varphi(s,\alpha)$ і записати рівняння Лундберга. Знайти $D_0(s,\mu)$, $d_\pm(\alpha,s,\mu)$ та $D_x^\pm$ (при $a<0$, $p_-(x)=0$, $D_\pm 0 = D_0$).

Для простоти покладемо $\lambda = -2a = 2$ ($a=-1$). Тоді

$$m = \lambda\mu_1 - a \to mc = 1-2c,$$
$$\psi(\alpha) = -i\alpha + \frac{i\alpha}{c-i\alpha} - \frac{i\alpha}{1+i\alpha} = i\alpha\frac{(i\alpha)^2 + (3-c)i\alpha + 1 - 2c}{(c-i\alpha)(1+i\alpha)},$$
$$s - \psi(\alpha) = \frac{P_3(s,i\alpha)}{(1+i\alpha)(c-i\alpha)}, \quad \varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)},$$
$$-P_3(s,r) = \begin{cases} r^3 + (3+s-c)r^2 - (cm+s-cs)r - cs, \\ (r-\rho_+(s))[r^2 + r(3+s-c+\rho_+(s)) + cs\rho_+^{-1}(s)]. \end{cases}$$

Безпосереднім діленням $-P_3(s,r)$ на $(r-\rho_+(s))$ знаходимо

$$P_2(s,r) = r^2 + r(3+s-c+p_+(s)) + cs\rho_+^{-1}(s).$$

Отже $\varphi(s,\alpha)$ допускає розклад

$$\begin{aligned}\varphi(s,\alpha) &= \frac{s(1+i\alpha)(c-i\alpha)}{P_3(s,i\alpha)} = \\ &= \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}\frac{s(1+i\alpha)}{p_+(s)P_2(s,i\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.204}$$

Рівняння Лундберга ($k(r)=s$, $-1<r<c$) зводиться до кубічного

$$P_3(s,r) = s \quad (\mathcal{L}_s) \qquad (P_3(0,r) = 0 \quad (\mathcal{L}_0))$$

і має єдиний додатний корінь $\rho_+(s) = cp_+(s)$, що визначає

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha} \quad (s > 0). \tag{3.205}$$

Рівняння $(\mathcal{L}_0)$ зводиться до кубічного без вільного члена

$$r[r^2 + (3-c)r + cm] = 0 \quad (-1 < r < c),$$

корені якого залежно від знаку m визначаються так. Додатні індекси ненульових розв'язків рівняння $(\mathcal{L}_0)$ вибираються за порядком зростання коренів $(r_i < r_{i+1})$.

При $m < 0$ $(c > \frac{1}{2})$ квадратний тричлен в квадратних дужках з дискримінантом $D_0 = (2-c)^2 + 4cm > 0$ має корені

$$r_0 = 0, \quad r_{1,2} = \frac{1}{2}(c - 3 \mp \sqrt{D_0}) < 0; \; r_1 < 0, \; r_2 = \rho_+ = cp_+ > 0.$$

При $s \to 0$ ρ_+ визначає х.ф. ξ^+ $\varphi_+(\alpha) = p_+(c - i\alpha)(c\rho_+ - i\alpha)^{-1}$.

При $m > 0$ $(c < \frac{1}{2})$ $r_0 = 0$, $r_{1,2} = (c - 3 \pm \sqrt{D_0})/2 < 0$, $r_2 = -R$, $R < 1$. При $m = 0$ $(c = \frac{1}{2})$ $r_0 = c - 2 < 0$, $r_1 = r_2 = 0$.

Для достатньо малих $s > 0$ всі корені $P_3(s,r)$ незалежно від знака m $r_{0,1,2}(s) \neq 0$. З розкладу $P_3(s,i\alpha) = (\rho_+(s) - i\alpha)P_2(s,i\alpha)$, $r_0(s) < r_1(s) < r_2(s) = \rho_+(s) > 0$ згідно з (3.204), (3.205) та о.ф.т. знаходимо

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{s(1+i\alpha)}{p_+(s)P_2(s,i\alpha)}. \tag{3.206}$$

Після підстановки (3.205) та (3.206) знаходимо

$$\begin{aligned} d_+(\alpha,s,\mu) &= \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)} = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)} \frac{\rho_+(s+\mu) - i\alpha}{\rho_+(s) - i\alpha}, \\ -d_-(\alpha,s,\mu) &= \frac{s}{s+\mu} \frac{\varphi_-(s+\mu,\alpha)}{\varphi_-(s,\alpha)} = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)} \frac{P_2(s,i\alpha)}{P_2(s+\mu,i\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.207}$$

Згідно з (2.84)

$$\begin{aligned} D_0(s,\mu) &= \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)}, \\ D_x^+(s,\mu) &= 1 + \frac{\rho_+(s) - \rho_+(s+\mu)}{\rho_+(s+\mu)} e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

При $m \geq 0$ $p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} D_0(s,\mu) \underset{s\to 0}{\to} D_0(\mu) = 0$, отже $\mathbf{P}\{Q_0(\infty) = +\infty\} = 1$.

Так само при $x > 0$, $m \geq 0$

$$D_x^+(s,\mu) \underset{s\to 0}{\to} D_x^+(\mu) = 0, \quad \mathbf{P}\{Q_x(\infty) = +\infty\} = 1.$$

Якщо $m < 0$, тоді у співвідношеннях (3.207) можна перейти до границі при $s \to 0$ і таким способом знайти

$$\begin{aligned} &D_0(\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)}, D_x^+(\mu) = 1 + \frac{\rho_+ - \rho_+(\mu)}{\rho_+} e^{-\rho_+ x}, \quad x > 0, \\ &d_+(\alpha,\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)} \frac{\rho_+(\mu) - i\alpha}{\rho_+ - i\alpha}, \quad \rho_+ > 0; \\ &-d_-(\alpha,\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)} \frac{P_2(0,i\alpha)}{P_2(\mu,i\alpha)}, \end{aligned} \tag{3.208}$$

де $P_2(0,i\alpha)$ визначається квадратним тричленом з рівняння $(\mathcal{L}_0)$.

Зауважимо, що після розкладу $P_2(s,r)$ на лінійні множники х.ф. (3.206) можна записати у вигляді суми дробово-лінійних функцій

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p(s)|r_1(s)|}{|r_1(s)| + i\alpha} + \frac{q(s)|r_2(s)|}{|r_2(s)| + i\alpha}, \quad p(s) + q(s) = 1, \tag{3.209}$$

звідки випливає, що

$$P_-(s,x) = p(s)e^{|r_1(s)|x} + q(s)e^{|r_2(s)|x}, \quad x < 0.$$

У випадку $m > 0$ згідно з (3.17) наближений до нуля зліва корінь

$$r_2 = -R < 0, \quad r_1 < r_2, \quad r_1 r_2 = cm, \quad |r_1| = cmR^{-1}$$

визначає показник експоненти в апроксимації для розподілу ξ^-

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} \approx \frac{m}{k'(-R)} e^{Rx}, \quad x < 0, \quad x \to -\infty.$$

З іншого боку згідно з (3.206) та розкладу (3.209) при $s \to 0$ можна одержати точний розподіл ξ^-

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = pe^{Rx} + qe^{cmR^{-1}x}, \quad x < 0, \quad p + q = 1,$$

де p і q визначаються при розкладі $\frac{1+i\alpha}{P_2(0,i\alpha)}$ на прості дробово-лінійні функції. Генератриси D_x^- виражаються через експоненти $e^{|r_{1,2}(s)|x}$ при $s > 0$ та $e^{|r_{1,2}|x}$ при $s \to 0$ і $m > 0$, $x < 0$.

Приклад 3.9. Розглянемо майже напівнеперервний знизу процес $\xi(t) = at + S(t)$ з $a > 0$ та з х.ф. стрибків

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c - i\alpha} + \frac{b}{b + i\alpha}\right), \quad m = \mathbf{E}\xi(1) = a + \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{b}.$$

Знайти $\varphi_+(s,\alpha)$, $D_0(s,\mu)$, $d_\pm(\alpha,s,\mu)$ та $D_x^\pm$ (при $a > 0$, $p_+(s) = 0$).

В силу майже напівнеперервності знизу від'ємний корінь $-\rho_-(s)$ рівняння Лундберга $(\mathcal{L}_s)$ визначає

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b + i\alpha)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s) > 0. \tag{3.210}$$

Скористуємось іншим способом визначення $\varphi_+(s,\alpha)$, а саме теоремою 3.7, точніше функціями $K(s,x)$ та $k(s,\alpha)$:

$$K(s,x) = \lambda \int_{-\infty}^{0} \overline{F}(x-y)dP_-(s,y) = \frac{2\lambda q_-(s)\rho_-(s)}{c + \rho_-(s)} e^{-cx}, \quad x > 0,$$
$$k(s,\alpha) = \frac{2\lambda\rho_-(s)}{c + \rho_-(s)} \int_0^{\infty} e^{i\alpha x - cx} dx = \frac{2\lambda\rho_-(s)}{c + \rho_-(s)} \frac{q_-(s)}{c - i\alpha}.$$

Тоді згідно з (2.52) $C_*(s) = ap_-(s)s^{-1} > 0$ і $\varphi_+(s,\alpha)$ визначається правильною дробово-раціональною функцією

$$\begin{aligned}\varphi_+(s,\alpha) &= [1 - i\alpha(C_*(s) + s^{-1}k(s,\alpha))]^{-1} = \frac{(\rho_-(s) + c)(c - i\alpha)}{P_2(s,i\alpha)},\\ P_2(s,i\alpha) &= \\ &= (c + \rho_-(s))(c - i\alpha)(1 - i\alpha a s^{-1} p_-(s)) - 2\lambda q_-(s)\rho_-(s)s^{-1} i\alpha.\end{aligned} \tag{3.211}$$

Співвідношення (3.211) також можна виразити (див. (3.209)) сумою дробово-лінійних функцій.

Аналогічно підставляючи (3.210) та (3.211) в (2.70) знаходимо

$$\begin{aligned}d_+(\alpha,s,\mu) &= \frac{\rho_-(s) + c}{\rho_-(s+\mu) + c} \frac{P_2(s+\mu, i\alpha)}{P_2(s,i\alpha)},\\ d_-(\alpha,s,\mu) &= \frac{s}{s+\mu} \frac{p_-(s+\mu)}{p_-(s)} \frac{\rho_-(s) + i\alpha}{\rho_-(s+\mu) + i\alpha},\\ D_0(s,\mu) &= \frac{s}{s+\mu} \frac{p_-(s+\mu)}{p_-(s)}; \text{при } x < 0.\end{aligned} \tag{3.212}$$

$$D_x^-(s,\mu)=\frac{s}{s+\mu}\left[1-\frac{\rho_-(s)-\rho_-(s+\mu)}{\rho_-(s)}e^{\rho_-(s+\mu)x}\right].$$

При $m\geq 0$

$$D_0(s,\mu)=\mathbf{E}e^{\mu Q_0(\theta_s)}\underset{s\to 0}{\to}\mathbf{E}e^{-\mu Q_0(\infty)}=0,$$

отже $\mathbf{P}\{Q_0(\infty)=+\infty\}=1$. Так само при $x<0$

$$D_x^-(s,\mu)\underset{s\to 0}{\to}0,\ \mathbf{P}\{Q_x(\infty)=+\infty\}=1.$$

При $m<0$ з (3.212) визначається генератриса $D_0(\mu)$

$$\begin{aligned}
&D_0(\mu)=\frac{\rho_-(\mu)}{\mu}|m|,\quad d_-(\alpha,\mu)=\frac{\rho_-(\mu)}{\mu}|m|\frac{i\alpha}{\rho_-(\mu)+i\alpha},\\
&D_x^-(\mu)=\lim_{s\to 0}D_x^-(s,\mu)=D_0(\mu)e^{\rho_-(\mu)x},\ x<0,\\
&d_+(\alpha,\mu)=\frac{c}{c+\rho_-(\mu)}\frac{P_2(\mu,i\alpha)}{P_2(0,i\alpha)},
\end{aligned}\tag{3.213}$$

де $P_2(0,i\alpha)$ згідно з (3.211) при $s\to 0$ виражається через $p'_-(0)=(b|m|)^{-1}>0$ (корені рівняння $P_2(0,r)=0$ — додатні)

$$P_2(0,i\alpha)=c(c-i\alpha)\left(1-\frac{i\alpha a}{|m|b}\right)-2\lambda\frac{i\alpha}{|m|},\quad r_1=R,\quad r_2=\frac{b|m|}{aR}.$$

D_x^+ після обернення $d_+(\alpha,\mu)$ визначається експонентами $e^{-r_{1,2}x}$.

Читачеві пропонується поміняти способи розв'язання цих двох прикладів (першим способом — приклад 3.9, другим — приклад 3.8).

Приклад 3.10. Нехай $\xi(t)=at+T(t)$ — процес із прикладу 2.6 ($T(t)$ — стійкий процес з параметром $\alpha_*=\frac{1}{2}$), що є неперервним знизу стійким процесом з кумулянтою

$$\psi(\alpha)=i\alpha a+(i-1)\sqrt{\alpha},\quad a<0$$

із визначеними генератрисами $\xi^\pm(\theta_s)$ (див. (2.6))

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{\nu\xi^-(\theta_s)}=\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+\nu},\\
&\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}=\frac{s(\sqrt{\rho_-(s)}+\sqrt{\nu})}{s(\sqrt{\rho_-(s)}+\sqrt{\nu})+\sqrt{2\nu\rho_-(s)}}.
\end{aligned}\tag{3.214}$$

Знайти генератриси спільних розподілів перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, генератриси $\gamma_k(\theta'_\nu)$ $(k = \overline{1,3})$ та $\mathbf{E}\tau^+(x)$.

При $m \geq 0$ для довільного неперервного знизу процесу згідно з теоремою 3.7 (див. (3.140)) генератриси виражаються через інтегральні перетворення $\widetilde{\Pi}(u_k)$, $\widetilde{\Pi}(\nu)$ та $\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))$.

Для нашого процесу $m > 0$ $(m = +\infty)$

$$\Pi(x) = \Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0),$$

$$\widetilde{\Pi}(u_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u_k x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u_k}} \quad (k = \overline{1,3}). \tag{3.215}$$

Для стислості запису покладемо $\rho = \rho_-(s)$, тоді після підстановки значень $\widetilde{\Pi}(u_k)$ в (3.140) і спрощень знаходимо, що

$$s\widetilde{V}_1(s,\nu,u) = \frac{\nu\rho\sqrt{2}}{\rho - u}\varphi_+(s,i\nu)\left[\frac{u(\sqrt{\nu}-\sqrt{u})}{(u-\nu)\sqrt{u\nu}} + \frac{\sqrt{\rho}}{\rho-\nu}\frac{\sqrt{\rho}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}\right],$$

$$s\widetilde{V}_2(s,\nu,v) = \frac{\nu\rho\sqrt{2}}{\rho-\nu}\varphi_+(s,i\nu)\frac{\sqrt{\rho+v}-\sqrt{\nu-v}}{\sqrt{(\nu+v)(\rho+v)}}, \tag{3.216}$$

$$s\widetilde{V}_3(s,\nu,\mu) =$$

$$= \sqrt{2}\varphi_+(s,i\nu)\left[\frac{\mu(\sqrt{\nu}-\sqrt{\mu+\nu})}{\sqrt{\nu(\mu+\nu)}} + \frac{\nu\sqrt{\rho+\mu}(\sqrt{\rho+\mu}-\sqrt{\mu+\nu})}{(\rho-\nu)\sqrt{\mu+\nu}}\right].$$

При $s \to 0$ $\rho_-(s) \to \rho_0 = \frac{2}{a^2}$, існує границя

$$\lim_{s\to 0}\frac{\varphi_+(s,i\nu)}{s} = \int_0^\infty \mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(t)}dt = g_+(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} + \frac{1}{\sqrt{2\nu}}.$$

Тому

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)} = g_+(\nu)\frac{\rho_0\sqrt{2\nu}}{\rho_0-u}\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+\sqrt{\nu}} + \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0}+\sqrt{\nu}}\right),$$

$$\mathbf{E}e^{-v\gamma_+(\theta'_\nu)} = g_+(\nu)\frac{\rho_0\nu\sqrt{2}}{\rho_0-\nu}\frac{\sqrt{\rho_0+\nu}-\sqrt{\nu+v}}{\sqrt{(\nu+v)(\rho_0+\nu)}}, \tag{3.217}$$

$$\mathbf{E}e^{-\mu\gamma^+_{\theta'_\nu}} = \sqrt{2}g_+(\nu)\times$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\mu+\nu}}{\sqrt{\nu(\mu+\nu)}} + \frac{\nu\sqrt{\rho_0+\mu}(\sqrt{\rho_0+\mu}-\sqrt{\mu+\nu})}{\rho_0-\nu}\right].$$

Зауважимо, що для даного процесу $\xi(t) = at + T(t)$, де $T(t)$ стійкий процес з параметром стійкості $\alpha_* = \frac{1}{2}$, функція $g_+(\nu)$ легко обертається відносно ν.

$$
\begin{aligned}
g_+(\nu) &= \int_0^\infty e^{-\nu x} \left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^+(t) < x\} dt \right)'_x dx = \\
&= \int_0^\infty e^{-\nu x} (\mathbf{E}\tau^+(x))'_x dx = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} + \frac{1}{\sqrt{2\nu}}.
\end{aligned}
\tag{3.218}
$$

За таблицею в кінці розділу 1 функції $\widetilde{f}(\nu) = \nu g_+(\nu)$ після обернення відповідає функція

$$
f(x) = G'_+(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^+(t) < x\} dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}\tau^+(x) = \tag{3.219}
$$
$$
= \frac{x}{\sqrt{2\rho_0}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x > 0, \quad \rho_0 = \frac{2}{a^2}, \quad 0 < m = +\infty,
$$

головна частина якої лінійно зростає при $x \to \infty$. З (3.219) випливає:

$$
\mathbf{E}\tau^+(x) = G_+(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{2\rho_0}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.220}
$$

Згідно з (2.26) (при $\mu < \infty$ та $\mu \to \infty$)

$$
\mathbf{E} e^{-s\tau^+(\theta'_\mu) - u\gamma^+(\theta'_\mu)} = \tag{3.221}
$$
$$
= \frac{\mu}{\mu - u} \frac{\sqrt{2}\rho_-(s)(\sqrt{\mu} - \sqrt{u})}{\rho_-(s)\sqrt{2\mu} + \sqrt{2\mu u \rho_-(s)} - s(\sqrt{\rho_-(s)} + \sqrt{u})},
$$
$$
\mathbf{E} e^{-u\gamma^+(0) - s\tau^+(0)} = \frac{\sqrt{\rho_-(s)}}{\sqrt{\rho_-(s)} + \sqrt{u}} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \mathbf{E} e^{-u\gamma^+(0)} = \frac{\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0} + \sqrt{u}}.
$$

Остання генератриса після обернення (див. тіблиці обернень в [82, с. 228]) визначає щільність розподілу $\gamma^+(0)$

$$
\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}\{\gamma^+(0 < x)\} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi x}} - \frac{2\rho_0}{\sqrt{\pi}} e^{\rho_0 x} \int_{\sqrt{x\rho_0}}^\infty e^{-z^2} dz, \quad x > 0, \tag{3.222}
$$

інтегруванням якої по x знаходимо ф.р.

$$
\mathbf{P}\{\gamma^+(0) < x\} = 1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi}} \int_x^\infty e^{\rho_0(x-z)} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad x \geq 0. \tag{3.223}
$$

Зауважимо, що для напівнеперервного знизу процесу ризику з початковим капіталом $u > 0$ час перебування над рівнем u $Q_u(\infty)$ визначає тотальну тривалість перебування в ризиковій ("червоній") зоні. Згідно з (2.70) та теоремою 3.10 при $u = 0$ і $m < 0$

$$\mathbf{E}e^{-\mu Q_0(\infty)} = \lim_{s\to 0} D_0(s,\mu) = |m|\frac{\rho_-(\mu)}{\mu},$$

а інтегральне перетворення генератриси $Q_u(\infty)$

$$d_+(\alpha,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha u} d\mathbf{E}e^{-\mu Q_u(\infty)}$$

визначається останнім співідношенням (3.201). Аналогічно для східчастого майже неперервного знизу процесу ризику розподіл тотального "червоного" періоду визначається співвідношеннями (3.203).

3.5 Кумулянтне зображення кореня Лундберга для одного класу процесів

В §§ 3.1, 3.2 встановлено, що відповідно у випадках

а) напівнеперервності зверху $\xi(t)$,

б) майже напівнеперервності зверху $\xi(t)$

додатний корінь Лундберга (див. (3.6) та (3.81)) визначає генератриси $\xi^+(\theta_s)$ та $\tau^+(x)$ $(x \geq 0)$

$$\begin{aligned} &\varphi_+(s,iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi^+(\theta_s)}, \\ &T(s,x) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(x)}\mathbb{I}_{\tau^+(x)<\infty} = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > x\right\}, \end{aligned}$$

а саме

$$\varphi_+(s,iz) = \begin{cases} \dfrac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+z} & \text{для а) ,} \\ \dfrac{p_+(s)\,(c+z)}{\rho_+(s)+z}, \quad \rho_+(s) = cp_+(s), & \text{для б).} \end{cases} \tag{3.224}$$

За умови $\mathbf{P}\{\tau^+(x) < \infty\} = 1\ \forall x \Leftrightarrow \mathbf{P}\{\xi^+ = \infty\} = 1$ у випадку а) в [110, § 23] показано, що $T(x) = \tau^+(x)$ є монотонно неспадним однорідним по x процесом з обмеженою варіацією, тобто його кумулянта й генератриса мають вигляд

$$k_T\,(-s) = -\rho_+(s) = -s\gamma + \int_0^\infty \left(e^{-sy} - 1\right) dN(y), \tag{3.225}$$

$$T(s,x) = e^{k_T(-s)x}, \quad x \geq 0; \quad \gamma \geq 0, \quad \int_0^1 x dN(x) < \infty.$$

Більш конкретних даних про γ та $N(y)$ не наведено.

Виникає питання, для яких випадків можна одержати змістовнішу інформацію про характеристики Леві $\gamma \geq 0$ та $N(y)$.

У випадку б) необхідно враховувати, що

$$\tau^+(x) = \tau^+(0) + T_0(x), \quad T_0(x) = \tau^+(x) - \tau^+(0),$$
$$\mathbf{P}\left\{\tau^+(0) > 0\right\} > 0.$$

Крім того, в обох випадках при $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$ якщо $s \to 0$, отже $T(0,x) = \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < \infty\right\} < 1$. Тому при $m < 0$ нас цікавитиме експоненційне зображення типу (3.225) для умовної генератриси

$$\hat{T}\,(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)} | \tau^+(x) < \infty\big] = T\,(s,x)\,/T\,(0,x)\,.$$

Напівнеперервний процес з $\lambda = \int_{-\infty}^0 \Pi\,(dx) < \infty$. Розглянемо спочатку складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = at - S(t), \quad a > 0, \quad S(t) = \sum_{k \leq \nu(t)} \xi_k, \quad S(0) = 0, \tag{3.226}$$

де $\nu(t)$ — простий пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda > 0$, випадкові величини ξ_k — незалежні, однаково розподілені

$$F(x) = \mathbf{P}\left\{\xi_k < x\right\}, \quad x \geq 0, \quad F(0) = 0,$$
$$\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}, \quad k \geq 1, \quad f(s) = \mathbf{E}e^{-s\xi_k}, \quad s \geq 0.$$

Х.ф. $\xi(t)$ визначається кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda\left(\varphi(-\alpha) - 1\right).$$

Після підстановки $i\alpha = r$ одержимо

$$k(r) = ar + \lambda\left(f(r) - 1\right).$$

Якщо $r = \rho_+(s)$ корінь рівняння $ar + \lambda\,(f(r) - 1) = s$, тоді

$$\rho_+(s) = \frac{s}{a} + \frac{\lambda}{a}\left[1 - f(\rho_+(s))\right]. \tag{3.227}$$

Для простоти покладемо $a = 1$, тоді процес (3.226) є керуючим процесом системи масового обслуговування. Згідно з результатами § 4.3 монотонно неспадні процеси

$$\xi^+(t) = \alpha(t)\,(\alpha(0) = 0, t \ge 0)\,, \quad T(x) = \tau^+(x)\,(x \ge 0, T(0) = 0)$$

можна вважати взаємно "оберненими" в певному сенсі. Процес $\alpha(t)$ називають процесом незайнятості, $\beta(t) = t - \alpha(t)$ — процесом зайнятості.

Графік $\alpha(t)$ (див. 6. Графіки основних процесів ТМО в кінці монографії) є неперервна по t кусково-лінійна функція з "поличками" сталості, довжина яких визначається періодами зайнятості. Якщо цей графік повернути навколо початку координат на $\frac{\pi}{4}$ проти годинникової стрілки, а потім дзеркально відобразити його відносно вертикальної осі, тоді й одержуємо графік "оберненого" процесу $T(x) = \tau^+(x)$.

Інтервали лінійного росту $\alpha(t)$ й $T(x)$, які позначимо $\widetilde{\tau}_r$, є однаковими, оскільки $a = 1$. Як залишок показниково розподіленого τ_k — часу між сусідніми стрибками з показниковим розподілом, $\widetilde{\tau}_r$ має також показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$.

Інтервали сталості $\alpha(t)$ (як і "полички" сталості) визначаються тривалостями періодів зайнятості $\widetilde{\theta}_k$. Після вказаного "обернення" відрізки $\widetilde{\theta}_k$ стають стрибками $T(x)$. Коефіцієнти лінійного росту $\alpha(t)$ та $T(x)$: $a = 1/a = 1$. Отже подібно до $S(t)$ в (3.226) для $T(x)$ має місце стохастичне зображення

$$T(x) \doteq x + \sum_{k \le \widetilde{\nu}(x)} \widetilde{\theta}_k, \quad \widetilde{\nu}(x) = \max\left\{n : \sum_{r \le n} \widetilde{\tau}_r \le x\right\}, \tag{3.228}$$

$\widetilde{\nu}(x)$ як і $\nu(t)$ — простий пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda > 0$.

Генератриса $\widetilde{\theta}_r$ має вигляд

$$\pi(s) = \mathbf{E} e^{-s\widetilde{\theta}_1} \mathbb{I}_{\widetilde{\theta}_1 < \infty} = \mathbf{E} e^{-s\tau^+(\xi_1)} = f(\rho_+(s)). \tag{3.229}$$

При $m = \mathbf{E}\xi(1) \ge 0$: $\pi(s) = f(\rho_+(s)) = \mathbf{E} e^{-s\widetilde{\theta}_1} \to 1$, $\rho_+(s) \to 0$ при $s \to 0$. Згідно (3.227) $-\rho_+(s)$ має кумулянтне зображення

$$-\rho_+(s) = k_T(-s) = \ln \mathbf{E} e^{-sT(1)} = -s + \lambda\,(\pi(s) - 1)\,, \tag{3.230}$$

$$T(s,x) = \mathbf{E}e^{-sT(x)} = e^{xk_T(-s)}, \quad x \geq 0.$$

Це означає, що в (3.225) $\gamma = 1$, $N(x) = -\lambda\mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 > x\}$, $x > 0$. Якщо $m < 0$, тоді $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$, $\pi(0) = f(\rho_+) < 1$ і умовна генератриса $T(x)$ виражається через

$$\hat{k}_T(-s) = \rho_+ - \rho_+(s) = -s\lambda\left(\pi(s) - \pi(0)\right), \tag{3.231}$$

$$\hat{T}(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-sT(x)} \,|\, T(x) < \infty\big] = e^{x\hat{k}_T(-s)}, \quad x \geq 0. \tag{3.232}$$

Аналогічно для процесу (3.226) з довільним знесенням $a > 0$ встановлюються більш загальні співвідношення в наступному твердженні, в якому визначаються характеристики Леві процесу $T(x)$.

Теорема 3.11. *Для неперервного зверху процесу* (3.226) *з додатним знесенням* $a > 0$ *та* $\lambda = \int_{-\infty}^{0}\Pi(dx) < \infty$ *при* $m \geq 0$ *корінь рівняння* (3.6) *визначає генератрису* $T(x) = \tau^+(x)\,(x \geq 0)$ *з відповідною кумулянтою* $k_T(-s) = -\rho_+(s)$ $(\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0)$*:*

$$T(s,x) = \mathbf{E}e^{-sT(x)}\mathbb{I}_{T(x)<\infty} = \mathbf{E}e^{-sT(x)} = e^{xk_T(-s)}, \tag{3.233}$$

$$k_T(-s) = -\frac{s}{a} + \frac{\lambda}{a}\left(\pi(s) - 1\right), \quad \pi(s) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(\xi_1)} = f(\rho_+(s)).$$

Тобто характеристики Леві в (3.225)

$$\gamma = \frac{1}{a}, \quad N(x) = -\frac{\lambda}{a}\mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 > x\}, \quad \widetilde{\theta}_1 \doteq \tau^+(\xi_1), \quad x > 0. \tag{3.234}$$

При $m < 0$ $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$, *якщо* $s \to 0$, *і розподіл* $T(x)$ *— невласний* $(T(0,x) = \mathbf{P}\left\{T(x) < \infty\right\} = e^{-x\rho_+} < 1)$, *а умовна генератриса* $T(x)$ *виражається співвідношеннями* (3.232) *з кумулянтою*

$$\begin{aligned}\hat{k}_T(-s) &= \rho_+ - \rho_+(s) = \\ &= -\frac{s}{a} + \frac{\lambda}{a}\int_0^\infty \left(e^{-sy} - 1\right) d\mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 < y, \widetilde{\theta}_1 < \infty\} = \\ &= -\frac{s}{a} + \frac{\lambda}{a}\left(\pi(s) - \pi(0)\right), \quad \pi(0) = f(\rho_+) < 1.\end{aligned} \tag{3.235}$$

Доведення. Як і в міркуваннях для випадку $a = 1$ для рівняння (3.6) використаємо зображення кумулянти $k(r) =: ar + \lambda\left(f(r) - 1\right) = s$.

Після підстановки $r = \rho_+(s) > 0$ з цього рівняння при $m \geq 0$ знаходимо зображення (3.233) для кумулянти $k_T(-s)$ $(s \geq 0, k(0) = 0)$ та (3.234) для її характеристик Леві.

При $m < 0$ $T(x)$ має невласний розподіл

$$\lim_{s\to 0} T(s,x) = \lim_{s\to 0} \mathbf{E} e^{-sT(x)} \mathbb{1}_{T(x)<\infty} = \\ = \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < \infty\right\} = e^{-\rho_+ x} < 1.$$

Тому замість $T(s,x)$ розглянемо умовну генератрису

$$\hat{T}(s,x) = T(s,x) \,|\, \mathbf{P}\left\{T(x) < \infty\right\} = e^{x(\rho_+ - \rho_+(s))},$$

де кумулянта $\hat{k}_T(-s) = \rho_+ - \rho_+(s)$ має зображення (3.235). $\square$

Майже напівнеперервний зверху процес $\lambda_2 = \int_{-\infty}^0 \Pi(dx) \leq \infty$**.** Розглянемо майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = \frac{\lambda_1 c}{c - i\alpha} + i\alpha a + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\alpha x} - 1\right) \Pi(dx), \qquad (3.236)$$
$$a \leq 0, \quad c, \lambda_1 > 0.$$

Даний процес можна записати як різницю двох монотонно неспадних процесів $\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$ з відповідними кумулянтами

$$\psi_1(\alpha) = \frac{\lambda_1 c}{c - i\alpha}, \quad \psi_2(\alpha) = i\alpha|a| - \int_0^\infty \left(e^{-i\alpha x} - 1\right) \Pi(-dx),$$
$$\int_0^1 x\Pi(-dx) < \infty.$$

Траєкторії процесу $\xi(t)$ є кусково-лінійними функціями зі знесенням $a \leq 0$. Траєкторії процесу $\alpha(t) = \xi^+(t)$ — монотонно неспадні кусково-сталі функції. Інтервали сталості $\alpha(t)$, починаючи з $\alpha(0) = 0$ визначаються випадковими величинами $\widetilde{\theta}_k \doteq \tau^+(0)$. Такими ж величинами $\widetilde{\theta}_k$ визначаються полички сталості процесу $\alpha(t)$. Стрибки $\alpha(t)$ визначаються перестрибками γ_k^+ процесу $\xi(t)$, які мають показниковий розподіл з параметром $c > 0$. Для "оберненого" процесу $T(x)$ стрибками стають величини $\widetilde{\theta}_k$, а інтервалами сталості — величини γ_k^+. Отже

$$T(x) \doteq \sum_{0\leq k\leq \widetilde{\nu}_c(x)} \widetilde{\theta}_k, \quad \widetilde{\nu}_c(x) = \max\left\{n : \sum_{k\leq n} \gamma_k^+ \leq x\right\}, \qquad (3.237)$$

$\widetilde{\nu}_c(x)$ — простий пуассонівський процес з інтенсивністю $c > 0$. На основі співвідношення (3.237) легко довести твердження

Теорема 3.12. *Нехай* $\xi(t)$ *майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (3.236). *Тоді при* $m \geq 0$ $T(x) = \tau^+(x)$ $(T(0) = \tau^+(0) > 0)$ *є монотонно неспадним однорідним процесом зі стохастичним зображенням* (3.237). *Кумулянта та генератриса процесу* $T_0(x) = \tau^+(x) - \tau^+(0)$ $(T_0(0) = 0)$ *визначається коренем Лундберга рівняння* (3.6) $\rho_+(s) > 0$, *а саме:*

$$k_{T_0}(-s) = -\rho_+(s) = c\,(\pi(s) - 1)\,, \tag{3.238}$$
$$\pi(s) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(0)} = q_+(s), \quad \lim_{s\to 0} q_+(s) = 1;$$
$$T_0(s,x) = \mathbf{E}e^{-sT_0(x)} = e^{xk_T(-s)}, \quad x \geq 0.$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\lim_{s\to 0}\rho_+(s) = \rho_+ > 0$, *а умовна генератриса* $T_0(x)$ *визначається співвідношенням*

$$\hat{T}_0(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-sT_0(x)}\,|\,T_0(x) < \infty\big] = e^{x\hat{k}_{T_0}(-s)}, \quad x \geq 0, \tag{3.239}$$
$$\hat{k}_{T_0}(-s) = \rho_+ - \rho_+(s) = c\,(\pi(s) - \pi(0))\,,$$
$$\pi(s) = q_+(s), \quad \pi(0) = q_+(0) < 1.$$

З (3.238) *та* (3.239) *випливає, що* $0 < \rho_+(s) = c\,(1 - \pi(s)) < c$, $s \geq 0$,

$$\gamma = 0, \quad dN(y) = \begin{cases} c\,d\mathsf{P}\left\{\tau^+(0) < y\right\}, & m \geq 0,\ y > 0; \\ -c\,d\mathsf{P}\left\{y < \tau^+(0) < \infty\right\}, & m < 0. \end{cases} \tag{3.240}$$

Приклад 3.11. Нехай $\xi(t)$ майже напівнеперервний і зверху і знизу симетричний процес (див. приклад 2.4, $m = a = 0$) з кумулянтою $\psi(\alpha) = \lambda(i\alpha)^2/\big(c - (i\alpha)^2\big)$, тоді

$$\rho_+(s) = cp_+(s),$$
$$p_+(s) = \mathbf{P}\left\{\tau^+(0) < \theta_s\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) = 0\right\} = \sqrt{\frac{s}{s+\lambda}}.$$

Після обернення $p_+(s)$ по s знаходимо

$$N(z) = -\frac{2c}{\pi}\int_0^1 e^{-\lambda zy}d\arcsin\sqrt{y}, \quad N(0) = -c, \quad z \geq 0, \tag{3.241}$$

$$dN(z) = \frac{\lambda c}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}} e^{-\lambda z y} dy, \quad z > 0.$$

Якщо позначити $Q_{0,w}(t)$ — час перебування стандартного вінерівського процесу $w(u)$ в $\mathbb{R}^+$ на інтервалі $0 \le u \le t$, тоді

$$|N(t)| = c\mathbf{E} e^{-\lambda Q_{0,w}(t)}, \quad t > 0.$$

Напівнеперервний процес з $\lambda = \int_{-\infty}^0 \Pi(dx) = \infty$. Розглянемо замість (3.226) неперервний зверху процес $\xi(t)$ з обмеженою варіацією (але $\lambda = \infty$), кумулянта якого записується так

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\alpha x} - 1\right) \Pi(dx), \quad a > 0, \tag{3.242}$$
$$\int_{-1}^0 |x| \Pi(dx) < \infty.$$

Оскільки $a > 0$, траєкторії $\xi(t)$ і $\xi^+(t)$ мають інтервали лінійного росту (серед них є як завгодно малі, бо $\lambda = \infty$) зі знесенням a^{-1}.

Після заміни $i\alpha = r$ кумулянту $k(r)$ можна записати так

$$k(r) = ra + \int_0^\infty \left(e^{-rx} - 1\right) \Pi(-dx). \tag{3.243}$$

На основі рівняння (3.6) та співвідношень (3.224) встановлюється

Теорема 3.13. *Для неперервного зверху процесу з кумулянтою* (3.242) *при* $m \ge 0$ *кумулянта* $T(x)$ — *однорідного монотонного процесу визначається формулами* (3.225) *з характеристиками Леві*

$$\gamma = \frac{1}{a}, \quad N(y) = -\frac{1}{a} \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) > y\right\} \Pi(-dx), \quad y > 0. \tag{3.244}$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $\lim_{s\to 0} \rho_+(s) = \rho_+ > 0$, $T(s,0) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > 0\right\} = q_+(s) > 0$, *а умовна генератриса* $T(x)$ *визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned} \hat{T}(s,x) &= \mathbf{E}\big[e^{-sT(x)} \,|\, T(x) < \infty\big] = e^{x\hat{k}_T(-s)}, \quad x \ge 0, \\ \hat{k}_T(-s) &= \rho_+ - \rho_+(s) = \\ &= -\frac{s}{a} - \frac{1}{a}\int_0^\infty \!\left(e^{-sy} - 1\right) \int_0^\infty \Pi(-dx)\, d\mathsf{P}\left\{y < \tau^+(x) < \infty\right\}. \end{aligned} \tag{3.245}$$

Доведення. З рівняння Лундберга (3.6) випливає, що

$$-a\rho_+(s) = \int_0^\infty \big(e^{-\rho_+(s)x} - 1big)\Pi(-dx) - s. \tag{3.246}$$

Враховуючи, що при $m \geq 0$

$$\mathbf{E}e^{-s\tau^+(x)} = e^{-\rho_+(s)x} = \int_0^\infty e^{-sy}\, d\mathsf{P}\left\{\tau^+(x) < y\right\}, \quad x > 0,$$

з (3.246) одержимо співвідношення для $k_T(-s) = -\rho_+(s)$ в "кумулянтній" формі

$$-\rho_+(s) = -\frac{s}{a} + \frac{1}{a}\int_0^\infty \left(e^{-sy} - 1\right)\int_0^\infty d\mathsf{P}\left\{\tau^+(x) < y\right\}\Pi(-dx).$$

Порівнюючи (3.246) та (3.225) легко отримати співвідношення для характеристик Леві γ та $N(y)$ в (3.244). При $\lambda < \infty$ можна переконатися в ідентичності (3.234) та (3.244).

При $m < 0$ для умовної генератриси $T(x)$ аналогічно встановлюється співвідношення (3.245) з мірою Леві для $\hat{k}_T(-s)$, яка дещо відрізняється від (3.244),

$$\hat{N}(y) = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{y < \tau^+(x) < \infty\right\}\Pi(-dx),\ y > 0, \tag{3.247}$$

$$\hat{N}'(y) = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < y \,|\, \tau^+(x) < \infty\right\} e^{-\rho_+ x}\Pi(-dx). \quad \square$$

Процес броунівського руху. Для стандартного вінерівського процесу в [93] показано, що $T(x) = \tau^+(x)$ $(x > 0)$ є стійким процесом по x з параметром стійкості $\alpha_* = 1/2$. Для довільного процесу броунівського руху доведемо більш загальне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай* $\xi_0(t) = at + \sigma w(t)$ $(\pm a \geq 0, \sigma > 0)$. *Генератриса* $T(x) = \tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi_0(t) > x\}$ *при* $a \geq 0$ *визначається так*

$$T(s,x) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(x)} = e^{xk_T(-s)}, \quad x \geq 0, \tag{3.248}$$

$$k_T(-s) = -\rho_+(s) = \int_0^\infty \left(e^{-sx} - 1\right) dN_a(x).$$

При цьому для $a = 0$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} = -\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}, \quad x > 0, \tag{3.249}$$

$$N_a(x) = N_0(x) \exp\left\{-\frac{a^2 x}{2\sigma^2}\right\} + \frac{2a}{\sigma^2}\Phi_0\left(\frac{a\sqrt{x}}{\sigma}\right), \quad a > 0, \tag{3.250}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (x > 0)\,.$$

Якщо $a < 0$, тоді умовна генератриса $T(x)$ визначаєтьcя так

$$\hat{T}(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-sT(x)} \,|\, T(x) < \infty\big] = e^{x\hat{k}_T(-s)}, \quad x \geq 0 \tag{3.251}$$

з кумулянтою

$$\hat{k}_T(-s) = \rho_+ - \rho_+(s) = \int_0^\infty \left(e^{-sx} - 1\right) d\hat{N}_a(x),$$

$$\hat{N}_a(x) = N_0(x) e^{-\frac{a^2 x}{2\sigma^2}} + \frac{2|a|}{\sigma^2}\Phi_0\left(\frac{|a|\sqrt{x}}{\sigma}\right), \quad x > 0. \tag{3.252}$$

Доведення. Корені рівняння Лундберга $\pm\rho_\pm(s)$

$$2ar + \sigma^2 r^2 = 2s: \quad \rho_+(s) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{a^2 + 2s\sigma^2} \mp a\right) > 0$$

визначають генератриси для $\tau^\pm(\pm x)$ $(x > 0)$. Розглянемо випадки:

1. При $a \geq 0$ для додатного кореня має місце зображення

$$-\rho_+(s) = -\frac{2s}{a + \sqrt{a^2 + 2s\sigma^2}} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.253}$$

2. При $a < 0$ $\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_+ > 0$ подібне зображення має місце для

$$\rho_+ - \rho_+(s) = \hat{k}_T(-s) = -\frac{2s}{|a| + \sqrt{a^2 + 2s\sigma^2}} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.254}$$

Зауважимо, що однотипна залежність $k_T(-s)$ та $\hat{k}_T(-s)$ від s в (3.253) та (3.254) обумовить подібність по x правих частин в (3.250) та (3.252) (при $a > 0$ та $a < 0$, відповідно).

Спочатку розглянемо $a \geq 0$. Для процесу $\xi_0(t)$ характеристики Леві в (3.225) визначаються умовами: $\gamma = 0$, $\int_0^\infty x dN_a(y) < \infty$, тому

$$\rho_+(s) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-sy}\right) dN_a(y) = s\int_0^\infty |N_a(y)| e^{-sy} dy.$$

Якщо позначити $\widetilde{n}_a(s) = \int_0^\infty |N_a(x)|e^{-sx}dx$, тоді згідно з (3.253)

$$\rho_+(s) = s\widetilde{n}_a(s), \quad \widetilde{n}_a(s) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{\sigma^2 s}{2}}\right)^{-1}. \tag{3.255}$$

Після заміни $p = a^2/4 + s\sigma^2/2$ $\big(s = 2p/\sigma^2 + a^2/(2\sigma^2)\big)$ перетворення Лапласа для $|N_a(x)|$ зводиться до функції

$$\widetilde{f}(p) = \frac{1}{c + \sqrt{p}} = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx. \tag{3.256}$$

Шляхом обернення (3.256) відносно p згідно з таблицями для перетворень Лапласа (див. [82, с. 210]) знаходимо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - ae^{-\frac{a^2 x}{4}}\Phi_0\left(a\sqrt{\frac{x}{2}}\right), \quad x > 0. \tag{3.257}$$

Після заміни $s = 2p/\sigma^2 + a^2/(2\sigma^2)$ одержимо

$$\widetilde{n}_a(s) = \int_0^\infty |N_a(x)|e^{-\frac{2px}{\sigma^2} + \frac{a^2 x}{2\sigma^2}}dx. \tag{3.258}$$

Після підстановки $y = 2x/\sigma^2$ права частина в (3.256) набуває вигляду

$$\frac{\sigma^2}{2}\int_0^\infty \left|N_a\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right)\right| e^{\frac{a^2}{4}y} e^{-py}dy = \widetilde{f}(p). \tag{3.259}$$

Звідки згідно з (3.257) знаходимо

$$\frac{\sigma^2}{2}\left|N_a\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right)\right| e^{\frac{a^2 y}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} - ae^{\frac{a^2 y}{4}}\Phi_0\left(a\sqrt{\frac{y}{2}}\right), \tag{3.260}$$

$$\left|N_0\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right)\right| = \frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, \quad y > 0, \quad a = 0, \tag{3.261}$$

$$\left|N_a\left(\frac{\sigma^2 y}{2}\right)\right| = \frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{a^2 y}{4}} - \frac{2a}{\sigma^2}\Phi_0\left(a\sqrt{\frac{y}{2}}\right), \quad a > 0. \tag{3.262}$$

Повертаючись до змінної $x = \sigma^2 y/2$, переконуємося у справедливості (3.249) та (3.250). Зауважимо, що при $a = 0$

$$|N_0(x)| = \int_x^\infty dN(dy) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}, \quad x \geq 0$$

є інтегральною мірою Леві стрибків стійкого процесу з показником стійкості $\alpha_* = 1/2$. При $a \neq 0$ міра $|N_a(x)| = \int_x^\infty dN_a(y)$ виражається через $|N_0(x)|$ та хвости нормального розподілу (див. (3.250), (3.252)).

Якщо $a < 0$, тоді $\rho_+(s) \to \rho_+$ і $T(x)$ має невласний розподіл:

$$\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < \infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi^+ > x\right\} = e^{-\rho_+ x} < 1, \quad x < 0.$$

Як і раніше, умовна генератриса $T(x)$ має показникову форму

$$\hat{T}(s,x) = \frac{T(s,x)}{\mathbf{P}\{T(x) < \infty\}} = e^{\hat{k}_T(-s)x},$$

де кумулянта $\hat{k}_T(-s) = \rho_+ - \rho_+(s)$ має зображення (3.254), подібне до (3.253). З (3.254) випливає, що $N_a(x)$ в (3.252) виражається за допомогою (3.260)–(3.262) після заміни a на $|a|$. Таким чином теорема доведена. □

Стійкий напівнеперервний зверху процес з $\alpha_* \in (0,1)$**.** Розглянемо спочатку процес $\xi(t) = \xi_*(t) + t$, де $\xi_*(t)$ від'ємний стійкий процес з показником стійкості $\alpha_* = 1/2$ та $N_*(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy) = \sqrt{2}(\pi|x|)^{-1/2}$ $(x < 0)$. Кумулянта $\xi(t)$ має вигляд

$$\psi(\alpha) = i\alpha - \sqrt{2|\alpha|}, \quad k(r) = r - \sqrt{2|r|}. \tag{3.263}$$

За теоремою 3.1 (див. (3.10)) при $r > 0$ корінь $\rho_+(s)$ рівняння (3.6):

$$r - \sqrt{2r} = s, \quad s > 0 \quad \left(\rho_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_+ = 2\right) \tag{3.264}$$

визначає генератрису $\xi^+(\theta_s)$ (ξ^+, оскільки $m = -\infty < 0$)

$$\mathbf{E}e^{-z\xi^+(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) + z}, \quad \mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \frac{\rho_+}{\rho_+ + z}. \tag{3.265}$$

Щоб одержати кумулянтне зображення $-\rho_+(s)$, позначимо генератрису гамма-розподілу з параметрами $\alpha = \beta = 1/2$:

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2s}} = \int_0^\infty e^{-sy} d\Gamma_{\frac{1}{2}}(x), \tag{3.266}$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(x) = \Gamma_{\alpha,\beta}(x)\big|_{\alpha=\beta=1/2}, \quad x > 0,$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x y^{-1/2} e^{-y/2} dy,$$

$$\Gamma'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Теорема 3.15. *Нехай $\xi(t)$ — стійкий напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (3.263). *Тоді умовна генератриса $T(x) = \tau^+(x)$ визначається експоненційним зображенням при $\alpha_* = 1/2$*

$$\hat{T}(s,x) = \frac{T(s,x)}{T(s,0)} = \mathbf{E}\big[e^{-sT(x)} \,|\, T(x) < \infty\big] = \\ = e^{x\hat{k}_T(-s)}, \quad x > 0, \tag{3.267}$$

з кумулянтою $\hat{k}_T(-s) = \rho_+ - \rho_+(s)$

$$\hat{k}_T(-s) = -s + \int_0^\infty \big(e^{-sy} - 1\big)\, d\hat{N}(y), \quad \gamma = 1, \quad \rho_+ = 2, \tag{3.268}$$
$$\hat{N}(y) = \overline{\Gamma}_{\frac{1}{2}}(y) - 2\Gamma'_{\frac{1}{2}}(y), \quad \overline{\Gamma}_{\frac{1}{2}}(y) = 1 - \Gamma_{\frac{1}{2}}(y),$$
$$\hat{N}'(y) = \frac{y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Якщо $\xi(t) = at + \xi_*(t)$ ($a > 0$, $\xi_*(t) \le 0$ з $\Pi(dx) = c_1|x|^{-1-\alpha_*}dx$, $x < 0$, $c_1 > 0$), тоді згідно з (3.245) *$\gamma = 1/a$ і на основі формули двоїстості* (3.72) *встановлюється, що при $\alpha_* \in (0,1)$*

$$\hat{N}'(y) = \frac{c_1}{ay\mathbf{E}_+\big(\xi^{\alpha_*}(y) e^{\rho_+\xi(y)}\big)},$$
$$\mathbf{E}_+ f(\xi(y)) = \mathbf{E} f(\xi(y)) \mathrm{I\!I}_{\xi(y)>0}. \tag{3.269}$$

Доведення. Рівняння (3.264) зводиться до квадратного

$$r^2 - 2(s+1)r + s^2 = 0, \quad D_s = 4\,(1+2s) > 0.$$

Корінь $r_1(s) = \rho_+(s) = s + 1 + \sqrt{1+2s} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_+ = 2 > 0$ ($m = -\infty < 0$) визначає

$$\mathbf{E}e^{-z\xi(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+z} \quad \text{та} \quad \mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \frac{\rho_+}{\rho_+ + z},$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^+ > x\right\} = e^{-\rho_+ x}, \quad \rho_+ - \rho_+(s) = -s + \big(1 - \sqrt{1+2s}\big),$$
$$\int_0^\infty \big(e^{-sx} - 1\big)\, dN(x) = 1 - \sqrt{1+2s} = -\frac{2s\varphi_0(s)}{1+\varphi_0^2(s)}. \tag{3.270}$$

Після інтегрування частинами в (3.270) одержимо перетворення Лапласа для $|N(y)|$

$$\int_0^\infty e^{-sy}|N(y)|dy = \varphi_0(s)\left(2+\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{s}.$$

Після обернення по s встановлюються формули для $\hat{N}(x)$ в (3.268).

З (3.268) випливає, що стрибки $T(x)$ (як і полички сталості $\xi^+(t)$) мають міру Леві, що визначається розподілом (3.266). Із (3.247) випливає, що в умовах теореми 3.15 згідно (3.72)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<y,\tau^+(x)<\infty\right\}=\\&\quad=\frac{xe^{-\rho_+x}}{y}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\xi(y)<x\,|\,\xi^+>x\right\}.\end{aligned} \tag{3.271}$$

Отже $\gamma=1$ і для $\hat{N}'(y)$ (див. (3.247)) одержуємо таку ймовірнісну інтерпретацію

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}y\hat{N}'(y)&=\int_0^\infty\frac{e^{-\rho_+x}}{\sqrt{x}}d\mathbf{P}\left\{\xi(y)<x\,|\,\xi^+>x\right\}= \qquad (3.272)\\&=\mathbf{E}_+\left[\frac{e^{-\rho_+\xi(y)}}{\sqrt{\xi(y)}}\,|\,\xi(y)<\xi^+\right]=\frac{1}{\mathbf{E}_+\left[\sqrt{\xi(y)}e^{\rho_+\xi(y)}\right]}.\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться (3.269) для довільного $\alpha_*\in(0,1)$. □

Приклад 3.12. Нехай $\xi(t)=\xi_*(t)-S(t)$, де $\xi_*(t)$ — довільний стійкий процес без знесення з $\alpha_*=1/2$ і $\Pi(dx)=c_1|x|^{-3/2}dx, x<0$, $S(t)=\sum_{k\le\nu(t)}\xi_k$ — складний пуассонівський з показниково розподіленими стрибками $\xi_k>0$. Кумулянта $\xi(t)$ має вигляд

$$\begin{aligned}&\psi(\alpha)=\frac{i\alpha}{c-i\alpha}-C|\alpha|^{1/2},\quad C=\sqrt{2\pi}c_1,\quad c,c_1>0, \qquad (3.273)\\&k(r)=\psi(-ir)=\frac{r}{c-r}-C\sqrt{|r|},\\&\mathbf{E}\xi(1)=\mathbf{E}\xi_*(1)+\frac{1}{c}=-\infty<0.\end{aligned}$$

Процес $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху, тому легко визначити $\varphi_+(s,\alpha)$, $T(s,x)$, якщо знайти корінь $\rho_+(s)$ рівняння (3.81).

В існуванні кореня $\rho_+(s)$ при $s = 0$ легко переконатися графічним способом. Розглянемо дві функції: $y_1 = \frac{r}{c-r}$, $y_2 = C\sqrt{r}$, графіки яких перетинаються при $0 < r < c$ і абсциса точки перетину визначає значення $\rho_+ > 0$.

Так само при достатньо малих $s > 0$ корінь $\rho_+(s) > 0$ рівняння $r/(c-r) - C\sqrt{r} = s$, $0 \le r < c$ визначається точкою перетину кривих:

$$y_1 = \frac{r}{c-r} - s, \quad y_2 = C\sqrt{r}; \quad 0 \le r < c.$$

За лемою 3.3 корінь $\rho_+(s) = cp_+(s) \le c$ і визначає

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha}, \quad T(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x \ge 0.$$

Для цього процесу $m = -\infty < 0$, тому для нього слід розглянути умовну генератрису для $T_0(x) = \tau^+(x) - \tau^+(0)$, яка згідно з (3.239) має показникову форму, при цьому для $\hat{k}_{T_0}(-s) = \rho_+ - \rho_+(s)$ має місце зображення

$$\begin{aligned} &\hat{k}_{T_0}(-s) = c\,(\pi(s) - \pi(0))\,, \quad \pi(s) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(0)}\mathbb{I}_{\tau^+(0)<\infty}, \qquad (3.274)\\ &\pi(0) = q_+ < 1,\\ &\rho_+(s) = c\,(\pi(0) - \pi(s)) + \rho_+ = c\,(1 - \pi(s)) < 1 \quad \forall\, s. \end{aligned}$$

Рівняння Лундберга (3.81) при $C = \sqrt{2}$ і $s \to 0$ зводиться до квадратного: $2r^2 - (4c+1)r + 2c^2 = 0$, з дискримінантом $D_0 = 8c+1$. Корінь $r = \rho_+ \in (0, c)$, що визначає $\mathbf{E}e^{-z\xi_+} = p_+(c+z)(\rho_+ + z)^{-1}$, має вигляд $\rho_+ = \frac{4c+1-\sqrt{D_0}}{4}$ (при $c = 1$: $\rho_+ = p_+ = 1/2$; при $c = 3$: $\rho_+ = 3p_+ = 2$; при $c = 6$, $\rho_+ = 6p_+ = 9/2$, $p_+ = 3/4$; при $c = 10$: $\rho_+ = 10p_+ = 8$, $p_+ = 4/5$; при $c = 15$: $\rho_+ = 15p_+ = 25/2$, $p_+ = 5/6$).

Зауважимо, що корінь $\rho_+(s) > 0$ рівняння Лундберга грає визначальну роль лише для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів (див. формули (3.224)). В інших випадках рівняння (3.81) може й не мати розв'язків, а якщо вони й існують, то ці розв'язки не можуть повністю визначати ні генератрису $T(s,x)$, ні х.ф. $\varphi_+(s,\alpha)$.

3.6 Деякі зауваження про узагальнення формули Полячека–Хінчина

Щодо використаної в теоремі 2.4 (при доведені (2.30) і (2.33)) умови $\mathbf{P}\{\tau^+(0) = \gamma^+(0) = 0\}$, слід відзначити, що

$$\mathbf{P}\left\{\tau^+(0) = 0\right\} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left\{\tau^+(0) > 0\right\} = 1. \tag{3.275}$$

Тоді за означенням $\gamma^+(0) = \xi(\tau^+(0)) = 0$ з ймовірністю 1. Це означає, що

$$\mathbf{P}\left\{\tau^+(0) = 0, \gamma^+(0) = 0\right\} = 0. \tag{3.276}$$

Саме при умові (3.276) з другої факторизаційної тотожності виводяться формули зв'язку (2.30), (2.33) між розподілами $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ та $\xi^+(\theta_s)$.

Спочатку сформулюємо лему, в якій з'ясовуються умови, коли $\mathbf{P}\{\tau^+(0) = 0\} = 0$ або 1, коли ξ^+ має власний розподіл. Воно базуються на результатах роботи Б.А. Рогозіна [106] (див. також теореми 2.1 та 2.3 в [14]).

Лема 3.6. *Якщо для процесу $\xi(t)$ виконується умова*

$$J = \int_0^1 t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}\, dt < \infty, \quad \textit{тоді } \mathbf{P}\left\{\tau^+(0) = 0\right\} = 0. \tag{3.277}$$

Це має місце для процесів з обмеженою варіацією у таких випадках

1. $\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty$, *коефіцієнт знесення* $a < 0$,
2. $\int_{-1}^0 |x|\Pi\,(dx) < \infty$, $\int_0^1 \Pi(dx) < \infty$, $a < 0$.

Якщо $J = \infty$, *тоді* $\mathbf{P}\{\tau^+(0) < \infty\} = 1$ *і це має місце у випадках*

1. *процес* $\xi(t)$ *має необмежену варіацію;*
2. *процес* $\xi(t)$ *має обмежену варіацію і* $a > 0$.

За теоремою 2.1 (*див.* [14, с. 123]) $\mathbf{P}\{\xi^+ < \infty\} = 1$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$J' = \int_1^\infty t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}\, dt < \infty. \tag{3.278}$$

Якщо для процесів з обмеженою варіацією $\int_0^1 \Pi(dx) = \int_{-1}^0 \Pi(dx) = \infty$, з наведеного в [106] прикладу випливає, що можливі випадки як $J < \infty$ так і $J = \infty$. А саме для процесу $\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$, де $\xi_{1,2}(t)$ монотонно неспадні стійки процеси без знесення з параметрами стійкості $0 < \alpha, \beta < 1$ у випадку $\alpha < \beta < 1 : J < \infty$, а для $0 < \beta \leq \alpha < 1$ $J = \infty$.

Зауважимо, що для наведеного прикладу з [106] в [14, с. 129] замість $\Pi(dx)$ слід читати $\Pi(x)$, а саме

$$\Pi(x) = \begin{cases} -x^{-\alpha}, & x > 0, \\ |x|^{-\beta} & x < 0. \end{cases}$$

Відповідно нижче у 6-му рядку має бути

$$\Pi_1(dx) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} \alpha x^{-\alpha-1} dx, \quad \Pi_2(dx) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} \beta x^{-\beta-1} dx,$$

а у 8-рядку — $\xi_1(t) t^{\frac{1}{\alpha}} - \xi_2(t) t^{\frac{1}{\beta}}$.

Теорема 3.16. *Нехай $\xi(t)$ процес зі стрибками довільного знаку і кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\alpha x} - 1\right) \Pi(dx), \tag{3.279}$$

$$\int_{|x|\leq 1} |x| \Pi(dx) < \infty.$$

Тоді спільна генератриса пари $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ визначається співвідношенням

$$\begin{gathered} f_+(s,z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\gamma^+(0) - s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty\right] = \\ = \mathbf{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s)\right] = 1 - \frac{p_+(s)}{\varphi_+(s, iz)}, \\ p_+(s) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) = 0\right\}, \end{gathered} \tag{3.280}$$

і дограничне узагальнення формули Полячека–Хінчина $(s > 0)$ визначає генератрису $\xi^+(\theta_s)$

$$\begin{gathered} \mathbf{E} e^{-z\xi^+(\theta_s)} =: \varphi_+(s, iz) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(z)}, \\ \widetilde{g}_s(z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+(\theta_s) > 0\right], \end{gathered} \tag{3.281}$$

де згідно з формулою Спітцера (див. теорему 2.2) $p_+(s)$ *визначається співвідношенням*

$$p_+(s) = \lim_{z\to\infty} \varphi_+(s, iz) = \exp\left\{-\int_0^\infty e^{-st} t^{-1} \mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}\, dt\right\}.$$

При $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ *генератриса* ξ^+ *визначається граничним узагальненням формули Полячека–Хінчина*

$$\mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{g}_0(z)}, \quad \widetilde{g}_0(z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+ > 0\big], \tag{3.282}$$
$$p_+ = \exp\left\{-\int_0^\infty t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}\, dt\right\} > 0.$$

Доведення. В доведенні обмежимося лише зауваженням, що збіжність інтегралів в (3.277), (3.278) гарантує збіжність інтегралу в експоненті для p_+.

Для процесів $\xi(t)$ з необмеженою варіацією

$$\mathbf{P}\big\{\xi^+(t) = 0\big\} = 0 \ \ \forall\, t > 0, \quad \text{тобто} \ \ \mathbf{P}\big\{\tau^+(0) = 0\big\} = 1.$$

Отже умова (3.276) не виконується і $p_+(s) = 0$. Крім того, (див. (2.30))

$$f_+(s, z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0\big] = q_+(s), \quad \widetilde{g}_s(0) = 1.$$

Таким чином права частина (3.281) (як і в (3.282) при $m < 0$) є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$. □

Наступні два твердження встановлюються на основі результатів § 3.1 для напівнеперервних знизу процесів та § 3.2 — для майже напівнеперервних знизу процесів. Згідно з лемою 3.6 для процесів у цих твердженнях виконується умова (3.275). Тому справедлива

Теорема 3.17. *Для напівнеперервних знизу процесів* $\xi(t)$ *з кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty \big(e^{i\alpha x} - 1\big)\,\Pi(dx), \quad a < 0,$$
$$\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty \tag{3.283}$$

спільна генератриса $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *визначається співвідношенням*

$$
\begin{aligned}
&f_+(s,z) = q_+(s)\widetilde{g}_s(z), \quad \widetilde{g}_s(z) = \frac{z\widetilde{\Pi}(z) - \rho_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}{(z-\rho_-(s))\,\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}, \qquad (3.284)\\
&q_+(s) = \frac{1}{|a|}\widetilde{\Pi}(\rho_-(s)), \quad \widetilde{\Pi}(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\Pi(x)dx,\\
&\Pi(x) = \int_x^\infty \Pi(dy),
\end{aligned}
$$

$r_s = -\rho_-(s) < 0$ — *корінь рівняння Лундберга* (3.6).

При $m < 0$ $\rho_-(s) \to 0$, $\rho'_-(0) = \frac{1}{|m|}$, *тоді з* (3.284) *випливає, що*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}, \xi^+ > 0\big] = \lim_{s\to 0} f_+(s,z) = q_+\widetilde{g}_0(z), \qquad (3.285)\\
&\widetilde{g}_0(z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+ > 0\big] = \widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(0), \quad q_+(0) = \widetilde{\Pi}(0)/|a|.
\end{aligned}
$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *визначається дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина*

$$
\varphi_+(s,iz) = p_+(s)\left[1 - q_+(s)\frac{z\widetilde{\Pi}(z) - \rho_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}{(z-\rho_-(s))\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}\right]^{-1}, \qquad (3.286)
$$

Якщо $\lambda = \Pi(0) < \infty$ $\big(\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x),\, \overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 > x\},\, x > 0\big)$, *тоді*

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{g}_s(z) = \frac{z\widetilde{F}(z) - \rho_-(s)\widetilde{F}(\rho_-(s))}{(z-\rho_-(s))\widetilde{F}(\rho_-(s))}, \qquad (3.287)\\
&\varphi_+(s,iz) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\dfrac{z\widetilde{F}(z) - \rho_-(s)\widetilde{F}(\rho_-(s))}{(z-\rho_-(s))\widetilde{F}(\rho_-(s))}},\\
&\widetilde{F}(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx, \quad q_+(s) = \frac{\lambda\widetilde{F}(\rho_-(s))}{|a|}.
\end{aligned}
$$

Якщо $m = E\xi(1) < 0$, *тоді відповідно з* (3.286) *та* (3.287) *при* $s \to 0$ *випливає, що*

$$
Ee^{-z\xi^+} = \qquad (3.288)
$$

$$= \begin{cases} \dfrac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(0)}, \ q_+ = \dfrac{1}{|a|}\widetilde{\Pi}(0) & \textit{при } \Pi(0) = \infty; \\ \dfrac{p_+}{1 - q_+\widetilde{F}(z)/\widetilde{F}(0)}, \ q_+ = \dfrac{\lambda}{|a|}\widetilde{F}(0) = \dfrac{\lambda\mu}{|a|} & \textit{при } \Pi(0) < \infty. \end{cases}$$

Останнє співвідношення в (3.288) *є класичною формулою Полячека–Хінчина.*

Аналогічні співвідношення встановлюються для східчастого майже напівнеперервного знизу процесу. Такий процес можна розглядати як суму двох монотонних процесів відповідно з додатними та від'ємним стрибками

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \quad \xi_{1,2}(t) = \sum_{k \le \nu_{1,2}(t)} \xi'_k \, (\xi''_k) \, , \tag{3.289}$$

$$F_1(x) = \mathbf{P}\left\{\xi'_k < x\right\}, \quad x > 0;$$

$$F_2(x) = \mathbf{P}\left\{\xi''_k < x\right\} = e^{bx} \quad (b > 0, \ x \le 0)$$

$\nu_{1,2}(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$

$$\varphi_1(iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi'_k} = 1 - z\widetilde{F}_1(z),$$

$$\widetilde{F}_1(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}_1(x)dx, \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{b}{b + i\alpha}.$$

Кумулянту цього процесу можна записати двома способами

$$\psi(\alpha) = \tag{3.290}$$

$$= \begin{cases} \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha), \psi_1(\alpha) = \lambda_1\left(\varphi_1(\alpha) - 1\right), \ \psi_2(\alpha) = -\dfrac{i\alpha\lambda_2}{b + i\alpha}, \\ \lambda\left(\varphi(\alpha) - 1\right), \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \ \varphi(\alpha) = p\varphi_1(\alpha) + q\dfrac{b}{b + i\alpha}; \end{cases}$$

$$p = \lambda_1/\lambda, \quad q = \lambda_2/\lambda, \quad \overline{F}(x) = p\overline{F}_1(x).$$

Теорема 3.18. *Для східчастого майже напівнеперервного знизу процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (3.290) *спільна генератриса* $\{\tau^+(0),\gamma^+(0)\}$ *визначаєтьcя співвідношенням*

$$f_+(s,z) = \mathbf{E}e^{-s\tau^+(0) - z\gamma^+(0)}\mathbb{I}_{\tau^+(0)<\infty} = \tag{3.291}$$

$$= \frac{\lambda_1}{s + \lambda}\left[\varphi_1(iz) + bq_-(s)\frac{z\widetilde{F}(z) - \rho_-(s)\widetilde{F}_1(\rho_-(s))}{z - \rho_-(s)}\right],$$

$$q_+(s) = f_+(s,0) = \frac{\lambda_1}{s+\lambda}\big[1 + bq_-(s)\widetilde{F}_1(\rho_-(s))\big],$$

$r_s = -\rho_-(s)$ — *корінь рівняння* (3.81).

При $m < 0$ *і* $s \to 0$ *з цих співвідношень випливає, що*

$$f_+(0,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}, \xi^+ > 0\big] = \frac{\lambda_1}{\lambda}\big[\varphi_1(iz) + b\widetilde{F}_1(z)\big], \qquad (3.292)$$

$$q_+ = p\left[1 + b\overline{F}_1(0)\right], \quad \overline{F}_1(0) = \mu_1 = \mathbf{E}\xi_1'.$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *визначається дограничною формулою Полячека–Хінчина*

$$\varphi_+(s,iz) = \frac{p_+(s)}{1 - f_+(s,z)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(z)}, \qquad (3.293)$$

$$\widetilde{g}_s(z) = \frac{1}{1 + bq_-(s)\widetilde{F}_1(\rho_-(s))} \times$$
$$\times \left[\varphi_1(iz) + bq_-(s)\frac{z\widetilde{F}_1(z) - \rho_-(s)\widetilde{F}_1(\rho_-(s))}{z - \rho_-(s)}\right].$$

При $m < 0$ *генератриса* ξ^+ *визначається граничною формулою Полячека–Хінчина*

$$\mathbf{E}e^{-z\xi^+} = p_+\left[1 - q_+\frac{\varphi_1(iz) + b\widetilde{F}_1(z)}{1 + b\mu_1'}\right], \qquad (3.294)$$

$$q_+ = p\left(1 + b\mu_1'\right), \quad \widetilde{g}_0(z) = \frac{\varphi_1(iz) + b\widetilde{F}_1(z)}{1 + b\mu_1'}, \quad \mu_1' = \widetilde{F}_1(0).$$

Незалежно від умов (3.275) або (3.277) на основі теореми 2.5 та наслідку 2.2 встановлюється твердження для загального випадку.

Теорема 3.19. *Нехай* $\xi(t)$ — *довільний однорідний процес з незалежними приростами та кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a' - \alpha^2\sigma^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x \mathbb{I}_{|x|\le 1}\big)\,\Pi(dx), \qquad (3.295)$$

$$\left(a = a' - \int_{|x|\le 1} x\Pi(dx) \quad \text{при} \int_{|x|\le 1} x\Pi(dx) < \infty\right),$$

$$K(s,x) = \int_{-\infty}^{0}\Pi(x-y)dP_-(s,y), \quad k(s,\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x}K(s,x)dx.$$

Тоді х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням*

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{1}{1 - i\alpha\left(C_*(s) + s^{-1}k(s,\alpha)\right)}, \tag{3.296}$$

$$C_*(s) = \begin{cases} (2s)^{-1}\,\sigma^2 P'_-(s,0), & \sigma > 0, \\ s^{-1}p_-(s)\max\{0,a\}, & \sigma = 0, \quad \displaystyle\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < 0. \end{cases}$$

При $\sigma = 0$ $\int_{|x|\le 1}|x|\Pi(dx) = \infty$*:* $p_-(s) = 0$*,* $C_*(s) = 0$*.*

Якщо $m < 0$*, тоді*

$$\varphi_+(iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \left[1 + z\left(C_*(0) + k'(0,iz)\right)\right]^{-1}, \tag{3.297}$$

$$zk'(0,iz) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-zx}\right) dM(x),$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^0 \Pi(x-y)d\mathbf{E}\tau^-(x).$$

З наведеної теореми за умови напівнеперервності або майже напівнеперервності (навіть при невиконанні умови (3.275)) замість узагальнення формул Полячека–Хінчина одержуються інші співвідношення для $\varphi_+(s,iz)$ та $\varphi_+(iz)$ при $m < 0$.

Наслідок 3.12. *Нехай* $\xi(t)$ *напівнеперервний знизу процес з кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a' - \alpha^2\sigma^2/2 + \int_0^\infty \left(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x \mathbb{I}_{|x|\le 1}\right)\Pi(dx). \tag{3.298}$$

Тоді при $\sigma > 0$*:*

$$P_-(s,y) = e^{\rho_-(s)y}, \quad y < 0,$$
$$P'_-(s,0) = \rho_-(s), \quad C_*(s) = \sigma^2\rho_-(s)/2s,$$

а при $\sigma = 0$*:*

$$\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty, \quad a' < 0, \quad C_*(s) = 0;$$

$-\rho_-(s)$ *— корінь рівняння Лундберга* (3.6)*,*

$$K(s,x) = \rho_-(s)\int_{-\infty}^0 \Pi(x-y)e^{\rho_-(s)y}dy \quad (x > 0),$$

$$k(s,iz)=\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)-z}\left[\widetilde{\Pi}(z)-\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))\right].$$

Отже, генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням*

$$\varphi_+(s,iz)=\left[1+s^{-1}z\rho_-(s)\left(\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\widetilde{\Pi}(z)-\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}{\rho_-(s)-z}\right)\right]^{-1}. \quad (3.299)$$

Якщо $m<0$, *тоді*

$$\rho_-(s)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}0,\quad \rho_-'(0)=1/|m|,\quad d\mathbf{E}\tau^-(x)=\frac{dx}{|m|}\quad (x<0),$$
$$C_*(0)=\frac{\sigma^2}{2|m|},\quad zk'(0,iz)=\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(z)+\frac{\sigma^2}{2|m|}\quad (z>0).$$

Після граничного переходу $s\to 0$ *із* (3.299) *випливає співвідношення для генератриси для* ξ^+

$$\varphi_+(iz)=\mathbf{E}e^{-z\xi^+}=\left[1+|m|^{-1}\left(\frac{\sigma^2}{2}z+\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(z)\right)\right]^{-1}. \quad (3.300)$$

Позначимо через

$$k_*^\sigma(z)=-\frac{\sigma^2}{2|m|}z+\frac{1}{|m|}\int_0^\infty\left(e^{-zx}-1\right)\Pi(x)dx$$

кумулянту монотонного процесу $\xi_*^\sigma(t)$ *з* $a_*^\sigma=\sigma^2/(2|m|)$, $\Pi_*^\sigma(dx)=\Pi(x)|m|^{-1}dx$, *тоді формула* (3.300) *набуває вигляду*

$$\varphi_+(iz)=(1-k_*^\sigma(z))^{-1}\ \Rightarrow\ \xi^+\doteq\xi_*^\sigma(\theta_1). \quad (3.301)$$

Аналогічний наслідок встановлюється для майже напівнеперервних знизу процесів.

Наслідок 3.13. *Нехай* $\xi(t)$ *майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою*

$$\psi(\alpha)=i\alpha a+\int_0^\infty\left(e^{i\alpha x}-1\right)\Pi(dx)+\lambda_1 b\int_{-\infty}^0\left(e^{i\alpha x}-1\right)e^{bx}dx,$$
$$a\ge 0,\quad b>0,\quad \int_0^1 x\Pi(dx)<\infty\quad \left(\int_0^1 x\Pi(dx)\le\infty\right). \quad (3.302)$$

Тоді корінь рівняння (3.81) $r_s = -\rho_-(s) < 0$ *визначає розподіл* $\xi^-(\theta_s)$

$$P_-(s,x) = q_-(s)e^{\rho_-(s)x} \quad (x<0)\,, \quad \rho_-(s) = bp_-(s).$$

За наслідком 3.11 (*випадок б*)) $C_*(s) = ap_-(s)/s > 0$ *при* $a > 0$ *і згідно з* (3.186)

$$k(s,iz) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)-z}\Big[\,(b-z)\,\widetilde{\Pi}(z) - bq_-(s)\widetilde{\Pi}\left(\rho_-(s)\right)\Big], \tag{3.303}$$

а генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням*

$$\varphi_+(s,iz) = \left[1 + z\left(ap_-(s)/s + k(s,iz)\right)\right]^{-1}. \tag{3.304}$$

Якщо $m<0$, *тоді* $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $q_-(s)\to 1$, $\rho'_-(0) = |m|^{-1}$,

$$zk'(0,iz) = (b|m|)^{-1}\big[b\widetilde{\Pi}(0) - (b-z)\widetilde{\Pi}(z)\big], \tag{3.305}$$
$$C_*(0) = \frac{a}{b|m|}.$$

Отже, після граничного переходу при $s\to 0$ *із* (3.304) *випливає, що*

$$\varphi_+(iz) = \Big[1 + (b|m|)^{-1}\left(za + b\widetilde{\Pi}(0) - (b-z)\widetilde{\Pi}(z)\right)\Big]^{-1}. \tag{3.306}$$

Якщо позначити $a_* = \frac{a}{b|m|}$,

$$\Pi_*(dx) = \frac{1}{b|m|}\left(\Pi(dx) + b\Pi(x)dx\right), \quad x>0,$$

тоді (3.306) *набуває компактного вигляду*

$$\varphi_+(iz) = \frac{1}{1-k_*(z)},$$
$$k_*(z) = -a_*z + \int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right)\Pi_*(dx). \tag{3.307}$$

Зауважимо, що наслідок 3.13 є більш загальним твердженням, ніж теорема 3.18, оскільки в ній $\lambda = \Pi(0) < \infty$, $a = 0$.

Компактний запис (3.301) і (3.307) для генератриси ξ^+ свідчить про те, що існують монотонно неспадні процеси $\xi_*^\sigma(t)$ та $\xi_*(t)$ з відповідними характеристиками Леві такі, що

$$\xi^+ \doteq \xi_*^\sigma(\theta_1), \quad \xi^+ \doteq \xi_*(\theta_1), \quad \mathbf{P}\{\theta_1 > t\} = e^{-t}, \quad t\ge 0.$$

Якщо для деяких випадків з теореми 3.19 та наслідках 3.12, 3.13 умова (3.275) виконується, тоді з відповідних співвідношень для генератрис $\xi^+(\theta_s)$ та ξ^+ випливають догранична та гранична формула Полячека–Хінчина.

Застосуємо результати теореми 3.17 до напівнеперервного знизу процесу $\xi(t) = \xi_1(t) - Ct$ $(C > 0)$, де $\xi_1(t)$ гамма-процес з додатними стрибками. Монотонно неспадний процес $\xi_1(t)$ називається гамма-процесом, якщо його кумулянта у формі Леві визначається наступним чином

$$k_1(r) = \int_0^\infty \left(e^{-rx} - 1\right) ax^{-1} e^{-bx} dx = -a \ln\left(1 + \frac{r}{b}\right), \quad a, b > 0.$$

Зауважимо, що $m_1 = \mathbf{E}\xi_1(1) = \frac{a}{b} < \infty$, $m = \mathbf{E}\xi(1) = \frac{a}{b} - C$.

Для спрощення викладу твердження, що встановлюється для процесу $\xi(t) = \xi_1(t) - Ct$ на основі теореми 3.17, покладемо $C = b = 1$.

Наслідок 3.14. *Для напівнеперервного знизу гамма-процесу з кумулянтою*

$$k(r) = r + \int_0^\infty \left(e^{-rx} - 1\right) ax^{-1} e^{-x} dx = r - a \ln(1 + r) \tag{3.308}$$

генератриса $\xi^-(\theta_s)$ *визначається коренем рівняння Лундберга* $\rho_-(s)$

$$r - a \ln(1 + r) = s, \tag{3.309}$$

при $m = a - 1 > 0$, $a = e - 1 > 1$ *границя* $\rho_-(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \rho_- = a$ *визначає генератрису* ξ^-, *тобто*

$$\mathbf{E} e^{z\xi^-(\theta_s)} = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + z}, \quad \mathbf{E} e^{z\xi^-} = \frac{\rho_-}{\rho_- + z} \quad \text{при } m > 0. \tag{3.310}$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *та умовна генератриса* $\gamma_+(0)$ *визначається співвідношеннями*

$$\begin{aligned} &\varphi_+(s, iz) = p_+(s)\left[1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(z)\right]^{-1}, \\ &\widetilde{g}_s(z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)} | \xi^+(\theta_s) > 0\right] = \frac{\rho_-(s)\left[\ln(1+z) - \ln(1+\rho_-(s))\right]}{(z - \rho_-(s)) \ln(1 + \rho_-(s))}, \\ &q_+(s) = \frac{a}{\rho_-(s)} \ln(1 + \rho_-(s)). \end{aligned} \tag{3.311}$$

Якщо $m = a-1$ $(a < 1)$, *тоді* $\rho_-(s) \to 0$, $q_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} q_+ = a$, $p_+ = 1-a$, *і з* (3.311) *при* $s \to 0$ *випливає, що*

$$\varphi_+(iz) = \mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \frac{1-a}{1-az^{-1}\ln(1+z)} \qquad (0 < a < 1)\,, \tag{3.312}$$

$$\widetilde{g}_0(z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+ > 0\big] = z^{-1}\ln(1+z).$$

Доведення. В силу напівнеперервності знизу за теоремою 3.2 встановлюється співвідношення (3.310). Для доведення інших співвідношень слід обчислити інтегральне перетворення Лапласа для $\Pi(x) = \int_x^\infty ay^{-1}e^{-y}dy,\ x > 0$. Інтегруванням частинами легко довести, що

$$\widetilde{\Pi}(z) = a\int_0^\infty e^{-zx}\int_x^\infty y^{-1}e^{-y}dy =$$
$$= \frac{a}{z}\int_0^\infty y^{-1}e^{-y}\left(1-e^{-zy}\right)dy = \frac{a}{z}\ln(1+z).$$

Для доведення дограничних співвідношень (3.311) достатньо підставити знайдені значення $\widetilde{\Pi}(z)$ та $\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))$ $\big(\widetilde{\Pi}(z) \underset{z\to 0}{\to} \widetilde{\Pi}(0) = a\big)$ в (3.284) та (3.286). При $m = a-1 < 0$ $(a < 1)$ (зауважимо, що a не слід плутати зі знесенням, яке в нашому випадку є $C = 1$) із (3.288) випливають співвідношення (3.312). □

Приклад 3.13. Нехай $\xi(t) = S(t) - t$ $(C = 1)$ надлишковий процес вимог з кумулянтою $k(r) = \lambda(\mathbf{E}e^{r\xi_1} - 1) - r$ $(m_1 = \lambda\mu_1 - 1 < 0)$, а $\xi_0(t) = S_0(t) - t$ — процес з показниково розподіленими стрибками: $\mathbf{E}e^{-z\xi_1^0} = \frac{a}{a+z}$ та інтенсивністю $\lambda_0 > 0$, $a > 0$.

Вважатимемо, що $\xi_0(t)$ і $\xi(t)$ мають рівні перші два моменти:

$$m_k = \mathbf{E}\xi(1)^k = m_k^0 = \mathbf{E}\xi_0(1)^k, \quad k = 1, 2.$$

Знайти ймовірність банкрутства для $\xi_0(t)$ в термінах моментів $\xi(t)$, яку можна вважати деяким наближенням для ймовірності банкрутства процесу $\xi(t)$ (подібним до наближення Реньї, див. (3.23) в лемі 3.2 з $c = 1$).

З умови $m_k = m_k^0$ $(k = 1, 2)$ випливає, що $k'(0) = k_0'(0)$, $k''(0) = k_0''(0)$, і виконується система двох рівнянь, що визначає параметри λ_0 та a, тобто

$$\begin{cases} \lambda\mu_1 = \lambda_0 a^{-1}, \\ \lambda\mu_2 = \lambda_0\dfrac{2}{a^2}, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \lambda_0 = a\lambda\mu_1, \\ \lambda\mu_2 = 2\lambda\mu_1 a^{-1} \Rightarrow a = \dfrac{2\mu_1}{\mu_2}. \end{cases}$$

Рівняння Лундберга для $\xi_0(t)$ (при $s = 0$)

$$k_0(r) =: \frac{\lambda_0 r}{a - r} - r = 0$$

має корені:

$$r_0 = 0, \quad r_1 = \rho_+^0 = a - \lambda_0, \quad a = \frac{2\mu_1}{\mu_2}.$$

Корінь

$$\rho_+^0 = \frac{2\mu_1}{\mu_2}(1 - \lambda\mu_1) = \frac{2\mu_1|m_1|}{\mu_2}$$

визначає розподіл ξ_0^+, а отже й імовірність банкрутства для $\xi_0(t)$.

Оскільки $c = 1$, $\rho_+^0 = p_+^0 = \mathbf{P}\{\xi_0^+ = 0\}$, то при $u \to \infty$

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \mathbf{P}\{\xi_0^+ > u\} = q_+^0 e^{-u\rho_+^0} = q_+^0 e^{-\frac{2\mu_1|m_1|}{\mu_2}u}, \tag{3.313}$$
$$q_+^0 = 1 - p_+^0, \quad \xi_0^+ = \sup_{0 \le t < \infty} \xi_0(t), \quad \mu_k = \mathbf{E}\xi_1^k, \quad k = 1, 2.$$

Порівнянням формул (3.23) і (3.313) легко помітити їх подібність.

Приклад 3.14. Для процесу $\xi(t)$ із прикладу 3.9 записати $P_2(s, i\alpha)$ в (3.211) у зведеній формі

$$P_2^*(s, -\mu) = \frac{sP_2(s, -\mu)}{a(C + \rho_-(s))p_-(s)} = \mu^2 + C_1(s)\mu + C_0(s),$$
$$C_0 = \frac{s}{ap_-(s)}, \quad C_1(s) = C_0(s) + \frac{2\lambda b q_-(s)}{c + \rho_-(s)}.$$

За 2 ф.т. (за допомогою $P_2^*(s, -\mu)$) обчислити генератрису $\widetilde{T}(s, \mu, u)$ і обернути її по u та μ. Звести генератрису $\xi^+(\theta_s)$ до вигляду

$$\mathbf{E}e^{-\mu\xi^+(\theta_s)} = \frac{s(c + \mu)}{ap_-(s)P_2(s, -\mu)}$$

і також обернути її по μ.

Розділ 4

Граничні задачі для процесів на інтервалі

4.1 Потенціал і резольвента для напівнеперервних процесів

Розглянемо класичну задачу банкрутства (див. [21, § 10, приклад 1]) для простого випадкового блукання ($a > 0$, ціле)

$$S_n^{(a)} = a + S_n, \quad S_n = \sum_{k \le n} \xi_k, \quad S_0 = 0, \quad p(z) = \mathbf{E} z^{\xi_k} = pz + qz^{-1}.$$

$S_0^{(a)} = a$ визначає початковий капітал гравця, ймовірність виграшу якого на кожному кроці гри позначимо $p > 0$. Нехай ціле $b > 0$ — початковий капітал 2-го гравця, ймовірність виграшу якого рівна q

$$p + q = 1, \quad a + b = B \text{ — ціле.}$$

Нехай τ_a^-, τ_b^+ — моменти банкрутства відповідно 1-го або 2-го гравця. $S_n^{(a)}$ описує виграш 1-го гравця на n-му кроці гри. Гра закінчується при першому досягненні рівня B у момент τ_b^+ виграшом 1-го гравця, або при першому досягненні 0 у момент τ_a^- виграшом 2-го гравця. Позначимо

$$p_a = \mathbf{P}\{\tau_a^- < \tau_b^+\}, \quad q_b = \mathbf{P}\{\tau_b^+ < \tau_a^-\}, \quad p_a + q_b = 1,$$

імовірність банкрутства 1-го або 2-го гравця.

Нехай p_n — імовірність банкрутства з капіталом n $(0 < n < B)$. За формулою повної ймовірності встановлюється рекурентне рівняння

$$p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1} \quad (0 < n < B),$$

що зводиться до вигляду

$$q(p_n - p_{n-1}) = p(p_{n+1} - p_n), \quad p_0 = 1, \; p_B = 0 \; (0 < n < B). \tag{4.1}$$

В умовах чесної гри (the fair play) $p = q = \dfrac{1}{2}$

$$p_1 - p_0 = \cdots = p_{n+1} - p_n = c, \quad p_n = p_0 + cn \quad (0 \le n \le B).$$

З початкових умов визначається $c = -B^{-1}$, тому

$$p_n = 1 - \frac{n}{B}, \quad p_a = 1 - \frac{a}{B}, \quad q_b = \frac{a}{B}. \tag{4.2}$$

При $p \ne q$ з (4.1) випливає, що

$$q^n \prod_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1}) = p^n \prod_{k=1}^{n} (p_{k+1} - p_k).$$

З урахуванням умов (4.1) після спрощення одержимо рівняння

$$p_{n+1} - p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - 1),$$

розв'язок якого має вигляд

$$p_n = \left[\left(\frac{p}{q}\right)^B - \left(\frac{q}{p}\right)^n\right] \left[\left(\frac{q}{p}\right)^B - 1\right] \quad (0 \le n \le B);$$

отже шукані ймовірності банкрутства

$$p_a = \left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b\right] \left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^B\right]^{-1},$$

$$q_b = \left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right] \left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^B\right]^{-1}. \tag{4.3}$$

При $p > q$ відносно a згідно (4.3)

$$q_b \approx 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a, \quad p_a \approx \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Це означає, що для вправного гравця ($p > q$) навіть із меншим початковим капіталом шанси на банкрутство менші ніж у другого гравця. Різні граничні задачі для випадкових блукань та процесів з н.п. є узагальненнями розглянутої класичної задачі банкрутства. Такі граничні задачі виникають в теорії СМО, й управління запасами та теорії ризику (див. [1, 34–42, 72–79, 95–100, 104, 105, 120, 122, 124, 125, 129–168, 185–195, 199–213, 218–224]).

Одним з таких узагальнень є задача банкрутства для класичного процесу ризику (див. приклад 1.9 і графіки для $S_n^{(a)}$ та $\xi_u(t)$, що наводяться в кінці монографії, та графік 1)

$$\xi_u(t) = u + Ct - S(t), \quad C > 0, \quad u > 0$$
$$S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k} = \varphi(\alpha), \quad \xi_k > 0, \quad \mathbf{E}\xi_1 = \mu_1.$$

Позначимо момент першого виходу $\xi_u(t)$ з інтервалу $(0, B)$ через

$$\tau_B(u) = \inf\{t > 0 : \xi_u(t)\overline{\in}(0, B)\}, \quad 0 < u < B, \quad v = B - u,$$
$$\tau_B(u) \doteq \begin{cases} \tau_B^+(u), & \omega \in A_+ = \{\tau^+(v) < \tau^-(-u)\}, \\ \tau_B^-(u), & \omega \in A_- = \{\tau^-(-u) < \tau^+(v)\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Згідно з графіком для $\xi_u(t)$ легко вгадати інтерпретацію $\tau^\pm(\cdot)$ (див. (1.34)): $\tau^-(-u)$ інтерпретується як момент 1-го банкрутства, $\tau^+(v)$ інтерпретується як момент, коли приріст преміальної частини капіталу вперше досягає значення $v = B - u$ (весь резервний капітал досягає значення B).

Імовірністю виживання (the survival probability) для процесу $\xi_u(t)$ називається ймовірність

$$\begin{aligned} &\phi(u) = \mathbf{P}\{\xi_u(t) > 0, \forall\, t > 0\}; \\ &\Psi(u) = \overline{\phi}(u) = 1 - \phi(u) = \mathbf{P}\{\xi_u(t) < 0 \text{ при деякому } t > 0\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Остання доповняльна до $\phi(u)$ імовірність називається ймовірністю банкрутства (the ruin probability). Обидві ймовірності в (4.5) виражаються в термінах розподілу абсолютного мінімуму процесу $\xi(t)$:

$\xi^- = \inf_{0 \le t < \infty} \xi(t)$. Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, тоді

$$\overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\xi^- < -u\}, \quad \phi(u) = \mathbf{P}\{\xi^- \ge -u\}. \tag{4.6}$$

Основним об'єктом дослідження для процесу ризику $\xi_u(t)$, крім імовірностей (4.5), є генератриси моментів 1-го виходу з $(0, B)$ $\tau_B(u)$, $\tau_B^{\pm}(u)$ (див. (4.4)).

Крім класичного процесу ризику $\xi_u(t)$ розглядаються модифіковані процеси ризику, що задаються за допомогою затримки та відбиття $\xi_u(t)$ від границі $B > u$. В теорії систем обслуговування подібними процесами описуються процеси чекання та віртуальні процеси чекання. Порівняльні графіки таких процесів у теорії ризику і в теорії систем обслуговування наводяться нижче (див. графіки 2, 5, 6 в кінці монографії).

Розглянемо замість резервного процесу ризику

$$\xi_u(t) = u + Ct - S(t), \quad u > 0,$$

надлишковий процес ризику

$$\zeta(t) = S(t) - Ct, \quad C > 0, \quad S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k,$$

і нагадаємо про деякі його граничні функціонали, які мають свою специфічну інтерпретацію в теорії ризику. В першу чергу, перестрибкові функціонали (зображені на графіку 3) інтерпретуються так:

$\tau^+(u)$ як момент 1-го банкрутства;

γ_u^+ як остання вимога, що появилася в момент банкрутства;

$\gamma_+(u)$ — частина останньої вимоги, яка може бути сплаченою страховою компанією; $\gamma^+(u)$ — неоплачувана частина останньої вимоги. $\gamma_+(u)$ ще інтерпретується як резервний залишок страхової компанії безпосередньо перед банкрутством. Граничний функціонал

$$Q_{(u,+\infty)}(t) = \int_0^t I\{\zeta(s) > u\} ds$$

інтерпретується як віртуальний час перебування за $[0, t]$ в стані банкрутства. Розподіл максимуму $\zeta^+(t)$ (і абсолютного максимуму $\zeta^+ = \lim_{t \to \infty} \zeta^+(t)$)

$\phi_t(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) < u\}$ інтерпретується як імовірність виживання на скінченному інтервалі $[0, t]$,

$\Psi(t,u) = \overline{\phi}_t(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) > u\}$ — як імовірність банкрутства на скінченному інтервалі $[0,t]$,

$\phi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}$ — як тотальна ймовірність виживання на $[0,+\infty)$,

$\Psi(u) = \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}$ — як тотальна ймовірність банкрутства на $[0,+\infty)$.

Для дослідження розподілу граничних функціоналів напівнеперервних процесів В.С. Королюк у монографії [84] розвинув метод потенціалу. (Застосування і подальше розвинення див. у його спільних роботах з М.С. Братійчуком та В.М. Шуренковим [16, 86–90], а також [9–12, 71, 126–128].) Аналіз граничних задач на обмеженому інтервалі для напівнеперервних пуассонівських процесів (і для гратчастих напівнеперервних випадкових блукань) ефективно здійснюється за допомогою використання потенціалу та резольвенти процесу. Щоб дати їх означення розглянемо неперервні знизу процеси. При цьому обмежимось випадком $\int_0^1 x\Pi(dx) < \infty$ і нагадаємо, що у випадку напівнеперервності рівняння Лундберга $(\mathcal{L}_s)$ має єдиний розв'язок $\mp\rho_\mp(s)$ $(\rho_\mp(s) \underset{s\to 0}{\to} \rho_\mp \geq 0)$, що визначає повністю одну з компонент факторизації

$$\varphi_\mp(s,\alpha) = \frac{\rho_\mp(s)}{\rho_\mp(s) \pm i\alpha}, \quad (\rho_\mp > 0 \text{ при } \pm m > 0). \tag{4.7}$$

Згідно з результатами § 3.1 $\mp\rho_\mp(s)$ є оберненими функціями до кумулянти $k(r)$, яка в околі $r = 0$ задовольняє умову випуклості $k''(0) > 0$.

$$k(r) = \psi(\alpha)|_{i\alpha = r} \quad (k(\mp\rho_\pm(s)) = s). \tag{4.8}$$

Вказані корені $\pm\rho_\pm(s)$ рівняння Лундберга $(\mathcal{L}_s)$ використовуються при визначенні потенціалу та резольвенти для напівнеперервних процесів.

Дамо означення потенціалу для неперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \\ + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1 + i\alpha x I\{x \leq 1\})\Pi(dx), \quad \sigma^2 \geq 0, \tag{4.9}$$

Означення 4.1. Потенціал $R(x)$, $x > 0$ неперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (4.9) визначається інтегральним перетворенням

$$\widetilde{R}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} R(x) dx = \frac{1}{\psi(\alpha)}, \quad \operatorname{Im}\alpha > \rho_- = \rho_-(0). \tag{4.10}$$

Наведемо основні властивості $R(x)$ для неперервного знизу процесу, обмежившись випадком, коли $\int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty$.

1. Потенціал $R(x)$ задовольняє однорідне інтегро-диференціальне рівняння при $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^+ R(x) =: aR'(x) - \frac{\sigma^2}{2} R''(x) \\ + \int_0^\infty [R(x-y) - R(x)]\Pi(dy) = 0, \quad R(x) = 0, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

2. Згортка $R(x)$ з функцією $G(x) \in L_1(R^+)$

$$U(x) = \int_0^x R(x-y) G(y) dy, \quad x > 0$$

задовольняє неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^+ U(x) = G(x), \quad x > 0, \\ &U(x) = 0, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння з нульовою умовою при $x < 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^+ U(x) = G(x), \quad x > 0; \\ &G(x) \in L_1(R^+), \quad U(x) = 0, \quad x < 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

має вигляд

$$U(x) = CR(x) + \int_0^\infty R(x-y) G(y) dy \quad (x > 0), \tag{4.14}$$

де C — деяка стала.

Означення 4.2. Нехай $\xi(t)$ — неперервний зверху процес з кумулянтою ($\int_{-1}^0 |x|\Pi(dx) < \infty$)

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx). \tag{4.15}$$

Потенціал $R(x)$, $x > 0$ для $\xi(t)$ визначається інтегральним перетворенням

$$\widetilde{R}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} R(x) dx = \psi^{-1}(-\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha > \rho_+ = \rho_+(0) \quad (4.16)$$

(якщо в (4.15) $\sigma^2 = 0$, тоді $a < 0$).

Потенціал $R(x)$ для неперервного зверху $\xi(t)$ має аналогічні властивості

1. $R(x)$ задовольняє однорідне інтегро-диференціальне рівняння

$$\mathbf{L}^- R(x) =: aR'(x) - \frac{\sigma^2}{2} R''(x) + \\ + \int_{-\infty}^0 [R(x-y) - R(x)]\Pi(dy) = 0, \quad x > 0. \quad (4.17)$$

2. Згортка

$$U(x) = \int_0^x R(x-y)G(y)dy(x > 0), \quad G(x) \in L_1(R^+)$$

задовольняє неоднорідне рівняння

$$\mathbf{L}^- U(x) = G(x), \quad x > 0; \quad U(x) = 0, \quad x < 0. \quad (4.18)$$

3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння з нульовою умовою при $x < 0$

$$\mathbf{L}^- U(x) = G(x), \quad x > 0; \quad (U(x) = 0,\ x < 0). \quad (4.19)$$

має вигляд

$$U(x) = CR(x) + \int_0^x R(x-y)G(y)dy(x > 0), \quad C \text{ — стала.} \quad (4.20)$$

Означення 4.3. Резольвентою напівнеперервного знизу (зверху) процесу називається функція

$$R_s(x) = \sum_{n=0}^\infty s^n R^{(n+1)*}(x), \quad x > 0. \quad (4.21)$$

Наведемо основні властивості резольвенти $R_s(x)$.

1. $R_s(x)$ задовольняє інтегро-диференціальне рівняння, що визначається оператором (4.11) або (4.18),

$$\mathbf{L}^{\pm} R_s(x) - sR_s(x) = 0, \quad x > 0; \quad R_s(x) = 0 \quad \text{при } x < 0. \quad (4.22)$$

2. Згортка, визначена при $x > 0$,

$$U_s(x) = \int_0^x R_s(x-y)G(y)dy, \quad G(x) \in L_1(R^+)$$

задовольняє неоднорідне рівняння

$$(\mathbf{L}^{\pm} - s\mathbf{I})U_s(x) = G(x), \quad x > 0, \quad U_s(x) = 0, \quad x < 0. \quad (4.23)$$

3. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння з нульовою умовою при $x < 0$

$$(\mathbf{L}^{\pm} - s\mathbf{I})U_s(x) = G_s(x), \quad x > 0, \quad U_s(x) = 0, \quad x < 0, \quad (4.24)$$

де $G_s(x) \in L_1(R^+)$, має вигляд

$$U_s(x) = C_s R_s(x) + \int_0^x R_s(x-y)G_s(y)dy, \quad x > 0, \quad (4.25)$$

з сталою C_s відносно x.

4. Інтегральне перетворення резольвенти визначає символ оператора:

$$\mathbf{L}^{\pm} - s\mathbf{I} \Leftrightarrow \psi(\alpha) - s,$$
$$r_s(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} R_s(x)dx = \frac{1}{\psi(\pm\alpha) - s}, \quad \operatorname{Im}\alpha > \rho_{\mp}(s). \quad (4.26)$$

5. а) Для неперервного знизу процесу з кумулянтою (4.9) для резольвенти $R_s(x)$ має місце зображення

$$R_s(x) = s^{-1}\rho_-(s) \int_{-0}^x e^{\rho_-(s)(x-y)} dP_+(s,y), \quad x > 0, \quad (4.27)$$

б) Для неперервного зверху процесу з кумулянтою (4.15) для $R_s(x)$ має місце зображення

$$R_s(x) = s^{-1}\rho_+(s) \int_{-0}^x e^{\rho_+(s)(x-y)} d\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) < y\}, \quad x > 0. \quad (4.28)$$

Доведення властивостей $R_s(x)$ та $R(x)$ можна знайти в [84].

Зауважимо, що згідно з (3.14) лише для напівнеперервних процесів з обмеженою варіацією при $x \to +0$ резольвента має ненульову додатну границю

$$\lim_{x\to+0} R_s(x) = \frac{1}{s}\rho_\pm(s)p_\mp(s) = \frac{1}{|a|} > 0, \quad R(+0) = \frac{1}{|a|}.$$

На основі (4.27) у випадку а) ((4.28) у випадку б)) можна знайти значення потенціалу $R(x)$ за допомогою граничного переходу $s \to 0$.

Щоб знайти значення потенціалу при $m = a + \widetilde{\Pi}(0) = 0$ та $\sigma = 0$ у випадку неперервності знизу процесу $\xi(t)$, нагадаємо, що

$$\Pi(x) = \Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy), \quad x > 0, \quad \widetilde{\Pi}(0) = \int_0^\infty \Pi(x)dx,$$

і позначимо функцію відновлення $\widetilde{H}^0(x)$ для послідовності

$$\{\widetilde{\xi}_k\}_{k\geq 1}, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_k} = \widetilde{\varphi}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}d\widetilde{F}(x),$$

$$\widetilde{H}^0(x) = \sum_{k=0}^\infty \widetilde{F}^{*k}(x), \quad d\widetilde{F}(x) = \widetilde{\Pi}(0)^{-1}\Pi(x)dx, \quad x > 0. \tag{4.29}$$

Крім того, для $\sigma^2 \geq 0$ $(m = 0)$ позначимо через $\xi^0(t)$ монотонно зростаючий процес з кумулянтою

$$\psi^0(\alpha) = i\alpha a^0 + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi^0(dx), \tag{4.30}$$

$$a^0 = \frac{\sigma^2}{\sigma_1\sqrt{2}}, \quad \Pi_0(dx) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\Pi(x)dx, \quad \sigma_1 = D\xi(1), \quad x > 0.$$

Аналогічно у випадку неперервності зверху $\xi(t)$ при $m = 0$, $\sigma = 0$ позначимо

$$\Pi(x) = \Pi_-(x) = \int_{-\infty}^x \Pi(dy), \quad \widetilde{\Pi}(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi(x)dx, \quad x < 0,$$

$$\widetilde{H}_0(x) = \sum_{k=0}^\infty \widetilde{F}_0^{*k}(x), \quad d\widetilde{F}_0(x) = \frac{\Pi(-x)}{\widetilde{\Pi}(0)}dx, \quad x > 0. \tag{4.31}$$

Для $\sigma^2 \geq 0$ при $m = 0$ позначимо через $\xi_0(t)$ монотонно спадний процес з кумулянтою

$$\psi_0(\alpha) = i\alpha a_0 + \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi_0(dx), \tag{4.32}$$

$$\Pi_0(dx) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\Pi(x)dx, \quad a_0 = -\frac{\sigma^2}{\sigma_1\sqrt{2}} \quad (\xi_0(t) \searrow \text{ при } t \nearrow \infty)$$

Теорема 4.1. *а) Для неперервних знизу процесів з кумулянтою* (4.9) *потенціал визначається троїстим співвідношенням* $(x > 0)$

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) =$$

$$= \begin{cases} |m|^{-1}\mathbf{P}\{\xi^+ < x\}, \quad m < 0, \\ \rho_- e^{\rho_- x}\displaystyle\int_0^\infty \mathbf{E}[e^{-\rho_-\xi^+(t)}, \quad \xi^+(t) < x]dt, \quad m > 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\displaystyle\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^0(t) < x\}dt = \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\mathbf{E}\tau^0(x), \quad m = 0, \end{cases} \tag{4.33}$$

($\xi^0(t)$ *див.* (4.30) *при* $m = 0$). *При цьому для* $m < 0$ *згідно* (3.53) $\xi^+ \doteq \xi^*(\theta_1)$, *де* $\xi^*(t)$ *монотонно зростаючий процес з кумулянтою*

$$\psi^*(\alpha) = i\alpha a^* + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi^*(dx), \tag{4.34}$$

$$a^* = \frac{\sigma^2}{2|m|}, \quad \Pi^*(dx) = \frac{\Pi(x)}{|m|}dx.$$

Для $m > 0$ *другий рядок в* (4.33) *виражається також через* $\mathbf{E}\tau^+(x)$*:*

$$\int_0^\infty \mathbf{E}[e^{-\rho_-\xi^+(t)}, \xi^+(t) < x]dt = \int_0^x e^{-\rho_- y} d\mathbf{E}\tau^+(y). \tag{4.35}$$

Для $m = \sigma^2 = 0$ $R(x)$ *можна виразити також через* $\widetilde{H}^0(x)$

$$R(x) = \widetilde{\Pi}(0)^{-1}\widetilde{H}^0(x), \quad x > 0. \tag{4.36}$$

б) Для неперервних зверху процесів з кумулянтою (4.15) *потенціал* $R(x)$ *має троїсте зображення*

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) =$$

$$
= \begin{cases} m^{-1}\mathbf{P}\{-\xi^- < x\}, \quad m > 0, \\ \rho_+ e^{\rho_+ x} \displaystyle\int_0^x e^{-\rho_+ y} d\mathbf{E}\tau^-(-y), \quad m < 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma_1} \displaystyle\int_0^\infty \mathbf{P}\{-\xi_0(t) < x\} dt = \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma_1} \mathbf{E}\tau_0(-x), \quad m = 0, \end{cases} \tag{4.37}
$$

($\xi_0(t)$ *див.* (4.32) *при* $m = 0$). *При* $m > 0$ *згідно з* (3.48) $\xi^- \doteq \xi_*(\theta_1)$, *де* $\xi_*(t)$ *монотонний спадний процес з кумулянтою* $\psi_*(\alpha)$, *що визначається через* $a_* = -\frac{\sigma^2}{2m}$, $\Pi_*(dx) = \frac{\Pi(x)dx}{m}$,

$$
\psi_*(\alpha) = i\alpha a_* + \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi_*(dx). \tag{4.38}
$$

При $m < 0$

$$
\int_0^\infty \mathbf{E}[e^{\rho_+ \xi^-(t)}, -\xi^-(t) < x] dt = \int_0^x e^{\rho_+ y} d\mathbf{E}\tau^-(-y), \tag{4.39}
$$

а при $m = 0$, $\sigma = 0$ $R(x)$ *можна виразити в термінах* $\widetilde{H}_0(x)$

$$
R(x) = \widetilde{\Pi}(0)^{-1} \widetilde{H}_0(x), \quad x > 0. \tag{4.40}
$$

Доведення. У випадку *а*) для $m = 0$ $\rho_-(s) \to 0$, $\rho'_-(0) = |m|^{-1}$, $|m| = |a| - \widetilde{\Pi}(0)$, тому з (4.27) при $s \to 0$ випливає перший рядок в (4.33). За теоремою 3.3 існує монотонно неспадний процес $\xi^*(t)$ з кумулянтою (4.31), що визначає $\xi^+ \doteq \xi^*(\theta_1)$, а при $\sigma = 0$

$$
\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{1}{1 - \psi_*(\alpha)} = \frac{|m|}{|a| - \int_0^\infty e^{i\alpha x} \Pi(x) dx}. \tag{4.41}
$$

Враховуючи, що $\int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi(x)dx = \widetilde{\Pi}(0)\widetilde{\varphi}(\alpha)$ $(m < 0,\ a < 0)$,

$$
p_+ = ma^{-1} = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\}, \quad \widetilde{\varphi}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} \overline{F}(x) dx,
$$

з (4.41) випливає формула Полячека–Хінчина

$$
\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}. \tag{4.42}
$$

Це означає, що

$$\xi^+ \doteq \sum_{k\le\widetilde{\nu}(q_+)} \widetilde{\xi}_k, \quad \mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(q_+)=k\} = p_+q_+^k \quad (k\ge 0).$$

При $m>0$ $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_- > 0$, тому з (4.27) при $s\to 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} R(x) &= \lim_{s\to 0}\rho_-(s)\int_{-0}^{x} e^{\rho_-(s)(x-y)}d_y\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi^+(t)<y\}dt \\ &= \lim_{s\to 0}\rho_-(s)\int_{-0}^{x} e^{\rho_-(s)(x-y)}d_y\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau^+(y)>t\}dt. \end{aligned}$$

З першого рядка випливає середній рядок (4.33), а з другого — (4.35).

Оскільки для неперервних знизу процесів (див. наслідок 3.3)

$$\begin{aligned} C_*(s) &= \frac{\sigma^2}{2s}\rho_-(s), \\ k(s,\alpha) &= \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\int_0^\infty (e^{i\alpha x}-e^{-\rho_-(s)})\Pi(x)dx \end{aligned}$$

і при $m=0$ $\rho_-(s)\approx \dfrac{\sqrt{2s}}{\sigma_1}$, $C_*(s)\approx \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2s}\sigma_1}$, тому згідно (3.75) має місце асимптотичне співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_+(s,\alpha) \approx \left[-i\alpha\frac{\sigma^2}{\sigma_1\sqrt{2}} - \frac{\rho_-(s)}{s}\int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(x)dx\right]^{-1}.$$

Це означає, що згідно з позначеннями в (4.30)

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0}\frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_+(s,\alpha) = \frac{1}{-\psi^0(\alpha)}, \\ &\psi^0(\alpha) = -i\alpha a^0 - \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi^0(dx), \end{aligned} \tag{4.43}$$

$\psi^0(\alpha)$ — кумулянта монотонно зростаючого процесу $\xi^0(t)$, для якого

$$\varphi^0(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^0(\theta_s)} = \frac{s}{s-\psi^0(\alpha)} \quad (s>0)$$

визначає щільність розподілу

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}_0\{\xi^0(\theta_s)<x\} = s\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi^0(t)<x\}dt$$

відповідно

$$\frac{\varphi^0(s,\alpha)}{s} = \frac{1}{s-\psi^0(\alpha)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{-\psi^0(\alpha)}.$$

Крайні члени останнього співвідношення визначають проінтегровані щільності

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\xi^0(t)<x\}dt \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^0(t)<x\}dt\right)'_x.$$

Отже, на підставі (4.43) після граничного переходу ($s\to 0$) доводиться справедливість останнього рядка в (4.33), оскільки

$$\lim_{s\to 0}\frac{\rho_-(s)}{\sqrt{s}}\int_{-0}^x e^{\rho_-(s)(x-y)}\frac{1}{\sqrt{s}}d\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)<y\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_0^x d_y\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^0(t)<y\}dt = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^0(t)<x\}dt.$$

Якщо при $m=0$ $\sigma^2=0$, тоді $\xi^0(t)$ немає знесення і $\psi^0(\alpha)$ можна переписати так

$$\psi^0(\alpha) = \sqrt{2}\sigma_1^{-1}\widetilde{\Pi}(0)\int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)d\widetilde{F}(x).$$

Отже

$$\frac{1}{-\psi^0(\alpha)} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}\widetilde{\Pi}(0)(1-\widetilde{\varphi}(\alpha))}, \quad \frac{\rho_-(s)}{\sqrt{s}} \underset{s\to 0}{\to} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}.$$

Після обернення відносно α одержимо щільність функції відновлення

$$\frac{1}{-\psi^0(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{H}^0(x),$$

тому після граничного переходу в (4.25) знаходимо, що

$$\lim_{s\to 0}R_s(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_{-0}^x \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}\widetilde{\Pi}(0)}d\widetilde{H}^0(y) = \widetilde{\Pi}(0)^{-1}\widetilde{H}^0(x),$$

тобто (4.36) доведено.

Друга частина *б*) теореми доводиться аналогічно, якщо врахувати, що процес $\eta(t) = -\xi(t)$ напівнеперервний знизу і $\xi^-(t) = -\eta^+(t)$. Порівнюючи поведінку $R(x)$ при $x \to \infty$ для різнознакових значень m, можна зробити такі висновки для випадку *а*).

При $m < 0$ потенціал $R(x) \le |m|^{-1}$ — обмежений. При $m > 0$

$$R(x) \le \rho_- e^{\rho_- x} \int_0^\infty \mathbf{E} e^{-\rho_- \xi^+(t)} dt,$$

отже $R(x)$ при $x \to \infty$ показниково зростає. При $m = 0$ і $\sigma^2 = 0$ згідно з (4.36) за теоремою відновлення $R(x)$ лінійно зростає при $x \to \infty$. □

Приклад 4.1. Нехай $\xi(t) = at + \sigma w(t)$ (див. приклад 2.2 з $\sigma = 1$). Знайти розподіл $\xi^\pm(\theta_s)$ та резольвенту $R_s(x)$. За теоремою 4.1 *а*) знайти при $a = 0$ $\psi^0(\alpha)$ — кумулянту процесу $\xi^0(t)$, що визначає потенціал $R(x)$, *б*) кумулянту $\psi^*(t)$ процесу $\xi^*(t)$, що визначає розподіл ξ^+.

Як і в прикладі 2.2 з рівняння Лундберга $(\mathcal{L}_s)$ знаходимо корені $\rho_\pm(s) = (\sqrt{2s\sigma^2 + a^2} \mp a)(\sigma)^{-2}$, які визначають розподіли $\xi^\pm(\theta_s)$

$$\overline{P}_+(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0, \quad P_-(s,x) = e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0.$$

Отже при $x > 0$

$$R_s(x) = \rho_+(s)\rho_-(s)s^{-1} \int_0^x e^{\rho_-(s)(x-y) - \rho_+(s)y} dy =$$
$$= \frac{2}{\sigma^2(\rho_+(s) + \rho_-(s))}(e^{\rho_-(s)x} - e^{\rho_+(s)x}).$$

Залежно від знаку $m = a$ при $s \to 0$ одержимо

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{|a|}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{2|a|x}{\sigma^2}\right\}\right), & a < 0, \\ \dfrac{\sigma^2}{a}\left(\exp\left\{\dfrac{2ax}{\sigma^2}\right\} - 1\right), & a > 0, \\ 2\sigma^{-2}x, & a = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

При $a = 0$ $\psi^0(\alpha) = a^0 i\alpha$, $a^0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Отже $\xi^0(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}t$ $(\sigma_1 = \sigma)$.

Згідно з (4.33) при $m = 0$

$$R(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^\infty I\left\{t < \frac{\sqrt{2}}{\sigma} x\right\} dt = \frac{2}{\sigma^2} x, \quad a = 0, \quad x > 0.$$

При $a < 0$ $\psi^*(\alpha) = i\alpha a^*$, $a^* = \dfrac{\sigma^2}{2|a|} = \rho_+^{-1}$. Згідно з теоремою 3.3

$$\xi^+ \doteq \xi^*(\theta_1) = \rho_+^{-1} \theta_1 \doteq \theta_{\rho_+}.$$

Отже ξ^+ — показниково розподілена з параметром ρ_+.

Приклад 4.2. Нехай $\xi(t) = w(t) + S(t) - t$ — процес із прикладу 3.3. Читачеві пропонується на основі співвідношення (3.61) знайти $R_s(x)$ та $R(x)$.

Далі покажемо, як у термінах введених функцій $R(x)$ та $R_s(x)$ визначаються розподіли функціоналів блукання на обмеженому інтервалі, яке описується класичним процесом ризику. Повернемось до випадкового блукання на інтервалі $[0, B]$, що описується процесом $\xi_u(t)$ з відповідними позначеннями функціоналів. Введемо узгоджені з [84] позначення для генератрис $Q_B^{\pm}(s, u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau_B^{\pm}(u)}, A_{\pm}]$

$$\begin{aligned}
&Q_B(s,u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau_B^-(u)}, A_-], \quad A_- = \{\omega : \tau^-(-u) < \tau^+(v)\},\\
&Q^B(s,u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau_B^+(v)}, A_+], \quad A_+ = \{\omega : \tau^+(v) < \tau^-(-u)\},\\
&Q(B,s,u) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B(u)} = Q_B(s,u) + Q^B(s,u), \qquad (4.45)\\
&Q^B(u) = \mathbf{P}\{\tau^+(v) < \tau^-(-u)\}, \quad Q_B(u) = 1 - Q^B(u).
\end{aligned}$$

Теорема 4.2 ([84])**.** *Для неперервного зверху процесу генератриса в* (4.45) *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&Q^B(s,u) = R_s(u) R_s^{-1}(B), \quad 0 \le u \le B,\\
&Q_B(s,u) = 1 - Q^B(s,u) - s\left[\frac{R_s(u)}{R_s(B)} \int_0^B R_s(y)dy - \int_0^u R_s(y)dy\right],\\
&Q(B,s,u) = 1 - s\left[\frac{R_s(u)}{R_s(B)} \int_0^B R_s(y)dy - \int_0^u R_s(y)dy\right]. \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Відповідно при $s \to 0$ знаходимо ймовірності банкрутства

$$Q^B(u) = \mathbf{P}\{\xi_u(\tau_B(u)) \geq B\} = \frac{R(u)}{R(B)},$$

$$Q_B(u) = 1 - \mathbf{P}\{\xi_u(\tau_B(u)) < 0\} = 1 - \frac{R(u)}{R(B)} \quad (0 < u < B),$$

$$\mathbf{E}\tau_B(u) = \frac{R(u)}{R(B)} \int_0^B R(y)dy - \int_0^u R(y)dy. \tag{4.47}$$

Доведення. Всі три генератриси в (4.45) задовольняють рівняння (4.21) з відповідними граничними умовами. Зокрема $Q^B(s,u)$ задовольняє (4.21) з нульовою правою частиною і відповідними умовами

$$(\mathbf{L}^- - s\mathbf{I})Q^B(s,u) = 0, \quad u > 0,$$
$$Q^B(s,B) = 1, \quad Q^B(s,u) = 0, \quad 0 < u \leq B. \tag{4.48}$$

Тоді згідно з (4.25) та (4.48) розв'язок рівняння (4.21) має вигляд

$$Q^B(s,u) = C_s R_s(u), \quad C_s R_s(B) = 1, \quad C_s = R_s^{-1}(B),$$

і 1-а формула в (4.46) доведена.

Для генератриси $Q_B(s,u)$ виконується однорідне рівняння і відповідні умови ($L^{\pm}$ див. (4.41), (4.17))

$$(\mathbf{L}^- - s\mathbf{I})Q^B(s,u) = 0, \quad 0 < u < B,$$
$$Q_B(s,B) = 0, \quad Q_B(s,u) = 1, \quad u < 0. \tag{4.49}$$

Щоб одержати нульову умову при $u < 0$ введемо функцію

$$\widetilde{Q}_B(s,u) = 1 - Q_B(s,u), \tag{4.50}$$

для якої одержимо неоднорідне рівняння

$$(\mathbf{L}^- - s\mathbf{I})\widetilde{Q}_B(s,u) = -s, \quad u > 0,$$
$$\widetilde{Q}_B(s,u) = 0, \quad u < 0; \quad \widetilde{Q}_B(s,B) = 1. \tag{4.51}$$

Згідно з властивістю (4.25) рівняння (4.51) має розв'язок

$$\widetilde{Q}_B(s,u) = C_s R_s(u) - s\int_0^u R_s(y)dy, \quad 0 < u < B. \tag{4.52}$$

За другою умовою в (4.51) визначається

$$C_s = \left(1 + s\int_0^B R_s(y)dy\right) R_s^{-1}(B).$$

Після підстановки C_s в (4.52) одержимо співвідношення $\widetilde{Q}_B$, з якого після повернення до $Q_B(s,u)$ випливає друга формула в (4.46). Із (4.46) при $s \to 0$ випливає (4.47). □

Зауважимо, що згідно з (4.28) проінтегровані резольвенти набувають вигляду

$$\begin{aligned}
I_u(s) &=: s\int_0^u R_s(y)dy = \\
&= \int_0^u \rho(s)\int_{-0}^y e^{\rho(s)(y-z)} d\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) < z\}dy = \\
&= \rho_+(s)\int_{-0}^u d\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) < z\}\int_z^u e^{\rho_+(s)(y-z)}dy = \\
&= s\rho_+^{-1}(s)R_s(u) - \mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) \in [0,u]\}. \\
I_B(s) &= s\rho_+^{-1}(s)R_s(B) - \mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) \in [0,B]\}.
\end{aligned}$$

З теорем 4.1 та 4.2 на основі останніх співвідношень доводиться

Наслідок 4.1. *Для напівнеперервного зверху процесу ризику $\xi_u(t)$ генератриси моментів виходу з інтервалу розподіл $\xi^-(\theta_s)$ виражаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \ge -u\} = sR_s(u)\rho^{-1}(s) - s\int_0^u R_s(y)dy, \quad u \ge 0, \\
&Q_B(s,u) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -u\} - Q^B(s,u)\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -B\}, \qquad (4.53) \\
&Q(B,s,u) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -u\} + Q^B(s,u)\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \in [-B,0]\}, \\
&P(B,s,u) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \ge -u\} - Q^B(s,u)\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \in [-B,0]\}.
\end{aligned}$$

Після обернення середніх двох співвідношень в (4.53) встановлюється, що

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\tau_B^-(u) < t\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\{\xi^-(t) < -u\} - \int_0^t \mathbf{P}\{\xi^-(t-y) < -B\}d\mathbf{P}\{\tau_B^+(u) < y\},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\{\tau_B(u) < t\} = \tag{4.54}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi^-(t) < -u\} + \int_0^t \mathbf{P}\{\xi^-(t-y) \geq B\} d\mathbf{P}\{\tau_B^+(u) < y\}.$$

Імовірність банкрутства визначається троїстим співвідношенням (*відповідно при* $m > 0$*,* $m = 0$*,* $m < 0$)

$$Q^B(u) = \begin{cases} \mathbf{P}\{-\xi^- < u\}[\mathbf{P}\{-\xi^- < B\}]^{-1}, \quad 0 < u \leq B, \quad m > 0, \\ \widetilde{H}_0(u)\widetilde{H}_0^{-1}(B), \ m = 0 \ (\widetilde{H}_0(u) \ \textit{див.} \ (4.31)), \\ e^{\rho_+(u-B)}\int_0^u e^{-\rho_+ y} d\mathbf{E}\tau^-(-y)\Big[\int_0^B e^{-\rho_+ y} d\mathbf{E}\tau^-(-y)\Big]^{-1}. \end{cases} \tag{4.55}$$

Доведення. Перша формула в (4.53) випливає із співвідношення для $I_u(s)$ і дає одне з важливих зображень розподілу $\xi^-(\theta_s)$ в термінах $R_s(x)$, яке узгоджується з теоремою 1 в § 2.2 [84]. Після підстановки значень $I_u(s)$ та $I_B(s)$ в (4.46) одержуються останні три співвідношення в (4.53), які є зручнішими за (4.46), (4.47); з них легко одержати співвідношення зв'язку між розподілами $\tau_B^{\pm}(u)$ та $\xi^-(t)$. Співвідношення (4.55) випливає з (4.37) та (4.46) при $s \to 0$. Зауважимо, що перша формула в (4.53) узгоджується з теоремою 2.1 (див. [86, с. 136]). □

4.2 Факторизаційні тотожності, пов'язані з розподілом процесу до виходу з інтервалу

Нехай $\xi(t)$ — однорідний процес з кумулянтою $\psi(\alpha)$ та х.ф.

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)}, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - \psi(\alpha)}.$$

Позначимо $[x-T, x]$ — інтервал довжини $T > 0$, $0 < x < T$. Момент 1-го виходу $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) з інтервалу позначимо

$$\tau(x, T) = \inf\{t > 0; \xi(t) \overline{\in} (x - T, x)\}.$$

Для зручності введемо позначення

$$A_\pm = \{\omega : \pm\tau^+(x) < \pm\tau^-(x - T)\},$$

тоді

$$\tau(x,T) \doteq \begin{cases} \tau^+(x) = \tau^+(x,T), & \text{якщо } \omega \in A_+, \\ \tau^-(x) = \tau^-(x,T), & \text{якщо } \omega \in A_-. \end{cases}$$

Позначимо х.ф. процесу до моменту 1-го виходу з інтервалу

$$V_t(\alpha,x) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(t)}, \tau(x,T) > t], \tag{4.56}$$

$$V(s,\alpha,x) = s\int_0^\infty e^{-st} V_t(\alpha,x,dt) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \tau(x,T) > \theta_s].$$

Для функцій, заданих на обмеженому інтервалі I

$$\mathcal{L}(I) = \{G(x) : \int_I |G(x)|dx < \infty\}$$

позначимо клас інтегральних перетворень

$$\mathcal{R}(I) = \left\{ g(\alpha) : \int_I e^{i\alpha x} G(x)dx \right\},$$

$$\mathcal{R}^0(I) = \left\{ C + \int_I e^{i\alpha x} G(x)dx \right\}.$$

Якщо $\mathcal{R}(R)$ — клас інтегральних перетворень

$$\mathcal{R}(R) = \left\{ f(\alpha) : \int_R e^{i\alpha x} f(x)dx, \int_R |F(x)|dx < \infty \right\},$$

$$\mathcal{R}^0(R) = \{C + f(\alpha)\},$$

тоді проекційні оператори $[\ ]_I$ та $[\ ]_I^0$ визначаються так

$$[C + f(\alpha)]_I = \int_I e^{i\alpha x} F(x)dx,$$

$$[C + f(\alpha)]_I^0 = C + \int_I e^{i\alpha x} F(x)dx.$$

Очевидно, що $V(s,\alpha,x) \in \mathcal{R}(I)$, $I = [x-T, x]$, $0 < x < T$.

Спільну х.ф. для розподілу пари $\{\xi(\tau^\pm(x,T)), \tau^\pm(x,T)\}$ позначимо

$$V_\pm(s,\alpha,x) = V_\pm(s,\alpha,x,T) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\tau^\pm(x,T) - s\tau^\pm(x,T))}, A_\pm], \tag{4.57}$$

$$V_+(s,x,\alpha) \in \mathcal{R}([x,\infty)), V_-(s,x,\alpha) \in \mathcal{R}((-\infty, x-T)).$$

Зв'язок між х.ф. (4.56) та (4.57) виражається за допомогою проекційних тотожностей Е.А. Печерського [103] в термінах $\varphi(s,\alpha)$ та $\varphi_\pm(s,\alpha)$.

Теорема 4.3. *Якщо* $\xi(t)$ *— довільний однорідний процес з н.п.* ($\xi(0)=0$)*, тоді*

$$V(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)[1 - V_+(s,\alpha,x) - V_-(s,\alpha,x)]. \tag{4.58}$$

При $s > 0$ *мають місце проекційні тотожності зв'язку між* $V_\pm$ *та* V

$$\begin{aligned} &V_+(s,\alpha,x) = \\ &\quad = \varphi_+^{-1}(s,\alpha)[\varphi_+(s,\alpha)[1 - V_-(s,\alpha,x)]]_{[x,\infty)}, \quad \operatorname{Im}\alpha \geq 0 \qquad (4.59)\\ &V(s,\alpha,x) = \\ &\quad = \varphi_-(s,\alpha)[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x))]_{(-\infty,x]}, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0. \quad (4.60)\end{aligned}$$

Справедливі також аналогічні тотожності

$$\begin{aligned} &V_-(s,\alpha,x) = \qquad (4.61)\\ &\quad = \varphi_-^{-1}(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x))]_{(-\infty,x-T]}, \quad \operatorname{Im}\alpha \leq 0,\\ &V(s,\alpha,x) = \qquad (4.62)\\ &\quad = \varphi_+(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x))]_{[x-T,\infty)}, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0.\end{aligned}$$

Доведення. Обмежимося випадком, коли $\xi(t)$ — східчастий процес, для якого легко довести, що

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(t)}, \tau(x,T) > t] = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} - I_+(t) - I_-(t)\\ &I_\pm(t) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(t)}, \tau^\pm(x,T) < t, A_\pm].\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень встановлюється, що

$$\begin{aligned} I_+(t) &= \int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha[\xi(t)-\xi(\tau^+(x,T))]+i\alpha\xi(\tau^+(x,T))}, \tau^+(x,T) \in du, A_+]\\ &= \int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha(\xi(t)-\xi(u))+i\alpha\xi(u)}, \tau_+(x,T) \in du]\\ &= \int_0^t e^{(t-u)\psi(\alpha)}\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(u)}, \tau^+(x,T) \in du].\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що

$$I_-(t) = \int_0^t e^{(t-u)\psi(\alpha)}\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(u)}, \tau^-(x,T) \in du].$$

Після інтегрального перетворення Лапласа–Карсона, знаходимо, що

$$\widetilde{I}_\pm(s) = \varphi(s,\alpha)V_\pm(s,\alpha,x),$$
$$V(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha) - \widetilde{I}_1(s) - \widetilde{I}_2(s),$$

і, таким чином, (4.58) доведено.

Оскільки $V = \varphi(s,\alpha)(1 - V_-) - \varphi(s,\alpha)V_+$, то після підстановки о.ф.т. в (4.58) неважко одержати співвідношення

$$\begin{aligned}&\varphi(s,\alpha)V_+(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x)) - V(s,\alpha,x),\\ &\varphi_+(s,\alpha)V_+(s,\alpha,x) =\\ &\quad = \varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x)) - \varphi_-^{-1}V(s,\alpha,x).\end{aligned} \tag{4.63}$$

За лемою Вінера $\varphi_\pm^{\pm 1}(s,\alpha) \in \mathcal{R}_\pm^0$, тому з умови, що

$$\varphi_-^{-1}(s,\alpha)V \in \mathcal{R}([-\infty,x]), V \in \mathcal{R}([x-T,x])$$

випливає, що $[\varphi_-^{-1}(s,\alpha)V]_{[x,\infty]} \equiv 0$. Після застосування операції $[\ ]_{[x,\infty)}$ до другої формули в (4.63) одержимо співвідношення

$$\varphi_+(s,\alpha)V_+(s,\alpha,x) = [\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x))]_{[x,\infty)},$$

з якого випливає (4.59). З 1-ої формули в (4.63) випливає, що

$$\begin{aligned}&V(s,\alpha,x)\varphi_-^{-1}(s,\alpha) =\\ &\quad = \varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x)) - \varphi_+(s,\alpha)V_+(s,\alpha,x).\end{aligned} \tag{4.64}$$

Оскільки

$$V\varphi_-^{-1} \in \mathcal{R}((-\infty,x]), \quad \varphi_+V_+ \in \mathcal{R}([x,\infty)),$$

то після проектування з (4.64) випливає, що

$$V(s,\alpha,x)\varphi_-^{-1}(s,\alpha) = [\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x))]_{(-\infty,x]}$$

і, таким чином, (4.60) доведено. Тотожності (4.61) та (4.62) аналогічно виводяться із співвідношення

$$\varphi(s,\alpha)V_-(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha)) - V(s,\alpha,x).$$

Останні тотожності доведені в [52]. □

Для напівнеперервних зверху (знизу) процесів $\xi(t)$

$$\xi(\tau^+(x,T)) = x \quad (\xi(\tau^-(x,T)) = x - T), \quad 0 < x < T,$$

тоді згідно з 1-ою формулою в (4.46) (див. позначення (4.45))

$$V_+(s,\alpha,x,T) = e^{i\alpha x}Q^T(s,x), \quad Q^T(s,x) = \frac{R_s(T-x)}{R_s(T)}, \tag{4.65}$$

$$(V_-(s,\alpha,x,T) = e^{i\alpha(x-T)}Q_T(s,x), \quad Q_T(s,x) = \frac{R_s(x)}{R_s(T)}).$$

Розподіл процесу ризику до момента 1-го виходу з інтервалу $[0,B]$ визначається у наступному твердженні.

Теорема 4.4. *Для довільного напівнеперервного зверху процесу* $\xi(t)$ (*навіть тоді, коли* $\xi(t)$ *має складову* $\sigma w(t)$, $\sigma > 0$) *мають місце співвідношення* $(-u < x < v = B - u)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)}, \tau_B(u) > \theta_s] = \\
&\quad = \frac{\rho(s)e^{i\alpha u}}{\rho(s) - i\alpha}[\varphi_-(s,\alpha)(1 - Q^B(s,u)e^{i\alpha v})]_{[-u,v]}, \\
&\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi_u(\theta_s) < x, \tau_B(u) > \theta_s\} = \\
&\quad = sQ^B(s,u)R_s(B-x) - sR_s(u-x)\delta(u > x).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Доведення. В силу (4.65) при переході від $\xi(t)$, до $\xi_u(t)$ замінимо $T = B$, $x = B - u$. Тоді одержимо співвідношення

$$V(s,\alpha,B-u,B) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \tau_B(u) > \theta_s] = e^{i\alpha v}\frac{R_s(u)}{R_s(B)},$$

після підстановки якого в (4.62) знаходимо, що

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(\theta_B(u))}, \tau_B(u) > \theta_s] = \\
&\quad = \frac{\rho(s)}{\rho(s) - i\alpha}[\varphi_-(s,\alpha)(1 - Q^B(s,u)e^{i\alpha v})]_{[-u,\infty)}.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що ліва частина останньої формули належить до $\mathcal{R}([-u,v])$, з неї одержимо 1-у формулу в (4.66). Знайдемо обернення 1-го доданку $\dfrac{e^{i\alpha u}\rho(s)}{\rho(s) - i\alpha}\varphi_-(s,\alpha)$, яке запишеться таким чином

$$I_1(u,x) = \rho(s)\int_{-u}^{\min(0,x)} e^{-\rho(s)(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < y\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\max[0,-x]}^{u} p_+(s,x+y)d\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) < y\} = \\
&= se^{-\rho(s)(x+u)}R_s(u) - sR_s(-x)\delta(x<0), \\
&\left(p_+(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\} = \rho(s)e^{-\rho(s)y}, \ \ y \geq 0\right).
\end{aligned}
$$

Обернення 2-го доданку (без множника $-Q^B(s,u)$) має вигляд

$$
I_2(u,x) = \int_{-u}^{x} p_+(s,x-y)d\mathbf{P}\{\eta_s < y\}, \quad \eta_s = \xi^-(\theta_s) + v.
$$

Після нескладних перетворень знаходимо, що ($\int_{v-x}^{B} = \int_0^B - \int_0^{v-x}$).

$$
\begin{aligned}
I_2(u,x) &= \int_{-u}^{x} \rho(s)e^{-\rho(s)(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < y - v\} = \\
&= \rho(s)\int_{v-x}^{B} e^{\rho(s)(v-x-z)}d\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) < z\} = \\
&= se^{-\rho(s)(u+x)}R_s(B) - sR_s(v-x).
\end{aligned}
$$

Склавши одержані доданки ($x < 0$)

$$
I_1(u,x) - Q^B(s,u)I_2(u,x) = sQ^B(s,u)R_s(v-x) - sR_s(-x)
$$

переконуємось у справедливості 2-ої формули в (4.66). □

Слід зауважити, що формули (4.53), (4.54) для неперервних зверху $\xi(t)$ зручніші за відповідні формули в (4.46) в термінах $R_s(x)$, оскільки в них виражено взаємозв'язок між $\tau_B(u)$, $\tau_B^{\pm}(u)$ і розподілом $\xi^-(\theta_s)$. З формул (4.53) випливає наслідок.

Наслідок 4.2. *Для напівнеперервних зверху процесів з обмеженою варіацією і $a > 0$ генератриси $\tau_B(0)$, $\tau_B^{\pm}(0)$ визначаються співвідношеннями*

$$
\begin{aligned}
&Q(B,s,0) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B(0)} = 1 - P(B,s,0) = \\
&\quad = q_-(s) + \frac{1}{aR_s(B)}\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \in [-B,0]\}, \\
&P(B,s,0) = \mathbf{P}\{\tau_B(0) > \theta_s\},
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q^B(s,0) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B^+(0)} = \frac{1}{aR_s(B)},\\
&Q_B(s,0) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B^-(0)} = q_-(s) - \frac{1}{aR_s(B)}\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -B\}.
\end{aligned}
$$

Доведення. Для напівнеперервних (зверху або знизу) процесів з обмеженою варіацією $R_s(0) = R(0) = \frac{1}{|a|} > 0$. Тому при переході до границі ($u \to 0$) в (4.53), одержимо (4.67), оскільки $a > 0$,

$$
Q^B(s,u) = \frac{R_s(u)}{R_s(B)} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{aR_s(B)}.
$$

Якщо для процесу броунівського руху (див. приклад 4.1) позначити

$$
\xi_u(t) = u + at + \sigma w(t) \quad (\sigma > 0,\ 0 < u < B),
$$

тоді потенціал залежно від знаку a визначається троїстим співвідношенням (4.44). Відповідні ймовірності банкрутства виражаються згідно (4.47) через $\rho_\pm = \frac{2|a|}{\sigma^2}$ ($\pm a < 0$) відношенням потенціалів

$$
Q^B(u) = \frac{R(u)}{R(B)} = \begin{cases} (1-e^{-\rho_+ u})(1-e^{-\rho_+ B}), \quad a < 0,\\ (e^{\rho_- u} - 1)(e^{\rho_- B} - 1), \quad a > 0,\\ uB^{-1}, \quad a = 0. \end{cases} \tag{4.68}
$$

Згідно з (4.46) генератриси $\tau_B(u)$, $\tau_B^\pm(u)$ виражаються через резольвенту, яку легко підрахувати,

$$
R_s(x) = \frac{2}{\sigma^2}\frac{e^{\rho_+(s)x} - e^{-\rho_-(s)x}}{\rho_+(s) + \rho_-(s)}, \tag{4.69}
$$

де $\rho_\pm(s) = \dfrac{\sqrt{2s\sigma^2 + a^2} \mp a}{\sigma^2}$.

Остаточно знаходимо, що при $0 < u < B$

$$
\begin{aligned}
&Q^B(s,u) = \frac{R_s(u)}{R_s(B)} = \frac{e^{\rho_-(s)u} - e^{-\rho_+(s)u}}{e^{\rho_-(s)B} - e^{-\rho_+(s)B}},\\
&Q_B(B,u) = e^{\rho_-(s)u} - Q^B(s,u)e^{\rho_-(s)B}, \qquad (4.70)\\
&Q(B,s,u) = e^{\rho_-(s)u} + Q^B(s,u)(1 - e^{\rho_-(s)B}). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Спрощення ф.р. $\xi_u(\theta_s)$ до моменту першого виходу з інтервалу $(0, B)$ випливає з формули (4.66) після підстановки (4.69) та (4.70). Аналогічно теоремі 4.4 та наслідку 4.2 для напівнеперервних знизу процесів доводиться таке твердження (для блукання в $(x-T, x)$).

Теорема 4.5. *Нехай $\{\xi(t), \xi(0)=0, t\geq 0\}$ напівнеперервний знизу процес, що описує випадкове блукання в інтервалі $(x-T, x)$ $(0 < x < T)$. Тоді генератриси моментів першого виходу $\xi(t)$ з цього інтервалу визначаються співвідношеннями*

$$
\begin{aligned}
&Q_T^*(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x-T)}, \tau^-(x-T) < \tau^+(x)] = \\
&\qquad\quad = \frac{R_s(x)}{R_s(T)} \quad (0<x<T), \\
&Q_*^T(s,t) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \tau^-(x-T)] = \\
&\qquad\quad = \overline{P}_+(s,x) - \frac{R_s(x)}{R_s(T)}\overline{P}_+(s,T); \qquad (4.71)\\
&Q_*(T,s,x) = \mathbf{E}e^{-s\tau(x,T)} = \overline{P}_+(s,x) - \overline{P}_+(s,T)\frac{R_s(x)}{R_s(T)}; \\
&P_*(T,s,x) = \mathbf{P}\{\tau(x,T) > \theta_s\}P_+(s,x) + \frac{R_s(x)}{R_s(T)}\overline{P}_+(s,T).
\end{aligned}
$$

При цьому х.ф. значення процесу $\xi(\theta_s)$ до момента першого виходу з інтервалу визначається співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \tau(x,T) > \theta_s] = \qquad (4.72)\\
&\quad = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}[\varphi_+(s,\alpha)(1 - Q_T^*(s,x)e^{i\alpha(x-T)})]_{[x-T,x]}
\end{aligned}
$$

Щільність розподілу процесу до моменту його виходу з інтервалу визначається через резольвенту $R_s(\cdot)$ за допомогою співвідношення

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < z, \tau(x,T) > \theta_s\} = \qquad (4.73)\\
&= s\frac{R_s(x)}{R_s(T)}R_s(z-x+T) - sR_s(z)\delta(z>0), \quad z\in[x-T, x],
\end{aligned}
$$

де $R_s(x)$ визначається за формулою (4.27) як згортка $P_+(s,x)$ з експонентою $\exp\{\rho_-(s)x\}$ $(x>0)$.

Тут доречно зауважити, що остання експонента при $x > 0$ не має ймовірнісного сенсу, а лише при $x < 0$

$$P_-(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = e^{x\rho_-(s)}.$$

Зауважимо, що на основі співвідношення для розподілу функціоналів напівнеперервних процесів з обмеженою варіацією визначаються числові характеристики $\mathbf{E}\tau^+(v)$, $\mathbf{E}\tau^-(-u)$ та $\mathbf{D}\tau^-(-u)$, пов'язані з блуканням $\xi_u(t)$ в інтервалі $[0,B]$, $B = u+v$. Результати їх обчислення наводяться нижче.

Лема 4.1. *Для напівнеперервних та майже напівнеперервних зверху (знизу) процесів похідні $\rho'_\pm(s)$ коренів рівняння Лундберга пов'язані з коренями кумулянти $k(\rho) = \psi(\alpha)|_{i\alpha=\rho}$, (при $\pm m \geq 0$, $\rho_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $k'(\pm\rho_\pm(s)) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} k'(0) = m$)*

$$\rho'_\pm(s) = \frac{\pm 1}{k'(\pm\rho_\pm(s))}, \quad \rho''_\pm(s) = \frac{\mp\rho'_\pm(s)k''(\pm\rho_\pm(s))}{k'(\pm\rho_\pm(s))^2}. \tag{4.74}$$

Доведення (4.74) одержуємо шляхом диференціювання по s рівняння $k(\pm\rho_\pm(s)) = s$ та обчислення похідних при $s = 0$.

В наступному твердженні вказані вище характеристики виражаються через $\rho'_\pm(s)$, $\rho''_\pm(s)$ та $\widetilde{K}'(0,\nu)$, $\widetilde{K}''(0,\nu)$ (позначення $K(s,x)$, $\widetilde{K}(s,\nu)$ див. в (3.158) та в (3.168).

Теорема 4.6. *Для напівнеперервних (майже напівнеперервних) знизу процесів при умові $m < 0$ ($\rho'_-(0) = |m|^{-1}$)*

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\tau^-(x) = xm^{-1}, \quad \mathbf{D}\tau^-(x) = \mathbf{D}\xi(1)xm^{-3} \quad (x \leq 0,\ m < 0),\\ \left(\mathbf{E}\tau^-(x) = \frac{1+b|x|}{b|m|}, \quad \mathbf{D}\tau^-(x) = \mathbf{D}\xi(1)\frac{1+b|x|}{b|m|^3} - \frac{1}{b^2m^2}\right).\end{gathered} \tag{4.75}$$

При $m \nearrow 0$ праві частини в (4.75) прямують до $+\infty$.

Якщо $m > 0$, Тоді $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_- > 0$,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}[\tau^-(x)/\tau^-(x) < \infty] = |x|[k'(-\rho_-)]^{-1},\\ \mathbf{E}[\tau^-(x)^2/\tau^-(x) < \infty] = \frac{|x|k''(-\rho_-)}{k'(-\rho_-)} + \left[\frac{x}{k'(-\rho_-)}\right]^2.\end{gathered} \tag{4.76}$$

Для майже напівнеперервних знизу $\xi(t)$ згідно з (3.162) при $m < 0$ $\mathbf{E}\tau^+(\cdot)$ виражаються через $\widetilde{K}'(0,\nu)$, $\widetilde{K}''(0,\nu)$

$$\mathbf{E}[\tau^+(\theta_\nu), \tau^+(\theta_\nu) < \infty] = \frac{\nu \widetilde{K}''(0,\nu)}{2(1+\nu\widetilde{K}'(0,\nu))^2};$$

$$\mathbf{P}\{\tau^+(\theta_\nu) < \infty\} = \frac{\nu\widetilde{K}'(0,\nu)}{1+\nu\widetilde{K}'(0,\nu)};$$

$$\mathbf{E}[\tau^+(\theta_\nu)/\tau^+(\theta_\nu) < \infty] = \frac{\nu\widetilde{K}''(0,\nu)}{2\widetilde{K}'(0,\nu)(1+\nu\widetilde{K}'(s,\nu)};\tag{4.77}$$

$$\widetilde{K}'(0,\nu) = \frac{\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)}{|m|\nu},$$

$$\widetilde{K}''(0,\nu) = \frac{\mathbf{D}\xi(1)}{|m|^3}\left(\frac{\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)}{\nu} + \frac{\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)+\nu\widetilde{\Pi}'(0,0)}{\nu^2}\right),$$

$$\lim_{v\to\infty}\mathbf{E}[\tau^+(v)\,|\,\tau^+(v)<\infty] = \frac{\mathbf{D}\xi(1)}{|m|^3}\frac{2\widetilde{\Pi}'(0)+\widetilde{\Pi}''(0)}{4\widetilde{\Pi}'(0)},$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}\,|\,\tau^+(0)<\infty] = \frac{q_+(s)}{q_+},$$

$$\mathbf{E}[\tau^+(0)\,|\,\tau^+(0)<\infty] = \frac{1}{q_+|a|}\frac{\mathbf{D}\xi(1)}{2|m|}.$$

Доведення. При $m < 0$, $\rho_-(s) \to 0$ при $s \to 0$, $\mathbf{P}\{\tau^-(x) < \infty\} = 1$, тому

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^-(x)}, \tau^-(x) < \infty] = \mathbf{E}e^{-s\tau^-(x)} = e^{x\rho_-(s)}, \quad x < 0,$$

$$(\mathbf{E}e^{-s\tau^-(x)} = q_-(s)e^{x\rho_-(s)}, \quad x < 0).$$

Диференціюванням цих генератрис на основі (4.74) при $s \to 0$ встановлюються співвідношення (4.75).

Щоб знайти $\mathbf{E}\tau^+(x)$, зауважимо, що

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty].\tag{4.78}$$

Згідно з (3.162) і (4.78)

$$\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = 1 - \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\theta_\nu)}, \tau^+(\theta_\nu) < \infty] = \frac{s}{s+\nu\widetilde{K}(s,\nu)}.\tag{4.79}$$

де $\widetilde{K}(s,\nu)$ – перетворення Лапласа функції $K(s,x)$ в (3.169)

$$K(s,x) = \int_{-\infty}^{0} \Pi(x-y)dP_-(s,y) = \tag{4.80}$$
$$= \rho_-(s)\int_{-\infty}^{0} \Pi(x-y)e^{\rho_-(s)y}dy, \quad \Pi(x) = \Pi_+(x), \quad x > 0.$$

Згідно з (4.79)

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\theta_\nu)}, \tau^+(\theta_\nu) < \infty] = \frac{\widetilde{K}(s,\nu)}{s + \nu\widetilde{K}(s,\nu)}. \tag{4.81}$$

При $s \to 0$ з (4.81) випливає формула в (4.77) для $\mathbf{P}\{\tau^+(\theta_\nu) < \infty\}$,

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(\theta_\nu)} \,|\, \tau^+(\theta_\nu) < \infty] = \frac{\nu\widetilde{K}(s,\nu)}{s + \nu\widetilde{K}(s,\nu)} \frac{1 + \nu\widetilde{K}'(0,\nu)}{\nu\widetilde{K}'(0,\nu)}. \tag{4.82}$$

Згідно з (4.79) маємо також, що

$$\mathbf{E}[\tau^+(\theta_\nu), \tau^+(\theta_\nu) < \infty] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{s + \nu\widetilde{K}(s,\nu)}\right)|_{s=0}.$$

Границя похідної генератриси $\xi^+(\theta_s)(s \to 0)$

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \frac{\nu(\widetilde{K}(s,\nu) - s\widetilde{K}'(s,\nu))}{(s + \nu\widetilde{K}(s,\nu))^2}$$

обчилюється за правилом Лопіталя

$$\lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{\nu s\widetilde{K}''(s,\nu)}{2(s + \nu\widetilde{K}(s,\nu))(1 + \nu\widetilde{K}'(s,\nu))} = \frac{\nu\widetilde{K}''(s,0)}{2(1 + \nu\widetilde{K}'(0,\nu))^2}.$$

Отже перші дві формули в (4.77) доведені і з них випливає 3-я формула в (4.77). Значення $\widetilde{K}'(0,\nu)$ та $\widetilde{K}''(0,\nu)$ знаходяться із співвідношень

$$\widetilde{K}(s,\nu) = \int_{0}^{\infty} e^{-\nu x}\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0} \Pi(x-y)e^{\rho_-(s)y}dydx,$$

$$\widetilde{K}'(s,\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\rho'_-(s)\int_{-\infty}^0 (1+y\rho_-^2(s))\Pi(x-y)e^{\rho_-(s)y}dydx,$$

$$\widetilde{K}''(s,\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\int_{-\infty}^0 [\rho''_-(s)+2(\rho'_-(s))^2\rho_-(s)+ \\ +(e^{\rho_-(s)y})^4 e^{\rho_-(s)y)}\Pi(x-y)]dydx,$$

$$\widetilde{K}'(0,\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\rho'_-(0)\int_{-\infty}^0 \Pi(x-y)dydx = \rho'_-(0)\frac{\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)}{\nu};$$

$$\widetilde{K}''(0,\nu) = \frac{\rho''_-(0)}{\rho'_-(0)}\widetilde{k}'(0,\nu)+\rho''_-(0)\int_0^\infty e^{-\nu x}\int_{-\infty}^0 y\Pi(x-y)dydx,$$

$$\int_0^\infty e^{-\nu x}\int_x^\infty (x-y)\Pi(y)dydx = \int_0^\infty \Pi(y)\left[\frac{1}{\nu^2}(1-e^{-\nu y})\frac{y}{\nu}\right]dy.$$

Зауважимо, що згідно з (4.74) при $\pm m>0$ $\rho'_\pm(0)=|m|^{-1}$, $\rho''_\pm(0)=\pm\dfrac{\mathbf{D}\xi(1)}{|m|^3}$. Тому

$$\widetilde{K}''(0,\nu) = \frac{\mathbf{D}\xi(1)}{m^2}\widetilde{K}'(0,\nu)+\frac{\mathbf{D}\xi(1)}{|m|^3}\frac{\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)+\nu\widetilde{\Pi}'(0)}{\nu^2},$$

і з цих співвідношень випливають формули для $\widetilde{K}'(0,\nu)$ та $\widetilde{K}''(0,\nu)$ в (4.77). Зауважимо, що згідно з тауберовими теоремами

$$\lim_{v\to\infty}\mathbf{E}[\tau^+(v)\,|\,\tau^+(v)<\infty] = \lim_{\nu\to 0}\frac{K''(0,\nu)}{2\widetilde{K}'(0,\nu)(1+\nu\widetilde{K}'(0,\nu))} = \\ = \frac{\mathbf{D}\xi(1)}{|m|^3}\frac{2\widetilde{\Pi}'(0)+\widetilde{\Pi}''(0)}{4\widetilde{\Pi}'(0)}, \quad \widetilde{\Pi}(\nu)=\int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi(x)dx.$$

Таким чином доведена одна з останніх формул в (4.77).

Зауважимо, що згідно з (3.79) при $x\to 0$

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)},\tau^+(0)<\infty] = q_+(s) = 1-p_+(s).$$

Враховуючи, що для неперервного знизу процесу при $m<0$

$$\mathbf{P}\{\tau^+(0)<\infty\} = q_+ = \mathbf{P}\{\xi^+>0\},$$

тому маємо

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}\,|\,\tau^+(0)<\infty] = \frac{q_+(s)}{q_+} = \frac{1-p_+(s)}{q_+},$$

$$\mathbf{E}[\tau^+(0) \mid \tau^+(0) < \infty] = \frac{1}{q_+} p'_+(0).$$

Для визначення $p'_+(0)$ використаємо співвідношення

$$p'_+(s) = \frac{1}{|a|} \left(\frac{s}{\rho_-(s)} \right)',$$

при чому

$$\lim_{s \to 0} \left(\frac{s}{\rho_-(s)} \right)' = \lim_{s \to 0} \frac{\rho_-(s) - s\rho'_-(s)}{\rho_-(s)^2} = \lim_{s \to 0} -\frac{s\rho''_-(s)}{2\rho_-(s)\rho'_-(s)} =$$
$$= -\lim_{s \to 0} \frac{s\rho''_-(s)}{2(\rho'_-(s))^2} = -\frac{\rho''_-(0)}{2(\rho'_-(0))^2} = \frac{\mathbf{D}\xi(1)m^2}{2|m|^3} = \frac{\mathbf{D}\xi(1)}{2|m|}.$$

Отже $p'_+(0) = \dfrac{1}{q_+|a|} \dfrac{\mathbf{D}\xi(1)}{2|m|}$ і остання формула в (4.77) доведена. □

Аналогічне твердження має місце для неперервних зверху процесів у термінах функції $K(s,x) = K_-(s,x)$ $(x < 0)$ (див. (3.169))

$$K(s,x) = \int_0^\infty \Pi_-(x-y)\rho_+(s)e^{-y\rho_+(s)}dy, \quad x < 0,$$

та похідних по s її перетворення Лапласа $\widetilde{K}(s,\nu) = \int_{-\infty}^0 e^{\nu x} K(s,x)dx$ $\widetilde{K}'(0,\nu)$ та $\widetilde{K}''(0,\nu)$.

4.3 Зв'язок між модифікованими процесами ризику та процесами в теорії СМО

В теорії систем масового обслуговування (СМО) (див. [7, 80, 119, 120, 195]) використовується напівнеперервний зверху процес

$$\xi(t) = t - S(t), \quad S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad C = 1, \tag{4.83}$$

і називається керуючим процесом системи $M/G/1$ з пуассонівським входом, з одним приладом і довільним розподілом тривалості обслуговування. Простий пуассонівський процес $\nu(t)$ описує число вимог, що поступають в систему за час t, час між сусідніми вимогами має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Інтерпретація функціоналів для процесів ризику розглядалась в § 4.1. В теорії СМО граничні функціонали та їх розподіли процесу (4.83) мають свою інтерпретацію. Зокрема, максимум та його доповнення (до t) відповідно називаються (відповідні графіки 6 процесів див. в кінці монографії)

$\alpha(t) = \xi^+(t) = \sup\limits_{0 \le s \le t} \xi(s)$ — процесом незайнятості,

$\beta(t) = t - \xi^+(t)$ — процесом зайнятості.

З точністю до випадкового початкового значення w_0

$$w_*(t) = w_0 + w(t) \ (w(t) = \xi^+(t) - \xi(t))$$

називається процесом часу віртуального чекання. Ці процеси тісно пов'язані з деякими модифікаціями класичного процесу ризику $\xi_u(t)$. В першу чергу це такі процеси, пов'язані з блуканням в $(-\infty, B)$.

а) модифікований процес ризику (МПР) з миттєвим відбиттям $\xi_{B,u}(t)$ (див. графіки 2 в кінці монографії), який після досягнення рівня $B > u$ процесом $\xi_u(t) = u + ct - S(t)$ відбивається в початковий стан $u > 0$. Цей процес визначається розкладом $\xi_u(t)$ на 2 складові

$$\xi_u(t) = X_{B,u}(t) + \xi_{B,u}(t), \quad 0 < u < B. \tag{4.84}$$

Процес $X_{B,u}(t)$ називається дивідендним процесом і має кусково-сталі реалізації. Якщо $n(t)$ — лічильний процес числа відбиттів на $[0, t]$ від рівня B, то $X_{B,u}(t) = vn(t)$, $v = B - u > 0$.

Розподіл МПР $\xi_{B,u}(\theta_s)$ визначається стохастичним зображенням

$$\xi_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} \xi_u(t), \quad t < \tau^+(v) = T_1, \\ \xi_{B,u}(t - T_1), \quad t > T_1. \end{cases} \tag{4.85}$$

в) МПР з немиттєвим відбиттям (з тимчасовою затримкою на B) $\eta_{B,u}(t)$ визначається виділенням із $\xi_u(t) = u + \xi(t)$ дивідендного процесу $Y_{B,u}(t)$, який дорівнює 0 до момента першого досягнення B процесом $\xi_u(t)$, а з момента $\tau^+(v)$ він лінійно зростає до момента появи 1-го стрибка $\xi_u(\cdot)$, після чого $Y_{B,u}(\cdot)$ знаходиться певний час на досягненому рівні. Таким чином цей МПР визначається розкладом

$$\xi_u(t) \doteq \eta_{B,u}(t) + Y_{B,u}(t), \quad \eta_{B,u}(0) = u \ \text{ (див. графіки 5)} \tag{4.86}$$

і він ($\eta_{B,u}(t)$) в момент появи першого стрибка після $\tau^+(v)$ відбивається вниз від рівня B на величину стрибка $\xi' \doteq \xi_1$. Процес $\eta_{B,u}(t)$

задається стохастичним зображенням (див. графіки 5 в кінці монографії, а розподіл $\xi_{B,u}(t)$, $\eta_{B,u}(t)$ — в [34–44, 52])

$$\eta_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} \xi_u(t), \quad t < \tau^+(v) = T_1 \\ B, \ T_1 \le t < T_1 + \eta' = T_*, \quad \mathbf{P}\{\eta > t\} = e^{-\lambda t}, \\ \eta_{B,B-\xi'}(t - T_*), \quad t > T_*. \end{cases} \tag{4.87}$$

Позначимо моменти банкрутства для процесів (4.85) та (4.87) відповідно

$$T_u^B = \inf\{t > 0 : \xi_{B,u}(t) < 0\}, \quad T_u^B < \tau^-(-u),$$
$$T_B(u) = \inf\{t > 0 : \eta_{B,u}(t) < 0\}, \quad T_u^B < T_B(u) < \tau^-(-u).$$

Подібно до співвідношення (4.77) одержуються співвідношення для середніх значень $\tau^-(-u)$ в термінах функцій $K(s,x)$ та їх інтегральних перетворень $\widetilde{K}(s,\nu)$ (див. (3.169)).

Порівнюючи дивідендний процес $Y_{B,u}(t)$ з процесом $\alpha(t)$, можемо записати стохастичне співвідношення

$$Y_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} 0, \quad t < \tau^+(v) = T_1, \\ \alpha(t - T_1), \quad t > T_1. \end{cases} \tag{4.88}$$

Аналогічно після порівняння графіків $\eta_{B,u}(t)$ та $w_*(t)$ можна зробити висновок, що другий процес є дзеркальним відбиттям 1-го процесу відносно рівня $B > 0$.

На основі вище сказаного встановлюється твердження для розподілу дивідендних процесів.

Теорема 4.7. *При умові $m > 0$ випадково зупинений дивідендний процес $X_{B,u}(\theta_s)$ в (4.84) задовольняє співвідношення $X_{B,u}(\theta_s) = n(\theta_s)v$, де $n(\theta_s)$ має геометричний розподіл з параметром $q(s) = e^{-v\rho_+(s)}$*

$$\mathbf{P}\{n(\theta_s) = k\} = (1 - e^{-\rho_+(s)v})e^{-k\rho_+(s)v}, \quad k \ge 0. \tag{4.89}$$

Розподіл випадково зупиненого дивідендного процесу $Y_{B,u}(\theta_s)$ в (4.86) визначається генератрисою

$$\mathbf{E}e^{-\nu Y_{B,u}(\theta_s)} = 1 - \frac{\nu}{\rho_+(s) + \nu} e^{-\rho_+(s)v}, \quad v = B - u > 0, \tag{4.90}$$
$$\mathbf{P}\{Y_{B,u}(t) = 0\} = \mathbf{P}\{\xi^+(t) > v\}, \quad \rho_+(s)p_-(s) = sc^{-1}.$$

Доведення. Якщо розглянути послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\tau_k^+\}_{k\geq 1}$, $\tau_k^+ \doteq \tau^+(v)$, та $\widetilde{S}_n = \sum_{k\leq n} \tau_k^+$, то $n(t)$ є процесом відновлення і згідно з результатами § 3.3 при $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{-s\tau_k^+} = e^{-\rho_+(s)v}, \mathbf{E}\tau_k^+ = \mathbf{E}\tau^+(v) = (e^{-\rho_+(s)v})'_{s=0} = vm^{-1},\\
&\mathbf{P}\{n(t) = k\} = \mathbf{P}\{\widetilde{S}_k \leq t\} - \mathbf{P}\{\widetilde{S}_{k+1} \leq t\},\\
&s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\widetilde{S}_k \leq t\}dt = \int_0^\infty e^{-st}d\mathbf{P}\{\widetilde{S}_k \leq t\} = e^{k\rho_+(s)v}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає формула (4.88), на основі якої встановлюється, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{-\nu Y_{B,u}(t)} &= \mathbf{P}\{\tau^+(v) > t\} + \int_0^t \mathbf{E}[e^{-\nu\xi^+(t-y)}, \tau^+(v) \in dy] =\\
&= \mathbf{P}\{\xi^+(t) < v\} + \int_0^t \mathbf{E}[e^{-\nu\xi^+(t-y)}, \tau^+(v) \in dy],
\end{aligned}$$

а після застосування перетворення Лапласа–Карсона знаходимо генератрису $Y_{B,u}(\theta_s)$

$$\mathbf{E}e^{-\nu Y_{B,u}(\theta_s)} = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < v\} + \mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)}\mathbf{E}e^{-s\tau^+(v)},$$

яка з урахуванням того, що $\mathbf{E}e^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+\nu}$,

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < v\} = 1 - e^{-s\tau^+(v)} = 1 - e^{-v\rho_+(s)};$$

звідси випливає (4.90). □

На основі (4.85) та (4.87) встановлюється твердження

Теорема 4.8. *Розподіл $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ визначається через х.ф.*

$$\begin{aligned}
\Phi_{B,u}(s,\alpha) &=: \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}(\theta_s)} =\\
&= \mathbf{E}e^{i\alpha(u+\xi^-(\theta_s))}\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}/\xi^+(\theta_s) < B] =\\
&= \mathbf{E}e^{i\alpha(u+\xi^-(\theta_s))}\frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\frac{1 - e^{(B-u)(i\alpha-\rho_+(s))}}{1 - e^{(B-u)\rho_+(s)}}.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

При $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$ *існує граничний розподіл* $\zeta_{B,u} = \lim_{t\to\infty} \zeta_{B,u}(t)$ *з х.ф.*

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-}\frac{e^{i\alpha B} - e^{i\alpha(B-u)}}{i\alpha(B-u)}. \tag{4.92}$$

Розподіл $\eta_{B,u}(\theta_s)$ *визначається через х.ф.* $(v = B - u)$

$$\begin{aligned}
&\Psi_{B,u}(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\eta_{B,u}(\theta_s)} = \\
&= \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}(e^{i\alpha u} - e^{i\alpha B - \rho_+(s)v})\varphi_-(s,\alpha) + \\
&+ \frac{s}{s+\lambda}e^{i\alpha B - v\rho_+(s)} + \frac{\lambda e^{-v\rho_+(s)+i\alpha B}}{\lambda + s - \lambda\varphi(i\rho_+(s))} \times \\
&\times \left[\frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi} - e^{-\rho_+(s)\xi}]\varphi_-(s,\alpha) + \frac{\lambda}{s+\lambda}\mathbf{E}e^{-\rho_+(s)\xi}\right].
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$, *то граничний розподіл для* $\eta_{B,u} = \lim_{s\to 0} \eta_{B,u}(\theta_s)$ *визначається через х.ф. з атомом в точці* B

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\eta_{B,u}} = \frac{e^{i\alpha B}}{1 + \lambda\rho'_+(0)\mathbf{E}\xi_1}\left[\lambda\rho'_+(0)\frac{1 - \varphi(\alpha)}{i\alpha}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-} + 1\right], \tag{4.94}$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{B,u} = B\} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_{B,u}(t) = B\} = \frac{1}{1 + \lambda\rho'_+(0)\mathbf{E}\xi_1} = \frac{m}{c}.$$

Доведення. З (4.85) випливає, що

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}(t)} = I_0(\alpha,t) + I(\alpha,t), \\
&I(\alpha,t) = \mathbf{E}\left[e^{i\alpha\zeta_{B,u}(t-y)}, \tau^+(v) \in dy\right], \\
&I_0(\alpha,t) = \mathbf{E}[e^{i\alpha(u+\xi(t))}, \xi^+(t) < v].
\end{aligned}$$

Після перетворення Лапласа–Карсона одержимо рівняння

$$\begin{aligned}
\Phi_{B,u}(s,\alpha) = &\frac{\rho_+(s)e^{i\alpha u}}{\rho_+(s) - i\alpha}(1 - e^{v(i\alpha - \rho_+(s))})\varphi_-(s,\alpha) + \\
&+ \Phi_{B,u}(s,\alpha)e^{-\rho_+(s)(B-u)},
\end{aligned}$$

з якого визначається х.ф. $\Phi_{B,u}(s,\alpha)$ в (4.91). При $s \to 0$ з (4.91) випливає (4.92). З (4.87) випливає, що

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\eta_{B,u}(t)} = A_1(t,\alpha) + A_2(t,\alpha) + \int_0^\infty A_3(t,\alpha,B-z,dF(z)),$$

$$A_1(t,\alpha) = e^{i\alpha u}\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(t)}, \xi^+(t) < v],$$
$$A_2(t,\alpha) = e^{i\alpha B}\int_0^t e^{\lambda(t-y)} d\mathbf{P}\{\tau^+(v) < z\},$$
$$A_3(t,\alpha,B-z) =$$
$$= \lambda\int_0^t e^{-\lambda y} dy \mathbf{E}[e^{i\alpha\eta_{B,v}(t-y-\tau^+(v))}, \tau^+(v) < t-y].$$

Звідси після перетворення Лапласа–Карсона випливає рівняння

$$\psi_{B,u}(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\mathbf{E}e^{i\alpha(B+\xi^-(\theta_s))}(e^{i\alpha v} - e^{-\rho_+(s)v}) +$$
$$+ \frac{s}{s+\lambda}e^{i\alpha B - v\rho_+(s)} + \frac{\lambda}{s+\lambda}e^{-v\rho_+(s)}\int_0^\infty \psi_{B,B-z}(s,\alpha)dF(z) \quad (4.95)$$

після усереднення якого по $dF(z)$ знаходимо

$$\psi_B^*(s,\alpha) =: \int_0^\infty \psi_{B,B-v}(s,\alpha)dF(v); \quad F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, \quad x > 0,$$
$$\psi_B^*(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\mathbf{E}e^{i\alpha(B+\xi^-(\theta_s))}\int_0^\infty (e^{i\alpha v} - e^{-\rho_+(s)v})dF(v) +$$
$$+ \frac{s}{s+\lambda}(e^{i\alpha B} + \psi_B^*(s,\alpha))\int_0^\infty e^{-\rho_+(s)v}dF(v),$$
$$\psi_B^*(s,\alpha) = \left[\frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\mathbf{E}e^{i\alpha(B+\xi^-(\theta_s))}\mathbf{E}(e^{i\alpha\xi} - e^{-\rho_+(s)\xi}) + \right.$$
$$\left. + \frac{s}{s+\lambda}e^{i\alpha B}\mathbf{E}e^{\rho_+(s)\xi}\right]\left(1 - \frac{1}{s+\lambda}\mathbf{E}e^{-\rho_+(s)\xi}\right)^{-1}.$$

Після підстановки ψ_B^* в останній доданок (4.95) одержимо (4.93). $\square$

Позначимо мінімуми і моменти банкрутства МПР відповідно

$$\zeta_{B,u}^-(t) = \inf_{0\le s\le t}\zeta_{B,u}(s), \quad T_u^B = \inf\{t > 0 : \zeta_{B,u}(t) < 0\},$$
$$\eta_{B,u}^-(t) = \inf_{0\le s\le t}\eta_{B,u}(t), \quad T_B(u) = \inf\{t > 0 : \eta_{B,u}(t) < 0\},$$

а також відповідно їх імовірності виживання та генератриси

$$\varphi_B(t,u) = \mathbf{P}\{T_u^B > t\} = \mathbf{P}\{\zeta_{\theta,u}^-(t) > 0\},$$

$$\phi_B(t,u) = \mathbf{P}\{T_B(u) > t\} = \mathbf{P}\{\eta^-_{B,u}(t) > 0\}, \quad 0 < u < B,$$
$$T_s(B,u) = \mathbf{E}e^{-sT_B(u)}, \quad \mathbf{E}e^{-s\tau^\pm_B(u)}, \quad s > 0.$$

При цьому урізані згортки генератрис $T_B(u), \tau^\pm_B(u), \tau_B(u)$ з розподілом стрибка $(dF(z), 0 \le z \le B)$ позначимо

$$T_*(s,B) = \int_0^B T_s(B, B-z)dF(z),$$
$$Q^*_B(s) = \int_0^B Q_B(s, B-z)dF(z),$$
$$Q^B_*(s) = \int_0^B Q^B(s, B-z)dF(z) = \frac{1}{R_s(B)} \int_0^\infty R_s(B-z)dF(z),$$
$$Q_*(B,s) = \int_0^B Q(B,s,B-z)dF(z), \quad (Q(B,s,u) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B(u)}),$$
$$Q^B_*(0) = R^{-1}(B) \int_0^B R(B-z)dF(z), \quad Q^*_B(0) = F(B) - Q^B_*(0).$$

Теорема 4.9. *Інтегральне перетворення ймовірності виживання* $\widetilde{\varphi}_B(s,u) = \mathbf{P}\{\zeta^-_{B,u}(\theta_s) > 0\}$ *визначається через генератрису* T^B_u

$$\widetilde{\varphi}_B(s,u) = 1 - \mathbf{E}e^{-sT^B_u} = \tag{4.96}$$
$$= s\frac{R_s(u)\int_0^B R_s(y)dy - R_s(B)\int_0^u R_s(y)dy}{R_s(B) - R_s(u)}.$$

Якщо $m > 0$, *тоді*

$$\mathbf{E}T^B_u = \left[R(u)\int_0^B R(y)dy - R(B)\int_0^u R(y)dy\right] \times \tag{4.97}$$
$$\times (R(B) - R(u))^{-1}.$$

Інтегральне перетворення ймовірності виживання

$$\widetilde{\Phi}_B(s,u) = \mathbf{P}\{\eta^-_{B,u}(\theta_s) > 0\}$$

визначається через генератрису $T_s(B,u) = \mathbf{E}\{-sT_B(u)\}$

$$\widetilde{\Phi}_B(s,u) = 1 - T_s(B,u) \quad (0 < u < B), \tag{4.98}$$

$$\widetilde{\Phi}_B(s,u) = 1 - Q(B,s,u) + \frac{s}{s+\lambda} Q^B(s,u) + \frac{Q^B(s,u)}{s+\lambda(1-Q_*^B(s))} \times \\ \times \left[s(F(B) - Q_B^*(s)) + \int_0^B (1 - Q(B,s,B-z))dF(z) \right],$$

де $Q_B(s,u)$ *та* $Q^B(s,u)$ *та* $Q(B,s,u)$ *виражається через резольвенту* $R_s(\cdot)$ (*див.* (4.46)).

Якщо $m > 0$, *тоді* $\mathbf{E}T_B(u)$ *виражається через потенціал* $R(\cdot)$

$$\mathbf{E}T_B(u) = \mathbf{E}\tau_B(u) + \frac{R(u)}{\lambda R(B)} + \\ + \frac{R(u)}{\lambda R(B)(1-Q_*^B(0))} \left[Q_*^B(0) + \lambda \int_0^B \mathbf{E}\tau_B(B-z)dF(z) \right], \tag{4.99}$$

де згідно з (4.37) *і* (4.46) $R(u) = \frac{1}{m}\mathbf{P}\{-\xi^- < u\}$,

$$\mathbf{E}\tau_B(u) = \frac{R(u)}{R(B)} \int_0^B R(y)dy - \int_0^u R(y)dy.$$

Доведення. Нагадаємо позначення подій виходу з інтервалу $[0,B]$

$$A_+(B) = \{\tau^+(v) < \tau^-(-u)\}, \quad A_-(B) = \{\tau^-(-u) < \tau^+(v)\}$$

за допомогою яких записується стохастичне співвідношення для T_u^B

$$T_u^B \doteq \begin{cases} \tau^-(-u), & \omega \in A_-(B), \\ \tau^+(v) + T_u^B, & \omega \in A_+(B). \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\mathbf{E}e^{-sT_u^B} = Q_B(s,u)[1-Q^B(s,u)]^{-1}.$$

Перший рядок в (4.96) встановлюється інтегруванням частинами, а останній випливає з такого співвідношення

$$\widetilde{\varphi}_B(s,u) = 1 - \frac{Q_B(s,u)}{1-Q^B(s,u)} = \frac{1-\mathbf{E}e^{-s\tau_B(u)}}{1-Q^B(s,u)}$$

після підстановки в нього значень $Q^B(s,u)$, $Q(B,s,u) = \mathbf{E}e^{-s\tau_B(u)}$ із (4.46).

Для $T_B(u)$ має місце стохастичне зображення

$$T_B(u) \doteq \begin{cases} \tau^-(-u), & \omega \in A_-(B), \\ \tau^+(v) + \eta, & \omega \in A_+(B), \quad \xi > B, \\ \tau^+(v) + \eta + T_B(B-\xi), & \omega \in A_+(B), \quad 0 < \xi < B, \end{cases} \tag{4.100}$$

з якого виводиться співвідношення ($F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$),

$$T_s(B,u) = Q_B(s,u) + Q^B(s,u)\frac{\lambda}{s+\lambda}\overline{F}(B) + \\ + \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)\int_0^B T_s(B, B-z)dF(z).$$

Останнє зводиться до вигляду

$$T_s(B,u) = Q_B(s,u) + \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)\overline{F}(B) + \\ + \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)T_*(s,B), \tag{4.101}$$

де $T_*(s,B)$ одержується шляхом усереднення (4.101) по $dF(z)$ $(0 \leq z \leq B)$

$$T_*(s,B) = \left[Q_*(B,s) + \frac{\lambda\overline{F}(B)}{s+\lambda}Q_*^B(s)\right]\left(1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}Q_*^B(s)\right)^{-1} = \\ = [\lambda Q_*(B,s) - \lambda F(B)Q_*^B(s) + sQ_B^*(s)](s+\lambda-\lambda Q_*^B(s))^{-1}.$$

Підставивши значення $T_*(s,B)$ у співвідношення (4.101), після спрощень одержимо низку рівностей (в термінах генератрис)

$$\begin{aligned} T_s(B,u) &= Q_B(s,u) + \left(1 - \frac{s}{s+\lambda}\right)Q^B(s,u)\overline{F}(B) + \frac{\lambda}{s+\lambda}T_*(s,B) \\ &= Q_B(s,u) + Q^B(s,u)\overline{F}(u) - \frac{s}{s+\lambda}Q^B(s,u)\overline{F}(B) + \\ &+ \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)\frac{\lambda(Q_*(B,s) - F(B)Q_*^B(s)) + sQ_B^*(s)}{s+\lambda-\lambda Q_*^B(s)} = \\ &= Q(B,s,u) - \frac{s+\lambda F(B)}{s+\lambda}Q^B(s,u) + \\ &+ \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)\frac{\lambda(Q_*(B,s) - F(B)Q_*^B(s)) + sQ_B^*(s)}{s+\lambda-\lambda Q_*^B(s)}, \end{aligned}$$

з яких випливає співвідношення

$$T_s(B,u) = Q(B,s,u) - \frac{s}{s+\lambda}Q^B(s,u) +$$
$$+ \frac{\lambda}{s+\lambda}Q^B(s,u)\frac{\lambda\int_0^B(Q(B,s,B-z)-1)dF(z) + s(Q_B^*(s)-F(B))}{s+\lambda-\lambda Q_*^B(s)},$$

еквівалентне (4.98). Після ділення на s і граничного переходу ($s \to 0$) з (4.98) одержимо середнє значення (4.99). □

4.4 Деякі функціонали для процесів СМО

Для процесу $\xi(t) = t - S(t)$ крім функціоналів $\alpha(t) = \xi^+(t)$, $\beta(t) = t - \alpha(t)$ в теорії СМО важливу роль відіграють функціонали, які визначають періоди зайнятості, та число вимог, що обслуговуються на кожному періоді зайнятості. Аналізуючи графіки процесу часу чекання $w(t)$ та процесу часу зайнятості $\beta(t)$ (див. графіки 5, 6 в кінці монографії), замічаємо, що вони мають спільні інтервали сталості η'_k, які є незалежними при різних k і мають спільний показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Між цими інтервалами розміщені впереміжку часові інтервали $\widetilde{\theta}_k$, на яких $w(t)$ та $\beta(t)$ лінійно зростають. Ці інтервали $\widetilde{\theta}_k$ називаються періодами зайнятості, вони також незалежні і мають спільний розподіл. Крім того, в теорії СМО важливою характеристикою є $n(\widetilde{\theta}_k)$ — число вимог, що обслужилися на k-му періоді зайнятості $\widetilde{\theta}_k = \tau_k^+ - \tau_k^-$, $\tau_k^\pm$ — кінці k-го інтервалу зайнятості.

Позначимо $\eta(t) = S(t) - t$ керуючий процес СМО. Згідно з графіками $\eta(t)$, $\xi(t)$ та $\alpha(t)$ встановлюється стохастичне зображення

$$\widetilde{\theta}_1 \doteq \tau_\eta^-(-\xi_1) = \tau^+(\xi_1), \tau_\xi^+(x) = \tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\},$$
$$\tau_\eta^-(-x) = \inf\{t > 0 : \eta(t) < x\}, \quad \mathbf{P}\{\xi_1 < x\} = F(x), \quad x \ge 0.$$

Генератриса τ_η^- визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau_\eta^-(x)}, \tau_\eta^-(x) < \infty] = \mathbf{P}\{\eta^-(\theta_s) < x\} = e^{\rho(s)x}, \quad x \le 0,$$

де $-\rho(s)$ — корінь рівняння ($\mathcal{L}_s$) для процесу $\eta(t)$.

В [7] показано, що залежно від знаку $\mathbf{E}\,\zeta(1) = \lambda\mu - 1$ ($c = 1$) можливі три режими роботи СМО з одним приладом і пуассонівським надходженням вимог:

1) $\mathbf{E}\,\eta(1) = \lambda\mu - 1 > 0$ $(\lambda\mu > 1)$. Тоді середній час обслуговування вимоги перевищує середній час появи вимоги $\mathbf{E}\,\xi_1 = \mu > \mathbf{E}\,\zeta_1 = \frac{1}{\lambda}$. Такий режим СМО називають надкритичним.

2) $\mathbf{E}\,\eta(1) = 0,\ \mu = \frac{1}{\lambda}$. В цьому випадку режим роботи СМО називають критичним.

3) $\mathbf{E}\,\eta(1) < 0,\ \lambda\mu < 1,\ \mu < \frac{1}{\lambda}$. Тоді існує стаціонарний режим роботи СМО.

Зауважимо, що тільки для останніх двох випадків ф.р. періоду зайнятості $\Pi(x) = \mathbf{P}\left\{\widetilde{\theta}_1 < x\right\} \to 1$ при $x \to \infty$. В першому випадку згідно з [80] (див. § 13, формула (5) на с. 63) $\Pi(+\infty) = \frac{1}{\lambda\mu} < 1$.

В найбільш цікавому третьому випадку особливу роль відіграє віртуальний час чекання $w(t)$ та залишковий час обслуговування в момент t $\tau^*(t)$ (див. пунктирний графік серед графіків 6)

$$
\begin{aligned}
&\tau^*(t) = \tau_k^+ - t, \quad \tau_k^- \le t \le \tau_k^+, \quad \tau^*(t) = w(t) = 0,\\
&t \notin [\tau_k^-, \tau_k^+], \quad k \ge 1.
\end{aligned}
$$

Процес $w(t)$ визначається як розривний процес у точках появи вимог $\sigma_n = \sum_{k\le n} \tau_k$ (з розривами — стрибками ξ_k, що описують тривалості часу обслуговування k-тої вимоги) і задається таким чином

$$
\begin{aligned}
&w(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau_1 = t_1, w(t_1) = \xi_1;\\ [\xi_1 - t + \tau_1] I_{t-\tau_1<\xi_1}, & \tau_1 = \sigma_1 < t < \sigma_2 = \tau_1 + \tau_2;\\ [w(\sigma_n) - t + \sigma_n] I_{t-\sigma_n<w(\sigma_n)}, & \sigma_n < t < \sigma_{n+1}, n > 1. \end{cases}\\
&\triangle_n w = w(\sigma_n) - w(\sigma_n - 0) = \xi_n, \quad n > 1.
\end{aligned}
$$

Графіки $\xi(t)$, $\eta(t) = -\xi(t)$, $\alpha(t)$, $w(t)$ та $\tau^*(t)$ (див. графіки 6).

В силу співвідношення (2.6) $w(\theta_s)$ можна виразити через доповнення до екстремумів $\hat{\xi}^{\pm}(\theta_s)$, $\hat{\eta}^{\pm}(\theta_s)$,

$$
w(\theta_s) \doteq \begin{cases} \xi^+(\theta_s) - \xi(\theta_s) = -\hat{\xi}^-(\theta_s) \doteq -\,\xi^-(\theta_s),\\ \eta(\theta_s) - \eta^-(\theta_s) = \hat{\eta}^+(\theta_s) \doteq \eta^+(\theta_s). \end{cases}
$$

Тому за дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина (2.30) х.ф. $w(\theta_s)$ виражається так

$$
\mathbf{E}\, e^{-uw(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(u)}, \quad \widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta_s)}/\xi^+(\theta_s) > 0\big].
$$

Якщо $\mathbf{E}\eta(1) = -\mathbf{E}\xi(1) < 0$, тоді з останньої формули випливає х.ф. стаціонарного розподілу віртуального часу чекання $w_* = \lim_{t\to\infty} w(t)$

$$\mathbf{E}\, e^{-uw_*} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{g}_0(u)}, \quad \widetilde{g}_0(u) = \int_0^\infty \frac{\overline{F}(x)}{\mu} e^{-ux} dx,$$

а для τ^* — стаціонарного залишку часу обслуговування (до звільнення приладу) і для η^+, w_* атомарні імовірності одинакові

$$\mathbf{P}\{\tau^* = 0\} = \mathbf{P}\left\{\eta^+ = 0\right\} = \mathbf{P}\{w_* = 0\} = p_+, \quad q_+ = 1 - p_+ = \lambda\mu.$$

Звідси випливає твердження (доведене в [13])

Наслідок 4.3. *При $t \to \infty$ згідно з графіком $\tau^*(t)$ (див. в кінці монографії) відповідна вимога з імовірністю p_+ застає систему вільною і одразу обслуговується, або з імовірністю q_+ чекає час $\tau^* = \lim_{t\to\infty} \tau^*(t)$ до звільнення системи, генератриса якого ідентична умовній генератрисі $\gamma^+(0)$, тобто*

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\tau^*} \,|\, \tau^* > 0\big] = \widetilde{g}_0(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+ > 0\big]. \tag{4.102}$$

Це означає, що $w_* \doteq \eta^+ \doteq -\,\xi^-$ при $\lambda\mu < 1$, $w_* = \sum_{k\le\nu(q_+)} \tau_k^*$,

$$\mathbf{P}\{\nu(q_+) = k-1\} = p_+ q_+^{k-1},$$
$$\mathbf{E}e^{-u\tau_k^*} = \widetilde{g}_0(u), \quad k \ge 1, \quad \tau_0^* = 0.$$

Зауважимо, що формули для х.ф. $w(\theta_s)$ та w_* одержані як наслідок з о.ф.т. без використання рівнянь Бенеша й Такача для розподілу $w(t)$, а також відповідного рівняння для стаціонарного розподілу w_*. Цей результат можна одержати також із формули Клімова (див. [80, с. 118]) для генератриси

$$\omega(z,t) =: \mathbf{E}e^{-zw(t)} = e^{tk(z)} \left[1 + \int_0^t e^{-uk(z)} P_0(u) du\right],$$

де $P_0(u)$ — імовірність того, що в момент u система вільна від вимог. Звідси після перетворення Лапласа–Карсона випливає співвідношення

$$\widetilde{\omega}(z,s) =: \mathbf{E}e^{-zw(\theta_s)} = \frac{1}{1-k(z)}(s - z\widetilde{p}_0(s)),$$

$$\widetilde{p}_0(s) = s\int_0^\infty e^{-su}P_0(u)du = s\left[s+\lambda(1-\pi(s))\right]^{-1}. \tag{4.103}$$

Після граничного переходу ($s \to 0$) з останніх співвідношень при $\lambda\mu < 1$ випливає, що

$$\omega_*(z) = \mathbf{E}\, e^{-zw_*} = \frac{p_+}{1-\lambda\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx}, \tag{4.104}$$
$$p_+ = \lim_{s\to 0}\widetilde{p}_0(s) = \mathbf{P}\left\{w(\infty)=0\right\}.$$

Звідси при $z = 0$ визначаються $p_+ = 1-\lambda\mu$, $q_+ = \lambda\mu$, і остання формула зводиться до формули Полячека–Хінчина (див. (3.176)).

Приклад 4.3. Для процесу СМО $\xi(t) = t - S(t)$ ($\eta(t) = S(t) - t$) з х.ф. вимог $\varphi(\alpha) = \frac{1}{(1-i\alpha)^2}$ показати, що $m = \mathbf{E}\,\xi(1) = -\mathbf{E}\,\zeta(1) = 1-2\lambda < 0$,

$$k(z) = \ln \mathbf{E}\, e^{-z\xi(1)} = \ln \mathbf{E} e^{z\eta(1)} = z\frac{z^2+2z-z\lambda+m}{(1+z)^2}.$$

На основі стохастичного співвідношення для періоду зайнятості $\widetilde{\theta}_1 \doteq \tau_\xi^+(\xi_1) = \tau_\eta^-(-\xi_1)$ показати, що його генератриса виражається через корінь рівняння Лундберга

$$\pi(s) = \mathbf{E}\big[e^{-s\widetilde{\theta}_1}, \widetilde{\theta}_1 < \infty\big] = \frac{1}{(1+\rho_-(s))^2}, \quad k(-\rho_-(s)) = s, \tag{4.105}$$

і за формулою (4.103) обчислити перетворення Лапласа–Карсона ймовірності незайнятості $P_0(t)$.

Дійсно, оскільки $\mathbf{E}\zeta(1) > 0$, то $\mathbf{P}\left\{\tau^-(-x) < \infty\right\} = 1$ і в силу неперервності знизу $\eta(t)$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(-x)}, \tau^-(-x) < \infty\big] = \mathbf{E}\, e^{-s\tau^-(-x)} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\left\{\eta^-(\theta_s) < -x\right\} = e^{-\rho_-(s)x}, \quad x > 0; \\
&\pi(s) = \mathbf{E}\, e^{-s\tau_\eta^-(-\xi_1)} = \int_0^\infty \mathbf{E}\, e^{-s\tau^-(-x)}dF(x) = \\
&\qquad = \int_0^\infty e^{-\rho_-(s)x}xe^{-x}dx = \frac{1}{(1+\rho_-(s))^2}.
\end{aligned}$$

Згідно з (4.103) безпосереднім обчисленням знаходимо

$$\widetilde{p}_0(s) = s\left[s + \lambda\rho_-(s)\frac{2+\rho_-(s)}{(1+\rho_-(s))^2}\right]^{-1}. \tag{4.106}$$

Приклад 4.4. В умовах попереднього прикладу за формулою Полячека–Хінчина знайти генератрису стаціонарного часу чекання w_* та $\mathbf{P}\{w_* = 0\}$.

Оскільки $\mu = \mathbf{E}\,\xi_1 = 2$, то $q_+ = 2\lambda$. Враховуючи, що $\overline{F}(x) = (1+x)e^{-x}$ $(x > 0)$, згідно з (4.104)

$$\int_0^\infty (1+x)e^{-(z+1)x}dx = \frac{2+z}{(1+z)^2}, \tag{4.107}$$

$$\mathbf{E}e^{-zw_*} = \frac{(1-2\lambda)}{1-\lambda(2+z)(1+z)^{-2}} = \frac{(1-2\lambda)(1+z)^2}{(1+z)^2-\lambda(2+z)} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 1-2\lambda.$$

Отже $\mathbf{P}\{w_* = 0\} = 1 - 2\lambda = |m| = p_+$. Одержану генератрису у вигляді неправильної дробово-лінійної функції другого порядку можна звести до вигляду

$$\mathbf{E}e^{-zw_*} = p_+ + q_+\frac{p_+\left(1-(2\lambda)^{-1}(2-\lambda)z\right)}{z^2+(2-\lambda)z+p_+},$$

де другий доданок є правильною дробово-раціональною функцією другого порядку, яка розкладається на суму двох дробово-лінійних.

Приклад 4.5. В умовах попереднього прикладу показати, що при $p_+ = q_+ = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{4}$ генератриса w_* має спрощений вигляд

$$\mathbf{E}\,e^{-zw_*} = \frac{2(1+z)^2}{4z^2+7z+2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{z+2}{(z+\rho_1)(z+\rho_2)}\right]. \tag{4.108}$$

Розклавши останній доданок на дробово-лінійні функції, знайдіть хвіст розподілу $\mathbf{P}\{w_* > x\}$ і покажіть, що $\mathbf{P}\{w_* > x\}$ є лінійною комбінацією показникових розподілів з параметрами $\rho_1 = \frac{7-\sqrt{17}}{8} \approx \frac{3}{8}$, $\rho_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{8} \approx \frac{11}{8}$.

Замітимо, що доданок в (4.108) після розкладу допускає представлення

$$\frac{z+2}{4(z+\rho_1)(z+\rho_2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{z+\rho_1}+\frac{B}{z+\rho_2}\right),$$
$$A = \frac{7-\sqrt{17}}{\sqrt{17}}, \quad B = \frac{2\sqrt{17}-7}{\sqrt{17}}.$$

Звідки після обернення по z випливає, що

$$\mathbf{P}\{w_* > x\} = \frac{1}{8}\left(A\rho_1^{-1}e^{-\rho_1 x} + B\rho_2^{-1}e^{-\rho_2 x}\right), \quad x > 0. \tag{4.109}$$

Позначимо $\overline{\theta}_k = \widetilde{\theta}_k + \eta'_k$ — часові цикли ($F(0) = 0$). Має місце твердження (див. [80, § 13–14])

Теорема 4.10. *Генератриси $\widetilde{\theta}_1$, $\overline{\theta}_1$ та $\tau_k^{\pm}$ ($k \geq 1$, $\tau_1^+ = \overline{\theta}_1$, $\tau_1^- = \tau_1$) визначаються так*

$$\begin{aligned}
&\pi(s) = \mathbf{E}[e^{-s\widetilde{\theta}_1},\ \widetilde{\theta}_1 < \infty] = \mathbf{E}[e^{-s\tau^-(-\xi_1)}, \tau^-(-\xi_1) < \infty] = \\
&\qquad = \begin{cases} f(\rho(s)), \quad f(u) = \int_0^\infty e^{-ux} dF(x), \\ f(s + \lambda(1 - \pi(s))), \end{cases} \qquad (4.110)\\
&\overline{\pi}(s) = \mathbf{E}[e^{-s\overline{\theta}_1}, \overline{\theta}_1 < \infty] = \frac{\lambda}{s+\lambda} f(\rho(s)),\\
&E[e^{-s\tau_k^+}, \tau_k^+ < \infty] = \overline{\pi}(s)^k, \quad E[e^{-s\tau_k^-}, \tau_k^- < \infty] = \frac{\lambda}{s+\lambda}\overline{\pi}(s)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Якщо $\mathbf{E}\eta(1) = \lambda\mu - 1 > 0$, тоді $\rho(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \rho_0 > 0$, генератриса абсолютного мінімуму η^- невироджена

$$g_-(u) = \mathbf{E}e^{-u\eta^-} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + u}, \quad g_-(0) = 1. \qquad (4.111)$$

Абсолютний максимум η^+ має вироджений розподіл $\mathbf{P}\{\eta^+ = +\infty\} = 1$. Розподіли $\widetilde{\theta}_1$ та $\overline{\theta_1}$ також вироджені з додатним "дефектом"

$$\begin{aligned}
&0 < \mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 = -\infty\} = \mathbf{P}\{\overline{\theta_1} = +\infty\} < 1,\\
&\mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 < \infty\} = \mathbf{P}\{\overline{\theta}_1 < \infty\} = \pi(0) = f(\rho_0) < 1.
\end{aligned}$$

Якщо $\mathbf{E}\eta(1) \leq 0$, тоді $\rho(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, а при $\mathbf{E}\eta(1) < 0$

$$\begin{aligned}
&\rho'(0) = \frac{1}{1 - \lambda\mu} = \frac{1}{|m|}, \quad m = \mathbf{E}\eta(1),\\
&\mathbf{E}\widetilde{\theta}_1 = \frac{\mu}{|m|}, \quad \mathbf{E}\overline{\theta}_1 = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{|m|}.
\end{aligned}$$

Невироджена генератриса η^+ $g_+(u) = \mathbf{E}e^{-u\eta_+}$ ($g_+(0) = 1$) визначається формулою Полячека–Хінчина

$$g_+(u) = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{f}(u)}, \quad \widetilde{f}(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-ux}\overline{F}(x)dx. \qquad (4.112)$$

При цій умові $\widetilde{\theta}_k$ *та* $\overline{\theta}_k$ *мають невироджені розподіли з генератрисами* (4.110), *оскільки* $\pi(s) = f(\rho(s)) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} f(0) = 1$.

Генератриси кількості вимог, що обслужились за час t *та на періоді* $\widetilde{\theta}_1$, *відповідно визначаються співвідношеннями*

$$n_t(z) = \mathbf{E}z^{n(t)} = e^{t\lambda(1-z)}, \quad 0 < z < 1, \quad t > 0, \tag{4.113}$$

$$n^*(z) = \mathbf{E}z^{n(\widetilde{\theta}_1)} = f(\rho([1-z]\lambda)) = \pi(\lambda[1-z]),$$

$$\mathbf{E}n(\widetilde{\theta}_1) = \lambda f'(0)\rho'(0) = \frac{\lambda\mu}{|m|} < \infty \quad \textit{при умові } \mathbf{E}\eta(1) < 0. \tag{4.114}$$

Доведення. Перша формула в (4.110) одержується усередненням по $dF(x)$, а саме

$$\pi(s) = \int_0^\infty \mathbf{E}[e^{-s\tau^-(-x)}, \tau^-(-x) < \infty] dF(x) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\rho(s)x} dF(x) = f(\rho(s)).$$

Справедливість 2-ої формули в (4.110), яка наводиться в [80, теорема 2, с. 62], випливає з рівняння $(\mathcal{L}_s)$, згідно з яким

$$\rho(s) = s + \lambda[1 - f(\rho(s))],$$
$$f(\rho(s)) = \pi(s), \quad \rho(s) = s + \lambda[1 - \pi(s)].$$

Останні формули (4.10) для $k = 1$ випливають з другої, а при $k \geq 2$ обчислюються за індукцією. Очевидно перша формула в (4.110) простіша і зручніша за другу, яка є функціональним рівнянням з неявно вираженою генератрисою $\pi(s)$. Обмеженість $\mathbf{E}\widetilde{\theta}_1$ і його значення при $\mathbf{E}\eta(1) < 0$ встановлюється диференціюванням (4.110) при $s \to 0$.

Легко показати, що $n(t)$ — простий пуассонівський процес з параметром $\lambda > 0$. Шляхом усереднення за розподілом $\mathbf{P}\{\widetilde{\theta}_1 < t\} = \mathbf{P}\{\tau^-(-\xi) < t\}$ знаходимо, що

$$\mathbf{E}z^{n(\widetilde{\theta}_1)} = \int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)} d_+\mathbf{P}\{\tau^-(-\xi) < t\} =$$
$$= \int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)} d_t\mathbf{P}\{\eta^-(t) < -\xi\}.$$

Інтегрування частинами приводить до співвідношення (4.113). Дійсно,

$$\mathbf{E}z^{n(\widetilde{\theta}_1)} = \lambda(1-z)\int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta^-(t) < -\xi\}e^{-t\lambda(1-z)}dt =$$
$$= \mathbf{P}\{\eta^-(\widetilde{\theta}_{\lambda(1-z)} < -\xi)\} = \int_0^\infty e^{-\rho(\lambda(1-z))x}dF(x) = f(\rho([1-z]\lambda)).$$

Формула (4.113) для $n^*(z)$ зручніша за функціональне рівняння (див. [80], формула (1) на с. 82) для генератриси $n(\widetilde{\theta}_1)$. □

Для процесу ризику $\xi(t) = t - S(t)$ випадкові величини $\widetilde{\theta}_k$ визначають тривалість часу (період) сталості монотонного процесу $\xi^+(t)$, а $n(\widetilde{\theta}_k)$ — кількість оплачених вимог за період $\widetilde{\theta}_k$.

4.5 Модифікації складного пуассонівського процесу з двостороннім відбиттям

Розглянемо складні пуассонівські процеси з двостороннім відбиттям, пов'язані з блуканням в інтервалі $(0, B)$. Такі модифіковані процеси ризику задаються за допомогою осцилюючих пуасонівських процесів (див. [52, 68]). Проста версія процесу з двостороннім відбиттям процесу $\xi_u(t) = u + ct - S(t)$ від рівня B (див. графіки 4 в кінці монографії) описується стохастичним співвідношенням

$$\xi_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} \xi_u(t), \ \tau_B(u) > t, \\ \xi_{B,0}(t - \tau^-(-u)), \ \tau_B(u) < t, \ \tau^-(-u) < \tau^+(v), \\ \xi_{B,u}(t - \tau^+(v)), \ \tau_B(u) < t, \ \tau^+(v) < \tau^-(-u). \end{cases} \quad (4.115)$$

Згідно з другим рядком в (4.115) процес $\xi_{B,u}(t)$ після влучення в 0 надалі при досягненні рівня B постійно відбивається в 0.

Позначимо х.ф. для $\xi_{B,u}(\theta_s)$ та його щільність

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_{B,u}(\theta_s)} = s\int_0^\infty \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_{B,u}(t)}e^{-st}dt,$$
$$P_{B,u}(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi_{B,u}(\theta_s) < x\}, \quad 0 \le x \le B$$

й доведемо твердження.

Теорема 4.11. *Х.ф. $\xi_{B,0}(\theta_s)$ та $\xi_{B,u}(\theta_s)$ (див. (4.115)) визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}\varphi_{B,0}(s,\alpha) &= \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \tau_B(0) > \theta_s]P^{-1}(B,s,0) = \qquad (4.116)\\ &= \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}P^{-1}(B,s,0)\times\\ &\times\left\{p_-(s) - \frac{1}{cR_s(B)}\mathbf{E}[e^{i\alpha(\xi^-(\theta_s)+B)}, \xi^-(\theta_s)\in[-B,0]]\right\}.\end{aligned}$$

Якщо $u > 0$ ($u \in (0,B)$), тоді

$$\begin{aligned}\varphi_{B,u}(s,\alpha) &= (1-Q^B(s,u))^{-1}\{Q_B(s,u)\varphi_{B,0}(s,0) + \qquad (4.117)\\ &+ \frac{\rho(s)e^{i\alpha u}}{\rho(s)-i\alpha}[\varphi_-(s,\alpha)(1-Q^B(s,u))e^{i\alpha v}]_{[-u,v]}\}.\end{aligned}$$

Для щільностей розподілу $\xi_{B,0}(\theta_s)$ та $\xi_{B,u}(\theta_s)$ справедливі співвідношення

$$\begin{aligned}p_{B,0}(s,x) &= sQ^B(s,0)R_s(B-x)P^{-1}(B,s,0),\\ p_{B,u}(s,x) &= (I-Q^B(s,u))^{-1}\{Q_B(s,u)p_{B,0}(s,x) + \qquad (4.118)\\ &+ xQ^B(s,u)R_s(B-s) - sR_s(u-x)\delta(x<u)\}.\end{aligned}$$

Доведення. На основі (4.115) виводиться рівняння

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_{B,u}(t)} &= \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(t)}, \tau_B(u) > t] +\\ &+ \int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_{B,u}(t-y)}, \tau^-(-u)\in dy, \tau^+(v) > y] +\\ &+ \int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_{B,u}(t-y)}, \tau^+(v)\in dy, \tau^-(-u) > y],\end{aligned}$$

яке після перетворення Лапласа–Карсона набуває вигляду

$$\begin{aligned}\varphi_{B,u}(s,\alpha) &= \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)}, \tau_B(u) > \theta_s] +\\ &+ \varphi_{B,0}(s,\alpha)Q_B(s,u) + \varphi_{B,u}(s,\alpha)Q^B(s,u). \qquad (4.119)\end{aligned}$$

Звідси при $u = 0$ знаходимо, що

$$\varphi_{B,0}(s,\alpha) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \tau_B(0) > \theta_s][1-Q(B,s,0)]^{-1}.$$

Враховуючи (4.60) та співвідношення $P(B,s,u) = 1 - Q(B,s,u)$ з останнього співвідношення одержимо (4.116), з якого також після обернення відносно α одержимо щільність $p_{B,0}(s,x)$. Після обернення співвідношення

$$\begin{aligned}\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \{&\varphi_{B,0}(s,\alpha)Q(B,s,u) + \\ &+ \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)}, \tau_B(u) > \theta_s]\}P^{-1}(B,s,u),\end{aligned}$$

яке випливає з (4.119), з урахуванням (4.66) знаходиться щільність $p_{B,u}(s,x)$ в (4.118). □

Наслідок 4.4. *При умові* $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$ *справедливі граничні співвідношення* $(0 \le u \le B)$

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0} s^{-1}P(B,s,u) = \mathbf{E}\tau_B(u) = Q^B(u)\int_0^B R(y)dy - \int_0^u R(y)dy,\\ &\lim_{s\to 0} s^{-1}P(B,s,0) = \mathbf{E}\tau_B(0) = Q^B(0)\int_0^B R(y)dy,\\ &\varphi_{B,0}(\alpha) = \varphi_{B,u}(\alpha) = \lim_{s\to 0}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_{B,u}(\theta_s)} = \\ &\qquad = \frac{1}{i\alpha m\mathbf{E}\tau_B(0)}\left\{p_- - Q^B(0)\mathbf{E}[e^{i\alpha(\xi^- + B)}, \xi^- \ge -B]\right\},\end{aligned} \tag{4.120}$$

де

$$Q^B(u) = \frac{R(u)}{R(B)}, \quad Q^B(0) = \frac{1}{cR(B)}.$$

Граничні щільності визначаються одним і тим же співвідношенням

$$\begin{aligned}p_{B,0}(x) = p_{B,u}(x) = \lim_{s\to 0} p_{B,0}(s,x) = \frac{Q^B(0)R(B-x)}{\mathbf{E}\tau_B(0)} = \\ = R(B-u)[\int_0^B R(y)dy]^{-1}, \quad 0 < x < B.\end{aligned} \tag{4.121}$$

Доведення. Перші дві формули в (4.120) випливають з останньої формули в (4.46). Гранична х.ф. визначається з (4.116) та (4.117) після переходу до границі при $s \to 0$. Так само при $s \to 0$ з (4.118) випливає формула (4.120) для щільності $p_{B,0}(x)$. □

Зауважимо, що процес з відбиттям (4.115) після влучення в 0 при досягненні рівня B постійно відбивається в нуль. Більш загальну модель процесу з двостороннім відбиттям (див. [52]) можна одержати, якщо дещо змінити другий рядок в (4.115) і задати стохастичні співвідношення для процесів $\xi^u_{B,u}(t)$ та $\xi^u_{B,0}(t)$ (див. другий графік 4 в кінці монографії)

$$\xi^u_{B,u} \doteq \begin{cases} \xi_u(t), \quad \tau_B(u) > t, \\ \xi^u_{B,u}(t - \tau^+(v)), \quad \tau^+(v) < t, \quad A_+(B), \\ \xi^u_{B,0}(t - \tau^-(-u)), \quad \delta^-(-u) < t, \quad A_-(B); \end{cases} \tag{4.122}$$

$$\xi^u_{B,0} \doteq \begin{cases} \xi(t), \quad \tau_B(0) > t, \\ \xi^u_{B,u}(t - \tau^+(B)), \quad \tau^+(B) < t, \quad A_+(B), \\ \xi^u_{B,0}(t - \tau^-(0)), \quad \tau^-(0) < t, \quad A_-(B), \end{cases} \tag{4.123}$$

де $A^\pm(B) = \{\omega : \tau^+(v) \gtrless \tau^-(-u)\}$.

Введемо позначення х.ф. і деяких визначників

$$\begin{aligned}
&\varphi^u_{B,0}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,0}(\theta_s)}, \quad \varphi^u_{B,u}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,u}(\theta_s)}, \\
&v_s(\alpha,u,B) = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)}, \tau_B(u) > \theta_s], \quad 0 \le u < B, \\
&\widetilde{\Delta}_1(s,\alpha,u,B) = \begin{vmatrix} v_s(\alpha,0,B) & -Q^B(s,0) \\ v_s(\alpha,u,B) & 1 - Q^B(s,u) \end{vmatrix}, \\
&\widetilde{\Delta}_2(s,\alpha,u,B) = \begin{vmatrix} 1 - Q^B(s,u) & v_s(\alpha,0,B) \\ Q^B(s,u) & v_s(\alpha,u,B) \end{vmatrix}, \\
&\Delta(s,u,B) = (1 - Q_B(s,0))P(B,s,u) + Q_B(s,u)P(B,s,0).
\end{aligned}$$

Теорема 4.12. *Х.ф. $\xi^u_{B,0}(\theta_s)$ та $\xi^u_{B,u}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\varphi^u_{B,0}(s,\alpha) = \widetilde{\Delta}_1(s,\alpha,u,B)\Delta^{-1}(s,u,B), \\
&\varphi^u_{B,u}(s,\alpha) = \widetilde{\Delta}_2(s,\alpha,u,B)\Delta^{-1}(s,u,B).
\end{aligned} \tag{4.124}$$

Щільності ймовірностей розподілу $\xi^u_{B,u}(\theta_s)$ та $\xi^u_{B,0}(\theta_s)$ виражаються через щільність розподілу процесу до моменту першого виходу з $[0,B]$.

$$p_s(x,u,B) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi_u(\theta_s) < x, \tau_B(u) > \theta_s\} = \tag{4.125}$$

$$= sQ^B(s,u)R_s(B-x) - sR_s(u-x)\delta(x<u), \quad 0 \le u < B,$$

$$\Big(v_s(\alpha,u,B) = \int_0^B e^{i\alpha x} p_s(x,u,B)dx, \;\; 0 \le u < B\Big),$$

яка входить у обернені відносно α *визначники* $\widetilde{\Delta}_{1,2}$ *в термінах* $p_s(x,u,B)$

$$\Delta_1(s,x,u,B) = \begin{vmatrix} p_s(x,0,B) & -Q^B(s,0) \\ p_s(x,u,B) & 1-Q^B(s,0) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(s,x,u,B) = \begin{vmatrix} 1-Q^B(s,u) & p_s(x,0,B) \\ -Q^B(s,u) & p_s(x,u,B) \end{vmatrix}.$$

А саме

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^u_{B,0}(\theta_s) < x\} = \frac{\Delta_1(s,x,u,B)}{\Delta(s,u,B)}, \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^u_{B,u}(\theta_s) < x\} = \frac{\Delta_2(s,x,u,B)}{\Delta(s,u,B)} \quad (0<x<B).$$

Граничні щільності визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^u_{B,0}(\theta_s) < x\} = \lim_{s\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^u_{B,u}(\theta_s) < x\} = \\ &\quad = \{Q^B(0)R(B-x)Q_B(u) + \\ &\quad + [Q^B(u)R(B-x) - R(u-x)\delta(u>x)Q^B(0)]\} \times \\ &\quad \times [\mathbf{E}\tau_B(u)Q^B(0) + \mathbf{E}\tau_B(0)Q_B(u)]^{-1}, \quad 0<x<B, \end{aligned} \tag{4.127}$$

де

$$Q^B(0) = [cR(B)]^{-1}, \quad Q^B(u) = R(u)R^{-1}(B),$$

$$\mathbf{E}\tau_B(0) = Q^B(0)\int_0^B R(y)dy, \quad Q_B(u) = 1 - R(u)R^{-1}(B),$$

$$\mathbf{E}\tau_B(u) = Q^B(u)\int_0^B R(y)dy - \int_0^u R(y)dy, \quad 0 \le u < B.$$

Доведення. Для х.ф. $\xi^u_{B,0}(t)$, $\xi^u_{B,u}(t)$ з (4.122), (4.123) виводяться рівняння типу згортки

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,0}(t)} = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi(t)}, \tau_B(0) > t] +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,u}(t-y)}\mathbf{P}\{\tau^+(B)\in dy, A_+(B)\}+\\
&+\int_0^t \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,0}(t-y)}\mathbf{P}\{\tau^-(0)\in dy, A_-(B)\},\\
\mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,u}(t)} &= \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(t)}, \tau_B(u)>t]+\\
&+\int_0^t \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,u}(t-y)}\mathbf{P}\{\tau^+(B)\in dy, A_+(B)\}+\\
&+\int_0^t \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^u_{B,0}(t-y)}\mathbf{P}\{\tau^-(-u)\in dy, A_-(B)\}.
\end{aligned}
$$

Після перетворення Лапласа–Карсона ці рівняння виражаються в термінах інтегральних перетворень щільності розподілу $\xi_u(\theta_s)$ до моменту виходу з $[0, B]$

$$
\begin{aligned}
\varphi^u_{B,0}(s,\alpha) &= v_s(\alpha,0,B)+\varphi^u_{B,u}(s,\alpha)Q^B(s,0)+\varphi^u_{s,0}(s,\alpha)Q_B(s,0),\\
\varphi^u_{B,u}(s,\alpha) &= v_s(\alpha,u,B)+\varphi^u_{B,u}(s,\alpha)Q^B(s,u)+\varphi^u_{B,u}(s,\alpha)Q_B(s,u).
\end{aligned}
$$

Звідси одержимо систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\varphi^u_{B,0}(s,\alpha)(1-Q_B(s,0))-\varphi^u_{B,u}(s,\alpha)Q^B(s,0) = v_s(\alpha,0,B), \qquad (4.128)\\
&-\varphi^u_{B,0}(s,\alpha)Q_B(s,0)+\varphi^u_{B,u}(s,\alpha)(1-Q^B(s,u)) = v_s(\alpha,u,B),
\end{aligned}
$$

розв'язок якої визначається співвідношеннями (4.124). Після обернення по α (4.124) отримаємо в термінах визначників $\Delta_{1,2}$ формулу (4.126) для щільностей $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi^u_{B,u}(\theta_s)<x\}$. Слід зауважити, що визначники системи (4.128)

$$
\Delta(s,u,B) = \begin{vmatrix} 1-Q_B(s,0) & -Q^B(s,0)\\ -Q_B(s,u) & 1-Q^B(s,u)\end{vmatrix}
$$

спрощуються, якщо врахувати, що діагональні елементи виражаються через $P(B,s,u)+Q_B(s,u)$ ($u=0$, $u>0$). Тому

$$
\begin{aligned}
\Delta(s,u,B) &= \begin{vmatrix} P(B,s,0)+Q^B(s,0) & -Q^B(s,0)\\ -Q_B(s,u) & P(B,s,u)+Q_B(s,u)\end{vmatrix} =\\
&= P(B,s,0)P(B,s,u)+P(B,s,0)Q_B(s,u)+Q^B(s,0)P(B,s,u) =\\
&= P(B,s,u)(I-Q_B(s,0))+P(B,s,0)Q_B(s,u).
\end{aligned}
$$

Після такого спрощення легко перевірити, що при $\alpha = 0$ в (4.124)

$$\widetilde{\Delta}_{1,2}(s, 0, u, B) = \Delta(s, u, B).$$

Згідно з результатами теореми 4.12 для $p_s(x, u, B) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi_k(\theta_s) < x, \tau_B(u) > \theta_s\}$ урізане інтегральне перетворення має вигляд:

$$\begin{aligned} v_s(\alpha, u, B) &= \int_0^B e^{i\alpha x} p_s(x, u, B)dx = \\ &= sQ^B(s, u)e^{i\alpha B} r_s^B(-\alpha) - se^{i\alpha u} r_s^u(-\alpha), \qquad (4.129) \\ e^{i\alpha B} r_s^B(-\alpha) &= \int_0^B R_s(B - x)e^{i\alpha x}dx, \quad 0 \le u < B. \end{aligned}$$

Одержані зображення для $v_s(\alpha, u, B)$ дають можливість знайти граничну х.ф. та відповідний граничний розподіл (4.127) при $s \to 0$. $\square$

Щоб охопити випадок, коли початковий процес $\xi(t)$ є сумішшю пуассонівського процесу і дифузійної компоненти, слід розглянути дещо видозмінене відбиття в початковий стан $u > 0$ і від верхнього, і від нижнього рівня. Для цього випадку модифікована версія процесу з двостороннім відбиттям визначається так. Нехай

$$\xi_u(t) = u + \xi(t), \quad t > 0, \quad u > 0, \quad \xi(0) = 0,$$

де $\xi(t)$ неперервний зверху процес з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha c - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \qquad (4.130)$$

$$\int_{-\infty}^0 |x|\Pi(dx) < \infty.$$

Тоді модифікований процес $\eta_{B,\sigma}^u(t)$ задається стохастичним співвідношенням

$$\eta_{B,\sigma}^u(t) \doteq \begin{cases} \xi_u(t), \quad \tau_B(u) > t, \\ \eta_{B,\sigma}^u(t - \tau^+(v)), \quad \tau_B(u) = \tau^+(v) < \tau^-(-u), \\ \qquad\qquad \tau^+(v) < t, \\ \eta_{B,\sigma}^u(t - \tau^-(-u)), \quad \tau_B(u) = \tau^-(-u) < \tau^+(v), \\ \qquad\qquad \tau^-(-u) < t. \end{cases} \qquad (4.131)$$

Для цього процесу має місце

Теорема 4.13. *Якщо* $\xi(t)$ *неперервний зверху процес з кумулянтою* (4.130)*, то х.ф. процесу* (4.131)

$$\varphi^u_{B,\sigma}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(\theta_s)}, \quad 0 < u < B,$$

визначається співвідношенням

$$\varphi^u_{B,\sigma}(s,\alpha) = v_s(\alpha,u,B)[1 - \mathbf{E}e^{-s\tau_B(u)}]^{-1}, \tag{4.132}$$

де згідно з (4.66) *інтегральне перетворення щільності* $p_s(x,u,B)$

$$v_s(\alpha,u,B) = sQ^B(s,u)\int_0^B e^{i\alpha x}R_s(B-x)dx - \\ - s\int_0^u e^{i\alpha x}R_s(u-x)dx.$$

Гранична х.ф. процесу $\eta^u_{B,\sigma}(t)(t \to \infty)$ *визначається співвідношенням*

$$\varphi^u_{B,\sigma}(\alpha) = \lim_{s\to 0}\varphi^u_{B,\sigma}(s,x) = \frac{v'_0(\alpha,u,B)}{\mathbf{E}\tau_B(u)}, \tag{4.133}$$

де згідно з попередньою формулою для $v_s(\alpha,u,B)$ *похідна по* s *в нулі має вигляд*

$$v'_0(\alpha,u,B) = Q^B(u)\int_0^B e^{i\alpha x}R(B-x)dx - \int_0^u e^{i\alpha x}R(u-x)dx,$$
$$\mathbf{E}\tau_B(u) = Q^B(u)\int_0^B R(x)dx - \int_0^u R(x)dx. \tag{4.134}$$

Гранична щільність розподілу цього процесу з двостороннім відбиттям визначається співвідношенням $(0 < u < B)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\eta^u_{B,\sigma}(\infty) < x\} = \\ = [Q^B(u)R(B-x) - R(u-x)\delta(u > x)][\mathbf{E}\tau_B(u)]^{-1}. \tag{4.135}$$

Доведення. На основі (4.131) для х.ф. модифікованого процесу виводиться рівняння

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(t)} = \mathbf{E}[e^{i\alpha\xi_u(t)}, \tau_B(u) > t] +$$

$$+\int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(t-y)}, \tau_B(u) = \tau^+(v) \in dy] +$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}[e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(t-y)}, \tau_B(u) = \tau^-(-u) \in dy].$$

Після перетворення Лапласа–Карсона для х.ф.

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}[e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(t)}]dt = \mathbf{E}e^{i\alpha\eta^u_{B,\sigma}(\theta_s)}$$

з попереднього рівняння одержимо нове рівняння

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = v_s(\alpha,u,B) + \varphi_{B,u}(s,\alpha)(Q_B(s,u) + Q^B(s,u)),$$

з якого випливає (4.132). Після граничного переходу ($s \to 0$) із (4.132) визначається гранична х.ф. (4.133). Згідно з (4.24) після обернення знаходимо щільність (4.135). При цьому слід врахувати, що (залежно від знаку m_1) значення потенціалу $R(x)$ визначається простим співвідношенням (4.37). Отже в правій частині формул (4.133), (4.134) слід підставити (див. 1-й рядок в (4.37))

1) при $m_1 > 0$ $R(x) = R_+(x)$;

2) при $m_1 < 0$ (див. 2-й рядок в (4.37)) $R(x) = R_-(x)$;

3) при $m_1 = 0$ слід підставити (див. 3-й рядок в (4.37)) $R(x) = R_0(x)$. Зауважимо, що в цьому випадку ($\sigma > 0$) для зображень резольвент (4.27) та (4.28) знак "$-$" в нижній межі інтегрування слід пропустити, коли розподіл максимуму (мінімуму) $\xi^\pm(\theta_s)$ не має атома в нулі. □

4.6 Про вихід з інтервалу майже напівнеперервних східчастих процесів

Перш за все нагадаємо деякі результати дослідження задачі про вихід з інтервалу для однорідних процесів з незалежними приростами в загальному випадку. В [19, т. II] для спільного розподілу екстремумів та самого процесу до момента виходу з інтервалу встановлені співвідношення в термінах рядів "згорток" (у певному сенсі) розподілів пар $\{\tau^\pm(x), \gamma^\pm(x)\}$:

$$\Gamma^0_\pm(x,dt,dy) = \mathbf{P}\left\{\tau^\pm(x) \in dt, \gamma^\pm(x) \in dy\right\}.$$

В монографії [14] для розподілу процесу до моменту виходу з інтервалу $[x-T, x]$ одержано майже аналогічне співвідношення в термінах "згорток" генератрис по s і розподілу по y

$$\Gamma^0_{\pm}(s,x,y) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^{\pm}(\pm x)}, \gamma^{\pm}(\pm x) \le y\big].$$

Нижче ми наводимо це співвідношення для

$$H_s(T,x,y) = \mathbf{P}\left\{\xi(\theta_s) < y, \xi^+(\theta_s) < x, \xi^-(\theta_s) > x-T\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\xi(\theta_s) < y, \tau(x,T) > \theta_s\right\}$$

Лема 4.2 ([14], лема 6.1, с. 170)**.** *Спільний розподіл* $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s), \xi^-(\theta_s)\}$ *визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned} H_s(T,x,y) &= \mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) > x-T, \xi(\theta_s) \le y\right\} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \Gamma_+(s,x,dy_1)\Gamma_-(s,T+y_1,dy_2)\cdots \times \\ &\times \Gamma_+(s,T+y_{2n},dy_{2n+1}) \times \\ &\times \mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) > -T-y_{2n+1}, \xi(\theta_s) \le y-x-y_{2n+1}\right\} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \Gamma_-(s,T-x,dy_1)\Gamma_+(s,T+y_1,dy_2)\cdots \times \\ &\times \Gamma_+(s,T+y_{2n+1},dy_{2n+2}) \times \\ &\times \mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) > -T-y_{2n+2}, \xi(\theta_s) \le y-x-y_{2n+2}\right\}. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Для напівнеперервних процесів замість співвідношення (4.136) в [52] встановлено спрощення для щільності

$$h_s(T,x,y) = \frac{\partial}{\partial y} H_s(T,x,y), \quad x-T < y < x,$$

в термінах резольвенти $R_s(x)$ (див. (4.66) — для напівнеперервних зверху процесів та (4.73) — для напівнеперервних знизу процесів).

Ми сформулюємо без доведення теорему про розподіл пар $\left\{\tau^{\pm}(x,T), \gamma^{\pm}_T(x)\right\}$, $\gamma^+_T(x) = x-\xi(\tau^+(x,T))$, $\gamma^-_T(x) = x-T-\xi(\tau^-(x,T))$ у загальному випадку та про спрощення щільності $h_s(T,x,y)$ у випадку напівнеперервності.

Теорема 4.14. *Для довільного процесу з н.п. спільні розподіли пар* $\{\tau^{\pm}(x,T),\gamma_T^{\pm}(x)\}$ *визначається відповідно співвідношеннями* (*див.* [9–11], [14, с. 187])

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)},\gamma_T^+(x)>z\right]=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)},\xi(\tau^+(x,T))>z+x\right]=$$
$$=s^{-1}\int_{x-T}^{x}\Pi_+(x-y+z)dH_s(T,x,y), \tag{4.137}$$
$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(x,T)},\gamma_T^-(x)>z\right]=$$
$$=s^{-1}\int_{x-T}^{x}\Pi_-(x-T-y-z)dH_s(T,x,y), \tag{4.138}$$
$$\Pi_+(x)=\int_x^{\infty}\Pi(dy),\quad x>0;\quad \Pi_-(x)=\int_{-\infty}^{x}\Pi(dy),\quad x<0.$$

Для напівнеперервних зверху процесів щільність $h_s(T,x,y)$ *визначається співвідношенням, яке виражається через резольвенту* $R_s(x)$ *та генератрису*

$$Q^T(s,x)=R_s(T-x)R_s^{-1}(T)\quad (0<x<T)\,,$$
$$h_s(T,x,y)=sQ^T(s,x)R_s(x-y)-sR_s(-y)I\{x>y\}\,, \tag{4.139}$$
$$Q(T,s,x)=\mathbf{E}\,e^{-s\tau(x,T)}=$$
$$=1-s\left[Q^T(s,x)\int_0^T R_s(y)dy-\int_0^x R_s(y)dy\right].$$

Тоді згідно з (4.138) *для напівнеперервного зверху процесу має місце співвідношення*

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(x,T)},\xi(\tau^-(x,T))<z\right]=$$
$$=Q^T(s,x)\int_{x-T}^{x}\Pi_-(z-y)R_s(x-y)dy-$$
$$-\int_{x-T}^{0}\Pi_-(z-y)R_s(-y)dy,\quad z<x-T. \tag{4.140}$$

Співвідношення (4.137), (4.138), одержані М.С. Братійчуком в [10, 12], і для процесів з обмеженою варіацією мають просту інтерпретацію. Значення процесу в момент першого виходу з інтервалу визначає сума значення його перед виходом з інтервалу та значення стрибка, що перетинає верхню(нижню) межу інтервалу. Співвідношення (4.139) для $h_s(T, x, y)$, одержане в [52], на основі якого з (4.138) випливає (4.140), що узгоджується з відповідним співвідношенням в нашій з М.С.Братійчуком монографії [14].

Виникає питання, чи можна для майже напівнеперервних процесів отримати відповідні спрощення для щільності $h_s(T, x, y)$ та для розподілів пар $\left\{\tau^{\pm}(x, T), \gamma_T^{\pm}(x)\right\}$?

Оскільки для вказаних процесів ми не маємо зображення резольвенти $R_s(x)$, що визначається шляхом обернення $r_s(\alpha) = (\psi(\alpha) - s)^{-1}$, не ясно як виразити через неї хоча б одну з генератрис

$$\begin{aligned}
&Q^T(s, x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x,T)}, A_+(x)\big],\\
&A_+(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) > x\}\,,\\
&Q_T(s, x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, A_-(x)\big],\\
&A_-(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) < x - T\}\,,
\end{aligned}$$

бо для неперервних зверху процесів $Q^T(s, x)$ визначається відношенням значень резольвенти. Виникає питання, як іншим способом знайти хоча б одну з указаних генератрис?

Нехай $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху східчастий процес. Такі процеси в теорії ризику, з інтерпретаційної точки зору, зручніше розглядати як різницю двох монотонних пуасонівських процесів

$$\xi(t) = C(t) - S(t), \quad S(t) = \sum_{k \le \nu_1(t)} \xi'_k, \quad C(t) = \sum_{k \le \nu_2(t)} \xi''_k,$$

де $\nu_{1,2}(t)$ — прості пуасонівські процеси з параметрами $\lambda_{1,2} > 0$, $S(t)$ процес з вимогами $\xi'_k > 0$ з довільним розподілом, $C(t)$ — процес з преміями $\xi''_k > 0$, що мають показниковий розподіл

$$\mathbf{E}\, e^{i\alpha\xi''_k} = c(c - i\alpha)^{-1}, \quad c > 0.$$

В той же час ми будемо розглядати його як немонотонний процес із стрибками ξ_k довільного знаку

$$\xi(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \mathbf{E}\,\left[e^{i\alpha\xi_k} \,|\, \xi_k > 0\right] = \frac{c}{c - i\alpha},$$

$\nu(t)$ — простий пуасонівський процес із сумарною інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, що визначає показниковий розподіл моменту першого стрибка ζ_1 $\left(\mathbf{P}\left\{\zeta_1 > t\right\} = e^{-\lambda t}\right)$.

Зауважимо, що при $c \to \infty : C(t) \to 0$, та $\xi(t) \to -S(t)$, тобто граничний процес має лише від'ємні стрибки. Якщо ввести процес $C_c(t)$ з кумулянтою $\psi_c(\alpha) = \lambda_c(c(c - i\alpha)^{-1} - 1)$, $\lambda_c = ac$, $a > 0$, тоді при $c \to \infty : C_c(t) \to at$, оскільки $\psi_c(\alpha) \to i\alpha a$. Отже $\xi_c(t) = C_c(t) - S(t) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} \xi^0(t) = at - S(t)$, тобто граничний процес стає класичним напівнеперервним зверху процесом ризику.

Оскільки $\mathbf{P}\,(A_+(x)) = 1$ при $x < 0$, то виконуються крайові умови

$$Q^T(s,x) = \begin{cases} 0, & x > T, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Із стохастичних співвідношень для $\tau^+(x,T)$, $\gamma_T^+(x)$ ($\xi = \xi_1$, $\zeta = \zeta_1$):

$$\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} \zeta, & \xi > x, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi,T), & x - T < \xi < x, \end{cases}$$
$$\gamma_T^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ \gamma_T^+(x-\xi), & x - T < \xi < x, \end{cases} \tag{4.141}$$

виводиться інтегральне рівняння для

$$V^+(s,\alpha,x) = V^+(s,\alpha,x,T) = \mathbf{E}\big[e^{i\alpha\gamma_T^+(x) - s\tau^+(x,T)}, A_+(x)\big],$$
$$(s+\lambda)V^+(s,\alpha,x) = \frac{\lambda pc}{c - i\alpha}e^{-cx} +$$
$$+\lambda\int_{x-T}^{x} V^+(s,\alpha,x-z)dF(z), \quad 0 < x < T. \tag{4.142}$$

При $\alpha = 0$ з (4.142) випливає рівняння для $Q^T(s,x)$

$$(s+\lambda)Q^T(s,x) = \lambda p e^{-cx} +$$
$$+\lambda\int_{x-T}^{x} Q^T + (s,x-z)dF(z), \quad 0 < x < T. \tag{4.143}$$

Після заміни

$$\overline{Q}^{\,T}(s,x) = 1 - Q^T(s,x) = \begin{cases} 1, & x > T, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

з (4.143) випливає рівняння для $\overline{Q}^{\,T}(s,x)$ $(0 < x < T)$

$$(s+\lambda)\overline{Q}^{\,T}(s,x) = s + \lambda F(x-T) +$$

$$+\lambda \int_0^T \overline{Q}^{\,T}(s,z)F'(x-z)dz, \tag{4.144}$$

яке можна продовжити на додатну піввісь $x > 0$:

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda)\overline{Q}^{\,T}(s,x) = sC(x) + \\
&\quad + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q}^{\,T}(s,z)F'(x-z)dz + C_T^{>}(s,x), \qquad (4.145)\\
&C(x) = I\{x>0\}, \quad C_T^{>}(s,x) = \overline{C}_T(s)e^{-cx}I_{\{x>T\}} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
&\overline{C}_T(s) = \lambda p\left[e^{cT} - c\overline{Q}^{\,*}_s(T)\right], \quad \overline{Q}^{\,*}_s(T) = \int_0^T e^{cx}\overline{Q}^{\,T}(s,x)dx.
\end{aligned}$$

Розглянемо замість рівняння (4.145) трохи змінене рівняння для деякої функції $Y_\epsilon(T,s,x)$, яке одержується після заміни $C(x)$ на $C_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x}C(x)$, $x > 0$ ($\epsilon > 0$, як завгодно мале). Позначимо

$$\begin{aligned}
&y_\epsilon(T,s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}Y_\epsilon(T,s,x)dx,\\
&\widetilde{C}_T(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}C_T^{>}(s,x)dx,
\end{aligned}$$

і доведемо наступне твердження

Лема 4.3. *Інтегральне перетворення $y_\epsilon(T,s,\alpha)$ розв'язку рівняння*

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda)Y_\epsilon(T,s,x) = sC_\epsilon(x) + \\
&\quad + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} Y_\epsilon(T,s,x-z)dF(z) + C_T^{>}(s,x), \quad x>0, \qquad (4.146)
\end{aligned}$$

визначається співвідношенням

$$sy_\epsilon(T,s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\big[\varphi_-(s,\alpha)\big(s\widetilde{C}_\epsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T(s,\alpha)\big)\big]_+, \tag{4.147}$$

а сам розв'язок має вигляд при $x > 0$

$$\begin{aligned}
sY_\epsilon(T,s,x) = {}& s\int_0^x B_\epsilon(x-y)dP_+(s,y) + \\
&+ \int_0^x B(s,x-y,T)dP_+(s,y), \qquad (4.148)
\end{aligned}$$

$$B_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\epsilon(x-y)} dP_-(s,y) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\epsilon(x-y)} dP_-(s,y) = \\ = e^{-\epsilon x} \mathbf{E}\, e^{-\epsilon \xi^-(\theta_s)},$$

$$B(s,x,T) = \overline{C}_T(s) \int_{-\infty}^{x-T} e^{-c(x-y)} dP_-(s,y), \quad x > 0.$$

Доведення. Застосувавши до рівняння (4.146) одностороннє перетворення Фур'є, одержимо рівняння

$$(s - \psi(\alpha)) y_\epsilon(T,s,\alpha) = s\widetilde{C}_\epsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T(s,\alpha) - [y_\epsilon(\alpha)\varphi(\alpha)]_-\,,$$

тобто

$$s y_\epsilon(T,s,\alpha)\varphi^{-1}(s,\alpha) = s\widetilde{C}_\epsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T(s,\alpha) - [y_\epsilon(\alpha)\varphi(\alpha)]_-\,. \tag{4.149}$$

З рівняння (4.149) після факторизаційного розкладу та операції проектування випливає співвідношення

$$s y_\epsilon(T,s,\alpha)\varphi_+^{-1}(s,\alpha) = \big[\varphi_-(s,\alpha)\big(s\widetilde{C}_\epsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T(s,\alpha)\big)\big]_+,$$

яке еквівалентне (4.147), оскільки $\big[\varphi_-(s,\alpha)\,[y_\epsilon(\alpha)\varphi(\alpha)]_-\big]_+ = 0$. Після обернення (4.147) доводиться (4.148). □

На основі леми встановлюється твердження (див. [182])

Теорема 4.15. *Для майже напівнеперервних зверху процесів* $Q^T(s,x)$ *визначається співвідношенням* $(0 < x < T)$

$$Q^T(s,x) = q_+(s) \int_{x-T}^{0} e^{\rho_+(s)(T-x+y)} dP_-(s,y) \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)} dP_-(s,y) + \int_{-T}^{0} e^{\rho_+(s)(T+y)} dP_-(s,y) \right]^{-1}. \tag{4.150}$$

Для майже напівнеперервних знизу процесів має місце аналог попереднього співвідношення $(0 < x < T)$

$$Q_T(s,x) = q_-(s) \int_0^x e^{\rho_-(s)(x-y)} dP_+(s,y) \times \\ \times [E[e^{b(T-\xi^+(\theta_s))}, \xi^+(\theta_s) > T] + \int_0^T e^{\rho_-(s)(T-y)} dP_+(s,y)]^{-1}.$$

Доведення. Оскільки $C_\epsilon(x) \to I\{x > 0\}$ при $\epsilon \to 0$, тому $Y_\epsilon(T, s, x) \to \overline{Q}^{\,T}(s, x)$ при $\epsilon \to 0$, $0 < x < T$. Отже з (4.148) одержимо співвідношення

$$s\overline{Q}^{\,T}(s,x) = sP_+(s,x) + p_+(s)B(s,x,T) + \\ + \int_{+0}^{x} B(s, x-z, T)P'_+(s,z)dz. \tag{4.151}$$

Після підрахунку останньої згортки (без коефіцієнта $\overline{C}_T(s)$), яка виражається подвійним інтегралом, одержимо співвідношення

$$q_+(s)\rho_+(s)\int_0^x \int_{-\infty}^{z-T} e^{-c(z-y)}dP_-(s,y)e^{-\rho_+(s)(x-z)}dz =$$
$$= q_+(s)\rho_+(s)\int_{-\infty}^{x-T} e^{-\rho_+(s)x+cy}dP_-(s,y)\int_{\max(0,y+T)}^{x} e^{-cq_+(s)z}dz =$$
$$= p_+(s)\Bigg[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy-\rho_+(s)x}dP_-(s,y) +$$
$$+ \int_{-T}^{x-T} e^{\rho_+(s)(y+T-x)-cT}dP_-(s,y) - \int_{-\infty}^{x-T} e^{-c(x-y)}dP_-(s,y)\Bigg].$$

Останній інтеграл одержаного співвідношення після домноження на $\overline{C}_T(s)$ анулює складову $p_+(s)B(s,x,T)$ в (4.151). Тому

$$s\overline{Q}^{\,T}(s,x) = sP_+(s,x) + p_+(s)\overline{C}_T(s)e^{-\rho_+(s)x} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy}dP_-(s,y) + \int_{-T}^{x-T} e^{-cT+\rho_+(s)(y+T)}dP_-(s,y)\right].$$

Проінтегрувавши останнє співвідношення по e^{cx} $(0 \le x \le T)$ одержимо рівняння для визначення $\overline{C}_T(s)$ та $\overline{Q}^{\,*}_s(T)$ і таким чином встановлюється справедливість (4.150). □

Зауважимо, що $B(s,x,T) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тому $Q^T(s,x) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \overline{P}_+(s,x)$. Крім того $Q^T(s,x) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Якщо розглянути процес $\xi_c(t)$, тоді, враховуючи, що $q^c_+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+_c(\theta_s) > 0\} \to 1$, та для $x > 0$: $\mathbf{P}\{\xi^+_c(\theta_s) > x\} = q^c_+(s)e^{-\rho^c_+(s)x} \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\rho^+_0(s)x}$, де $\rho^+_0(s)$ є додатним розв'язком рівняння $\psi^0(-ir) = 0$, ми отримаємо $Q^T_c(s,x) \to Q^T_\infty(s,x) = R_s(T-x)R_s^{-1}(T)$ при $c \to \infty$, що узгоджується з першою формулою в (4.139).

Наслідок 4.5. *Для майже напівнеперервних зверху процесів спільні розподіли пар* $\left\{\tau^+(x,T),\gamma_T^+(x)\right\}$ *та* $\{\tau^+(x,T),\xi^+(\tau^+(x,T))\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned} &V^+(s,\alpha,x,T)=\frac{c}{c-i\alpha}Q^T(s,x), \quad 0<x<T,\\ &\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x,T)},\gamma_T^+(x)>z\big]=Q^T(s,x)e^{-cz}, \quad z>0;\\ &V_+(s,\alpha,x,T)=e^{i\alpha x}V^+(s,\alpha,x,T)=\frac{c\,e^{i\alpha x}}{c-i\alpha}Q^T(s,x). \end{aligned} \tag{4.152}$$

Х.ф. $\xi(\theta_s)$ *до моменту виходу з інтервалу має вигляд*

$$\begin{aligned} &V(s,\alpha,x,T):=\mathbf{E}\big[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\tau(x,T)>\theta_s\big]=\\ &=\varphi_+(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-\frac{c}{c-i\alpha}e^{i\alpha x}Q^T(s,x)\right)\right]_{[x-T,\infty)}. \end{aligned} \tag{4.153}$$

Після обернення х.ф. (4.153) *одержимо щільність*

$$\begin{aligned} &h_s(T,x,z)=\frac{\partial}{\partial z}H_s(T,x,z)=\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\left\{\xi(\theta_s)<z,\ \tau(x,T)>\theta_s\right\}=\\ &=p_+(s)P'_-(s,z)I\left\{z<0\right\}+\\ &+q_+(s)\rho_+(s)\int_{x-T}^{\min(z,0)}e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y)-\\ &-\rho_+(s)Q^T(s,x)e^{-\rho_+(s)(z-x)}\left[e^{-\rho_+(s)T}\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}dP_-(s,y)+\right.\\ &\left.+\int_{-T}^{z-x}e^{\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right], \quad x-T<z<x, \quad z\neq 0, \end{aligned} \tag{4.154}$$

та співвідношення для атомарної ймовірності

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\xi(\theta_s)=0,\tau(x,T)>\theta_s\right\}=\mathbf{P}\left\{\xi(\theta_s)=0\right\}=\\ &\quad=p_+(s)p_-(s)=\frac{s}{s+\lambda}, \quad (z=0). \end{aligned}$$

Доведення. Перше співвідношення для (4.152) встановлюється безпосередньою перевіркою після підстановки його в рівняння (4.142) для $V^+(s,\alpha,x,T)$, а друге випливає з першого. Співвідношення (4.153) випливає з теореми 4.3 (див. (4.60)). Одному з доданків у

(4.153), а саме $[\varphi_-(s,\alpha)]_{[x-T,\infty)}$ відповідає щільність урізаного розподілу $\xi^-(\theta_s) \in [x-T, 0]$, а проекції $\left[\varphi_-(s,\alpha)c\,(c-i\alpha)^{-1}\,e^{i\alpha x}\right]_{[x-T,\infty)}$ — щільність розподілу суми $\xi^-(\theta_s) + \theta'_c + x$ зі значеннями більшими $x-T$. Після обернення по α (4.153) знаходимо співвідношення

$$
\begin{aligned}
&h_s(T,x,z) = p_+(s)\frac{\partial}{\partial z}P_-(s,z)I\left\{x-T \le z < 0\right\} + \\
&+ q_+(s)\rho_+(s)\int_{x-T}^{\min\{z,0\}} e^{-\rho_+(s)(z-y)}dP_-(s,y) - \\
&- Q^T(s,x)\Bigg[p_+(s)\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) + \theta'_c + x \le z\right\} I\left\{x-T \le z \le x\right\} + \\
&+ q_+(s)\rho_+(s)\int_{x-T}^{z} e^{-\rho_+(s)(z-y)}dP\left\{\xi^-(\theta_s) + \theta'_c + x < z\right\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

після усереднення якого за показниковим розподілом θ'_c, одержуємо (4.154). $\square$

Наслідок 4.6. *Розподіл пари $\{\tau^-(x,T), \xi(\tau^-(x,T))\}$ визначається співвідношенням*

$$
\begin{aligned}
&s\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) < z,\ A_-(x)\right] = \\
&\quad = \int_{x-T}^{x} \Pi_-(z-y)dH_s(T,x,y), \quad z < x-T,
\end{aligned}
\tag{4.155}
$$

де $H_s(T,x,y)$ визначається щільністю (4.154).

Імовірність відсутності виходу з інтервалу визначається співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&P\{\tau(x,T) > \theta_s\} = P\{\xi^-(\theta_s) > x-T\} - \\
&\quad - Q^T(s,x)[P\{\xi^-(\theta_s) > -T\} + \int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)}dP_-(s,z)].
\end{aligned}
\tag{4.156}
$$

Генератриси для $\tau(x,T)$ та $\tau^-(x,T)$ визначаються співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&Q(T,s,x) = 1 - \mathbf{P}\left\{\tau(x,T) > \theta_s\right\}, \quad 0 < x < T, \\
&Q_T(s,x) = Q(T,s,x) - Q^T(s,x), \quad 0 < x < T.
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

Доведення. Співвідношення (4.155) випливає з (4.137) після підстановки в нього (4.154) і виражається через $Q^T(s,x)$ та урізаний розподіл $\xi^-(\theta_s)+\theta'_c$. Проінтегрувавши (4.154) по інтервалу $[x-T,x]$ встановлюється (4.156). Дійсно, інтегрування першого доданку в (4.154) просте. При цьому проінтегрований перший доданок для $h_s(T,x,z)$ охоплює атомарну імовірність $\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=0\}=s(s+\lambda)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s)\in(x-T,0]\right\}p_+(s)=\\
&\quad=\frac{s}{s+\lambda}+\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s)\in(x-T,0)\right\}p_+(s).
\end{aligned}$$

Для другого проінтегрованого доданку одержимо співвідношення

$$\begin{aligned}
&\int_{x-T}^{x}\rho_+(s)\int_{x-T}^{z\wedge 0}e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y)dz=I_1+I_2,\\
&I_1=\rho_+(s)\int_{x-T}^{0}\int_{x-T}^{z}e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y)dz=\\
&\quad=\int_{x-T}^{0}\left(1-e^{\rho_+(s)y}\right)dP_-(s,y),\\
&I_2=\rho_+(s)\int_{0}^{x}\int_{x-T}^{0}e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y)dz=\\
&\quad=\int_{x-T}^{0}\left(1-e^{-\rho_+(s)x}\right)e^{\rho_+(s)y}dP_-(s,y),\\
&I_1+I_2=\int_{x-T}^{0}\left(1-e^{-\rho_+(s)(x-y)}\right)dP_-(s,y).
\end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо без ускладнень третій проінтегрований доданок. Склавши результати інтегрування одержимо співвідношення

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\tau(x,T)>\theta_s\right\}=\int_{x-T}^{x}dH_s(T,x,z)=\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s)>x-T\right\}-\\
&\quad-q_+(s)\int_{x-T}^{0}e^{-\rho_+(s)(x-z)}dP_-(s,z)-\\
&\quad-Q^T(s,x)\left[\left(1-e^{-\rho_+(s)T}\right)\int_{-\infty}^{-T}e^{c(z+T)}dP_-(s,z)+\right.\\
&\quad\left.+\int_{-T}^{0}\left(1-e^{\rho_+(s)z}\right)dP_-(s,z)\right],
\end{aligned}$$

з якого після нескладних перетворень випливає (4.156). Після підстановки (4.156) у перше співвідношення (4.157) знаходимо генератрису $\tau(x,T)$, після підстановки якої у друге співвідношення в (4.157) знаходимо генератрису $\tau^-(x,T)$.

Оскільки $Q^T(s,x) \to q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}$ $(x>0)$, при $T\to\infty$, то згідно з (4.156):

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\tau(x,T)>\theta_s\right\} &= 1-q_+(s)\mathbf{E}\,e^{\rho_+(s)\xi^-(\theta_s)} - \\ &- q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}\big(1-\mathbf{E}\,e^{\rho_+(s)\xi^-(\theta_s)}\big) = 1-q_+(s)e^{-\rho_+(s)x} = \\ &= 1-\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x),\tau^+(x)<\infty}\big] = P_+(s,x), \quad x>0. \qquad \square\end{aligned}$$

Зауважимо, що формула (4.150) для визначення $Q^T(s,x)$ є дещо складніша за першу формулу в (4.31) в термінах $R_s(x)$ для неперервних зверху процесів. Так само одержані формули для $Q^T(s,x)$ та $Q(T,s,x)$ складніші за відповідні формули в (4.53), а формула (4.154) для $h_s(T,x,z)$ складніша за другу формулу в (4.139).

Як і для випадку напівнеперервності для майже напівнеперервних процесів можна розглядати граничні задачі для модифікованих процесів з двостороннім відбиттям, дослідження яких неможливе без використання $h_s(T,x,z)$. При цьому граничні значення $h_s(T,x,y)$ та $H_s(T,x,y)\to 0$ при $s\to 0$, але існує границя

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}h_s(T,x,z) = h_0'(T,x,z), \tag{4.158}$$

яка залежно від знаку $m=\mathbf{E}\,\xi(1)$ визначається як і границя $\lim\limits_{s\to 0} R_s(x)$ різними значеннями. Для обчислення цих значень слід використати наступне твердження.

Лема 4.4. *Для напівнеперервних зверху процесів і майже напівнеперервних зверху процесів* $\left(\int_{-1}^0 |x|\Pi(dx)<\infty\right)$ *при* $m>0$

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0}\rho_+(s)s^{-1} = \rho_+'(0) = m^{-1},\\ &\lim_{s\to 0} P_-(s,x) = \mathbf{P}\left\{\xi^-<x\right\}, \quad x<0.\end{aligned} \tag{4.159}$$

При $m>0$

$$\lim_{s\to 0}\rho_+(s)=\rho_+>0;$$

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) > x\right\} = \mathbf{E}\,\tau^-(x), \quad x < 0. \tag{4.160}$$

Для напівнеперервних зверху процесів при $m = 0$ $\left(a = \int_{-\infty}^{0}|x|\Pi(dx)\right)$, $\sigma_1 = \sqrt{\mathbf{D}\xi(1)} < \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\rho_+(s)s^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}, \quad \sigma_1^2 = \sigma^2 + \int_{-\infty}^{0} x^2\Pi(dx),\\
&\lim_{s\to 0} s^{-1/2}P'_-(s,x) = f_*(x), \quad x < 0,\\
&f_*(x) = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\,\tau_*(x), \quad x < 0,
\end{aligned} \tag{4.161}$$

де $\tau_*(x) = \inf\{t > 0:\ \xi_*(t) < x\}$, $x < 0$, *а* $\xi_*(t)$ *— монотонно спадний процес зі знесенням* $a_* = -\sigma^2/2$, *та спектральною мірою від'ємних стрибків* $\Pi_*(dx) = \Pi(x)dx$, $x < 0$.

Для східчастих майже напівнеперервних зверху процесів з $\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1) < \infty$ *при* $m = \lambda\big(pc^{-1} - q\widetilde{F}(0)\big) = 0$ $\big(p = cq\widetilde{F}(0)\big)$ *справедливі співвідношення*

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\rho_+(s)s^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1};\\
&\lim_{s\to 0} s^{-1/2}P'_-(s,x) = f_0(x), \quad x < 0,\\
&f_0(x) = k_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \mathbf{P}\big\{\widetilde{\xi}_0(t) < x\big\}dt\right) = -k_0\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\,\tau_0(x), \quad x < 0;
\end{aligned} \tag{4.162}$$

де $k_0 = c\sigma_1\left(\sqrt{2}\right)^{-1}$, $\tau_0(x) = \inf\big\{t > 0; \widetilde{\xi}_0(t) < x\big\}$, $x < 0$. $\widetilde{\xi}_0(t)$ *— монотонно спадний процес зі спектральною мірою стрибків*

$$\Pi_0(dx) = \lambda q\left(cF(x)dx + dF(x)\right), \quad x < 0.$$

Доведення. Співвідношення (4.159), (4.160) доводились раніше і для напівнеперервних і для майже напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$. Доведення (4.161) достатньо провести для випадку, коли стрибкова частина $\xi(t)$ є східчастим процесом з від'ємними стрибками і додатним знесенням $a > 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s - i\alpha[a + i\alpha\sigma^2/2 - \lambda\widetilde{F}(\alpha)]},\\
&\widetilde{F}(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}F(x)dx.
\end{aligned}$$

На основі о.ф.т. при $m = 0$ $\big(m = a - \lambda\widetilde{F}(0) = 0,\ \lambda\mathbf{E}\,|\xi_1| = a\big)$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_+(s) - i\alpha}{\rho_+(s)}\sqrt{s}\frac{1}{s - i\alpha[a + i\alpha\sigma^2/2 - \lambda\widetilde{F}(\alpha)]}.$$

Звідси випливає існування границі $(s \to 0)$

$$\widetilde{f}_*(\alpha) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\sigma_1}{2}\frac{1}{i\alpha\sigma^2/2 - \lambda(\widetilde{F}(\alpha) - \widetilde{F}(0))}.$$

Отже

$$\widetilde{f}_*(\alpha) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{-\psi_*(\alpha)}, \quad \psi_*(\alpha) = i\alpha a_* + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{i\alpha x} - 1\right)\Pi_*(dx),$$

$$a_* = -\frac{\sigma^2}{2} < 0, \quad \Pi_*(dx) = \lambda F(x)dx, \quad x < 0.$$

Позначимо х.ф. стохастично зупиненого процесу $\xi_*(\theta_s)$

$$\varphi_*(s,\alpha) = \mathbf{E}\,e^{i\alpha\xi_*(\theta_s)} = \frac{s}{s - \psi_*(\alpha)},$$

де $\xi_*(t)$ — монотонно спадний процес з кумулянтою $\psi_*(\alpha)$

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\varphi_*(s,\alpha)s^{-1} \to \widetilde{f}_*(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} f_*(x)dx, \quad s \to 0.$$

Після обернення останнього співвідношення по α границі правої частині відповідає функція

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\xi_*(t) < x\right\}dt \to \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\xi_*(t) < x\right\}dt, \quad s \to 0.$$

Якщо позначити $\tau_*(x) = \inf\left\{t > 0:\ \xi_*(t) < x\right\}$, тоді

$$\begin{aligned} -f_*(x) &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\tau_*(x) > t\right\}dt = \\ &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau_*(x) > t\right\}dt, \end{aligned}$$

тобто

$$f_*(x) = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\,\tau_*(x), \quad x < 0.$$

При доведенні (4.162) для $m=0$ $\big(p=cq\widetilde{F}(0)\big)$ слід врахувати, що

$$\varphi(s,\alpha)=\frac{s(c-i\alpha)}{s(c-i\alpha)-i\alpha\lambda(p-q\widetilde{F}(\alpha)(c-i\alpha))},$$
$$\widetilde{F}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}e^{i\alpha x}F(x)dx.$$

Тому на основі о.ф.т. встановлюється, що при $s\to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\varphi_-(s,\alpha)=\frac{\sqrt{s}}{p_+(s)}\frac{\rho_+(s)-i\alpha}{s(c-i\alpha)-i\alpha\lambda\big(p-q\widetilde{F}(\alpha)(c-i\alpha)\big)}\to\widetilde{f}_0(\alpha),$$
$$\widetilde{f}_0(\alpha)=\frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{-\lambda q\big[\big(\widetilde{F}(\alpha)-\widetilde{F}(0)\big)c+\varphi(\alpha)-1\big]}=\frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{-\widetilde{\psi}_0(\alpha)}.$$

Після обернення останнього співвідношення по α одержимо (4.162). □

На підставі (4.154) та леми 4.4 встановлюється

Наслідок 4.7. *Значення $h_0'(T,x,z)$ (див. (4.158)) залежно від знаку m обчислюється так: при $m>0$ $(x-T<z<x,\ z\neq 0,\ 0<x<T)$*

$$h_0'(T,x,z)=\frac{1}{cm}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\left\{\xi^-<z\right\}I\left\{z<0\right\}+$$
$$+\frac{1}{m}\int_{x-T}^{z\wedge 0}d\mathbf{P}\left\{\xi^-<y\right\}-\frac{1}{m}Q^T(x)\left(\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}d\mathbf{P}\left\{\xi^-<y\right\}+\right.$$
$$\left.+\int_{-T}^{z-x}d\mathbf{P}\left\{\xi^-<y\right\}\right); \tag{4.163}$$

при $m<0$

$$h_0'(T,x,z)=-p_+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}\,\tau^-(z)I\left\{z<0\right\}-$$
$$-q_+\rho_+\int_{x-T}^{z\wedge 0}e^{\rho_+(y-z)}d\mathbf{E}\,\tau^-(y)+q_+Q^T(x)e^{-\rho_+(z-x)}\times$$
$$\times\left(e^{-\rho_+T}\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}d\mathbf{E}\,\tau^-(y)++\int_{-T}^{z-x}d\mathbf{E}\,\tau^-(y)\right); \tag{4.164}$$

при $m = 0$ ($f_0(x)$ *див.* (4.162))

$$h_0'(T,x,z) = \frac{\sqrt{2}}{c\sigma_1} f_0(z) I\{z<0\} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_{x-T}^{z\wedge 0} f_0(y)dy - \\ - \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1} Q^T(x)\left(\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)} f_0(y)dy + \int_{-T}^{z-x} f_0(y)dy\right). \qquad (4.165)$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу значення ймовірності банкрутства $Q^T(x) = \lim_{s\to 0} Q^T(s,x)$ *визначаються з* (4.150) *залежно від знаку* m *таким чином*

$$Q^T(x) = P\{\xi^- > x-T\}\Big[P\{\xi^- > -T\} + \\ + \int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)} dP\{\xi^- < y\}\Big]^{-1}, \quad m>0,$$

$$Q^T(x) = q_+ e^{-\rho_+ x}\left(\frac{1}{\lambda p_+} - \int_{x-T}^{0} e^{\rho_+ y}\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E}\tau^-(y)dy\right)\times \\ \times\left[\frac{1}{\lambda p_+} - e^{-\rho_+ T}\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E}\,\tau^-(y)dy + \\ + \int_{-T}^{0} e^{\rho_+ y}\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E}\,\tau^-(y)dy\right]^{-1}, \quad m<0,$$

$$Q^T(x) = \left(\frac{c\sigma_1}{\lambda\sqrt{2}} + \int_{x-T}^{0} f_0(y)dy\right)\left[\frac{c\sigma_1}{\lambda\sqrt{2}} + \int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)} f_0(y)dy + \\ + \int_{-T}^{0} f_0(y)dy\right]^{-1}, \quad m=0, \qquad (4.166)$$

Розподіл $\xi(\tau^-(x,\tau))$ *для майже напівнеперервного зверху процесу визначається через* $h_0'(T,x,y)$ *співвідношенням*

$$\mathbf{P}\left\{\xi(\tau^-(x,\tau)) \le z,\ A_-(x)\right\} = \qquad (4.167) \\ = \frac{1}{\lambda}\Pi_-(z) + \int_{x-T}^{x}\Pi_-(z-y)h_0'(T,x,y)dy, \quad z < x-T,$$

де $h_0'(T,x,y)$ *визначається в* (4.163)–(4.165) *залежно від знаку* m.

Доведення. Розділивши (4.154) на s після переходу до границі з урахуванням (4.159), одержимо (4.163); якщо врахувати (4.160)–(4.162), одержимо (4.164), (4.165). Аналогічно, на підставі леми 4.4 і співвідношення (4.150) встановлюється (4.166). Із співвідношення (4.155) випливає формула (4.167), в яку при відповідних значеннях m підставляються (4.163) при $m > 0$, (4.164) — при $m < 0$, (4.165) — при $m = 0$. □

Наслідок 4.8. *Для майже напівнеперервного зверху* ($c > 0$) *та знизу* ($b > 0$) *процесу* $\xi(t)$ *функція* $Q^T(x)$ *виражається наступними співвідношеннями*

$$
\begin{aligned}
Q^T(x) &= \left(1 - q_- e^{\rho_-(x-T)}\right)\left(1 - \frac{q_- c}{c+\rho_-} e^{-\rho_- T}\right)^{-1}, \quad m > 0,\\
Q^T(x) &= q_+ e^{-\rho_+ x}\left(1 - \frac{b}{\rho_+ + b} e^{\rho_+(x-T)}\right) \times\\
&\quad \times \left(1 - \frac{b q_+}{\rho_+ + b} e^{-\rho_+ T}\right)^{-1}, \quad m < 0,\\
Q^T(x) &= \frac{cq(b+c) + cb^2(T-x)}{b^2 + cq(b+c) + cb^2 T}, \quad m = 0.
\end{aligned} \tag{4.168}
$$

Якщо $\xi(t)$ *— симетричний процес* ($p = q = \frac{1}{2}$, $b = c$)*, тоді*

$$
Q^T(x) = \frac{1 + c(T-x)}{2 + cT}, \quad Q_T(x) = \frac{1 + cx}{2 + cT} \quad (0 < x < T).
$$

Доведення. Якщо $m > 0$, тоді $p_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} p_- > 0$

$$
\mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) < x\right\} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{P}\left\{\xi^- < x\right\} = q_- e^{bp_- x}, \quad x < 0. \tag{4.169}
$$

Враховуючи, що $p_+(s)p_-(s) = s\,(s+\lambda)^{-1}$, ми маємо при $m < 0$: $q_-'(s) = -p_-'(s) \to -(\lambda p_+)^{-1}$, при $s \to 0$,

$$
\mathbf{E}\,\tau^-(x) = -\frac{\partial}{\partial s} T^-(s,x)|_{s=0} = \frac{1 - bx}{\lambda p_+}, \quad x < 0. \tag{4.170}
$$

Якщо $m = 0$, тоді $\widetilde{\xi}_0(t)$ має стрибкову міру Леві

$$
\Pi_0(dx) = \lambda_0 b e^{bx} dx, \quad x < 0, \quad \lambda_0 = \lambda q(c+b) b^{-1},
$$

крім того,

$$
\widetilde{\xi}_0^-(t) = \widetilde{\xi}_0(t), \quad p_-^0(s) = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_0(\theta_s) = 0\} = \frac{s}{s + \lambda_0}.
$$

Тому генератриса $\tau_0^-(x) = \inf\{t : \xi_0(t) < x\}$ має вигляд

$$T_0^-(s, x) = \mathbf{E} e^{-s\tau_0^-(x)} = q_-^0(s) e^{bp_-^0(s)x}, \quad x < 0.$$

Оскільки $(p_-^0(s))' = -(q_-^0(s))' \to \lambda_0^{-1}$ при $s \to 0$, то

$$\mathbf{E}\,\tau_0^-(x) = -\frac{\partial}{\partial s} T_0^-(s, x)|_{s=0} = \frac{1 - bx}{\lambda_0}, \quad x < 0;$$

$$f_0(x) = \frac{bc\sigma_1}{\sqrt{2}\lambda_0}, \quad x < 0,$$

$$p_-(s)s^{-1/2} = \frac{\sqrt{s}}{(s+\lambda)p_+(s)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}\lambda}. \tag{4.171}$$

Підставляючи формули (4.169)–(4.171) у відповідні співвідношення (4.166), ми отримаємо (4.168). □

Для косо-східчастих майже напівнеперервних зверху процесів обмежимося твердженням про вихід з напівобмеженого інтервалу $(-\infty,\ x]$.

Теорема 4.16. *Нехай $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес з $a \le 0$, $\Pi_+(x) = \int_x^\infty \Pi(dy) = \Pi_+(0)e^{-cx} = \lambda p e^{-cx}$, $x > 0$. Тоді генератриса $\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ $(x > 0)$*

$$T(s, x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big]$$

задовольняє рівняння при $x > 0$

$$aT'(s, x) = \lambda \int_{-\infty}^x T(s, x - z)dF(z) - \\ - (s+\lambda)T(s, x) + \Pi_+(0)e^{-cx}, \tag{4.172}$$

єдиним розв'язком якого є експонента з $\rho_+(s) = cp_+(s)$

$$T(s, x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x \ge 0; \quad k(\rho_+(s)) = s. \tag{4.173}$$

Доведення. Обмежимося випадком $a = -1$, $\lambda = \int_{-\infty}^\infty \Pi(dx) < \infty$, $p = \overline{F}(0)$. Із стохастичного співвідношення

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta, & \xi - \zeta > x, \\ \zeta + \tau^+(x - \xi + \zeta), & \xi - \zeta \le x, \end{cases}$$

виводиться інтегральне рівняння при $x > 0$

$$T(s,x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)y} p e^{-c(x+y)} dy + \\ + \lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)y} \int_{-\infty}^{x+y} T(s, x+y-z) dF(z) dy,$$

яке зводиться після заміни $x + y = y'$ до вигляду

$$T(s,x) = \frac{\lambda p}{s+\lambda+c} e^{-cx} + \\ + \lambda \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{y} e^{-(s+\lambda)(y-x)} T(s, y-z) dF(z) dy, \quad x > 0.$$

Після диференціювання звідси випливає рівняння (4.172) з $a = -1$. Підставимо (4.173) в (4.172) і одержимо рівняння

$$-a\rho_+(s) q_+(s) e^{-\rho_+(s)x} = \lambda q_+(s) \int_{-\infty}^{x} e^{\rho_+(s)(z-x)} dF(z) - \\ - (s+\lambda) q_+(s) e^{-\rho_+(s)x} + \lambda p e^{-cx}, \quad x > 0,$$

яке після скорочення на $\exp\{-\rho_+(s)x\}$ і деяких простих перетворень зводиться до вигляду

$$-a\rho_+(s) q_+(s) = \lambda q_+(s) \left[\int_{-\infty}^{x} e^{\rho_+(s)z} dF(z) + p \int_x^{\infty} e^{\rho_+(s)z - cz} dz \right] - \\ - (s+\lambda) q_+(s) - \lambda p q_+(s) \int_x^{\infty} e^{-cq_+(s)z} dz + \lambda p e^{-cq_+(s)x}.$$

Зауважимо, що

$$\left[\int_{-\infty}^{x} e^{\rho_+ z} dF(z) + \int_x^{\infty} e^{\rho_+ z} dF(z) \right] = \varphi(-i\rho_+),$$

і лише при $\rho_+(s) = cp_+(s)$ доданки в другому рядку останнього рівняння скорочуються, а саме рівняння зводиться до рівняння Лундберга

$$-a\rho_+(s) = \lambda \left[\varphi(-i\rho_+(s)) - 1 \right] - s \sim k(\rho_+(s)) = s. \qquad \square$$

Щодо тверджень теорем 4.15, 4.16 та наслідку 4.5 для майже напівнеперервних зверху косо-східчастих процесів ($a < 0$) слід зауважити, що їх доведення ускладнюються, оскільки генератриси $Q^T(s,x)$ та $Q_T(s,x)$ описуються інтегро-диференціальними рівняннями типу (4.172) на відрізку, які також виводяться на основі відповідних стохастичних співвідношень. Зокрема, із співвідношення

$$\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} \zeta, \quad \xi + a\zeta, \quad a<0, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi-a\zeta), \quad x-T<\xi+a\zeta<x, \end{cases}$$

виводиться інтегро-диференціальне рівняння на відрізку

$$a\frac{\partial}{\partial x}Q^T(s,x) = \lambda \int_{x-T}^{x} Q^T(s,x-z)dF(z) - \\ -(s+\lambda)Q^T(s,x) + \lambda p e^{-cx}, \quad 0<x<T. \quad (4.174)$$

Із крайових умов для $Q^T(s,x)$ випливає, що рівняння для $\overline{Q}\,^T(s,x) = 1-Q^T(s,x)$ можна записати у термінах згортки і продовжити на вісь $x>0$. Одержане рівняння з довизначеною компенсуючою функцією розв'язується з деякими ускладненнями аналогічно тому, як знаходився розв'язок для (4.144), (4.145).

Порівняємо результати, що стосуються моментів банкрутства $\tau^{\pm}(T,x)$ для напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ та майже напівнеперервного (з параметром $c>0$), на основі відповідних співвідношень з наслідків 4.1 та 4.5.

Наслідок 4.9. *Для напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ (навіть при $\sigma^2>0$, $\int_{-1}^{0}|x|\Pi(dx)=\infty$) генератриса $\tau^-(T,x)$ визначається через розподіл $\xi^-(\theta_s)$ та генератрису $Q^T(s,x)=R_s(T-x)R_s^{-1}(T)$*

$$Q_T(s,x) = P_-(s,x-T) - Q^T(s,x)P_-(s,-T) \quad (0<x<T). \quad (4.175)$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ має місце співвідношення

$$Q_T(s,x) = P_-(s,x-T) - Q^T(s,x)P_-(s,-T) - \\ - \int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)}dP_-(s,z), \quad (4.176)$$

де $Q^T(s,x)$ визначається в теоремі 4.15.

Приклад 4.6. Нехай $\xi(t)$ — східчастий майже напівнеперервний зверху процес із прикладу 3.7. Користуючись співвідношенням (3.132) для розподілу ξ^- при $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$, знайти ймовірність банкрутства $Q^T(x)$ за першою формулою в (4.166).

Розділ 5

Зв'язок граничних задач для пуассонівських процесів та блукань із задачами ризику

5.1 Ризикові характеристики для класичного випадку

Для розглянутих в § 4.1 класичних процесів ризику (див. графіки 1 та 3 в кінці монографії)

$$\xi_u(t) = u + Ct - S(t), \quad u > 0, \quad C > 0, \quad \zeta(t) = S(t) - Ct,$$

$$S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \mathbf{P}\{\nu(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \ge 0 \tag{5.1}$$

основні характеристики: ймовірності виживання та банкрутства на скінченному інтервалі $[0, t]$ для $\xi_u(t)$

$$\phi_t(u) = \mathbf{P}\{\xi_u(s) > 0, \ \forall\, s \in [0, t]\}, \quad \overline{\phi_t}(u) = 1 - \phi_t(u) = \Psi(t, u)$$

визначаються через розподіл мінімуму процесу $\xi^-(t) = \xi_0^-(t)$

$$\phi_t(u) = \mathbf{P}\big\{\xi^-(t) > -u\big\}, \quad \overline{\phi_t}(u) = \mathbf{P}\big\{\xi^-(t) < u\big\}. \tag{5.2}$$

Для $\zeta(t)$ імовірності виживання та банкрутства на $[0,t]$

$$\phi_t(u) = \mathbf{P}\{\zeta(s) < u, \ \forall\, s \in [0,t]\}, \quad \overline{\phi_t}(u) = 1 - \phi_t(u)$$

визначаються через розподіл максимуму $\zeta^+(t)$

$$\phi_t(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) < u\}, \quad \Psi(t,u) = \overline{\phi_t}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) > u\}. \qquad (5.3)$$

Так само тотальні імовірності виживання та банкрутства на інтервалі $[0, +\infty)$ $(t \to \infty)$ визначаються через розподіли абсолютних екстремумів, а саме: а) для резервного процесу ризику $\xi_u(t)$

$$\phi(u) = \mathbf{P}\{\xi^- > -u\}, \quad \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\xi^- \le -u\}. \qquad (5.4)$$

б) для надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$

$$\phi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, \quad \Psi(u) = \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}. \qquad (5.5)$$

Якщо в (4.1) замінити лінійну функцію надходження премій на стохастичну $C(t) = \sum\limits_{k \le \nu_1(t)} \xi'_k$, де $\mathbf{P}\{\xi'_k > 0\} = 1$, $\nu_1(t)$ — простий пуассонівський процес з параметром λ_1, тоді одержимо процес ризику з випадковими преміями $(C(t) \ne Ct)$

$$\begin{aligned} &\xi_u(t) = u + C(t) - S(t), \quad u > 0, \\ &\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad C(t) = \sum_{k \le \nu_1(t)} \xi'_k, \end{aligned} \qquad (5.6)$$

де $\nu(t), \nu_1(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з параметрами $\lambda > 0$ та $\lambda_1 > 0$ відповідно. Для цих процесів аналогічно розглядаються імовірності виживання та банкрутства, які так само виражаються через відповідні розподіли екстремумів (5.3)–(5.5).

Зауважимо, що дослідження різних ризикових характеристик для класичних процесів ризику присвячені роботи переважно зарубіжних авторів, зокрема монографії [130, 141, 146, 166, 170, 210] та інші. Ризикові характеристики для процесів з випадковими преміями (див. [3]) ще мало досліджені.

Для класичних процесів ризику (5.1) (які є напівнеперервними зверху або знизу) на основі тверджень з розділів 1–3 можна сформулювати (без повторення доведень) основні результати і співвідношення, за допомогою яких визначаються імовірності виживання $\phi_t(u)$, $\phi(u)$ та імовірності банкрутства $\overline{\phi_t}(u)$ та $\overline{\phi}(u) = \Psi(u)$.

Теорема 5.1. *Для напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$ (зі знесенням $-C$) в (5.1) мають місце твердження:*

1) *Згідно з теоремою* 2.4 (*див.* (2.30)) *подвійне інтегральне перетворення ймовірності виживання виражається через розподіл початкових сходинкових висот* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+(\theta_s)} = s\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty e^{-\nu u}\,du\phi_t(u)ds = \\
&\qquad = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)\widetilde{g}_s(\nu)}, \quad p_+(s) = \frac{s}{c\rho_-(s)}, \qquad (5.7)\\
&\widetilde{g}_s(\nu) = \mathbf{E}\big[e^{-\nu\gamma^+(0)}\,|\,\zeta^+(\theta_s)>0\big] = \frac{G_1(s,0,\nu)}{G_1(s,0,0)},\\
&G_1(s,0,\nu) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)-\nu}\int_0^\infty (e^{-\nu y}-e^{-\rho_-(s)y})\Pi(dy).
\end{aligned}$$

2) *Згідно з теоремою* 3.2 (*див.* (3.39)) *подвійне інтегральне перетворення ймовірності банкрутства визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned}
&s\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty e^{i\alpha u}\overline{\phi_t}(u)dudt = \widetilde{\overline{\phi_+}}(s,\alpha) = \\
&\quad = \frac{1}{\rho_-(s)}\int_0^\infty e^{i\alpha x}dP(s,x) + \widetilde{P}_>(s,\alpha). \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

3) *Крім* (5.7) *згідно з останнім співвідношенням теореми* 3.7 *та наслідком* 3.3 (*див.* (3.73)) *має місце співвідношення*

$$\mathbf{E}e^{-u\zeta^+(\theta_s)} = \begin{cases} \left[1+\dfrac{u\rho_-(s)}{s(\rho_-(s)-u)}(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\rho_-(s)))\right]^{-1}, \\ \dfrac{s(\rho_-(s)+u)}{s(\rho_-(s)+u)+u\rho_-(s)\Big[\widetilde{\Pi}(u)+C-s\rho_-^{-1}(s)\Big]}. \end{cases} \qquad (5.9)$$

4) *Згідно з наслідком* 4.1 (*див. також* [84], § 3.2, *теорема* 1) *перетворення Лапласа–Карсона для $\phi_t(u)$ виражається через резольвенту $R_s(x)$,* $\big(x\geq 0,\ R_s(0)=C^{-1}>0\big)$

$$s\int_0^\infty \phi_t(u)e^{-s\,u}dt = P_+(s,u) = \frac{sR_s(u)}{\rho_-(s)} - s\int_0^u R_s(y)dy. \qquad (5.10)$$

Після відповідного обернення з (5.7), (5.8) випливає твердження:

Наслідок 5.1. 1) *Імовірність банкрутства на інтервалі* $[0,t]$ *визначається так званою формулою Прабху* (*див.* (3.40))

$$\overline{\phi_t}(u) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > u\} + C\int_0^t \mathbf{P}\big\{\zeta^+(t-y) = 0\big\}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\zeta(y) < u\}dy,$$
$$\phi_t(0) = \mathbf{P}\big\{\zeta^+(t) = 0\big\} = \frac{1}{C}|\mathbf{E}\zeta(1)| - \frac{1}{Ct}\mathbf{E}[\zeta(t), \zeta(t) > 0]. \tag{5.11}$$

2) *Крім того, з* (5.8) *на основі формули двоїстості* (3.71) *встановлюється, що*

$$\overline{\phi_t}(u) = \int_0^t y^{-1}\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\zeta(t-y) < u\}\mathbf{E}\,[|\zeta(y)|, \zeta(y) < 0]dy + \\ + \mathbf{P}\{\zeta(t) > u\}. \tag{5.12}$$

Доведення. Насправді доведення потребує лише формула (5.12), яка повністю розкриває ідею тотожностей Спітцера про вираження розподілу $\zeta^+(t)$ в термінах розподілу додатних значень $\zeta(t) > 0$. Дійсно, враховуючи, що для неперервного знизу процесу $\mathbf{E}\zeta^-(\theta_s) = \rho_-^{-1}(s)$ ми можемо обернути (5.10) по s

$$\mathbf{P}\big\{\zeta^+(t) > u\big\} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\zeta(t-y) < u\}d\mathbf{E}\zeta^-(y) + \\ + \mathbf{P}\{\zeta(t) > u\}. \tag{5.13}$$

Знайдемо похідну $\big(\mathbf{E}\zeta^-(t)\big)'$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\zeta^-(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\big\{\zeta^-(t) < x\big\}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\big\{\tau^-(x) < t\big\}dx.$$

Згідно з формулою двоїстості (3.71)

$$\big(\mathbf{E}\zeta^-(t)\big)' = \int_{-\infty}^0 \frac{|x|}{t}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\zeta(t) < x\}dx = \frac{1}{t}\mathbf{E}[|\zeta(t)|, \zeta(t) < 0].$$

Після підстановки $\big(\mathbf{E}\zeta^-(y)\big)'$ в (5.13) одержимо (5.12). Формула (5.11) виражає зв'язок між імовірністю банкрутства $\overline{\phi_t}(u)$ з ненульовим початковим капіталом $u > 0$ та ймовірністю виживання з капіталом $u = 0$.

Порівнюючи інтегральні члени в (5.11) та (5.12) знаходимо, що при $m = \lambda\mu_1 - C < 0$, $\mathbf{E}|\zeta(t)| = (C - \lambda\mu_1)t = |m|t$

$$\phi_t(0) = \frac{1}{Ct}\mathbf{E}[|\zeta(t)|, \zeta(t) < 0] = \frac{|m|}{C} - \frac{1}{Ct}\mathbf{E}[\zeta(t), \zeta(t) > 0].$$

Після підстановки $\phi_t(0)$ в (5.11) одержимо співвідношення

$$\overline{\phi_t}(u) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > u\} + \int_0^t \left[|m| - \frac{1}{y}\mathbf{E}[\zeta(y), \zeta(y) > 0]\right] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\zeta(t-y) < u\}dy$$

подібне до (5.12). Ця формула визначає розподіл максимуму неперервного знизу процесу $\zeta(t)$ і подібна до формули (3.75), яка визначає розподіл $\mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\}$, $(x \le 0)$ для неперервного зверху процесу $\xi(t)$ в термінах розподілу від'ємних значень $\xi(t) < 0$. □

Для визначення $\phi(u)$ та $\overline{\phi}(u)$ наводиться теорема з імовірнісною інтерпретацією раніше одержаних співвідношень.

Теорема 5.2. *Для надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$ тотальні імовірності виживання та банкрутства при умові $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \lambda\mu_1 - C < 0$ визначаються так:*

1) *Згідно з (5.8) при $s \to 0$ має місце відоме співвідношення*

$$\Psi(u) = \overline{\phi}(u) = |m|\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\zeta(t) > u\}dt\right), \quad m < 0. \tag{5.14}$$

2) *Згідно з (5.7) інтегральне перетворення для щільності ймовірності виживання має вигляд:*

$$\int_0^\infty e^{-\nu u}\phi'(u)du = \frac{p_+}{1 - q_+ g_0(\nu)}, \\ g_0(\nu) = \mathbf{E}\big[e^{-\nu\gamma^+(0)} \,|\, \zeta^+ > 0\big]. \tag{5.15}$$

3) *Якщо ввести в.в. $\widetilde{\xi}_k$ з генератрисою $\widetilde{\varphi}(i\nu)$ і щільністю*

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_k < x\} = \frac{1}{\mu_1}\overline{F}(x) \quad (x > 0), \quad \widetilde{S}_n = \sum_{k \le n}\widetilde{\xi}_k,$$

тоді згідно з (3.176)

$$g_0(\nu) = \widetilde{\varphi}(i\nu) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty e^{-\nu x}\overline{F}(x)dx, \quad p_+ = \frac{|m|}{C}, \quad q_+ = \frac{\lambda\mu_1}{c}.$$

Тому (5.15) *зводиться до формули Полячека–Хінчина:* $\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+} = p_+(1-q_+\widetilde{\varphi}(i\nu))^{-1}$, *з якої після обернення по* ν *одержуємо щільність імовірності виживання* $\phi'(u) = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}$ *при* $u > 0$

$$\phi'(u) = p_+\sum_{n>0} q_+^n \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}\{\widetilde{S}_n < u\},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{P}(\widetilde{S_1} < u) = \frac{1}{\mu_1}\overline{F}(u). \tag{5.16}$$

4) *Згідно з* (5.10) *імовірність виживання виражається за допомогою потенціалу*

$$\phi(u) = |m|R(u), \quad u \geq 0, \quad \phi(0) = |m|R(0) = \frac{|m|}{C} = p_+. \tag{5.17}$$

Доведення. При $m < 0$ $\rho_-(s) \to 0$, $s\rho_-^{-1}(s) \to |m|$, $\widetilde{P}_>(s,\alpha) \to 0$ при $s \to 0$. Тому з (5.8) при $s \to 0$ одержимо співвідношення

$$\int_0^\infty e^{i\alpha u}\overline{\phi}(u)du = m\int_0^\infty e^{i\alpha x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \mathbf{P}\{\zeta(t) > x\}dt\right)dx,$$

з якого після обернення по α випливає (5.14). Аналогічно із (5.7) при $s \to 0$ згідно з (2.60) виводиться (5.15). Із (5.10) при $s \to 0$ випливає (5.17) в термінах потенціалу. □

Для спільних генератрис пар $\{\tau^+(u), \gamma_k(u)\}$, $k = \overline{1,3}$, де $\gamma_1(u) = \gamma^+(u)$ — неоплачувана частина критичної вимоги, $\gamma_2(u) = \gamma_+(u)$ — залишок резерву безпосередньо перед банкрутством, $\gamma_3(u) = \gamma_u^+$ — критична вимога, що з'явилася в момент банкрутства $\tau^+(u)$, має місце твердження в термінах $\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x)$, $x > 0$, та його перетворення Лапласа. Згідно з теоремою 3.7 має місце

Теорема 5.3. *Згідно з* (3.139) *для напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог генератриси* ($u_1 = u$, $u_2 = v$, $\sigma = 0$)

$$\widetilde{V}_{1,2}(s,\nu,u_k) = \mathbf{E}\big[e^{-u_k\gamma_k(\theta'_\nu)}e^{-s\tau^+(\theta'_\nu)}, \tau^+(\theta'_\nu) < \infty\big] =$$

$$= \nu \int_0^\infty \mathbf{E}\big[e^{-u_k\gamma_k(x)}, \xi^+(\theta_s) > x\big] e^{-\nu x} dx, \quad k = \overline{1,3},$$

визначаються так

$$\widetilde{V}_1(s,\nu,\, u) = s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+(\theta_s)} \times \tag{5.18}$$
$$\times \frac{1}{\rho(s)-u}\left[\frac{u}{u-\nu}\big(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\nu)\big) + \frac{\rho(s)}{\rho(s)-\nu}\big(\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s))\big)\right],$$
$$\widetilde{V}_2(s,\nu,v) = s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+(\theta_s)} \times$$
$$\times \frac{1}{\rho(s)-\nu}\big(\widetilde{\Pi}(\nu+v)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)+v)\big),$$
$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > \theta'_\nu\} = \widetilde{V}_{1,2}(s,\nu,0) =$$
$$= s^{-1}\nu\rho(s)\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+(\theta_s)}\frac{\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s))}{\rho(s)-\nu}.$$

Для умовних генератрис $\gamma_{1,2}(\theta'_\nu)$ справедливі співвідношення

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)}\,|\,\zeta^+(\theta_s) > \theta'_\nu\big] = \frac{1}{\rho(s)-u}\frac{1}{\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s))} \times$$
$$\times \left[\frac{u(\rho(s)-\nu)}{u-\nu}\big(\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\nu)\big) + \rho(s)\big(\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s))\big)\right],$$
$$\mathbf{E}\big[e^{-v\gamma_+(\theta'_\nu)}\,|\,\zeta^+(\theta_s) > \theta'_\nu\big] =$$
$$= \frac{1}{\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(\rho(s))}\big[\widetilde{\Pi}(\nu+v)-\widetilde{\Pi}(\rho(s)+v)\big].$$

Доведення. Формули (5.18) встановлено в теоремі 3.7 (див. (3.139) для $\sigma = 0$, $k = 1,2$). З (5.18) випливають формули для умовних генератрис. Після обернення яких по ν встановлюється твердження для

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\gamma_{1,2}(x)}\,|\,\xi^+(\theta_s) > x\big] \quad \text{при} \quad x = 0 \text{ та } x > 0. \qquad \square$$

Наслідок 5.2. *Умовні генератриси $\gamma_{1,2}(0)$ визначаються співвідношеннями*

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)}|\zeta^+(\theta_s) > 0\big] =$$
$$= \frac{1}{(u-\rho(s))\widetilde{\Pi}(\rho(s)}\big[u\widetilde{\Pi}(u) - \rho(s)\widetilde{\Pi}(\rho(s))\big],$$

$$\mathbf{E}\big[e^{-v\gamma_+(0)} \,|\, \zeta^+(\theta_s) > 0\big] = \frac{1}{\widetilde{\Pi}(\rho(s))}\widetilde{\Pi}(\rho(s)+v).$$

Якщо $m = \lambda\mu_1 - C < 0$, *тоді*

$$\mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\nu)}, \zeta^+ > \theta'_\nu\big] = \mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+}\frac{\nu}{|m|}\frac{\widetilde{\Pi}(\nu)-\widetilde{\Pi}(u)}{u-\nu}, \tag{5.19}$$

$$\mathbf{E}\big[e^{-v\gamma_+(\theta'_\nu)},\, \zeta^+ > \theta'_\nu\big] = \mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+}\frac{1}{|m|}\big[\widetilde{\Pi}(v)-\widetilde{\Pi}(\nu+v)\big].$$

З (5.19) *після обернення по* ν *визначаються генератрисами* $\gamma_{1,2}(x)$

$$g_+(x,z) := \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(x)}, \zeta^+ > x\big] = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma_1(x)}, \zeta^+ > x\big] =$$
$$= \frac{p_+}{|m|}\widetilde{\Pi}(z) + \frac{1}{|m|}\int_0^x \Pi^*_z(x-y)P'_+(y)dy; \quad P'_+(y) = \phi'(y);$$
$$\Pi^*_z(x) = \int_x^\infty \Pi(y)e^{z(x-y)}dy = \int_0^\infty \Pi(x+y)e^{-yz}dy; \tag{5.20}$$
$$\mathbf{E}\big[e^{-v\gamma_+(x)}, \zeta^+ > x\big] = \frac{1}{|m|}\Big[\widetilde{\Pi}(v)\mathbf{P}\big\{\zeta^+ < x\big\} -$$
$$- \int_0^x \mathbf{P}\big\{\zeta^+ < x-y\big\}e^{-vy}\Pi(y)dy\Big].$$

Доведення. При $s \to 0$ з (5.18) у випадку $m < 0$ встановлюються співвідношення (5.19), після обернення яких по ν одержимо (5.20). Після підстановки $u = 0$ або $v = 0$ в (5.19) знаходимо також, що

$$\mathbf{P}\big\{\zeta^+ > \theta'_\nu\big\} = \frac{1}{|m|}\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+}\big(\widetilde{\Pi}(0)-\widetilde{\Pi}(\nu)\big). \tag{5.21}$$

Співвідношення (5.18) можна обернути по u, v та ν й одержати розподіл $\mathbf{P}\{\gamma_k(x) > z, \xi^+(\theta_s) > x\}$. Зокрема, при $x = 0$ розподіли пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ визначаються в наслідку 3.7 (див. (3.151)). □

Для неперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$ з початковим капіталом $u = 0$ розглянемо пари $\{\tau^+(0),\, \gamma_k(0)\}$:

$\tau^+(0)$ визначає момент банкрутства;

$\gamma_1(0) = \gamma^+(0)$ — неоплачувану частину вимоги, що появилась у момент банкрутства $\tau^+(0)$;

$\gamma_2(0) = \gamma_+(0)$ — залишок резерву, який страхова фірма може використати на оплату критичної вимоги;

$\gamma_3(0) = \gamma_0^+$ — розмір вимоги, що появилась у момент $\tau^+(0)$.

Аналогічно при $u \to \infty$ розглянемо пари $\{\tau^+(\infty), \gamma_k(\infty)\}$, $k = \overline{1,3}$ і сформулюємо без доведення наступне твердження для $u = 0$ і для $u \to \infty$ (див. [33] та [51]).

Теорема 5.4. *Для неперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$ спільні розподіли пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$, $\big(k = \overline{1,3}\big)$*

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_k(0) > z, \tau^+(0) < \infty\big] = \mathbf{P}\big\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_k(0) > z\big\}$$

згідно з наслідком 3.7 *визначаються співвідношеннями* (*див.* (3.151))

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\big\} = \frac{\lambda}{C}\int_z^\infty e^{(z-y)\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy,\\
&\mathbf{P}\big\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > z\big\} = \frac{\lambda}{C}\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy, \qquad (5.22)\\
&\mathbf{P}\big\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > z\big\} = \frac{\lambda}{C\rho_-(s)}\int_z^\infty \big(1 - e^{-y\rho_-(s)}\big)dF(y).
\end{aligned}$$

Якщо $m < 0$, то при $z = 0$

$$q_+(s) = C^{-1}\widetilde{\Pi}(\rho_-(s)) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{\lambda\mu_1}{C}.$$

При $z > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0,\ \gamma_{1,2}(0) < z)\} = \lambda C^{-1}\overline{F}(z),\\
&\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0,\ \gamma_3(0) < z)\} = \lambda C^{-1}z\overline{F}'(z).
\end{aligned}$$

При нескінченному зростанні початкового капіталу $u \to \infty$ за умови $m < 0$ умовні розподіли $\mathbf{P}\{\gamma_k(\infty) > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\}$ згідно з наслідком 3.6 (*див.* (3.146)–(3.148)) *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big\{\gamma^+(\infty) > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\big\} = \frac{\lambda}{|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty (y-z)\overline{F}(y)dy,\\
&\mathbf{P}\big\{\gamma_+(\infty) > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\big\} = \frac{\lambda}{|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty y\overline{F}(y)dy, \qquad (5.23)\\
&\mathbf{P}\big\{\gamma_\infty^+ > z \,|\, \tau_\infty^+ < \infty\big\} = \frac{\lambda}{2|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty y^2 dF(y), \quad \mathbf{E}\zeta^+ = \frac{\lambda\mu_2}{2|m|}.
\end{aligned}$$

Для загального однорідного напівнеперервного процесу $\xi(t)$ з н.п. в силу випуклості кумулянти $k(r) = \psi(-ir)$ в околі нуля рівняння $(\mathcal{L}_s)$ має два корені $r = \pm\rho_\pm(s)$ протилежного знаку, один з яких повністю визначає відповідну компоненту факторизації. А саме, якщо $\xi(t)$ напівнеперервний зверху, то $\rho_+(s)$ визначає $\varphi_+(s,\alpha) = \rho_+(s)(\rho_+(s) - i\alpha)^{-1}$ і $\rho_-(s)$ лише частково визначає $\varphi_-(s,\alpha)$. Якщо $\xi(t)$ напівнеперервний знизу, тоді $\rho_-(s)$ повністю визначає $\varphi_-(s,\alpha) = \rho_-(s)(\rho_-(s) + i\alpha)^{-1}$, $\rho_+(s)$ частково визначає $\varphi_+(s,\alpha)$. Лише у випадку, коли знесення $c = 0$ і стрибки $\xi(t)$ показниково розподілені, корені $\pm\rho_\pm(s)$ повністю визначають обидві компоненти $\varphi_\pm(s,\alpha)$. При цьому зауважимо, що між цими коренями (тобто на інтервалі $(-\rho_-(s);\rho_+(s))$) не існує інших коренів. Крім того, при $m = \mathbf{E}\xi(1) = 0$ ці корені стягуються $\rho_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$. Якщо $\pm m > 0$, тоді $\rho_\pm = 0$, $\rho_\mp > 0$, $\rho_+\rho_- = 0$.

В силу того, що $\psi(\mp i\rho_\pm) = 0$, має місце твердження:

Лема 5.1. *Процес, що визначається експонентою*

$$X(t) = e^{\pm\rho_\pm\xi(t)} \quad (t \geq 0) \text{ є мартингалом і} \tag{5.24}$$

$$\mathbf{E}X(t) = \mathbf{E}e^{\pm\rho_\pm\xi(t)} = 1. \tag{5.25}$$

Доведення. Дійсно

$$\mathbf{E}[X(t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}\big[e^{\pm\rho_\pm(\xi(t)-\xi(s))\pm\rho_\pm\xi(s)}\,|\,\mathcal{F}_s\big].$$

Оскільки $\xi(t)$ має незалежні прирости, то

$$\mathbf{E}[X(t)\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}e^{\pm\rho_\pm(\xi(t)-\xi(s))}\mathbf{E}\big[e^{\pm\rho_\pm\xi(s)}\,|\,\mathcal{F}_s\big] = \\ = e^{(t-s)\psi(\mp i\rho_\pm)}X(s), \quad \mathbf{E}X(s) = e^{s\psi(\mp i\rho_\pm)} = 1.$$

Зауважимо, що $\tau^\pm(x)$, $(\tau^\pm(x)\wedge t)$, $\pm x > 0$ є марковськими моментами, тому і $X(\tau^\pm(x)\wedge t)$ є мартингалом. Отже, має місце співвідношення

$$1 = \mathbf{E}e^{\pm\rho_\pm\xi\left(\tau^\pm(x)\wedge t\right)} \geq \mathbf{E}\big[e^{\pm\rho_\pm\xi\left(\tau^\pm(x)\right)}, \tau^\pm(x) \leq t\big], \quad \pm x \geq 0.$$

Оскільки $\xi(\tau^+(x)) \geq x$ при $x > 0$, $\xi(\tau^-(x)) < x$ при $x < 0$, тому з останньої нерівності випливає, що

$$\mathbf{P}\big\{\tau^+(u) \leq t\big\} = \mathbf{P}\big\{\xi^+(t) > u\big\} \leq e^{-u\rho_+}, \quad \rho_+ > 0,$$

$$\text{якщо} \quad m < 0, \tag{5.26}$$
$$\mathbf{P}\{\tau^-(x) \le t\} = \mathbf{P}\{\xi^-(t) < x\} \le e^{x\rho_-}, \quad \rho_- > 0,$$
$$\text{якщо} \quad m > 0. \qquad \square$$

Для надлишкового процесу вимог $\zeta(t) = S(t) - Ct$, який є напівнеперервним знизу, 1-а нерівність у (5.26) є давно відомою нерівністю Лундберга, яка залишається справедливою і при $t \to \infty$. Отже, для тотальної ймовірності банкрутства з (5.25) випливає порівняно груба оцінка

$$\Psi(u) = \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} \le e^{-u\rho_+}, \quad u > 0,$$

яка не враховує позитивність атомарної ймовірності $p_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+ = 0\} > 0$. А корінь $\rho_+ > 0$ при $m < 0$ визначає показник експоненціального спадання ймовірності банкрутства при $u \to \infty$. В теорії ризику позначають $\rho_+ = R_+$ і називають показником Крамера–Лундберга, а нерівності типу

$$\Psi(u) = \overline{\phi}(u) \le C' e^{-uR_+}, \quad u > 0, \quad C' \le 1,$$

називають односторонніми оцінками ймовірності банкрутства. При цьому сталі R_+ та C' наближено обчислюються в термінах моментів, $\mu_k = \mathbf{E}(\xi_1)^k$, $k = \overline{1,3}$ (див. (3.17) та (3.23)–(3.25)).

Легко показати також, що

$$\mathbf{E}\big[e^{-R_+\zeta(\tau^+(u))}, \tau^+(u) < \infty\big] = \int_0^\infty \mathbf{E}e^{-R_+\zeta(t)} d\mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\} =$$
$$= \int_0^\infty e^{tk(R_+)} d\mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\} = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\}.$$

Враховуючи, що $\zeta(\tau^+(u)) = u + \gamma^+(u)$, з останнього співвідношення випливає, що при $m < 0$ $\Psi(u) = \overline{\phi}(u)$ визначається експонентою e^{-R_+u} і генератрисою пари $\{\tau^+(u), \gamma^+(u)\}$. Точніше з мартингальності процесу $X(t) = e^{-R_+\zeta(t)}$ випливає

Теорема 5.5. *Для напівнеперервного і майже напівнеперервного знизу процесів ризику $\zeta(t)$ імовірність банкрутства $\overline{\phi}(u) = \Psi(u)$ при $m < 0$ визначається формулою*

$$\overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\} = e^{-R_+u} g_+(u, R_+), \tag{5.27}$$

$$g_+(u,R_+)=\mathbf{E}\big[e^{-R_+\gamma^+(u)},\tau^+(u)<\infty\big],$$

з якої після підстановки (5.20) *при* $z=R_+, x=u$ *для* $\Psi(u)$ *одержуємо співвідношення*

$$\Psi(u)=\frac{1}{|m|}e^{-R_+u}\int_{-0}^{u}\int_{0}^{\infty}\Pi(u+z-y)e^{-R_+z}d\mathbf{P}\{\zeta^+<y\}dz= \quad (5.28)$$
$$=\frac{1}{|m|}e^{-R_+u}[p_+\widetilde{\Pi}(R_+)+\int_{+0}^{u}\Pi^*_{R_+}(u-y)d\phi(y)], \Pi(y)=\lambda\overline{F}(y),$$
$$\Pi^*_{R_+}(u)=\int_0^\infty e^{-R_+x}\Pi(u+x)dx \underset{u\to 0}{\to} \widetilde{\Pi}(R_+),\ \overline{\phi}(0)=\frac{p_+\widetilde{\Pi}(R_+)}{|m|}.$$

Співвідношення в 2-му рядку (5.28) *зручне для обчислення наближень типу* (3.23)–(3.27) *для ймовірності банкрутства за такою асимптотичною формулою*

$$\Psi(u)=\frac{p_+}{|m|}\widetilde{\Pi}(R_+)e^{-R_+u}+o\big(e^{-R_+u}\big) \quad \textit{при } u\to\infty. \quad (5.29)$$

Асимптотична оцінка (5.29) випливає із співвідношення для інтегрального члена в (5.28) ($\Pi(x)=\lambda\overline{F}(x),\ \overline{\overline{F}}(x)=\int_x^\infty\overline{F}(y)dy, x>0$)

$$\int_{+0}^{u}\Pi^*_{R_+}(u-y)dP_+(y)=\int_{+0}^{u}\int_{u-y}^{\infty}\Pi(z)e^{R_+(u-z-y)}dzdP_+(y)=$$
$$=I_1(u)+I_2(u);$$
$$I_1(u)=\int_u^\infty e^{R_+(u-z)}\Pi(z)dz\int_{+0}^{u}e^{-R_+y}P'_+(y)dy \underset{u\to\infty}{\to} 0,$$
$$I_2(u)=\int_0^u\Pi(z)e^{-R_+z}\int_{u-z}^{u}e^{R_+(u-y)}P'_+(y)dydz=$$
$$\int_0^u\Pi(z)e^{-R_+z}\int_0^z e^{R_+y}P'_+(u-y)dydz \underset{u\to\infty}{\to} 0,$$

оскільки згідно з (5.16) $\phi'(u)=P'_+(u) \underset{u\to\infty}{\to} 0.$

На основі (5.21) встановлюється раніше одержана формула (див. (4.34) з $\sigma=0$)для генератриси ζ^+

$$\mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+}=\left[1-\int_0^\infty(e^{-\nu x}-1)d\Pi_*(x)\right]^{-1}, \quad d\Pi_*(x)=\frac{\Pi(x)}{|m|}dx.$$

На основі мартингальної властивості процесу $X(t) = e^{-R_+\zeta(t)}$ та поняття заміни міри відносно експоненціального сімейства розподілів встановлюється двостороння оцінка для ймовірності банкрутства. Означення цього поняття і пов'язане з ним спряження Лундберга можна знайти в [130, III, § 5, с. 67].

Означення 5.1 ([130]). Нехай X — випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$ та відповідною кумулянтою

$$k(r) = \log \mathbf{E} e^X = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} dF(x).$$

Тоді експоненціальним сімейством $\{F_\theta\}$, породженим параметром θ називається сукупність розподілів $F_\theta(dx) = e^{\theta x - K(\theta)} dF(x)$, $x \in R^1$, кумулянта яких виражається через $k(\cdot)$ $k_\theta(r) = k(r+\theta) - k(\theta)$, де θ вибирається так, щоб $k(\theta)$ було визначеним.

Якщо $X = \zeta(1) = S(1) - 1$, тоді за допомогою кореня $\gamma = R_+ > 0$ рівняння $(\mathcal{L}_0)$ визначається кумулянта $k_\gamma(r)$, яка називається спряженою до $k(r)$ — кумулянти $\zeta(1)$. Замість $k_\gamma(r)$ використовується позначення $k_L(r)$:

$$\begin{aligned}
&k_L(r) = \lambda_L(\widetilde{\varphi}_L(r) - 1) - r = k(r+\gamma),\\
&k(r) = \log \mathbf{E} e^{r\zeta(1)} = \lambda \left(\int_0^\infty e^{rx} dF(x) - 1 \right) - r,\\
&\lambda_L = \lambda \widetilde{\varphi}(\gamma), \quad F_L(dx) = e^{\gamma x} dF(x) \widetilde{\varphi}^{-1}(\gamma),\\
&\widetilde{\varphi}_L(r) = \int_0^\infty e^{rx} F_L(dx) = \widetilde{\varphi}(r+\gamma)\widetilde{\varphi}^{-1}(\gamma).
\end{aligned}$$

Такому спряженню відповідає пуасонівський процес $\zeta_L(t)$, в якого λ заміняється на λ_L і розподіл величини вимог (стрибка) F на F_L, а $C = C_L = 1$. Імовірнісну міру, що відповідає складному пуасонівському процесу $\zeta_L(t)$ позначають P_L, а відповідне усереднення $\mathbf{E}_L$.

Теорема 5.6 ([130]). *Для неперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$ (див. (5.1) з $C = 1$) при $m < 0$ має місце двостороння оцінка для $\overline{\phi}(u) = \Psi(u)$ ($R_+ = \gamma$ — додатний корінь рівняння $(\mathcal{L}_0)$)*

$$\begin{aligned}
&C_- e^{-R_+ u} \le \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = C_+ e^{-R_+ u}, \qquad (5.30)\\
&C_\pm = \sup_{x\ge 0}(\inf) \frac{\overline{F}(x)}{\int_0^\infty e^{R_+(y-x)} dF(y)}.
\end{aligned}$$

Доведення. (5.30) наводиться в [130]. Воно ґрунтується на співвідношенні в термінах $\mathbf{E}_L$ та $\mathbf{P}_L$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[e^{-R_+\gamma^+(u)}, \tau^+(u)<\infty\big] = \mathbf{E}\big[e^{-R_+\left(\gamma_u^+ - \gamma_+(u)\right)}, \tau^+(u)<\infty\big] = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_x^\infty \mathbf{E}_L\big[e^{-R_+\left(\gamma_u^+ - \gamma_+(u)\right)}, \tau^+(u)\in dt, \\
&\qquad\qquad \gamma_+(u)\in dx \,|\, \gamma_u^+ \in dy\big] = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_x^\infty \mathbf{E}_L\big[e^{-R_+(y-x)}, \tau^+(u)\in dt, \gamma_+(u)\in dx \,|\, \gamma_u^+ \in dy\big] = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{P}_L\big\{\tau^+(u)\in dt, \gamma_+(u)\in dx\big\} \Big/ \int_x^\infty e^{R_+(y-x)} \frac{F_L(dy)}{\overline{F_L}(x)} = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{P}_L\big\{\tau^+(u)\in dt, \gamma_+(u)\in dx\big\} \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty e^{R_+(y-x)} dF(y)},
\end{aligned}$$

з якого випливають оцінки для констант $C_\pm$. □

Приклад 5.1. Нехай $\zeta(t)$ — процес ризику ($m<0$, $\rho\mu_1 = \frac{|m|}{\lambda}$)

$$\zeta(t) = S(t) - t, \quad S(t) = \sum_{k\le\nu(t)} \xi_k, \quad \lambda = 3, \text{ і х.ф. для } \xi_k$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-i\alpha} + \frac{7}{7-i\alpha}\right), \quad m = \mathbf{E}\xi(1) = -\frac{2}{7}, \quad \rho\mu_1 = \frac{2}{21}.$$

Знайти розподіл ζ^+ та $\mathbf{E}\zeta^+$. Знайти двосторонню оцінку для $\mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}$ і порівняти її з деякими наближеннями, знайти генератрису пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ та умовний розподіл $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$.

Легко переконатись, що характеристична функція $\xi(\theta_s)$

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)} = \frac{s(3-i\alpha)(7-i\alpha)}{P_3(s,i\alpha)}$$

— дробово-раціональна функція, де $P_3(s,r) = r^3 + r^2(s-7) + r(6-10s) + 21s$ — поліном 3-го порядку. Інтегральне перетворення, що визначає $k(r) = \psi(\alpha)|_{i\alpha=r}$ має область збіжності $[0,3)$. Рівняння $(\mathcal{L}_s)$ зводиться до кубічного рівняння $P_3(s,\,r)=0$, яке має 3 корені:

$$r_1(s) = -\rho_-(s) < 0 < r_2(s) < r_3(s).$$

Найближчі до 0 два з цих коренів і їх граничні значення при $s \to 0$ не виходять з інтервалу опуклості $k(r)$, що містить $r = 0$, є найважливішими. Це пояснюється тим, що від'ємний корінь $r_-(s) = -\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$ повністю визначає х.ф. $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s,\, \alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad \rho'_-(0) = |m|^{-1}, \quad m < 0.$$

Додатний найближчий до 0 корінь $r_2(s)$ важливий тому, що його граничне значення $R = \lim_{s\to 0} r_2(s) = 1$, як буде далі показано, визначає показник $-R$ головної частини ймовірності банкрутства.

На основі розкладу $P_3(s,r) = (r_1(s) - r)P_2(s,r)$, $P_2(s,r) = r^2 + r(s - 7 - \rho_-(s)) + 21s\rho_-^{-1}(s)$, легко отримується розклад

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{\rho_-(s)} \frac{(3 - i\alpha)(7 - i\alpha)}{P_2(s, i\alpha)} \varphi_-(s,\alpha),$$
$$P_2(s,r) = (r_2(s) - r)(r_3(s) - r),$$

з якого випливає, що 1-ий множник визначає х.ф. $\xi^+(\theta_s)$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{\rho_-(s)} \frac{(3 - i\alpha)(7 - i\alpha)}{(r_2(s) - i\alpha)(r_3(s) - i\alpha)}, \tag{5.31}$$

а 2-й в термінах $r_1(s) = -\rho_-(s)$ визначає х.ф. $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}; \quad \rho_-(s), \quad \rho'_-(0) = |m|^{-1}, \quad \text{при} \quad m < 0.$$

Рівняння, що випливає з $(\mathcal{L}_0)$ $\left(k(r) := \frac{3}{2}\left(\frac{3}{3-r} + \frac{7}{7-r}\right) - r = 0\right)$,

$$P_3(0,\, r) := r^3 - 7r^2 + 6r = 0$$

має три корені: 0; 1; 6. З них лише $0; 1 \in [0, 3)$. Легко перевірити, що

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s(3 - i\alpha)(7 - i\alpha)}{P_3(s, i\alpha)} = \varphi_-(s,\alpha) \cdot \frac{s}{\rho_-(s)} \frac{(3 - i\alpha)(7 - i\alpha)}{P_2(s, i\alpha)}.$$

З останнього запису для $\varphi(s,\alpha)$ випливає, що

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{\rho_-(s)} \frac{(3 - i\alpha)(7 - i\alpha)}{(r_2(s) - i\alpha)(r_3(s) - i\alpha)} =$$

$$= p_+(s) + \frac{c_1(s)}{r_2 - i\alpha} + \frac{c_2(s)}{r_3 - i\alpha}, \quad p_+(x) = \lim_{i\alpha\to\infty} \varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{\rho_-(s)}.$$

При $s \to 0$ корені $r_1(s) = -\rho_-(s) \to 0$, $r_2(s) \to R = 1$, $r_3(s) \to 6$, $k'(1) = 1$. Тому згідно з (3.45) $\Psi_{\mathrm{CL}}(u) = \frac{6}{7}e^{-u}$. Згідно з (5.31)

$$\lim_{s\to 0} \varphi_+(s,\, \alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta^+} = p_+ + \frac{c_1}{1-i\alpha} + \frac{c_2}{6-i\alpha}, \;\; p_+ = \frac{2}{7}, \;\; q_+ = \frac{5}{7}.$$

Після обернення по α і підрахунку сталих, знаходимо, що

$$\mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u} = \frac{24}{35}e^{-u} + o(e^{-u}), \quad u \to \infty,$$

і головна частина (як і в (5.29)) визначається експонентою κe^{-u}, де стала $\kappa = \frac{24}{35}$ ближча до q_+ ніж до $\Psi_{\mathrm{CL}}(0)$. Згідно з (5.30)

$$\frac{\overline{F}(u)}{\int_u^\infty e^{x-u} dF(x)} = \frac{3\big(1 + e^{-4u}\big)}{\frac{1}{2}(9 + 7e^{-4u})} \to \begin{cases} C_- = \frac{2}{3}, & u \to \infty, \\ C_+ = \frac{3}{4}, & u \to 0. \end{cases}$$

Отже, має місце двостороння оцінка, яка при $u = 0$ охоплює q_+

$$\frac{2}{3}e^{-u} < \mathbf{P}\{\xi^+ > u\} < \frac{3}{4}e^{-u}, \quad \frac{2}{3} < \kappa \approx q_+ < \frac{3}{4}, \quad \Psi_{\mathrm{CL}}(0) > \frac{3}{4}.$$

Згідно з (5.22)

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma^+(0) > z, \tau^+(0) < \infty\big] = \\ = \frac{\lambda}{2}\int_z^\infty e^{(z-y)\rho_-(s)}(e^{-3y} + e^{-7y})dy,$$

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_+(0) > z, \tau^+(0) < \infty\big] = \\ = \frac{\lambda}{2}\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}(e^{-3y} + e^{-7y})dy,$$

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_0^+ > z, \tau^+(0) < \infty\big] = \\ = \frac{\lambda}{2\rho_-(s)}\int_z^\infty (1 - e^{-y\rho_-(s)})(3e^{-3y} + 7e^{-7y})dy,$$

При $s \to 0$ звідси випливає, що ($\lambda = 3$)

$$\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = \frac{3}{2}\int_z^\infty (e^{-3y} + e^{-7y})dy =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-3z} + \frac{1}{7}e^{-7z}\right) \to \frac{5}{7}, \quad z \to 0,\\
&\mathbf{P}\big\{\zeta^+ > 0, \gamma_+(0) > z\big\} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-3z} + \frac{1}{7}e^{-7z}\right),\\
&\mathbf{P}\big\{\zeta^+ > 0, \gamma_0^+ > z\big\} = \frac{3}{2}\int_z^\infty y(3e^{-3y} + 7e^{-7y})dy =\\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-3z} + \frac{1}{7}e^{-7z}\right).
\end{aligned}
$$

Згідно з (5.23)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\zeta^+ = \frac{\lambda\mu_2}{2|m|}, \quad \mu_1 = \frac{5}{21}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{49}\right) = \frac{2\cdot 29}{9\cdot 49},\\
&\mathbf{P}\big\{\gamma^+(\infty) > z | \tau^+(\infty) < \infty\big\} =\\
&= \frac{3}{|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty (y-z)(e^{-3y} + e^{-7y})dy =\\
&= \frac{e^{-3z}}{3}\left(z + \frac{1}{3}\right) + \frac{e^{-7z}}{7}\left(z + \frac{1}{7}\right),\\
&\mathbf{P}\big\{\gamma_+(\infty) > z | \tau^+(\infty) < \infty\big\} =\\
&= \frac{3}{|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty y(e^{-3y} + e^{-7y})dy = \frac{29}{8}\left(\frac{1}{9}e^{-3z} + \frac{1}{49}e^{-7z}\right),\\
&\mathbf{P}\big\{\gamma_\infty^+ > z | \tau_\infty^+) < \infty\big\} = \frac{3}{|m|\mathbf{E}\zeta^+}\int_z^\infty y^2(e^{-3y} + e^{-7y})dy =\\
&= \left(\frac{e^{-3z}}{3} + \frac{e^{-7z}}{7}\right)\left(\frac{2}{3} - z^2\right).
\end{aligned}
$$

5.2 Процеси ризику з випадковими преміями та їх характеристики

Розглянемо резервний та надлишковий процес ризику з випадковими преміями (див. (5.6))

$$
\begin{aligned}
&\xi_u(t) = u + C(t) - S(t), \quad u > 0,\\
&\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad C(t) = \sum_{k\le\nu_1(t)} \xi'_k,
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

$$S(t) = \sum_{k \le \nu_2(t)} \xi_k, \quad k \ge 0, \quad \xi_k, \xi'_k > 0, \quad k > 0,$$

$\nu_{1,2}(t)$ — незалежні прості пуассонівські процеси з відповідними інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$. Як і для класичних процесів ризику, для них аналогічно позначаються всі основні ризикові характеристики. Далі наводиться опис основних результатів для цих процесів у тому випадку, коли розподіл ξ'_k з параметром $c > 0$ — показниковий. Згідно з означенням 3.1 (див. (3.78), $d = b > 0$), такі процеси є майже напівнеперервними ($\xi_u(t)$ — зверху, $\zeta(t)$ — знизу). В такому разі кумулянта $\zeta(t)$ має вигляд:

$$\psi(\alpha) = \lambda_2(\varphi(\alpha) - 1) + \lambda_1 \left(\frac{b}{b + i\alpha} - 1 \right);$$
$$\mathbf{E}\xi'_1 = 1/c, \quad \mathbf{E}\xi_1 = \mu, \quad m = \lambda_2 \mu - \lambda_1 b^{-1} \quad \text{або}$$
$$\psi(\alpha) = \lambda \left(p(\varphi(\alpha) - 1) - q \frac{i\alpha}{b + i\alpha} \right),$$
$$p = \lambda_2 \lambda^{-1}, \quad q = \lambda_1 \lambda^{-1}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Це означає, що міра Леві виражається через ф.р. стрибків таким чином:

$$\Pi(dx) = \lambda_2 d\,F(x) I(x > 0) + \lambda_1 b e^{bx} dx I \quad (x < 0).$$

На основі співвідношень для х.ф. $\xi^+(\theta_s)$, одержаних в § 3.3 для майже напівнеперервних знизу процесів, можна навести результати про інтегральні перетворення ймовірностей виживання та банкрутства.

Теорема 5.7. *Для майже напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$ справедливі такі твердження:*

1. *Подвійне інтегральне перетворення ймовірності виживання*

$$\widetilde{\phi_\zeta}(s, \nu) = s \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-\nu u} d\phi_t(u) dt$$

виражається через генератрису початкових сходинкових висот $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ за допомогою дограничної формули Полячека–Хінчина

$$\widetilde{\phi_\zeta}(s, \nu) = \mathbf{E} e^{-\nu \zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s) \widetilde{g_s}(\nu)}, \tag{5.33}$$

$$\widetilde{g}_s(\nu) = \mathbf{E}\big[e^{-\nu\gamma^+(0)}\,|\,\zeta^+(\theta_s) > 0\big] = \frac{G_1(s,0,\nu)}{G_1(s,0,0},$$

де згідно з (3.153) *при* $\lambda < \infty$, $a = 0$

$$G_1(s,0,\nu) = p_-(s)\int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi(dx) +$$
$$+ q_-(s)\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)-\nu}\int_0^\infty (e^{-\nu y} - e^{-\rho_-(s)y})\Pi(dy),$$
$$\mathbf{P}\big\{\zeta^-(\theta_s) < x\big\} = q_-(s)e^{x\rho_-(s)}, \quad x < 0, \quad p_+(s) = \frac{s}{s+\lambda}p_-^{-1}(s).$$

2. *Подвійне інтегральне перетворення ймовірності банкрутства визначаєтьcя співвідношенням* (*див.* (3.109))

$$\widetilde{\phi_+}(s,\alpha) = \frac{s+\lambda}{s}p_+(s)\left\{\widetilde{P_>}(s,\alpha) - q_-(s)\left[\frac{b}{b+i\alpha}\widetilde{P_>}(s,\alpha)\right]_+\right\},$$
$$\widetilde{P_>}(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{P}(s,x)dx. \tag{5.34}$$

3. *Крім* (5.33) *для* $\widetilde{\phi_\zeta}(s,\nu)$ *має місце співвідношення* (*див.* (3.93))

$$\widetilde{\phi_\zeta}(s,\nu) = \frac{sb(p_-(s)-\nu)}{\rho_-(s)\left[s(b-\nu) - \nu(mb - K_2(\nu) - b\widetilde{K_2}(\nu))\right]}, \tag{5.35}$$

де при $\lambda_2 < \infty$

$$K_2(\nu) = \int_0^\infty (e^{-\nu x} - 1)\Pi(dx) = \lambda_2\int_0^\infty (e^{-\nu x} - 1)dF(x),$$
$$\widetilde{K_2}(\nu) = \lambda_2\int_0^\infty (e^{-\nu x} - 1)\Pi(x)dx = \lambda_2(\widetilde{F}(\nu) - \widetilde{F}(0)), \quad \widetilde{F}(0) = \mu.$$

4. *Згідно з наслідком* 3.11б)*:*

$$\widetilde{\phi_\zeta}(s,\nu) = \mathbf{E}e^{-\nu\zeta^+(\theta_s)} = \tag{5.36}$$
$$= s\left\{s + \lambda_2\nu\frac{p_-(s)(b\nu)}{\rho_-(s)+\nu}\left[\widetilde{F}(\nu) - q_-(s)\frac{b}{b+\nu}\widetilde{F}(\rho_-(s))\right]\right\}^{-1}.$$

5. *Після обернення* (5.36) *по* ν *встановлюється співвідношення* (*див.* (3.111))

$$\bar{P}_+(s,x) = \frac{s+\lambda p_+(s)}{s}\left[\bar{P}(s,x) - q_-(s)\mathbf{P}\{\zeta(\theta_s) > x+\theta_b'\}\right], \tag{5.37}$$

$$x>0, \quad p_-(s) = \frac{\mathbf{P}\{0 \le \zeta(\theta_s) < \theta_b'\}}{\mathbf{P}\{\zeta(\theta_s) < \theta_b'\}}, \quad p_+(s)p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda}.$$

Для співвідношень $P_+(s,x)$ та $\bar{P}_+(s,x)$=$1-P_+(s,x)$ нам знадобиться їх зображення у зручній (для обернення по s) формі.

Лема 5.2. *Для довільного майже напівнеперервного зверху процесу* $\xi(t)$ (*див.* (3.78), $d=c>0$) (*навіть при* $\lambda_2 = \int_{-\infty}^0 \Pi(dx) = \infty$), *основна факторизаційна тотожність* (*о.ф.т.*) *має вигляд:*

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}\varphi_-(s,\alpha), \quad \rho_+(s) = cp_+(s). \tag{5.38}$$

Дробово-лінійна компонента факторизації $\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}$ *визначає розподіл* $\xi^+(\theta_s)$ *при* $x>0$*:*

$$\bar{P}_+(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad \mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = \frac{q_+(s)}{\rho_+(s)}, \tag{5.39}$$

а при $m<0$ *після граничного переходу* $s\to 0$ *з* (5.39) *випливає, що*

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = q_+ e^{-cp_+ x}, \quad x>0.$$

Для розподілу $\xi(\theta_s)>0$ *має місце зображення*

$$\bar{P}(s,x) = \frac{s\rho_+'(s)}{\rho_+(s)}e^{-\rho_+(s)x}, \quad x>0. \tag{5.40}$$

Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ (*див.* (3.78), $d=b>0$) *х.ф.* $\xi^-(\theta_s)$ *визначається коренем рівняння* $k(r)=s$ $r_s=-\rho_-(s)$ ($\rho_-(s)=bp_-(s)$)

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \quad P_-(s,x) = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}, \quad x<0.$$

На основі о.ф.т.

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}\varphi_+(s,\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0,$$

встановлюється аналог співвідношення (5.40)

$$P(s,x) = \frac{s\rho_-'(s)}{\rho_-(s)} e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0. \tag{5.41}$$

Для $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s)$ *при* $\lambda < \infty$ *має місце зображення*

$$\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = \begin{cases} -q_-(s)(bp_-(s))^{-1}, \\ q_+(s)b^{-1} - \lambda p_+(s)(sb)^{-1}. \end{cases} \tag{5.42}$$

Доведення. Співвідношення (5.38) та (5.39) доведені в § 3.2. З рівняння $(\mathcal{L}_{\mathcal{S}})$ випливає, що $k'(\rho_+(s)) = [\rho_+'(s)]^{-1}$. При $\rho(s) = \rho_+(s) = cp_+(s)$ і о.ф.т. для $\varphi(s,-ir) = \frac{s}{s-k(r)}$ з (5.38) випливає формула

$$\frac{s(\rho_+(s) - r)}{k(\rho_+(s)) - k(r)} = \rho_+(s)(c-r)\varphi_+(s,-ir),$$

з якої при $r \to \rho_+(s)$ одержимо співвідношення

$$\frac{s}{k'(\rho_+(s))} = s\rho_+'(s) = p_+(s)(c - \rho_+(s))\varphi_-(s, -i\rho_-(s)), \tag{5.43}$$

Застосувавши операцію проектування $[\ \ ]_+$ до (5.38) знаходимо,що

$$[\varphi(s,\alpha)]_+ = \left[\frac{\rho_+(s)\varphi_-(s,\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha}\right]_+ - \left[\frac{i\alpha\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\varphi_-(s,\alpha)\right]_+.$$

Після обернення цього виразу відносно α встановлюється, що

$$P'(s,x) = q_+(s)\rho_+(s)\varphi_-(s,-i\rho_+(s))e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \tag{5.44}$$

Із (5.43) і (5.44) випливає (5.40). Для майже напівнеперервних знизу процесів аналогічно встановлюються співвідношення (5.41) та (5.42). □

Для майже напівнеперервних (зверху або знизу) процесів встановлюються умовні формули двоїстості (див. [180, 181]).

Лема 5.3. *Для майже напівнеперервного зверху процесу має місце умовне співвідношення двоїстості зв'язку між розподілами* $\xi(t) > 0$ *та* $\tau^+(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t) < x\} = \frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(x) < t \,|\, \tau^+(0) < t\}, \quad x > 0. \tag{5.45}$$

Для майже напівнеперервного знизу процесу справедливе аналогічне співвідношення двоїстості

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)<x\}=-\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^-(x)<t\,|\,\tau^-(0)<t\},\quad x<0. \tag{5.46}$$

Доведення. Для майже напівнеперервного зверху процесу співвідношення (5.40) можна переписати так

$$\bar{P}(s,x)=-s\int_x^\infty \frac{1}{z}\big(e^{-\rho_+(s)z}\big)'_s dz,\quad x>0. \tag{5.47}$$

На основі (5.39) знаходимо, що

$$e^{-\rho_+(s)z}=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>z\}q_+^{-1}(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>z\,|\,\xi^+(\theta_s)>0\}.$$

Тоді з (5.47) випливає, що

$$\bar{P}(s,x)=-s\int_x^\infty \frac{1}{z}\left(\int_0^\infty e^{-st}\,d_t\mathbf{P}\{\xi^+(t)>z\,|\,\xi^+(t)>0\}\right)'_s dz=$$
$$=s\int_x^\infty \frac{1}{z}\int_0^\infty te^{-st}d_t\mathbf{P}\{\xi^+(t)>z\,|\,\xi^+(t)>0\}dz.$$

Звідси після зміни порядку інтегрування і обернення по s одержимо

$$\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}=\int_x^\infty \frac{t}{z}\,d_t\mathbf{P}\{\xi^+(t)>z\,|\,\xi^+(t)>0\}dz. \tag{5.48}$$

Зауважимо, що для майже напівнеперервного зверху процесу додатні стрибки показниково розподілені і мають щільність розподілу

$$f(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\bar{F}(x)=c\bar{F}(0)e^{-cx},\quad x>0.$$

Тому при $x>0$ розподіл $\xi(t)$ також має щільність розподілу

$$f_t(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}=-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{S_{\nu(t)}>x\}=$$
$$=\sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}\{\nu(t)=k\}f^{*k}(x).$$

Отже, після диференціювання (5.48) одержимо (5.45) для майже напівнеперервних зверху процесів. □

Аналогічно для майже напівнеперервних знизу процесів з кумулянтою (див. також (3.78) з $d = b > 0$, $\lambda_2 < \infty$)

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx) + \\ + \lambda_2 \int_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - 1) b e^{bx}, \quad a \geq 0, \ \lambda_1 = \int_0^\infty \Pi(dx) \leq \infty, \tag{5.49}$$

доводиться співвідношення (5.46). Доведення (5.41) для майже напівнеперервних знизу процесів ризику з $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \infty$ випливає з того, що

$$P_-(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = q_-(s) e^{\rho_-(s)x}, \\ \rho_-(s) = b p_-(s), \quad x < 0.$$

Тому справедливий перший рядок в (5.42)

$$\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = -\int_{-\infty}^0 P_-(s,x)dx = -q_-(s)(bp_-(s))^{-1},$$

другий рядок в (5.42) випливає з першого після врахування зв'язку між $p_-(s)$ та $p_+(s)$: $p_+(s)p_-(s) = s(s+\lambda)^{-1}$ при $a = 0, \lambda < \infty$

$$\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = \frac{p_-(s) - 1}{bp_-(s)} = \frac{1}{b}\left[1 - \frac{s+\lambda}{s} p_+(s)\right] = \\ = \frac{1}{b}\left[1 - p_+(s) - \lambda s^{-1} p_+(s)\right] = \frac{1}{b}\left[q_+(s) - \lambda s^{-1} p_+(s)\right].$$

На основі лем 5.2, 5.3 встановлюються співвідношення для $\bar{P}_+(s,x)$ $(P_-(s,x))$, зручні для обернення по s (див. [181]).

Теорема 5.8. *Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (5.49) розподіл $\xi^+(\theta_s)$ визначається співвідношенням:*

$$\bar{P}_+(s,x) = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{p_-(s)}\left[\bar{P}(s,x) - q_-(s)\displaystyle\int_x^\infty \bar{P}(s,z) e^{b(x-z)} dz\right], \\ \mathbf{E}\xi^-(\theta_s)\left[-bq_-^{-1}(s)\bar{P}(s,x) + \displaystyle\int_x^\infty b\bar{P}(s,z) e^{b(x-z)} dz\right], \end{cases} \\ q_-^{-1}(s)\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = s\int_0^\infty \mathbf{E}\left[\xi^-(t) | \tau^-(0) < t\right] e^{-st} dt. \tag{5.50}$$

Після обернення по s в (5.50) *встановлюється аналог* (5.12)

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t) > x\} = \\ = \begin{cases} \int_0^t \mathbf{P}\{\xi(t-y) > x\} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}\left[\xi^-(y) | \tau^-(0) < y\right] dy - \\ \quad - \int_0^t d\,\mathbf{E}\xi^-(y) \int_x^\infty P\left\{\xi(t-y) > z\right\} e^{b(x-z)} dz; \\ \int_0^t \mathbf{P}\{\xi(t-y) > x\} \frac{1}{y} \mathbf{E}\left[|\xi(y)| | \xi(y) < 0\right] dy - \\ \quad - \int_0^t \int_x^\infty P\left\{\xi(t-y) > z\right\} e^{b(x-z)} dz d\mathbf{E}\xi^-(y). \end{cases} \tag{5.51}$$

Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою (5.49), тоді для х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ та ξ^+ встановлюються співвідношення, з яких випливає, що при $m < 0$ ξ^+ виражається через значення деякого монотонного випадково зупиненого процесу. Позначимо

$$\begin{aligned} &\psi_0(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi_0(dx), \\ &\Pi_0(dx) = \Pi(dx) + b\Pi(x)dx, \quad x > 0, \\ &\Pi^*(dx) = \frac{1}{b|m|}\Pi_0(dx), \quad a^* = \frac{a}{b|m|}, \\ &\psi^*(\alpha) = i\alpha a^* + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi^*(dx), \end{aligned} \tag{5.52}$$

$\psi^*(\alpha)$ є кумулянтою монотонно зростаючого процесу $\xi^*(t)$. Для східчастих процесів з випадковими преміями ($a = a^* = 0$) формули (5.51) є аналогами формул (5.11)–(5.13). На основі мартингальної властивості $X(t) = e^{-R_+\zeta(t)}$ можна довести також справедливість співвідношень (5.28), (5.29) для ймовірності банкрутства і у випадку майже напівнеперервних знизу процесів ризику.

Теорема 5.9. *Для процесу з кумулянтою* (5.49) *х.ф.* $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням* (*див.* (3.186), (3.187))

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{s - i\alpha k(s,\alpha)}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s), \tag{5.53}$$

$$k(s,\alpha) = p_-(s)\widetilde{\Pi}(-i\alpha) + q_-(s)\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha}[\widetilde{\Pi}(-i\alpha) - \widetilde{\Pi}(\rho_-(s))].$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) = a - \lambda_1 b^{-1} + \lambda_2\mu < 0$ $(\mathbf{E}\xi_1 = \mu,\ \mathbf{E}\xi_1' = \frac{1}{b})$, *тоді х.ф.* ξ^+ *визначається співвідношенням*

$$\varphi_+(\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{b|m|}{b|m| - \psi_0(\alpha)}, \tag{5.54}$$

яке зводиться до вигляду

$$\varphi_+(\alpha) = \frac{1}{1-\psi^*(\alpha)} = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^*(\theta_1)}, \quad \mathbf{P}\{\theta_1 > t = e^{-t}\}. \tag{5.55}$$

Якщо $a = 0$, $\lambda_0 = \int_0^\infty \Pi_0(dx)$, *тоді* $p_+ > 0$ *і з* (5.50) *випливає співвідношення*

$$\begin{aligned}
&\varphi_+(\alpha) = \frac{b|m|}{b|m| + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1))\,\Pi_0(dx)},\\
&p_+ = \frac{b|m|}{b|m| + \lambda_0}, \quad m < 0,
\end{aligned} \tag{5.56}$$

яке зводиться до класичної форми формули Полячека–Хінчина

$$\begin{aligned}
&\varphi_+(\alpha) = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \quad \widetilde{\varphi}(\alpha) = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^\infty e^{i\alpha x}\Pi_0(dx),\\
&p_+ = \frac{|m|}{|m| + \lambda_0 b^{-1}}.
\end{aligned}$$

Доведення. Із співвідношення (див. (3.108))

$$\widetilde{\phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{p_-(s)}\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\left[\frac{b}{b+i\alpha}\widetilde{P}_>(s,\alpha)\right]_+^0,$$

після обернення по α встановлюється перший рядок в (5.50). Враховуючи зв'язок між $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s)$ та $q_-(s)$, $p_-(s)$ одержимо другий рядок в (5.50) та останню формулу в (5.50) для $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s)$. Використовуючи (5.46) легко довести, що

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\left[\xi^-(t)|\tau^-(0) < t\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^0 P\left[\xi^-(t) < z|\tau^-(0) < t\right]dz =\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^0 P\left[\tau^-(z) < t|\tau^-(0) < t\right]dz =
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{z}{t} \frac{\partial}{\partial z} P\left\{\xi(t) < z\right\} dz = \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[\xi(t), \xi(t) < 0\right]. \tag{5.57}$$

Після обернення (5.50) з урахуванням (5.41) одержується перше співвідношення в (5.51). Після підстановки (5.52) в це співвідношення одержимо другий рядок в (5.51). Згідно з лемою 3.4 (див. (3.93)) справедлива формула (5.53), з якої при $s \to 0$ і при умові $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ випливають співвідношення (5.54)–(5.56). □

З теорем 5.7–5.9 для процесу $\zeta(t)$ (після обернення (5.54) по s, див. [181]) випливає:

Наслідок 5.3. *Для надлишкового процесу вимог* $\zeta(t)$ (*див.* (5.32), $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1'} = b(b - i\alpha)^{-1}$) *з початковим капіталом* $u = 0$ *ймовірність банкрутства на обмеженому інтервалі* $[0, t]$

$$\bar{\phi}_t(0) = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) > 0\} = \widetilde{q}_+(t), \quad \widetilde{p}_+(t) = 1 - \widetilde{q}_+(t),$$

визначається шляхом обернення $q_+(s) = s\int_0^\infty e^{-st}\widetilde{q}_+(t)dt$ (*після підстановки в* (5.51) $x = 0$)

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_+(t) = &\int_0^t \mathbf{P}\{\zeta(t-y) > 0\} \frac{1}{y} \mathbf{E}\left[|\zeta(y)|, \zeta(y) > 0\right] dy - \\ &- \int_0^t \mathbf{E}\big[e^{-b\zeta(t-y)}, \zeta(t-y) > 0\big] d\mathbf{E}\zeta^-(y), \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\mathbf{E}\zeta^-(t) = b^{-1}\left[\widetilde{q}_+(t) - \lambda \int_0^t \widetilde{p}_+(y)dy\right].$$

Імовірність банкрутства на $[0, t]$ *для процесу* $\zeta(t)$ *з капіталом* $u > 0$ *визначається співвідношенням* (*ускладнений аналог* (5.11))

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_t(u) = &\mathbf{P}\{\zeta^+(t) > u\} = \\ &= \int_0^t \mathbf{P}\{\zeta(t-y) > 0\} \frac{1}{y} \mathbf{E}\left[|\zeta(y)|, \zeta(y) < 0\right] dy - \\ &- \frac{1}{b} \int_0^t \int_u^\infty \mathbf{P}\{\zeta(t-y) > z\} e^{b(u-z)} dz \left[d\widetilde{q}_+(y) - \lambda \widetilde{p}_+(y)dy\right]. \end{aligned} \tag{5.59}$$

При умові $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$ ($\theta_b' : \mathbf{P}\{\theta_b' > t\} = e^{-tb},\ b > 0$)

$$\bar{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = \lambda p_+ \int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \zeta(t) - u < \theta_b'\} dt,$$

$$p_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+ = 0\} = \left[1 + \bar{\lambda}\int_0^\infty \mathbf{P}\{0 \le \zeta(t) < \theta_b'\}dt\right]^{-1}. \qquad (5.60)$$

Порівнюючи формули (5.11), (5.12) із (5.51) та (5.59) можна сказати, що головна ідея тотожності Полячека–Спітцера повністю розкривається в цих співвідношеннях. Залежність розподілу екстремумів від розподілу додатних (від'ємних) значень $\pm\zeta(t) > 0$ дуже проста в (5.11), (5.12) для напівнеперервних процесів. Для майже напівнеперервних процесів співвідношення (5.51) та (5.59) значно складніші за (5.11), (5.12), оскільки простий доданок $\mathbf{P}\{\zeta(t) > x\}$ в (5.11) та (5.12) замінюється на складніший інтегральний доданок в (5.59).

Згідно з теоремою 3.8 (див. (3.161)) інтегральне перетворення генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$

$$\overline{V}_k(s, x, u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}, \gamma_k(x) > z, \tau^+(x) < \infty\big]dz$$

визначаються в термінах згорток $\bar{A}_k(x, u_k)$ з $P_-(s, x)$:

$$\begin{aligned}
&\bar{G}_k(s, x) = \int_{-\infty}^{+0} \bar{A}_k(x - y, u_k)dP_-(s, y)dy,\\
&\bar{A}_1(x, u) = -u\int_x^\infty e^{u(x-z)}\Pi(z)dz,\\
&\Pi(x) = \int_x^\infty \Pi(dy) = \lambda_2\bar{F}(x), \quad x > 0,\\
&\bar{A}_2(x, v) = (e^{-vx} - 1)\Pi(x),\\
&\bar{A}_3(x, \mu) = \bar{A}_2(x, \mu) - \mu\int_x^\infty e^{-\mu}z\Pi(z)dz.
\end{aligned}$$

Згідно з (3.156), (3.157), де обчислювались $\bar{G}_k$, для функцій

$$\bar{g}_k(s, x, u_k) = -u_k^{-1}\bar{G}_k(s, x, u_k) \quad \big(k = \overline{1,3},\ \rho_- = \rho_-(s)\big)$$

одержимо

$$\begin{aligned}
\bar{g}_1(s, x, u) = p_-(s)\int_x^\infty \Pi(y)e^{u(x-y)dy} +\\
+ \frac{q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s) - u}\int_0^\infty \left(e^{-uy} - e^{-\rho_- y}\Pi(x + y)dy\right),
\end{aligned}$$

$$\bar{g}_2(s,x,v) = p_-(s)\Pi(x)\frac{1-e^{-vx}}{v} +$$
$$+ q_-(s)\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(x-y)}\frac{1-e^{-vy}}{v}\Pi(y)dy,$$
$$\bar{g}_3(s,x,\mu) = p_-(s)\int_x^\infty e^{-\mu z}\Pi(z)dz +$$
$$+ q_-(s)\int_x^\infty \Pi(z)e^{-\mu z}\left(1-e^{\rho_-(x-z)}\right)dz + g_2(s,x,\mu).$$

Зокрема, при $x = 0$ одержимо значення $\bar{g}_k(s,0,u_k)$ в термінах $\widetilde{\Pi}(u_k) = \lambda_2\widetilde{F}(u_k) = \lambda_2\int_0^\infty e^{-u_k z}\bar{F}(z)dz$

$$\bar{g}_1(s,0,u) = p_-(s)\widetilde{\Pi}(u) + q_-(s)\rho_-(s)\frac{\widetilde{\Pi}(u)-\widetilde{\Pi}(\rho_-)}{\rho_- - u},$$
$$\bar{g}_2(s,0,v) = \frac{1}{v}q_-(s)p_-(s)\left[\widetilde{\Pi}(\rho_-) - \widetilde{\Pi}(v+\rho_-)\right],$$
$$\bar{g}_3(s,0,\mu) = p_-(s)\widetilde{\Pi}(\mu) +$$
$$+ q_-(s)\left[\frac{\rho_-(s)}{\mu}\left(\widetilde{\Pi}(\rho_-) - \widetilde{\Pi}(\rho_- + \mu)\right) + \widetilde{\Pi}(\mu) - \widetilde{\Pi}(\rho_- + \mu)\right].$$

В термінах $\bar{g}_k(s,x,u_k)$ формуються результати для $\overline{V}_k(s,x,u_k)$ (доведені в [51]) та для їх обернень відносно u_k.

Теорема 5.10. *Для майже напівнеперервного знизу процесу* $\zeta(t)$ (*див.* (3.78), $\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1'}{=}b(b{+}i\alpha)^{-1}$) *інтегральні перетворення* $\overline{V}_k(s,x,u_k)$ *та генератриси пар* $\{\tau^+(0),\gamma_k(0)\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$s\overline{V}_k(s,x,u_k) = \int_{-0}^x \bar{g}_k(s,x-y,u_k)dP_+(s,y), \tag{5.61}$$
$$k = \overline{1,3}, \quad x > 0;$$

при $m < 0$ *та* $s \to 0$

$$\overline{V}_k(s,x,u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{P}\{\gamma_k(x) > z, \zeta^+(\theta_s) > x\}dz \to \tag{5.62}$$
$$\underset{s\to 0}{\longrightarrow} \overline{V}_k(0,x,u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{P}\{\gamma_k(x) > z, \zeta^+ > x\}dz,$$
$$s\overline{V}_k(s,0,u_k) = p_+(s)\overline{g}_k(s,0,u_k), \quad x = 0.$$

Після обернення (5.62) *по* u_k *при* $x = 0$ *одержимо аналог* (5.22)

$$\begin{aligned}
&P\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = \\
&\quad = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(z) + q_-(s)b\int_z^\infty e^{(z-y)\rho_-(s)}\Pi(y)dy\right], \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > z\} = \\
&\quad = \frac{1}{s+\lambda}q_-(s)b\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}\Pi(y)dy, \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > z\} = \\
&\quad = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(z) + \frac{q_-(s)b}{\rho_-(s)}\int_z^\infty \left(1 - e^{-y\rho_-(s)}\right)\Pi(dy)\right], \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0\} = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi_+(0) + bq_-(s)\Pi_+(\rho_-(s))\right].
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Якщо $m = \lambda_2\mu - \lambda_1 b^{-1} < 0$ ($\mu = \widetilde{F}(0) = \mathbf{E}\xi_1$, $\mathbf{E}\xi_1' = b^{-1}$), тоді при $s \to 0$ з (5.63) випливає

Наслідок 5.4. *Якщо для майже напівнеперервного знизу східчастого процесу* $\zeta(t)$ $m = \mathbf{E}\zeta(0) < 0$, *тоді*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = \frac{\lambda_2}{\lambda}\left[\bar{F}(z) + b\int_z^\infty \bar{F}(y)dy\right], \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0, \gamma_0^+ > z\} = \frac{\lambda_2}{\lambda}\left[\bar{F}(z) + b\int_z^\infty y dF(y)\right], \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0, \gamma_+(0) > z\} = \frac{b\lambda_2}{\lambda}\int_z^\infty \bar{F}(y)dy.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

При $z \to 0$ *з першого співвідношення в* (5.64) *випливає, що* $q_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+ > 0\} = \lambda_2\lambda^{-1}(\mu b + 1)$. *Розподіл* ζ^+ *має атом в нулі, так само як і розподіл* $\gamma_+(0)$, *точніше*

$$\begin{aligned}
&p_+ = 1 - q_+ = \frac{b|m|}{\lambda} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \\
&\mathbf{P}\{\zeta^+ > 0, \gamma_+(0) = 0\} = \frac{\lambda_2}{\lambda} > 0.
\end{aligned}$$

Якщо $m < 0$, *тоді з* (3.62) *при* $s \to 0$ *випливає, що*

$$V_k(0, x, u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{P}\{\zeta^+ > x, \gamma_k(x) > z\}dz =$$

$$= \int_{-0}^{x} \bar{g}_k'(v, x-y, u_k) dP_+(y), \tag{5.65}$$

де похідним

$$\bar{g}_k'(0,x,u_k) = \lim_{s\to 0} s^{-1}\bar{g}_k(s,x,u_k),$$

$$\bar{g}_1'(0,x,u) = \frac{1}{b|m|}\int_x^\infty \Pi(y)e^{u(x-y)}dy + \\ + \frac{1}{u|m|}\int_0^\infty \left(1-e^{-uy}\right)\Pi(x+y)dy,$$

$$\bar{g}_2'(0,x,v) = \frac{\Pi(x)}{v|m|b}\left(1-e^{-vx}\right) + \\ + \frac{1}{v|m|}\int_0^\infty \left(1-e^{-vy}\right)\Pi(x+y)dy, \tag{5.66}$$

$$\bar{g}_3'(0,x,\mu) = \frac{1}{b|m|}\int_x^\infty \Pi(z)e^{-\mu z}\left(1+b(z-x)\right)dz + g_2'(s,0,\mu)$$

відповідають обернення по u_k $(\bar{g}_k'(0,x,u_k) = \int_0^\infty e^{-u_k z}\bar{g}_k(x,z)dz)$, *зокрема*

$$\bar{g}_1(x,z) = \frac{1}{b|m|}\Pi(x+z) + \frac{1}{|m|}\int_z^\infty \Pi(x+y)dy,$$

$$\bar{g}_2(x,z) = \frac{\Pi(x)I(z<x))}{b|m|} + \frac{1}{|m|}\int_z^\infty \Pi(x+y)dy, \tag{5.67}$$

$$\mathbf{P}\{\zeta^+ > x, \gamma_k(x) > z\} = \int_{-0}^{x} \bar{g}_k(x-y,z)dP_+(y), \quad k=1,2.$$

Згідно з наслідком 3.9 *при* $x\to\infty$ (*див.* (3.168) *при* $m<0$)

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(\infty) > z | \tau^+(\infty) < \infty\} = \\ = \frac{2}{2\mu_1+\mu_2}\int_z^\infty (1+y-z)\overline{F}(y)dy; \tag{5.68}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(\infty) > z | \tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{2}{2\mu_1+\mu_2}\int_z^\infty (1+y)\overline{F}(y)dy;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_\infty^+ > z | \tau^+(\infty) < \infty\} = \frac{2}{2\mu_1+\mu_2}\int_z^\infty \left(y+\frac{1}{2}y^2\right)dF(y).$$

$\mu_k = \mathbf{E}\xi_1^k$, $k=1,2$.

Доведення теореми 5.10 та наслідку 5.4 випливає з результатів теореми 3.8 (див. (3.161)) та наслідку 3.9.

Приклад 5.2. Нехай $\xi(t) = S_1(t) - S_2(t)$

$$S_1(t) = \sum_{k \le \nu_1(t)} \xi'_k, \quad S_2(t) = \sum_{k \le \nu_1(t)} \xi''_k,$$

де $\nu_{1,2}(t)$ — пуассонівські з параметром 1,

$$\varphi_1(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi'_1} = \frac{1}{(1-i\alpha)^2}, \quad \varphi_2(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi''_1} = \frac{b}{b-i\alpha}.$$

Знайти розподіли основних ризикових характеристик.

Процес $\xi(t)$ є майже напівнеперервним знизу, з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha\left[\frac{2-i\alpha}{(1-i\alpha)^2} - \frac{1}{b+i\alpha}\right].$$

Х.ф. $\xi(\theta_s)$ має вигляд

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s(b+i\alpha)(1-i\alpha)^2}{(b+i\alpha)\Big[s(1-i\alpha)^2 + i\alpha(2-i\alpha)\Big] - i\alpha(1-i\alpha)^2},$$

а рівняння Лундберга зводиться до кубічного рівняння:

$$\begin{aligned} P_3(s,r) := {} & r^3(s-2) + r^2[s(b-2)+4-b] - \\ & - r(2bs - s + mb) + bs = 0, \end{aligned}$$

від'ємний корінь $r_s = -\rho_-(s)$ визначає

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s).$$

З розкладу $P_3(s,i\alpha) = (\rho_-(s)+i\alpha)P_2(s,\alpha)$, де $P_2(s,r)$ можна знайти безпосереднім діленням $P_3(s,r)$ на $(r+\rho_-)$,

$$\begin{aligned} P_2(s,r) = {} & (s-2)r^2 + \\ & + r[4 - b + 2\rho_-(s) + s(b-2-\rho_-(s))] + bs\rho_-^{-1}(s). \end{aligned}$$

За допомогою $P_2(s,r)$ визначаємо

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{s}{p_-(s)} \frac{(1-i\alpha)^2}{P_2(s,i\alpha)}.$$

При умові $m < 0$ $s\rho_-^{-1} \to |m|^{-1}$, $s \to 0$, тому $P_2(0,r) = |m|b + r(4-b) - 2r^2$. Якщо $b = 1/14$, тоді $m = 2 - 1/b = -12 < 0$ і існує невироджений розподіл абсолютного максимуму, х.ф. якого має вигляд:

$$\varphi_+(\alpha) = |m| \frac{b(1-i\alpha)^2}{b|m| + i\alpha(4-b) + 2\alpha^2}.$$

З розкладу $P_2(0,r) = -2(r-r_1)(r-r_2)$ випливає, що

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{3}{7} - \frac{27}{164}\frac{1}{i\alpha - 1/4} + \frac{300}{2009}\frac{1}{i\alpha - 12/7}.$$

Після обернення по α знаходимо: $p_+ = P\left\{\xi^+ = 0\right\} = \frac{3}{7}$,

$$P\left\{\xi^+ > x\right\} = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{25}{287}\, e^{-\frac{12}{7}x} = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}x} + o\big(e^{-\frac{1}{4}x}\big).$$

Зауважимо, що найближчий до 0 корінь $R = r_1 = \frac{1}{4} > 0$ визначає експоненту головної частини ймовірності банкрутства як і в (5.29).

Для знаходження розподілів перестрибкових функціоналів через нескінченно віддалений рівень використаємо формули (3.168). При цьому слід врахувати, що $\int_x^\infty \Pi(dz) = \lambda \int_x^\infty dF(z)|_{\lambda=1} = e^{-x}(1+x)$, тоді

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\gamma^+(\infty) > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\right\} = m_0(0)e^{-z}(5+2z),\\
&\mathbf{P}\left\{\gamma_+(\infty) > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\right\} = m_0(0)e^{-z}\big(5+4z+z^2\big),\\
&\mathbf{P}\left\{\gamma_\infty^+ > z \,|\, \tau^+(\infty) < \infty\right\} = \frac{m_0(0)}{2}e^{-z}\big(10+14z+6z^2+z^3\big),
\end{aligned}$$

де $m_0(0) = \big(\widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\Pi}'(0)\big)^{-1} = 1/5$.

А для перестрибкових функціоналів через нульовий рівень згідно з формулами (3.165), маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\right\} = \\
&= \frac{e^{-z}\Big((1+z)\,(1+\rho_-(s))^2 + q_-(s)\,(2+z+\rho_-(s)+z\rho_-(s))\Big)}{(s+2)\,(1-\rho_-(s))^2};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s)>0,\gamma_+(0)>z\right\}=$$
$$=\frac{e^{-z(1+\rho_-(s))}q_-(s)\left(2+z+\rho_-(s)+z\rho_-(s)\right)}{(s+2)\left(1+\rho_-(s)\right)^2};$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s)>0,\ \gamma_0^+>z\right\}=\frac{1}{(s+2)\,\rho_-(s)}\Bigg(e^{-z}\left(1+z\right)\times$$
$$\times\left(q_-(s)+\rho_-(s)\right)-\frac{e^{-z(1+\rho_-(s))}q_-(s)\left(1+z+z\rho_-(s)\right)}{(1+\rho_-(s))^2}\Bigg).$$

Після переходу при $s\to 0$ маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\xi^+>0,\gamma^+(0)>z\right\}=\frac{e^{-z}(16+15z)}{28},$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^+>0,\gamma_+(0)>z\right\}=\frac{e^{-z}(2+z)}{28},$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^+>0,\gamma_0^+>z\right\}=\frac{e^{-z}(16+16z+z^2)}{28}.$$

Крім того $\mathbf{P}\{\xi^+>0,\gamma_+(0)=0\}=1/2$.

5.3 Граничні задачі для блукань та процесів з дискретним часом

Нехай $\{\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}\}$ — основний імовірнісний простір, на якому розглядаються послідовності випадкових величин і деякі процеси з дискретним часом. Нехай $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із значеннями на прямій $R=(-\infty;\infty)$ з ф.р.

$$F(x)=\mathbf{P}\left\{\xi_k<x\right\},\quad \varphi(\alpha)=\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k},\quad \forall\,k\geq 1,\quad \operatorname{Im}\alpha=0.$$

Найпростішим процесом з н.п. і дискретним часом є випадкове блукання

$$S_n^{(x)}=x+\sum_{k=0}^{n}\xi_k,\quad \xi_0=0,\quad S_0^x=x,\quad n\geq 0. \tag{5.69}$$

Якщо $N(t)$ — біноміально розподілена випадкова величина з параметром p $(0 < p < 1,\ \bar{p} = q = 1 - p)$

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = C_t^k p^k q^{t-k}, \quad 0 \le k \le t,$$

тоді для цілих $t \ge 0$ (згідно з означенням у прикладах 1.7 та 1.8)

$$\xi(t) = S_{N(t)} = \sum_{k \le N(t)} \xi_k, \quad (\mathbf{E}\xi_k = m,\ D\xi_k = \sigma^2 < \infty) \tag{5.70}$$

називається біноміальним процесом, який є процесом з н.п. і дискретним часом. В теорії ризику розглядається процес

$$\xi_u(t) = u + S_{N(t)}, \quad t \ge 0.$$

Якщо $\nu_0(t)$ — рівномірно розподілена випадкова величина

$$\mathbf{P}\{\nu_0(t) = k\} = \frac{1}{1+t} \qquad (0 \le k \le t),$$

тоді $\eta_u(t) = u + S_{\nu_0(t)}$ — також процес з н.п. і дискретним часом. Х.ф. для (5.69), (5.70) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{i\alpha S_n^{(x)}} = e^{i\alpha x}\varphi(\alpha)^n, \quad n \ge 0,\\
&\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_u(t)} = e^{i\alpha u}\mathbf{E}e^{i\alpha S_{N(t)}} = e^{i\alpha u}\left(q + p\varphi(\alpha))^t\right),\\
&\mathbf{E}e^{i\alpha\eta_u(t)} = e^{i\alpha u}\frac{1 - \varphi(\alpha)^{t+1}}{(1+t)(1-\varphi(\alpha))}.
\end{aligned}$$

Якщо для $\xi_u(t)$ покласти $u = 0$, $\varphi_1(\alpha) = q + p\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_1}$, тоді для $\xi(t) = S_{N(t)}$

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(t)} = \varphi_1(\alpha)^t \quad \Leftrightarrow \quad \xi(t) \doteq \widetilde{S}_t = \sum_{k \le t} \widetilde{\xi}_k, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де $\{\widetilde{\xi}_k\}_{k \ge 1}$ — послідовність однаково розподілених випадкових величин з х.ф. $\varphi_1(\alpha)$ $(\widetilde{\xi}_0 = 0)$.

Розглянемо випадкове блукання $S_n = \sum\limits_{k \le n} \xi_k$ з х.ф. кроку $\varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k}$. За допомогою геометрично розподіленої випадкової величини $\widetilde{\nu}(s)$ з параметром $0 < s < 1$, $\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s) = k\} = (1-s)s^k$, $k \ge 0$

знаходяться твірні перетворення х.ф. для загального випадкового блукання S_n як х.ф. для $S_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}. \tag{5.71}$$

Відповідно для $\xi(\widetilde{\nu}(s))$ знаходимо, що

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1-s}{1-s\varphi_1(\alpha)}, \quad \varphi_1(\alpha) = \bar{p} + p\varphi(\alpha). \tag{5.72}$$

При дослідженні граничних задач для S_n використовується аналог рівняння Лундберга

$$1 - s\varphi(-ir) = 0, \qquad (\mathcal{L}_s),$$

що одержується прирівнюванням знаменника в (5.72) до 0, та лема про безмежноподільну факторизацію.

Лема 5.4. *Для $\varphi(s,\alpha)$ має місце факторизаційний розклад*

$$\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^+}\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^-}, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{5.73}$$

множники якого є безмежно подільними х.ф.

$$\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^\pm} = \exp\left\{\int_{R^\pm}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^\pm(x)\right\},$$

$$N_s^\pm(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n}\mathbf{P}\{S_n < x\}, \quad \pm x \geq 0. \tag{5.74}$$

Доведення леми грунтується на співвідношеннях:

$$\ln(1 - s\varphi(\alpha)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}s^n\varphi^n(\alpha),$$

$$\ln\frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{s^n}{n}\mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}-1\big] =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{s^n}{n}\mathbf{E}\big[(e^{i\alpha S_n}-1), S_n>0\big] + \sum_{n\geq 1}\frac{s^n}{n}\mathbf{E}\big[(e^{i\alpha S_n}-1), S_n<0\big].$$

Позначимо екстремуми сум ($S_0 = 0$)

$$S_n^{\pm} = \sup_{0\le k\le n}(\inf)S_k, \quad S^{\pm} = \sup_{0\le k<\infty}(\inf)S_k$$

та їх х.ф. $\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S^{\pm}_{\tilde\nu(s)}}$.

Теорема 5.11. *Для $\varphi(s,\alpha)$ справедлива о.ф.т.*

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0. \tag{5.75}$$

Компоненти факторизації визначаються співвідношеннями

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_s^{\pm}} = \exp\left\{\int_{R^{\pm}}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^{\pm}(x)\right\} \tag{5.76}$$

і називаються тотожностями Полячека–Спітцера. При цьому

$$p_{\pm}(s) = \mathbf{P}\{S^{\pm}_{\tilde\nu(s)} = 0\} > 0; \quad p_+(s)p_-(s) = 1-s.$$

Якщо $m=0$, тоді $p_{\pm}(s)\approx\sqrt{1-s}$ при $s\to 1$ (для простих симетричних S_n $p_{\pm}(s)=\sqrt{1-s}$).

Якщо $m>0$, тоді $p_-(s)\approx p'_+(1)(1-s)\to 0$, $p_-(s)\to p_->0$ при $s\to 1$.

Якщо $m<0$, тоді $p_-(s)\approx p'_-(1)(1-s)\to 0$, $p_+(s)\to p_+>0$ при $s\to 0$.

При $m>0$ ряд $N_1^-(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}\{S_n<x\}<\infty$, тому абсолютний мінімум S^- має невироджений розподіл з х.ф.

$$\mathbf{E}e^{i\alpha S^-} = \exp\left\{\int_{-\infty}^{0}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^-(x)\right\}.$$

При $m<0$ ряд $N_1^+(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}\{S_n<x\}<\infty$, тому абсолютний максимум S^+ має невироджений розподіл з х.ф.

$$\mathbf{E}e^{i\alpha S^+} = \exp\left\{\int_{0}^{\infty}(e^{i\alpha x}-1)dN_s^+(x)\right\}.$$

Доведення теореми 5.9 аналогічно доведенню о.ф.т. для процесів з н.п. у § 2.1.

При $m = 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbf{P}\{\pm S_n > 0\} = \infty$ і $\mathbf{P}\{S^{\pm} = \pm\infty\} = 1$ та S_n називається блуканням осцилюючого типу. При $\pm m > 0$ S_n називається блуканням, спрямованим у $\pm\infty$.

Розглянемо перестрибкові функціонали для $\{S_n, n \geq 0\}$, зберігаючи для них позначення з розділів 1–3 для процесів $\{\xi(t), t \geq 0\}$: $\tau^+(x) = \min\{n \geq 0, S_n > x\}$, $\gamma^+(x) = S_{\tau^+(x)} - x$, $x \geq 0$ — ціле. Позначимо генератрису для $\tau^+(x)$ через $T(s,x)$ і покажемо, що

$$T(s,x) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = \mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} > x\}. \tag{5.77}$$

Дійсно, опускаючи для стислості запису умову $\{\tau^+(x) < \infty\}$, маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} > x\} &= (1-s)\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbf{P}\{S^+_k > x\} = \\
&= (1-s)\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbf{P}\{\tau^+(x) \leq k\} = \\
&= (1-s)\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{r\leq k}\mathbf{P}\{\tau^+(x) = r\} = \\
&= (1-s)\sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau^+(x) = r\}\sum_{k=r}^{\infty} s^k = T(s,x).
\end{aligned}$$

Легко довести, що для майже напівнеперервного зверху блукання S_n з розподілом кроку

$$F(x) = [q + p(1-e^{-cx})]I_{(x>0)} + qF_1(x)I_{(x<0)}, \quad p+q=1 \tag{5.78}$$

має місце

Теорема 5.12. *Для S_n з розподілом кроку* (5.78) *генератриса $T(s,x)$ визначається додатним коренем $\rho(s)$ рівняння Лундберга* ($\mathcal{L}_s$)

$$T(s,x) = q_+(s)e^{-\rho(s)x}, \quad x > 0, \quad \rho(s) = cp_+(s). \tag{5.79}$$

Додатна компонента о.ф.т. (*тобто х.ф.* $S^+_{\tilde{\nu}(s)}$) *також визначається коренем* $\rho(s) = cp_+(s)$

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho(s) - i\alpha}, \quad p_+(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} = 0\}. \tag{5.80}$$

Доведення. Із стохастичних співвідношень

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 1 + \tau^+(x-\xi), & \xi \le x \end{cases}$$

легко виводиться інтегральне рівняння типу згортки

$$T(s,x) = spe^{-cx} + s\int_{-\infty}^{x} T(s,x-y)dF(y), \quad x > 0,$$

розв'язок якого шукаємо у формі $T(s,x) = q_+(s)e^{-\rho(s)x}$. Після підстановки розв'язку в це рівняння одержимо співвідношення

$$q_+(s) = spe^{-cq_+(s)x} + s[q_+(s)q\varphi_1(i\rho) + p(1-e^{-cq_+(s)x})],$$

яке після переходу до границі при $x \to 0$ зводиться до вигляду

$$q_+(s) = sp + q_+(s)sq\int_{-\infty}^{0} e^{\rho(s)y}dF_1(y).$$

Це співвідношення з урахуванням того, що при $\rho = p_+(s)c$ $\varphi(i\rho) = q\varphi_1(i\rho) + p\frac{c}{c-\rho}$, зводиться до рівняння $(\mathcal{L}_s)$. Отже, (5.79) доведено, а з нього випливає (5.80). $\square$

Повернемось знову до загального випадку і сформулюємо ще одне важливе твердження про спільний розподіл $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$. На основі стохастичного співвідношення зв'язку між $\tau^+(x)$ і $\gamma^+(x)$ ($x > 0,\ y > 0$)

$$\tau^+(x+y) \doteq \begin{cases} \tau^+(y), & \gamma^+(y) > x, \\ \tau^+(y) + \tau^+(x-\gamma^+(y)), & \gamma^+(y) \le x \end{cases} \tag{5.81}$$

виводиться інтегральне рівняння для спільної генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, на основі якого встановлюється друга ф.т. (2 ф.т.) для

$$T(s,x,u) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)}e^{-u\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] \quad (0 < s < 1,\ x > 0).$$

Щоб сформулювати це твердження, позначимо через θ'_μ показниково розподілену випадкову величину ($\mathbf{P}\{\theta'_\mu > x\} = e^{-\mu x}, x > 0, \mu > 0$), за допомогою якої записується інтегральне перетворення для $T(s,u,x)$

$$\widetilde{T}(s,\mu,u) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(\theta'_\mu)}e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \tau^+(\theta'_\mu) < \infty\big].$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi_1 \geq 0$, тоді $\mathbf{P}\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$. Зауважимо, що інтегруванням частинами легко довести, що

$$T(s,x,u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(x)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > x\big], \quad x > 0;$$
$$\widetilde{T}(s,\mu,u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > \theta'_\mu\big]. \tag{5.82}$$

Теорема 5.13. *Для довільного блукання S_n спільна генератриса $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ визначається співвідношенням (2-ою ф.т.)*

$$\widetilde{T}(s,\mu,u) = \frac{\mu}{\mu-u}\left[1 - \frac{\mathbf{E}e^{-\mu S^+_{\widetilde{\nu}(s)}}}{\mathbf{E}e^{-u S^+_{\widetilde{\nu}(s)}}}\right]. \tag{5.83}$$

Для початкових сходинкових висот $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ має місце співвідношення

$$T(s,0,u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0\big] = 1 - \frac{p_+(s)}{\varphi_+(s,iu)}, \tag{5.84}$$
$$p_+(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} = 0\}, \quad \varphi_+(s,iu) = \mathbf{E}e^{-uS^+_{\widetilde{\nu}(s)}},$$

при цьому остання генератриса визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}e^{-uS^+_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{p_+(s)}{1-T(s,0,u)} = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)\widetilde{g}_s(u)}, \tag{5.85}$$

де $\widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)} | S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0\big]$. Формулу (5.85) можна назвати дограничним узагальненням формули Поллячека–Хінчина.

Якщо $m < 0$, тоді $p_+(s) \to p_+ = \mathbf{P}\{S^+ = 0\} > 0$ при $s \to 1$ і з (5.78) *випливає узагальнена формула Полячека–Хінчина*

$$\mathbf{E}e^{-uS^+} = \lim_{s\to 1}\varphi_+(s,iu) = \frac{p_+}{1-q_+\widetilde{g}(u)},$$
$$\widetilde{g}(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)} | S^+ > 0\big]. \tag{5.86}$$

Якщо для S_n виконується умова (5.78)*, тоді*

$$\widetilde{T}(s,\mu,u) = \frac{\mu c q_+(s)}{(c+u)(\rho(s)+\mu)},$$
$$T(s,x,u) = \mathbf{P}\{S^\pm_{\widetilde{\nu}(s)} > x\}\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(x)} = \frac{c}{c+u}q_+(s)e^{-\rho(s)x}.$$

При $m < 0$ має місце формула (5.86) *із $\widetilde{g}(u) = c(c+u)^{-1}$.*

Доведення 2-ої ф.т. грунтується на стохастичному співвідношенні (5.81) і цілком аналогічне доведенню 2-ої ф.т. для однорідних процесів (див. теорему 2.3). З (5.83) при $\mu \to \infty$ згідно теореми 1.17 встановлюється (5.84), а з останнього випливає (5.85) — співвідношення із зображенням генератриси $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$ в термінах спільної генератриси для початкових сходинкових висот $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$. Якщо $m < 0$, тоді з (5.85) після граничного переходу при $s \to 1$ одержуємо (5.86). З останнього співвідношення для $T(s, u, x)$ випливає, що розподіл $\gamma^+(x)$ не залежить від $\tau^+(x)$ та x і цей розподіл є показниковим з параметром $c > 0$.

Приклад 5.3. Нехай $\xi(n) = n + S_n$, $S_n = \sum\limits_{k \le n} \eta_k$, $\mathbf{E} e^{i\alpha\eta_1} = \frac{b}{b+i\alpha}$, $b > 0$. Знайти х.ф. $\xi(\theta_s)$, $\xi^\pm(\widetilde{\nu}(s))$, розподіли абсолютних екстремумів та генератрису $\gamma^+(0)$.

Блукання S_n є напівнеперервним тільки знизу і за допомогою х.ф. кроку $\varphi(\alpha) = e^{i\alpha} \frac{b}{b+i\alpha}$ знаходимо х.ф.

$$\varphi(s, \alpha) = \frac{(1-s)(b+i\alpha)}{b + i\alpha - sbe^{i\alpha}}, \quad m = \mathbf{E}\xi(1) = 1 - \frac{1}{b} = \frac{b-1}{b}.$$

Після заміни $i\alpha = r$ рівняння Лундберга зводиться до трансцендентного

$$b + r = sbe^r \quad (0 < s \le 1).$$

Графічно легко довести, що це рівняння при $0 < s < 1$ має 2 корені

$$r_s^- = -\rho_-(s) < 0, \quad r_s^+ = r_s > 0,$$

де r_s^- визначає х.ф. $\xi^-(\widetilde{\nu}(s))$

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s) + i\alpha}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s).$$

З о.ф.т., яка зводиться до вигляду

$$\varphi(s, \alpha) = \varphi_-(s, \alpha) \frac{1-s}{p_-(s)} \frac{\rho_-(s) + i\alpha}{b + i\alpha - sbe^{i\alpha}},$$

випливає, що х.ф. $\xi^+(\widetilde{\nu}(s))$ запишеться так

$$\varphi_+(s, \alpha) = p_+(s) \frac{\rho_-(s) + i\alpha}{b + i\alpha - sbe^{i\alpha}}.$$

Залежно від знаку m встановлюється, що

1) при $m>0$ $(b>1)$ $\rho_-(s)\underset{s\to 1}{\longrightarrow} bp_->0$, $r_s\underset{s\to 1}{\longrightarrow}0$

$$\varphi_-(\alpha)=Ee^{i\alpha\xi^-}=\lim_{s\to 1}\varphi_-(s,\alpha)=\frac{p_-(b+i\alpha)}{\rho_-+i\alpha},$$
$$\varphi_+(s,\alpha)\underset{s\to 1}{\longrightarrow}0,\quad \mathbf{P}\{\xi^+=+\infty\}=1;$$

2) при $m=0$ $(b=1)$ $\rho_-(s)\underset{s\to 1}{\longrightarrow}0$, $r_s\underset{s\to 1}{\longrightarrow}0$, $\mathbf{P}\{\xi^\pm=\pm\infty\}=1$;

3) при $m<0$ $(b<1)$ $\rho_-(s)\underset{s\to 1}{\longrightarrow}>0$, $\rho_-'(1)=\frac{1}{|m|}$, $r_s\to r_1>0$, $\mathbf{P}\{\xi^-=-\infty\}=1$

$$\varphi_+(\alpha)=\lim_{s\to 1}\varphi_+(s,\alpha)=\frac{p_+}{1-b\varphi_1(\alpha)},$$
$$\varphi_1(\alpha)=Ee^{i\alpha\chi_1}=\frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha},$$

χ_1 – рівномірно розподілена випадкова величина на $[0,1]$, $p_+=1-b$ $(b<1)$, $q_+=b$. Згідно з (5.86) одержана х.ф. $\varphi_+(\alpha)$ виражається формулою Полячека–Хінчина з генератрисою перестрибу $\gamma^+(0)$

$$\widetilde{g}(u)=\varphi_1(-iu)=E[e^{-u\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+>0]=\frac{1-e^{-u}}{u}.$$

Після обернення $\varphi_+(\alpha)$ по α знаходимо розподіл ξ^+

$$\mathbf{P}\{\xi^+<x\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{k\le\widetilde{\nu}(b)}\chi_k<x\right\}.$$

Розглянемо спільний розподіл перестрибкових функціоналів S_n:
$\tau^+(x)=\inf\{n>0:S_n{>}x\}$ — момент 1-го перестрибу через $x>0$;
$\gamma^+(x)=S_{\tau^+(x)}-x$ — 1-й перестрибок через $x>0$;
$\gamma_+(x)=x-S_{\tau^+(x)-1}-x$ — 1-й недострибок через $x>;0$
$\gamma_x^+=\gamma^+(x)+\gamma_+(x)$ — 1-й стрибок, що накриває рівень $x>0$.
Для цих функціоналів виконуються стохастичні співвідношення

$$\tau^+(x)\doteq\begin{cases}1, & \xi>x,\\ 1+\tau^+(x-\xi), & \xi\le x;\end{cases}$$
$$\gamma^+(x)\doteq\begin{cases}\xi-x, & \xi>x,\\ \gamma^+(x-\xi), & \xi\le x;\end{cases}$$

$$\gamma_+(x) \doteq \begin{cases} x, & \xi > x, \\ \gamma_+(x-\xi), & \xi \le x; \end{cases} \qquad \gamma_x^+ \doteq \begin{cases} \xi, & \xi > x, \\ \gamma_{x-\xi}^+, & \xi \le x, \end{cases}$$

на основі яких для спільної генератириси

$$V(s,x,u,v,\mu) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)} e^{-u\gamma^+(x)-v\gamma_+(x)-\mu\gamma_x^+}, \tau^+(x) < \infty\big]$$

виводиться інтегральне рівняння при $x > 0$

$$V(s,x,u,v,\mu) = s\mathbf{E}\big[e^{-u(\xi-x)-vx-\mu\xi}, \xi > x\big] + \\ + s\int_{-\infty}^{x} V(s,x-y,u,v,\mu)dF(y),$$

яке зводиться до вигляду

$$V(s,x,u,v,\mu) - s\int_{-\infty}^{x} V(s,x-y,u,v,\mu)dF(x) = sA(x,u,v,\mu),$$

$$A(x,u,v,\mu) = \int_x^{\infty} e^{(u-v)x-(u+\mu)z} dF(z), \quad x > 0. \tag{5.87}$$

Позначимо

$$\widetilde{V}(s,\alpha,u,v,\mu) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} V(s,x,u,v,\mu)dx,$$

$$\widetilde{a}(\alpha,u,v,\mu) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} A(x,u,v,\mu)dx.$$

Теорема 5.14. *Для випадкового блукання S_n з $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$ ($\mathbf{D}\xi_1 < \infty$, якщо $\mathbf{E}\xi_1 = 0$) $\widetilde{V}(s,\alpha,u,v,\mu)$ визначається через $\varphi_\pm(s,\alpha)$ проекційним співвідношенням*

$$(1-s)\widetilde{V}(s,\alpha,u,v,\mu) = s\varphi_+(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)\widetilde{a}(\alpha,u,v,\mu)\right]_+^0. \tag{5.88}$$

Після обернення (5.88) *одержується співвідношення*

$$(1-s)V(s,x,u,v,\mu) = s\int_{-0}^{x} G(s,x-y,u,v,\mu)dP_+(s,y), \tag{5.89}$$

де

$$G(s,x,u,v,\mu) = \int_{-\infty}^{x} A(x-y,u,v,\mu)dP_-(s,y), \quad x > 0.$$

Генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$

$$V_k(s,x,u_k) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)} e^{-u\gamma_k(x)}, \tau^+(x) < \infty\big]$$

визначаються подібно до (5.89)

$$(1-s)V_k(s,x,u_k) = s\int_{-0}^{x} G_k(s,x-y,u_k)dP_+(s,y), \tag{5.90}$$
$$G_k(s,x,u_k) = \int_{-\infty}^{x} A_k(x-y,u_k)dP_-(s,y), \quad x>0,$$
$$A_1(x,u) = A(x,u,0,0), \quad A_2(x,v) = A(x,0,v,0),$$
$$A_3(x,\mu) = A(x,0,0,\mu).$$

Доведення теореми 5.14 аналогічне доведенню теореми 2.5 та наслідку 2.2 і грунтується на рівнянні (5.87), яке після одностороннього перетворення Фур'є зводиться до вигляду

$$\widetilde{V}(s,\alpha,u,v,\mu)(1-s\varphi(\alpha)) = s\widetilde{a}(\alpha,u,v,\mu) - \big[\widetilde{V}(s,\alpha)\varphi(\alpha)\big]_-.$$

На основі о.ф.т. з останнього рівняння після деяких перетворень встановлюється основне співвідношення (5.88), з якого випливають (5.89) та (5.90).

При $u=v=\mu=0$ позначимо

$$K(s,x) = G(s,x,0,0,0) = \int_{-\infty}^{0} \bar{F}(x-y)dP_-(s,y), \quad x>0,$$
$$k_+(s,\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x}K(s,x)dx.$$

Аналогічно позначимо згортки $F(x)$ $(x<0)$ з розподілом $P_+(s,x)$:

$$K(s,x) = \int_0^{\infty} F(x-y)dP_+(s,y), \quad x<0,$$
$$k_-(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}K(s,x)dx.$$

Якщо врахувати, що $\widetilde{V}(s,\alpha,0,0,0) = [\varphi_+(s,\alpha)-1](i\alpha)^{-1}$, то з теореми 5.14 випливає наслідок

Наслідок 5.5. *Для випадкового блукання S_n розподіл $S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)}$ виражається через $k_{\pm}(s,\alpha)$*

$$\varphi_{\pm}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1-s}{1-s \mp i\alpha s k_{\pm}(s,\alpha)}. \tag{5.91}$$

Якщо S_n — майже напівнеперервне зверху блукання з умовною х.ф. стрибків

$$\mathbf{E}\left[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k > 0\right] = \frac{c}{c-i\alpha}, \quad c>0, \quad \mathbf{P}\{\xi_k>0\} = p > 0, \tag{5.92}$$

тоді

$$\varphi_{+}(s,\alpha) = \frac{(1-s)(c-i\alpha)}{(1-s)(c-i\alpha) - i\alpha s p \varphi_{-}(s,-ic)}, \tag{5.93}$$

$$p_{+}(s) = \frac{1-s}{1-s+sp\varphi_{-}(s,-ic)}, \quad p_{-}(s) = 1-s+ps\varphi_{-}(s,-ic).$$

Для майже напівнеперервного знизу блукання з умовною х.ф. ξ_k

$$\mathbf{E}\left[e^{i\alpha\xi_k}|\xi_k < 0\right] = \frac{b}{b+i\alpha}, \quad b>0, \quad \mathbf{P}\{\xi_k<0\} = q > 0, \tag{5.94}$$

$$\varphi_{-}(s,\alpha) = \frac{(1-s)(b+i\alpha)}{(1-s)(b+i\alpha) + i\alpha s q \varphi_{+}(s,ib)}, \tag{5.95}$$

$$p_{-}(s) = \frac{1-s}{1-s+sq\varphi_{+}(s,ib)}, \quad p_{+}(s) = 1-s+qs\varphi_{+}(s,ic).$$

В силу випуклості функції $L(s,r) = 1 - s\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}dF(x)$ в околі $s=1$ рівняння Лундберга

$$L(s,r) = 0 \quad (\mathcal{L}_s)$$

має корені $r_{1,2}(s)$ в околі нуля $r_1(s) < 0 < r_2(s)$. При умові (5.92) корінь $r_s = \rho_{+}(s) = cp_{+}(s) = \frac{c(1-s)}{1-s+sp\varphi_{-}(s,-ic)}$ повністю визначає розподіл $S^{+}_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$\mathbf{P}\{S^{+}_{\widetilde{\nu}(s)} > x\} = q_{+}(s)e^{-\rho_{+}(s)x}, \quad x>0. \tag{5.96}$$

Аналогічно при умові майже напівнеперервності знизу рівняння $(\mathcal{L}_s)$ має від'ємний корінь $r_s = -\rho_{-}(s) = -bp_{-}(s)$, що визначає розподіл $S^{-}_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$\mathbf{P}\{S^{-}_{\widetilde{\nu}(s)} < x\} = q_{-}(s)e^{\rho_{-}(s)x}, \quad x<0. \tag{5.97}$$

Доведення. З (5.88) при $u = v = \mu = 0$ після інтегрального перетворення випливає співвідношення

$$(1-s)(\varphi_+(s,\alpha)-1) = si\alpha\varphi_+(s,\alpha)k(s,\alpha),$$

еквівалентне (5.91). При умові майже напівнеперервності S_n зверху (5.92)

$$\begin{aligned}
&\bar{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_k > x\} = pe^{-cx}, \quad x>0,\\
&K(s,x) = p\int_{-\infty}^{0} e^{-c(x-y)}dP_-(s,y) = p\mathbf{E}e^{cS^-_{\tilde\nu(s)}}e^{-cx}, \quad x>0,\\
&k(s,\alpha) = \frac{p}{c-i\alpha}\varphi_-(s,-ic).
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Після підстановки (5.98) в (5.91) встановлюється (5.95), звідки при $i\alpha \to \infty$ знаходимо атомарну ймовірність $p_+(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\tilde\nu(s)} = 0\}$ $(p_+(s)p_-(s) = 1-s,\ 0<s<1)$. Аналогічно при умові (5.94) встановлюємо (5.97). Отже,

$$\begin{aligned}
\varphi_+(s,\alpha) &= \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha} = p_+(s)+q_+(s)\frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)-i\alpha},\\
&\rho_+(s) = cp_+(s) \quad \text{при умові } (5.92),\\
\varphi_-(s,\alpha) &= \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha},\\
&\rho_-(s) = cp_-(s) \quad \text{при умові } (5.94).
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Після обернення (5.99) одержуємо (5.96) та (5.97). □

Для майже напівнеперервних блукань блукань має місце

Лема 5.5. *Якщо S_n — майже напівнеперервне зверху блукання з умовною генератрисою кроку* (5.92), *тоді при $x>0$*

$$P'(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}P\big\{S_{\tilde\nu(s)} < x\big\} = -\frac{1}{x}(1-s)s\big(e^{-\rho_+(s)x}\big)'_s \tag{5.100}$$

і має місце формула зв'язку між розподілами $S_k > 0$ та $\tau^+(x)$ $(k \geq 2,\ x>0)$ $(\mathbf{P}\{\tau^+(x)=1\} = \mathbf{P}\{S_1 > x\} = \bar{F}(0)e^{-cx})$

$$-\frac{d}{dx}\mathbf{P}\{S_k > x\} = F'_k(x) = \tag{5.101}$$

$$= \frac{k}{x}\big[\mathbf{P}\big\{\tau^+(x) \le k|\tau^+(0) \le k\big\} - \mathbf{P}\big\{\tau^+(x) < k|\tau^+(0) < k\big\}\big],$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1}F_k'(x) = \frac{1}{x}\mathbf{P}\{\tau^+(x) \le n|\tau^+(0) \le n\}.$$

Якщо S_n *— майже напівнеперервне знизу блукання з умовною генератрисою кроку* (5.94), *тоді при* $x < 0$, $k \ge 2$

$$F_k'(x) = -\frac{k}{x}[\mathbf{P}\{\tau^-(x) \le k\,|\,\tau^-(0) \le k\} - \mathbf{P}\{\tau^-(x) < k\,|\,\tau^-(0) < k\}],$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1}F_k'(x) = \frac{1}{|x|}\mathbf{P}\{\tau^-(x) \le n\,|\,\tau^-(0) \le n\}. \tag{5.102}$$

Доведення. З рівняння Лундберга знаходимо додатний корінь $\rho_+(s) > 0$

$$1 - sf(\rho) = 0(\mathcal{L}_s); \quad f(\rho) = 1/s, \quad \rho_+(s) = f^{-1}(1/s), \tag{5.103}$$

що визначає додатну компоненту факторизації $\varphi_+(s,\alpha)$ (див. (5.99)).

Після диференціювання рівняння $(\mathcal{L}_s)$ одержимо рівняння

$$f(\rho) + sf'(\rho)\rho' = 0, \quad \rho'(s) = -\frac{f(\rho)}{sf'(\rho)}.$$

Після підстановки $\varphi_+(s,\alpha)$ і операції проектування $[\ \ ]_+$ з о.ф.т. випливає, що

$$[\varphi(s,\alpha)]_+ = \left[\varphi_-(s,\alpha)\frac{\rho_+(s)q_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha}\right]_+.$$

Звідси після обернення по α знаходимо

$$P'(s,x) = q_+(s)\rho_+(s)\varphi_-(s,-i\rho_+(s))e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0. \tag{5.104}$$

В силу $(\mathcal{L}_s)$ о.ф.т. набуває вигляду при $i\alpha = r$

$$\frac{1-s}{sf(\rho_+(s)) - sf(r)} = \frac{p_+(s)(c-r)}{\rho_+(s) - r}\varphi_-(s,-ir).$$

При $r \to \rho_+(s)$ одержимо співвідношення

$$\frac{1-s}{sf'(\rho_+)} = p_+(s)(c - \rho_+(s))\varphi_-(s,-i\rho_+) =$$

$$= q_+(s)\rho_+(s)\varphi_-(s, -i\rho_+(s)),$$

з якого з урахуванням (5.104) випливає співвідношення, еквівалентне (5.100)

$$P'(s,x) = -\frac{s}{x}(1-s)(e^{-\rho_+(s)x})'_s, \quad x>0.$$

Якщо покласти $\mathbf{P}\{\tau^+(x) < 1 \,|\, \tau^+(0) < 1\} = 0$, тоді з (5.96) випливає, що

$$e^{-\rho_+(s)x} = P\big\{S^+_{\tilde\nu(s)} > x \,|\, S^+_{\tilde\nu(s)} > 0\big\} =$$
$$= (1-s)\sum_{k=1}^{\infty} s^k P\big\{\tau^+(x) \le k \,|\, \tau^+(0) \le k\big\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} s^k \big[P\big\{\tau^+(x) \le k \,|\, \tau^+(0) \le k\big\} - P\big\{\tau^+(x) < k \,|\, \tau^+(0) < k\big\}\big],$$
$$\big(e^{-\rho_+(s)x}\big)'_s = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}[P\big\{\tau^+(x) \le k \,|\, \tau^+(0) \le k\big\} -$$
$$- P\big\{\tau^+(x) < k \,|\, \tau^+(0) < k\big\}].$$

Існування щільності $P'(s,x)$ при $x>0$ обгрунтовується тим, що існує щільність $\bar F(x) = \bar F(0)e^{-cx}$ при $x>0$. Згідно (5.100)

$$P'(s,x) = -(1-s)\sum_{k=1}^{\infty} s^k \frac{d}{dx}P\{S_k > x\} = \frac{1}{x}(1-s)s\big(e^{-\rho_+(s)x}\big)'_s,$$
$$P'(s,x) = -\frac{1-s}{x}\sum_{k=1}^{\infty} ks^k[P\big\{\tau^+(x) \le k \,|\, \tau^+(0) \le k\big\} -$$
$$- P\big\{\tau^+(x) < k \,|\, \tau^+(0) < k\big\}].$$

Порівнюючи розклади в ряд з останніх співвідношень одержимо (5.101). Аналогічно встановлюється (5.102) для майже напівнеперервних знизу блукань. Зв'язок між розподілами майже напівнеперервного зверху S_n та $\tau^+(x)$ в [7], виражається співвідношенням

$$\mathbf{P}\{\tau^+(x) = n\} = \frac{x}{n}F'_n(x) + \frac{1}{c}\left(\frac{x}{n}F'_n(x)\right)'_x \quad (n>0). \qquad \square$$

Зауважимо, що умову майже напівнеперервності знизу (5.94) блукання S_n можна замінити умовою

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\alpha) = \frac{b}{b+i\alpha}\varphi_1(\alpha), \quad \varphi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} dF_1(x) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi'},\\
&m = \mathbf{E}\xi_1 = \mu_1 - \frac{1}{b} \quad \left(\xi_1 = \xi_1' + \xi_1'',\ \xi_1' > 0;\ \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1''} = \frac{b}{b+i\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Тоді х.ф. $S^-_{\widetilde{\nu}(s)}$ та $S_{\widetilde{\nu}(s)}$ мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&\varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha},\\
&\varphi(s,\alpha) = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)} = \frac{(1-s)(b+i\alpha)}{b+i\alpha - sb\varphi_1(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{5.105}
$$

Після заміни $i\alpha = r$ рівняння Лундберга записується так

$$
b + r - sb\varphi(-ir) = 0 \quad (\mathcal{L}_s).
$$

Від'ємний корінь цього рівняння повністю визначає х.ф. $\varphi_-(s,\alpha)$ в (5.105). Щоб знайти розподіл $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$ скористаємося позначенням

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\phi}_+(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{P}_+(s,x)dx,\\
&\widetilde{P}_>(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > x\}dx,\\
&\widetilde{P}_<(s,\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} < x\}dx,
\end{aligned}
$$

та очевидними співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&\varphi(s,\alpha) = 1 + i\alpha\big(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)\big),\\
&\varphi_+(s,\alpha) = 1 + i\alpha\widetilde{\phi}_+(s,\alpha).
\end{aligned}
$$

Теорема 5.15. *Якщо S_n — майже напівнеперервне знизу блукання (див. (5.94)), тоді $\varphi_-(s,\alpha)$ визначається першою формулою в (5.105), а для $\widetilde{\phi}_+(s,\alpha)$ та $\mathbf{E}e^{-uS^+_{\widetilde{\nu}(s)}}$ справедливі співвідношення*

$$
\widetilde{\phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{p_-(s)}\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\left[\frac{b}{b+i\alpha}\widetilde{P}_>(s,\alpha)\right]_+^0,
$$

$$\mathbf{E}e^{-uS^+_{\tilde{\nu}(s)}} = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)\widetilde{g}_s(u)}, \quad \widetilde{g}_s(u) = \frac{G_1(s,0,u)}{G_1(s,0,0)}, \tag{5.106}$$

($G_1(s,0,0) = q_-(s)\overline{F}(\rho_-(s)$, $G_1(s,0,u)$ *див. в* (5.90)) *після обернення першого з них по* α *знаходимо*

$$\begin{aligned}\bar{P}_+(s,x) &= \frac{1}{p_-(s)}\bar{P}(s,x) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\int_x^\infty be^{b(x-y)}\bar{P}(s,y)dy = \\ &= \int_x^\infty be^{b(x-y)}\bar{P}(s,y)dy + \\ &\quad + \frac{1}{p_-(s)}\left[\bar{P}(s,x) - \int_x^\infty be^{b(x-y)}\bar{P}(s,y)dy\right].\end{aligned} \tag{5.107}$$

Оскільки $p_+(s)p_-(s) = 1-s$, *з* (5.107) *після обернення по* s *випливає, що*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_n^+ > x\} = b\int_x^\infty e^{b(x-y)}\mathbf{P}\{S_n > y\}dy + \sum_{k=0}^n \mathbf{P}\{S^+_{n-k} = 0\} \times \\ \times\left[\mathbf{P}\{S_k > x\} - b\int_x^\infty e^{b(x-y)}\mathbf{P}\{S_k > y\}dy\right].\end{aligned} \tag{5.108}$$

При $m < 0$*:* $\rho_-(s) = bp_-(s) \to 0$, $s \to 1$, $\left(p'_-(1)\right)^{-1}$ *х.ф.* S^+ *визначається формулою Полячека–Хінчина з* $p_+ = b|m|$,

$$\mathbf{E}e^{i\alpha S^+} = \frac{p_+}{1-q_+\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \quad \widetilde{\varphi}(\alpha) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar{F}_1(x)dx. \tag{5.109}$$

Доведення. На підставі згаданих перед теоремою очевидних співвідношень о.ф.т. для $\varphi(s,\alpha)$ в (5.105) можна переписати так

$$1 + i\alpha(\widetilde{P}_> - \widetilde{P}_<) = i\alpha\widetilde{\phi}_+\frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha} + 1 - \frac{i\alpha q_-(s)}{p_-(s)+i\alpha}.$$

Після спрощення звідси випливає, що

$$\widetilde{\phi}_+(s,\alpha)\frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha} = \widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) + \frac{q_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha},$$

тобто

$$\widetilde{\phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{p_-(s)}\frac{\rho_-(s)+i\alpha}{b+i\alpha}(\widetilde{P}_> - \widetilde{P}_<) + \frac{q_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}. \tag{5.110}$$

Після застосування операції проектування $[\ ]_+$ до (5.110) встановлюється співвідношення (5.106), з якого випливають розподіли S_n^+ та S^+ (див. (5.107)–(5.109)). Формулу Полячека–Хінчина можна одержати граничним переходом у (5.106) ($s \to 1$), якщо врахувати, що

$$
\begin{aligned}
K(s,x) &= p_-(s)\bar F(x) + \int_{-\infty}^{-0} \bar F(x-y) q_-(s) p_-(s) e^{-\rho_-(s)y}dy,\\
k(s,\alpha) &= p_-(s)\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar F(x)dx + \qquad\qquad (5.111)\\
&\qquad + q_-(s)\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\int_0^\infty F(y)\left(e^{-\rho_-(s)y} - e^{i\alpha x}\right)dy.
\end{aligned}
$$

Крім того, при $s \to 1$ з (5.105) на основі о.ф.т. встановлюється, що при $m < 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\varphi_+(s,\alpha) = \lim_{s\to 1}\frac{1-s}{p_-(s)}\ \frac{\rho_-(s)+i\alpha}{i\alpha + b(1-s) + bsi\alpha\widetilde F_1(\alpha)} =\\
&= \frac{b|m|}{1 + b\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar F_1(x)dx} = \frac{b|m|}{1+b\mu_1\widetilde\varphi(\alpha)},\quad \widetilde\varphi(\alpha) = \mu_1^{-1}\widetilde F_1(\alpha),\\
&b\mu_1 = bm + 1 = 1 - b|m| = q_+,\quad p_+ = b|m|.
\end{aligned}
$$

Отже, (5.109) доведено. □

Зауважимо, що одержана із (5.93) формула для генератриси S^+ при $s \to 1$ подібна до (5.109). Тому при умові майже напівнеперервності знизу маємо співвідношення

$$
\widetilde g(i\alpha) = \mathbf{E}\big[e^{i\alpha\gamma^+(0)}\,|\,S^+ > 0\big] = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty e^{i\alpha x}\bar F_1(x)dx = \widetilde\varphi(\alpha). \quad (5.112)
$$

При встановленні співвідношень для інтегральних перетворень розподілів пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ у випадку майже напівнеперервності знизу

$$
V_k(s,x,u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)}, \gamma_k(x) > z, \tau^+(x) < \infty\big]dz
$$

інколи зручніше користуватися згортками $P_-(s,x)$ з центрованими функціями $\bar A_k(x,u_k) = A_k(x,u_k) - A_k(x,0)$:

$$
\bar A_1(x,u) = -u\int_x^\infty e^{u(x-z)}\bar F(z)dz,\quad \bar A_2(x,v) = \big(e^{-vx} - 1\big)\bar F(x),
$$

$$\bar{A}_3(x,\mu) = \bar{A}_2(x,u) - \mu \int_x^\infty e^{-\mu z}\Pi(z)dz$$

і згортками

$$\begin{aligned}
\bar{g}_k(s,x,u_k) &= -\frac{1}{u_k}\int_{-\infty}^0 \bar{A}_k(x-y,u_k)dP_-(s,y),\\
\bar{g}_1(s,x,u) &= p_-(s)\int_x^\infty \bar{F}(y)e^{u(x-y)}dy +\\
&\quad + \frac{q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u}\int_0^\infty \big(e^{-uy}-e^{-\rho_- y}\big)\bar{F}(x+y)dy,\\
\bar{g}_2(s,x,v) &= \frac{1}{v}\Bigg[p_-(s)\bar{F}(x)\big(1-e^{-vx}\big) +\\
&\quad + q_-(s)\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(x-y)}\big(1-e^{-vy}\big)\bar{F}(y)dy\Bigg],\\
\bar{g}_3(s,x,\mu) &= g_2(s,x,\mu) + p_-(s)\int_x^\infty e^{-\mu z}\bar{F}(z)dz +\\
&\quad + q_-(s)\int_x^\infty \bar{F}(z)e^{-\mu z}\big(1-e^{\rho_-(x-z)}\big)dz. \qquad (5.113)
\end{aligned}$$

При $x=0$ спрощені значення $\bar{g}_k(s,0,u_k)$ виражаються через $\widetilde{F}(u_k) = \int_0^\infty e^{-u_k z}\bar{F}(z)dz$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_1(s,0,u) &= p_-(s)\widetilde{F}(u) + q_-(s)\rho_-(s)\frac{\widetilde{F}(u)-\widetilde{F}(\rho_-)}{\rho_- - u},\\
\bar{g}_2(s,0,v) &= \frac{1}{v}q_-(s)\rho_-(s)\big[\widetilde{F}(\rho_-)-\widetilde{F}(v+\rho_-)\big],\\
\bar{g}_3(s,0,\mu) &= p_-(s)\widetilde{F}(u) + \qquad (5.114)\\
&+ q_-(s)\left[\frac{\rho_-(s)}{\mu}\big(\widetilde{F}(\rho_-)-\widetilde{F}(\rho_-+\mu)\big) + \widetilde{F}(\mu)-\widetilde{F}(\rho_-+\mu)\right].
\end{aligned}$$

Тому для майже напівнеперервних знизу блукань має місце твердження, аналогічне теоремі 5.9.

Теорема 5.16. *Якщо S_n — майже напівнеперервне знизу блукання (див. (5.94)), тоді для $V_k(s,x,u_k)$ та генератриси пар $\{\tau^+(0)), \gamma_k(0)\}$*

$(k = \overline{1,3})$ *справедливі співвідношення*

$$
\begin{aligned}
&(1-s)\overline{V}_k(s,x,u_k) = \int_{-0}^{x} \bar{g}_k(s,x-y,u_k)dP_+(s,y),\\
&\overline{V}_k(1,x,u_k) = \int_0^\infty e^{-zu_k}\mathbf{P}\{\gamma_k(x) > z, S^+ > x\}dz =\\
&= \int_{-0}^{x} \frac{\partial}{\partial s}\bar{g}_k(1,x-y,u_k)d\mathbf{P}\{S^+ < y\}, \quad m<0. \qquad (5.115)
\end{aligned}
$$

Після обернення по u_k *з* (5.115) *при* $x=0$ *випливає, що* $(p_+(s)p_-(s) = 1-s)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} > 0, \gamma^+(0) > z\} = \bar{F}(z) + q_-(s)b\int_z^\infty e^{(z-y)\rho_-(s)}\bar{F}(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} > 0, \gamma_+(0) > z\} = q_-(s)b\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}\bar{F}(y)dy, \qquad (5.116)\\
&\mathbf{P}\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} > 0, \gamma_0^+ > z\} = \bar{F}(z) + \frac{q_-(s)b}{\rho_-(s)}\int_z^\infty \big(1-e^{-y\rho_-(s)}\big)\bar{F}(y)dy,\\
&\bar{F}(z) = p\bar{F}_1(z), \quad z>0, \quad m = p\mu - qb^{-1}, \quad \mu = \int_0^\infty \bar{F}_1(z)dz.
\end{aligned}
$$

Якщо $m<0$, *тоді з* (5.116) *при* $s \to 1$ *випливає, що*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = \bar{F}(z) + b\int_z^\infty \bar{F}(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma_0^+ > z\} = \bar{F}(z) + b\int_z^\infty y dF(y),\\
&\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma_+(0) > z\} = b\int_z^\infty \bar{F}(y)dy. \qquad (5.117)
\end{aligned}
$$

При $z \to 0$ *з* (5.117) *випливає, що*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = q_+ = p(1+b\mu) > 0, \quad p_+ > 0,\\
&\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma_+(0) > 0\} = pb\mu, \quad \mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma_+(0) \geq 0\} = q_+.
\end{aligned}
$$

Отже розподіл $\gamma_+(0)$ *має атом в нулі.*

$$
\mathbf{P}\{S^+ > 0, \gamma_+(0) = 0\} = p > 0.
$$

Порівняльний аналіз одержаних в теоремах 5.10–5.16 результатів приводить до таких висновків. В загальному випадку х.ф. або генератриса розподілу $S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)}$ виражаються досить непростими формулами Спітцера (5.76). Крім того, розподіл $S^{+}_{\widetilde{\nu}(s)}$ може бути виражений так:

1) через спільну генератрису $\{\tau^+(0)),\gamma^+(0)\}$ дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина (див. (5.85));

2) через інтегральне перетворення згортки $K(s,x)$ (див. (5.91)–(5.93));

3) для майже напівнеперервних знизу блукань S_n — через інтегральне перетворення розподілу додатних значень $S_{\widetilde{\nu}(s)} > 0$ (див. (5.106)–(5.108)).

При $m < 0$ з результатів, одержаних 1-м та 2-м способами, випливає х.ф. для S^+, що виражається узагальненням формули Полячека–Хінчина (5.109). Для майже напівнеперервних знизу блукань з усіх трьох указаних результатів випливає класична формула Полячека–Хінчина для розподілу S^+ у термінах

$$\widetilde{\varphi}(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_1} = \mu_1^{-1}\int_0^{\infty} e^{i\alpha x}\bar{F}_1(x)dx,$$

згідно з якою

$$S^+ \doteq \sum_{k\le\widetilde{\nu}(q_+)} \widetilde{\xi}_k, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_k} = \widetilde{\varphi}(\alpha),$$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(q_+) = k\} = p_+q_+^k, \quad k\ge 0.$$

Аналогічні висновки мають місце для розподілу $S^{-}_{\widetilde{\nu}(s)}$ та S^- у випадку майже напівнеперервних зверху блукань (див. (5.92)). Зокрема, при $m > 0$ має місце аналогічна до (5.109) формула Полячека–Хінчина

$$\mathbf{E}e^{i\alpha S^-} = \frac{p_-}{1-q_-\widetilde{\varphi}(\alpha)}, \quad \widetilde{\varphi}(\alpha) = |\mu_1|^{-1}\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}F_1(x)dx,$$

з якої випливає, що

$$S^- \doteq \sum_{k\le\widetilde{\nu}(q_-)} \widetilde{\xi}_k, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\xi}_k} = \widetilde{\varphi}(\alpha), \quad q_- = \mathbf{P}\{S^- < 0\} > 0.$$

Перш, ніж розглянути наступний приклад, зауважимо, що для процесу ризику

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t),$$

де $S_{1,2}(t)$ — біноміальні процеси ризику з х.ф. стрибків

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{(1-i\alpha)^2}, \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{b}{(b+i\alpha)}, \quad b > 0,$$

х.ф. $S(1)$ можна записати у вигляді

$$Ee^{i\alpha S(1)} =: \left(p_1 + \frac{q_1}{(1-i\alpha)^2}\right)\left(p_2 + \frac{q_2 b}{b+i\alpha}\right) = p + q\varphi(\alpha),$$

де $p = p_1 p_2$, $q = 1 - p$,

$$\varphi(\alpha) = \frac{P_2(i\alpha)}{(b+i\alpha)(1-i\alpha)^2},$$
$$P_2(r) = (r-1)^2 r p_1 p_2 + p_1 b (r-1)^2 + p_2 q r + bq.$$

Крім того, з точністю до сталих, що визначаються методом невизначених коефіцієнтів, має місце розклад

$$\varphi(\alpha) = \alpha' \varphi_I(\alpha) + \beta' \varphi_2(\alpha), \quad \varphi_I(\alpha) = \frac{1 + ci\alpha}{(1-i\alpha)^2}, \quad \alpha' + \beta' = 1.$$

Приклад 5.4. Нехай $\xi(t) = S_{N(t)} = \sum_{k \le N(t)} \xi_k$ — біноміальний процес з х.ф. для ξ_k

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+i\alpha} + \frac{1}{(1-i\alpha)^2}\right),$$

де $N(t)$ — біноміально розподілена в.в. з параметром p $(0 < p < 1)$:

$$\mathrm{P}\{N(t) = k\} = C_t^k q^k p^{t-k}, \quad 0 \le k \le t, \quad q + p = 1.$$

Х.ф. для $\xi(t)$ має вигляд: $\mathrm{E}e^{i\alpha\xi(t)} = (p + q\varphi(\alpha))^t$. Знайти розподіли основних ризикових характеристик.

Позначимо

$$\varphi_*(\alpha) = p + q\varphi(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi_k^*}, \quad S_t = \sum_{k=0}^{t} \xi_k^*, \quad S_0 = 0,$$

тоді $\xi(t) \doteq S_t,\ t \ge 0$ є майже напівнеперервним знизу випадковим блуканням. Знайдемо х.ф. для $S_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$\varphi(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha S_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)} = \frac{2(1-s)(b+i\alpha)(1-i\alpha)^2}{P_3(s,i\alpha)},$$

яку можна переписати так

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha}\ \frac{1-s}{\rho_-(s)}\frac{2(1-i\alpha)^2}{P_2(s,i\alpha)}. \qquad (5.118)$$

Нехай $b = 1/14$, тоді $m = -6q < 0$; $\delta = 1-s \to 0$ при $s \to 1$,

$$P_3(s,r) = r^3(28\delta + 28qs) - r^2(54\delta - 55qs) + r(24\delta + 12qs) + 2\delta,$$
$$P_3(s,r) \to 28qr^3 - 55qr^2 + 12r = rP_2(1,r), \quad s \to 1,$$

де

$$P_2(1,r) = q(28r^2 - 55r + 12),$$
$$P_2(s,r) = 28(\delta + qs)r^2 +$$
$$+ [\delta(54 - 28\rho_-(s)) - qs(55 + 28\rho_-(s))]r + 2\delta\rho_-(s)^{-1}.$$

Рівняння $(\mathcal{L}_1)$ після скорочення зводиться до квадратного

$$28r^2 - 55r + 12 = 0$$

з дійсними коренями $r_1 = 1/4$, $r_2 = 12/7$.

В силу майже напівнеперервності знизу від'ємний корінь рівняння $P_3(s,r) = (r+\rho_-(s))P_2(s,r) = 0$, $r_3 = -\rho_-(s)$ визначає х.ф.

$$\varphi_-(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S^-_{\tilde\nu(s)}} = \frac{p_-(s)(i\alpha + 1/14)}{i\alpha + \rho_-(s)}, \quad \rho_-(s) = \frac{1}{14}p_-(s).$$

Згідно з (5.118) х.ф. для $S^+_{\tilde\nu(s)}$ визначається співвідношенням

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{1-s}{p_-(s)}\frac{2(1-i\alpha)^2}{P_2(s,i\alpha)},$$
$$P_2(s,r) \underset{s\to1}{\longrightarrow} P_2(1,r) = 28qr^2 - 55qr + 12q.$$

Оскільки $m = -6q < 0$, то існує невироджений розподіл ξ^+ з х.ф.

$$\varphi_+(\alpha) = \lim_{s\to1}\varphi_+(s,\alpha) = |m|\frac{2(1-i\alpha)^2}{P_2(1,i\alpha)} =$$
$$= \frac{2|m|(1-i\alpha)^2}{28q(1/4 - i\alpha)(12/7 - i\alpha)},$$

$$p_+ = \lim_{\alpha\to\infty} \varphi_+(\alpha) = \frac{2|m|}{28q} > 0 = \frac{3}{7} > 0.$$

Після розкладу $\varphi_+(\alpha)$ на дробово-лінійні функції знаходимо:

$$\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^+} = \frac{3}{7} + \frac{27}{164}\frac{1}{r_1 - i\alpha} - \frac{300}{2009}\frac{1}{r_2 - i\alpha},$$

і після обернення одержимо (як і в (5.29) при $x \to \infty$)

$$P\{S^+ > x\} = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{25}{287}e^{-\frac{12}{7}x} = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}x} + o(e^{-\frac{1}{4}x}). \quad (5.119)$$

Зауважимо, що найближчі до нуля корені $-\rho_-(s) < 0 < r_1(s)$ при умові $m < 0$ мають границі

$$\lim_{s\to 1} \rho_-(s) = \rho_- = 0,$$
$$\lim_{s\to 1} r_1(s) = r_1 = R = 1/4 \quad (\rho'_-(1) = |m|^{-1}). \quad (5.120)$$

Саме корінь $R = 1/4$ і називають експоненціальним показником Лундберга, оскільки у формулі (5.119) експонента e^{-Rx}, $x \to \infty$ визначає головну частину ймовірності банкрутства.

5.4 Про вихід з інтервалу майже напівнеперервних випадкових блукань

Розглянемо випадкове блукання $S_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k$, $S_0 = 0$. Будемо позначати, як і раніше

$$S_n^\pm = \max\min_{0\le k\le n} S_k, \quad \tau^\pm(x) = \inf\{n > 0 : \pm S_n > x\}, \quad \pm x > 0;$$
$$\gamma^\pm(x) = S_{\tau^\pm(x)} - x, \quad x \ge 0.$$

Як і для процесів з н.п., функціонали, пов'язані з виходом випадкових блукань з інтервалу $[x - T, x]$ позначимо

$$\tau(x,T) = \inf\{n > 0 : S_n \notin (x - T, x)\},$$
$$A_+(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} > x\}, \quad A_-(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} < x - T\},$$

$$\tau(x,T) \doteq \begin{cases} \tau^+(x,T), & A_+(x), \\ \tau^-(x,T), & A_-(x). \end{cases}$$

Зберігаються також і позначення для генератрис цих функціоналів

$$Q^T(s,x) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x,T)}, A_+(x)\big] Q_T(s,x) = \mathbf{E}\big[s^{\tau_-(x,T)}, A_-(x)\big],$$
$$Q(T,s,x) = \mathbf{E}e^{-s\tau(x,T)} = Q^T(s,x) + Q_T(s,x).$$

При цьому згідно з (5.71)

$$\varphi(s,\alpha) := \mathbf{E}e^{i\alpha S_{\tilde\nu(s)}} = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_k},$$

за компонентами о.ф.т. також зберігаються позначення

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha)_-, \quad \mathrm{Im}\ \alpha = 0, \tag{5.121}$$
$$\varphi_\pm(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha S^\pm_{\tilde\nu(s)}} = (1-s)\sum_{k=0}^\infty s^k \mathbf{E}e^{i\alpha S_k^\pm}.$$

На основі стохастичних співвідношень для $\tau^\pm(x,T)$ та $\gamma_T^-(x) = x - S_{\tau^-(x,T)}$, $\gamma_T^+(x) = S_{\tau^+(x,T)} - x$ виводяться інтегральні рівняння на відрізку для вказаних генератрис. Зокрема, для майже напівнеперервного зверху блукання мають місце стохастичні співвідношення

$$\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} 1, \xi > x, & \mathbf{P}\{\xi > x\} = pe^{-cx}, \\ 1 + \tau^+(x-\xi), & x - T < \xi < x, \end{cases}$$
$$\gamma_T^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ \gamma_T^+(x-T), & x - T < \xi < x, \end{cases}$$

з яких випливають інтегральні рівняння на відрізку для $Q^T(s,x)$ та

$$V^+(s,\alpha,x,T) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x,T)} e^{i\alpha\gamma_T^+(x)}, A_+(x)\big].$$

А саме, враховуючи, що $\overline{F}(x) = pe^{-cx}$, $x > 0$, $p = \overline{F}(0)$,

$$Q^T(s,x) = s\bar F(x) + s\int_{x-T}^x Q^T(s,x-z)dF(z), \quad 0 < x < T,$$
$$V^+(s,\alpha,x,T) = s\frac{cp}{c-i\alpha}e^{-cx} + \tag{5.122}$$

$$+ s\int_{x-T}^{x} V^{+}(s,\alpha,x-z,T)dF(x), \quad 0<x<T.$$

Для зручності розв'язання першого рівняння позначимо

$$\bar{Q}^T(s,x) = 1 - Q^T(s,x) = \begin{cases} 1, & x>T, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

тоді рівняння для $\bar{Q}^T(s,x)$ записується у термінах згортки для $\bar{Q}^T(s,x)$:

$$\bar{Q}^T(s,x) = 1 - s + s\int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}^T(s,z)F'(x-z)dz.$$

Це рівняння можна продовжити на піввісь $x>0$ з відповідною компенсуючою функцією $C_T^{>}(s,x)$ $(x>T)$:

$$\bar{Q}^T(s,x) = (1-s)C(x) + \tag{5.123}$$
$$+ s\int_{-\infty}^{\infty} Q^T(s,z)F'(x-z)dz + C_T^{>}(s,x), \quad x>0;$$
$$C(x) = I_{x>0}, \quad C_T^{>}(s,x) = \bar{C}_T(s)e^{-cx}I_{x>T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\bar{C}_T(s) = sp\big[e^{cT} - c\bar{Q}_s^*(T)\big], \quad \bar{Q}_s^*(T) = \int_0^T e^{cz}\bar{Q}^T(s,z)dz.$$

Продовження на піввісь рівняння (5.123) змінимо за рахунок підстановки в нього функції $C_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}I_{x>0}$ замість $C(x)$, де $\varepsilon>0$ — як завгодно мале. Тоді ми одержимо рівняння, подібне до (5.123) для деякої функції $Y_\varepsilon(s,x,T)$ $(x>0)$:

$$Y_\varepsilon(s,x,T) = (1-s)C_\varepsilon(x) + \tag{5.124}$$
$$+ s\int_{-\infty}^{\infty} Y_\varepsilon(s,x,T)F'(x-z)dz + C_T^{>}(s,x), \quad x>0.$$

Після одностороннього перетворення Фур'є для

$$y_\varepsilon(s,\alpha,T) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}Y_\varepsilon(s,x,T)dx$$

одержимо рівняння

$$y_\varepsilon(s,\alpha,T) - sy_\varepsilon(s,\alpha,T)\varphi(\alpha) =$$

$$= (1-s)\widetilde{C}_\varepsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T^{>}(s,\alpha) - [\varphi(\alpha)y_\varepsilon(\alpha)]_-$$

або

$$(1-s)y_\varepsilon(s,\alpha,T)\varphi(s,\alpha)^{-1} =$$
$$= (1-s)\widetilde{C}_\varepsilon(\alpha) + \widetilde{C}_T^{>}(s,\alpha) - [\varphi(\alpha)y_\varepsilon(\alpha)]_-.$$

Як і в теоремі 4.15 з останнього рівняння після застосування о.ф.т. та операції $[\ \ ]_+$ знаходимо, що

$$(1-s)y_\varepsilon(s,\alpha,T) =$$
$$= \varphi_+(s,\alpha)\Big[\varphi_-(s,\alpha)\Big(\widetilde{C}_\varepsilon(\alpha)(1-s) + \widetilde{C}_T^{>}(s,\alpha)\Big)\Big]_+. \qquad (5.125)$$

Тоді з (5.125) після обернення по α одержимо розв'язок рівняння (5.124)

$$(1-s)Y_\varepsilon(s,x,T) = \int_0^x B_\varepsilon(s,x-y)dP_+(s,y) +$$
$$+ \int_0^x B(s,x-y,T)dP_+(s,y), \quad x>0, \qquad (5.126)$$
$$B_\varepsilon(s,x) = (1-s)\int_0^x e^{-\varepsilon(x-y)}dP_-(s,y) = (1-s)e^{-\varepsilon x}\mathbf{E}e^{\varepsilon\xi^-(\theta_s)},$$
$$B(s,x,T) = \bar{C}_T(s)\int_{-\infty}^{x-T} e^{-c(x-y)}dP_-(s,y), \quad x>0,$$
$$P_\pm(s,y) = \mathbf{P}\{S^\pm_{\tilde{\nu}(s)} < y\}, \quad \pm y>0, \quad B(s,x,T) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

При $\varepsilon\to 0$ $B_\varepsilon(s,x)\to 1-s$, тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_\varepsilon(s,x,T) = Y_0(s,x,T) = \bar{Q}^T(s,x) \quad (0<x<T),$$
$$(1-s)Q^T(s,x) = (1-s)P_+(s,x) +$$
$$+ \int_0^x B(s,x-y,T)dP_+(s,y). \qquad (5.127)$$

На підставі (5.127), як і в § 4.5 (див. (4.143))) встановлюється (доведена в [56])

Теорема 5.17. *Для майже напівнеперервних зверху блукань генератриса $Q^T(s,x)$ визначається співвідношенням при $0<x<T$*

$$Q^T(s,x) = q_+(s)\int_{x-T}^{0} e^{\rho_+(s)(T-x+y)}dP_-(s,y)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)}dP_-(s,y) + \int_{-T}^{0} e^{\rho_+(s)(T+y)}dP_-(s,y)\right]^{-1}. \quad (5.128)$$

Для $V^+(s,\alpha,x,T)$ має місце співвідношення

$$V^+(s,\alpha,x,T) = \frac{c}{c-i\alpha}Q^T(s,x), \quad 0<x<T. \quad (5.129)$$

Для майже напівнеперервних знизу блукань (з параметром $b>0$)

$$Q_T(s,x) = q_-(s)\int_{0}^{x} e^{\rho_-(s)(x-y)}dP_+(s,y)\times \quad (5.130)$$
$$\times\left[\int_{T}^{\infty} e^{b(T-y)}dP_+(s,y) + \int_{0}^{T} e^{\rho_-(s)(T-y)}dP_+(s,y)\right]^{-1}.$$

Доведення. Враховуючи показникову властивість $P'_+(s,x)$ при $x>0$ із (5.127) випливає, що при $x>0$

$$(1-s)Y_0(s,x,T) = (1-s)P_+(s,x) + p_+(s)B(s,x,T) +$$
$$+\int_{+0}^{x} B(s,x-y,T)P'_+(s,y)dy.$$

Як і при доведенні теореми 4.15 для майже напівнеперервних зверху процесів, остання згортка зводиться до подвійного інтегралу, після обчислення якого доводиться співвідношення для $Y_0(s,x,T)$

$$Y_0(s,x,T) = \mathbf{P}\{S^+_{\tilde\nu(s)}<x\} + \frac{p_+(s)}{1-s}\bar C_T(s)e^{-\rho_+(s)x}\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy}dP_-(s,y) + \int_{-T}^{x-T} e^{-cq_+(s)T+\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right],$$

з якого випливає, що

$$\bar Q^T(s,x) = \mathbf{P}\{S^+_{\tilde\nu(s)}>x\} - \frac{p_+(s)}{1-s}\bar C_T(s)e^{-\rho_+(s)x}\times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy} dP_-(s,y) + \int_{-T}^{x-T} e^{-cq_+(s)T+\rho_+(s)y} dP_-(s,y) \right].$$

При інтегруванні останнього співвідношення для $\overline{Q}^T(s,x)$ по e^{cx}, $(0 < x < T)$ одержується рівняння для визначення коефіцієнтів $\bar{C}_T$ та $\bar{Q}_s(T)$, після підстановки яких у згадане співвідношення встановлюється (5.128). Безпосередньою перевіркою після підстановки (5.129) в рівняння (5.122) для $V^+(s,\alpha,x,T)$ встановлюється його справедливість. Зауважимо, що при $T \to \infty$ $B(s,x,T) \to 0$, тому $\bar{Q}^T(s,x) \to \bar{P}_+(s,x)$, $Q^T(s,x) \to P_+(s,x)$. □

Як і для процесів, так і для випадкових блукань встановлюється аналог теореми 4.3 про факторизаційні тотожності для х.ф.

$$V(s,\alpha,x) = \mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_{\widetilde{\nu}(s)}}, \tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\big],$$
$$V_\pm(s,\alpha,x) = \mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_{\widetilde{\nu}(s)}} s^{\tau^\pm(x,T)}, A_\pm(x)\big].$$

Теорема 5.18. *Для випадкового блукання* $S_n = \sum\limits_{k\le n} \xi_k$, $(S_0 = \xi_0 = 0)$ *х.ф.* $V(s,\alpha,x)$ *до виходу із інтервалу виражається через* $V_\pm(s,\alpha,x)$

$$V(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)[1 - V_+(s,\alpha,x) - V_-(s,\alpha,x)]. \tag{5.131}$$

Крім того, справедливі проекційні тотожності (див. [103])

$$\begin{aligned} V_+(s,\alpha,x) &= \varphi_+^{-1}(s,\alpha)[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x))]_{[x,\infty)}, \\ &\quad \operatorname{Im}\alpha \ge 0, \\ V(s,\alpha,x) &= \varphi_-(s,\alpha)[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x))]_{[-\infty,x]}, \\ &\quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \end{aligned} \tag{5.132}$$

а також аналогічні тотожності

$$\begin{aligned} V_-(s,\alpha,x) &= \varphi_-^{-1}(s,\alpha)[\varphi_-(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x))]_{(-\infty,x-T]}, \\ &\quad \operatorname{Im}\alpha \le 0, \\ V(s,\alpha,x) &= \varphi_+(s,\alpha)[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x))]_{[x-T,\infty)}, \\ &\quad \operatorname{Im}\alpha = 0. \end{aligned} \tag{5.133}$$

Доведення. У співвідношенні

$$\mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau(x,T) > n\big] = \mathbf{E}e^{i\alpha S_n} - \mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau(x,T) \le n\big] \qquad (5.134)$$

останній доданок можна записати як суму

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau(x,T) \le n\big] = \\ &\quad = \mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau^+(x,T) \le n\big] + \mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau^-(x,T) \le n\big],\end{aligned}$$

складові якої зводяться до вигляду

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_n}, \tau^\pm(x,T) \le n\big] = \sum_{k\le n} \mathbf{E}\big[e^{i\alpha(S_n - S_k) + i\alpha S_k}, \tau_\pm(x,T) = k\big] = \\ &\quad = \sum_{k\le n} \varphi^{n-k}(\alpha)\mathbf{E}\big[e^{i\alpha S_k}, \tau_\pm(x,T) = k\big] = I_n^\pm.\end{aligned}$$

Після твірного перетворення, породженого геометричним розподілом з параметром $0 < s < 1$ з останнього співвідношення випливає, що

$$(1-s)\sum s^n I_n^\pm = \varphi(s,\alpha)V_\pm(s,\alpha,x).$$

Таким чином, із (5.134) після твірного перетворення встановлюється (5.131). Доведення співвідношень (5.132), (5.133) подібне доведенню аналогічних співвідношень (4.58), (4.58) для процесів. Аналогічно співвідношенням (4.145), (4.146) встановлюється твердження для х.ф. розподілу випадкового блукання до моменту виходу із інтервалу $(x-T, x)$ та для щільності цього розподілу. □

Наслідок 5.6. *Для майже напівнеперервних зверху випадкових блукань S_n з х.ф. кроку*

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha) = q\varphi_1(\alpha) + \frac{pc}{c - i\alpha}, \qquad (5.135)\\ &p + q = 1, \quad \varphi_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} dF_1(x),\end{aligned}$$

х.ф. $V(s,\alpha,x,T)$ визначається проекційним співвідношенням

$$V(s,\alpha,x,T) = \frac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha} \times \qquad (5.136)$$

$$\times \left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-\frac{ce^{i\alpha x}}{c-i\alpha}Q^T(s,x)\right)\right]_{[x-T,\infty)}.$$

Відповідно, щільність розподілу блукання до виходу із інтервалу визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}
&h_s(T,x,z) := \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\big\{S_{\widetilde{\nu}(s)} < z, \tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\big\} = \\
&= p_+(s)P'_-(s,z)I_{z<0} + q_+(s)\rho_+(s)\int_{x-T}^{z\wedge 0} e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y) - \\
&- \rho_+(s)Q^T(s,x)e^{-\rho_+(s)(x-z)}\left[e^{-\rho_+(s)T}\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)}dP_-(s,y) + \right.\\
&\left. + \int_{-T}^{z-x} e^{\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right], \quad z \in (x-T,x).
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Імовірність “невиходу” із інтервалу

$$P(T,s,x) = \mathbf{P}\{\tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\} = \int_{x-T}^{x} dH_s(T,x,z)dz$$

визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}
P(T,s,x) = \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > x-T\} - Q^T(s,x)&\left[\mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > -T\} + \right.\\
&\left. + \int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)}dP_-(s,z)\right].
\end{aligned} \tag{5.138}$$

Генератриси $\tau(x,T)$, $\tau^{\pm}(x,T)$ *та розподіл пари* $\{\tau^-(x,T), S_{\tau^-(x,T)}\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&Q(T,s,x) := \mathbf{E}s^{\tau(x,T)} = 1 - P(T,s,x),\\
&Q_T(s,x) = Q(T,s,x) - Q^T(s,x), \quad 0 < x < T, \qquad (5.139)\\
&(1-s)E[s^{\tau^-(x,T)}, S_{\tau^-(x,T)} \le z] = \int_{x-T}^{x} F(z-y)dH_s(T,x,y),
\end{aligned}$$

де $H_s(T,x,y)$ *визначається щільністю* (5.137).

Доведення. Співвідношення (5.136), (5.137) встановлюються так само, як (4.153), (4.154) в наслідку 4.5. Після інтегрування (5.137) по інтервалу $[x-T,x]$ доводиться справедливість співвідношення

$$
\begin{aligned}
P(T,s,x) = \mathbf{P}\Big\{x - T < S^-_{\widetilde{\nu}(s)}\Big\} - \\
&- q_+(s)\int_{x-T}^{0} e^{-\rho_+(s)(x-z)}dP_(s,z) - \\
&- Q^T(s,x)\Bigg[(1-e^{-\rho_+(s)T})\int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)}dP_-(s,z) + \\
&+ \int_{-T}^{0}(1-e^{-\rho_+(s)z})dP_-(s,z)\Bigg],
\end{aligned}
$$

з якого випливає (5.138). Співвідношення (5.139) для майже напівнеперервних випадкових блукань доводяться так само як і аналогічні співвідношення для майже напівнеперервних процесів у § 4.5. □

Для визначення ймовірностей банкрутства $Q_T(s,x)$, $Q^T(s,x)$ та граничного значення $\lim\limits_{s\to 1}(1-s)^{-1}h_s(T,s,x,z) = h_1'(T,x,z)$ нам знадобиться наступне твердження (аналог леми 4.5)

Лема 5.6. *Для майже напівнеперервних зверху блукань додатна компонента о.ф.т.* $\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}$ *є дробово-лінійною функцією, що визначається додатним коренем* $\rho_+(s) = cp_+(s)$ *рівняння Лундберга. При* $m > 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\rho_+(s)(1-s)^{-1} = \frac{1}{m},\\
&P_-(s,x) \to \mathbf{P}\big\{S^- < x\big\}, \quad s\to 1, \quad x<0.
\end{aligned}
\tag{5.140}
$$

При $m < 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\rho_+(s) = \rho_+ > 0,\\
&\lim_{s\to 1}\mathbf{P}\big\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > x\big\}(1-s)^{-1} = \mathbf{E}\tau^-(x), \quad x<0.
\end{aligned}
\tag{5.141}
$$

При $m = 0$ $(m = pc^{-1} - q\int_{-\infty}^{0}F_1(x)dx)$, $\sigma_1^2 = D\xi_1 < \infty$

$$
\lim_{s\to 1}\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\sqrt{1-s}} = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-\widetilde{\varphi}_0(\alpha)}, \quad \lim_{s\to 1}\frac{\rho_+(s)}{\sqrt{1-s}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1},
\tag{5.142}
$$

$$\widetilde{\varphi}_*(\alpha) = p\widetilde{F}_1^{-1}(0)\widetilde{F}_1(\alpha) + q\varphi_1(\alpha).$$

Після обернення з (5.142) *випливає, що*

$$\lim_{s\to 1}(1-s)^{-1/2}P_-(s,x) = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\widetilde{H}_*(x), \quad x<0, \tag{5.143}$$

де $\widetilde{H}_*(x)$ *– функція відновлення для послідовності* $\{\widetilde{\xi}_k^0\}_{k\geq 1}$ *незалежних однаково розподілених випадкових величин зі щільністю*

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\big\{\widetilde{\xi}_1^0 < x\big\} = p\widetilde{F}_1^{-1}(0)F_1(x) + qF_1'(x), \quad x<0,$$

тобто $\widetilde{H}_*(x)$ *виражається через кратні згортки розподілів*

$$F_*(x) = p\widetilde{F}_1(0)\int_{-\infty}^{x} F_1(y)dy + qF_1(x), \quad x<0, \tag{5.144}$$

$$\widetilde{H}_*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_*(x)^{*n}, \quad x<0.$$

Доведення. Зупинимось лише на доведенні (5.142), (5.143). З умови $m = pc^{-1} + q\int_{-\infty}^{0} F_1(x)dx = 0$ випливає, що $p = cq\widetilde{F}_1(0)$. Тому можна уточнити запис х.ф. $\varphi(\alpha)$ та $\varphi(s,\alpha)$. Дійсно, $\varphi_1(\alpha) = 1 - i\alpha\widetilde{F}_1(\alpha)$,

$$\varphi(\alpha) = q(1 - i\alpha\widetilde{F}_1(\alpha)) + p\left(1 + \frac{i\alpha}{c - i\alpha}\right) =$$
$$= 1 - i\alpha\left(q\widetilde{F}_1(\alpha) - \frac{p}{c - i\alpha}\right),$$

отже, $\varphi(s,\alpha) = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}$ можна записати так

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{(1-s)(c-i\alpha)}{(1-s)(c-i\alpha) + si\alpha(q\widetilde{F}_1(\alpha) - p)}. \tag{5.145}$$

Звідси випливає розклад на множники для $\varphi(s,\alpha)$:

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha} \times$$
$$\times \frac{1-s}{p_+(s)}\frac{\rho_+(s) - i\alpha}{(c-i\alpha)(1-s) + sqi\alpha\widetilde{F}_1(\alpha)(c-i\alpha) - i\alpha ps}.$$

Враховуючи о.ф.т. та дробово-лінійний вигляд $\varphi_+(s,\alpha)$ з (5.145) одержимо співвідношення для $\varphi_-(s,\alpha)$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{1-s}{p_+(s)}\frac{\rho_+(s)-i\alpha}{c-i\alpha}\times$$
$$\times\frac{c-i\alpha}{(1-s)(c-i\alpha)+si\alpha(q\widetilde{F}_1(\alpha)(c-i\alpha)-p)},$$

з якого випливає граничне співвідношення

$$\lim_{s\to 1}\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\sqrt{1-s}} = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-q(c\widetilde{F}_1(\alpha)+\varphi_1(\alpha))},$$

що після деяких перетворень зводиться до (5.142). Для цього слід використати х.ф. $\widetilde{\varphi}_1(\alpha) = \widetilde{F}_1(\alpha)\widetilde{F}_1^{-1}(0)$ та умову $p = cq\widetilde{F}_1(0)$. Після обернення (5.142) по α встановлюється (5.143). $\square$

На основі леми 5.6 встановлюється

Наслідок 5.7. *В умовах леми* 5.6 *імовірності банкрутства* $Q^T(x) := \lim\limits_{s\to 1} Q^T(s,x)$, $Q_T(x) := \lim\limits_{s\to 1} Q_T(s,x) = 1 - Q^T(x)$ *визначаються співвідношеннями*

$$Q^T(x) = \int_{x-T}^0 d\mathbf{P}\{S^- < y\}\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}d\mathbf{P}\{S^- < y\} + \mathbf{P}\{S^- \ge -T\}\right]^{-1}, \quad m>0,$$
$$Q^T(x) = -q_+\int_{x-T}^0 e^{\rho_+(T-x+y)}d\mathbf{E}\tau^-(y)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}d\mathbf{E}\tau^-(y) + \int_{-T}^0 e^{\rho_+(T+y)}d\mathbf{E}\tau^-(y)\right]^{-1}, \quad m<0,$$
$$Q^T(x) = \int_{x-T}^0 d\widetilde{H}_*(y)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}d\widetilde{H}_*(y) + \int_{-T}^0 d\widetilde{H}_*(y)\right]^{-1}, \quad m=0. \tag{5.146}$$

Залежно від знаку m визначаються значення $h_1'(T,x,z)$:
при $m>0$

$$h_1'(T,x,z)=\frac{1}{cm}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\{S^-<z\}+\frac{1}{m}\int_{x-T}^{z\wedge 0}d\mathbf{P}\{S^-<y\}- \tag{5.147}$$
$$-\frac{1}{m}Q^T(x)\left(\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}d\mathbf{P}\{S^-<y\}+\int_{-T}^{z-x}d\mathbf{P}\{S^-<y\}\right);$$

при $m<0$

$$h_1'(T,x,z)=-p_+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}\tau^-(z)I_{z<0}-$$
$$-q_+\rho_+\int_{x-T}^{z\wedge 0}e^{\rho_+(y-z)}d\mathbf{E}\tau^-(y)+\rho_+Q^T(x)e^{-\rho_+(x-z)}\times$$
$$\times\left[e^{-\rho_+T}\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}d\mathbf{E}\tau^-(y)+\int_{-T}^{z-x}e^{\rho_+y}d\mathbf{E}\tau^-(y)\right]; \tag{5.148}$$

при $m=0$

$$h_1'(T,x,z)=\frac{\sqrt{2}}{c\sigma_1}\widetilde{H}_0'(z)I_{z<0}+\frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_{x-T}^{z\wedge 0}d\widetilde{H}_0(z)-$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}Q^T(x)\left[\int_{-\infty}^{-T}e^{c(y+T)}d\mathbf{E}\tau^-(y)+\int_{-T}^{z-x}d\mathbf{E}\tau^-(y)\right], \tag{5.149}$$

$z\in(x-T,x)$.

Якщо $\varphi(\alpha)=\frac{pc}{c-i\alpha}+\frac{qb}{b+i\alpha}$, *тоді* (5.146)–(5.149) *спрощуються, зокрема, з* (5.146) *випливає, що*

$$Q^T(x)=\begin{cases}\dfrac{1-q_-e^{\rho_-(x-T)}}{1-cq_-(c+\rho_-)^{-1}e^{-\rho_-T}}, & m>0;\\[2ex] \dfrac{q_+e^{-\rho_+x}(1-b(b+\rho_+)^{-1}e^{\rho_+(x-T)})}{1-bq_+(b+\rho_+)^{-1}e^{-\rho_+T}}, & m<0;\\[2ex] \dfrac{cq(c+b)+cb^2(T-x)}{b^2+cq(c+b)+cb^2T}, & m=0.\end{cases}$$

Доведення. Співвідношення (5.146) випливають із (5.128) після граничного переходу $s\to 1$ з урахуванням співвідношень (5.140)–(5.142) залежно від знаку m. Так само, співвідношення (5.147)–(5.149) випливають із (5.137). $\square$

Зупинимось на тому, як застосовувати для біноміальних процесів ризику всі вище викладені результати. Нехай $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$, $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ — послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин (ξ_k та η_k мають неперервні щільності розподілу)

$$\xi(t) = S^{(1)}_{N_1(t)} - S^{(2)}_{N_2(t)}, \quad S^{(1)}_n = \sum_{k\leq n} \xi_k, \quad S^{(2)}_n = \sum_{k\leq n} \eta_k, \tag{5.150}$$

$N_{1,2}(t)$ — біноміально розподілені випадкові величини відповідно з параметрами (p_1, q_1), (p_2, q_2). Як було зазначено на початку § 5.3, х.ф. для $\xi(t)$ визначається співвідношенням

$$Ee^{i\alpha\xi(t)} = (q_1 + p_1\varphi_1(\alpha))^t (q_2 + p_2\varphi_2(-\alpha))^t, \tag{5.151}$$

де $\varphi_1(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_1}$, $\varphi_2(-\alpha) = Ee^{-i\alpha\eta_1}$. Якщо позначити

$$q_1 + p_1\varphi_1(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_1^0}, \quad q_2 + p_2\varphi_2(\alpha) = Ee^{i\alpha\eta_1^0},$$

тоді

$$\begin{aligned} &Ee^{i\alpha\xi(t)} = \left(Ee^{i\alpha(\xi_1^0-\eta_1^0)}\right)^t = [\widetilde{\phi}(\alpha)]^t, \qquad (5.152)\\ &\widetilde{\phi}(\alpha) = Ee^{i\alpha\widetilde{\zeta}_1}, \quad \widetilde{\zeta}_1 = \xi_1^0 - \eta_1^0. \end{aligned}$$

З (5.152) випливає, що $\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t$, $\widetilde{S}_t = \sum_{k\leq t} \widetilde{\zeta}_k$. Якщо $\widetilde{\nu}(s)$ — геометрично розподілена випадкова величина, то

$$\widetilde{\varphi}(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1-s}{1-s\widetilde{\phi}(\alpha)}, \quad 0 < s < 1. \tag{5.153}$$

Якщо для процесу $\xi(t)$ в (5.150) $\varphi_1(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1} = \frac{c}{c-i\alpha}$, тоді

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\widetilde{\zeta}_1} &= \left(q_1 + p_1\frac{c}{c-i\alpha}\right)(q_2 + p_2\varphi_2(-\alpha)) = \qquad (5.154)\\ &= q_1q_2 + q_1p_2\widetilde{\varphi}(\alpha) + p_1q_2\frac{c}{c-i\alpha} + p_1p_2\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{\varphi}(\alpha). \end{aligned}$$

Після обернення (5.154) розподіл стрибків $\widetilde{\zeta}_1 = \xi_1^0 - \eta_1^0$, $\Phi(x) = \mathbf{P}\{\widetilde{\zeta}_1 < x\}$ ($\mathbf{E}e^{i\alpha\xi_1^0} = q_1 + p_1\frac{c}{c-i\alpha}$) визначається згорткою показникового розподілу з розподілом $\widetilde{F}_2(x) = \mathbf{P}\{-\eta_1 < x\} = \overline{F}_2(-x)$, $x < 0$,

$$\Phi(x) = q_1p_2\overline{F}_2(-x) + p_1p_2c\int_0^\infty \overline{F}_2(y-x)e^{-cy}dy, \quad x < 0,$$

$$\overline{\Phi}(x) = p_1 \left[q_2 + cp_2 \int_{-\infty}^{0} F_2(z) e^{cz} dz \right] e^{-cx}, \quad x > 0, \tag{5.155}$$

$$\Phi(+0) - \Phi(-0) = q_2 - p_1 q_2 = q_2 q_1 > 0.$$

Отже при умові (5.154) $\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t$ і $\widetilde{S}_t$ є майже напівнеперервним зверху випадковим блуканням, а $\xi(t)$ — майже напівнеперервним зверху біноміальним процесом.

Аналогічно якщо для процесу $\xi(t)$ в (5.150)

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{b}{b - i\alpha}, \quad \widetilde{\varphi}_2(\alpha) = \frac{b}{b + i\alpha}, \quad \varphi_1(\alpha) = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi_1},$$

тоді

$$\widetilde{\phi}_1(\alpha) =: \mathbf{E} e^{i\alpha\widetilde{\zeta}_1'} = (q_1 + p_1\varphi_1(\alpha))(q_2 + p_2 \frac{b}{b + i\alpha}) = \tag{5.156}$$

$$= q_1 q_2 + q_1 p_2 \frac{b}{b + i\alpha} + p_1 p_2 \varphi_1(\alpha) + p_1 P_2 \frac{b}{b + i\alpha}.$$

Після обернення (5.156) розподіл стрибків $\widetilde{\zeta}_1' = \xi_1^0 + \widetilde{\eta}_k^0$, $\Phi_1(x) = \mathbf{P}\{\widetilde{\zeta}_1' < x\}$ ($\mathbf{E} e^{i\alpha\widetilde{\eta}_1^0} = q_2 + p_2 \frac{b}{b+i\alpha}$) визначається співвідношеннями

$$\Phi_1(x) = p_2 e^{bx} \left[q_1 + bp_1 \int_0^{\infty} F_1(z) e^{-bz} dz \right], \quad x < 0, \tag{5.157}$$

$$\overline{\Phi}_1(x) = p_1 q_1 \overline{F}_1(x) + p_1 p_2 b \int_0^{\infty} \overline{F}_1(x + y) e^{-by} dy, \quad x > 0.$$

Таким чином, при умові (5.156) $\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t = \sum\limits_{k \le t} \zeta_k'$ є майже напівнеперервним знизу біноміальним процесом.

На підставі цих висновків встановлюються наступні твердження.

Теорема 5.19. *Для загального біноміального процесу* (1.61) *справедлива о.ф.т.*

$$\widetilde{\varphi}(s, \alpha) = E e^{i\alpha\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \widetilde{\varphi}_+(s, \alpha)\widetilde{\varphi}_-(s, \alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{5.158}$$

де в загальному випадку компоненти $\widetilde{\varphi}_\pm(s,\alpha)$ визначаються аналогами співвідношень (5.74) *та* (5.76)*, в яких суми S_n слід замінити на $\widetilde{S}_n$ з розподілом кроку $\widetilde{\zeta}_1 = \xi_1^0 - \eta_1^0$*

$$\Phi(x) = \mathbf{P}\{\widetilde{\zeta}_1 < x\} = \int_{-0}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_1^0 < x - y\} d\mathbf{P}\{\eta_1^0 < y\}.$$

Якщо для $\widetilde{\phi}(\alpha)$ *виконується умова* (5.154)*, тоді* $\xi(t)$ *є майже напівнеперервним зверху біноміальним процесом, для якого розподіл кроку визначається співвідношеннями* (5.155)*. Х.ф.* $\xi^+(\widetilde{\nu}(s))$ *та генератриса* $\tau^+(x)$ *визначаються співвідношеннями*

$$\widetilde{\varphi}_+(s,\alpha) = \frac{\widetilde{p}_+(s)(c-i\alpha)}{\widetilde{\rho}_+(s)-i\alpha}, \quad 0 < \widetilde{\rho}_+(s) = c\widetilde{p}_+(s) < c, \tag{5.159}$$
$$T(s,x) = E[s^{\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \widetilde{q}_+(s)e^{-\widetilde{\rho}_+(s)x}, \quad x > 0,$$

де $\widetilde{\rho}_+(s) > 0$ *— единий додатний корінь рівняння* $1 - s\widetilde{\phi}(-ir) = 0$.

Доведення. Доведення (5.158) аналогічне доведенню о.ф.т. для S_n в лемі 5.4. Із (5.154) випливає, що розподіл $\Phi(x) = \mathbf{P}\{\widetilde{\zeta}_1 < x\}$ є згорткою розподілу $-\eta_1^0 \leq 0$ та показникового розподілу з параметром $c > 0$. Після обчислення вказаної згортки встановлюється (5.157). Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(n) \doteq \widetilde{S}_n$ встановлюються співвідношення (5.159) так само, як співвідношення (5.79), (5.80) для S_n. □

Аналог теореми 5.12 про другу факторизаційну тотожність формулюється без доведення.

Теорема 5.20. *Спільна генератриса пари* $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ *для загального біноміального процесу* (5.150)

$$T(s,x,u) = \mathbf{E}[s^{\tau^+(x)}e^{-u\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] =$$
$$= E[e^{-u\gamma^+(x)}, \xi^+(\theta_s) > x]$$

визначається інтегральним перетворенням Лапласа–Карсона (породженим показниково розподіленою випадковою величиною θ'_μ*)*

$$\widetilde{T}(s,\mu,u) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(\theta'_\mu)}e^{-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \tau^+(\theta'_\mu) < \infty\big] = \tag{5.160}$$
$$= \frac{\mu}{\mu-u}\left[1 - \frac{Ee^{-\mu\xi^+(\widetilde{\nu}(s))}}{Ee^{-u\xi^+(\widetilde{\nu}(s))}}\right].$$

Генератриса пари $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *визначається співвідношенням*

$$T(s,0,u) = 1 - \frac{\widetilde{p}_+(s)}{\mathbf{E}e^{-u\xi^+(\widetilde{\nu}(s))}}, \quad \widetilde{p}_+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s)) = 0\}, \tag{5.161}$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ (*див.* (5.154))

$$\widetilde{T}(s,u,\mu) = \frac{\mu c \widetilde{q}_+(s)}{(c+u)(\widetilde{\rho}_+(s)+\mu)},$$
$$T(s,u,x) = \frac{c}{c+u}\widetilde{q}_+(s)e^{-\widetilde{\rho}_+(s)x}, \quad x>0. \tag{5.162}$$

З останнього співвідношення (5.162) випливає, що $\gamma^+(x)$ не залежить від x ($\gamma^+(x) \doteq \gamma^+(0)$).

$$\mathbf{E}e^{-u\gamma^+(0)} = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)}|\xi^+(\widetilde{\nu}(s))>0\big] = \frac{c}{c-u}.$$

Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу біноміальний процес $\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t = \sum\limits_{k\le t}\widetilde{\zeta}'_k$, стрибки якого мають х.ф. (5.156) і функцію розподілу $\Phi_1(x)$ з показниковим зображенням при $x<0$ (див. (5.158)). Х.ф. $\xi^-(\widetilde{\nu}(s))$ визначається подібним до (5.159) співвідношенням

$$\widetilde{\varphi}_-(s,\alpha) =: \mathbf{E}e^{i\alpha\xi^-(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{\widetilde{p}_-(s)(b+i\alpha)}{\widetilde{\rho}_-(s)+i\alpha},$$

де $r_s = -\widetilde{\rho}_-(s)$ — від'ємний корінь рівняння $1-s\widetilde{\phi}(\alpha)|_{i\alpha=r}=0$.

Так само наводиться без доведення наступне твердження.

Теорема 5.21. *Для загального біноміального процесу* $\xi(t)$ *має місце дограничне узагальнення формули Полячека–Хінчина*

$$\mathbf{E}e^{-u\xi^+(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{\widetilde{p}_+(s)}{1-\widetilde{q}_+(s)\widetilde{g}_s(u)}, \quad \widetilde{q}_+(s) = 1-\widetilde{p}_+(s), \tag{5.163}$$
$$\widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+(\widetilde{\nu}(s))>0\big],$$

а для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ *при* $m=\mathbf{E}\xi(1)<0$ *і* $s\to1$ *— формула Полячека–Хінчина для генератриси* ξ^+ (*аналог* (5.109), $\Phi_1(x)$ *див. в* (5.157))

$$\mathbf{E}e^{-u\xi^+} = \frac{\widetilde{p}_+}{1-\widetilde{q}_+\widetilde{g}(u)}, \quad \widetilde{g}(u) = \frac{\int_0^\infty e^{-ux}\overline{\Phi}_1(x)dx}{\int_0^\infty \overline{\Phi}_1(x)dx}, \tag{5.164}$$
$$\int_0^\infty e^{-ux}\Phi_1(x)dx = p_1q_1\int_0^\infty e^{-ux}\overline{F}_1(x)dx +$$
$$+\frac{bp_1p_2}{b-u}\int_0^\infty \overline{F}_1(x)[e^{-ux}-e^{-bx}]dx.$$

Аналогічно для $\xi^-(\widetilde{\nu}(s))$ у загальному випадку має місце дограничне узагальнення формули Полячека–Хінчина, а для майже напівнеперервного зверху біноміального процесу справедлива формула Полячека–Хінчина, що визначає генератрису ξ^- при $m = p_1c^{-1} - p_2\mathbf{E}\eta_1 > 0$,

$$\mathbf{E}e^{u\xi^-(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{\widetilde{p}_-(s)}{1-\widetilde{q}_-(s)\widetilde{g}_s^-(u)}, \quad \widetilde{g}_s^-(u) = \mathbf{E}\big[e^{u\gamma^-(0)}\,|\,\xi^-(\widetilde{\nu}(s))>0\big],$$

$$\mathbf{E}e^{u\xi^-} = \frac{\widetilde{p}_-}{1-\widetilde{q}_-\widetilde{g}^-(u)}, \quad \widetilde{g}^-(u) = \frac{\int_{-\infty}^0 e^{ux}\Phi(x)dx}{\int_{-\infty}^0 \Phi(x)dx}, \tag{5.165}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{uz}\Phi(z)dz = q_1p_2\int_{-\infty}^0 e^{ux}\overline{F}_2(-x)dx + \\ + p_1p_2\frac{c}{c-u}\int_{-\infty}^0 \overline{F}_2(-z)(e^{uz}-e^{cz})dz,$$

$\Phi(x)$ та $\overline{F}_2(x)$ див. в (5.155).

Із теореми 5.15 на основі формули двоїстості для майже напівнеперервних зверху процесів

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\} = \frac{t}{x}\big[\mathbf{P}\{\tau^+(x)\le t\,|\,\tau^+(0)\le t\} - \\ - \mathbf{P}\{\tau^+(x)<t\,|\,\tau^+(0)<t\}\big] \tag{5.166}$$

випливає (див. [56])

Теорема 5.22. *Для майже напівнеперервного зверху біноміального процесу ризику $\xi(t) = \widetilde{S}_t$ з х.ф. кроку (5.154) імовірність банкрутства на інтервалі $[0,t]$ визначається співвідношенням*

$$\mathbf{P}\{\xi^-(t)<x\} = c\int_{-\infty}^x e^{c(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi(t)<y\}dy + \tag{5.167}$$

$$+\sum_{k=0}^t \mathbf{P}\{\xi^-(t-k)=0\}\Big[\mathbf{P}\{\xi(k)<x\} - c\int_{-\infty}^x e^{c(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi(k)>y\}dy\Big].$$

Для майже напівнеперервного знизу біноміального процесу ризику (надлишкового процесу вимог) аналогічна ймовірність банкрутства визначається співвідношенням

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t)>x\} = b\int_x^\infty e^{b(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi(t)>y\}dy + \tag{5.168}$$

$$+\sum_{k=0}^{t}\mathbf{P}\{\xi^+(t-k)=0\}\Big[\mathbf{P}\{\xi(k)>x\}-b\int_x^\infty e^{b(x-y)}d\mathbf{P}\{\xi(k)>y\}dy\Big].$$

Згідно з (5.116) *розподіли пар* $\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s)),\gamma_k^+(0)\}$ $(k=\overline{1,3})$ *виражаються через розподіл непоказникових стрибків* $\overline{\Phi}_1(x)=\mathbf{P}\{\widetilde{\zeta}_1>x\}$ $(x>0)$ *див.* (5.162) $(\gamma_1(0)=\gamma^+(0),\ \gamma_2(0)=\gamma_+(0),\ \gamma_3(0)=\gamma_0^+)$ *за допомогою співвідношень*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s))>0,\gamma^+(0)>z\}=\\
&\quad=\overline{\Phi}_1(z)+\widetilde{q}_-(s)b\int_z^\infty e^{(z-y)\widetilde{\rho}_-(s)}\overline{\Phi}_1(y)dy, \qquad (5.169)\\
&\mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s))>0,\gamma_+(0)>z\}=b\widetilde{q}_-(s)\int_z^\infty e^{-y\rho_-(s)}\overline{\Phi}_1(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s))>0,\gamma_0>z\}=\\
&\quad=\overline{\Phi}_1(z)+\frac{\widetilde{q}_-(s)}{\widetilde{p}_-(s)}\int_z^\infty(1-e^{-y\rho_-(s)})\overline{\Phi}_1(y)dy.
\end{aligned}$$

Якщо $m=p_1\mu_1-bc^{-1}<0$, *тоді для майже напівнеперервних знизу* $\xi(t)$ *мають місце аналоги формул* (5.117)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi^+>0,\gamma^+(0)>z\}=\overline{\Phi}_1(z)+b\int_z^\infty\overline{\Phi}_1(y)dy,\\
&\mathbf{P}\{\xi^+>0,\gamma_0^+>z\}=\overline{\Phi}_1(z)+b\int_z^\infty yd\Phi_1(y), \qquad (5.170)\\
&\mathbf{P}\{\xi^+>0,\gamma_+(0)>z\}=b\int_z^\infty\overline{\Phi}_1(y)dy],\quad z>0.
\end{aligned}$$

Як і в теоремі 5.14 спільні генератриси $\{\tau^+(x),\gamma_k(x)\}_{k=\overline{1,3}}$ $(x\geq 0)$ для майже напівнеперервного знизу біноміального процесу $\xi(t)\doteq\widetilde{S}_t$ ($\widetilde{S}_t$ — блукання, стрибки якого мають спільний розподіл $\Phi_1(x)=\mathbf{P}\{\zeta_1<x\}$ в (5.162)) визначаються співвідношеннями (5.90), в яких слід замінити A, A_k, G_k на $\widetilde{A}$, $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{G}_k$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A}(x,u,v,\mu)=\int_x^\infty e^{(u-v)x-(u+\mu)z}d\Phi_1(x),\quad x>0,\\
&\widetilde{G}_k(s,x,u_k)=\int_{-\infty}^x\widetilde{A}_k(x-y,u_k)dP_-(s,y),\quad mx>0,\quad k=\overline{1,3}.
\end{aligned}$$

Для майже напівнеперервного знизу біноміального процесу $\xi(t)$ умовна генератриса $g_s(u)$ у формулі (5.163) визначається співвідношенням

$$\widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}\big[e^{-u\gamma_+(0)} \,|\, \xi^+(\widetilde{\nu}(s)) > 0\big] = \frac{G_1(s,0,u)}{G_1(s,0,0)} \underset{s\to 1}{\longrightarrow} \widetilde{g}(u),$$

($\widetilde{g}(u) = \lim\limits_{s\to 1} \widetilde{g}_s(u)$ див. в (5.164)).

Одержані вище результати щодо виходу майже напівнеперервних блукань S_n з інтервалу дають можливість сформулювати ще одне твердження для відповідних біноміальних процесів.

Наслідок 5.8. *Для майже напівнеперервних зверху біноміальних процесів* $\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t$ *з х.ф. кроку* $\widetilde{\phi}(\alpha)$ (5.154) *справедливі співвідношення*

$$Q^T(s,x) = \widetilde{q}_+(s) \int_{x-T}^{0} e^{\widetilde{\rho}_+(s)(T-x-y)} d\mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) < y\} \times \tag{5.171}$$
$$\times \left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)} d\mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) < y\} + \right.$$
$$\left. + \int_{-T}^{0} e^{\widetilde{\rho}_+(s)(T+y)} d\mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) < y\}\right]^{-1}, \quad (0 < x < T),$$
$$Q(T,s,x) =: \mathbf{E} s^{\tau(x,T)} = 1 - \mathbf{P}\{\tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\}; \tag{5.172}$$
$$\mathbf{P}\{\tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\} = \mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) > x - T\} - Q^T(s,x) \times$$
$$\times \left[\mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) > -T\} + \int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)} d\mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) < z\}\right], \tag{5.173}$$
$$Q_T(s,x) =: \mathbf{E}[s^{\tau^-(x,T)}, A_-(x)] = Q(T,s,x) - Q^T(s,x), \tag{5.174}$$
$$(1-s)\mathbf{E}[s^{\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) \le z] =$$
$$= \int_{x-T}^{x} \overline{F}(z-y) d\widetilde{H}_s(T,x,y), \quad z < x - T. \tag{5.175}$$

$\widetilde{H}_s(T,x,y)$ *визначається аналогічно до* (5.137) *щільністю*

$$\widetilde{h}_s(T,x,z) = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}\{\xi_{\widetilde{\nu}(s)} < z, \tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\} \quad (x - T < z < x),$$

що виражається через $P_-(s,y) = \mathbf{P}\{\xi^-(\widetilde{\nu}(s)) < y\}$ $(y < 0)$.

Якщо $\xi(t)$ *майже напівнеперервний знизу біноміальний процес (з х.ф.* $\widetilde{\varphi}_2(\alpha) = b(b+i\alpha)^{-1}$, $b>0$, $p_2 \in (0,1]$, $\widetilde{\rho}_-(s) = b\widetilde{p}_-(s)$), *тоді*

$$Q_T(s,x) = \widetilde{q}_-(s) \int_0^x e^{\widetilde{\rho}_-(s)(x-y)} d\mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s)) < y\} \times \tag{5.176}$$
$$\times \left[\mathbf{E}\left[e^{b(T-\xi^+(\widetilde{\nu}(s)))}, \xi^+(\widetilde{\nu}(s)) > T\right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^T e^{\widetilde{\rho}_-(s)(T-y)} d\mathbf{P}\{\xi^+(\widetilde{\nu}(s)) < y\} \right]^{-1}.$$

Якщо $\xi(t)$ *майже напівнеперервний зверху* ($c>0$, $0<p_1<1$, *див.* (5.154)) *і знизу* ($b>0$, $p_2=1$), *тоді*

$$Q^T(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\widetilde{q}_- e^{\widetilde{\rho}_-(x-T)}}{1-\widetilde{q}_- c(c+\widetilde{\rho}_-)^{-1} e^{-\widetilde{\rho}_- T}}, & m>0, \quad 0<x<T, \\ \dfrac{\widetilde{q}_+ e^{-\widetilde{\rho}_+ x}(1-b(\widetilde{p}_+ + b)^{-1} e^{\widetilde{p}_+(x-T)})}{1-b\widetilde{q}_+(b+\widetilde{\rho}_+)^{-1} e^{-\widetilde{\rho}_+ T}}, & m<0, \\ \dfrac{c\widetilde{q}(c+b)+cb^2(T-x)}{b^2+c\widetilde{q}(c+b)+cb^2 T}, & m=0, \quad \widetilde{q} = \dfrac{c+q_1 b}{b+c}. \end{cases} \tag{5.177}$$

При доведенні (5.175) слід врахувати, що при умові майже напівнеперервності знизу процесу $\xi(t)$, $\eta(t) = -\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху. Зауважимо, що при $q_1 = q_2 = 0$ $\widetilde{p} = \dfrac{b}{b+c}$, $\widetilde{q} = \dfrac{c}{b+c}$.

Зауваження. Для пуассонівського процесу $\xi(t)$ та блукання S_n з показниково розподіленими від'ємними стрибками (параметр $b>0$) резольвента $R_s(x)$ ($x \geq 0$) є сингулярною функцією, що визначається в наступних твердженнях.

Теорема 5.23. *Для майже напівнеперервного знизу процесу* $\xi(t)$ *резольвента* $R_s(x)$ *визначається співвідношенням*

$$R_s(x) = R_s^0(x) - \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x} R_s^0(x) - \frac{1}{s+\lambda}\delta_0(x), \quad x \geq 0, \tag{5.178}$$
$$R_s^0(x) = s^{-1}\rho_-(s) \int_{-0}^x e^{\rho_-(s)(x-y)} dP_+(s,y), \tag{5.179}$$
$$R_s^0(+0) = \frac{b}{s+\lambda}, \quad x \geq 0;$$

$$P_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\}, \quad \rho_-(s) = bp_-(s);$$

$r_s = -\rho_-(s)$ — *корінь рівняння Лундберга* $(\psi(-ir_s) = s)$.

Має місце проінтегрована формула зв'язку між $R_s(x)$ *та* $R_s^0(x)$

$$\frac{q_-(s)}{\rho_-(s)} R_s^0(x) = \frac{1}{s} P_+(s,x) + \int_0^x R_s(y)dy, \quad x \geq 0. \tag{5.180}$$

Доведення. Замітимо, що (5.179) подібна до формули для резольвенти напівнеперервного знизу пуассонівського процесу. Згідно з (1.54), (1.55) генератору $\mathbf{L}$ для $\xi(t)$ відповідає кумулянта $\psi(\alpha)$ ($\mathbf{L} \leftrightarrow \psi(\alpha)$). Х.ф. майже напівнеперервного знизу процесу $\varphi(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}$ допускає факторизайний розклад

$$\begin{aligned}
\varphi(s,\alpha) &= -\frac{s(b+i\alpha)}{qi\alpha + (b+i\alpha)(i\alpha p\widetilde{F}(\alpha) - s)} = \\
&= \varphi_+(s,\alpha)\frac{p_-(s)(b+i\alpha)}{\rho_-(s)+i\alpha},
\end{aligned} \tag{5.181}$$

$$\widetilde{F}(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{F}(x)dx, \quad \overline{F}(0) = p, \quad F(0) = q.$$

Резольвента-оператор для $\xi(t)$ визначається оберненням $(\mathbf{L} - s\mathbf{I})$

$$\mathbf{R}_s = (\mathbf{L} - s\mathbf{I})^{-1} \leftrightarrow \frac{1}{\psi(\alpha) - s} = r_s(\alpha).$$

Резольвентна функція $R_s(x)$ визначається перетворенням Фур'є

$$r_s(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}R_s(x)dx, \quad r_s^0(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}R_s^0(x)dx,$$
$$\operatorname{Im}\alpha > \rho_-(s) = bp_-(s).$$

З (5.181) випливає співвідношення

$$r_s(\alpha) = -\frac{1}{s}\varphi(s,\alpha) = \frac{1}{b}r_s^0(\alpha) + \frac{i\alpha}{b}r_s^0(\alpha),$$

останній доданок якого визначає перетворення Фур'є похідної $\frac{\partial}{\partial x}R_s^0(x)$

$$\widehat{r}_s(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}dR_s^0(x) = -R_s^0(+0) - i\alpha r_s^0(\alpha).$$

Звідси випливає розклад

$$r_s(\alpha) = r_s^0(\alpha) - \frac{1}{b}\widehat{r}_s(\alpha) - \frac{1}{s+\lambda}, \tag{5.182}$$

після обернення якого встановлюється (5.178). Проінтегрувавши (5.178) знаходимо, що

$$\int_0^x R_s(y)dy = \int_0^x R_s^0(y)dy - \frac{1}{b}(R_s^0(x) - R_s^0(+0)) - \frac{1}{s+\lambda} =$$
$$= \int_0^x R_s^0(y)dy - \frac{1}{b}R_s^0(x), \quad x \geq 0.$$

Враховуючи, що

$$\int_0^x R_s^0(y)dy = \frac{1}{\rho_-(s)}R_s^0(x) - \frac{1}{s}P_+(s,x), \quad x \geq 0,$$

з останніх двох співвідношень одержимо (5.180). □

Для майже напівнеперервних блукань має місце аналогічна

Теорема 5.24. *Якщо S_n — майже напівнеперервне знизу блукання, тоді резольвента $R_s(x)$ визначається співвідношенням*

$$R_s(x) = R_s^0(x) - \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}R_s^0(x) - \delta_0(x), \quad x \geq 0, \tag{5.183}$$

$$R_s^0(x) = \frac{1}{1-s}\rho_-(s)\int_{-0}^x e^{\rho_-(s)(x-y)}dP_+(s,y), \quad x \geq 0, \tag{5.184}$$

$$R_s^0(+0) = b, \quad P_+(s,y) = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} < y\}, \quad y \geq 0; \rho_-(s) = bp_-(s),$$
$$p_-(s) = \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} = 0\}. \tag{5.185}$$

Проінтегрована формула зв'язку між $R_s(x)$ та $R_s^0(x)$ має вигляд

$$\frac{q_-(s)}{\rho_-(s)}R_s^0(x) = \frac{1}{1-s}P_+(s,x) + \int_0^x R_s(y)dy, \quad x \geq 0. \tag{5.186}$$

Доведення теореми 5.23 грунтується на розкладі $r_s(\alpha)$, що випливає з о.ф.т.

$$r_s(\alpha) =: -\frac{\varphi(s,\alpha)}{1-s} = \frac{b+i\alpha}{(b+i\alpha)(i\alpha s\widetilde{F}(\alpha)-1) - sqi\alpha},$$

$$r_s(\alpha) = r_s^0(\alpha) - \frac{1}{b}\hat{r}_s^0(\alpha) - 1, \quad \varphi(s,\alpha) = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}. \tag{5.187}$$

Розклад (5.186), з якого випливає (5.183), є аналогом (5.182). Легко перевірити справедливість (5.180) та (5.186) при $x = 0$.

В роботах [77, 78] одержані результати для розподілу двограничних функціоналів у термінах функції $R_s^0(x)$ (див. (5.179) та (5.184)), яку не коректно називати резольвентою відповідного процесу $\xi(t)$ (або блукання S_n). Якщо подібно до позначень в [76–78] ввести функцію

$$\widehat{R}_s^b(T) = \int_T^\infty R_s^0(x) e^{-bx} dx =$$
$$= s^{-1}\rho_-(s) \int_T^\infty e^{-bx} \int_0^x e^{\rho_-(s)(x-y)} dP_+(s,y) dx,$$

то після зміни порядку інтегрування одержимо

$$\widehat{R}_s^b(T) = \frac{e^{-bT}}{bq_-(s)} \left[R_s^0(T) + s^{-1}\rho_-(s) \int_T^\infty e^{b(T-y)} dP_+(s,y) \right]. \tag{5.188}$$

Якщо генератрису $Q_T(s,x)$ для майже напівнеперервного знизу процесу (див. теорему 4.15) домножити на $s^{-1}\rho_-(s)$, тоді

$$Q_T(s,x) = \frac{q_-(s) R_s^0(x)}{R_s^0(T) + s^{-1}\rho_-(s) \int_T^\infty e^{b(T-y)} dP_+(s,y)}. \tag{5.189}$$

З урахуванням (5.188) співвідношення (5.189) набуває вигляду

$$Q_T(s,x) = \frac{R_s^0(x)}{be^{bT}\widehat{R}_s^b(T)}, \quad 0 < x < T, \tag{5.190}$$

тобто, останнє співвідношення теореми 4.15 для процесів, так само як і (5.150) для блукань, у випадку майже напівнеперервності знизу, узгоджуються з результатами Т.В. Каданкової та В.Ф. Каданкова в [76–78].

Приклад 5.5. Нехай $S_n = \sum\limits_{k \le n} \xi_k$ $(S_0 = 0)$ майже нанівнеперервне зверху (знизу) випадкове блукання. Скласти таблицю для коренів рівняння Лундберга: $s\mathbf{E}e^{r\xi_1} = s_1$, аналогічну таблиці II в додатках для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів.

Розділ 6

Поведінка процесів ризику після банкрутства

6.1 Поведінка класичних процесів ризику після банкрутства та багатозначна функція банкрутства

Останнім часом зріс інтерес до вивчення різних характеристик процесів ризику, пов'язаних з їх поведінкою після банкрутства. Це пояснюється тим, що після банкрутства страхова компанія може продовжити функціонування, взявши в кредит деякий капітал. Для визначення передбачуваного кредиту важливо знати розподіл таких характеристик класичного (резервного) процесу ризику $\xi_u(t) = R_u(t) = u + Ct - S(t)$ (див. графік 7 в кінці монографії)

$$S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \mathbf{P}\{\nu(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

або надлишкового процесу ризику $\zeta(t) = S(t) - Ct$ $(C, \lambda, u > 0)$ з кумулянтою $k(r) = t^{-1} \ln \mathbf{E} e^{r\zeta(t)} = Cr + \lambda \left(\mathbf{E} e^{-r\xi_1} - 1\right)$. Ці характеристики визначаються перестрибковими функціоналами $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u)\}$ (їх позначення наводяться нижче), розподіли яких вивчались нами в роботах [23–33, 51–61, 129–168, 174–184]. Розподіли згаданих функціоналів, зображених на графіку 7 в кінці монографії, визначають також багатозмінну функцію банкрутства (див. [57, 58, 181, 223])

$$\phi(u,x,y) = \mathbf{P}\left\{\gamma^+(u) > x, \gamma_+(u) > y, \tau^+(u) < \infty\right\}. \tag{6.1}$$

Слід зауважити, що складні (багатозначні) функції банкрутства в §§ 6.1, 6.2 є частинним поняттям знижкової (дисконтної) штрафної функції (discounted penalty function), яка розглядалась в [223].

Нехай $\delta = e^{-s} \leq 1$ — дисконтний параметр, $s \geq 0$, $w(x_1, x_2) \geq 0$ — невід'ємна функція, $x_{1,2} > 0$. Тоді

$$m_s^*(u) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)} w(\gamma^+(u), \gamma_+(u)),\ \tau^+(u) < \infty\big]$$

називається знижковою (дисконтною) штрафною функцією.

Якщо $s = 0$, $w_{u_1,u_2}(\gamma_1(u), \gamma_2(u)) = e^{-u_1\gamma_1(u) - u_2\gamma_2(u)}$, тоді

$$m_0^*(u; u_1, u_2) = V(0, u; u_1, u_2) = \widetilde{\varphi}_0(u; u_1, u_2) =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u_1x - u_2y}\varphi_0(u, dx, dy) = \mathbf{E}[e^{-u_1\gamma_1(u) - u_2\gamma_2(u)}\tau^+(u) < \infty]$$

є граничною складною (двозначною: $u_{1,2} > 0$) функцією банкрутства. (При $s > 0$ $m_s^*(u; u_1, u_2) = \widetilde{\varphi}_s(u; u_1, u_2)$ є догранияною складною функцією банкрутства.)

Спочатку наводимо для порівняння вживані нами позначення для досліджуваних функціоналів з позначеннями в [210]:

$$\begin{aligned}
&\tau(u) = \inf\{t : R_u(t) < 0\}, && \tau^+(u) = \inf\{t : \zeta(t) > u\},\\
&Y^+(u) = -R_u(\tau(u)), && \gamma^+(u) = \zeta(\tau^+(u)) - u,\\
&X^+(u) = R_u(\tau(u) - 0), && \gamma_+(u) = u - \zeta(\tau^+(u) - 0),\\
&X^+(u) + Y^+(u) = && \gamma_u^+ = \gamma^+(u) + \gamma_+(u),\\
&= R_u(\tau(u) - 0) - R_u(\tau(u)), &&
\end{aligned}$$

$\tau(u) \doteq \tau^+(u)$ — визначає момент банкрутства (the ruin time); $Y^+(u) \doteq \gamma^+(u)$ — жорсткість банкрутства (the severity of ruin); $X^+(u) \doteq \gamma_+(u)$ — значення $R_u(t)$ перед настанням банкрутства (the surplus prior to ruin); γ_u^+ — розмір вимоги, що спричинила банкрутство (amount of the claim causing ruin); $\zeta^\pm(t) = \sup\limits_{0 \leq t' \leq t}(\inf)\zeta(t')$ — екстремуми $\zeta(t')$ на інтервалі $[0, t]$; $\zeta^\pm = \sup\limits_{0 \leq t < \infty}\inf\zeta(t)$ — абсолютні екстремуми $\zeta(t)$ $\tau'(u) = \inf\{t > \tau(u), R_u(t) > 0\}$ — момент повернення $R_u(t)$ після банкрутства у півплощину $\Pi^+ = \{y > 0\}$.

Позначимо ще $T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau(u), & \tau(u) < \infty, \\ \infty, & \tau(u) = \infty. \end{cases}$
$T'(u)$ називається "червоним періодом" (the red time), який визначає тривалість перебування $R_u(t)$ у півплощині $\Pi^- = \{x < 0\}$.

$$Z^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \infty} \zeta(t) = \sup_{\tau(u) \le t < \infty} \{-R_u(t)\},$$
$$Z_1^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \tau'(u)} \zeta(t) = \sup_{\tau^+(u) \le t \le \tau'(u)} \{-R_u(t)\}.$$

$Z^+(u)$ визначає тотальний максимум дефіциту (the total maximal deficit) $Z_1^+(u)$ — максимум дефіциту за період $T'(u)$ (the maximal deficit on $T'(u)$) (графіки 7, 8 цих функціоналів див. в кінці монографії).

Розглянемо щільність узагальненої багатозначної (складної) функції банкрутства

$$\begin{aligned} \varphi_s(u, dx, dy) = \mathbf{P}\left\{\gamma^+(u) \in dx, \gamma_+(u) \in dy, \zeta^+(\theta_s) > u\right\} = \\ = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dx, \gamma_+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty\big], \end{aligned} \tag{6.2}$$

де θ_s — показниково розподілена випадкова величина $\mathbf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t \ge 0$. Після інтегрування (6.2) при $s \to 0$ знаходимо, що

$$\phi(u, x, y) = \int_x^\infty \int_y^\infty \varphi_0(u, dx', dy'), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Інтегральне перетворення щільності (6.2) є спільною генератрисою трійки $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u)\}$

$$\widetilde{\varphi}_s(u, u_1, u_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1 x - u_2 y} \varphi_s(u, dx, dy) =$$
$$= \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u) - u_1\gamma^+(u) - u_2\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] = V(s, u, u_1, u_2).$$

Спільна генератриса $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u), \gamma_u^+\}$ ($\gamma^+(u) = \gamma_1(u)$, $\gamma_+(u) = \gamma_2(u)$, $\gamma_u^+ = \gamma_3(u)$),

$$V(s, u, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u) - \sum_{k=1}^3 u_k\gamma_k(u)}, \tau^+(u) < \infty\big]$$

згідно з результатами § 3.3 (див. (3.138), а також теореми 1, 2 в [51]) визначається співвідношенням

$$V(s, u, u_1, u_2, u_3) = s^{-1} \int_0^u G(s, u - y, u_1, u_2, u_3) dP_+(s, y), \tag{6.3}$$

$$G(s,x,u_1,u_2,u_3)=\int_{-\infty}^{0}A_{x-y}(u_1,u_2,u_3)dP_-(s,y),$$
$$P_\pm(s,y)=\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s)<y\right\},\quad \pm y>0,$$
$$A_x(u_1,u_2,u_3)=\lambda\int_x^\infty e^{(u_1-u_2)x-(u_1+u_3)z}dF(z),\quad x>0,$$
$$A_x(u_1,u_2)=A_x(u_1,u_2,0).$$

Для напівнеперервного знизу процесу ризику $P_-(s,y)=e^{\rho_-(s)y}$, $y<0$, тому

$$G(s,u,u_1,u_2)=G(s,u,u_1,u_2,0)=\frac{\rho_-(s)e^{-u_2u}}{\rho_-(s)-u_1+u_2}\times \tag{6.4}$$
$$\times\int_0^\infty\left[(\rho_-(s)+u_2)e^{-(\rho_-(s)+u_2)z}-u_1e^{-u_1z}\right]\Pi(u+z)dz,\quad u>0,$$

$\Pi(z)=\lambda\overline{F}(z)|$, $\overline{F}(z)=1-F(z)$, $z>0$; $-\rho_-(s)$ — від'ємний корінь рівняння Лундберга $k(-\rho_-(s))=s$. Після інтегрування частинами з (6.4) випливає, що

$$G(s,u,u_1,u_2)=\frac{\lambda\rho_-(s)e^{-u_2u}}{\rho_-(s)-u_1+u_2}\times \tag{6.5}$$
$$\times\int_0^\infty\left[e^{-u_1y}-e^{-(\rho_-(s)+u_2)y}\right]F'(u+y)dy.$$

Як і раніше позначимо $G_i(s,u,u_i)=G(s,u,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=0,\forall r\neq i,i=\overline{1,3}}$.

Має місце твердження

Лема 6.1. *Функція $G(s,u,u_1,u_2)$ допускає обернення по u_1, u_2, а функції $G_i(s,u,u_i)$ $(i=\overline{1,3})$ допускають обернення по u_i з похідною $F'(y)$ (існування якої або припускається, або $F'(y)$ вживається в сенсі Шварца)*

$$g(s,u,x,y)=\lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}F'(x+y)I\{y>u\},\quad x>0, \tag{6.6}$$
$$G_1(s,u,u_1)=\frac{\lambda\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u_1}\int_0^\infty\left(e^{-u_1y}-e^{-\rho_-(s)y}\right)dF(u+y),$$
$$g_1(s,u,x)=\lambda\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}dF(u+y); \tag{6.7}$$
$$G_2(s,u,u_2)=\lambda\rho_-(s)\int_0^\infty e^{-u_2(u+z)-\rho_-(s)z}\overline{F}(u+z)dz,$$

$$g_2(s,u,y) = \lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}\overline{F}(y)I\{y>u\}; \tag{6.8}$$

$$G_3(s,u,u_3) = \lambda\int_u^\infty e^{-u_3 z}dF(z) - \lambda e^{\rho_-(s)u}\int_u^\infty e^{-u_3 z}e^{-\rho_-(s)z}F'(z)dz,$$

$$g_3(s,u,z) = \lambda F'(z)\big[1-e^{\rho_-(s)(u-z)}\big]I\{z>u\}. \tag{6.9}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \mu\lambda - C < 0$, *тоді існують похідні при* $s\to 0$

$$g'(0,u,x,y) = \frac{\lambda}{|m|}F'(x+y)I\left\{y>u\right\}, \quad x>0;$$

$$g_1'(0,u,x) = \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(u+x), \quad x>0;$$

$$g_2'(0,u,y) = \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)I\{y>u\};$$

$$g_3'(0,u,z) = \frac{\lambda}{|m|}F'(z)(z-u)I\{z>u\}. \tag{6.10}$$

Доведення. Легко перевірити, що згортка

$$J(s,u,x,u_2) =$$
$$= \lambda\rho_-(s)e^{-u_2 u}\int_x^\infty e^{(\rho_-(s)+u_2)(x-y)}F'(u+y)dy, \quad x>0,$$

є оберненням $G(s,u,u_1,u_2)$ по u_1, яка після заміни змінних $z = y + u + x$ має вигляд

$$J(s,u,x,u_2) = \lambda\rho_-(s)\int_u^\infty e^{-u_2 z}e^{\rho_-(s)(u-z)}F'(x+z)dz$$

зручний для обернення по u_2, в результаті чого встановлюється (6.6). Аналогічно обертаються по u_i функції $G_i(s,u,u_i)$ $(i=\overline{1,3})$ і встановлюються співвідношення (6.7)–(6.9). Якщо $m<0$, тоді $s^{-1}\rho_-(s)\to(|m|)^{-1}$ при $s\to 0$, тому після диференціювання по s $(s=0)$ встановлюються співвідношення (6.10) для похідних $g_k'(0,u,x_k)$. □

Теорема 6.1. *Для неперервного знизу процесу ризику генератриси* $V(s,u,u_1,u_2,u_3)$ *та* $\widetilde{\varphi}_s(u,u_1,u_2)$ *визначаються співвідношеннями*

$$sV(s,u,u_1,u_2,u_3) = p_+(s)G(s,u,u_1,u_2,u_3) +$$
$$+ \int_{0+}^u G(s,u-y,u_1,u_2,u_3)P_+'(s,y)dy,$$

$$
\begin{aligned}
s\widetilde{\varphi}_s(u,u_1,u_2) &= p_+(s)G(s,u,u_1,u_2) + \\
&\quad + \int_{0+}^{u} G(s,u-y,u_1,u_2)P'_+(s,y)dy. \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

Якщо $m<0$, тоді генератриса щільності багатозначної (складної) функції банкрутства має вигляд

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}_0(u,u_1,u_2) = \lim_{s\to 0}\widetilde{\varphi}_s(u,u_1,u_2) = \\
&= \mathbf{E}\big[e^{-u_1\gamma^+(u)-u_2\gamma_+(u)}, \tau^+(u)<\infty\big] = \\
&= p_+G'(0,u,u_1,u_2) + \int_{0+}^{u} G'(0,u-y,u_1,u_2)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+<y\right\}, \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

де $p_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+=0\}$, $\zeta^+ = \sup\limits_{0\le t<\infty}\zeta(t)$,

$$
\begin{aligned}
G'(0,u,u_1,u_2) &= \lambda|m|^{-1}e^{-u_2u}(u_2-u_1)^{-1}\times \\
&\quad\times\int_0^{\infty}\left[u_2e^{-u_2z}-u_1e^{-u_1z}\right]\overline{F}(u+z)dz.
\end{aligned}
$$

Після обернення другого співвідношення в (6.11) *та* (6.12) *по* u_1 *та* u_2 *визначаютьcя щільності* (*в диференціалах*) *складної функції банкрутства* (*при* $s>0$ *та* $s\to 0$)

$$
\begin{aligned}
&s\varphi_s(u,dx,dy) = \\
&= \left[p_+(s)g(s,u,x,y) + \int_{0+}^{u} g(s,u-z,x,y)dP_+(s,z)\right]dxdy, \\
&\varphi_0(u,dx,dy) = \qquad (6.13) \\
&= \left[p_+g'(0,u,x,y) + \int_{0+}^{u} g'(0,u-z,x,y)dP\left\{\zeta^+<z\right\}\right]dxdy.
\end{aligned}
$$

Для маргінальних щільностей розподілу пар $\{\gamma_i(x),\zeta^+(\theta_s)\}$

$$
\Phi_s^{(i)}(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\gamma_i(u)<x,\zeta^+(\theta_s)>u\right\},\quad x\ne u,\quad i=\overline{1,3},
$$

справедливі співвідношення

$$
\begin{aligned}
s\Phi_s^{(i)}(u,x) &= p_+(s)g_i(s,u,x) + \int_{0+}^{u} g_i(s,u-z,x)dP_+(s,z), \\
\Phi_0^{(i)}(u,x) &= p_+g'_i(0,u,x) + \int_{0+}^{u} g'_i(0,u-z,x)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+<z\right\}. \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

Доведення. Співвідношення (6.11) випливають із (6.3), оскільки $p_+(s) > 0$. При $m < 0$ із (6.11) при $s \to 0$ випливає (6.12). Після обернення (6.12) одержуємо (6.13). Аналогічно встановлюються співвідношення (6.14) для маргінальних щільностей. □

Наслідок 6.1. *Для надлишкового процесу ризику $\zeta(t)$ з лінійною функцією премій $c(t) = ct$ і початковим капіталом $u > 0$ щільності (догранична при $s > 0$ та гранична при $s \to 0$) складної функції банкрутства визначається при $y > 0$ ($y \neq u$) співвідношеннями*

$$s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\displaystyle\int_0^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z), \quad y > u, \\ \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\displaystyle\int_{u-y}^u e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z), \quad 0 < y < u. \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) < y\right\} = \tag{6.15}$$
$$= \begin{cases} \lambda|m|^{-1}F'(x+y)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, \quad y > u, \quad m = \lambda\mu - c < 0, \\ \lambda|m|^{-1}F'(x+y)\mathbf{P}\left\{u - y < \zeta^+ < u\right\}, \quad 0 < y < u. \end{cases}$$

Для щільності розподілу жорсткості банкрутства справедливі співвідношення при $s > 0$ та $s \to 0$ ($x > 0$)

$$s\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) < x\right\} =$$
$$= \lambda c^{-1}s\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}dF(u+y) +$$
$$+ \lambda\rho_-(s)\int_0^u\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}dF(u+y-z)dP_+(s,z),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) < x\right\} = \tag{6.16}$$
$$= \frac{\lambda}{c}\overline{F}(u+x) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{F}(u+x-z)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < z\right\}, \quad m < 0.$$

Щільність розподілу надлишку перед настанням банкрутства $\gamma_+(u)$ визначається співвідношеннями при $y \neq u$ (дограничним при $s > 0$

та граничним при $s \to 0$)

$$s\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\displaystyle\int_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z), \quad y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\displaystyle\int_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z), \quad 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda|m|^{-1}\overline{F}(y)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, \quad y > u, \quad m < 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)\mathbf{P}\left\{u - y < \zeta^+ < y\right\}, \quad 0 < y < u. \end{cases} \tag{6.17}$$

Розподіл вимоги γ_u^+, *що спричинила банкрутство, визначається співвідношеннями* $z \neq u$

$$s\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_u^+ < z\right\} =$$
$$= p_+(s)g_3(s,u,z) + \int_{0+}^{u} g_3(s,u-y,z)dP_+(s,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}\left\{\gamma_u^+ < z, \zeta^+ > u\right\} =$$
$$= \frac{\lambda}{|m|}F'(z)\int_0^u (z-u+y)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < y\}I\{z > u\} +$$
$$+ \frac{\lambda F'(z)}{|m|}\int_0^z (z-v)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < u - v\}I\{0 < z < u\}.$$

При $s \to 0$ *визначається спільний розподіл* $\{\gamma_u^+, \zeta^+\}$

$$\mathbf{P}\left\{\gamma_u^+ > z_0, \zeta^+ > u\right\} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int_{z_0}^{\infty}\left[\int_0^u yd\mathbf{P}\{\zeta^+ < y\} + (z-u)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}\right]dF(z), \\ \quad z_0 > u, \quad m < 0, \\ \dfrac{\lambda}{m}[\overline{F}(u)\displaystyle\int_0^u yd\mathbf{P}\{\zeta^+ < y\} + \mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}\overline{\overline{F}}(u)] + \\ \quad + \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int_{z_0}^{u}\int_0^z (z-v)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < u - v\}dF(z), \quad 0 < z_0 < u. \end{cases} \tag{6.18}$$

Із одержаного співвідношення (6.15) для щільності складної функції банкрутства випливає ще один важливий

Наслідок 6.2. *Інтегруванням* (6.15) *по* $x \in [x_0, \infty)$ *встановлюються співвідношення* ($y \neq u$)

$$s\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) > x_0, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x_0+y)\displaystyle\int_0^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x_0+y)\displaystyle\int_{u-y}^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,y), & 0 < y < u; \end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) > x_0, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x_0+y)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u,\ m < 0,\ x_0 > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x_0+y)\mathbf{P}\left\{u-y < \zeta^+ < u\right\}, & 0 < y < u; \end{cases}$$
$$\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) > x_0, \gamma_+(u) > y_0\right\} = \phi(u, x_0, y_0) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{\overline{F}}(x_0+y_0)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, & y_0 > u,\ m < 0,\ x_0 > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{\overline{F}}(x_0+u)\mathbf{P}\{\zeta^+ < u\} + \\ \quad + \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int_{y_0}^u \overline{F}(x_0+y)\mathbf{P}\left\{u-y < \zeta^+ < u\right\}dy, & 0 < y_0 < u; \end{cases} \tag{6.19}$$
$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < z\},$$
$$\mathbf{P}\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) > x_0\} = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u+x_0) +$$
$$+ \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{\overline{F}}(u+x_0-z)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < z\}, \overline{\overline{F}}(u) = \int_u^\infty \overline{F}(x)dx.$$

Згідно з (2.58) *та* (3.151) *при* $u = 0$, $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > x\} = \frac{\lambda}{C}\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\overline{F}(y)dy,$$

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_+(0) > x\} = \frac{\lambda}{C} \int_x^\infty e^{-\rho_-(s)(y)} \overline{F}(y) dy,$$
$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0, \gamma_0^+ > x\} = \frac{\lambda}{C\rho_-(s)} \int_x^\infty (1 - e^{-\rho_-(s)y} dF(y).$$

Доведення. Доведення наслідків випливає із співвідношень теореми 6.1, після підстановки значень функцій $G(s,u,u_1,u_2)$, $G_i(s,u,u_i)$ $(i = \overline{1,3})$ та їх обернень $g(s,u,u_i)$ по u_i, а також значень похідних по s при $s = 0$. При доведенні (6.15) слід врахувати двоїстість зображення згортки

$$\int_0^u g(s, u-z, \ldots) dP_+(s,z) = \int_0^u \cdots I\{z > u-y\} dP_+(s,z) =$$
$$= \int_0^u \cdots dP_+(s,z) I_{y>u} + \int_{u-y}^y \cdots dP_+(s,z) I_{0<y<u}.$$

В результаті інтегрування (6.15) по $x \in [x_0, \infty)$ та $y \in [y_0, \infty)$ виводяться співвідношення (6.19). Останнє співвідношення в (6.18) одержується з другого інтегруванням по $z \in [z_0, \infty)$. Зауважимо, що останнє співвідношення в (6.19), одержане з попереднього інтегруванням по $y \in [y_0, \infty)$, визначає багатозмінну функцію банкрутства $\phi(u, x_0, y_0)$. Так само після інтегрування по $x \in [0, \infty)$ та $x \in [x_0, \infty)$ одержимо співвідношення для $\phi(u, 0, 0)$ та $\phi(u, x_0, 0)$ відповідно. $\square$

З останнього наслідку випливає

Наслідок 6.3. *Маргінальні функції банкрутства визначаються із* $\phi(u, x_0, y_0)$ *при* $x_0 = 0$ $(y_0 = 0)$

$$\phi(u, 0, y_0) = \mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma_+(u) > y_0\right\} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|} P_+(u) \overline{\overline{F}}(y_0), \quad y_0 > u, \quad P_+(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, \\ \dfrac{\lambda}{|m|} P_+(u) \overline{\overline{F}}(u) + \dfrac{\lambda}{|m|} \displaystyle\int_{y_0}^u \overline{F}(y)(P_+(u) - P_+(u-y)) dy, \\ \qquad 0 < y_0 < u, \end{cases} \tag{6.20}$$
$$\phi(u, x_0, 0) = \frac{\lambda}{|m|} \left[\overline{\overline{F}}(u) P_+(u) + \int_0^u \overline{F}(x_0 + y)(P_+(u) - P_+(u-y)) dy \right].$$

Оскільки $\int_0^u P_+(u)\overline{F}(y)dy = [\overline{\overline{F}}(0) - \overline{\overline{F}}(u)]P_+(u)$, то при $y_0 \to 0$ інтегруванням частинами встановлюється, що

$$\begin{aligned}
&P\{\gamma_+(u) > 0, \zeta^+ > u\} = \\
&\quad = \frac{\lambda}{|m|}\left[\overline{\overline{F}}(0)P_+(u) + \int_0^u P_+(u-y)d\overline{\overline{F}}(y)\right] = \\
&\quad = \frac{\lambda}{|m|}\left[p_+\overline{\overline{F}}(u) + \int_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)dP_+(z)\right] = \overline{P}_+(u).
\end{aligned}$$

Перш ніж вивчати розподіли функціоналів, пов'язаних з поведінкою процесу $\zeta(t)$ при $t > \tau^+(u)$ доведемо допоміжне твердження для процесу $\zeta_v(t) = v + \zeta(t)$, $(\zeta_0(t) = \zeta(t),\ v, t \geq 0)$ та його максимуму

$$\zeta_v^+(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} \zeta_v(t), \quad \zeta_v^+(\theta_s) = \sup_{0 \leq t' \leq \theta_s} \zeta_v(t').$$

Введемо позначення генератрис для $\zeta_v^+(\theta_s)$ та для пари $\{\tau^+(v), \gamma^+(v)\}$

$$\begin{aligned}
&\Phi(s, v, z) = \mathbf{E}e^{-z\zeta_v^+(\theta_s)}, \\
&T(s, v, z) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(v) - z\gamma^+(v)}, \tau^+(v) < \infty\big].
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Лема 6.2. *Генератриса* $\Phi(s, v, z)$ *визначається співвідношеннями*

$$\Phi(s, v, z) = \Phi(s, 0, z)e^{-zv}, \quad v \geq 0, \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi(s, 0, z) = p_+(s)\left[1 - T(s, 0, z)\right]^{-1}, \\
&p_+(s) = \mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) = 0\right\} > 0.
\end{aligned}$$

При $v = 0$ *з* (6.22) *випливає співвідношення, яке ми назвемо дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина*

$$\begin{aligned}
&\Phi(s, 0, z) = \mathbf{E}e^{-z\zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)g_s(z)} \underset{s \to 0}{\to} \\
&\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ g_0(z)} \quad \textit{для } m > 0, \quad q_+ = \frac{\lambda\mu}{C}, \\
&g_s(z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)} | \zeta^+(\theta_s) > 0\right] = \frac{G_1(s, 0, z)}{G_1(s, 0, 0)} = \\
&\quad = \frac{\rho_-(s) - z\widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))}{\rho_-(s) - z} \underset{s \to 0}{\to} \widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(0) \quad \textit{при } m < 0.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Отже, якщо $m<0$, тоді при $s\to 0$ $\Phi(s,0,z)$ зводиться до звичайної формули Полячека–Хінчина для класичного процесу ризику з

$$g_0(z)=\lim_{s\to 0}g_s(z)=\widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(0),\quad \widetilde{\Pi}(z)=\lambda\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx.$$

Доведення. Має місце стохастичне співвідношення

$$\zeta_v^+(t)\doteq\begin{cases}v, & t<\tau^+(0),\\ v+\zeta^+_{\gamma^+(0)}(t-\tau^+(0)), & t\ge\tau^+(0),\end{cases}$$

з якого випливає інтегральне співвідношення

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}e^{-z\zeta_v^+(t)}=e^{-zv}\mathbf{P}\left\{\tau^+(v)>t\right\}+\\ &\quad+e^{-zv}\int_0^t\int_0^\infty\mathbf{E}\big[e^{-z\zeta_y^+(t-x)},\tau^+(0)\in dx,\gamma^+(0)\in dy\big].\end{aligned}$$

При довільному фіксованому $y>0$ процес $\zeta_y(t)$ для $t\ge\tau^+(0)$ і його максимум не залежать від $\tau^+(0)<t$, тому з одержаного інтегрального співвідношення після перетворення Лапласа–Карсона по t випливає інтегральне рівняння для $\Phi(s,v,z)$

$$\begin{aligned}&\Phi(s,v,z)=e^{-zv}\left(1-T(s,0,0)\right)+\\ &\quad+e^{-zv}\int_0^\infty\Phi(s,y,z)\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)},\gamma^+(0)\in dy\big].\end{aligned}\tag{6.24}$$

Якщо позначити

$$\Phi_*(s,z)=\int_0^\infty\Phi(s,y,z)\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)},\gamma^+(0)\in dy\big],$$

то після усереднення (6.24) по $\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)},\gamma^+(0)\in dv\big]$ одержимо рівняння для визначення $\Phi_*(s,z)$

$$\Phi_*(s,z)=T(s,0,z)\left(1-T(s,0,0)\right)+\Phi_*(s,z)T(s,0,z).$$

Враховуючи, що $T(s,0,0)=\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s)>0\right\}=q_+(s),p_+(s)=1-q_+(s)$, знаходимо значення $\Phi_*(s,z)=p_+(s)\frac{T(s,0,z)}{1-T(s,0,z)}$, після підстановки якого в (6.22) одержимо співвідношення

$$\Phi(s,v,z)=\frac{p_+(s)e^{-zv}}{1-T(s,0,z)},\quad T(s,0,z)=\mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)},\zeta^+(\theta_s)>0\big],$$

з якого при $v=0$ випливає (6.23). □

Після банкрутства надлишковий процес ризику в дечому нагадує процес чекання $\zeta^*(t)$ з випадковим стартовим значенням $v = \gamma^+(u)$. При цьому слід врахувати, що $\gamma^+(u)$ визначається на події

$$\{\omega : \zeta^+(t) > u\} = \{\omega : \tau^+(u) < t\}.$$

Тому для досліджуваного процесу $\zeta^*(t) = \zeta_{\gamma^+(u)}(t)$ будемо розглядати спільні розподіли пар $\{\zeta^+_{\gamma^+(u)}(t), \tau^+(u)\}$, $\{\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s), \zeta^+(\theta_s) > u\}$ або відповідну генератрису

$$\Phi^*(s,u,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \zeta^+(\theta_s) > u\big] = \\ = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u) - z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \tau^+(u) < \infty\big], \tag{6.25}$$

для якої має місце твердження

Теорема 6.2. *Генератриса $\Phi^*(s,u,z)$ визначається співвідношенням*

$$\Phi^*(s,u,z) = \Phi(s,0,z)T(s,u,z), \tag{6.26}$$

де генератриса $T(s,u,z)$ та відповідна щільність визначаються співвідношеннями

$$sT(s,u,z) = p_+(s)G_1(s,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1(s,u-y,z)\frac{\partial}{\partial y}P_+(s,y)dy,$$

$$s\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\gamma^+(u) < x, \zeta^+(\theta_s) > u\right\} = \\ = p_+(s)g_1(s,u,x) + \int_{0+}^{x} g_1(s,u-y,x)\frac{\partial}{\partial y}P_+(s,y)dy, \tag{6.27}$$

а функції $G_1(s,u,z)$ та $g_1(s,u,x)$ наводяться в (6.7).

Якщо $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \lambda\mu - C < 0$ ($\mu = \mathbf{E}\xi_1$), тоді генератриса тотального максимуму дефіциту $Z^+(u) = u + \zeta^+_*$ визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}\big[e^{-zZ^+(u)}, \zeta^+ > u\big] = e^{-uz}\Phi(0,0,z)T_0(u,z), \tag{6.28}$$

$$\Phi(0,0,z) = \frac{p_+}{1 - T_0(0,z)},$$

а генератриси $T(s,u,z)$ (див. (6.21) при $s = 0$, $u \geq 0$)

$$T_0(u,z) = T(0,u,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(u)}, \zeta^+ > u\big],$$

$$T_0(0,z)=T(0,0,z)=\mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)},\zeta^+>0\big]$$

визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&T_0(u,z)=p_+G_1'(0,u,z)+\int_{0+}^{u}G_1'(0,u-y,z)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+<y\right\},\\
&G_1'(0,u,z)=\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(u+y)dy,\quad m<0, \qquad\qquad (6.29)\\
&T_0(0,z)=\frac{p_+\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(y)dy=\frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(y)dy\\
&\left(p_+=\frac{|m|}{C},\ \ q_+=\frac{\lambda\mu}{C},\ \ T(s,u,z)=V(s,u,z)\right).
\end{aligned}$$

Доведення. Після усереднення по $\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)},\gamma^+(u)\in dv\big]$ з (6.21) випливає співвідношення (6.26). Перше співвідношення в (6.27) легко обернути по z і одержати дограничну ($s>0$) щільність жорсткості банкрутства (див. другу формулу в (6.27) еквівалентну (6.16)). Якщо $m<0$, тоді із (6.26) та (6.27) при $s\to 0$ випливають співвідношення (6.28), (6.29). Слід відмітити, що при $m<0$ перше співвідношення в (6.29) також легко обертається по z, в результаті обернення встановлюється співвідношення для граничної ($s\to 0$) щільності жорсткості банкрутства (див. (6.27)). □

Перш ніж розглядати "червоний період" $T'(u)$ та число вимог за цей період відмітимо їх подібність відповідно до періоду зайнятості $\widetilde{\theta}_1$ та числа вимог $n(\widetilde{\theta}_1)$ у теорії СМО. Останні є простішими хоча б тому, що вони не залежать від параметра u. Функціонал $T'(u)$ можна інтерпретувати як момент першого досягнення нуля процесом $\zeta^+_{\gamma^+(u)}(t)$ (див. графік 8 в кінці монографії), або момент першого досягнення рівня $x=-\gamma^+(u)$ процесом $\zeta(t)$. На підставі співвідношення $T'(u)\doteq\tau^-(-\gamma^+(u))$ встановлюється твердження

Теорема 6.3. *Якщо $m<0$, тоді генератриса тривалості "червоного періоду" $T'(u)$ визначається співвідношенням при $u\geq 0$*

$$\begin{aligned}
g_u(s)=:\mathbf{E}\big[e^{-sT'(u)},T'(u)<\infty\big]=\frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s)}\overline{F}(u+v)dv+\\
+\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s)}\int_{0+}^{u}\overline{F}(u+v-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+<y\right\}dv, \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

$g_u(s) = T_0(u, \rho_-(s))$ — *виправлена формула dos Reis'a.*

Якщо $s \to 0$, *тоді*

$$\mathbf{P}\left\{T'(u) < \infty\right\} = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}\overline{\overline{F}}(u-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}. \quad (6.31)$$

Щільність розподілу $T'(u)$ *(у диференціалах) має вигляд*

$$\mathbf{P}\left\{T'(u) \in dt\right\} = \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty \overline{F}(u+v)\mathbf{P}\left\{\tau^-(-v) \in dt\right\}dv + \quad (6.32)$$

$$+\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-v) \in dt\right\}\int_{0+}^{u}\overline{F}(u+v-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}dv.$$

Доведення. Процес $\zeta(t)$ напівнеперервний знизу, тому при $v > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\tau^-(-v) \in dt\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(-v)}, \tau^-(-v) < \infty\right] = e^{-v\rho_-(s)}. \quad (6.33)$$

Після усереднення (6.31) по граничній щільності в (6.27) при $m < 0$ встановлюється співвідношення (6.30), з якого при $s \to 0$ випливає (6.31). На підставі (6.33) генератрису (6.30) легко обернути по s і одержати щільність (6.32). □

Для визначення генератриси числа вимог за період $T'(u)$ $N^*(u) = n(T'(u))$ використаємо просту формулу для числа вимог $n(t) = \nu(t)$ на інтервалі $[0, t]$

$$n_t(z) = \mathbf{E}z^{n(t)} = e^{-t\lambda(1-z)}, \quad 0 < z < 1, \quad t > 0, \quad (6.34)$$

і позначимо шукану генератрису

$$n^*(u, z) = \mathbf{E}\left[z^{N^*(u)}, T'(u) < \infty\right].$$

Теорема 6.4. *Якщо* $m < 0$ $\left(\frac{p_+}{|m|} = C^{-1}\right)$, *тоді генератриса* $n^*(u, z)$ *визначається співвідношенням*

$$n^*(u, z) = \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)}\overline{F}(u+v)dv + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)} \times$$

$$\times \int_{0+}^{u}\overline{F}(u+v-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}dv = g_+(u, \rho_-(s_z)), \quad (6.35)$$

$$n^*(0,z) = \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)}\overline{F}(v)dv = g_+(0,\rho_-(s_z)), \quad s_z = \lambda(1-z).$$

При $z \to 1$ *має місце співвідношення* (*подібне до* (6.31) *при* $s \to 0$)

$$\mathbf{P}\left\{T'(u) < \infty\right\} = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^u \overline{\overline{F}}(u-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}, \quad (6.36)$$

оскільки $m = \lambda\mu - c < 0$, $\rho_-(s_z) \underset{z\to 1}{\to} 0$ *то при* $u = 0$ $\mathbf{P}\left\{T'(0) < \infty\right\} = \frac{\lambda\mu}{C} < 1$. *Аналогічно генератриса числа вимог до банкрутства* $n(\tau^+(u))$ *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{E}[z^{n(\tau^+(u))}, \tau^+(u) < \infty] = \mathbf{E}[e^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty] = \overline{P}_+(s_z, u),$$
$$s_z = \lambda(1-z), \quad (6.37)$$

де згідно з (3.39) *та* (3.150)

$$\overline{P}_+(s,u) = \frac{1}{\rho_-(s)}P'_u(s,u) + \mathbf{P}\{\zeta(\theta_s) > u\},$$
$$\mathbf{E}[z^{n(\tau^+(0))}, \tau^+(0) < \infty] =$$
$$= \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_{s_z}) > 0\} = \frac{1}{C}\int_0^\infty e^{-\rho_-(s_z)y}\overline{F}(y)dy.$$

Доведення. Після усереднення (6.33) за щільністю (6.32) одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} n^*(u,z) &= \int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)}\mathbf{P}\left\{T'(u) \in dt\right\} = \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-v) \in dt\right\} e^{-t\lambda(1-z)}\overline{F}(u+v)dv + \\ &\quad + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty \underbrace{\int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)}\mathbf{P}\left\{\tau^-(-v) \in dt\right\}} \times \\ &\quad \times \int_0^u \overline{F}(u+v-y)d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}dv, \end{aligned}$$

в якому підкреслений інтеграл згідно (6.33) збігається з експонентою $e^{-v\rho_-(s_z)}|_{s_z=\lambda(1-z)}$ ($s_z \to 0$ при $z \to 1$). Тому з останнього співвідношення для $n^*(u,z)$ випливає (6.35), з якого при $u = 0$ визначається генератриса $n^*(0,z)$. З (6.32) при $z \to 1$ випливає співвідношення (6.36), що збігається з (6.31) при $s \to 0$. Співвідношення для генератриси $n(\tau^+(u))$ одержується усередненням генератриси $n(t) = \nu(t)$

за розподілом $\tau^+(u)$

$$\int_0^\infty e^{\lambda t(z-1)} d\mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\} =$$
$$= \mathbf{E}\big[e^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] = \overline{P}_+(s_z, u), \quad s_z = \lambda(1-z).$$

Якщо вимоги ξ_k мають показниковий розподіл, тоді

$$\zeta(t) = \sum_{k\le\nu(t)} \xi_k - Ct, \quad \Pi(x) = \lambda\overline{F}(x) = \lambda e^{-bx}, \quad x > 0, \quad b > 0,$$
$$\overline{P}_+(s, y) = \mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > y\right\} = q_+(s)e^{-\rho_+(s)y}, \quad y > 0,$$
$$\rho_+(s) = bp_+(s), \quad cp_+(s)\rho_-(s) = s,$$

співвідношення для $G(s, u, u_1, u_2)$ та $G_i(s, u, u_i)$ $(i = \overline{1, 3})$ спрощуються, і їх обернення по u_i мають вигляд

$$g(s, u, x, y) = \lambda b\rho_-(s)e^{-\rho_-(s)(y-u)-b(x+y)}I\{y > u\},$$
$$g_1(s, u, x) = \frac{\lambda b\rho_-(s)}{b + \rho_-(s)}e^{-b(x+u)},$$
$$g_2(s, u, y) = \lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)-by}I\{y > u\},$$
$$g_3(s, u, z) = \lambda b e^{-bz}\big[1 - e^{\rho_-(s)(u-z)}\big]I\{z > u\},$$

а їх похідні по s при $s = 0$ спрощуються (див. (6.10))

$$g'(0, u, x, y) = \frac{\lambda b}{|m|}e^{-b(u+x)}I\{y > u\};$$
$$g_1'(0, u, x) = \frac{\lambda}{|m|}e^{-b(u+x)}, \quad m < 0;$$
$$g_2'(0, u, y) = \frac{\lambda}{|m|}e^{-by}I\{y > u\};$$
$$g_3'(0, u, z) = \frac{\lambda b}{|m|}e^{-bz}(z - u)I\{z > u\}. \qquad \Box$$

Результати теорем 6.3 та 6.4 спрощуються, якщо врахувати, що

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\} = q_+\rho_+e^{-\rho_+ y}, \quad \rho_+ = bp_+, \quad y > 0, \quad m < 0.$$

6.2 Поведінка процесів ризику з випадковими преміями після банкрутства та багатозначна функція банкрутства

В § 6.1 вивчались питання про багатозначну функцію банкрутства та про поведінку класичного процесу ризику з лінійною функцією премій після банкрутства. В § 6.2 розглядаються такі ж питання для надлишкового східчастого процесу ризику з довільно розподіленими вимогами $\{\xi'_k\}_{k\geq 1}$ та з випадковими преміями $\{\xi''_k\}_{k\geq 1}$ (див. [58,181]).

Слід відзначити, що для процесу ризику з випадковими преміями ризикові характеристики як і для класичного процесу ризику описуються розподілами або генератрисами відповідних граничних функціоналів, позначення яких подібні до позначень в § 6.1.

Розглянемо надлишковий процес ризику з вимогами $\{\xi'_k\}_{k\geq 1}$ та преміями $\{\xi''_k\}_{k\geq 1}$

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad S(t) = \sum_{k\leq \nu_1(t)} \xi'_k, \quad C(t) = \sum_{k\leq \nu_2(t)} \xi''_k, \tag{6.38}$$

$\nu_{1,2}(t)$ — незалежні пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$.

$$\mathbf{P}\{\xi'_k < x\} = F_1(x), \quad x > 0,$$
$$\mathbf{P}\{\xi''_k > x\} = e^{-bx}, \quad x > 0, \quad b > 0.$$

$\{\zeta(t), t \geq 0, \zeta(0) = 0\}$ можна розглядати як складний пуассонівський процес із сумарною інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ і стрибками ξ_k довільного знаку (зображення $\zeta(t)$ та його функціоналів див. на графіку 10 в кінці монографії)

$$\xi_k \doteq \begin{cases} -\xi''_k & \text{з імовірністю } q = \dfrac{\lambda_2}{\lambda}, \\ \xi'_k & \text{з імовірністю } p = 1 - q, \end{cases}$$
$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_k < x\} = qe^{bx}I\{x < 0\} + (q + pF_1(x))I\{x > 0\},$$
$$\mathbf{E}e^{r\zeta(t)} = e^{tk(r)}, \quad k(r) = \lambda\left[q\frac{r}{b+r} + p(\varphi_1(-r)) - 1\right],$$
$$\varphi_1(r) = \mathbf{E}e^{-r\xi'_1}. \tag{6.39}$$

Резервний процес ризику $\xi_u(t) = R_u(t) = u - \zeta(t)$ є аналогом класичного процесу ризику. $\xi_u(t) = u + C(t) - S(t)$ — майже напівнеперервний зверху східчастий процес, $\zeta(t)$ — майже напівнеперервний знизу (графіки $\xi_u(t)$, $\zeta(t)$ та їх функціоналів див. в кінці монографії).

Спочатку нагадаємо деякі результати для генератрис перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u), \gamma_u^+\}$ та пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ $(k = \overline{1,3})$, де $\gamma^+(u) = \gamma_1(u)$, $\gamma_+(u) = \gamma_2(u), \gamma_u^+ = \gamma_3(u)$, $\Phi_s^{(k)}(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_k(u), x\}$,

$$
\begin{aligned}
&V(s,u,u_1,u_2,u_3) = \mathbf{E}\Big[e^{-s\tau^+(u)-\sum\limits_{k=1}^{3} u_k\gamma_k(u)}, \tau^+(u) < \infty\Big] = \\
&\quad = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sum\limits_{k=1}^{3} u_k x_k} \Phi_s(u,x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3, \\
&\Phi_s(u,x,y,z) = \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z} \times \\
&\quad \times \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_1(u) < x, \gamma_2(u) < y, \gamma_3(u) < z\}, \\
&V_k(s,u,u_k) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)-u_k\gamma_k(u)}, \tau^+(u) < \infty\big], \quad k = \overline{1,3}.
\end{aligned}
$$

Згідно з результатами в § 3.3 для східчастих пуассонівських процесів основні функції $G(s,x,u_1,u_2,u_3)$ та $G_k(s,x,u_k)$, через які відповідно виражаються генератриси V та V_k дещо ускладнюються в порівнянні з подібними функціями для напівнеперервних пуассонівських процесів. Це пояснюється тим, що для східчастих процесів обидві атомарні ймовірності додатні

$$
p_\pm(s) = \mathbf{P}\left\{\zeta^\pm(\theta_s) = 0\right\} > 0, \quad p_+(s)p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda} > 0, \quad s > 0,
$$

де θ_s — показниково розподілена випадкова величина $\mathbf{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t \geq 0$. Для процесу (6.38) сам розподіл $\zeta^-(\theta_s)$ визначається від'ємним коренем рівняння Лундберга

$$
\begin{aligned}
&k(r_s) = s, r_s = -\rho_-(s) < 0, \quad s > 0, \\
&P_-(s,x) = \mathbf{P}\left\{\zeta^-(\theta_s) < x\right\} = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0, \\
&q_-(s) = 1 - p_-(s), \quad \rho_-(s) = bp_-(s).
\end{aligned}
$$

Тому у вище згаданих функцій G та G_k (які є згортками правих частин інтегральних рівнянь для V та V_k з розподілом $P_-(s,x)$) виникають нові атомарні доданки. Зокрема,

$$
G(s,x,u_1,u_2,u_3) = \int_{-\infty}^0 A_{x-y}(u_1,u_2,u_3)dP_-(s,y) =
$$

$$= p_-(s)A_x(u_1,u_2,u_3) + q_-(s)\int_{-\infty}^{-0} A_{x-y}(u_1,u_2,u_3)de^{\rho_-(s)y},$$

$$A_x(u_1,u_2,u_3) = \lambda\int_x^\infty e^{(u_1-u_2)x-(u_1+u_3)z}dF(z), \quad x>0.$$

Відповідні атомарні доданки виникають у

$$G(s,x,u_1,u_2) = G(s,x,u_1,u_2,0),$$
$$G_i(s,u,u_i) = G(s,u,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=0,\forall r\neq i, i=\overline{1,3}}.$$

Лема 6.3. *Функція $G(s,u,u_1,u_2)$ з відповідним атомарним доданком зводиться до вигляду*

$$G(s,u,u_1,u_2) = \lambda p_-(s)e^{-u_2u}\int_0^\infty e^{-u_1z}dF(u+z) + \tag{6.40}$$
$$+\frac{\lambda q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u_1+u_2}e^{-u_2u}\int_0^\infty\left[e^{-u_1y}-e^{-(\rho_-(s)+u_2)y}\right]\overline{F}(u+y)dy$$

і допускає обернення (з похідною $I'\{y<u\}\approx I\{y=u\}$ у сенсі Шварца)

$$g(s,u,x,y) = \lambda p_-(s)F'(u+x)I\{y=u\}+$$
$$+\lambda q_-(s)\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}F'(x+y)I\{y>u\}, \tag{6.41}$$

функції згортки $G_k(s,u,u_k)$ зводяться до вигляду

$$G_1(s,u,u_1) = \lambda p_-(s)\int_0^\infty e^{-u_1y}F'(u+y)dy+$$
$$\frac{\lambda q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u_1}\int_0^\infty\left[e^{-u_1y}-e^{-\rho_-(s)y}\right]dF(u+y), \tag{6.42}$$
$$G_2(s,u,u_2) = \lambda p_-(s)\left[e^{-u_2u}\overline{F}(u)+b\int_u^\infty e^{\rho_-(s)(u-y)-u_2y}\overline{F}(y)dy\right],$$
$$G_3(s,u,u_3) = \lambda\int_u^\infty e^{-u_3z}dF(z)-$$
$$-\lambda q_-(s)e^{\rho_-(s)u}\int_u^\infty e^{-(u_3+\rho_-(s))z}dF(z),$$

і допускають обернення по u_i, $i=\overline{1,3}$:

$$g_1(s,u,x) = \lambda p_-(s)F'(u+x)+$$

$$+ q_-(s)\lambda\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-z)}dF(u+z);$$

$$g_2(s,u,y) = \lambda p_-(s)\overline{F}(u)I'\{y<u\} +$$
$$+ q_-(s)\lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}\overline{F}(y)I\{y>u\}; \tag{6.43}$$
$$g_3(s,u,z) = \lambda F'(z)\big[1 - q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-z)}\big]I\{z>u\}.$$

Якщо $m = \mathbf{E}\,\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$ $(\mu = \mathbf{E}\xi_k')$, *тоді існують похідні при* $s \to 0$

$$g'(0,u,x,y) = \frac{\lambda}{b|m|}F'(x+u)I'\{y<u\} + \frac{\lambda}{|m|}F'(x+y)I\{y>u\};$$
$$g_1'(0,u,x) = \frac{\lambda}{b|m|}F'(u+x) + \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(u+x);$$
$$g_2'(0,u,y) = \frac{\lambda}{b|m|}\overline{F}(u)I'\{y<u\} + \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)I\{y>u\}; \tag{6.44}$$
$$g_3'(0,u,z) = \frac{\lambda}{|m|}F'(z)(b^{-1}+z-u)I\{z>u\}.$$

Доведення. Функція $G(s,u,u_1,u_2)$ в (6.40) з атомарним доданком обертається по $u_{1,2}$ так само як і аналогічна функція без атомарного доданку в § 5.5. Аналогічно обертаються функції $G_i(s,u,u_i)$ $(i=\overline{1,2})$ по u_i. Зображення для $G_3(s,u,u_3)$ випливає із співвідношення

$$G_3(s,u,u_3) = \int_{-\infty}^0 A_{x-y}(0,0,u_3)dP_-(s,y) =$$
$$= p_-(s)A_x(0,0,u_3) + q_-(s)\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0-}A_{x-y}(0,0,u_3)e^{\rho_-(s)y}dy$$

після спрощення доданку з подвійним інтегралом

$$\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0-}\int_{x-z}^\infty e^{-u_3y}dF(y)e^{\rho_-(s)z}dz =$$
$$= \int_x^\infty e^{-u_3y}dF(y)\int_{x-y}^0 \rho_-(s)e^{\rho_-(s)z}dz =$$
$$= \int_x^\infty e^{-u_3y}\big(1 - e^{\rho_-(s)(x-y)}\big)dF(y),$$

$G_3(s,u,u_3)$ так само легко обернути по u_3. Поява у співвідношеннях для обернень $g(s,u,x,y)$ та $g_2(s,u,y)$ доданка з індикатором $I\{y=u\}$

пояснюється тим, що при умові перетину процесом критичного рівня u (за допомогою першого стрибка) недострибок $\gamma_2(u) = \gamma_+(u) = u$ приймає фіксоване значення з додатною імовірністю. Тому у наступних твердженнях виникають співвідношення “атомарного” типу з індикатором $I\{y = u\}$. $\square$

Теорема 6.5. *Нехай $\zeta(t)$ майже напівнеперервний знизу процес ризику з випадковими преміями, тоді спільні генератриси $\{\tau^+(u), \gamma_i(u), i = \overline{1,3}\}$ визначаються співвідношеннями подібними до* (6.3), (6.11)

$$sV(s,u,u_1,u_2,u_3) = \int_0^u G(s,u-y,u_1,u_2,u_3)dP_+(s,y), \qquad (6.45)$$

де згортка $G(s,u,u_1,u_2,u_3)$ має атомарну складову

$$G(s,u,u_1,u_2,u_3) = p_-(s)A_u(u_1,u_2,u_3) + \\ + q_-(s)\rho_-(s)\int_{-\infty}^0 A_{u-y}(u_1,u_2,u_3)e^{\rho_-(s)y}dy.$$

За лемою 6.3 *функції $G(s,u,u_1,u_2)$ та $G_k(s,u,u_k)$ допускають обернення по u_k, $k = \overline{1,3}$. За допомогою обернення $g(s,u,x,y)$ (див.* (6.41)*) визначається щільність багатозначної функції банкрутства при $y \neq u$ та атомарне співвідношення при $y = u$*

$$s\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_1(u) < x, \gamma_2(u) < y\right\} = \qquad (6.46)$$
$$= \begin{cases} p_+(s)g(s,u,x,y), & y > u, \\ \displaystyle\int_{0+}^u g(s,u-z,x,y)dP_+(s,z), & 0 < y < u, \end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_1(u) < x, \gamma_2(u) = y\right\} I\{y = u\} = \frac{\lambda p}{s+\lambda}F_1'(u+x).$$

Через $g_k(s,u,x_k)$ (див. (6.43)*) визначаються маргінальні щільності функції банкрутства*

$$\Phi_s^{(k)}(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\gamma_k(u) < x, \zeta^+(\theta_s) > u\right\} = \qquad (6.47)$$
$$= p_+(s)g_k(s,u,x) + \int_{0+}^u g_k(s,u-z,x)dP_+(s,z), \quad k = \overline{1,3}.$$

При цьому для $\gamma_2(u)=\gamma_+(u)$ виконуються атомарні співвідношення

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_2(u) = u\right\} = \frac{\lambda p}{s+\lambda} F_1(u), \tag{6.48}$$

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma_2(u) = u\right\} = pF_1(u), \quad m < 0.$$

Доведення. Доведення теореми грунтується на обернені відповідних співвідношень для $V(s, u, u_1, u_2) = V(s, u, u_1, u_2, 0)$ та $V_k(s, u, u_k)$, що випливають з (6.45). Наявність індикаторної складової з $I\{y = u\}$ у $g(s, u, x, y)$ та $g_2(s, u, y)$ обумовлює появу додаткових атомарних співвідношень для пар $\{\zeta^+(\theta_s), \gamma_2(u)\}$ та $\{\zeta^+, \gamma_2(u)\}$ при $m < 0$. □

Наслідок 6.4. *Для східчастого надлишкового процесу ризику (див. (6.38)) щільність складної багатозначної функції банкрутства визначається двоїстим співвідношенням при $y \neq u$ та атомарним при $y = u$, $x > 0$,*

$$s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) < y\right\} = s\Phi_s(u, x, y) =$$
$$= \begin{cases} \lambda q_-(s)\rho_-(s)F'(x+y)\displaystyle\int_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)} dP_+(s, z), \quad y > u, \\ \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\left[q_-(s)\displaystyle\int_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)} dP_+(s, z) + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{b}P'_+(s, u-y)\right], \quad 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) = y\right\} I\{y = u\} = \tag{6.49}$$
$$= \frac{\lambda p}{s+\lambda}F'_1(u+x),$$

Якщо $m = \mathbf{E}\,\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$, тоді ($\overline{F}(u) = p\overline{F}_1(u), u > 0$)

$$\Phi_0(u, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}F'(x+y)P_+(u), y > u, P_+(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ < u\}, \ y > u, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}F'(x+y)\left[\mathbf{P}\left\{u - y < \zeta^+ < u\right\} + \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}P_+(u-y)\right], \\ \quad 0 < y < u; \end{cases} \tag{6.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) < x, \gamma_+(u) = y\right\} = pF_1'(u+x), \quad y = u.$$

Інтегруванням (6.46) *по* x *встановлюються співвідношення*

$$s\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) > x, \gamma_+(u) < y\right\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda q_-(s)\rho_-(s)\overline{F}(x+y)\displaystyle\int_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z), \quad y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x+y)\left[q_-(s)\displaystyle\int_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z) + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{b}P_+'(s,u-y)\right], \quad 0 < y < u; \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) > x, \gamma_+(u) = u\right\} =$$
$$= \frac{\lambda p}{s+\lambda}\overline{F}_1(u+x), \quad y = u,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) > x, \gamma_+(u) < y\right\} = \tag{6.51}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x+y)P_+(u), \quad y > u; \quad \overline{F}(x) = p\overline{F}_1(x), \quad x > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x+y)\left[\mathbf{P}\left\{u-y < \zeta^+ < u\right\} + \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}P_+(u-y)\right], \\ 0 < y < u, \quad m < 0. \end{cases}$$

Щільність розподілу першої маргінальної функції банкрутства визначається співвідношенням (при $s > 0$ *та при* $s \to 0$ *для* $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, $p_-'(0) = (b|m|)^{-1}$, $p_+(s) \to p_+ = b|m|\lambda^{-1}$)

$$\Phi_s^{(1)}(u,x) =: \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma^+(u) < x\right\} =$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}F'(u+x) + \lambda q_-(s)\frac{b}{s+\lambda}\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-z)}F'(u+z)dz +$$
$$+ s^{-1}\lambda p_-(s)\left[\int_0^u F'(u-y+x)dP_+(s,y) + \right.$$
$$\left. + q_-(s)b\int_0^u\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-z)}F'(u-y+z)dzdP_+(s,y)\right],$$

$$\Phi_0^{(1)}(u,x)=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\zeta^+>u,\gamma^+(u)<x\right\}=F'_*(u+x)+ \tag{6.52}$$
$$+\lambda p'_-(0)\int_0^u F'_*(u-y+x)dP\{\zeta^+<y\},$$
$$F'_*(x)=F'(x)+b\overline{F}(x),\quad x>0.$$

Щільність другої маргінальної функції банкрутства при $y\neq u$ має вигляд (при $y=u$ див. (6.48))

$$\Phi_s^{(2)}(u,y)=:\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s)>u,\gamma_+(u)<y\right\}= \tag{6.53}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{s}q_-(s)\rho_-(s)\overline{F}(y)\displaystyle\int_{-0}^u e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z),\quad y>u,\\ \dfrac{\lambda}{s}\rho_-(s)\overline{F}(y)\Bigg[q_-(s)\displaystyle\int_{u-y}^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z)+\\ \qquad+\dfrac{1}{b}P'_+(s,u-y)\Bigg],\quad 0<y<u;\end{cases}$$

$$\Phi_0^{(2)}(u,y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)P_+(u),\quad y>u;\\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)\left[\mathbf{P}\left\{u-y<\zeta^+<u\right\}+\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}P_+(u-y)\right],\\ 0<y<u.\end{cases}$$

Щільність вимоги, що спричинила банкрутство, (при $s>0$ та $s=0$) має вигляд

$$\Phi_s^{(3)}(u,z)=\begin{cases}s^{-1}\lambda F'(z)\displaystyle\int_0^u\left[1-q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-z-y)}\right]dP_+(s,y),\\ z>u,\\ s^{-1}\lambda F'(z)\displaystyle\int_{u-z}^u\left[1-q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\right]dP_+(s,y),\\ 0<z<u;\end{cases} \tag{6.54}$$

$$\Phi_0^{(3)}(u,z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{|m|}F'(z)\displaystyle\int_0^u\left(z+y-u+\frac{1}{b}\right)dP_+(y),\quad z>u,\\ \dfrac{\lambda}{|m|}F'(z)\displaystyle\int_{-z}^0\left(z+y+\frac{1}{b}\right)dP_+(y+u),\quad 0<z<u.\end{cases}$$

Генератриси $\{\tau^+(0),\gamma_k(0)\}$ *визначаються співвідношеннями* $(k=\overline{1,3})$

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(0)},\gamma_k(0)>x,\tau^+(0)<\infty\big]=\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s)>0,\gamma_k(0)>x\}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(x)+bq_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{(x-y)\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy\right], & k=1,\\ \dfrac{b\lambda}{s+\lambda}q_-(s)\displaystyle\int_x^\infty e^{-y\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy, & k=2,\\ \dfrac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(x)+\dfrac{bq_-(s)}{\rho_-(s)}\displaystyle\int_x^\infty\big(1-e^{-\rho_-(s)y}\big)dF(y)\right], & k=3,\end{cases}\tag{6.55}$$

при $u\to 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s)>0\}=\frac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(0)+bq_-(s)\int_0^\infty e^{-y\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy\right].$$

Доведення. При доведенні (6.49) слід врахувати, що

$$\int_0^u I'\{y<u-z\}dP_+(s,z)=$$
$$=p_+(s)I\{y=u\}+\int_{+0}^u I'\{z<u-y\}dP_+(s,z)=$$
$$=p_+(s)I\{y=u\}+P'_+(s,u-y)I\{0<y<u\}.$$

Після підстановки $g(s,u,x,y)$ із (6.41) в (6.46) одержимо співвідношення (6.51) при $s>0$ та при $s\to 0$ $(m<0)$. З (6.51) легко одержати маргінальні функції банкрутства (6.52), (6.53) для $\gamma_{1,2}(u)$. Генератриса для $\{\tau^+(u),\gamma_3(u)\}$

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)-u_3\gamma_3(u)},\tau^+(u)<\infty\big]=$$
$$=p_+(s)G_3(s,u,u_3)+\int_{0+}^u G_3(s,u-y,u_3)dP_+(s,y)$$

допускає обернення по u_3 при $s>0$ та $s=0$

$$s\Phi_s^{(3)}(u,z)=p_+(s)g_3(s,u,z)+\int_{0+}^u g_3(s,u-y,z)dP_+(s,y),$$
$$\Phi_0^{(3)}(u,z)=p_+g'_3(0,u,z)+\int_{0+}^u g'_3(s,u-y,z)dP_+(s,y).$$

Після підстановки $g_3(s,u,z)$ та $g_3'(0,u,z)$ (див. (6.43)) з останніх співвідношень випливає (6.54). При цьому слід врахувати двоїстість зображення складової частини згортки g_3 з $dP_+(s,y)$

$$\int_0^u g_3(s,u-y,z)dP_+(s,y) = \int_0^u \cdots I\{y > u-z\}dP_+(s,y) =$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^u \cdots dP_+(s,y), & z > u, \\ \displaystyle\int_{u-z}^u \cdots dP_+(s,y), & 0 < z < u. \end{cases} \qquad \square$$

Наслідок 6.5. *Маргінальні функції банкрутства (при $s > 0$ і $s \to 0$ при $m < 0$) визначаються співвідношеннями*

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_k(u) > z_k\} = \int_{z_k}^\infty \Phi_s^{(k)}(u,z)dz, \quad k = \overline{1,3}, \tag{6.56}$$
$$\mathbf{P}\{\zeta^+ > u, \gamma_k(u) > z_k\} = \int_{z_k}^\infty \Phi_0^{(k)}(u,z)dz, \quad m < 0.$$

Зокрема згідно з (6.52) при $k = 1$ та $z_1 \to 0$ (і відповідно при $k = 1, 2$, $u \to 0$) знаходимо

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = \overline{F}_*(u) + \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^u \overline{F}_*(u-y)d\mathbf{P}\{\zeta^+ < y\},$$
$$\overline{F}_*(y) = \overline{F}(y) + b\overline{\overline{F}}(y),\ y = 0;\ \overline{F}(y) = \int_y^\infty dF(x), \tag{6.57}$$
$$\mathbf{P}\left\{\gamma^+(0) > 0, \zeta^+(\theta_s) > 0\right\} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(0) + \lambda^{-1}bq_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho_-(s))\right],$$
$$\mathbf{P}\left\{\gamma_+(0) > 0, \zeta^+(\theta_s) > 0\right\} = \frac{b}{s+\lambda}q_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho_-(s)).$$

Співвідношення для $\gamma^+(0)$ та $\gamma_+(0)$ на перший погляд можуть видатися суперечливими. Насправді ліві частини цих співвідношень визначають різні ймовірності (оскільки $\mathbf{P}\{\gamma^+(0) = 0\} = 0, \mathbf{P}\{\gamma_+(0) = 0\} > 0$, див. також (6.48) при $u > 0$)

$$\mathbf{P}\left\{\gamma^+(0) > 0, \zeta^+(\theta_s) > 0\right\} = \mathbf{P}\left\{\gamma^+(0) \geq 0, \zeta^+(\theta_s) > 0\right\} = q_+(s),$$
$$\mathbf{P}\left\{\gamma_+(0) > 0, \zeta^+(\theta_s) > 0\right\} = q_+(s) - \frac{\lambda}{\lambda+s}\overline{F}(0).$$

Для вивчення поведінки східчастого процесу ризику після банкрутства сформулюємо лему про розподіл максимуму процесу $\zeta_v(t) = v + \zeta(t)$ $(\zeta_0 = \zeta(t), v \geq 0)$

$$\zeta_v^+(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} \zeta_v(t'), \quad \zeta_v^+(\theta_s) = \sup_{0 \leq t \leq \theta_s} \zeta_v(t).$$

Лема 6.4. *Генератриса* $\zeta_v^+(\theta_s)$ *визначається співвідношеннями*

$$\Phi(s, v, z) =: \mathbf{E}e^{-z\zeta_v^+(\theta_s)} = \Phi(s, 0, z)e^{-zv}, \quad v \geq 0, \tag{6.58}$$

$$\Phi(s, 0, z) = \mathbf{E}e^{-z\zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)g^{(s)}(z)},$$

$$g^{(s)}(z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)} \,|\, \zeta^+(\theta_s) > 0\big] = \frac{G_1(s, 0, z)}{G_1(s, 0, 0)}, \tag{6.59}$$

$$G_1(s, 0, z) = \lambda p p_-(s)\left[\varphi_1(z) + \frac{bq_-(s)}{\rho_-(s) - z}\left(\varphi_1(z) - \varphi_1(\rho_-(s))\right)\right],$$

$$G_1(s, 0, 0) = \lambda p\left[1 - q_-(s)\varphi_1(\rho_-(s))\right], \ \varphi_1(z) = \mathbf{E}e^{-z\xi_1'}, \ \mu_1' = \mathbf{E}\xi_1'.$$

Співвідношення (6.59) *ми називаємо дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина, границя якого при* $s \to 0$ *для* $m < 0$ *зводиться до формули Полячека–Хінчина для майже напівнеперервних знизу* $\zeta(t)$

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+g^{(0)}(z)}; \quad p_+ = b|m|\lambda^{-1}, \quad q_+ = p(1 + b\mu_1');$$

$$g^{(0)}(z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)} \,|\, \zeta^+ > 0\big] = q_+^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}dF_*(x), \quad \textit{отже}$$

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = p_+\left[1 - \int_0^\infty e^{-zx}dF_*(x)\right]^{-1} =$$
$$= p_+\sum_{n \geq 0}\left(\int_0^\infty e^{-zx}dF_*(x)\right)^n, \tag{6.60}$$

де $g^{(0)}(z)$ *визначається з середнього співвідношення в* (6.60).

Доведення. Для максимуму класичного процесу ризику має місце стохастичне співвідношення

$$\zeta_v^+(t) \doteq \begin{cases} v, & t < \tau^+(0), \quad \mathbf{P}\{\zeta > t\} = e^{-\lambda t}, \\ v + \zeta^+_{\gamma^+(0)}(t - \tau^+(0)), & t \geq \tau^+(0), \end{cases}$$

з якого випливає перше співвідношення в (6.58). При $v = 0$ з цього стохастичного співвідношення випливає формула

$$\Phi(s,0,z) = p_+(s)\left[1 - T(s,0,z)\right]^{-1},$$
$$T(s,0,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}, \zeta^+(\theta_s) > 0\big].$$

З урахуванням (6.45) і того, що $p_+(s) > 0$, генератриса $T(s,0,z) = V(s,0,z,0,0)$ визначається співвідношенням

$$T(s,0,z) = q_+(s)g^{(s)}(z) = s^{-1}p_+(s)G_1(s,0,z),$$

з якого випливає формула (6.59) з відповідним значенням $g^{(s)}(z)$ в термінах $G_1(s,0,z)$. Граничним переходом $s \to 0$ з (6.59) встановлюється (6.60). □

Аналіз поведінки східчастого надлишкового процесу після банкрутства зводиться до розгляду відповідного східчастого процесу з випадковим стартовим значенням

$$\zeta_*(t) = \zeta_{\gamma^+(u)}(t), \quad t \geq 0, \quad \zeta_*(0) = \gamma^+(0), \tag{6.61}$$

для якого має місце аналог теореми 6.2.

Теорема 6.6. *Нехай $\zeta(t)$ східчастий надлишковий процес ризику з випадковими преміями. Тоді генератриса*

$$\Phi^*(s,u,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \zeta^+(\theta_s) > u\big]$$

визначається співвідношенням

$$\Phi^*(s,u,z) = \Phi(s,0,z)T(s,u,z), \tag{6.62}$$
$$sT(s,u,z) = sV(s,u,z,0,0) =$$
$$= p_+(s)G_1(s,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1(s,u-y,z)dP_+(s,y),$$
$$sT(s,0,z) = p_+(s)G_1(s,0,z),$$

$\Phi(s,0,z)$ визначається дограничним узагальненням формули Полячека–Хінчина (6.59). Якщо $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$ $\left(\frac{\lambda p_+}{b|m|} = 1\right)$, тоді генератриса та розподіл жорсткості банкрутства визначаються співвідношеннями

$$T_0(u,z) = g_+(u,z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] =$$

$$= p_+ G_1'(0,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1'(0,u-y,z) d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\},$$

$$\mathbf{P}\left\{\gamma^+(u) > 0, \zeta^+ > u\right\} = \overline{F}(u) + b\overline{\overline{F}}(u) +$$
$$+ \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^u \left[\overline{F}(u-y) + b\overline{\overline{F}}(u-y)\right] d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}, \qquad (6.63)$$
$$\mathbf{P}\left\{\gamma^+(0) > x, \zeta^+ > 0\right\} = p\big(\overline{F}_1(x) + b\overline{\overline{F}}_1(x)\big), \quad x > 0.$$

Генератриса $Z^+(u) \doteq u + \zeta^+_{\gamma^+(u)}$ *загального максимального дефіциту визначається співвідношенням*

$$\mathbf{E}\left[e^{-zZ^+(u)}, \zeta^+ > u\right] = \Phi(0,0,z) T_0(u,z) e^{-uz}, \qquad (6.64)$$

$\Phi(0,0,z)$ *визначається формулою Полячека–Хінчина* (6.60), $T_0(u,z)$ *— першим співвідношенням* (6.63) *з*

$$G_1'(0,u,z) = \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\left[F'(u+y) + b\overline{F}(u+y)\right] dy. \qquad (6.65)$$

Доведення. Враховуючи (6.61), після усереднення (6.58) по $\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dv\right]$ одержимо співвідношення (6.62). Друге співвідношення в (6.62) випливає з (6.45) при $u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$ з функцією $G_1(s,u,u_1)$ (див. в (6.42)), а з нього при $s \to 0$ випливає формула для генератриси жорсткості банкрутства, після обернення якої одержується функція розподілу жорсткості (див. (6.63)). Із (6.62) при $s \to 0$ встановлюється (6.64). □

Як і для класичних процесів ризику так і для східчастих майже напівнеперервних процесів "червоний період" $T'(u)$ стохастично еквівалентний $\tau^-(-\gamma^+(u))$. На основі співвідношення $T'(u) \doteq \tau^-(-\gamma^+(u))$, $u \geq 0$, встановлюється аналог теореми 6.3.

Теорема 6.7. *Якщо* $m = \lambda b^{-1}(pb\mu - q) < 0$, *тоді генератриса* $T'(u)$ *визначається співвідношенням* (*аналог формули dos Reis'a*)

$$\mathbf{E}\left[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty\right] = q_-(s) T_0(u, \rho_-(s)), \qquad (6.66)$$
$$\mathbf{P}\left\{T'(u) < \infty\right\} = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\} = \overline{F}(u) + b\overline{\overline{F}}(u) +$$
$$+ \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u} \left[b\overline{\overline{F}}(u-y) + \overline{F}(u-y)\right] d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\}.$$

Щільність розподілу $T'(u)$ (у диференціалах) має вигляд

$$\mathbf{P}\left\{T'(u)\in dt\right\}=\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-x)\in dt\right\}\times$$
$$\times\left(F'(u+x)+b\overline{F}(u+x)\right)dx+\frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}d\mathbf{P}\left\{\zeta^+<y\right\}\times$$
$$\times\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-x)\in dt\right\}\left[b\overline{F}(u+x-y)+F'(u+x-y)\right]dx. \quad (6.67)$$

Доведення. Після усереднення за щільністю $\Phi_0^{(1)}(u,x)$ генератриси

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(-x)},\tau^-(-x)<\infty\right]=q_-(s)e^{-x\rho_-(s)}$$

із співвідношення

$$\mathbf{E}\left[e^{-sT'(u)},T'(u)<\infty\right]=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^-(-\gamma^+(u))},\tau^-(-\gamma^+(u))<\infty\right]=$$
$$=q_-(s)\int_0^\infty e^{-\rho_-(s)x}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\gamma^+(u)<x,\zeta^+>u\right\}dx$$

випливає (6.66), після обернення якого одержується щільність (6.67). При $s\to 0$ із першого співвідношення (6.66) визначається ймовірність

$$\mathbf{P}\left\{T'(u)<\infty\right\}\underset{u\to 0}{\longrightarrow}\mathbf{P}\left\{T'(0)<\infty\right\}=p(1+b\mu)<p+q=1. \qquad \square$$

У випадку майже напівнеперервності знизу генератриса числа вимог $N^*(u)=n(T'(u))$ за червоний період $T'(u)$

$$n^*(u,z)=\mathbf{E}\left[z^{N^*(u)},T'(u)<\infty\right]$$

визначається в наступному твердженні (аналог теореми 6.3).

Теорема 6.8. *Генератриса числа вимог за період $T'(u)$ при $m<0$ визначаєтьcя через $s_z=\lambda_1(1-z)$ $(0<z<1,\lambda_1=\lambda p)$ співвідношенням*

$$n^*(u,z)=q_-(s_z)\left[\int_0^\infty e^{-x\rho_-(s_z)}\left[F'(u+x)+b\overline{F}(u+x)\right]dx+\right. \quad (6.68)$$
$$+\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty\int_{0+}^{u}e^{-x\rho_-(s_z)}[b\overline{F}(u+x-y)+$$

$$
\left.+ F'(u+x-y)]d\mathbf{P}\left\{\zeta^+ < y\right\} dx\right] = q_-(s_z)g_+(u, \rho_-(s_z)),
$$

$$
n^*(0,z) = p\left[\varphi_1(\rho_-(s_z)) + b\rho_-^{-1}(s_z)(1-\varphi_1(\rho_-(s_z)))\right] q_-(s_z). \quad (6.69)
$$

При $z \to 1$ $(s_z \to 0)$ *мають місце співвідношення, що узгоджуються з останнім співвідношенням в* (6.66) *при* $s \to 0$. *Генератриса числа вимог до банкрутства* $n(\tau^+(u))$ *визначається співвідношенням*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[z^{n(\tau^+(u))}, \tau^+(u) < \infty\right] = \mathbf{E}\left[e^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty\right] = \\
&\quad = \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_{s_z}) > u\} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}. \qquad (6.70)
\end{aligned}
$$

Доведення. Формулу (6.68) можна отримати усередненням генератриси $\mathbf{E}z^{n(t)} = e^{t\lambda_1(1-z)}$ за щільністю (6.67)

$$
n^*(u,z) = \int_0^\infty e^{t\lambda_1(1-z)}\mathbf{P}\left\{T'(u) \in dt, T'(u) < \infty\right\}.
$$

При $u = 0$ з (6.68) випливає (6.69). Співвідношення (6.70) одержується усередненням генератриси $n(t) = \nu_1(t)$ за розподілом $\tau^+(u)$

$$
\int_0^\infty e^{\lambda_1 t(z-1)} d\mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\} = \mathbf{E}\left[e^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty\right]. \qquad \square
$$

6.3 Перебування класичного процесу ризику в зонах виживання та ризику

Нам зручніше й надалі замість резервного процесу ризику розглядати надлишковий процес вимог з початковим капіталом $u > 0$

$$
\begin{aligned}
&\zeta(t) = S(t) - Ct, \quad S(t) = \sum_{k\le\nu(t)} \xi_k, \quad \xi_k > 0, \quad C > 0, \\
&\overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_k > x\}, \quad \overline{\overline{F}}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy, \\
&\mu_k = \mathbf{E}\xi_1^k < \infty, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Вважатимемо, що $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$ ($\delta = \frac{C-\lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$, $\mu = \mu_1$).

Замітимо, що $\tau^+(u) = \inf\{t > 0, \zeta(t) > u\}$ визначає не лише момент банкрутства (1-го виходу $\zeta(t)$ в ризикову “червону” зону $\{y > u\}$), а й тривалість початкового перебування в зоні виживання $\{y \leq u\}$, яку умовно можна назвати “зеленою”, в той час $\tau'(u) = \inf\{t > \tau^+(u), \zeta(t) < u\}$ визначає момент першого повернення в цю зону. Тривалість першого перебування $\zeta(t)$ в “червоній” зоні визначає (див. [150, 151, 157, 210] та графіки 11 в кінці монографії)

$$T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau^+(u), & \tau^+(u) < \infty, \\ \infty, & \tau^+(u) = \infty. \end{cases}$$

Замітимо, що ймовірність банкрутства, яку в теорії ризику позначають через $\Psi(u)$, визначається “хвостом” розподілу ζ^+

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = \overline{P}_+(u).$$

В теоремах 6.1, 6.3 і наслідку 6.1 встановлена низка співвідношень для генератрис $T'(u)$, $\tau^+(u)$, $\gamma^+(u)$, які зібрані в лемі.

Лема 6.5. *Якщо $m = \lambda\mu - C < 0$, тоді для $u > 0$*

$$g_u(s) =: \mathbf{E}[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty] = \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-z\rho_-(s)}\overline{F}(u+z)dz + \\ + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-z\rho_-(s)}\int_{0+}^u \overline{F}(u+z-y)dP_+(y)dz, \tag{6.71}$$

$$g_u(0) = \mathbf{P}\{\tau'(u) < \infty\} = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^u \overline{\overline{F}}(u-y)dP_+(y). \tag{6.72}$$

З (6.71) *при $u \to 0$ одержується генератриса $T'(0)$*

$$g(s) = \lim_{u\to 0} g_u(s) = \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-z\rho_-(s)}\overline{F}(z)dz, \tag{6.73}$$

$$g(0) = \frac{\lambda\mu}{C} = q_+ = \Psi(0), \quad \mathbf{E}[T'(0), T'(0) < \infty] = \frac{\lambda\mu_2}{2C|m|}.$$

Генератриса пари $\{\tau^+(u), \gamma^+(u)\}$ для $u \geq 0$ визначається згорткою

$$q_+(s,u,z) = T(s,uz) = \int_{0-}^u G_0(s,u-y,z)dP_+(s,y), \tag{6.74}$$

$$G_0(s,u,z) = \frac{\lambda\rho_-(s)s^{-1}}{\rho_-(s) - z}\int_0^\infty [e^{-zy} - e^{-\rho_-(s)y}]dF(u+y),$$

а генератриса $\tau^+(u)$ — співвідношенням

$$q_+(s,u) = q_+(s,u,0) = \int_{-0}^{u} G_0(s,u-y)dP_+(s,y),$$
$$q_+(s) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\rho_-(s)y}\overline{F}(y)dy, \quad (6.75)$$
$$G_0(s,u) = G_0(s,u,0) = s^{-1}\lambda\rho_-(s)\int_0^\infty e^{-\rho_-(s)x}\overline{F}(u+x)dx,$$

з якого випливає, що

$$q_+(s,u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-x\rho_-(s)}\overline{F}(u+x)dx + \quad (6.76)$$
$$+ \frac{\lambda}{s}\rho_-(s)\int_{0+}^{u}\int_0^\infty e^{-\rho_-(s)y}\overline{F}(u-y+x)dxdP_+(s,y).$$

Перетворення Лапласа $q_+(s,u)$ по u має вигляд

$$\widetilde{q}_+(s,\nu) =: \int_0^\infty e^{-\nu u}q_+(s,u)du = \frac{\widetilde{G}_0(s,\nu)}{1+\nu\widetilde{G}_0(s,\nu)}, \quad (6.77)$$
$$\widetilde{G}_0(s,\nu) = \frac{\lambda\rho_-(s)s^{-1}}{\rho_-(s)-\nu}\int_0^\infty [e^{-\nu z} - e^{-\rho_-(s)z}]\overline{F}(z)dz.$$

$\gamma^+(u)$ визначаєтьcя співвідношенням ($T_0(u,z) = g_+(u,z)$)

$$g_+(u,z) = q_+(0,u,z) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty] = \quad (6.78)$$
$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(u+x)dx +$$
$$+ \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(u-y+x)dxdP_+(y).$$

Доведення вимагають лише останні співвідношення. Якщо для $G_0(s,u,0)$ виконати інтегрування частинами, то одержимо останнє співвідношення в (6.75). Якщо врахувати, що

$$dP_+(s,y) = -dq_+(s,y) \quad (y > 0),$$

то після перетворення Лапласа із (6.75) легко отримати (6.77). Після обчислення згортки в (6.74) з функцією

$$G_0(0,u,z) = \frac{\lambda}{|m|}\frac{1}{z}\int_0^\infty [1-e^{-zy}]dF(u+y) = \\ = \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(u+y)dy,$$

легко знайти генератрису (6.78).

З леми 6.5 випливає важливий наслідок для генератриси $\tau'(u)$ — момента першої регенерації $\zeta(t)$.

Наслідок 6.6. *Для $u=0$ момент першої регенерації $\zeta(t)$ є сумою*

$$\tau_1'(0) = \inf\{t > \tau^+(0), \zeta(t) < 0\} \doteq \tau_1^+(0) + T_1'(0),$$

де $\tau_1^+(0), T_1'(0)$ однаково розподілені зі спільним дефектом розподілу, оскільки

$$\mathbf{P}\{\tau_1^+(0) < \infty\} = \mathbf{P}\{T_1'(0) < \infty\},$$

й ідентичними генератрисами (див. (6.71) та (6.76) при $u=0$)

$$g(s) = \mathbf{E}[e^{-sT'(0)}, \tau^+(0) < \infty] = q_+(s).$$

Генератриса $\tau_1'(0)$ має вигляд

$$\varphi(s) = \mathbf{E}[e^{-s(\tau_1^+(0)+T_1'(0))}, \tau_1^+(0) < \infty] = \\ = \mathbf{E}[e^{-sT_1'(0)}, \zeta^+(\theta_s) > 0]. \tag{6.79}$$

Для $u>0$ момент першої регенерації є сумою

$$\tau_1'(u) = \inf\{t > \tau^+(u) : \zeta(t) < u\} \doteq \tau_1^+(u) + T_1'(u),$$

де $\tau_1^+(u)$ та $T_1'(u)$ мають спільний дефект розподілу, тому

$$\mathbf{P}\{\tau_1^+(u) < \infty\} = \mathbf{P}\{T_1'(u) < \infty\}, \tag{6.80}$$

$$g_u(s) = \mathbf{E}[e^{-sT_1'(u)}, \zeta^+ > u] = g_+(u, \rho_-(s)),$$

але їх генератриси (порівняй (6.71) з (6.76)) різні. Аналогічно (6.79) знаходимо, що

$$\varphi_u(s) = \mathbf{E}[e^{-s\tau_1'(u)}, \tau_1^+(u) < \infty] = \mathbf{E}[e^{-sT_1'(u)}, \zeta^+(\theta_s) > u]. \tag{6.81}$$

Наступні періоди регенерації для $u \geq 0$ стохастично рівні $\tau_1'(0)$

$$\tau_k'(0) \doteq \tau_1^+(0) + T_1'(0), \quad k \geq 2. \tag{6.82}$$

Замітимо, що після порівняння (6.71) з (6.78) стає очевидною виправлена формула dos Reis'a (6.80) (див. також формулу (6) з [157]). Це означає, що

$$\mathbf{E}[e^{-sT_1'(u)}, \tau_1^+(u) < \infty] = \mathbf{E}[e^{-\rho_-(s)\gamma_1^+(u)}, \tau_1^+(u) < \infty]. \tag{6.83}$$

Розглянемо схеми відновлення для послідовностей

$$\{\tau_k'(0)\}_{k\geq 1} : \ S_n = \sum_{k\leq n} \tau_k'(0), \quad u = 0, \tag{6.84}$$

$$\{\tau_k'(u)\}_{k\geq 1} : \ S_n^{(u)} = \tau_1'(u) + \sum_{k=2}^{n} \tau_k'(0), \quad u > 0,$$

Процес відновлення, що визначає число відновлень на $[0, t]$ для S_n позначимо

$$N(t) = \max\{n : S_n < t\}, \quad H(t) = \mathbf{E}N(t)$$

$N(\theta_s)$ — випадково зупинений процес $N(t)$.

Теорема 6.9. *Перетворення Лапласа–Стілт'єса $H(t)$ визначається співвідношенням ($\varphi(s)$ див. в (6.79))*

$$h(s) =: \int_0^\infty e^{-st} dH(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}. \tag{6.85}$$

$N(\theta_s)$ має геометричний розподіл

$$p(k, s) =: \mathbf{P}\{N(\theta_s) = k\} = (1 - \varphi(s))\varphi^k(s), \quad k \geq 0. \tag{6.86}$$

Якщо $m < 0$, тоді число повернень $\zeta(t)$ в зону $\{y \leq 0\}$ $N = N(\infty)$ має геометричний розподіл з генератрисою

$$p(k) = \mathbf{P}\{N = k\} = (1 - q_+)q_+^k, \quad k \geq 0; \tag{6.87}$$

$$\pi(z) = \mathbf{E}z^N = \frac{1 - q_+}{1 - zq_+}, \quad q_+ = \Psi(0).$$

На доведенні теореми не будемо зупинятись, лише зауважимо, якщо $N(t)$ процес відновлення для $S_n = \sum\limits_{k \le n} \xi_k$, де $\varphi(s) = \mathbf{E} e^{-s\xi_k} \underset{s\to 0}{\to} 1$, тоді при $t \to \infty$ $\mathbf{E}N(t)$ лінійно зростає. При умові $\varphi(s) \underset{s\to 0}{\to} \varphi(0) < 1$ $N = N(\infty)$ має невироджений розподіл (6.87).

При $u > 0$ для $S_n^{(u)}$ (див. (6.84)) позначимо процес відновлення

$$N_u(t) = \max\{n : S_n^{(u)} < t\},$$
$N_u(\theta_s)$ випадково зупинений $N_u(t)$,
$$H_u(t) = \mathbf{E}N_u(t), \quad h_u(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_u(t).$$

Теорема 6.10. *При* $u > 0$

$$h_u(s) = \frac{\varphi_u(s)}{1-\varphi(s)}, \quad \varphi_u(s) = \mathbf{E}[e^{-s\tau'(u)}, \tau_1^+(u) < \infty]. \tag{6.88}$$

Розподіл та генератриса $N_u(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями*

$$p_u(k,s) = \begin{cases} \mathbf{P}\{N_u(\theta_s) = 0\} = 1 - \varphi_u(s), & k = 0 \\ \varphi_u(s)(1-\varphi(s))\varphi^{k-1}(s), & k \ge 1, \end{cases} \tag{6.89}$$

$$\pi_u(z,s) =: \mathbf{E}z^{N_u(\theta_s)} = 1 - \varphi_u(s)\frac{1-z}{1-z\varphi(s)}. \tag{6.90}$$

Якщо $m < 0$, *тоді розподіл та генератриса* $N_u = N_u(\infty)$ *— тотальної кількості повернень в (“зелену”) зону виживання* $\{y \le u\}$ *на інтервалі* $[0,\infty)$ *визначаються співвідношеннями*

$$p_u(k) = \begin{cases} \mathbf{P}\{N_u = 0\} = 1 - \varphi_u(0), & k = 0, \\ (1-q_+)\varphi_u(0)q_+^{k-1}, & k \ge 1; \end{cases} \tag{6.91}$$

$$\pi_u(z) =: \mathbf{E}z^{N_u} = 1 - \varphi_u(0)\frac{1-z}{1-zq_+}, \quad \varphi_u(0) = \Psi(u). \tag{6.92}$$

Перші два моменти $N_u(\theta_s)$ *обчислюються так*

$$\mathbf{E}N_u(\theta_s) = h_u(s), \quad \mathbf{E}N_u^2(\theta_s) = h_u(s)\frac{1+\varphi(s)}{1-\varphi(s)}, \tag{6.93}$$
$$\mathbf{D}N_u(\theta_s) = h_u(s)\frac{1+\varphi(s)-\varphi_u(s)}{1-\varphi(s)}.$$

Так само для N_u

$$\mathbf{E}N_u = \frac{\varphi_u(0)}{1-q_+}, \quad \mathbf{D}N_u = \frac{1}{1-q_+}\mathbf{E}N_u[1+q_+ - \varphi_u(0)]. \tag{6.94}$$

Доведення. Співвідношення (6.88) одержується після перетворення Лапласа–Стілт'єса $H(t) = \sum\limits_{n\geq 1} \mathbf{P}\{S_n \leq t\}$. Після застосування перетворення Лапласа–Карсона до розподілу

$$p_{k,u}(t) = \mathbf{P}\{N_u(t) = k\} = \mathbf{P}\{S_k^{(u)} \leq t\} - \mathbf{P}\{S_{k+1}^{(u)} < t\}$$

та інтегрування частинами

$$p_u(k,s) = s\int_0^\infty e^{-st} p_{k,u}(t)dt = -\int_0^\infty p_{k,u}(t)de^{-st}$$

одержується розподіл (6.89), на основі якого встановлюється (6.90). При $s \to 0$ з (6.89) та (6.90) випливають співвідношення (6.91) та (6.92) лише за умови $\varphi(0) < 1$.

Моменти $N_u(\theta_s)$ та N_u обчислюються за допомогою значень похідних від генератрис при $z = 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}N_u(\theta_s) = \frac{\partial}{\partial z}\pi_u(z,s)|_{z=1}, \\
&\mathbf{E}N_u^2(\theta_s) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\pi_u(z,s) + \mathbf{E}N_u(\theta_s); \\
&\frac{\partial}{\partial z}\Pi_u(z,s) = \frac{(1-\varphi(s))\varphi_u(s)}{(1-z\varphi(s))^2} \underset{z\to 1}{\to} h_u(s), \\
&\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Pi_u(z,s) = \frac{2(1-\varphi(s))\varphi_u(s)\varphi(s)}{(1-z\varphi(s))^3} \underset{z\to 1}{\to} \frac{2\varphi_u(s)\varphi(s)}{(1-\varphi(s))^2}.
\end{aligned} \tag{6.95}$$

□

Розділимо блукання (6.84) на два частинні блукання

$$\begin{aligned}
&\theta_n^{(u)} = \tau_1^+(u) + \sum_{k=2}^n \tau_k^+(0), \quad \left(\theta_n = \sum_{k=1}^n \tau_k'(0), \quad u = 0\right), \\
&\sigma_n^{(u)} = T_1'(u) + \sum_{k=2}^n T_k'(0), \quad \left(\sigma_n = \sum_{k=1}^n T_k'(0), \quad u = 0\right),
\end{aligned} \tag{6.96}$$

і позначимо

$\theta_{N_u} = \theta_{N_u}^{(u)}$ — тотальну тривалість періодів виживання,
$\sigma_{N_u} = \sigma_{N_u}^{(u)}$ — тотальну тривалість "червоних" періодів,
$S_{N_u} = S_{N_u}^{(u)}$ — тотальну тривалість періодів регенерації.

Теорема 6.11. *Якщо $u = 0$, $m < 0$, θ_N та σ_N $(N = N(\infty))$ мають спільну генератрису*

$$\mathbf{E}[e^{-s\theta_N}, \theta_N < \infty] = \mathbf{E}[e^{-s\sigma_N}, \sigma_N < \infty] = \tag{6.97}$$
$$= \frac{1 - q_+}{1 - q_+ q_+(s)} \quad (q_+(s) = g(s),\ \textit{див.}\ (6.73)).$$

Якщо $u > 0$, $m < 0$, тоді генератриса θ_{N_u} визначається через $q_+(s, u)$ (див. (6.76)) та $\varphi_u(0) = \Psi(u)$ (див. (6.81) при $s = 0$)

$$\mathbf{E}[e^{-s\theta_{N_u}}, \theta_{N_u} < \infty] = \tag{6.98}$$
$$= 1 - \Psi(u) + \frac{(1 - q_+)\Psi(u)}{1 - q_+ q_+(s)} q_+(s, u).$$

Генератриси σ_{N_u} та S_{N_u} визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{E}[e^{-s\sigma_{N_u}}, \sigma_{N_u} < \infty] = \tag{6.99}$$
$$= 1 - \Psi(u) + \frac{(1 - q_+)\Psi(u)}{1 - q_+ q_+(s)} g_u(s) \quad (g_u(s)\ \textit{див.}\ (6.71)),$$
$$\mathbf{E}[e^{-sS_{N_u}}, S_{N_u} < \infty] = \tag{6.100}$$
$$= 1 - \Psi(u) + \frac{(1 - q_+)\Psi(u)}{1 - q_+ \varphi(s)} \varphi_u(s) \quad (\varphi_u(s)\ \textit{див.}\ (6.81)).$$

Доведення. Після усереднення генератрис θ_n та σ_n за геометричним розподілом N (6.87) встановлюється (6.97), а після усереднення θ_n σ_n та S_n за розподілом N_u (6.91) — співвідношення (6.98)–(6.100).

Із (6.97) та (6.100) при $s \to 0$ випливає, що

$$\mathbf{P}\{\theta_N < \infty\} = \mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = \mathbf{P}\{S_N < \infty\} = \frac{1}{1+q_+} = \frac{1}{1+\Psi(0)}.$$

Аналогічно з (6.98)–(6.100) при $s \to 0$ випливає, що

$$\mathbf{P}\{\theta_{N_u} < \infty\} = \mathbf{P}\{\sigma_{N_u} < \infty\} = \mathbf{P}\{S_{N_u} < \infty\} = \tag{6.101}$$
$$= 1 - \Psi(u) + \frac{\Psi^2(u)}{1 + \Psi(0)} \underset{u \to 0}{\to} \frac{1}{1 + \Psi(0)},$$

$$\frac{1}{2} < \mathbf{P}\{\theta_N < \infty\} = \mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} < 1.$$

Щоб проаналізувати в останній формулі випадки (близькі до крайніх), позначимо $A_* = \{\omega : \zeta(t) \underset{t\to\infty}{\to} -\infty\}$ і зауважимо, що

$$\delta = \frac{C - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{1}{q_+} - 1 = \frac{p_+}{q_+}.$$

1. Нехай $q_+ = 1-\varepsilon$ (ε — достатньо мале), тоді $\delta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ($|m| = O(\varepsilon)$),

$$\mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = \mathbf{P}\{\theta_N < \infty\} = \frac{1}{2-\varepsilon} > \frac{1}{2} \quad \text{для } \omega \in A_*;$$
$$\mathbf{P}\{\sigma_N = \infty\} = \mathbf{P}\{\theta_N = \infty\} = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} \approx \frac{1}{2} \quad \text{для } \omega \in \overline{A}_*.$$

2. Якщо $q_+ = \Psi(0) = \varepsilon$, тоді $\delta = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, $|m| = O(\frac{1}{\varepsilon})$.

$$\text{для } \omega \in A_* \quad \mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1,$$
$$\text{для } \omega \in \overline{A}_* \quad \mathbf{P}\{\sigma_N = \infty\} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 0.$$

3. У випадку $p_+ = q_+ = \frac{1}{2}$, $\delta = 1$, $\mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = \frac{2}{3}$ для $\omega \in A_*$.

Зауважимо, що саме цей випадок $\delta = \frac{p_+}{q_+} = 1$, вважається крайнім у страхових задачах, оскільки як і в класичній задачі про банкрутство в умовах "чесної" гри $p_+ = q_+ = \frac{1}{2}$. □

Для процесу $\zeta(t) = S(t) - Ct$ позначимо дограничні ($s > 0$) щільності маргінальних функцій банкрутства

$$\Phi_s^{(k)}(u,x) = p_k(s,u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \gamma_k(u) < x\}, \quad k = \overline{1,3},$$

для яких згідно з теоремою 6.21 та наслідком 6.1 має місце

Наслідок 6.7. *Дограничні та граничні ($s \to 0$) щільності $p_k(s,u,x)$ визначаються співвідношеннями:*
($k = 1$) $x > 0$

$$p_1(s,u,x) = \lambda C^{-1} \int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)} dF(u+y) +$$

$$+\lambda\rho_-(s)s^{-1}\int_{0+}^{u}\int_{x}^{\infty}e^{\rho_-(s)(x-y)}dF(u+y-z)dP_+(s,z), \quad (6.102)$$

$$p_1(0,u,x)=\frac{\lambda}{C}\overline{F}(u+x)+\frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}\overline{F}(u+x-z)dP_+(z), \quad m<0;$$

$(k=2)$, $y>0$, $y\neq u$,

$$sp_2(s,u,y)=\begin{cases}\lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\displaystyle\int_{0-}^{u}e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z), \quad y>u,\\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\displaystyle\int_{u-y}^{u}e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z),\\ \quad 0<y<u,\end{cases} \quad (6.103)$$

$$p_2(0,u,y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)P_+(u), \quad y>u, \quad m<0,\\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)\mathbf{P}\{u-y<\zeta^+<u\}, \quad 0<y<u;\end{cases}$$

$(k=3)$ $z>0$, $z\neq u$,

$$sp_3(s,u,z)=p_+(s)g_3(s,u,z)+\int_{0+}^{u}g_3(s,u-y,z)dP_+(s,y),$$

$$p_3(0,u,z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda F'(z)}{|m|}\displaystyle\int_{0-}^{u}(z-u+y)dP_+(y), \quad z>u,\\ \dfrac{\lambda F'(z)}{|m|}\displaystyle\int_{0}^{z}(z+v)dP_+(v-u), \quad 0<z<u.\end{cases} \quad (6.104)$$

Дограничні маргінальні функції банкрутства

$$\overline{P}_k(s,u,x)=\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s)>u,\ \gamma_k(u)>x\}$$

при $u=0$ *визначаються простими співвідношеннями*

$$\overline{P}_1(s,0,x)=\frac{\lambda}{C}\int_{x}^{\infty}e^{\rho_-(s)(x-y)}\overline{F}(y)dy;$$

$$\overline{P}_2(s,0,x)=\frac{\lambda}{C}\int_{x}^{\infty}e^{-\rho_-(s)y}\overline{F}(y)dy; \quad (6.105)$$

$$\overline{P}_3(s,0,x)=\frac{\lambda}{C\rho_-(s)}\int_{x}^{\infty}(1-e^{-\rho_-(s)y})dF(y),$$

з яких випливає, що лише при $s \to 0$

$$p_1(0,0,x) = p_2(0,0,x) = \frac{\lambda}{C}\overline{F}(x), \quad x > 0. \tag{6.106}$$

При $s > 0, u = 0$ щільності розподілів $\gamma_1(0) = \gamma^+(0)$ та $\gamma_2(0) = \gamma_+(0)$ (так само і $\gamma_3(0)$) різні

$$\begin{aligned} p_1(s,0,x) &= \frac{\lambda}{C}\int_0^\infty e^{-\rho_-(s)y} dF(x+y), \\ p_2(s,0,x) &= \frac{\lambda}{C} e^{-\rho_-(s)x}\overline{F}(x) \neq p_1(s,0,x), \\ p_3(s,0,x) &= \frac{\lambda}{C\rho_-(s)}(1 - e^{-x\rho_-(s)})F'(x), \quad x > 0. \end{aligned} \tag{6.107}$$

Приклад 6.1. Нехай $\zeta(t) = \sum\limits_{k \le \nu(t)} \xi_k - Ct$ — надлишковий процес ризику з показниково розподіленими вимогами $\xi_k > 0$, $C > 0$

$$\overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_k > x\} = e^{-bx}, \quad x > 0; \quad \mu = \mathbf{E}\xi_k = b^{-1}, \quad b > 0.$$

Генератриса $\zeta(t)$ $(\zeta(\theta_s))$ визначається кумулянтою $k(r)$

$$\mathbf{E}e^{r\zeta(t)} = e^{tk(r)}, \quad \mathbf{E}e^{r\zeta(\theta_s)} = \frac{s}{s - k(r)}, \quad \operatorname{Re} r = 0,$$

$$k(r) = \frac{\lambda r - Cr(b-r)}{b-r}, \quad m = \mathbf{E}\zeta(1) = \frac{\lambda - Cb}{b} < 0.$$

Рівняння Лундберга зводиться до квадратичного

$$s - k(r) = 0 \sim Cr^2 + (s + mb)r + sb = 0$$

і має 2 корені $r_1 = -\rho_-(s)$, $r_2(s) = \rho_+(s) > 0$, які визначають генератриси $\zeta^\pm(\theta_s)$ та їх розподіли

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)(b+z)}{\rho_+(s)+z}, \quad \rho_+(s) = bp_+(s), \tag{6.108}$$

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^-(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+z}, \quad C\rho_-(s)p_+(s) = s;$$

$$P_-(s,x) = \mathbf{P}\{\zeta^-(\theta_s) < x\} = e^{\rho_-(s)x}, \quad x \le 0, \tag{6.109}$$

$$\overline{P}_+(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0; \quad p_+(s) = \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) = 0\} > 0.$$

Якщо $m < 0$, тоді $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $\rho'_-(0) = |m|^{-1}$, $\rho_+(s) = b|m|/C$,

$$\overline{P}_+(s,u) \underset{s\to 0}{\to} \Psi(u) = q_+ e^{-\rho_+ u}, \quad u > 0, \tag{6.110}$$
$$p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} p_+ = \frac{|m|}{C}.$$

Якщо врахувати, що $q_+ = \frac{\lambda}{Cb}$, $\rho_+ = bp_+ = \frac{bC-\lambda}{C}$, то генератриси $\tau^+(u)$, $\tau'(u)$, $\gamma^+(u)$ та $T'(u)$ знайти дуже просто

$$q_+(s,u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty] = q_+(s)e^{-\rho_+(s)u}, \quad u \geq 0,$$
$$\lim_{s\to 0} q_+(s,u) = \Psi(u) = q_+ e^{-\rho_+ u}, \quad u \geq 0,$$
$$\varphi_u(s) = \mathbf{E}[e^{-s\tau'(u)}, \tau^+(u) < \infty] = q_+(s,u)\frac{b}{b+\rho_-(s)},$$
$$g_+(z,u) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty] = \Psi(u)\frac{b}{b+z},$$
$$g_u(s) = \mathbf{E}[e^{-sT'(u)}, \tau^+(u) < \infty] = \Psi(u)\frac{b}{b+\rho_-(s)}. \tag{6.111}$$

З останніх двох формул випливає, що $\gamma^+(u)$ та $T'(u)$ не залежить від u. Тому лише для майже напівнеперервного зверху $\zeta(t)$

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\gamma_+(u)} | \tau^+(u) < \infty\big] = \mathbf{E}e^{-z\widetilde{\gamma}_+(u)} = \frac{b}{b+z}, \tag{6.112}$$
$$\mathbf{E}e^{-s\widetilde{T}'(u)} = \mathbf{E}e^{-\rho_-(s)\widetilde{\gamma}^+(u)} = \frac{b}{b+\rho_-(s)}, \quad u > 0;$$
$$g_+(z,0) = \varphi(0)\frac{b}{b+z}, \quad g(s) = \Psi(0)\frac{b}{b+\rho_-(s)}, \quad \text{для } u = 0,$$
$$\varphi(s) = q_+(s)\frac{b}{b+\rho_-(s)}, \quad \varphi(0) = g(0) = \Psi(0) = q_+. \tag{6.113}$$

Після підстановки (6.111)–(6.113) в (6.89)–(6.92) знаходимо розподіли $N_u(\theta_s)$ та $N_u(N)$. Усередненням генератрис для σ_n, θ_n та S_n, $\widetilde{\sigma}_n = \sum\limits_{k\leq n} [T'_k(u)/\tau^+(u) < \infty]$ за розподілом N_u легко знайти генератриси

$$\mathbf{E}[e^{-s\sigma_{N_u}}, \sigma_{N_u} < \infty] = 1 - \Psi(u) + \frac{p_+\Psi(u)}{1-q_+q_+(s)}\frac{b\Psi(u)}{b+\rho_-(s)}, \tag{6.114}$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\theta_{N_u}}, \theta_{N_u} < \infty] = 1 - \Psi(u) + \frac{p_+\Psi(u)}{1 - q_+q_+(s)} q_+(s) e^{-\rho_+(s)u},$$
$$\mathbf{E}[e^{-sS_{N_u}}, S_{N_u} < \infty] = 1 - \Psi(u) + \frac{p_+\Psi(u)}{1 - q_+q_+(s)} \frac{bq_+(s)}{b + \rho_-(s)} e^{-\rho_+(s)u},$$
$$\mathbf{E}e^{-s\widetilde{\sigma}_{N_u}} = 1 - \frac{\rho_-(s)\Psi(u)}{\rho_-(s) + \rho_+} \underset{s\to 0}{\to} 1, \quad \frac{q_+\rho_-(s)}{\rho_-(s) + \rho_+} = \frac{\rho_+(s) - \rho_+}{\rho_+(s)}.$$

Звідси при $s \to 0$ випливає, що

$$\mathbf{P}\{\sigma_{N_u} < \infty\} = \cdots = 1 - \Psi(u) + \frac{\Psi(u)^2}{1 + q_+}, \tag{6.115}$$
$$\mathbf{P}\{\sigma_N < \infty\} = \frac{1}{1 + q_+} = \frac{Cb}{\lambda + bC} \quad (\lambda \le bC).$$

Зауважимо, що щільність маргінальних функцій банкрутства при $u = 0$ згідно з (6.107) визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} p_1(s, 0, x) &= \frac{\lambda b}{C} \frac{e^{-bx}}{b + \rho_-(s)} = bq_+(s)e^{-bx}, \\ p_2(s, 0, x) &= \frac{\lambda}{C} e^{-(b+\rho_-(s))x} \ne p_1(s, 0, x), \\ p_3(s, 0, x) &= \frac{\lambda b}{C\rho_-(s)}(1 - e^{-\rho_-(s)x})e^{-bx}, \end{aligned} \tag{6.116}$$

а з (6.105) при $x = 0$ знаходимо $q_+(s) = \frac{\lambda}{C}\frac{1}{b+\rho_-(s)}$.

Зауваження. В § 3.4 генератриса $Q_x(\infty)$ — часу перебування над рівнем x напівнеперервного як і майже напівнеперервного зверху процесу $\zeta(t)$ згідно з (3.193) при умові (1.75) визначається співвідношенням

$$D_x(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_x(\infty)} = 1 - \frac{\rho_+(\mu) - \rho_+}{\rho_+(\mu)} e^{-\rho_+ x}, \quad x > 0, \tag{6.117}$$

що узгоджується при $x = u$ з останніми співвідношеннями (6.114) для прикладу 6.1, тобто $Q_u(\infty) \doteq \widetilde{\sigma}_{N_u}$.

Для довільного майже напівнеперервного знизу процесу ризику інтегральне перетворення генератриси $Q_x(\infty)$ — часу перебування в ризиковій зоні $\{y > u\}$, тобто $d_+(\alpha, \mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha u} dD_u(\mu)$, визначається співвідношенням (3.202).

Рівність границь в (6.106) при $s \to 0$ недостатня для висновків про подібність $\gamma_1(0)$ та $\gamma_2(0)$, бо насправді всі $\gamma_k(0)$ по різному залежать від $\tau^+(0)$ (див. (6.105), (6.107)). В термінах умовних генератрис

$$\widetilde{g}(s) = \mathbf{E}[e^{-sT'(0)}|\tau^+(0) < \infty] = g(s)q_+^{-1}, \tag{6.118}$$
$$\widetilde{g}_u(s) = \mathbf{E}[e^{-sT'(u)}|\tau^+(u) < \infty] = g_u(s)\Psi(u)^{-1},$$

встановлюється $(g(s) = g_0(s),\ \widetilde{g}(s) = \widetilde{g}_0(s))$

Наслідок 6.8. *Якщо* $m < 0$, *тоді згідно з* (6.80)

$$\varphi(s) = q_+(s)\widetilde{g}(s) = q_+(s)q_+^{-1}g_+(0, \rho_-(s)),$$
$$\varphi_u(s) = q_+(s,u)\widetilde{g}_u(s) = q_+(s,u)\Psi(u)^{-1}g_+(u, \rho_-(s)), \tag{6.119}$$
$$\mathbf{E}[e^{-s\sigma_{N_u}}, \sigma_{N_u} < \infty] = 1 - \Psi(u) + \frac{p_+\Psi(u)g_+(u, \rho_-(s))}{1 - q_+q_+(s)}.$$

Приклад 6.2. Для процесу $\zeta(t)$ із прикладу 5.1, для якого ймовірність банкрутства $\Psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}$, знайти генератрису $g_+(u, z)$ та інші ризикові характеристики, що обчислювались у прикладі 6.1.

6.4 Перебування процесу з випадковими преміями в зоні ризику

Для процесу $\zeta(t)$ (див. (6.38)) початковий капітал $u > 0$ визначає ризиковий рівень $\{y = u\}$, зону ризику $\{y > u\}$ та зону виживання $\{y < u\}$.

Суто залежними від поведінки $\zeta(t)$ при $t > \tau^+(u)$ є функціонали:

$$\tau_1'(u) = \inf\left\{t > \tau_1^+(u) : \zeta(t) < u\right\} \text{ — recovery time;}$$
$$T_1'(u) = \begin{cases} \tau_1'(u) - \tau_1^+(u), & \tau_1^+(u) < \infty; \\ 0, & \tau_1^+(u) = \infty, \end{cases} \text{ — ‘red period’ ;} \tag{6.120}$$
$$Z^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \infty} \zeta(t), \text{ — total deficit.}$$
$$n(\tau^+(u)) \text{ — число вимог на } [0, \tau^+(u)], \tag{6.121}$$
$$n(T_1(u)) \text{ — число вимог за період } T_1(u),$$
$$n(\tau_1'(u)) \text{ — число вимог до регенерації (відновлення) .}$$

Зображення цих функціоналів дано на графіку 10 в кінці монографії.

Для генератрис функціоналів $\tau^+(u)$, $\gamma^+(u)$, $T(u)$, $\tau'(u)$ та $Z^+(u)$ при $m < 0$ раніше встановлені співвідношення наводяться в лемі

Лема 6.6. *Для процесу $\zeta(t)$ (6.38) справедливі співвідношення*

$$q_+(s,u) = \mathbf{E}\, e^{-s\tau^+(u)} I_{\tau^+(u)<\infty} = \mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > u\right\}, \tag{6.122}$$

$$\begin{aligned} T_0(u,z) = g_+(u,z) = \mathbf{E}\, e^{-z\gamma^+(u)} I_{\tau^+(u)<\infty} = \\ = \int_0^\infty e^{-zy}\phi_1(u,y)dy, \end{aligned} \tag{6.123}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left\{\gamma^+(u) < x, \tau^+(u) < \infty\right\} = \\ = \frac{\lambda}{b|m|}\int_{-0}^{u} F_*'(u+x-y)dP_+(y), \end{aligned} \tag{6.124}$$

$$F_*'(x) = p\left(F_1'(x) + b\overline{F}_1(x)\right), \quad x > 0;$$

$$\kappa_u(z) = \mathbf{E}\, e^{-zZ^+(u)} I_{\zeta^+>u} = e^{uz}\mathbf{E}\, e^{-z\zeta^+} g_+(u,z). \tag{6.125}$$

Оскільки, $T'(u) \doteq \tau^-(-\gamma^+(u))$, тому після усереднення по $\phi_1(u,x)$ одержуємо аналог формули dos Reis'a (див. (6.66) *та* (6.80))

$$g_u(s) = \mathbf{E} e^{-sT_1(u)} I_{\tau^+(u)<\infty} = q_-(s)T_0(u,\rho_-(s)). \tag{6.126}$$

Щільність $T'(u)$ в диференціалах запишеться так:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{T'(u) \in dt\right\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-x) \in dt\right\} d_xF_*(u+x) + \\ + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u} dP_+(y)\int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-x) \in dt\right\} d_xF_*(u+x-y); \end{aligned} \tag{6.127}$$

$$\varphi_u(s) = \mathbf{E}\, e^{-s\tau_1'(u)} I_{\tau^+(u)<\infty} = \frac{q_+(s,u)}{q_+(0,u)} g_s(u); \tag{6.128}$$

$$\mathbf{E}\, e^{-z\gamma^-(-x)} = \frac{b}{b+z}, \quad \text{\textit{не залежить від}}\ \ x > 0.$$

З останнього співвідношення в (6.128) випливає, що незалежно від $x < 0$ $\gamma^-(x) \doteq \theta_b' \doteq \xi_k'' \,\forall\, k$. Отже в силу однорідності процесу $\zeta(t)$:

$$\tau_k^+(\cdot) \doteq \tau_2^+(\theta_b'), \quad \tau_k'(\cdot) \doteq \tau_2'(\theta_b'), \quad T_k(\cdot) \doteq T_2(\theta_b'), \quad k \geq 2.$$

Тому необхідно ввести позначення для усереднених за розподілом θ_b' генератрис $\tau^+(\theta_b')$, $T'(\theta_b')$, $\tau'(\theta_b')$:

$$q_*(s,b) = b\int_0^\infty e^{-bu}q_+(s,u)du = \mathbf{P}\left\{\zeta^+(\theta_s) > \theta_b'\right\}, \tag{6.129}$$

$$g_*(s,b) = b\int_0^\infty e^{-bu} g_s(u)du, \quad \varphi_*(s,b) = b\int_0^\infty e^{-bu}\varphi_s(u)du.$$

Розглянемо блукання (схеми відновлення)

$$S_n^{(u)} = \tau_1'(u) + \sum_{k=2}^{n} \tau_k'(\theta_b'),$$
$$\sigma_n^{(u)} = T_1(u) + \sum_{k=2}^{n} T_k(\theta_b'), \quad n \geq 1. \tag{6.130}$$

Перші кроки випадкових блукань (6.130) і всі наступні мають розподіли з одним і тим же дефектом, оскільки

$$\mathbf{P}\left\{\tau^+(u) < \infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\tau'(u) < \infty\right\} = \Psi(u) < 1.$$

Позначимо процес відновлення $N_u(t) = \max\left\{n : S_n^{(u)} < t\right\}$, $N_u(\theta_s)$ — випадково зупинений $N_u(t)$, $H_u(t) = \mathbf{E}\, N_u(t)$ — функцію відновлення. Зауважимо, що $\tau^+(u)$ визначається сумою випадкового числа, показниково розподілених в.в. з параметром $\lambda > 0$, тоді існують щільності розподілу

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(u) < t\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau'(u) < t\right\},$$

а також щільність функції відновлення

$$h_u(t) = \frac{\partial}{\partial t}H_u(t), \quad t > 0, \quad H_u(0) = 0.$$

Тому можна записати

$$\widetilde{h}_u(t) = \int_0^\infty e^{-st} dH_u(t) = \int_0^\infty e^{-st} h_u(t)dt.$$

Зауважимо також, що (6.126) є узагальненням формули Dos Reis'a. Вона одержується з (6.123) підстановкою $z = \rho_-(s)$ і домноженням на $q_-(s) = \mathbf{P}\left\{\zeta^-(\theta_s) < 0\right\} < 1$. (В класичному випадку $C(t) = Ct$ $q_-(s) = 1$.)

Теорема 6.12. *Для процесу ризику* (6.38) *з преміями* $\xi_k'' \doteq \theta_b'$ $(b > 0)$

$$\widetilde{h}_u(s) = \frac{\varphi_u(s)}{1 - \varphi_*(s,b)}, \ \varphi_u(s), \varphi_*(s,b) \text{ див. } (6.127), (6.128), (6.131)$$

$$\mathbf{E}\,N_u(\theta_s) = \widetilde{h}_u(s); \text{ при } m < 0, \quad \mathbf{E}\,N_u = \frac{\Psi(u)}{1 - \varphi_*(0,b)}. \tag{6.132}$$

Доведення. В силу існування щільності $h_u(t) = H_u'(t)$ можна записати

$$\widetilde{h}_u(t) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}\big\{S_n^{(u)} < t\big\} dt =$$

$$= \varphi_u(s) \sum_{n=1}^\infty (\varphi_*(s,b))^{n-1} = \frac{\varphi_u(s)}{1 - \varphi_*(s,b)},$$

$$\varphi_u(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \Psi(u), \quad \varphi_*(s,b) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \varphi_*(0,b) = b \int_0^\infty e^{-bu} \Psi(u) du.$$

Формула (6.132) встановлюється інтегруванням частинами

$$\mathbf{E}\,N_u(\theta_s) = s \int_0^\infty e^{-st} H_u(t) dt = -\int_0^\infty H_u(t) de^{-st} = \widetilde{h}_u(s). \qquad \square$$

Теорема 6.13. *Розподіл та генератриса $N_u(\theta_s)$ визначаються так*

$$p_u(k.s) = \mathbf{P}\left\{N_u(\theta_s) = k\right\} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \varphi_u(s), & k = 0, \\ \varphi_u(s)(1 - \varphi_*(s,b))\varphi_*^{k-1}(s,b), & k > 1; \end{cases} \tag{6.133}$$

$$\pi_u(z,s) = \mathbf{E}\, z^{N_u(\theta_s)} = 1 - \frac{\varphi_u(s)(1-z)}{1 - z\varphi_*(s,b)}. \tag{6.134}$$

Якщо $m < 0$, тоді при $s \to 0$: $N_u(\theta_s) \to N_u$, де N_u — тотальне число періодів регенерації, що має розподіл з генератрисою

$$p_u(k) = \mathbf{P}\left\{N_u = k\right\} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \varphi_u(0), \ \varphi_u(0) = \Psi(u), & k = 0, \\ \varphi_u(0)(1 - \varphi_*(0,b))\varphi_*^{k-1}(0,b), & k > 1; \end{cases} \tag{6.135}$$

$$\pi_u(z) = \mathbf{E}\, z^{N_u(\theta_s)} = 1 - \frac{\Psi(u)(1-z)}{1 - z\varphi_*(0,b)}. \tag{6.136}$$

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа–Карсона до

$$p_{k,u}(t) = \mathbf{P}\left\{N_u(t) = k\right\} = \mathbf{P}\big\{S_k^{(u)} \le t\big\} - \mathbf{P}\big\{S_{k+1}^{(u)} \le t\big\}.$$

Після інтегрування частинами із співвідношення

$$p_u(k,s) = s\int_0^\infty e^{-st}p_{k,u}(t)dt = -\int_0^\infty p_{k,u}(t)de^{-st} = \\ = -\int_0^\infty \left[\mathbf{P}\left\{S_k(u)\le t\right\} - \mathbf{P}\left\{S_{k+1}(u)\le t\right\}\right]de^{-st}.$$

знаходимо розподіл $N_u(\theta_s)$ при $k\ge 1$. При $k=0$ аналогічно знаходимо

$$p_u(0,s) = \int_0^\infty se^{-st}\mathbf{P}\left\{\tau_1'(u)>t\right\}dt = 1-\varphi_u(s).$$

Для розподілу (6.133) легко знайти генеретрису (6.134), за допомогою якої можна обчислювати моменти $\mathbf{E}\,(N_u(\theta_s))^k$, $k\ge 1$. При $m<0$ з (6.133), (6.134) граничним переходом $s\to 0$ встановлюються співвідношення (6.135), (6.136). □

Теорема 6.14. *При $m<0$ генератриси S_{N_u} та σ_{N_u} виражаються через генератриси* (6.126), (6.128) *та* (6.129)

$$\mathbf{E}\,e^{-sS_{N_u}}I_{S_{N_u}<\infty} = \\ = 1-\Psi(u)+\Psi(u)\frac{(1-\varphi_*(0,b))\varphi_u(s)}{1-\varphi_*(0,b)\varphi_*(s,b)}, \tag{6.137}$$

$$\mathbf{E}\,e^{-s\sigma_{N_u}}I_{\sigma_{N_u}<\infty} = \\ = 1-\Psi(u)+\Psi(u)\frac{(1-\varphi_*(0,b))g_s(u)}{1-\varphi_*(0,b)g_*(s,b)}, \tag{6.138}$$

$$\mathbf{P}\{S_{N_u}<\infty\} = \mathbf{P}\{\sigma_{N_u}<\infty\} = \\ = 1-\Psi(u)+\Psi(u)\frac{\Psi(u)}{1+\varphi_*(0,b)}. \tag{6.139}$$

Генератриси $N^*(u)$, $N_*(u)$ та $\nu_1(\tau'(u))$ визначаються співвідношеннями

$$n^*(u,z) = \mathbf{E}z^{\nu_1(T_1(u))} = \\ = q_-(s_z)T_0(\rho_-(s_z),u), \quad s_z=\lambda_1(1-z); \tag{6.140}$$

$$n_*(u,z) = \mathbf{E}z^{\nu_1(\tau^+(u))} = \\ = \mathbf{E}e^{-s_z\tau^+(u)}I_{\tau^+(u)<\infty} = \overline{P}_+(s_z,u). \tag{6.141}$$

$$\mathbf{E}z^{\nu_1(\tau_1'(u))} = n_*(u,z)n^*(u,z). \tag{6.142}$$

Доведення. Співвідношення (6.137) та (6.138) одержуються усередненням генератрис $\mathbf{E}e^{-sS_n^{(u)}}I_{S_n^{(u)}<\infty}$, $\mathbf{E}e^{-s\sigma_n^{(u)}}I_{\sigma_n^{(u)}<\infty}$ за розподілом (6.135), а (6.139) випливає з (6.137) та (6.138) при $s \to 0$. Співвідношення (6.140) одержується шляхом усереднення генератриси $n(t) = \nu_1(t)$ за розподілом (6.127). Позначимо $s_z = \lambda_1(1-z)$, тоді формула (6.139) встановлюється так:

$$
\begin{aligned}
n^*(u,z) &= \int_0^\infty \mathbf{E}\, z^{\nu_1(t)} \mathbf{P}\left\{T_1(u) \in dt\right\} = \\
&= \int_0^\infty e^{-ts_z} \mathbf{P}\left\{T_1(u) \in dt\right\} = \int_0^\infty e^{-s_z t} \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^-(-x) \in dt\right\} \times \\
&\qquad \times \frac{\lambda}{|m|} \int_{-0}^{u} dP_+(y) dF_*(u+x-y) = \\
&\qquad = \frac{\lambda}{|m|} \int_0^\infty \mathbf{E}\, e^{-s_z \tau^-(-x)} \int_{-0}^{u} dP_+(y) dF_*(u+x-y) = \\
&\qquad = \frac{\lambda}{|m|} \int_0^\infty q_-(s_z) e^{-\rho_-(s_z)x} \int_{-0}^{u} dP_+(y) dF_*(u+x-y) = \\
&\qquad = q_-(s_z) \int_0^\infty e^{-\rho_-(s_z)x} \phi_1(u,x) dx = q_-(s_z) T_0(\rho_-(s_z), u).
\end{aligned}
$$

Порівнюючи (6.126) з формулою (6.140) замічаємо, що остання випливає з (6.126) після підстановки $s = s_z = \lambda_1(1-z)$. Формула (6.141) встановлюється усередненням генератриси $\nu_1(t)$ за розподілом $\tau^+(u)$. З (6.140) і (6.141) випливає (6.142). □

Зауважимо, що замість тотального часу перебування σ_{N_u} в зоні ризику можна розглядати інтегральні функціонали

$$
Q_x(t) = \int_0^t I_{\zeta(u)>x} du, \quad Q_x(\theta_s) = \int_0^{\theta_s} I_{\zeta(u)>x} du,
$$

генератриси яких вивчалися в § 2.4.

При $m < 0$: $Q_u(\theta_s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} Q_u(\infty) = \int_0^\infty I_{\zeta(t)>u} dt$ визначає час перебування над ризиковим рівнем $x = u$. Для генератрис

$$
D_x(s,\mu) = \mathbf{E}\, e^{-\mu Q_x(\theta_s)}, \quad D_x(\mu) = \mathbf{E}\, e^{-\mu Q_x(\infty)}, \quad x > 0,
$$

доведено твердження (див. теорема 2.6).

Теорема 6.15. *Для загального однорідного процесу $\zeta(t)$ з незалежними приростами справедливе співвідношення*

$$d_+(s,\alpha,\mu) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} d_x D_x(s,\mu) = \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\varphi_+(s+\mu,\alpha)}. \tag{6.143}$$

Якщо $m<0$, тоді

$$\lim_{s\to 0} d_+(s,\alpha,\mu) = d_+(\alpha,\mu) = \\ = \int_0^\infty e^{i\alpha x} d_x D_x(\mu) = \frac{\varphi_+(\alpha)}{\varphi_+(\mu,\alpha)}. \tag{6.144}$$

Для східчастих процесів $\zeta(t)$ (6.38)

$$d_+(s,\alpha,\mu) = D_{+0}(s,\mu) + \int_{+0}^\infty e^{i\alpha x} d_x D_x(s,\mu), \tag{6.145}$$

$$D_{+0}(s,\mu) = \frac{p_+(s)}{p_+(s+\mu)}, \tag{6.146}$$

при $m<0$

$$D_{+0}(s,\mu) \underset{s\to 0}{\to} D_{+0}(\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)}, \quad p_+ = \frac{b|m|}{\lambda}.$$

Щоб знайти генератрису $D_x(\mu)$ слід обернути $d_+(\alpha,\mu)$ відносно α. Така операція обернення нескладна у випадку, коли вимоги ξ'_k мають розподіл Ерланга. Зокрема, якщо ξ'_k показниково розподілені з параметром $a>0$, тоді

$$d_+(\alpha,\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)} \frac{\rho_+(\mu) - i\alpha}{\rho_+ - i\alpha} = \\ = \frac{p_+}{p_+(\mu)} \left(1 - \frac{\rho_+ - \rho_+(\mu)}{\rho_+ - i\alpha}\right). \tag{6.147}$$

$$D_u(\mu) = 1 - \frac{\rho_+(\mu) - \rho_+}{\rho_+(\mu)} e^{-\rho_+ u}, \quad u>0, \tag{6.148}$$

$\rho_+(\mu) = ap_+(\mu)$, $\rho_+ = ap_+$, $\rho_+(s)$ — додатний корінь рівняння фундаментального рівняння Лундберга $k(r)=s$, $k(r)=\psi(-ir)$, $s>0$.

Якщо ξ'_k має розподіл Ерланга порядку n, можливість обернення пояснюється тим, що в цьому випадку $\varphi_+(s,\alpha)$, а отже і $d_+(\alpha,\mu)$, є дробово-раціональними функціями порядку n відносно $i\alpha$.

Наслідок 6.9. *Якщо позначити через* $\widetilde{\tau}'_k(u)$ *та* $\widetilde{T}_k(u)$ *в.в. з генератрисами*

$$\widetilde{\varphi}_u(s) = \mathbf{E}e^{-s\widetilde{\tau}'_1(u)} = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau'_1(u)}|\tau'_1(u) < \infty\big],$$
$$\widetilde{g}_s(u) = \mathbf{E}e^{-s\widetilde{T}_1(u)} = \mathbf{E}\big[e^{-sT_1(u)}|T_1(u) < \infty\big],$$

тоді генератриси сум

$$\widetilde{S}_{N_u} = \sum_{k=1}^{N_u} \widetilde{\tau}'_k(u), \quad \widetilde{\sigma}_{N_u} = \sum_{k=1}^{N_u} \widetilde{T}_k(u) \doteq Q_u(\infty)$$

визначаються подібними до (6.138), (6.139) *співвідношеннями* $(m < 0)$

$$\mathbf{E}\, e^{-\mu \widetilde{S}_{N_u}} = 1 - \Psi(u) + \Psi(u)\frac{(1-\varphi_*(0,b))\widetilde{\varphi}_u(\mu)}{1-\varphi_*(0,b)\widetilde{\varphi}_*(\mu,b)}, \tag{6.149}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, e^{-\mu \widetilde{\sigma}_{N_u}} &= \mathbf{E}\, e^{-\mu Q_u(\infty)} = \\ &= 1 - \Psi(u) + \Psi(u)\frac{(1-\varphi_*(0,b))\widetilde{g}_\mu(u)}{1-\varphi_*(0,b)\widetilde{g}_*(\mu,b)};\end{aligned} \tag{6.150}$$

$$\mathbf{E}\, e^{-\mu Q_0^{\geq}(\infty)} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} D_{+0}(\mu), \quad D_{+0}(\mu) = \frac{p_+}{p_+(\mu)}, \tag{6.151}$$

$$Q_0^{\geq}(\infty) = \int_0^\infty I_{\zeta(t)\geq 0}dt = Q_{[0]}(\infty) + \int_0^\infty I_{\zeta(t)>0}dt.$$

При $m > 0$

$$\mathbf{E}\, e^{-\mu Q_0^{\leq}(\infty)} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{p_-}{p_-(\mu)}, \quad Q_0^{\leq}(\infty) = \int_0^\infty I_{\xi(t)\leq 0}dt. \tag{6.152}$$

Для $\zeta(t)$ з показниково розподіленими вимогами

$$\Psi(u) = q_+ e^{-\rho_+ u}, \quad \varphi_*(0,b) =: b\int_0^b e^{-bu}\widetilde{\varphi}_0(u)du = \frac{bq_+}{b+\rho_+},$$
$$\widetilde{g}_\mu(u) = \widetilde{g}_*(\mu,b) =: b\int_0^\infty e^{-bu}\widetilde{g}_\mu(u)du = \frac{bq_-(\mu)}{b+\rho_-(\mu)}.$$

З урахуванням зв'язку між $\rho_-(s)$, $\rho_+(s)$ із (6.150) випливає (6.148).

Приклад 6.3. Для класичного процесу ризику $\zeta(t) = S(t) - Ct$ ($p_+ = \frac{|m|}{C}$) за формулою (6.16) довести, що

$$M_1^+(u) = \mathbf{E}\gamma^+(u)\mathbf{1}_{\tau^+(u)<\infty} = \\ = \frac{\lambda}{C}\bar{F}_3(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \bar{F}_3(u-y)dP_+(y),$$

де $\bar{F}_3(y) = \int_{x\geq y}\bar{\bar{F}}(x)dx$, $y \geq 0$ — хвіст ф.р. 3-го порядку.

Приклад 6.4. Для східчастого процесу $\zeta(t)$ (6.38) ($p_+ = \frac{b|m|}{\lambda}$) за формулою (6.124) довести, що

$$M_1^+(u) = \bar{\bar{F}}(u) + b\bar{F}_3(u) + \\ + \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^u \left[\bar{\bar{F}}(u-y) + b\bar{F}_3(u-y)\right]dP_+(y).$$

6.5 Спрощення формули Спітцера для процесів ризику

Якщо $\xi(t)$ — довільний однорідний процес з н.п. і кумулянтою (1.17), тоді х.ф. (генератриса) $\xi^\pm(\theta_s)$ згідно з теоремою 1.16 визначається формулою Спітцера як х.ф. (генератриса) безмежно подільного розподілу з канонічним зображенням (1.65), тобто

$$\varphi_\pm(s, iz) =: \mathbf{E}e^{-z\xi^\pm(\theta_s)} = \exp\left\{\int_{\mathrm{R}^\pm}\left(e^{-zx} - 1\right)dN_s^\pm(x)\right\}. \quad (6.153)$$

Спектральні функції $N_s^\pm(x)$ ($\pm x > 0$, див. (1.66)) виражаються через інтегральні перетворення розподілів $\pm\xi(t) > 0$.

Для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів формули Спітцера (1.65), (1.66) на основі результатів §§ 3.1, 3.2 значно спрощуються. Спочатку покажемо як спрощується спектральна функція Спітцера $N_s^+(x)$ (див. (1.66)) для напівнеперервних зверху процесів і відповідно — формула Спітцера (6.153) для $\xi^+(\theta_s)$. Для майже напівнеперервних зверху процесів має місце аналогічний результат, якій спочатку встановлюється для умовної генератриси

$$\hat{\varphi}_+(s, iz) =: \mathbf{E}\left[e^{-z\xi^+(\theta_s)}|\xi^+(\theta_s) > 0\right], \quad (6.154)$$

а потім для безумовної генератриси $\varphi_+(s, iz)$.

Покажемо також, як розподіл мінімуму $\xi^-(t)$ для напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$ пов'язаний з розподілом від'ємних значень $\xi(t) < 0$. Надалі $\xi(t)$ — не обов'язково процес ризику.

1. Нехай $\xi(t)$ немонотонний напівнеперервний зверху процес з від'ємним стрибками $\left(\int_{-1}^{0} x^2 \Pi(dx) < \infty\right)$ з кумулянтою

$$\psi_1(\alpha) = i\alpha a' - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x \mathbb{I}_{|x|\leq 1}\right) \Pi(dx); \quad (6.155)$$

$$a = a' - \int_{-\infty}^{0} x\Pi(dx) > 0 \ \text{ при } \sigma^2 = 0, \quad \int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) > 0.$$

Для процесів $\xi(t)$ з кумулянтою (6.155) майже одночасно J.H.B. Keilson [192], В.М. Золотарев [75] і А.А. Боровков [5] одержали формули двоїстого зв'язку розподілів $\xi(t) > 0$ та $\tau^+(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(t,x) = tx^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t\right\}, \quad x > 0. \quad (6.156)$$

Для майже напівнеперервних зверху процесів з показниково розподіленими додатними стрибками і кумулянтою

$$\psi_2(\alpha) = i\alpha a + \lambda_1 \frac{i\alpha}{c - i\alpha} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\alpha x} - 1\right) \Pi(dx), \quad (6.157)$$

$$f(z) = \mathbf{E}\left[e^{-z\xi} | \xi > 0\right] = \frac{c}{c - i\alpha}; \quad \lambda_1, c > 0, \quad a \leq 0,$$

ми одержали подібну формулу зв'язку умовного розподілу моменту досягнення додатного рівня $\{\tau^+(x) \,|\, \tau^+(0) < t\}$ з розподілом $\xi(t) > 0$ (див. (5.45))

$$\frac{\partial}{\partial x} F(t,x) = tx^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t | \tau^+(0) < t\right\}, \quad x > 0. \quad (6.158)$$

На основі (6.157) та (6.158) встановлюються твердження, в яких одержано прості співвідношення для похідних спектральних функцій $\frac{\partial}{\partial x} N_s^+(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} N_0^+$ при $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$.

Теорема 6.16. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою* (6.155) *генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається канонічним зображенням* (*див.* (1.65) *або* (6.153)) *в якому похідна спектральної функції $N_s^+(x)$ має простий вигляд*

$$\varphi_+(s, iz) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{-zx} - 1\right) dN_s^+(x)\right\}, \quad (6.159)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N_s^+(x) = x^{-1}\mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > x\right\} = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \quad x > 0,$$

де $\rho_+(s)$ *— корінь рівняння Лундберга* $k_1(r) = \psi_1(-ir) = s$*;*

$$\rho_+(s) = \begin{cases} P'(s,0)\overline{P}^{-1}(s,0); & \sigma \geq 0, \ \int_{-1}^{0} x^2\Pi(dx) < \infty, \\ s(ap_-(s))^{-1}, & \text{якщо } \sigma = 0, \int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty. \end{cases}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$*, тоді* $\rho_+(s) \to \rho_+ > 0$*,* $N_s^+(x) \to N_0^+$*,* $x > 0$*.*

$$\frac{\partial}{\partial x}N_0(x) = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \tag{6.160}$$

$$|N_0(x)| = \int_x^{\infty} y^{-1}e^{-\rho_+ y}dy, \quad x > 0.$$

Доведення. Згідно з (6.156) функція Спітцера

$$|N_s^+(x)| = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{-1}\int_x^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}F(t,y)dydt$$

зводиться до вигляду

$$|N_s^+(x)| = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{-1}\int_x^{\infty} ty^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(y) < t\}dydt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{\infty}\mathbf{P}\{\tau^+(y) < t\}d\ln y dt.$$

Після інтегрування частинами по y потім по t знаходимо ($x > 0$)

$$|N_s^+(x)| = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_x^{\infty}\ln y d\mathbf{P}\{\xi^+(t) < y\} -\right.$$

$$\left. - \ln x\mathbf{P}\{\xi^+(t) > x\}\right]dt =$$

$$= s\int_0^{\infty} e^{-st}\left[\ln x\mathbf{P}\{\xi^+(t) > x\} - \mathbf{E}\ln\xi^+(t)\mathbb{1}_{\xi^+(t)>x}\right]dx =$$

$$= \ln x\overline{P}_+(s,x) - \ln\mathbf{E}\xi^+(\theta_s)\mathbb{1}_{\xi^+(\theta_s)>x} = \int_x^{\infty}\ln\frac{x}{y}dP_+(s,x).$$

Отже похідна функції $N_s^+(x)$ спрощується і має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}N_s^+(x) = \int_x^\infty \left(\ln\frac{x}{y}\right)' dP_+(s,x) = \frac{1}{x}\overline{P}_+(s,x), \quad x>0.$$

Звідси випливає (6.159), оскільки для напівнеперервних зверху процесів $\overline{P}_+(s,x) = e^{-\rho_+(s)x}$ $(x>0)$. При $m<0$ і $s\to 0$ із (6.159) випливає (6.160). □

Теорема 6.17. *Для процесу з кумулянтою* (6.157) *умовна генератриса* $\xi^+(\theta_s)>0$ *визначається співвідношенням*

$$\hat\varphi_+(s,iz) =: \mathbf{E}\big[e^{-z\xi^+(\theta_s)}\,|\,\xi^+(\theta_s)>0\big] = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s)+z},$$

$\rho_+(s) = cp_+(s)$ *— корінь рівняння Лундберга* $k_2(\rho_+(s)) = s$,

$$p_+(s)p_-(s) = s(s+\lambda)^{-1}, \quad \textit{якщо} \int_{-\infty}^0 \Pi(dx) < \infty.$$

При цьому $\hat\varphi_+(s,iz)$ *має канонічне зображення з відповідною спектральною функцією* $\hat N_s(x)(x>0)$

$$\hat\varphi_+(s,iz) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{-zx}-1\right)d\hat N_s(x)\right\}, \tag{6.161}$$

$$\left|\hat N_s(x)\right| = \frac{1}{q_+(s)}\int_x^\infty y^{-1}\overline{P}_+(s,y)dy, \tag{6.162}$$

$$\hat N_s'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\hat N_s(x) = \frac{1}{q_+(s)x}\overline{P}_+(s,x) = x^{-1}e^{-\rho_+(s)x}, \quad x>0.$$

Якщо $m<0$, *тоді при* $s\to 0$ $\rho_+(s)\to\rho_+ = cp_+$, $\hat N_s(x)\to\hat N_0(x)$,

$$\hat N_0'(x) = \frac{1}{q_+x}\mathbf{P}\left\{\xi^+>x\right\} = x^{-1}e^{-\rho_+x}, \quad x>0. \tag{6.163}$$

Доведення. Згідно з (6.158) спектральна функція $\hat N_s(x)$ в (6.161) зводиться до вигляду

$$\left|\hat N_s(x)\right| = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_x^\infty \mathbf{P}\left\{\xi^+(t)>y|\xi^+(t)>0\right\}y^{-1}dy\right)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_x^\infty \mathbf{P} \left\{ \xi^+(t) > y / \xi^+(t) > 0 \right\} d \ln y \right) dt.$$

Після інтегруванням частинами по y і по t знаходимо, що

$$\left| \hat{N}_s(x) \right| = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > 0\right\}} \Big[\mathbf{E} \ln \xi^+(t) 1\!\!\mathrm{I}_{\xi^+(t) > x} -$$

$$- \ln x \mathbf{P} \left\{ \xi^+(t) > x \right\} \Big] dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{s e^{-st}}{\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > 0\right\}} \left[\mathbf{E} \ln \xi^+(t) 1\!\!\mathrm{I}_{\xi^+(t) > x} - \ln x \mathbf{P} \left\{ \xi^+(t) > x \right\} \right] dt$$

$$= \frac{1}{\overline{P}_+(s, 0)} \int_x^\infty (\ln x - \ln y) \, dP_+(s, y), \; x > 0, \; \overline{P}_+(s, 0) = q_+(s).$$

Отже похідна $\hat{N}_s(x)$ спрощується і набуває вигляду

$$\hat{N}_s'(x) = \frac{1}{q_+(s) x} \overline{P}_+(s, x), \quad x > 0.$$

Звідси з урахуванням того, що для майже напівнеперервних зверху процесів $\overline{P}_+(s, x) = q_+(s) e^{-\rho_+(s) x}$ $(x > 0)$, випливає (6.162). При $m < 0$ із (6.162) при $s \to 0$ випливає (6.163). □

Теорема 6.18. *Безумовна генератриса* $\xi^+(\theta_s) \geq 0$ *згідно з* (3.88) *визначаєтьсся співвідношенням* $\left(f(z) = \frac{c}{c+z}, \; c > 0 \right)$

$$\varphi_+(s, iz) = \frac{p_+(s)(c + z)}{\rho_+(s) + z} = \hat{\varphi}_+(s, z) f^{-1}(z) \tag{6.164}$$

і допускає аналогічне до (6.159) *канонічне зображення зі спектральною функцією* $N_s(x)$, *похідна якої визначаєтьсся співвідношенням*

$$N_s'(x) = \hat{N}_s'(x) - x^{-1} e^{-cx} = x^{-1} \left(e^{-\rho_+(s) x} - e^{-cx} \right), \quad x > 0. \tag{6.165}$$

При $m < 0$

$$N_s'(x) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} N_0'(x) = x^{-1} \left(e^{-\rho_+ x} - e^{-cx} \right), \quad x > 0. \tag{6.166}$$

Доведення. З (6.164) випливає, що

$$\ln \varphi_+(s, iz) = \int_0^\infty \left(e^{-zx} - 1 \right) dN_s(x) =$$

$$= \ln \hat{\varphi}_+(s, iz) - \ln f(z), \tag{6.167}$$

де $\ln f(z)$ можна виразити інтегралом Фруллані

$$\ln f(z) = \ln \frac{c}{c+z} = \int_0^\infty x^{-1}\left(e^{-zx} - 1\right) e^{-cx} dx. \tag{6.168}$$

Після підстановки прологарифмованого співвідношення (6.161), а також (6.168) у (6.167) одержуються формули (6.165), а з (6.165) при $m < 0$ і $s \to 0$ випливає (6.166). □

З теорем 6.16–6.18 випливає

Наслідок 6.10. *Усереднені по t хвости розподілу значень $\xi(t) > 0$ визначаються щільностями при $x > 0$*

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \overline{F}(t, x) e^{-st} d \ln t\right) = \tag{6.169}$$

$$= \begin{cases} x^{-1} e^{-\rho_+(s)x}, & \textit{для } \xi(t) \textit{ з кумулянтою } (6.155), \\ x^{-1} e^{-cx}\left(e^{cq_+(s)x} - 1\right), & \textit{для } \xi(t) \textit{ з кумулянтою } (6.157). \end{cases}$$

Якщо $m < 0$, тоді при $x > 0$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty \overline{F}(t, x) d \ln t\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^\infty \overline{F}(e^y, x) dy = \tag{6.170}$$

$$= \begin{cases} x^{-1} e^{-\rho_+ x}, & \textit{для } \xi(t) \textit{ з кумулянтою } (6.155), \\ x^{-1} e^{-cx}\left(e^{-cq_+ x} - 1\right), & \textit{для } \xi(t) \textit{ з кумулянтою } (6.157). \end{cases}$$

Приклад 6.5. Розглянемо процес із прикладу 3.3

$$\xi(t) = w(t) - t + \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \tag{6.171}$$

$$\mathbf{E} e^{-z\xi_k} = f(z) = \frac{c}{c+z} \quad (c > 0),$$

$\nu(t)$ — простий пуассонів процес з інтенсивністю $\lambda > 0$. Знайти похідну спектральної функції $\frac{\partial}{\partial x} N_s(x)$ і $\frac{\partial}{\partial x} N_0(x)$ при $c = 6$, $\lambda = \frac{5}{8}$.

Легко довести, що кумулянта $\xi(t)$

$$\psi(\alpha) = -i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \lambda \frac{i\alpha}{c - i\alpha} \tag{6.172}$$

після заміни $i\alpha = r$ виражається через $m = \lambda c^{-1} - 1$

$$k(r) = \psi(-ir) = \frac{-r^3 - (c+2)r^2 - 2mcr}{2(c-r)}. \tag{6.173}$$

Рівняння Лундберга $k(r) = s$ зводиться до кубічного

$$r^3 - (2+c)r^2 - 2(mc+s)r + 2cs = 0, \quad s > 0, \tag{6.174}$$

яке має три корені: $r_1(s) = -\rho_-(s) < 0$, $0 < r_2(s) < r_3(s)$. Перший корінь визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$: $\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}$. Додатні корені визначають генератрису $\xi^+(\theta_s)$

$$\varphi_+(s, iz) = r_2(s)(r_2(s)+z)^{-1} r_3(s)(r_3(s)+z)^{-1} f^{-1}(z). \tag{6.175}$$

Логарифми множників (6.175) виражаються інтегралами Фруллані

$$\ln \frac{r_k(s)}{r_k(s)+z} = \int_0^\infty e^{-r_k(s)x}\left(e^{-xz} - 1\right) x^{-1} dx, \quad k = 2,3. \tag{6.176}$$

Після підстановки (6.168) та (6.176) у прологарифмоване співвідношення (6.175) знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial x} N_s(x) = x^{-1}\big(e^{-r_2(s)x} + e^{-r_3(s)x} - e^{-cx}\big), \quad x > 0. \tag{6.177}$$

Якщо $m < 0\,(\lambda < c)$, тоді при $s \to 0$ $r_1(s) \to 0$, $r_{2,3}(s) \to r_{2,3} > 0$. Отже

$$\frac{\partial}{\partial x} N_0(x) = x^{-1}\left(e^{-r_2 x} + e^{-r_3 x} - e^{-cx}\right), \quad x > 0.$$

Після підстановки $\lambda = \frac{5}{8}, c = 6$ знаходимо $D_0 = 9, r_2 = 2,5 < r_3 = 5{,}5$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_0(x) = x^{-1} e^{-6x}\left(e^{2,5x} + e^{0,5x} - 1\right), \quad x > 0. \tag{6.178}$$

Цей приклад показує, що із збільшенням числа коренів Лундберга збільшується кількість експонент у $\frac{\partial}{\partial x} N_s(x)$ та $\frac{\partial}{\partial x} N_0(x)$. Одна з експонент обумовлена показниковим розподілом стрибків $\xi(t)$ з параметром $c = 6$. Аналогічна ситуація виникає, якщо для напівнеперервних (майже напівнеперервних) знизу процесів додатні стрибки $\xi(t)$ мають ерланговий розподіл порядку $n \geq 2$: $E(n)$.

Приклад 6.6. Нехай $\xi(t) = S(t) - t$ — процес, що розглядається в прикладі 5.1, з х.ф. стрибків типу $E(2)$ $\Big(S(t) = \sum\limits_{k \le \nu(t)} \xi_k\Big)$

$$\varphi(\alpha) = \mathbf{E} e^{i\alpha\xi_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3 - i\alpha} + \frac{7}{7 - i\alpha}\right), \quad m = -\frac{2}{7}.$$

Знайти похідні $\frac{\partial}{\partial x} N_s(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} N_0(x)$ $(x > 0)$.

Легко довести, що як і в попередньому прикладі рівняння Лундберга зводиться до кубічного рівняння. При $s = 0$ це рівняння

$$r^3 - 7r^2 + 6r = 0$$

має корені $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 6$. При $s > 0$ рівняння Лундберга має корені

$$r_1(s) = -\rho_-(s), \quad 0 < r_2(s) < r_3(s),$$
$$r_1(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad r_{2,3}(s) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} r_{2,3} > 0,$$

що визначають розподіли $\xi^{\pm}(\theta_s)$

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha},$$
$$\varphi_+(s, iz) = \frac{s}{\rho_-(s)} \frac{(3 + z)(7 + z)}{(r_2(s) + z)(r_3(s) + z)}.$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ зводиться до вигляду

$$\varphi_+(s, iz) = \frac{r_2(s)}{r_2(s) + z} f_1^{-1}(z) f_2^{-1}(z), \tag{6.179}$$

де $f_k = \frac{c_k}{c_k + z}$, $c_1 = 3$, $c_2 = 7$. Отже

$$\ln \varphi_+(s, iz) = \int_0^\infty \left(e^{-zx} - 1\right) dN_s(x) = \tag{6.180}$$
$$= \ln \frac{r_2(s)}{r_2(s) + z} + \ln \frac{r_3(s)}{r_3(s) + z} - \ln f_1(z) - \ln f_2(z).$$

На основі зображень логарифмів у (6.180) інтегралом Фруланні знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial x} N_s(x) = x^{-1}\left(e^{-r_2(s)x} + e^{-r_3(s)x} - e^{-7x}\right), \quad x > 0. \tag{6.181}$$

Оскільки $m = -\frac{2}{7} < 0$, то $\ln \mathbf{E} e^{-z\xi^+}$ визначається співвідношенням

$$\ln \varphi_+(iz) = \int_0^\infty \left(e^{-zx} - 1\right) \frac{\partial}{\partial x} N_0^+(x) dx, \tag{6.182}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} N_0^+(x) = x^{-1}\left(e^{-x} + e^{-6x} - e^{-3x} - e^{-7x}\right), \quad x > 0.$$

Дві експоненти в (6.182) обумовлені показниковими розподілами, що визначають розподіл $E(2)$ з показниками $c_1 = 3$ та $c_2 = 7$.

2. У другій частині параграфу для $\xi(t)$ з кумулянтою (6.155) покажемо, що розподіл $\xi^-(t)$ явно виражається через розподіл значень $\xi(t) < 0$ простіше за співвідношення (1.65), (1.66) залежно від випадків (тут $\xi(t)$ також не обов'язково процес ризику)

1) $\xi(t)$ має обмежену варіацію; $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^0 |x|\Pi(dx) < 0$, $a > 0$.

2) $\xi(t)$ має необмежену варіацію.

Надалі будемо позначати

$$\widetilde{P}_>(s,\alpha) = \int_{R^+} e^{i\alpha x}\overline{P}(s,x)dx, \quad \widetilde{P}_<(s,\alpha) = \int_{R^-} e^{i\alpha x} P(s,x)dx,$$
$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \int_{R^-} P_-(s,x)e^{i\alpha x}dx, \quad \widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \int_{R^+} \overline{P}_+(s,x)e^{i\alpha x}dx,$$
$$\mathbf{E}_\pm\xi(t) = \mathbf{E}\xi(t)\mathbb{I}_{\pm\xi(t)>0} = \pm\int_{R^\pm} \mathbf{P}\left\{\pm\xi(t) > \pm x\right\}dx, \tag{6.183}$$
$$\mathbf{E}_+\xi(t) = \int_{R^+} \overline{F}(t,x)dx, \quad \mathbf{E}_-\xi(t) = -\int_{R^-} F(t,x)dx.$$

Теорема 6.19. *Нехай $\xi(t)$ напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (6.155). *У випадку* 1) $\left(a = a' - \int_{-1}^0 x\Pi(dx) > 0\right)$

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = a s^{-1} p_-(s) \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} dP(s,x) + \widetilde{P}_<(s,\alpha), \tag{6.184}$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) < x\right\} = F_-(t,x) = F(t,x) +$$
$$+ a\int_0^t \mathbf{P}\left\{\xi^-(y) = 0\right\} \frac{\partial}{\partial x} F(t-y,x)dy, \quad x < 0. \tag{6.185}$$

Якщо $m < 0$, тоді $(\mathbf{E}_+\xi(t) + \mathbf{E}_-\xi(t) = mt)$

$$\mathbf{P}\left\{\xi^-(t) = 0\right\} = (at)^{-1}\,\mathbf{E}_+\xi(t) = (at)^{-1}\int_0^\infty \overline{F}(t,x)dx. \tag{6.186}$$

В обох випадках для ф.р. $\xi^-(\theta_s)$ *та* $\xi^-(t)$ *справедливі співвідношення*

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \mathbf{E}\xi^+(\theta_s)\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}dP(s,x) + \widetilde{P}_<(s,\alpha), \tag{6.187}$$

$$\begin{aligned} F_-(t,x) &= F(t,x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}F(t-y,x)d\mathbf{E}\xi^+(y) = \\ &= F(t,x) + \int_0^t y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y)\frac{\partial}{\partial x}F(t-y,x)dy, \quad x<0. \end{aligned} \tag{6.188}$$

Доведення. За допомогою позначень (6.183) після інтегрування частинами встановлюються співвідношення

$$\begin{aligned} &\varphi(s,\alpha) = 1 + i\alpha\big(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)\big), \\ &\varphi_-(s,\alpha) - 1 = -i\alpha\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha). \end{aligned} \tag{6.189}$$

В обох випадках із о.ф.т. (див. теореми 1.16 та 3.1) з урахуванням (6.189) встановлюються співвідношення

$$\rho_+(s)\left(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)\right) = \varphi(s,\alpha) - \rho_+(s)\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha),$$

з якого після застосування операції проектування $[\ ]_-$:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}G(x)dx\right]_\pm = \int_{R^\pm} e^{i\alpha x}G(x)dx$$

визначається $\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha)$, а саме

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \rho_+^{-1}(s)\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}dP(s,x) + \widetilde{P}_<(s,\alpha). \tag{6.190}$$

Зауважимо, що у випадку 1) згідно з наслідком 3.1

$$p_-(s) = \frac{s}{a\rho_+(s)}, \quad \rho_+^{-1}(s) = \frac{ap_-(s)}{s}.$$

Тому з (6.190) випливає (6.184), після обернення якого по s та α встановлюється (6.185).

Для доведення (6.186) слід врахувати, що

$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = -\varphi'_+(s,iz)|_{z=0} = \rho_+^{-1}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > x\right\}dx.$$

Отже

$$\rho_+^{-1}(s) = \frac{1}{s}ap_-(s) = a\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\xi^-(t)=0\right\}dt =$$
$$= s\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\xi^+(t)>x\right\}dxdt =$$
$$= s\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}dxdt. \qquad (6.191)$$

Після обернення по s із (6.191) випливає, що

$$a\mathbf{P}\left\{\xi^-(t)=0\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}dx =$$
$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)xt^{-1}dx = t^{-1}\mathbf{E}_+\xi(t) \qquad (6.192)$$

і (6.186) доведено. Зауважимо, що в обох випадках $\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = \rho_+^{-1}(s)$, тому з (6.190) випливає (6.187), після обернення якого по s та α встановлюється перше співвідношення (6.188). Згідно з (6.191)

$$\mathbf{E}\xi^+(\theta_s) = s\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}dxdt.$$

Після диференціювання $\mathbf{E}\xi^+(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}dx$ знаходимо

$$d\mathbf{E}\xi^+(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x)<t\right\}dxdt = t^{-1}\mathbf{E}_+\xi(t)dt.$$

Підставивши $d\mathbf{E}\xi^+(y)$ у перший рядок (6.188) встановлюємо справедливість другої формули в (6.188), і теорема повністю доведена. □

Зауважимо, що при $\lambda < \infty$ аналог формули (6.185) одержано на основі графічних міркувань для траєкторій $\xi(t) = S(t) - t$ (див. теореми 2.1, 2.2 в [130, с. 104–106] для формули Prabhu). Формула (6.186) справедлива для напівнеперервних зверху $\xi(t)$ з $a > 0$, $\lambda = \int_R \Pi(dx) \le \infty$. Відповідний аналог (6.186) має місце для напівнеперервних знизу процесів з $a < 0$ і $\lambda \le \infty$, що узагальнює формулу Prabhu.

Зокрема, для класичного процесу ризику

$$\xi_u(t) = u + at - S(t),\ S(t) = \sum_{k\le\nu(t)}\xi_k, \quad u>0, \quad C>0,$$

($\nu(t)$ — пуассонів процес з інтенсивністю λ, $\mathbf{P}\{\xi_k > 0\} = 1$) співвідношення (6.185) при $x = -u$ визначає імовірність банкрутства на обмеженому інтервалі $[0, t]$ з початковим капіталом $u > 0$. Ця формула встановлює зв'язок імовірності банкрутства при $u > 0$, $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$ ($\xi(t) = \xi_0(t)$)

$$\Psi(t, u) = \mathbf{P}\{\xi_u(t') < 0 \text{ при деякому } t' < t\} = F_-(t, -u)$$

з імовірністю виживання при $u = 0$, яка згідно з (6.186) визначається співвідношенням

$$\overline{\Psi}(t, 0) = 1 - \Psi(t, 0) = (Ct)^{-1} \int_0^\infty \overline{F}(t, x)dx. \tag{6.193}$$

Після цих позначень формула (6.185) набуває вигляду

$$\Psi(t, u) = F(t, -u) + C \int_0^t \overline{\Psi}_{t-y}(0) F'(y, x)|_{x=-u} dy, \tag{6.194}$$

а ймовірність банкрутства $\Psi_t(0)$ з урахуванням співвідношення

$$\mathbf{E}_+(t) + \mathbf{E}_-(t) = mt \quad (m = C - \lambda\mu_1,\ \mu_1 = \mathbf{E}\xi_1 > 0)$$

можна виразити через $\mathbf{E}_-\xi(t)$

$$\Psi(t, 0) = \frac{\lambda\mu_1}{C} - \frac{1}{Ct}\int_{R^-} F(t, x)dx \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} q_- = \frac{\lambda\mu_1}{C} \quad \text{при } m > 0.$$

Слід зауважити, що для напівнеперервного знизу процесу або майже напівнеперервного знизу процесу завжди існують два прості корені рівняння Лундберга $r_1(s) = -\rho_-(s) < 0 < r_2(s) = R_+(s)$. Перший корінь $\rho_-(s) = bp_-(s)$ повністю визначає х.ф. $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s, \alpha) = \frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s) + i\alpha} \quad \left(\text{або } \varphi_-(s, \alpha) = \frac{p_-(s)(b + i\alpha)}{p_-(s) + i\alpha}\right).$$

Другий корінь $R_+(s)$ лише частково визначає х.ф. $\xi^+(\theta_s)$ з точністю до деякої функції $Q(s, \alpha)$. Зокрема для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\xi(t) = S(t) - C(t)$ з випадковими преміями і кумулянтою ($b > 0$, $\lambda_{1,2} > 0$)

$$\psi(\alpha) = \psi_+(\alpha) + \psi_-(\alpha), \quad \psi_-(\alpha) = -\frac{\lambda_2 i\alpha}{b + i\alpha}, \tag{6.195}$$

($\psi_+(\alpha) = \lambda_1(\varphi(\alpha) - 1)$ — кумулянта процесу вимог $S(t)$, $\psi_-(\alpha)$ — кумулянта $-C(t)$) має місце

Наслідок 6.11. *Для процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (6.195) *х.ф.* $\xi^+(\theta_s)$ *допускає зображення*

$$\varphi_+(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \frac{s}{p_-(s)}[(R_+(s)-i\alpha)Q(s,\alpha)]^{-1}, \qquad (6.196)$$
$$Q(s,0) = s(p_-(s)R_+(s))^{-1}, \quad Q(s,i\rho_-(s))Q(s,-iR_+(s)) \neq 0.$$

Якщо $m = E\xi(1) < 0$, *тоді* $R_+(s) \underset{s\to 0}{\to} R_+ > 0$ *і х.ф.* ξ^+ *має зображення*

$$\varphi_+(\alpha) = |m|b(R_+ - i\alpha)^{-1}Q(0,\alpha)^{-1}, \quad Q(0,0) = \frac{|m|b}{R_+}. \qquad (6.197)$$

Головна частина ймовірності банкрутства при $u \to \infty$

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\xi^+ > u\} \approx \kappa e^{-R_+u}, \quad \kappa \le \mathbf{P}\{\xi^+ > 0\} = q_+ \qquad (6.198)$$

з точністю до деякого множника визначаєтьcя експонентою e^{-R_+u}.

Доведення. З того, що знаменник х.ф. $\xi(\theta_s)$

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{s(b+i\alpha)}{k_*(s,\alpha)},$$
$$k_*(s,\alpha) = s(b+i\alpha) + \psi_+(\alpha)(b+i\alpha) - i\alpha,$$

має розклад $k_*(s,\alpha) = Q(s,\alpha)(R_+(s)-i\alpha)(\rho_-(s)+i\alpha)$, на підставі основної факторизаційної тотожності (1.64) встановлюється зображення для $\varphi_+(s,\alpha)$. Для $m < 0$ з (6.196) виводиться граничним переходом $s \to 0$ співвідношення для $\varphi_+(\alpha)$ (6.197). □

Зауважимо, що коли $\xi(t)$ — напівнеперервний, більшість апроксимаційних формул для $\Psi(u)$, наведених у формулах (3.17), (3.23)–(3.25), (3.45), полягають у вираженні наближеної оцінки коефіцієнта κ для q_+ та оцінки для кореня R_+ в термінах 2-х або 3-х перших моментів $\xi(t)$. Оскільки знайти точне значення κ, R_+ можна хіба що у випадку ерлангового розподілу вимог.

3. В третій частині розглядаються процеси з кумулянтою (6.157), для яких встановлюються відповідні аналоги співвідношень (6.184)–(6.188) (деякі з них див. у теоремі 3.5).

Теорема 6.20. *Нехай* $\xi(t)$ *майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (6.157). *Тоді*

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \frac{1}{p_+(s)}\left\{\widetilde{P}_<(s,\alpha) - q_+(s)\left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right]_-\right\} \quad (6.199)$$
$$= \left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right] + \frac{c}{\rho_-(s)}\left\{\widetilde{P}_<(s,\alpha) - \left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_-(s,\alpha)\right]_-\right\}.$$

Якщо $\lambda<\infty$, *тоді* $p_+(s)p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda}$ *і* (6.199) *набуває вигляду*

$$\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha) = \left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right]_- + \quad (6.200)$$
$$+\left(1+\frac{\lambda}{s}\right)p_-(s)\left\{\widetilde{P}_<(s,\alpha) - -\left[\frac{c}{c-i\alpha}\widetilde{P}_<(s,\alpha)\right]_-\right\},$$

що допускає обернення по α, *а потім по* s (*див.* (3.101))

$$P_-(s,x) = c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}P(s,z)dz + \quad (6.201)$$
$$+\left(1+\frac{\lambda}{s}\right)p_-(s)\left[P(s,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}P(s,z)dz\right], \quad x<0;$$
$$F_-(t,x) = c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}F(t,z)dz +$$
$$+\int_0^t \left[F(t-y,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}F(t-y,z)dz\right]\times$$
$$\times\left[\mathbf{P}\left\{\xi^-(y)=0\right\}dy + d\mathbf{P}\left\{\xi^-(y)=0\right\}\right]; \quad (6.202)$$
$$\mathbf{P}\left\{\xi^-(t)=0\right\} = \mathbf{P}\left\{\tau^-(0)>t\right\} =$$
$$= c\int_0^t e^{-\lambda(t-y)}d\mathbf{E}\left[\xi^+(y)\,|\,\xi^+(y)>0\right] =$$
$$= c\int_0^t e^{-\lambda(t-y)}y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y)dy. \quad (6.203)$$

Якщо $\lambda\le\infty$, *тоді з другої формули в* (6.199) *випливає*

$$F_-(t,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}F(t,z)dz =$$

$$
\begin{aligned}
&= c\int_0^t \left[F(t-y,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}F(t-y,z)dz\right] \times \\
&\quad \times d\mathbf{E}\left[\xi^+(y)\,|\,\xi^+(y)>0\right] = \qquad (6.204)\\
&= c\int_0^t \left[F(t-y,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}F(t-y,z)dz\right] y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y)dy.
\end{aligned}
$$

Доведення. Для майже напівнеперервних зверху процесів з кумулянтою (6.157) згідно з (3.182) $\rho_+(s) = cp_+(s)$ визначає х.ф. $\xi^+(\theta_s)$, яку можна записати так

$$
\varphi_+(s,\alpha) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha q_+(s)}{\rho_+(s)-i\alpha}. \qquad (6.205)
$$

Після підстановки правої частини (6.205) в основу факторизаційну тотожність (див. (1.64)) на основі позначень (6.184) виводяться співвідношення

$$
\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) = -p_+(s)\widetilde{\Phi}_-(s,\alpha)\frac{c-i\alpha}{\rho_+(s)-i\alpha} + \frac{q_+(s)}{\rho_+(s)-i\alpha}.
$$

Шляхом нескладних перетворень звідси легко одержати перше співвідношення (6.199), еквівалентне другому.

При $\lambda < \infty$, з урахуванням того, що $p_+^{-1}(s) = s^{-1}(s+\lambda)\,p_-(s)$ із (6.199) випливає (6.200). Після обернення по α встановлюється (6.201), а після обернення (6.201) по s — (6.202). Зауважимо, що при $\lambda < \infty$ для східчастих майже напівнеперервних знизу процесів $p_-(s) = cs(s+\lambda)^{-1}\rho_+^{-1}(s) = cs(s+\lambda)^{-1}\mathbf{E}\left[\xi^+(\theta_s)|\xi^+(\theta_s)\right]$. Звідси після обернення по s можна одержати (6.203). Дійсно, якщо позначити

$$
\begin{aligned}
M'_+(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\left[\xi^+(t)\,|\,\xi^+(t)>0\right] = \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > x|\xi^+(t)>0\right\}dx,
\end{aligned}
$$

тоді

$$
\begin{aligned}
M'_+(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left\{\tau^+(x) < t|\tau^+(0) < t\right\}dt = \\
&= \int_0^\infty t^{-1}x d\mathbf{P}\left\{\xi(t) < x\right\} = t^{-1}\mathbf{E}_+(t), \quad t>0. \qquad (6.206)
\end{aligned}
$$

При $\lambda \leq \infty$ оберненням другої формули в (6.199) по α визначається розподіл $\xi^-(\theta_s)$

$$P_-(s,x) = c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}P(s,z)dz + c\mathbf{E}\left[\xi^+(\theta_s)/\xi^+(\theta_s) > 0\right] \times$$
$$\times \left[P(s,x) - c\int_{-\infty}^{x} e^{-c(x-z)}P(s,z)dz\right], \quad x < 0. \quad (6.207)$$

Після обернення (6.207) по s встановлюється перша формула в (6.204), а з урахуванням (6.206) — друга й теорема 6.20 доведена.

Слід відзначити, що формула (6.203) для процесів ризику з випадковими преміями є аналогом формули (6.185) (формули Prabhu для класичного процесу ризику). □

Одержані в теоремах 6.19, 6.20 співвідношення (6.185), (6.186) та (6.202), (6.203) непридатні для визначення розподілу ξ^- граничним переходом $t \to \infty$ (за винятком атомарної ймовірності $p_- = 1 - q_- = \frac{m}{a}$, $q_- = \frac{\lambda\mu_1}{a}$ у випадку напівнепервності зверху). Але при $m > 0$ х.ф. ξ^- визначається в § 3.6. В наступній теоремі (без доведення) зібрані вище одержані співвідношення для атомарних імовірностей.

Теорема 6.21. *Для напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$ з обмеженою варіацією згідно з* (3.151) *при $z = 0$ ($a < 0$)*

$$q_+(s) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > 0\right\} = \frac{1}{|a|}\int_0^\infty e^{-y\rho_-(s)}\Pi(y)dy, \quad (6.208)$$

$$q_+ = \lim_{s\to 0} q_+(s) = \frac{\widetilde{\Pi}(0)}{|a|},$$

$$p_+ = 1 - q_+ = \frac{|m|}{|a|} \quad \textit{при } m = \int_0^\infty \Pi(x)dx - a < 0.$$

Для напівнеперевних зверху $\xi(t)$ з обмеженою варіацією справедливі аналогічні співвідношення

$$q_-(s) = \mathbf{P}\left\{\xi^-(\theta_s) < 0\right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^0 e^{y\rho_+(s)}\Pi(y)dy, \quad (6.209)$$

$$q_- = \frac{\widetilde{\Pi}(0)}{a}, \quad p_- = 1 - q_- = \frac{m}{a} \quad \textit{при } m = a - \int_{-\infty}^0 \Pi(x)dx > 0.$$

Для майже напівнеперервних знизу $\xi(t)$ *з* $b > 0$ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \infty$, $\lambda_{1,2}$ — *інтенсивності додатних (від'ємних) стрибків, з*

$$\begin{aligned}
&m = \mathbf{E}\xi(1) = \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 b^{-1} = (\lambda_1\mu_1 b - \lambda_2)b^{-1}, \quad p = \lambda_1\lambda^{-1},\\
&q = \lambda_2\lambda^{-1}, \quad F_1(x) = \mathbf{P}\left\{\xi_1 < x\right\}, \quad x > 0,\\
&q_+(s) = \frac{\lambda p}{s+\lambda}\left[1 + bq_-(s)\int_0^\infty e^{-y\rho_-(s)}\overline{F}_1(y)dy\right], \qquad (6.210)\\
&q_+ = p\left(1 + b\mu_1\right), \quad p_+ = 1 - q_+ = \frac{b|m|}{\lambda} \quad \text{при } m < 0.
\end{aligned}$$

Для майже напівнеперервних зверху $\xi(t)$ *з* $\lambda < \infty$ *справедливі аналогічні співвідношення* ($m = \lambda_2 c^{-1} - \lambda_1\mu_1$, $c > 0$)

$$\begin{aligned}
&q_-(s) = \frac{\lambda p}{s+\lambda}\left[1 - cq_+(s)\int_{-\infty}^0 e^{y\rho_-(s)}F_1(y)dy\right], \qquad (6.211)\\
&q_- = p\left(1 - c\int_{-\infty}^0 F_1(y)dy\right), \quad p_- = 1 - q_- = \frac{cm}{\lambda} \quad \text{при } m > 0.
\end{aligned}$$

Із (6.189) випливає запис для $p_-(s)$

$$\begin{aligned}
p_-(s) &= \frac{c}{s+\lambda}s\int_0^\infty e^{-sy}y^{-1}\mathbf{E}_+(y)dy =\\
&= \frac{c}{s+\lambda}\int_0^\infty \left|N_s^+(x)\right| dx. \qquad (6.212)
\end{aligned}$$

За тауберовою теоремою обчислюється граничне значення

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0} p_-(s) = p_- = \frac{c}{\lambda}\lim_{s\to 0} s\int_0^\infty \left|N_s^+(x)\right| dx;\\
&\lim_{s\to 0}\int_0^\infty s\int_0^\infty e^{-sy}y^{-1}\overline{F}(y,x)dxdy =\\
&\quad = \lim_{s\to 0} s\int_0^\infty e^{-sy}y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y)dy.
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\lim_{s\to 0} s\int_0^\infty N_s(y)dy = \lim_{y\to\infty}\frac{\mathbf{E}_+\xi(y)}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{my - \mathbf{E}_-\xi(y)}{y} = m.$$

Отже при обчисленні p_- другим способом ми одержали теж саме значення $p_- = \frac{cm}{\lambda}$ при $m > 0$ і важливі граничні співвідношення при $m > 0$:

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1}\mathbf{E}_-\xi(y) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} y^{-1}\mathbf{E}_+\xi(y) = m, \tag{6.213}$$
$$\lim_{y\to\infty} \int_{R^-} F(y,x)dx = 0, \quad \lim_{y\to\infty} y^{-1} \int_{R^+} \overline{F}(y,x)dx = m.$$

Ще один простий спосіб визначення p_- випливає із раніше наведеного співвідношення

$$p_-(s) = \frac{s}{s+\lambda}\frac{c}{\rho_+(s)} = \frac{c}{s+\lambda}\frac{s}{\rho_+(s)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} p_- = \frac{c}{\lambda}m. \tag{6.214}$$

Теорема 6.22. *При умові* $\mathbf{P}\{\tau^-(0) = 0\} = 0$ (*аналог умови* (3.275)) *генератриса* ξ^- *визначається граничною формулою Полячека–Хінчіна. Для напівнеперервного зверху процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (6.155) $\left(\sigma = 0, a > 0, \int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty\right)$

$$\mathbf{E}e^{-z\xi^-} = \frac{p_-}{1 - q_-\widetilde{\Pi}(z)/\widetilde{\Pi}(0)}, \quad q_- = \frac{1}{a}\widetilde{\Pi}(0), \tag{6.215}$$
$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Pi(dx), \quad x < 0, \quad \widetilde{\Pi}(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{zx}\Pi(x)dx.$$

Якщо $\lambda < \infty$, $\widetilde{\Pi}(x) = \lambda F(x)$, $x < 0$,

$$\widetilde{\Pi}(z) = \lambda \int_0^\infty e^{zx}F(x)dx = \lambda\widetilde{F}(z).$$

Для східчастих майже напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$ ($a = 0$, $\Pi(0) < \infty, \lambda = \lambda_1 + \Pi(0)$, $\Pi(x) = \Pi(0)F_1(x)$, $x < 0$) *при* $m > 0$ *має місце аналог класичної формули Полячека–Хінчина* (*див. також* (6.60) *для майже напівнеперервних знизу* $\zeta(t)$)

$$\mathbf{E}e^{z\xi^-} = p_-\left[1 - q_-\frac{\varphi_1(z) + c\widetilde{F}_1(z)}{1 + c\widetilde{F}_1(0)}\right]^{-1}, \tag{6.216}$$
$$\varphi_1(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{zx}dF_1(x), \quad \widetilde{F}_1(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{zx}F_1(x)dx,$$
$$\varphi_1(z) = 1 - z\widetilde{F}_1(z), \quad p_- = \frac{cm}{\lambda}, \quad q_- = 1 - p.$$

Закінчуючи вивчення теоретико-ризикових проблем в розділах 4–6 для процесів ризику зі значеннями в R^1, відмітимо такий факт. Ми оминули деякі розглянуті в розділах 4–6 проблеми для випадку, коли розподіли вимог $F(x)$ належать до класу розподілів з "важкими хвостами" $\overline{F}(x)$ — класу підпоказникових розподілів (subexponential or "heavy-tailed" distributions). Властивості таких розподілів вивчались, наприклад, у [130], на основі яких встановлюється наближення (див. [130, (4.6), с. 17])

$$\Psi(u) \approx (\rho\mu_1)^{-1}\overline{\overline{F}}(u), \quad \mu_1 = \overline{\overline{F}}(0), \quad u \to \infty. \tag{6.217}$$

До вказаного класу розподілів належать розподіли:

1) З правильно змінними хвостами ($\alpha > 1$; $x \to \infty$)

$$\overline{F}(x) \sim L(x)x^{-\alpha}, \quad \frac{L(tx)}{L(x)} \underset{x\to\infty}{\to} 1, \quad t > 0; \quad \overline{\overline{F}}(x) \sim \frac{L(x)x^{1-\alpha}}{\mu_1^2(\alpha-1)}.$$

2) Вейбула–Гнєденко з параметром $0 < \beta < 1$, $x > 0$, $\mu_1 = \beta^{-1}\Gamma(\beta^{-1})$,

$$\overline{F}(x) = \exp\{-x^\beta\};$$
$$\overline{\overline{F}}(x) \sim \frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\Gamma(\beta^{-1})}x^{1-\beta}\exp\{-x^\beta\}, \quad x \to \infty.$$

3) Логнормальний з параметрами (m, σ), $\mu_1 = e^{m+\sigma^2 2^{-1}}$, $x > 0$

$$\overline{F}(x) = \overline{\Phi}\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right),$$
$$\overline{\overline{F}}(x) \sim \frac{1}{\mu_1}\sigma x \exp\left\{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \to \infty.$$

4) Парето з параметрами $(\lambda, a > 0)$ і щільністю

$$f(x) = \frac{\alpha I_{x>a}}{\lambda(1+(x-a)\lambda^{-1})^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0;$$
$$\text{при } k \le \alpha - 1, \quad \mu_k < \infty;$$

зокрема, при $a = 0$, $\lambda = 1$

$$f(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1}, \quad \overline{F}(x) = (1+x)^{-\alpha},$$

$$\overline{\overline{F}}(x) = \frac{1}{\alpha - 1}(1+x)^{1-\alpha}, \quad \mu_k = \frac{\alpha}{\alpha - k}, \quad k \le \alpha - 1, \quad \alpha > 1.$$

Основні формули для ймовірностей банкрутства $\Psi(u)$ та їх наближення можна знайти на сторінках додатків в кінці монографії.

Приклад 6.7. Нехай $\zeta(t)$ процес із прикладу 5.1. На основі його результатів (або вказівок до задач 20.6–20.7 в [69]) довести, що

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(s,\mu,u) &= \frac{\mu}{\mu - u}\left[1 - \frac{(\mu+3)(\mu+7)P_2(s,-\mu)}{(u+3)(u+7)P_2(s,-\mu)}\right] = \\ &= \mu\left[\frac{\widetilde{Q}_1(s,\mu)}{u+3} + \frac{\widetilde{Q}_2(s,\mu)}{u+7}\right], \quad P_2(s,-\mu) = (\mu + r_2(s))(\mu + r_3(s)).\end{aligned}$$

Обчислити $\widetilde{Q}_{1,2}(s,\mu) = (a_{1,2}(s)\mu + b_{1,2}(s))P_2^{-1}(s,-\mu)$ і шляхом обернення по u, μ довести, що має місце співвідношення

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\gamma^+(x) > z, \zeta^+(\theta_s) > x\} = \\ &\quad = e^{-3z}Q_1(s,x) + e^{-7z}Q_2(s,x), \quad x,z > 0, \\ &Q_{1,2}(s,x) = p_{1,2}(s)e^{-r_2(s)x} + q_{1,2}(s)e^{-r_3(s)x}, \\ &\sum_{k=1}^{2}(p_k(s) + q_k(s)) = q_+(s),\end{aligned}$$

а також граничне співвідношення при $s \to 0$ ($r_{2,3}(s) \to 1;\, 6$)

$$\Phi_1(x,z) = e^{-3z}\left(\frac{3}{5}e^{-x} - \frac{1}{10}e^{-6x}\right) + e^{-7x}\left(\frac{3}{35}e^{-x} + \frac{9}{10}e^{-6x}\right),$$

яке узгоджується з відповіддю до задачі 20.7 в [69].

Принагідно відзначимо, що частина прикладів увійшла в останній розділ збірника задач [69] з відповідними вказівками та відповідями.

Розділ 7

Ґратчасті пуассонівські процеси та випадкові блукання

7.1 Факторизаційні тотожності для ґратчастих пуассонівських процесів

Однорідний процес з н.п. $\{\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = 0\}$ називається ґратчастим пуассонівським процесом, якщо $a = 0$ і стрибкова міра Леві зосереджена в послідовності точок $\{x_r = rh\}$ ($h > 0$, $r \neq 0$ — ціле) і визначається співвідношенням

$$\Pi(x_r) = \lambda p_r, \quad p_r = \mathbf{P}\{\xi_1 = rh\}, \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Генератриса такого процесу визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} &g_t(z) =: \mathbf{E} z^{\xi(t)} = e^{tk(z)}, \quad |z| = 1, \\ &k(z) = \lambda(p(z) - 1), \quad p(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1} = \sum_{r \neq 0} z^{rh} p_r. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $h = 1$ і розглядати тільки цілозначні процеси. Як і раніше функцію $k(z) = \ln g_1(z)$ називаємо кумулянтою процесу. Нагадаємо деякі означення.

Означення 7.1. Цілозначний пуасонівський процес

$$\xi(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \xi_0 = \xi(0) = 0,$$

де $\nu(t)$ — простий пуассонівський процес з параметром $\lambda > 0$, називається *напівнеперервним знизу*, якщо виконується умова

$$\mathbf{E}[z^{\xi_1} \,|\, \xi_1 < 0] = z^{-1}, \quad |z| \ge 1. \tag{7.2}$$

Якщо умовна генератриса стрибків задовольняє умову

$$\mathbf{E}\big[z^{\xi_1} \,|\, \xi_1 < 0\big] = \frac{1-b}{z-b} \quad (0 < b < 1,\ |z| \ge 1), \tag{7.3}$$

тоді процес $\xi(t)$ називається *майже напівнеперервним знизу*.

Означення 7.2. Якщо для процесу $\xi(t)$ умовна генератриса стрибків задовольняє умову

$$\mathbf{E}[z^{\xi_1}|\xi_1 > 0] = z, \quad |z| \le 1, \tag{7.4}$$

тоді $\xi(t)$ називається *напівнеперервним зверху*. Якщо замість (7.4) виконується умова

$$\mathbf{E}[z^{\xi_1}|\xi_1 > 0] = \frac{(1-c)z}{1-cz} \quad (0 < c < 1,\ |z| \le 1), \tag{7.5}$$

тоді $\xi(t)$ називається *майже напівнеперервним зверху*.

Зауважимо, що з умов майже напівнеперервності при $c = 0$ та $b = 0$ випливають умови напівнеперервності. Крім того, умови (7.2), (7.3) та (7.4), (7.5) відповідно еквівалентні раніше розглядуваним умовам (1.80) та (1.84). Нагадаємо, що для геометрично розподілених випадкових величин $\xi > 0$ з параметром c (див. (7.5)) $\mathbf{E}\xi = (1-c)^{-1}$, $\mathbf{D}\xi = c(1-c)^{-2}$,

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = (1-c)c^{k-1}, \quad \mathbf{P}\{\xi \ge k\} = c^{k-1}, \quad k \ge 1.$$

Якщо θ_s — показниково розподілена випадкова величина з параметром $s > 0$, тоді

$$g(s,z) := \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-k(z)}, \quad |z| = 1. \tag{7.6}$$

Як і раніше будемо вживати позначення $\xi^{\pm}(t)$, $\xi^{\pm}(\theta_s)$, а також

$$g_{\pm}(s,z) = \mathbf{E} z^{\xi^{\pm}(\theta_s)} \quad (|z| \leq 1,\ |z| \geq 1).$$

Для функціоналів, пов'язаних з перетином цілозначного рівня виникає необхідність у користування "роздвоєних" позначень деяких функціоналів, обумовлених тим, що цілозначний процес $\xi(t)$ може попадати на фіксований цілозначний рівень з додатною ймовірністю. Тому для раніше розглянутих перестрибкових функціоналів будемо вживати позначення такого типу ($x > 0$):

$$\begin{aligned}
&\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \quad \overline{\tau}^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) \geq x\},\\
&\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x, \quad \overline{\gamma}^+(x) = \xi(\overline{\tau}^+(x)) - x,\\
&\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \quad \overline{\gamma}_+(x) = x - \xi(\overline{\tau}^+(x) - 0),\\
&\gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x), \quad \overline{\gamma}_x^+ = \overline{\gamma}^+(x) + \overline{\gamma}_+(x).
\end{aligned}$$

Аналогічний запис буде використовуватись для нижніх функціоналів при цілих $x < 0$:

$$\tau^-(x), \quad \overline{\tau}^-(x); \quad \gamma^-(x), \quad \overline{\gamma}^-(x); \quad \text{і т.д.}$$

Сформулюємо твердження про безмежно подільну факторизацію (б.п.ф.) (див. [177, 178]).

Лема 7.1. *Для цілозначних пуассонівських процесів генератриса $\xi(\theta_s)$ допускає розклад*

$$g(s,z) = \mathbf{E} z^{\xi_s^+} \mathbf{E} z^{\xi_s^-}, \quad |z| = 1, \tag{7.7}$$

де $\xi_s^{\pm}$ ($\xi_s^+ \geq 0$, $\xi_s^- \leq 0$) — цілозначні безмежно подільні випадкові величини з генератрисами

$$\mathbf{E} z^{\xi_s^{\pm}} = \exp\left\{ \sum_{\pm k > 0} (z^k - 1) n_k^{\pm}(s) \right\}, \quad (|z| \leq 1, |z| \geq 1), \tag{7.8}$$

$$n_k^{\pm}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-1} p_n(t) dt, \quad p_k(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}, \quad \pm k \geq 1. \tag{7.9}$$

Доведення. Згідно із зображенням $\ln g(s,z)$ інтегралом Фруллані

$$\ln \frac{s}{s - k(z)} = \int_0^{\infty} t^{-1} (e^{t(k(z)-s)} - e^{-ts}) dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{-1} e^{-st} \sum_{k\neq 0} (z^k - 1) p_k(t) dt \tag{7.10}$$

і права частина (7.10) розкладається на суму двох інтегралів

$$I_\pm(s) = \sum_{\pm k>0} (z^k - 1) n_k^\pm(s) \quad (n_k^\pm(s) \text{ див. в } (7.9)),$$

що визначають х.ф. розподілів двох незалежних безмежно подільних розподілів. □

Сформулюємо без доведення низку тверджень із [177], аналоги яких доведені в розділах 2, 3 для процесів з недискретною фазою.

Теорема 7.1. *Для х.ф. $g(s,z)$ має місце основна факторизаційна тотожність (о.ф.т.)*

$$g(s,z) =: \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} = g_+(s,z) g_-(s,z), \quad |z| = 1, \tag{7.11}$$

множники якої ідентичні з компонентами б.п.ф. (7.9)

$$g_\pm(s,z) =: \mathbf{E} z^{\xi^\pm(\theta_s)} = \exp\left\{\sum_{\pm k>0} (z^k - 1) n_k^\pm(s)\right\}, \quad \pm|z| \le 1, \tag{7.12}$$

$$p_\pm(s) =: \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\} = g_\pm(s, 0),$$

де $n_k^\pm(s)$ визначається в (7.9). *Співвідношення* (7.12) *називається дискретним аналогом тотожностей Спітцера. Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) = \lambda\mu < 0$ ($\mu = \mathbf{E}\xi_1$), тоді при $k > 0$*

$$n_k^+(0) = \int_0^\infty t^{-1} p_k(t) dt < \infty, \quad \sum_{k>0} n_k^+(0) < \infty,$$

і генератриса абсолютного максимуму $\xi^+ = \lim_{t\to\infty} \xi^+(t)$ визначається співвідношенням

$$g_+(z) = \mathbf{E} z^{\xi^+} = \exp\left\{\sum_{k>0} (z^k - 1) n_k^+(0)\right\},$$

$$p_+ =: \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = g_+(0) = \exp\left\{-\sum_{k>0} n_k^+(0)\right\}. \tag{7.13}$$

Аналогічно при $m > 0$ $n_k^-(0) < \infty$ *для* $k < 0$ *і генератриса* $\xi^- = \lim_{t\to\infty} \xi^-(t)$ *визначається співвідношенням*

$$g_-(z) = \mathbf{E} z^{\xi^-} = \exp\left\{\sum_{k<0} (z^k - 1) n_k^-(0)\right\},$$

$$p_- =: \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \exp\left\{-\sum_{k<0} n_k^-(0)\right\}. \tag{7.14}$$

Для спільного розподілу пари $\{\xi(\theta_s), \xi^{\pm}(\theta_s)\}$ справедлива

Теорема 7.2. *Генератриса пари* $\{\xi(\theta_s), \xi^{\pm}(\theta_s)\}$ *визначається співвідношеннями*

$$\mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} v^{\xi^+(\theta_s)} = g_+(s, zv) g_-(s, z), \quad |z| = |v| = 1,$$

$$\mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)} v^{\xi^-(\theta_s)} = g_-(s, zv) g_+(s, z); \tag{7.15}$$

$$\mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) < x] = g_-(s, z) \mathbf{E}[z^{\xi^+(\theta_s)}, \xi^+(\theta_s) < x], \ x > 0. \tag{7.16}$$

Позначимо $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ — геометрично розподілену випадкову величину

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k, \quad k \geq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

На основі стохастичних співвідношень зв'язку між $\tau^+(x)$ та $\gamma^+(x)$ $(\overline{\tau}^+(x), \overline{\gamma}^+(x))$

$$\tau^+(n+r) \doteq \begin{cases} \tau^+(r), \gamma^+(r) > n, \\ \tau^+(r) + \tau^+(n - \gamma^+(r)), \quad \gamma^+(r) \leq n; \end{cases}$$

$$\overline{\tau}^+(n+r) \doteq \begin{cases} \overline{\tau}^+(r), \overline{\gamma}^+(r) \geq n, \\ \overline{\tau}^+(r) + \overline{\tau}^+(n - \overline{\gamma}^+(r)), \quad \overline{\gamma}^+(r) < n; \end{cases}$$

доводяться співідношення для генератрис пар $\{\tau^+(\cdot), \gamma^+(\cdot)\}$, $(\{\overline{\tau}^+(\cdot), \overline{\gamma}^+(\cdot)\})$, які називають другими факторизаційними тотожностями,

$$T(s, x, z) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)} z^{\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$\widetilde{T}(s, \varepsilon, z) = (1-\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^x T(s, z, x).$$

Теорема 7.3. *Спільні генератриси пар* $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, $\{\overline{\tau}^+(x), \overline{\gamma}^+(x)\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$T(s,x,z) = \mathbf{E}[z^{\xi^+(\theta_s)-x}, \xi^+(\theta_s) > x] g_+(s,z)^{-1}, \tag{7.17}$$

$$\widetilde{T}(s,\varepsilon,z) =: \mathbf{E}[z^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon] = \frac{(1-\varepsilon)z}{z-\varepsilon}\left[1 - \frac{g_+(s,\varepsilon)}{g_+(s,z)}\right];$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\overline{\tau}^+(x)} z^{\overline{\gamma}^+(x)}, \overline{\tau}^+(x) < \infty] =$$
$$= \mathbf{E}[z^{\xi^+(\theta_s)-x}, \xi^+(\theta_s) \geq x] g_+(s,z)^{-1}, \tag{7.18}$$

$$\mathbf{E}[e^{-s\overline{\tau}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} z^{\overline{\gamma}^+(\overline{\nu}_\varepsilon)}, \overline{\tau}^+(\nu_\varepsilon) < \infty] = \frac{1-\varepsilon}{z-\varepsilon}\,\frac{zg_+(s,z) - \varepsilon g_+(s,\varepsilon)}{g_+(s,z)}.$$

Генератриси $\xi^+(\theta_s)$ *та пари* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *пов'язані співвідношенням*

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)} z^{\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = \mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0] =$$
$$= 1 - \frac{p_+(s)}{g_+(s,z)}, \quad g_+(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}, \tag{7.19}$$

з якого випливає допграничне узагальненння формули Полячека–Хінчина для цілозначних пуассонівських процесів

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)} | \xi^+(\theta_s) > 0]}. \tag{7.20}$$

Якщо $m < 0$, *тоді* ξ^+ *має невироджену генератрису*

$$\mathbf{E}z^{\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+ > 0]}. \tag{7.21}$$

Зауважимо, що (7.20), (7.21) є аналогами співвідношень (2.30) та (2.33), в яких для $\xi^+(\theta_s)$ та ξ^+ одержується зображення їх генератрис у термінах умовних генератрис

$$\widetilde{g}_s(z) = \mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+(\theta_s) > 0],$$
$$\widetilde{g}_0(z) = \mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)} \,|\, \xi^\pm > 0], \quad m < 0.$$

Розглянемо напівнеперервний зверху цілозначний пуассонівський процес $\xi(t)$ з кумулянтою $k(z) = t^{-1}\mathbf{E}z^{\xi(t)}$

$$k(z) = \lambda\left(pz + q\sum_{k\leq -1} z^k p'_k - 1\right), \quad \sum_{k\leq -1} p'_k = 1. \tag{7.22}$$

Теорема 7.4. *Якщо* $\xi(t)$ *напівнеперервний зверху процес, тоді генератриси* $\tau^+(x)$ $(\overline{\tau}^+(x))$ *визначаються співвідношеннями*

$$T(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = q_+(s)^{x+1},$$
$$\overline{T}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\overline{\tau}^+(x)}, \overline{\tau}^+(x) < \infty] = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq x\} = q_+(s)^{x},$$
$$p_k^+(s) = \overline{T}(s,k) - T(s,k) = p_+(s)q_+(s)^k, \quad q_+(s) = z_s^{-1}, \qquad (7.23)$$

де $z_s > 1$ *— додатний корінь рівняння Лундберга:* $k(z) = s$, *а генератриса* $\xi^+(\theta_s)$ *визначається співвідношенням*

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)z}, \quad q_+(s) = z_s^{-1}. \qquad (7.24)$$

Якщо $\xi(t)$ *— майже напівнеперервний зверху процес* (*див.* (7.5) *з* $0 < c < 1$), *тоді* $z_s^{-1} = cp_+(s) + q_+(s)$,

$$T(s,x) = q_+(s)z_s^{-x}, \quad \overline{T}(s,x) = q_+(s)z_s^{-x+1}, \quad x \geq 0. \qquad (7.25)$$

Доведення. Почнемо з майже напівнеперервного випадку, коли

$$k(z) = \lambda(pp_1(z) + qp_2(z)) - \lambda, \quad p_k = qp'_k, \quad k \leq -1,$$
$$p_1(z) = \frac{(1-c)z}{1-cz}, \quad p_2(z) = \sum_{k \leq -1} z^k p'_k, \quad p_2(1) = 1.$$

З очевидного стохастичного співвідношення

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta, \quad \xi > x, \quad \mathbf{P}\{\xi > x\} = pc^x, \quad x > 0, \\ \zeta + \tau^+(x - \xi), \quad \xi \leq x \end{cases}$$

виводиться рівняння

$$T(s,x) = \frac{\lambda p}{s+\lambda}c^x + \frac{\lambda}{s+\lambda}\sum_{k=-\infty}^{x} T(s, x-k)p_k, \quad x \geq 0, \qquad (7.26)$$

розв'язок якого шукається у вигляді степеневої функції

$$T(s,x) = q_+(s)c(s)^x, \quad c(s) = z_s^{-1} \quad (k(z_s) = s).$$

Після підстановки його розв'язку в (7.26) одержимо співвідношення

$$c(s)^x(s+\lambda)q_+(s) = \lambda pc^x + \lambda q_+(s)\sum_{k \leq x} c(s)^{x-k}p_k,$$

з якого при $x = 0$ випливає, що $q_+(s) = p_1^{-1}(z_s)$ і вибрана степенева функція з $c(s) = z_s^{-1}$, де z_s — корінь рівняння Лундберга, є розв'язком рівняння (7.26) і, таким чином, (7.25) доведено. При $c = 0$ $q_+(s) = c(s) = z_s^{-1}$ і з (7.25) випливає перше співвідношення (7.23). Аналогічно доводиться співвідношення для $\overline{T}(s,x)$. Після твірного перетворення розподілу $\xi^+(\theta_s)$

$$p_k^+(s) = \overline{T}(s,k) - T(s,k) \quad (k \geq 0)$$

легко знайти генератрису для $\xi^+(\theta_s)$ (7.24). □

Надалі позначатимемо урізані генератриси для $\xi(\theta_s) \leq -k$ $(k \geq 0)$

$$g_{-k}^-(s,z) = \sum_{r \leq -k} z^r p_r(s), \quad g_0^-(s,z) = [g(s,z)]_-^0,$$
$$p_r(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = r\}.$$

Слід відмітити, що проекції $[g_+^{-1}(s,z)g_0^-(s,z)]_-^0$ відповідає твірна функція

$$a_-(s,z) = \left[\frac{1 - zz_s^{-1}}{1 - cz} g_0^-(s,z)\right]_-^0 = \sum_{r \geq 0} a_{-r}(s) z^{-r},$$
$$a_-(s,1) = p_+(s),$$
$$a_{-r}(s) = p_{-r}(s) + (c - z_s^{-1}) \sum_{k \geq r+1} p_{-k}(s) c^{k-r-1}.$$

На основі теореми 7.4 встановлюється

Теорема 7.5. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху цілозначний процес, тоді генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається через корінь $z_s = k^{-1}(s)$ $(k(z_s) = s,\ c < z_s^{-1} = q_+(s) + cp_+(s) < 1,\ |z| \leq 1)$*

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)(1-cz)}{1 - zz_s^{-1}}, \quad g_+(s,z) - p_+(s) = q_+(s)\frac{(1 - z_s^{-1})z}{1 - zz_s^{-1}},$$
$$p_+(s) = \frac{1 - z_s^{-1}}{1 - c}, \quad q_+(s) = p_1^{-1}(z_s) = \frac{z_s^{-1} - c}{1 - c}, \tag{7.27}$$
$$p_k^+(s) = p_+(s)(1 - cz_s)z_s^{-k} = q_+(s)(1 - z_s^{-1})z_s^{1-k}, \quad k \geq 1;$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq k\} = q_+(s) z_s^{1-k}, \quad z_s = \hat{z}_s \in (1, c^{-1}), \quad k \geq 1.$$

Для $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *має місце співвідношення*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}z^{\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = \mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0] = \\
&\quad = q_+(s)\frac{(1-c)z}{1-cz}, \quad \mathbf{E}z^{\gamma^+(0)} = \frac{(1-c)z}{1-cz}.
\end{aligned} \tag{7.28}
$$

Розподіл $\xi^-(\theta_s)$ *визначається через розподіл від'ємних значень* $\xi(\theta_s)$

$$
\begin{aligned}
&g_-(s,z) = \frac{1}{p_+(s)}\left[\left(1 + \frac{(cz_s-1)z}{z_s(1-cz)}\right)[g(s,z)]_-^0\right]_-^0, \quad z_s = z(s), \\
&p_k^-(s) = \frac{1}{p_+(s)}[p_k(s) + (c - z_s^{-1})c^{k-1}g_{k-1}^-(s,c^{-1})], \quad k < 0 \\
&p_+(s)\overline{P}(s,0) = p_0(s) + q_+(s)\mathbf{E}[c^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s) < 0]; \\
&p_-(s) = \frac{1}{p_+(s)}[p_0(s) + \frac{cz_s-1}{z_s c}\mathbf{E}[c^{|\xi(\theta_s)|}, \xi(\theta_s) < 0].
\end{aligned} \tag{7.29}
$$

Якщо $0 < c < 1$, *тоді з першої формули в* (7.29) *випливає запис* $g_-(s,z)$ *без проекції*

$$
\begin{aligned}
g_-(s,z) = \frac{1}{p_+(s)}\Big\{&g_0^-(s,z) + \\
&q_+(s)\frac{(1-c)z}{1-cz}\mathbf{E}[(c^{|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)}), \xi(\theta_s) < 0]\Big\}.
\end{aligned} \tag{7.30}
$$

Якщо $m > 0$, *тоді* $z_s \to 1$, $\frac{z_s}{s} \to z'(0) = \frac{1}{m}$, $p_+(s) \to 0$ *при* $s \to 0$,

$$
\begin{aligned}
&p_k^- = \mathbf{P}\{\xi^- = k\} = m(1-c)[p_k'(0) + (c-1)g_{k-1}'(0,c^{-1})] = \\
&\quad = \frac{1}{p_+'(0)}\left[p_k'(0) + (c-1)\sum_{r=1}^{\infty} p_{k-r}'(0)c^{r-1}\right], \\
&k \leq -1, \quad p_+'(0) = \frac{z'(0)}{1-c}.
\end{aligned}
$$

Якщо $m < 0$, *тоді* $z_s \to z_0 = (q_+ + cp_+)^{-1} > 1$ *при* $s \to 0$ *і генератриса* ξ^+ *з* $p_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = (1 - z_0^{-1})(1-c)^{-1} > 0$ *має вигляд*

$$
g_+(z) = p_+ + q_+\frac{(1-z_0^{-1})z}{1-zz_0^{-1}}, \quad p_k^+ = q_+z_0^{1-k}(1-z_0^{-1}), \quad k \geq 1.
$$

Якщо $c = 0$, тоді $q_+(s) = z_s^{-1}$ і (7.29) спрощуються.

$$g_-(s,z) = \frac{1}{p_+(s)}[g_0(s,z) - q_+(s) z g_{-1}^-(s,z)], \quad p_+(s) = \frac{p_0(s)}{\overline{P}(s,0)},$$
$$p_-(s) = \frac{1}{p_+(s)}[p_0(s) - p_{-1}(s) q_+(s)],$$
$$p_k^-(s) = \frac{1}{p_+(s)}[p_k(s) - q_+(s) p_{k-1}(s)], \quad k < 0.$$

Доведення. Співвідношення (7.28) випливає з (7.19). На основі о.ф.т. після проектування визначається генератриса $g_-(s,z)$, після обернення якої по z знаходиться розподіл $\xi^-(\theta_s)$ в (7.29). Звідси після твірного перетворення одержимо генератрису (7.30) без проектування. Граничним переходом $(s \to 0)$ з одержаних співвідношень визначаються розподіли $\xi^\pm$ при $\mp m > 0$. Для $c = 0$ із (7.26)–(7.30) легко одержуються відповідні спрощення для напівнеперервного випадку. Зокрема, при $c = 0$ зв'язок між $p_0(s)$ та $p_+(s)$ $(p_0(s) = p_+(s)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \geq 0\})$ подібний до формули зв'язку між $\rho_+(s)$ та $P'(s,0)$ (3.14) для напівнеперервних зверху процесів $\xi(t) \in R$. □

Аналогічна теорема доводиться для майже напівнеперервних знизу процесів з кумулянтою

$$k(z) = \lambda \left(q \frac{1-b}{z-b} + p\mathbf{E} z^{\xi_1} - 1 \right),$$

$(\lambda_1 = \lambda p$ — інтенсивність стрибків $\xi_1 \geq 1)$, якщо ввести урізані генератриси

$$g_k(s,z) = \sum_{r \geq k} z^r p_r \underset{z \to 1}{\to} \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \geq k\}, \quad g_0(s,z) = [g(s,z)]_+^0.$$

Тоді проекційній дужці $[g_-^{-1}(s,z) g_0(s,z)]_+^0$ відповідає з точністю до незалежного від z множника твірна функція

$$a_+(s,z) = \left[\frac{(z - z_s) z^{-1}}{1 - z^{-1} b} g_0(s,z) \right]_+^0 = \sum_{r \geq 0} a_r(s) z^r, \quad z_s \in (b,1),$$
$$a_r(s) = p_r(s) + (b - z_s) b^{-r-1} g_{r+1}(s,b),$$
$$a_+(s,1) = p_-(s), \quad r \geq 0.$$

Теорема 7.6. *Якщо $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес $(0<b<1)$, тоді $z_s = q_-(s) + bp_-(s)$,*

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_s}, \quad p_-(s) = \frac{1-z_s}{1-b}, \quad |z| \geq 1 \tag{7.31}$$

$$p^-_{-k}(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad b < z_s < 1.$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається проекційним співвідношенням

$$g_+(s,z) = \frac{1}{p_-(s)}\left[\frac{1-z_s z^{-1}}{1-bz^{-1}}\sum_{k\geq 0} z^k p_k(s)\right]_+^0 = \frac{a_+(s,z)}{a_+(s,1)}, \tag{7.32}$$

$$p^+_k(s) = \frac{1}{p_-(s)}\left[p_k(s) + (b-z_s)b^{-k-1}g_{k+1}(s,b)\right], \quad k \geq 0.$$

$$p_-(s)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \leq 0\} = p_0(s) + q_-(s)\mathbf{E}[b^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0] \underset{b\to 0}{\to} p_0(s).$$

Згідно з (7.32) *генератриса $\xi^+(\theta_s)$ (без проекції) має вигляд*

$$g_+(s,z) = \frac{1}{p_-(s)}[g_0(s,z) + q_-(s)\frac{b-1}{b-z}(g_1(s,b) - g_1(s,z))].$$

Якщо $m<0$, тоді $z_s = z(s) \to 1$ при $s \to 0$, $p'_-(0) = -\frac{z'(0)}{1-b}$ $(z'(0) = m^{-1} < 0)$ і генератриса ξ^+ має вигляд

$$g_+(z) =: \mathbf{E}z^{\xi^+} = \frac{1}{p'_-(0)}\left[\left(1 + (b-1)\sum_{k=1}^{\infty} b^{k-1}z^{-k}\right)\sum_{k=0}^{\infty} z^k p'_k(0)\right]_+^0,$$

$$p^+_k = \frac{1}{p'_-(0)}\left[p'_k(0) - (1-b)\sum_{r=1}^{\infty} b^{r-1}p'_{k+r}(0)\right], \quad k \geq 0. \tag{7.33}$$

Якщо $m>0$, тоді $z(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} z_0 \in (b,1)$ і генератриса ξ^- має вигляд

$$g_-(z) =: \mathbf{E}z^{\xi^-} = (1-z_0)\frac{1-bz^{-1}}{1-z_0 z^{-1}},$$

$$p_- = \frac{1-z_0}{1-b}, \quad p_{-k} = p_-(z_0 - b)z_0^{k-1}, \quad k \geq 1. \tag{7.34}$$

Для напівнеперервних знизу процесів ($b = 0$) (7.31)–(7.34) спрощуються; зокрема, для розподілу екстремумів знаходимо, що

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)}{1 - z^{-1}z(s)}, \quad T(s,x) = P_-(s,x) = z_s^{1-x}, \quad x \le 0,$$
$$p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[p_k(s) - z(s)p_{k+1}(s)], \quad z(s) = q_-(s), \quad k \ge 0.$$

Відповідно для розподілу абсолютних екстремумів маємо:

$$p_k^+ = \frac{1}{p'_-(0)}[p'_k(0) - p'_{k+1}(0)], \quad k \ge 0, \quad \text{якщо} \;\; m < 0;$$
$$p_k^- = p_- z_0^{-k}, \quad q_- = z_0 = q_- + bp_-, \quad k \le 0, \quad \text{якщо} \;\; m > 0.$$

Сформулюємо твердження про формулу двоїстості та деякі наслідки з неї. Надалі для спрощення позначатимемо $z_s = z(s)$ як при умові (7.4), так і при умові (7.5).

Лема 7.2. *Для майже напівнеперервних зверху (знизу) цілозначних пуасонівських процесів $\xi(t)$ мають місце співвідношення*

$$p_r(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = r\} = s z_s^{-r-1} z'_s \quad (k(z_s) = s, s > 0, r > 0), \tag{7.35}$$
$$\mathbf{P}\{\xi(t) = r\} = \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(r) < t | \tau^+(0) < t\} \;\; (r > 0), \tag{7.36}$$
$$\mathbf{P}\{\xi(t) = r\} = -\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^-(r) < t | \tau^-(0) < t\} \;\; (r < 0),$$

відповідно при умові (7.5) *та* (7.3).

Для напівнеперервних знизу цілозначних процесів формули (7.36) *спрощуються далі в* (7.42) *і справедливе співвідношення*

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t) \ge r\} = \mathbf{P}\{\xi^+(t) > r\} + \\ + \int_0^t p_k(t-y)\frac{1}{y}\mathbf{E}[|\xi(y)|, \xi(t) < 0]dy. \tag{7.37}$$

Доведення. При умові (7.5) на основі о.ф.т. встановлюється співвідношення

$$g(s,z) = \frac{p_+(s)(1 - cz)}{1 - z z_s^{-1}} g_-(s,z),$$

після проектування якого знаходимо, що

$$[g(s,z)]_+^0 = \left[\frac{p_+(s)g_-(s,z)}{1 - zz_s^{-1}}\right]_+^0 - cp_+(s)\left[\frac{zg_-(s,z)}{1 - zz_s^{-1}}\right]_+^0. \tag{7.38}$$

Першим проекційним дужкам $[\ ]_0^+$ відповідає послідовність $\{a_x\}_{x\geq 0}$,

$$a_x = p_+(s)\sum_{r=x}^{\infty} z_s^{-r} p_{x-r}^-(s) = p_+(s)\sum_{k=0}^{-\infty} p_k^-(s) z_s^{k-x}.$$

В той же час перерахована генератриса (після розкриття операції проектування $[\ ]_+^0$) зводиться до вигляду

$$A_s(z) = \sum_{x\geq 0} z^x a_x = p_+(s)\sum_{x\geq 0} z^x z_s \sum_{k\leq 0} p_k^-(s) z_s^k,$$

тобто

$$A_s(z) = p_+(s)g_-(s,z_s)\sum_{x\geq 0} z^x z_s^{-x},$$
$$a_x = p_+(s)g_-(s,z_s)z_s^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Аналогічно для других проекційних дужок знаходимо обернення

$$b_x = p_+(s)g_-(s,z_s)cz_s^{1-x}, \quad x \geq 0.$$

Отже після обернення (7.38) по z знаходимо розподіл $\xi(\theta_s) > 0$

$$p_r(s) = a_r - b_r = p_+(s)(1 - cz_s)g_-(s,z_s)z_s^{-r}, \quad r > 0. \tag{7.39}$$

На підставі (7.27) генератрису $g(s,z) = \frac{s}{s-k(z)}$ можна переписати так (оскільки $s = k(z_s)$, $z_s = z(s)$)

$$\frac{s(z_s - z)}{k(z_s) - k(z)} = p_+(s)(1 - cz_s)z_s g_-(s,z).$$

Звідси при $z \to z_s$ випливає, що

$$\frac{s}{k'(z_s)} = z_s p_+(s)(1 - cz_s)g_-(s,z_s) = sz_s'. \tag{7.40}$$

Таким чином із (7.39) та (7.40) випливає (7.35). Згідно з (7.27)

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq r\} = p_+(s)\frac{1-cz_s}{1-z_s^{-1}}z_s^{-r}, \quad p_+(s) = \frac{1-z_s^{-1}}{1-c}, \quad r > 1,$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq r\} = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > r-1\} = q_+(s)z_s^{1-r}, \quad r > 1,$$

тобто для майже напівнеперервних зверху $\xi(t)$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > r\} = q_+(s)z_s^{-r}, \quad r \geq 0, \tag{7.41}$$
$$z_s^{-r} = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > r \,|\, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{P}\{\tau^+(r) < \theta_s \,|\, \tau^+(r) < \theta_s\}.$$

Продиференціювавши (7.41) по s, знаходимо, що

$$-rz_s^{-r-1}z_s' = \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{P}\{\tau^+(r) < \theta_s \,|\, \tau^+(0) < \theta_s\}.$$

Після обчислення похідної по s одержимо співвідношення

$$(\mathbf{P}\{\tau^+(r) < \theta_s \,|\, \tau^+(0) < \theta_s\})_s' = \left(-\int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau^+(r) < t\} de^{-st}\right)_s' =$$
$$= \int_0^\infty te^{-st} d\mathbf{P}\{\tau^+(r) < t \,|\, \tau^+(0) < t\},$$

з якого випливає, що при $r > 0$

$$p_r(s) = \frac{s}{r}\int_0^\infty e^{-st} t \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^+(r) < t \,|\, \tau^+(0) < t\} dt.$$

Звідси після обернення по s встановлюється перше співвідношення в (7.36). Цілком аналогічно доводиться друге співвідношення в (7.36) для майже напівнеперервних знизу процесів. □

Для напівнеперервних зверху процесів ($c = 0$) справедливе співвідношення

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq r\} = z_s^{-r} \quad (z_s = \hat{z}_s \in (0, c^{-1}))$$

після диференціювання якого по s встановлюється, що

$$p_r(s) = -\frac{s}{r}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \geq r\} = -\frac{s}{r}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{P}\{\tau^+(r) < \theta_s\}.$$

Звідси після обернення по s одержимо спрощені аналоги співвідношень (7.36) для напівнеперервного зверху (знизу) процесу

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=r\} = \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\overline{\tau}^{+}(r)<t\}, \quad r>0, \quad c=0,$$
$$\mathbf{P}\{\xi(t)=r\} = -\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\overline{\tau}^{-}(r)<t\}, \quad r<0, \quad b=0. \tag{7.42}$$

Далі обмежимось випадком напівнеперервності знизу. При $b=0$ із (7.32) $z_s = q_-(s) = 1-p_-(s)$, $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = \frac{1}{p_-(s)}$, тому

$$p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[p_k(s) - z_s p_{k+1}(s)], \quad k \geq 0.$$

Звідси випливає, що при $b=0$

$$\sum_{k\geq r}^{\infty} p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)\geq r\} - z_s\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)\geq r+1\}] =$$
$$= \frac{1}{p_-(s)}\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=r\} + \mathbf{P}\{\xi(\theta_s)>r\}. \tag{7.43}$$

Після підстановки $\mathbf{E}\xi^-(\theta_s) = (p_-(s))^{-1}$ в (7.43) права частина одержаного співвідношення обертається по s, що приводить до співвідношення

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t)\geq r\} = \int_0^t p_r(t-y)d\mathbf{E}\xi^-(y) + \mathbf{P}\{\xi(t)>r\}.$$

Згідно з формулою двоїстості в (7.42) знаходимо

$$\mathbf{E}\xi^-(t) = \sum_{r=0}^{-\infty}\mathbf{P}\{\xi^-(t)\leq r\} = \sum_{r=0}^{-\infty}\mathbf{P}\{\tau^-(t)<t\},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\xi^-(t) = -\sum_{r=0}^{-\infty}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\{\tau^-(t)<t\} =$$
$$= \sum_{r\leq 0}\frac{r}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)=r\} = \frac{1}{t}\mathbf{E}[|\xi(t)|, \xi(t)<0].$$

Після підстановки $d\mathbf{E}\xi^-(t)$ в інтегральну згортку попереднього співвідношення для хвоста розподілу $\xi^+(t)$ встановлюється формула (7.37). Ця формула повністю розкриває зміст формули Спітцера, після обернення якої по s розподіл $\xi^+(t)$ виражається через розподіл значень $\xi(t) > 0$. При цьому

$$\mathbf{E}[\xi(y), \xi(y) < 0] = my - \mathbf{E}[\xi(y), \xi(y) > 0], \quad m = \mathbf{E}\xi(1).$$

Для напівнеперервного знизу цілозначного процесу ризику з випадковою преміальною функцією $C(t)$

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad C(t) = \nu_1(t),$$

імовірність банкрутства на скінченному інтервалі $[0, t]$ виражається аналогічною формулою до (7.37):

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(t) \geq r\} = \mathbf{P}\{\zeta(t) > r\} + \\ + \int_0^t y^{-1}\mathbf{P}\{\zeta(t-y) = r\}\mathbf{E}[|\zeta(y)|, \zeta(y) < 0]dy.$$

Приклад 7.1. Нехай $\xi(t)$ — цілозначний пуасонівський процес ($\lambda = 1$) з генератрисою стрибків

$$p(z) = \frac{1}{2}(z^{-1} + z^{-2})\frac{(1-c)z}{1-cz} = \frac{(1+z)(1-c)}{2z(1-cz)}.$$

Знайти генератрису $g(s, z)$ та компоненти факторизації $g_\pm(s, z)$. Знайти генератриси $\xi^\pm$ при $\pm m < 0$. Виразити $p_k(s)$ через $z_s = z_s^- \in (b, 1)$, $z_s^+(s) = \hat{z}_s \in (1, c^{-1})$.

Легко знайти

$$m = \mathbf{E}\xi(1) = \frac{1}{1-c} - \frac{3}{2} = \frac{3c-1}{2(1-c)}, \quad D\xi(1) = \sigma_1^2 = \frac{c}{(1-c)^2} + \frac{5}{2};$$
$$s - k(z) = s + 1 - p(z) = \frac{2(s+1)z(1-cz) - (z+1)(1-c)}{2z(1-cz)}.$$

При $c = \frac{1}{3}$ $m = 0$, $\sigma_1^2 = \frac{13}{4}$. Отже

$$g(s, z) = \frac{s}{s - k(z)} = \frac{2sz(1-cz)}{P_2(s, z)},$$
$$P_2(s, z) = 2(s+1)z(1-cz) - (z+1)(1-c).$$

Процес $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху, тому корінь $z_s = z_s^+ > 1$ рівняння $P_2(s, z) = 0$ визначає додатну компоненту факторизації

$$g_+(s, z) = \frac{p_+(s)(1-cz)}{1-zz_s^{-1}}, \quad 1 < z_s < c^{-1}, \quad p_+(s) = \frac{1-z_s^{-1}}{1-c}.$$

На основі о.ф.т.

$$g(s,z) = \frac{2z(1-cz)}{P_2(s,z)} = \frac{p_+(s)(1-cz)}{1-zz_s^{-1}} \frac{2sz(1-zz_s^{-1})}{p_+(s)P_2(s,z)}$$

останній множник визначає від'ємну компоненту факторизації

$$g_-(s,z) = \frac{s}{p_+(s)} \frac{2z(z_s - z)}{z_s P_2(s,z)}.$$

Після поділу $P_2(s,z)$ на $z_s - z$ знаходимо

$$P_1(s,z) = 2c(s+1)z + \frac{c-1}{z_s}.$$

Таким чином легко визначається корінь $P_1(s,z)$

$$\begin{aligned} z_s^- &= \frac{1-c}{2c(1+s)z_s} < 1 \quad (z_s = z_s^+ > 1), \\ g_-(s,z) &= \frac{s}{p_+(s)} \frac{2z}{2c(s+1)z_s z + c - 1} = \\ &= \frac{s}{p_+(s)} \frac{2zz_s^-}{(1-c)(z-z_s^-)}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} p_-(s) &= \lim_{z\to\infty} g_-(s,z) = \frac{s}{p_+(s)} \frac{2z_s^-}{1-c} = \frac{s}{cp_+(s)(1+s)z_s}, \\ g_-(s,z) &= p_-(s)\left[1 - \frac{z_s^-}{z}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

При $s = 0$ рівняння $P_2(0,z) = 0$ зводиться до квадратного:

$$2cz^2 - (1+c)z + 1 - c = (2cz + c - 1)(z-1) = 0.$$

При $\frac{1}{3} < c < 1$ $m > 0$, $z_s \to 1$ для $s \to 0$,

$$\begin{aligned} p_- &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{p_+(s)} \frac{1}{(1+s)z_s} = \frac{1}{p_+'(0)}, \quad z_0^- = \lim_{s\to 0} z_s^- = \frac{1-c}{2c} < 1, \\ g_-(z) &= \lim_{s\to 0} g_-(s,z) = \frac{1}{p_+'(0)}\left(1 - \frac{1-c}{2cz}\right)^{-1}, \quad p_+'(0) = \frac{2c}{3c-1}. \end{aligned}$$

При $m = o\left(c = \frac{1}{3}\right)$

$$\frac{z_s^{\pm} - 1}{\sqrt{s}} \underset{s\to 0}{\rightarrow} \pm\frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}, \quad P\{\xi^{\pm} = \pm\infty\} = 1.$$

Якщо $m < 0$, тоді

$$z_0^+ = \lim_{s\to 0} z_s = \frac{1-c}{2c} > 1, \quad m = \frac{3c-1}{2(1-c)},$$
$$\lim_{s\to 0} p_+(s) = p_+ = \frac{1}{1-c}\left(1 - \frac{1}{z_0^+}\right) = \frac{1-3c}{(1-c)^2},$$
$$g_+(z) = \lim_{s\to 0} g_+(s,z) = p_+\frac{(1-cz)}{1-\frac{2c}{1-c}z} = |m|\frac{1-cz}{1-c-2cz}.$$

Щоб виразити $p_k(s)$ через $z_s^{\pm}$ слід перемножити розкладені в ряди Лорана генератриси $g_{\pm}(s,z)$ (в термінах $z_s^{\pm}$) і згрупувати члени при однакових степенях z.

Приклад 7.2. Читачеві пропонується для процесу з прикладу 7.1 знайти корені $z_{1,2}(0)$ рівняння $P_2(0,z) = 0$ і проаналізувати їх значення при $\pm m > 0$, $m = 0$ $(c = 1/3)$. Виразити через $z_1(0) = z_0^- < 1$ $(m > 0)$ генератрису $g_-(z)$, та через $z_2(0) = z_0^+ > 1$ $(m < 0)$ — генератрису $g_+(z)$. Показати також, що додатні корені рівняння $k(z) = s$: $z_1(s) = z_s^- < 1 < z_2(s) = z_s^+$ окаймляють “1” і виразити через них, відповідно $g_{\mp}(s,z)$. За другою факторизаційною тотожністю знайти спільну генератрису пари $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$.

7.2 Перестрибкові функціонали для ґратчастого процесу

Нехай $\xi(t)$ $(\xi(0) = 0,\ t \geq 0)$ — ґратчастий пуассонівський процес з кроком $h = 1$ і генератрисою (7.1). Обмежимось перестрибковими функціоналами $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x)\}$ (без функціоналів $\{\overline{\tau}^+(x), \overline{\gamma}^+(x), \overline{\gamma}_+(x)\}$), означення яких наводились на початку розділу 7 (див. також [53, 177]). Із стохастичних зображень для цих функціоналів

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta, & \xi > x, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi), & \xi \leq x; \end{cases}$$

$$\gamma^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ \gamma^+(x-\xi), & \xi \leq x; \end{cases}$$

$$\gamma_+(x) \doteq \begin{cases} x, & \xi > x, \\ \gamma_+(x-\xi), & \xi \leq x, \quad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x), \end{cases}$$

виводиться рівняння для їх спільної генератриси

$$V(s,x,u,v) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)} u^{\gamma^+(x)} v^{\gamma_+(x)}, \tau^+(x) < \infty],$$

$$V(s,x,u,v) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{k=x+1}^{\infty} p_k u^{k-x} v^x + \\ + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{k \leq x} V(s, x-k, u, v) p_k.$$

Аналогічне рівняння має місце для спільної генератриси четвірки $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma_x^+\}$ $(\gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x))$. Це рівняння для генератриси $(0 < |u|, |v|, |\mu| \leq 1)$

$$V(s,x,u,v,\mu) = \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(x)} v^{\gamma_+(x)} \mu^{\gamma_x^+}, \xi^+(\theta_s) > x\big]$$

ми перепишемо в дещо зміненій формі

$$(s+\lambda)V(s,x,u,v,\mu) - \lambda \sum_{k \leq x} V(s, x-k, u, v, \mu) p_k = \\ = A_x(u,\nu,\mu), \quad x \geq 0, \tag{7.44}$$

де права частина рівняння (7.44) визначається першими рядками стохастичних співвідношень і має вигляд

$$A_x(u,v,\mu) = \lambda \sum_{k=x+1}^{\infty} u^{k-x} v^x \mu^k p_k, \quad x > 0.$$

Ми позначимо при $\mu = 1$ та відповідно при $v = \mu = 1$

$$A_x(u,v) = A_x(u,v,1) = v^x A_x(u), \quad A_x(u) = \lambda \sum_{k \geq x+1} u^{k-x} p_k,$$

$$A_x(1) = \lambda \sum_{k \geqq x+1} p_k = \lambda \overline{F}(x) = \lambda \mathbf{P}\{\xi > x\}.$$

Ми будемо розглядати також і генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$ ($k = \overline{1,3}$, $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$). Зокрема, для пари $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ рівняння (7.44) запишеться так:

$$(s+\lambda)V(s,x,u) - \lambda \sum_{y \le x} V(s, x-y, u) = A_x(u), \quad x \ge 0.$$

Щоб знайти розв'язок рівняння (7.44) і аналогів останнього рівняння для пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, ($k = \overline{1,3}$) введемо позначення твірних перетворень по x

$$v(s,\beta,u,v,\mu) = \sum_{x \ge 0} \beta^x V(s,x,u,v,\mu);$$

$$v(s,\beta,u,v) = v(s,\beta,u,v,1); v(s,\beta,u) = v(s,\beta,u,1,1);$$

$$a(\beta,u,v,\mu) = \sum_{x \ge 0} \beta^x A_x(u,v,\mu) \underset{\mu \to 1}{\to} a(\beta,u,v) = a(\beta v, u),$$

$$a(\beta,u) = a(\beta,u,1,1) = \lambda u([p(u)]_+ - [p(\beta)]_+)(u-\beta)^{-1};$$

$$[g(u)]_\pm = \left[\sum_k u^k g_k\right]_\pm = \sum_{\pm k > 0} u^k g_k = g_\pm(u).$$

Для згорток $A_x(\cdot)$ з $p_k^-(s)$ та їх генератрис введемо позначення

$$G(s,x,u,v,\mu) = \sum_{y \le 0} A_{x-y}(u,v,\mu) p_y^-(s), \quad x > 0$$

$$G(s,x,u,v) = G(s,x,u,v,1), \quad G_1(s,x,u) = G(s,x,u,1),$$

$$G_2(s,x,v) = G(s,x,1,v), \quad G_3(s,x,\mu) = G(s,x,1,1,\mu),$$

$$\mathcal{K}_s(x) = G(s,x,1) = \lambda \sum_{k \ge x} p_{x-k}^-(s) \overline{F}(k), \quad \overline{F}(k) = \sum_{r=k+1}^{\infty} p_r,$$

$$g(s,\beta,u,v,\mu) = \sum \beta^x G(s,x,u,\mu), \quad g(s,\beta,u,v) = g(s,\beta,u,v,1),$$

$$g(s,\beta,u) = g(s,\beta,u,1), \quad k(s,\beta) = g(s,\beta,1) = \sum_{x \ge 0} \beta^x \mathcal{K}_s(x).$$

На основі (7.44) встановлюється

Теорема 7.7. *Для довільного цілозначного пуассонівського процесу $\xi(t)$ генератриса $v(s,\beta,u,v,\mu)$ визначається співвідношенням*

$$sv(s,\beta,u,v,\mu) = [g_-(s,\beta)a(\beta,u,v,\mu)]_+^0 g_+(s,\beta), \tag{7.45}$$

обернення якого по β *визначає* $V(s,x,u,v,\mu)$ *через згортку*

$$sV(s,x,u,v,\mu)=\sum_{y=0}^{x}G(s,x-y,u,v,\mu)p_y^+(s),\quad x\geq 0. \tag{7.46}$$

Відповідні співвідношення мають місце для $V(s,x,u_k)$ $(k=\overline{1,3})$

$$V(s,x,u_k)=\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x)}u_k^{\gamma_k(x)},\tau^+(x)<\infty\big]=$$
$$=s^{-1}\sum_{y=0}^{x}G_k(s,x-y,u_k)p_y^+(s),\quad u_1=u,\quad u_2=v,\quad u_3=\mu.$$

З (7.45) *випливає співвідношення для* $v(s,\beta,u,v,\mu)$ $\big(v(s,\beta,u,v)\big)$

$$v(s,\beta,u,v,\mu)=s^{-1}g(s,\beta,u,v,\mu)g_+(s,\beta)\underset{\mu\to 1}{\to}v(s,\beta,u,v). \tag{7.47}$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *виражається через*

$$k(s,\beta)=g(s,\beta,1)=$$
$$=p_-(s)[a(\beta,1)+(z_s-b)(z_s-\beta)^{-1}(a(z_s,1)-a(\beta,1))],$$
$$g_+(s,\beta)=\frac{s}{s+(1-\beta)k(s,\beta)},\quad p_+(s)=\frac{s}{s+k(s,0)}, \tag{7.48}$$

де

$$k(s,0)=\lambda p_-(s)\sum_{k\geq 0}z_s^k[\overline{F}(k)-b\overline{F}(k+1)],\quad q_+(s)=V(s,0,1).$$

Якщо $\xi(t)$ *майже напівнеперервний знизу процес з умовою* (7.3) *і* $b\in(0,1)$, *тоді* $g_-(s,\beta)$ *та* $g(s,\beta,u,v,\mu)$ *виражаються через корінь рівняння* $(\mathcal{L}_s)$ $b<z_s=z(s)<1$, *зокрема,*

$$g(s,\beta,u,v)=p_-(s)\left[a(\beta v,u)+\frac{z_s-b}{z_s-\beta}(a(vz_s,u)-a(v\beta,u))\right].$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ *виражається через умовну генератрису* $\gamma^+(0)$

$$g_+(s,u)=\frac{p_+(s)}{1-V(s,0,u)}=\frac{p_+(s)}{1-q_+(s)g_s(u)}, \tag{7.49}$$
$$g_s(u)=\mathbf{E}[u^{\gamma^+(0)}|\xi^+(\theta_s)>0]=\frac{G(s,0,u)}{G(s,0,1)}=$$

$$\frac{bA_0(u)+(z_s-b)a(z_s,u)}{bA_0(1)+(z_s-b)a(z_s,1)}, \quad A_0(u)=\lambda[p(u)]_+;$$

$$V(s,0,u)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(0)}u^{\gamma^+(0)},\tau^+(0)<\infty]=p_+(s)s^{-1}G(s,0,u)=$$

$$=\frac{p_+(s)p_-(s)}{sz_s}[bA_0(u)+(z_s-b)a(z_s,u)] \underset{u\to 1}{\to}$$

$$\underset{u\to 1}{\to} q_+(s)=\frac{a(z_s,1)(z_s-b)+\lambda b\overline{F}(0)}{sz_s}p_+(s)p_-(s). \tag{7.50}$$

Якщо $m<0$, *тоді* $z(s)\to 1$,

$$s^{-1}p_-(s)\to p'_-(0)=-z'(0)(1-b)^{-1}=(|m|(1-b))^{-1}$$

при $s\to 0$ *і з* (7.48) *випливає співвідношення*

$$g_+(\beta)=\mathbf{E}\beta^{\xi^+}=\frac{1}{1+(1-\beta)k'_s(0,\beta)}, \quad p_+=\frac{1}{1+k'_s(0,0)}, \tag{7.51}$$

$$(k'_s(0,0)=\frac{\lambda}{(1-b)|m|}[\mu_+(1-b)+pb], \quad \mu_+=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}(k)),$$

що зводиться до формули Полячека–Хінчина в дискретній формі

$$g_+(\beta)=\frac{p_+}{1-q_+g_0(\beta)}, \quad g_0(\beta)=\mathbf{E}[\beta^{\gamma^+(0)}|\xi^+>0], \tag{7.52}$$

$$g_0(\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k[bp_k+(1-b)\overline{F}(k-1)]}{b\overline{F}(0)+(1-b)\mu_+}, q_+=\frac{(1-b)\mu_++b\overline{F}(0)}{q+bp}<1.$$

Для напівнеперервного знизу процесу $(b=0)$

$$q_+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)>0\}=\frac{a(z_s,1)}{sz_s}p_+(s)p_-(s),$$

$$g_s(u)=\mathbf{E}[u^{\gamma^+(0)}\,|\,\xi^+(\theta_s)>0]=\frac{a(z_s,u)}{a(z_s,1)}, a(1,1)=\lambda\mu_+=\lambda p\mu'_+,$$

а при $m<0$ *з* (7.52) *випливає класична формула Полячека–Хінчина*

$$g_+(\beta)=\frac{p_+}{1-q_+g_0(\beta)}, \quad g_0(\beta)=\frac{1}{\mu_+}\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\mathbf{P}\{\xi_1\geq k\},$$

$$q_+=\frac{\mu_+}{q}=\frac{p\mu'_+}{q}<1, \mu_+=p\mu'_+. \tag{7.53}$$

Доведення. Обмежимось розглядом рівняння (7.44) при $\mu = 1$, яке після твірного перетворення зводиться до вигляду

$$v(s, \beta, u, v)(s + \lambda - \lambda p(\beta)) = a(\beta v, u) - s[p(\beta)v(s, \beta)]_-. \qquad (7.54)$$

На основі о.ф.т. з цього рівняння випливає, що

$$sv(s, \beta, u, v)g_+^{-1}(s, \beta) = g_-(s, \beta)\{sa(\beta v, u) - s[p(\beta)v(s, \beta)]_-\}.$$

Після операції проектування $[\ ]_+^0$ із (7.54) випливає (7.45). Проекційним дужкам в (7.45) відповідає згортка $G(s, x, \dots)$, позначення якої наведені перед теоремою 7.7. Для майже напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$ генератриса цієї згортки обчислюється за допомогою розподілу $\xi^-(\theta_s)$ (див. (7.31)) в термінах степенів $z_s = z(s)$. Зокрема,

$$G(s, x, u, v) = p_-(s)\left[A_x(u, v) + (z_s - b)\sum_{j<0} A_{x-j} z_s^{-j-1}\right] =$$

$$= p_-(s)z_s^{-1}\left[bA_x(u, v) + (z_s - b)\sum_{j\le 0} A_{x-j}(u, v) z_s^{-j}\right].$$

Згідно з (7.46) при $x = 0$ одержимо (7.50) та відповідно при $u = 1$

$$v(s, \beta, 1) = \sum_{x=0}^{\infty} \beta^x \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \frac{1 - g_+(s, \beta)}{1 - \beta}.$$

З останнього співвідношення та з (7.47) знаходимо, що

$$(1 - s)(1 - g_+(s, \beta)) = (1 - \beta)k(s, \beta)g_+(s, \beta),$$

звідси й випливає (7.48). При $x = 0$ та $v = \mu = 1$ із (7.46) випливає, що $sV(s, 0, u) = p_+(s)G(s, 0, u)$, $sq_+(s) = p_+(s)G(s, 0, 1)$. Тоді

$$g_s(u) = \frac{V(s, 0, u)}{q_+(s)} = \frac{G(s, 0, u)}{G(s, 0, 1)}, \quad V(s, 0, 1) = q_+(s),$$

і згідно з (3.20) встановлюється (7.49). З (7.49) при $s \to 0$ випливає (7.52) з граничною умовною генератрисою для $\gamma^+(0)$

$$g_0(u) = \lim_{s\to 0} g_s(u) = \lim_{s\to 0} \frac{G(s, 0, u)}{G(s, 0, 1)} = \qquad (7.55)$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}[bp_k + (1-b)\overline{F}(k-1)]u^k}{b\overline{F}(0) + (1-b)\mu_+}, \quad \mu_+ = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}(k),$$

$$\bar{F}(0) = p < 1. \qquad \square$$

Для напівнеперервних знизу процесів ($b = 0$) всі формули (7.47)–(7.52) спрощуються, зокрема з них випливає співвідношення (7.53).

7.3 Час перебування у фіксованому стані

Для цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0, t \geq 0$) замість часу перебування над фіксованим рівнем доцільно розглядати час перебування у фіксованому стані r — довільного знаку

$$l_r(t) = \int_0^t I\{\xi(u) = r\}du.$$

На основі стохастичних співвідношень

$$l_r(t) \doteq \begin{cases} 0, & \zeta > t, \\ l_{r-\xi}(t-\zeta_1), & \zeta_1 \leq t, \quad r \neq 0, \end{cases}$$

$$l_0(t) = \begin{cases} t, & \zeta > t, \\ \zeta + l_{-\xi}(t-\zeta), & \zeta \leq t, \quad r = 0. \end{cases}$$

Для генератриси часу перебування

$$d_{r,t}(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu l_r(t)}, \quad \operatorname{Re}\mu \geq 0,$$

виводяться рівняння

$$d_{r,t}(\mu) = e^{-\lambda t} + \lambda \sum_k \int_0^t d_{r-k,t-y}(\mu)e^{-\lambda y}dyp_k, \quad r \neq 0,$$

$$d_{0,t}(\mu) = e^{-(\mu+\lambda)t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda t}\sum_k d_{-k,t-y}(\mu)e^{-\mu y}dyp_k, \quad r = 0.$$

Після інтегрального перетворення по t з цих рівнянь для $d_r(s,\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu l_r(\theta_s)}$ одержимо рівняння

$$d_0(s,\mu) = \frac{s}{s+\lambda+\mu} + \lambda \sum_k d_{-k}(s,\mu)\frac{p_k}{s+\lambda+\mu}, \tag{7.56}$$

$$d_r(s,\mu) = \frac{s}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_k d_{r-k}(s,\mu) p_k, \quad r \neq 0.$$

Позначимо $b_r(s,\mu) = d_r(s,\mu) - 1$, тоді з (7.56) випливає система рівнянь

$$(s+\lambda+\mu) b_0(s,\mu) + \mu = \lambda \sum_k p_k b_{-k}(s,\mu), \tag{7.57}$$

$$(s+\lambda) b_r(s,\mu) = \lambda \sum_k p_k b_{r-k}(s,\mu), \quad r \neq 0.$$

Позначимо генератрису (твірну функцію) для $b_r(s,\mu)$

$$B(v,s,\mu) = \sum_r v^r b_r(s,\mu), \quad |v| = 1,$$

яка згідно з (7.57) задовольняє рівняння

$$(s-k(v)) B(v,s,\mu) = -\mu(1+b_0(s,\mu)), \text{ тобто}$$
$$sB(v,s,\mu) = -g(s,v)\mu(1+b_0(s,\mu)). \tag{7.58}$$

На основі (7.58) встановлюється твердження (див. [40, 66, 67])

Теорема 7.8. *Генератриса часу перебування у фіксованому стані визначається твірною функцією*

$$B(v,s,\mu) =: \sum_r v^r (d_r(s,\mu) - 1) = -\frac{\mu g(s,v)}{s+\mu p_0(s)}. \tag{7.59}$$

Генератриси $d_r(s,\mu) = \mathbf{E} e^{-\mu l_r(\theta_s)}$ *визначаються співвідношеннями*

$$d_0(s,\mu) = \frac{s}{s+\mu p_0(s)}, \quad p_r(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = r\}, \quad \forall\, r,$$
$$d_r(s,\mu) = 1 - \frac{\mu}{s+\mu p_0(s)} p_r(s), \quad r \neq 0, \tag{7.60}$$

$$d_{r,t}(\mu) =: \mathbf{E} e^{-\mu l_r(t)} = 1 - \mu \int_0^t \mathbf{E} e^{-\mu l_0(t-u)} \mathbf{P}\{\xi(u) = r\} du;$$
$$\mathbf{P}\{l_r(\theta_s) = 0\} = 1 - p_r(s) p_0^{-1}(s), \quad r \neq 0,$$
$$\mathbf{P}\{l_r(\theta_s) > y\} = \frac{1}{p_0(s)} p_r(s) e^{-ysp_0^{-1}(s)} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} \frac{p_r(s)}{p_0(s)} < 1; \tag{7.61}$$

$$\mathbf{P}\{l_r(t) > y\} = \int_0^t \mathbf{P}\{l_r(t-u) > 0\} d_u \mathbf{P}\{l_0(u) > y\}, \quad r \neq 0.$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$, *тоді*

$$\widetilde{p}_r = p_r'(0) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) = r\} dt < \infty \quad (r \geq 0)$$

і з (7.60), (7.61) *випливають граничні співвідношення* $(s \to 0)$

$$\begin{aligned}
&d_0(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu l_0(\infty)} = \frac{1}{1+\mu\widetilde{p}_0}, \quad \mathbf{P}\left\{l_0(\infty) > t\right\} = e^{-t\widetilde{p}_0^{-1}}, \quad t \geq 0;\\
&d_r(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu l_r(\infty)} = 1 - \widetilde{p}_r \mu d_0(\mu), \quad r > 0; \qquad (7.62)\\
&\mathbf{P}\left\{l_r(\infty) > y\right\} = \widetilde{p}_r \widetilde{p}_0^{-1} e^{-y\widetilde{p}_0^{-1}}, \quad y > 0;\\
&\mathbf{P}\left\{l_r(\infty) = 0\right\} = 1 - \frac{\widetilde{p}_r}{\widetilde{p}_0},\\
&\mathbf{E}e^{-\mu Q_x(\infty)} = \prod_{r \geq x+1} d_r(\mu) = \prod_{r \geq x+1} \left(1 - \widetilde{p}_r \mu d_0(\mu)\right), \quad x \geq 0.
\end{aligned}$$

Доведення. З (7.58) після розкладу по степенях v, зібравши коефіцієнти при v^0, знаходимо $b_0(s,\mu) = -\mu p_0(s)(s + \mu p_0(s))^{-1}$. Підставляючи $b_0(s,\mu)$ в (7.58), одержимо співвідношення (7.59), яке легко обернути по v, щоб знайти $b_r(s,\mu)$. Після переходу до $d_r(s,\mu)$ встановлюються співвідношення (7.60), на основі яких можна зробити такий висновок.

Генератриси часів перебування у фіксованих станах визначаються розподілом процесу $\xi(\theta_s)$ без використання факторизаційних тотожностей. Зауважимо, що для часу перебування над рівнем x має місце співвідношення

$$Q_{(x,\infty)}(t) = \int_0^t I\{\xi(u) > x\} du = \sum_{r=x+1}^{\infty} l_r(t),$$

де $l_r(t)$ незалежні часи перебування в різних станах r, тому

$$D_{x,t}(\mu) = \mathbf{E}e^{-\mu Q_{[x,\infty)}(t)} = \prod_{r=x+1}^{\infty} d_{r,t}(\mu).$$

Легко довести справедливість співвідношень (7.60), з яких випливають формули (7.61). На основі (7.61) встановлюються при $s \to 0$ граничні співвідношення (7.62). □

Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу цілозначний процес з кумулянтою

$$k(z) = \ln \mathbf{E} z^{\xi(1)} = \lambda\left(pp_{(1)}(z) + q\frac{1-b}{z-b} - 1\right), \tag{7.63}$$
$$|z| = 1, \quad p + q = 1,$$

де $p_{(1)}(z) = \mathbf{E}[z^{\xi_1} \,|\, \xi_1 > 0]$ — генератриса додатних стрибків, $b \in (0,1)$ — параметр геометричного розподілу від'ємних стрибків, $\lambda > 0$ — сумарна інтенсивність стрибків ξ_k.

Вище показано, що для $\xi(t)$ з кумулянтою (7.63) рівняння Лундберга ($k(z) = s$) має два прості корені: $b < z_s < 1 < \widehat{z}_s$. При $m = \mathbf{E}\xi(1) = 0$ і $s \to 0$ ці корені збігаються до 1; при $m > 0$ $z_s \underset{s\to 0}{\to} z_0 < 1$, $\widehat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} 1$; при $m < 0$, $\widehat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} \widehat{z}_0 > 1$, $z_s = q_-(s) + bp_-(s) \underset{s\to 0}{\to} 1$.

Зауважимо, що у випадку майже напівнеперервності знизу для о.ф.т.

$$g(s,z) = g_+(s,z)g_-(s,z), \quad |z| = 1, \tag{7.64}$$

компонента $g_-(s,z)$ повністю визначається меншим коренем рівняння Лундберга $k(z) = s$: $z_s \in (b,1)$ (див. теорема 7.6)

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z - z_s}, \tag{7.65}$$
$$p_-(s) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = \frac{1 - z_s}{1 - b}.$$

Згідно з (7.32) генератрису $g_+(s,z)$ можна записати дещо простіше ніж у формулі Спітцера, а саме має місце

Лема 7.3. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес з кумулянтою* (7.63), *тоді* ($q_-(s) = 1 - p_-(s)$)

$$g_+(s,z) = \frac{1}{p_-(s)}\left[g_0(s,z) + q_-(s)\frac{b-1}{b-z}(g_1(s,b) - g_1(s,z))\right],$$
$$g_k(s,z) = \sum_{r\ge k} z^r p_r(s), \quad p_k(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = k\}, \quad k \ge 0. \tag{7.66}$$

Крім того, з точністю до деякої функції $Q(s,z)$, має місце зображення

$$g_+(s,z) = s[p_-(s)Q(s,z)(\widehat{z}_s - z)]^{-1} \underset{z\to 0}{\to} p_+(s) = \tag{7.67}$$

$$= \frac{s}{Q(s,0)\widehat{z}_s p_-(s)}, \quad z_s = q_-(s) + bp_-(s).$$

Доведення. Співвідношення (7.66) виводиться з (7.32). Співвідношення (7.67), в якому $g_+(s,z)$ виражається через другий корінь рівняння Лундберга, випливає з того, що

$$g(s,z) = \frac{s(z-b)}{k_*(s,z)},$$
$$k_*(s,z) = s(z-b) - \lambda[p(z-b)p_{(1)}(z) + pb + q - z].$$

В силу існування двох коренів $b < z_s < 1 < \widehat{z}_s$ рівняння Лундберга

$$k(z) = s \sim k_*(s,z) = 0, \quad k_*(s,z) = Q(s,z)(\widehat{z}_s - z)(z - z_s),$$
$$g(s,z) = \frac{s(z-b)}{(\widehat{z}_s - z)(z - z_s)Q(s,z)}, \quad Q(s,z_s)Q(s,\widehat{z}_s) \neq 0.$$

З останнього співвідношення на підставі (7.64) та (7.65) випливає (7.67). При цьому для $z = 1$ та $z = z_s < 1$ із (7.67) знаходимо

$$Q(s,1)(\widehat{z}_s - 1) = sp_-(s)^{-1},$$
$$g_+(s,z_s) = s[p_-(s)Q(s,z_s)(\widehat{z}_s - z_s)]^{-1}. \tag{7.68}$$

При $m < 0$, $z_s \to 1$, $\widehat{z}_s \to \widehat{z}_0 > 1$ і з (7.68) випливає, що

$$Q(s,z_s)(\widehat{z}_s - z_s) \underset{s\to 0}{\to} Q(0,1)(\widehat{z}_0 - 1) = |m|(1-b). \tag{7.69}$$

Зауважимо, що у випадку, коли $p_{(1)}(z)$ є генератрисою ерлангового типу, тобто

$$p_{(1)}(z) = z^n \prod_{r\le n} \frac{1-c_r}{1-c_r z}, \quad 0 \le c_r < 1, \quad \text{тоді}$$
$$g(s,z) = \frac{s(z-b)q_n(z)}{k_*(s,z)}, \quad q_n(z) = \prod_{r\le n}(1-c_r z),$$
$$k_*(s,z) = s(z-b)q_n(z) - \lambda[p(z-b)z^n q_n(1) + pb + q - z],$$
$$k_*(s,z) = P_{n+1}(s,z) = (\widehat{z}_s - z)(z - z_s)P_{n-1}(s,z),$$

де $P_n(s,z)$ — поліном n-го порядку відносно z. В цьому випадку

$$g_+(s,z) = sq_n(z)[p_-(s)(\widehat{z}_s - z)P_{n-1}(s,z)]^{-1}. \qquad \square$$

Щоб одержати уточнення (7.60), (7.61) для $\xi(t)$ з кумулянтою (7.63), використаємо лему про зображення $p_k(s)$ в термінах $z_s = q_-(s) + bp_-(s) \in (b, 1)$.

Лема 7.4. *Нехай $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (7.63). *Із співвідношень для розподілів $\xi^{\pm}(\theta_s)$ (див. теорема* 7.6) $p_0^{\pm}(s) = p_{\pm}(s)$,

$$
\begin{aligned}
&p_{-k}^{-}(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad p_-(s) = \frac{1 - z_s}{1 - b}, \qquad (7.70)\\
&p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[p_k(s) + (b - z_s)b^{-k-1}g_{k+1}(s, b)], \quad k > 0,
\end{aligned}
$$

та з о.ф.т. (7.64) *випливають співвідношення для $p_k(s)$, виражені через $z_s = q_-(s) + bp_-(s)$*

$$
\begin{aligned}
&p_0(s) = p_-(s)[bz_s^{-1}p_+(s) + (1 - z_s^{-1}b)g_+(s, z_s)]\\
&p_k(s) = p_-(s)[p_k^+(s) + (1 - z_s^{-1}b)z_s^{-k}g_{k+1}^+(s, z_s)], \quad k > 0, \qquad (7.71)\\
&p_{-k}(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1}g_+(s, z_s), \quad n = -k < 0,\\
&g_k^+(s, z) = \sum_{r \geq k} p_r^+(s)z^r \quad (k \geq 0), \quad g_0^+(s, z) = g_+(s, z).
\end{aligned}
$$

Для атомарних імовірностей $p_{\pm}(s)$ справедливі співвідношення в термінах z_s

$$
\begin{aligned}
&p_+(s) = \frac{1 - b}{1 - z_s}\big[p_0(s) + (b - z_s)b^{-1}\mathbf{E}[b^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geq 1]\big],\\
&p_+(s) = p_0(s) - p_1(s)z_s(1 - z_s)^{-1}, \quad \textit{якщо } b = 0; \qquad (7.72)\\
&p_-(s)\mathbf{P}\{\xi(\theta_s) \leq 0\} = p_0(s) + q_-(s)\mathbf{E}[b^{\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0].
\end{aligned}
$$

Доведення. З розкладів у ряд Лорана для генератрис $\xi(\theta_s), \xi^{\pm}(\theta_s)$

$$
g(s, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k p_k(s), \quad g_{\pm}(s, z) = \sum_{k \geq 0} z^{\pm k} p_{\pm k}^{\pm}(s),
$$

після підстановки в (7.64) і перемножування двох останніх рядів шляхом групування членів з однаковими степенями z встановлюються співвідношення (7.71). Співвідношення (7.72) випливають із формули (7.66). $\square$

При знаходженні границь $(s \to 0)$

$$\widetilde{p}_k = \lim_{s\to 0} \frac{p_k(s)}{s} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} dt, \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

значення яких залежить від знаку m, скористаємось ще наступними лемами (для випадку $m = 0$ та $m \neq 0$).

Лема 7.5. *Нехай $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (7.63)*. Тоді згідно з* (7.67) *та* (7.71) *обернена величина показника експоненти в* (7.61) *визначається співвідношенням*

$$p_0(s)s^{-1} = z_s^{-1}\left[\frac{b}{\widehat{z}_s Q(s,0)} + \frac{z_s - b}{(\widehat{z}_s - z_s)Q(s,z_s)}\right], \quad \hat{z}_s > 1. \tag{7.73}$$

Якщо $m = 0$ ($z_s \to 1-0$, $\widehat{z}_s \to 1+0$ при $s \to 0$), тоді

$$\lim_{s\to 0} p_0(s)/s = \widetilde{p}_0 = \infty, \quad \frac{1}{\widetilde{p}_0} = 0. \tag{7.74}$$

Якщо $r = -k < 0$ і $m = 0$, тоді згідно з (7.67)

$$p_{-k}(s) = \frac{s(z_s - b)z_s^k}{Q(s,z)(\widehat{z}_s - z_s)},$$

$$\widetilde{p}_{-k} = \lim_{s\to 0} \frac{p_{-k}(s)}{s} = \infty, \quad \frac{1}{\widetilde{p}_{-k}} = 0, \tag{7.75}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{p_{-k}(s)}{p_0(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{(z_s - b)z_s^k}{z_s - b + bQ(s,z_s)(\widehat{z}_s - z_s)} = 1. \tag{7.76}$$

Якщо $k > 0$, тоді згідно з (7.67) *та* (7.71) $(z_s = q_-(s) + bp_-(s) < 1)$

$$p_k(s) = \frac{s}{Q(s,z_s)(\widehat{z}_s - z_s)}\Bigg[(z_s - b)z_s^{-k-1} + \tag{7.77}$$

$$+ Q(s,z_s)(\widehat{z}_s - z_s)p_-(s)\left(p_+(s) - (z_s - b)z_s^{-k-1}\sum_{r=0}^{k} z_s^r p_r^+(s)\right)\Bigg].$$

При $m = 0$, $k > 0$, тоді аналогічно знаходимо, що при $s \to 0$

$$\widetilde{p}_k = \lim_{s\to 0} \frac{p_k(s)}{s} = \infty, \quad \frac{1}{\widetilde{p}_k} = 0, \quad k > 0, \tag{7.78}$$

але

$$\lim_{s\to 0} p_k(s)/p_0(s) = \frac{(1-b)Q(0,1)}{(1-b)Q(0,1)} = 1, \quad k > 0.$$

Доведення леми 7.5 для $m = 0$ суттєво спирається на зображення (7.67) для $g_+(s, z_s)$ з особливістю при $s \to 0$ ($z_s, \widehat{z}_s \to 1$). Щоб скористуватися співвідношенням (7.71) для $p_k(s)$ при $k > 0$, слід виразити цю імовірність через $g_+(s, z_s)$

$$p_k(s) = p_-(s) \left[p_k^+(s) + (z_s - b) z_s^{-k-1} \left(g_+(s, z_s) - \sum_{r=0}^{k} p_r^+(s) z_s^r \right) \right].$$

Після підстановки (7.67) у це співвідношення одержується (7.77).

Позначимо

$$H(k) = \mathbf{E}\tau^+(k), \quad k > 0, \quad h_k = H(k) - H(k-1),$$
$$H(0) = \mathbf{E}\tau^+(0) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi^+(t) = 0\} dt = \dot{p}_+.$$

Лема 7.6. *Якщо $m > 0$, тоді $p_-(s) \underset{s\to 0}{\to} p_-$, $z_s \underset{s\to 0}{\to} z_0 < 1$ й існують границі*

$$\lim_{s\to 0} s^{-1} p_r^+(s) = \dot{p}_r^+ = h_r, \quad r > 0, \quad z_0 = q_- + bp_-,$$

через які виражаються значення $\widetilde{p}_k = \widetilde{p}_k^{>}$ в термінах z_0

$$\widetilde{p}_0^{>} = p_- \left[b z_0^{-1} H(0) + (1 - z_0^{-1} b) \sum_{r\geq 0} z_0^r h_r \right], \quad k = 0,$$
$$\widetilde{p}_k^{>} = p_- \left[h_k + (1 - z_0^{-1} b) \sum_{r\geq k+1} z_0^{r-k} h_r \right], \quad k > 0, \tag{7.79}$$
$$\widetilde{p}_{-k}^{>} = p_- (1 - z_0^{-1} b) \sum_{r\geq 0} z_0^{r+k} h_r \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad n = -k < 0.$$

Згідно з (7.70) *та* (7.72) *при $b = 0$*

$$H(0) = \widetilde{p}_0^{>} - \frac{z_0}{1 - z_0} \widetilde{p}_1^{>},$$
$$h_k = \frac{1}{1 - z_0} [\widetilde{p}_k^{>} - z_0 \widetilde{p}_{k+1}^{>}], \quad k > 0. \tag{7.80}$$

Якщо $m < 0$, тоді $p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} p_+$, $z_s \to 1$, $p_-(s) s^{-1} \to \frac{1}{|m|(1-b)}$, й існують аналогічні до (7.79) *границі $\widetilde{p}_k = \widetilde{p}_k^{<}$*

$$\widetilde{p}_0^{<} = \frac{1 - bq_+}{|m|(1 - b)} \underset{b\to 0}{\to} \frac{1}{|m|}; \quad \widetilde{p}_{-k}^{<} = \frac{1}{|m|}, \quad r = -k < 0, \tag{7.81}$$

$$\widetilde{p}_k^{<} = \frac{1}{|m|(1-b)}[p_k^+ + (1-b)\mathbf{P}\{\xi^+ > k\}]$$
$$\underset{b\to 0}{\to} \frac{1}{|m|}\mathbf{P}\{\xi^+ \geq k\}, \quad k > 0.$$

Доведення. Для обчислення границь $\widetilde{p}_k^{>}$ при $m > 0$ слід використати співвідношення (7.71). Існування границь (7.80) випливає з (7.70) та (7.72). При $m < 0$ із (7.71) після домноження на s^{-1} і граничного переходу ($s \to 0$) випливають формули (7.81). □

На основі цих лем уточнюються співвідношення для генератрис $d_r(s,\mu)$ та граничних розподілів для $l_r(\infty)$. Для випадку $b = 0$ співвідношення (7.79) та (7.81) спрощуються і узгоджуються із співвідношеннями, одержаними для напівнеперервних знизу $\xi(t)$.

Теорема 7.9. *Якщо* $\xi(t)$ *— майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою* (7.63), *тоді генератриси* $d_r(s,\mu)$ *та розподіли* $l_r(\theta_s)$ *визначаються формулами* (7.60), (7.61) *через імовірності* $p_k(s)$, *виражені через* z_s *у* (7.71). *Відповідні граничні генератриси та розподіли* $l_r(\infty)$ *визначаються залежно від знаку* m.

1) *При* $m = 0$ ($z_s \underset{s\to 0}{\to} 1-0$, $\widehat{z}_s \underset{s\to 0}{\to} 1+0$)

$$\mathbf{E}e^{-\mu l_r(\infty)} = 0, \quad \mathbf{P}\{l_r(\infty) = +\infty\} = 1, \quad \forall\, r. \tag{7.82}$$

2) *При* $m > 0$ *за допомогою значень* $\widetilde{p}_k^{>}$, *виражених через* z_0 *в* (7.79) *встановлюється, що*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}e^{-\mu l_0(\infty)} = \frac{1}{1+\mu\widetilde{p}_0^{>}},\\
&\mathbf{E}e^{-\mu l_r(\infty)} = 1 - \frac{\widetilde{p}_r^{>}}{\widetilde{p}_0^{>}}\frac{\mu}{(\widetilde{p}_0^{>})^{-1}+\mu}, \quad r \neq 0,\\
&\mathbf{P}\{l_r(\infty) > 0\} = \frac{\widetilde{p}_r^{>}}{\widetilde{p}_0^{>}},\\
&\mathbf{P}\{l_r(\infty) > y\} = \frac{\widetilde{p}_r^{>}}{\widetilde{p}_0^{>}}e^{-y/\widetilde{p}_0^{>}}, \quad y > 0, \quad r \neq 0.
\end{aligned} \tag{7.83}$$

При $r = -k \to -\infty$

$$\lim_{r\to-\infty}\mathbf{P}\{l_r(\infty) > 0\} = 0, \quad \mathbf{P}\{l_r(\infty) = 0\} \underset{r\to-\infty}{\to} 1.$$

3) *При* $m<0$ *за допомогою значень* $\widetilde{p}_k^{<}$, *виражених у* (7.81) *через розподіл абсолютного максимуму* ξ^+, *встановлюється, що*

$$\mathbf{E}e^{-\mu l_k(\infty)} = 1 - \frac{\widetilde{p}_k^{<}}{\widetilde{p}_0^{<}} \frac{\mu}{(\widetilde{p}_0^{<})^{-1} + \mu}, \quad k \neq 0, \tag{7.84}$$

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty) > 0\} = \frac{\widetilde{p}_k^{<}}{\widetilde{p}_0^{<}}, \quad \mathbf{P}\{l_k(\infty) > y\} = \frac{\widetilde{p}_k^{<}}{\widetilde{p}_0^{<}} e^{-y/\widetilde{p}_0^{<}}, \quad k \neq 0.$$

При цьому відношення $\widetilde{p}_k^{<}/\widetilde{p}_0^{<}$ *не залежать від* k

$$\frac{\widetilde{p}_k^{<}}{\widetilde{p}_0^{<}} = \frac{1-b}{1-bq_+},$$

$$\mathbf{P}\{l_k(\infty) = 0\} = \frac{bp_+}{1-bq_+} \underset{b\to 0}{\to} 0 \quad \text{для } k = -r < 0, \tag{7.85}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}\{l_k(\infty) > y\} = 0 \quad (y \geq 0), \quad \mathbf{P}\{l_k(\infty) = 0\} \underset{k\to+\infty}{\to} 1.$$

Доведення. Співвідношення (7.82)–(7.85) випливають із (7.60), (7.61) після граничного переходу з урахуванням знаку m та відповідних граничних значень $\widetilde{p}_k$ одержаних в лемах 7.5, 7.6. Слід зауважити, що при $m>0$ атомарні ймовірності $\mathbf{P}\{l_r(\infty)=0\} = 1 - \widetilde{p}_r\widetilde{p}_0^{-1}$ залежать від $r \neq 0$. При $r \to -\infty$ $\mathbf{P}\{l_r(\infty)=0\} \to 1$, оскільки в (7.71) $\widetilde{p}_{-k}^{>} = O(z_0^k)$ при $r=-k \to -\infty$.

При $m<0$ вони залежать від r лише при $r>0$, при $r<0$ — не залежать від r, а при $b=0$ стають нульовими. При $k \to +\infty$ $\mathbf{P}\{l_k(\infty)=0\} \to 1$, оскільки в (7.81) $p_k^+ \to 0$, $\mathbf{P}\{\xi^+ > k\} \to 0$ при $k \to +\infty$. $\square$

Приклад 7.3. Для процесу $\xi(t)$ з генератрисою стрибків

$$p(z) = q\frac{1-b}{z-b} + p\frac{(1-c)z}{1-cz}, \quad 0<b=c<1, \quad \lambda>0, \quad p+q=1.$$

Виразити ймовірності $p_k(s)$ через корені рівняння Лундберга $z_s \in (b,1)$, $\hat{z}_s \in (1,c^{-1})$ і знайти розподіл $l_k(\theta_s)$ при $s>0$ та $l_k(\infty)$ при $p>q$, $p=q$, $p<q$.

7.4 Багатозначна функція банкрутства для цілозначних процесів ризику

Цілозначний пуассонівський процес ризику

$$\begin{aligned}
&\xi'_u(t) = u + C(t) - S(t), \quad \xi'_u(0) = u > 0,\\
&S(t) = \sum_{k\le\nu_1(t)} \xi_k, \quad p_1(z) = \mathbf{E} z^{\xi_k} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k,\\
&p'_1(1) = \mu' = \mathbf{E}\xi_k, \quad \forall\, k,\\
&-C(t) = \sum_{k\le\nu_2(t)} \xi'_k, \quad \mathbf{E} z^{\xi'_k} = \frac{1-b}{1-bz}, \quad 0 \le b < 1,\\
&\mathbf{E}\xi'_k = -\frac{1}{1-b},
\end{aligned}$$

назвемо цілозначним резервним процесом ризику з початковим капіталом $u > 0$.

Процесом надлишків вимог назвемо процес

$$\xi(t) = u - \xi'_u(t) = S(t) - C(t), \quad u > 0,$$

$S(t)$ — процес вимог, $C(t)$ — преміальний процес (замість лінійного Ct), $\nu_{1,2}(t)$ — прості процеси Пуассона з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$. Кумулянту $\xi(t)$ можна записати двома способами

$$k(z) = \begin{cases} \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2\left(\dfrac{1-b}{z-b} - 1\right), & p_1(1) = 1,\\ \lambda\left[p(p_1(z)-1) + q\dfrac{1-z}{z-b}\right], & \lambda = \lambda_1 + \lambda_2,\ p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda},\ q = \dfrac{\lambda_2}{\lambda}. \end{cases}$$

Другий рядок запису $k(z)$ означає, що

$$\xi(t) = \sum_{k\le\nu(t)} \eta_k, \quad \eta_k = \begin{cases} \xi_k & \text{з імовірністю } p,\\ \xi'_k & \text{з імовірністю } q, \end{cases}$$

$\nu(t)$ — простий пуассонівський процес із сумарною інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Звідси випливає, що

$$m = \mathbf{E}\xi(1) = k'(1) = \lambda\left[p\mu' - q\frac{1}{1-b}\right] = \lambda_1\mu' - \lambda_2\frac{1}{1-b},$$

де $\mathbf{E}S(1) = \lambda_1\mu'$, $\mathbf{E}C(1) = \lambda_2(1-b)^{-1}$ — відповідно середні значення процесу вимог та процесу премій. Умова $m < 0$ означає: середнє значення процесу вимог менше середнього преміального значення. У зв'язку з цим (як і в класичному випадку, коли $C(t) = Ct$) вводиться теоретико-ризикова характеристика

$$\delta = \frac{\mathbf{E}C(1) - \mathbf{E}S(1)}{\mathbf{E}S(1)} = \frac{\lambda_2(1-b)^{-1} - \lambda_1\mu'}{\lambda_1\mu'} = \\ = \frac{q(1-b)^{-1} - p\mu'}{p\mu'} > 0,$$

що називається страховою надбавкою.

Як і для класичного процесу ризику всі теоретико-ризикові характеристики визначаються вище введеними граничними функціоналами (аналоги графіків 9, 10 в кінці монографії). Так само для них зберігається теоретико-ризикова інтерпретація, наведена на початку § 6.1. А саме,

$\tau^+(u)$ — момент першого банкрутства,

$\gamma_1(u) = \gamma^+(u)$ — жорсткість банкрутства (penalty value),

$\gamma_2(u) = \gamma_+(u)$ — значення надлишку вимог перед банкрутством,

$\gamma_3(u) = \gamma_u^+$ — значення вимоги, що спричинила банкрутство,

$\tau'(u) = \inf\left\{t > \tau^+(u) : \xi(t) < u\right\}$ — момент повернення в неризикову (зелену) зону $\{y < u\}$,

$$T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau^+(u), & \tau^+(u) < \infty, \\ \infty, & \tau^+(u) = \infty; \end{cases}$$ — тривалість першого червоного періоду,

$Z^+(u) = \sup\limits_{\tau^+(u) \le t < \infty} \xi(t)$ — тотальний максимум дефіциту,

$Z_1^+(u) = \sup\limits_{\tau^+(u) \le t \le \tau'(u)} \xi(t)$ — максимум дефіциту за період $T'(u)$,

$Q_u(t) = \int_0^t I_{\xi(s)>u}\,ds$ — час перебування над критичним рівнем u на $[0, t]$,

$$Q_u(\infty) = \int_0^\infty I_{\xi(s)>u} ds \text{ — тривалість тотального}$$

перебування над критичним рівнем $u > 0$.

Імовірність банкрутства на $[0, t]$ для майже напівнеперервного знизу цілозначного процесу ризику виражається через ф.р. $\xi^+(t)$ ($\tau^+(u)$)

$$\Psi(t,u) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\tau^+(u) < t\right\},$$

$$\Psi_s(u) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) > u\right\} = s\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\left\{\xi^+(t) > u\right\} dt.$$

Тотальна імовірність банкрутства при $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ визначається через розподіл абсолютного максимуму ξ^+

$$\Psi(u) = \lim_{s\to 0}\Psi_s(u) = \mathbf{P}\left\{\xi^+ > u\right\}, \quad u \geq 0.$$

Згідно з результатами § 7.1 атомарна ймовірність $p_+(s)$ строго додатна

$$p_+(s) = \mathbf{P}\left\{\xi^+(\theta_s) = 0\right\} = \frac{1}{p_-(s)}\left[p_0(s) - z_s p_1(s)\right] > 0, \quad b = 0;$$

$$p_+(s) = \frac{1}{p_-(s)}\left[p_0(s) + (b - z_s)\mathbf{E}b^{\xi(\theta_s)-1}I_{\xi(\theta_s)\geq 1}\right], \quad 0 < b < 1.$$

Так само при $m < 0$

$$p_+ = |m|(1-b)\times$$
$$\times\left[p_0'(0) + (b-1)\int_0^\infty \mathbf{E}b^{\xi(t)-1}I_{\xi(t)\geq 1}dt\right] > 0, \quad 0 \leq b < 1.$$

Складну (багатозначну) функцію банкрутства для майже напівнеперервних цілозначних процесів ризику з умовою (7.3) позначимо

$$\varphi_s(u,x,y) = \mathbf{P}\{\gamma^+(u) = x, \gamma_+(u) = y, \zeta^+(\theta_s) > u\}.$$

Згідно з теоремою 7.7 подвійна генератриса функції банкрутства

$$V(s,u,u_1,u_2) = \sum_{x>0}\sum_{y\geq 0}\varphi_s(u,x,y)u_1^x u_2^y$$

та маргінальні генератриси

$$V(s,x,u_k) = \mathbf{E}\left[u_k^{\gamma_k(x)}, \zeta^+(\theta_s) > x\right], \quad k = \overline{1,3}$$

визначаються співвідношенням (7.46) при $u_3 = \mu = 0$ та трійкою співвідношень для V_k $(k = \overline{1,3})$

$$
\begin{aligned}
&sV(s,x,u_1,u_2) = \sum_{y=0}^{x} G(s,x-y,u_1,u_2)p_y^+(s), \quad x \geq 0,\\
&sV_k(s,x,u_k) = \sum_{z=0}^{x} G_k(s,x-z,u_k)p_z^+(s), \qquad (7.86)\\
&G_1(s,x,u_1) = G(s,x,u_1,1), \quad G_2(s,x,u_2) = G(s,x,1,u_2),\\
&G_3(s,x,u_3) = \sum_{y\leq 0} A_{x-y}^{(3)}(u_3)p_y^-(s),\\
&A_x^{(3)}(u_3) = \sum_{k=x+1}^{\infty} u_3^k p_k, \quad x > 0.
\end{aligned}
$$

Щоб одержати результати для складної та маргінальних функцій банкрутства слід обернути (7.86) по u_1 та u_2.

Для обернення нам знадобиться

Лема 7.7. *При умові* (7.3) *з* $b \in (0,1)$ *функція*

$$
G(s,x,u,v) = \sum_{y\leq 0} A_{x-y}(u,v)p_y^-(s), \quad x > 0,
$$

має зображення в термінах $z_s \in (b,1)$

$$
\begin{aligned}
&G(s,x,u,v) = \lambda p_-(s)z_s^{-1}v^x \times\\
&\times \sum_{k=1}^{\infty}\left[bu^k + (z_s-b)u\frac{u^k-(vz_s)^k}{u-vz_s}\right]p_{k+x} =\\
&= \lambda p_-(s)z_s^{-1}v^x\left[b\sum_{k=1}^{\infty}u^k p_{k+x} + (z_s-b)\widetilde{q}(s,x,u,v)\right], \qquad (7.87)
\end{aligned}
$$

де $\widetilde{q}(s,x,u,v)$ *допускає обернення по* u

$$
\widetilde{q}(s,x,u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k q_k(s,x,v) = \sum_{y=1}^{\infty} p_{x+y}u\frac{u^y-(vz_s)^y}{u-vz_s},
$$

при цьому $(b < z_s < 1)$

$$
q_k(s,x,v) = \sum_{y\geq k}(vz_s)^{y-k}p_{x+y} = \sum_{r\geq 0}(vz_s)^r p_{x+k+r}
$$

допускає обернення по v

$$q_{k,r}(s,x) = z_s^r p_{x+k+r}, \quad r \geq 0.$$

Тому (7.87) *допускає обернення по* u

$$\widetilde{g}(s,x,k,v) = \lambda p_-(s) z_s^{-1} v^x [b p_{k+x} + (z_s - b) q_k(s,x,v)]. \tag{7.88}$$

Після обернення (7.88) *по* v *знаходимо*

$$\begin{aligned} g(s,x,k,r) = \lambda p_-(s) z_s^{-1} \big[& b p_{k+x} I\{r = x\} + \\ &+ (z_s - b) z_s^{r-x} p_{r+k} I\{r > x\}\big]. \end{aligned} \tag{7.89}$$

Функція $G_1(s,x,u) = G(s,x,u,1)$ *визначається співвідношенням, що допускає обернення по* u

$$\begin{aligned} G_1(s,x,u) &= \lambda p_-(s) z_s^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[b u^k + (z_s - b) u \frac{u^k - z_s^k}{u - z_s} \right] p_{k+x}, \\ g_1(s,x,k) &= \lambda p_-(s) z_s^{-1} (b p_{k+x} + (z_s - b) q_k(s,x)), \\ q_k(s,x) &= \sum_{y=k}^{\infty} z_s^{y-k} p_{x+y}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{7.90}$$

Функції $G_k(s,x,u_k)$ $(k = 2,3)$ *допускають обернення по* $v = u_2$ *та* $\mu = u_3$

$$\begin{aligned} G_2(s,x,v) &= \lambda p_-(s) z_s^{-1} v^x \left[b z_s \overline{F}(x) + (z_s - b) \sum_{k=1}^{\infty} (z_s v)^k \overline{F}(k+x) \right], \\ g_2(s,x,r) &= \begin{cases} \lambda b p_-(s) \overline{F}(x), \quad \overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 > x\}, \quad r = x, \\ \lambda p_-(s) z_s^{-1} (z_s - b) z_s^{r-x} \overline{F}(r), \quad r > x, \end{cases} \\ G_3(s,x,\mu) &= \lambda \sum_{k \leq 0} p_k^-(s) \sum_{r=x-k+1}^{\infty} \mu^r p_r = \\ &= \lambda p_-(s) \sum_{r=x+1}^{\infty} \left(\frac{1-b}{1-z_s} - \frac{z_s - b}{1-z_s} z_s^{r-x} \right) p_r \mu^r, \quad x > 0, \\ g_3(s,x,r) &= \frac{\lambda}{1-b} [1 - b - (z_s - b) z_s^{r-x}] p_r I\{r > x\}. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Якщо $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, *тоді* $z_s \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1$

$$p'_-(0) = \lim_{s\to 0} s^{-1} p_-(s) = \big(|m|(1-b)^{-1}\big) > 0,$$

і існують похідні функцій згорток $G_k(s,\ldots)$, $g(s,\ldots)$, $g_k(s,\ldots)$ (*при* $s \to 0$)

$$\begin{aligned}
&g'(0,x,k,r) = \lambda p'_-(0)[p_{k+r} I\{r = x\} + (1-b)p_{r+k} I\{r > x\}],\\
&G'_1(0,x,u) = \lambda p'_-(0) \sum_{k=1}^{\infty} \left[bu^k + u(1-b)\frac{u^k - 1}{u-1}\right] p_{k+x},\\
&g'_1(0,x,k) = \lambda p'_-(0)(bp_{k+x} + (1-b)q_k(0,x)),\\
&q_k(0,x) = \sum_{y=k}^{\infty} p_{x+y} = \overline{F}(x+k-1), \quad k \geq 1;\\
&G'_2(0,x,v) = \lambda p'_-(0) v^x [b\overline{F}(x) + (1-b)\sum_{k=1}^{\infty} v^k \overline{F}(k+x)],\\
&g'_2(0,x,r) = \lambda p'_-(0)[b\overline{F}(x) I\{r = x\} + (1-b)\overline{F}(r) I\{r > x\}],\\
&g'_3(0,x,r) = \lambda p'_-(0)[1 + (1-b)(r-x)] p_r I\{r > x\}.
\end{aligned} \tag{7.92}$$

Доведення. Співвідношення (7.87) для $G(s,x,u,v)$, що виражається подвійною сумою після підстановки

$$A_x(u,v) = \lambda v^x \sum_{k=x+1}^{\infty} u^{k-x} \quad (x > 0),$$

одержується після зміни порядку сумування і деяких перетворень, що приводять до зображення, зручного для обернення по u, потім по v. Так встановлюються (7.65) та (7.66). Легко знайти співвідношення для $G_{1,2}(s,\ldots)$, які обертаються по u та v і таким чином встановлюються (7.67), (7.68). Якщо $m < 0$, тоді із (7.88)–(7.91) при $s \to 0$ випливають співвідношення (7.92). □

Наслідок 7.1. *Складна функція банкрутства визначається співвідношеннями*

$$s\varphi_s(u,k,r) = \sum_{y=0}^{u} g(s,u-y,k,r) p_y^+(s), \quad u \geq 0;$$

$$\varphi_0(u,k,r) = \sum_{y=0}^{u} g'(0,u-y,k,r)p_y^+, \quad m<0, \tag{7.93}$$

де $g(s,u,k,r)$ *наводиться в* (7.89), $g'(0,u,k,r)$ — *в* (7.92). *Маргінальні функції банкрутства визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&s\mathbf{E}[u_1^{\gamma^+(u)}, \zeta^+(\theta_s)>u] = \sum_{y=0}^{u} G_1(s,u-y,u_1)p_y^+(s),\\
&s\mathbf{P}\{\gamma^+(u)=k, \zeta^+(\theta_s)>u\} = \sum_{y=0}^{u} g_1(s,u-y,k)p_y^+(s), \qquad (7.94)\\
&s\mathbf{P}\{\gamma^+(0)=k, \zeta^+(\theta_s)>0\} = \lambda p_-(s)p_+(s)(bp_k+(z_s-b)q_k(s,0)),\\
&q_k(s,0) = \sum_{y=k}^{\infty} z_s^{y-k}p_k, \quad q_k(0,u) = \sum_{y=k}^{\infty} p_{u+k}, \quad k\ge 1,
\end{aligned}$$

де функції $G_1(s,u,u_1)$, $g_1(s,u,k)$ *та* $q_k(s,u)$ *визначаються в* (7.90). *При* $k=2,3$

$$\begin{aligned}
&s\mathbf{E}[u_k^{\gamma_k(u)}, \zeta^+(\theta_s)>u] = \sum_{y=0}^{u} G_k(s,u-y,u_k)p_y^+(s),\\
&s\mathbf{P}\{\gamma_k(u)=r, \zeta^+(\theta_s)>u\} = \sum_{y=0}^{u} g_k(s,u-y,r)p_y^+(s) = \qquad (7.95)\\
&= g_k(s,u,r)p_+(s) + \sum_{y=u-r+1}^{u} g_k(s,u-y,r)p_y^+(s)I\{0<r<u\},\\
&s\mathbf{P}\{\gamma_k(0)=r, \zeta^+(\theta_s)>0\} = p_+(s)g_k(s,0,r), \quad r>0
\end{aligned}$$

($G_k(s,u,u_2)$ *та* $g_k(s,u,r)$ *див. в* (7.91)).

Якщо $m=\mathbf{E}\zeta(1)<0$, *тоді граничні маргінальні функції банкрутства визначаються співвідношеннями*

$$\begin{aligned}
&\phi_k(u,r) =: \mathbf{P}\{\gamma_k(u)=r, \zeta^+>u\} = \sum_{y=0}^{u} g_k'(0,u-y,r)p_y^+,\\
&\quad r>0, \quad k=1,3; \quad r\ge 0, \quad k=2, \quad p_-'(0) = \frac{1}{|m|(1-b)};\\
&\phi_1(0,r) = \mathbf{P}\{\gamma^+(0)=r, \zeta^+>0\} =
\end{aligned}$$

$$= \lambda p'_-(0)p_+(bp_r + (1-b)\overline{F}(r-1)), \quad r \geq 1,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(0) = r, \zeta^+ > 0\} = \begin{cases} \lambda b p_+ p'_-(0)\overline{F}(0), & \overline{F}(0) = p, \quad r = 0, \\ \lambda p_+ p'_-(0)(1-b)\overline{F}(r), & r > 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0^+ = r, \zeta^+ > 0\} = \lambda p_+ p'_-(0)[1 + (1-b)r]p_r, \quad r > 0. \qquad (7.96)$$

Доведення. Співвідношення (7.93) випливають із (7.86) після обернення по $u_{1,2}$. При $u_2 = 1$ та $u_1 = 1$ з (7.86) відповідно одержуються перші співвідношення в (7.94) та (7.95), після обернення яких по u_1 та u_2 відповідно легко довести решту співвідношень в (7.94) та (7.95). З цих співвідношень при $m < 0$ після граничного переходу ($s \to 0$) випливають співвідношення (7.96). □

Приклад 7.4. Нехай $\xi(t)$ цілозначний пуассонівський процес з генератрисою стрибків

$$p(z) = \frac{q(1-b)}{z-b} + \frac{p(z^2+z)}{2}, \quad p = q = \frac{1}{2}, \quad 0 < b < 1, \quad \lambda > 0.$$

Знайти генератрису $g(s,z)$ та о.ф.т. для неї. Проаналізувати рівняння Лундберга при $s > 0$ та при $s = 0$ і визначити генератриси абсолютних екстремумів. Записати другу ф.т. та узагальнену формулу Полячека–Хінчина. Знайти маргінальні функції банкрутства.

Даний процес — майже напівнеперервний знизу. За допомогою кумулянти $k(z) = \lambda(p(z) - 1)$ легко підрахувати генератрису

$$g(s,z) = \frac{4s(b-z)}{P_3(s,z)},$$
$$-P_3(s,z) = \lambda z^3 + \lambda(1-b)z^2 - (4(s+\lambda) + \lambda b)z + 4sb + 2\lambda(1+b).$$

В силу майже напівнеперервності знизу

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z - z_1(s)}, \quad p_-(s) = \frac{1 - z_1(s)}{1-b}, \quad b < z_1(s) < 1.$$

Тут $z_1(s)$ — додатний корінь рівняння ($\mathcal{L}_s$): $P_3(s,z) = 0$. Інші два корені $1 < z_2(s) < |z_3(s)|$, що визначають генератрису $g_+(s,z)$, є коренями квадратного рівняння $P_2(s,z) = 0$:

$$g_+(s,z) = -\frac{4s}{p_-(s)P_2(s,z)} \quad \left(P_2(s,z) = \frac{-P_3(s,z)}{z - z_s}, \;\; z_s = z_1(s)\right),$$

$$P_2(s,z) = \lambda z^2 + \lambda(1 - b + z_s)z - 2(\lambda + b\lambda + 2bs)z_s^{-1}.$$

Корені кубічного рівняння $P_3(0,z) = 0$ залежно від знаку $m = \mathbf{E}\xi(1) = \lambda\frac{1-3b}{4(1-b)}$ ($\mu_1 = \frac{3}{2}$) мають такі значення:

а) $m > 0$ ($b < \frac{1}{3}$)

$$z_1 = z_1(0) < 1 = z_2(0) < |z_3(0)|, \quad \text{якщо } z_3(0) \text{ – від'ємне},$$

де z_1 визначає генератрису

$$g_-(z) =: \mathbf{E}z^{\xi^-} = \frac{p_-(z-b)}{z - z_1}, \quad p_- = \frac{1 - z_1}{1 - b} > 0, \quad g_+(s,z) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

б) $m = 0$; $z_1(0) = z_2(0) = z_0 = 1$ — двократний корінь рівняння ($\mathcal{L}_0$).

В силу того, що $z_{1,2}(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1$ ($p_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$), $\mathbf{P}\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1$.

в) $m < 0$; $z_1(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1$, $\frac{1}{s}p_-(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} p'_-(0) = \frac{z_1'(0)}{b-1}$. Отже $g_-(s,z) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$ ($\mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 1$), $P_2(0,z) = \lambda z^2 + \lambda(2-b)z - 2(1+b)\lambda$,

$$g_+(z) =: \mathbf{E}z^{\xi^+} = -\frac{4}{p'_-(0)} P_2(0,z)^{-1} \quad \left(1 > b > \frac{1}{3}\right).$$

Для обчислення $z'_s|_{s=0} = z'_1(0)$ та $p'_-(0)$ при $m < 0$ можна використати розклад $P_3(s,z)$ при $z = 1$ і продиференціювати його

$$-P_3(s,1) = (1 - z_s)P_2(s,1).$$

Враховуючи, що $-P_3(s,1) = 4s(b-1)$, $P'_3(s,1) = 4(1-b) > 0$. Із продиференційованого співвідношення

$$-P'_3(s,1) = (1 - z_s)P'_2(s,1) - z'_s P_2(s,1)$$

при $s \to 0\,(z_s \to 1)$ випливає, що

$$z'_s|_{s=0} = z'_1(0) = \frac{P'_3(0,1)}{P_2(0,1)},$$

де $P_2(0,1) = \lambda(3-b) - 2\lambda(1+b) = \lambda(1-3b) < 0$ ($b > 1/3$). Отже

$$z'_1(0) = \frac{4(1-b)}{\lambda(1-3b)} = m^{-1} < 0, \quad \text{оскільки } m = \frac{\lambda(1-3b)}{4(1-b)} < 0,$$

$$p'_-(0) = -\frac{z'_1(0)}{1-b} = \frac{1}{|m|(1-b)} = \frac{4}{\lambda(3b-1)},$$
$$g_+(z) = \frac{\lambda(1-3b)}{P_2(0,z)} = \frac{1-3b}{z^2+(2-b)z-2(1+b)},$$
$$p_+ = g_+(0) = \frac{3b-1}{2(1+b)}.$$

Корені рівняння $P_2(0,z)=0$, з дискримінантом $D=(b+2)^2+8>0$, $|z_2|>z_1>1$ дають можливість розкласти генератрису ξ^+ на дві дробово-лінійні функції

$$g_+(z) = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z+|z_2|}, \quad A=-B=\frac{1-3b}{\sqrt{D}}.$$

Після розкладу їх за степенями z, знаходимо

$$p_k^+ = \mathbf{P}\left\{\xi^+ = k\right\} = \frac{3b-1}{\sqrt{(b+2)^2+8}}\left((-1)^k|z_2|^{-k-1} + z_1^{-k-1}\right).$$

Згідно з (7.17) друга ф.т. для генератриси

$$T(s,x,z) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau(x)}z^{\gamma^+(x)}, \tau^+(x)<\infty\big]$$

твірне перетворення по x

$$\widetilde{T}(s,\varepsilon,z) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\nu_\varepsilon)}z^{\gamma^+(\nu_\varepsilon)}, \tau^+(\nu_\varepsilon)<\infty\big], \quad \nu_\varepsilon>0,\ \nu_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

виражається через $g_+(s,z)$ і для нашого прикладу виражається співвідношенням

$$\widetilde{T}(s,\varepsilon,z) = \frac{(1-\varepsilon)z}{z-\varepsilon}\left[1-\frac{P_2(s,z)}{P_2(s,\varepsilon)}\right] =$$
$$= \frac{(1-\varepsilon)[\lambda z^2 + \lambda(1-b+z_s+\varepsilon)z]}{-P_2(s,\varepsilon)},$$

з якого після обернення по z випливає, що

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\nu_\varepsilon)}, \gamma^+(\nu_\varepsilon)=1\big] = \frac{\lambda(1-\varepsilon)(1-b+z_s+\varepsilon)}{-P_2(s,\varepsilon)},$$
$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(\nu_\varepsilon)}, \gamma^+(\nu_\varepsilon)=2\big] = \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{-P_2(s,\varepsilon)}.$$

При $\varepsilon \to 0$ знаходимо генератрису для $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$

$$T(s,0,z) = \mathbf{E}\big[z^{\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0\big] = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}(s,z,\varepsilon) = \frac{\lambda z^2 + \lambda(1-b+z_s)z}{-P_2(s,0)},$$

а при $u = 1$ обчислюється $q_+(s) = \lambda(2-b+z_s)(-P_2(s,0))^{-1}$. Отже знайдену генератрису можна записати так:

$$T(s,0,z) = \frac{q_+(s)}{2-b+z_s}[z^2 + (1-b+z_s)z] = q_+(s)\widetilde{g}_s(z),$$

$$\widetilde{g}_s(z) = \mathbf{E}\big[z^{\gamma^+(0)} \,|\, \xi^+(\theta_s) > 0\big] = \frac{z^2 + (1-b+z_s)z}{2-b+z_s}.$$

Згідно з (7.20) генератриса $\xi^+(\theta_s)$ виражається через одержану умовну генератрису $\widetilde{g}_s(u)$ за допомогою узагальненої формули Полячека–Хінчина

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\widetilde{g}_s(z)} = \\ = -p_+(s)\frac{P_2(s,0)}{P_2(s,0) + \lambda z^2 + \lambda(1-b+z_s)z} = \\ = -p_+(s)P_2(s,0)\frac{1}{P_2(s,z)}.$$

Зауважимо, що одержане представлення співпадає з тим, що отримано на основі факторизаційної формули, оскільки $-p_+(s)P_2(s,0) = -P_2(s,1) = -4s/p_-(s)$. При $m < 0$ і $s \to 0$ одержується формула Полячека–Хінчина (див. (7.52) при $0 < b < 1$)

$$g_+(z) = \lim_{s\to 0} g_+(s,z) = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{g}_0(z)},$$

де

$$\widetilde{g}_0(z) = \frac{z^2 + (2-b)z}{3-b}, \quad z_s \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 1, \quad p_+(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} p_+ > 0.$$

Зауважимо, що $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/4$, $p_i = 0$, $i = \overline{3,\infty}$, та

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0; \\ \frac{1}{4}, & x = 1, \\ g_{1,2,3}(s,x,i-1) = 0, & x > 1, \end{cases}$$

тоді легко обчислити ненульові значення функцій $g_{1,2,3}(s,x,k)$ при $k=1,2$ (див. (7.90), (7.91)), що є оберненням відносно z функцій $G_{1,2,3}(s,x,z)$:

$$g_1(s,x,k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda p_-(s)}{4}\left(1-b+z_s\right), & x=0,\ k=1,\\ \dfrac{\lambda p_-(s)}{4}, & x=0,\ k=2,\ x=1,\ k=1;\end{cases}$$

$$g_2(s,x,k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda b p_-(s)}{2}, & x=k=1,\\ \dfrac{\lambda p_-(s)}{2}(z_s-b), & x=0,\ k=1;\end{cases}$$

$$g_3(s,x,k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda p_-(s)}{4}\left(1-b+z_s\right), & x=0,\ k=1,\ x=1, k=2,\\ \dfrac{\lambda p_-(s)}{4}\left((1-b)(1+z_s)+z_s^2\right), & x=0,\ k=2.\end{cases}$$

Дограничні функції банкрутства

$$\phi_k(s,u,r)=\mathbf{P}\left\{\gamma_k(u)=r,\xi^+(\theta_s)>0\right\}$$

безпосередньо обчислюються за формулою (7.95) при $s>0$.

При $m<0$ та $u>0$ граничні маргінальні функції банкрутства

$$\phi_k(u,r)=\mathbf{P}\{\gamma_k(u)=r,\xi^+>u\},\quad k=\overline{1,3},$$

обчислюються шляхом граничного переходу в (7.95) при $s\to 0$:

$$\phi_k(u,r)=\sum_{y=0}^{\min(u;2)} g'_k(0,y,r)p^+_{u-y},$$

де функції $g'_i(s,x,k)$ мають представлення

$$g'_1(0,x,k)=\begin{cases}\dfrac{(2-b)}{3b-1}, & x=0,\ k=1,\\ \dfrac{1}{3b-1}, & x=0,\ k=2,\ x=1,\ k=1;\end{cases}$$

$$g'_2(0,x,k)=\begin{cases}\dfrac{b}{3b-1}, & x=k=0,\ x=k=1,\\ \dfrac{1-b}{3b-1}, & x=0,\ k=1;\end{cases}$$

$$g_3'(0,x,k) = \begin{cases} \dfrac{(2-b)}{3b-1}, & x=0,\ k=1,\ x=1,\ k=2, \\ \dfrac{(3-2b)}{3b-1}, & x=0,\ k=2. \end{cases}$$

Зокрема при $m < 0$, $u = 0$ функції $\phi_k(0,r) = \mathbf{P}\{\gamma_k(0) = r, \xi^+ > 0\}$ обчислюються за формулами (7.96):

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(0) = r, \xi^+ > 0\} = \frac{2}{1+b}(bp_r + (1-b)\overline{F}(r-1)), \quad r = 1,2;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(0) = r, \zeta^+ > 0\} = \begin{cases} \dfrac{2b}{1+b}\overline{F}(0) = \dfrac{2b}{1+b}, & r=0, \\ \dfrac{2}{1+b}(1-b)\overline{F}(1) = \dfrac{1-b}{2(1+b)}, & r=1, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0^+ = r, \zeta^+ > 0\} = \lambda\frac{2}{1+b}[1+(1-b)r]p_r,$$

$$r = 1,2 \quad (p_{1,2} = 1/4)\,.$$

Знаходження генератрис тотального максимуму дифіциту $z^+(u) = \zeta^+_{\gamma^+(u)}$ та $\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)$, та “червоного періоду” $T'(u)$ здійснюється аналогічно тому, як це робилось для недискретних процесів ризику в теоремах 6.1, 6.5, та в теоремах 6.2, 6.6. Аналоги цих результатів для цілозначних процесів наводяться в наступному твердженні.

Теорема 7.10. *Для цілозначного майже напівнеперервного знизу процесу ризику генератриса* $\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)$

$$\Phi^*(s,u,z) =: \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(u)}z^{\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \tau^+(u) < \infty\big]$$

визначається співвідношенням

$$\Phi^*(s,u,z) = \Phi(s,0,z)T(s,u,z), \quad \Phi(s,v,z) = \mathbf{E}z^{\zeta^+_v(\theta_s)}, \tag{7.97}$$

де $T(s,u,z) = \mathbf{E}[z^{\gamma^+(u)}, \zeta^+(\theta_s) > u]$ *визначається згорткою* (7.94)

$$sT(s,u,z) = \sum_{y=0}^{u} G_1(s,u-y,z)p_y^+(s),$$

яка обертається по z (*див. другу формулу в* (7.94)).

При $m<0$ генератриса тотального максимуму дефіциту $Z^+(u)$ визначається через $T_0(u,z)=T(0,u,z)$

$$\kappa_u(z) =: \mathbf{E}\big[z^{Z^+(u)}, \zeta^+ > u\big] = \mathbf{E}z^{\zeta^+}T_0(u,z)z^u,$$
$$T_0(u,z) = \mathbf{E}\big[z^{\gamma^+(u)}, \zeta^+ > u\big] = \sum_{y=0}^{u} G_1'(0,u-y,z)p_y^+. \qquad (7.98)$$

При $m<0$ генератриса $g_u^*(s) =: \mathbf{E}\big[e^{-sT'(u)}, T'(u)<\infty\big]$ виражається дискретним аналогом формули dos Reis'а

$$g_u^*(s) = q_-(s)\sum_{v=1}^{\infty} z_s^v\phi_1(u,v) = q_-(s)T_0(u,z_s) =$$
$$= \sum_{v=1}^{\infty}\mathbf{E}e^{-s\tau^-(v)}\sum_{y=0}^{u} g_1'(0,u-y,v)p_y^+, \qquad (7.99)$$
$$g_0^*(s) = \mathbf{E}\big[e^{-sT'(0)}, T'(0)<\infty\big] = q_-(s)T_0(0,z_s), \qquad (7.100)$$
$$T_0(u,z_s) = \mathbf{E}\big[z_s^{\gamma^+(u)}, \tau^+(u)<\infty\big], \quad z_s = z_1(s) < 1.$$

Після обернення другого рядка формули (7.99) *одержується щільність розподілу $T'(u)$ (в диференціалах)*

$$\mathbf{P}\{T'(u)\in dt, T'(u)<\infty\} = p_+\sum_{v=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau^-(-v)\in dt\}g_1'(0,0,v) +$$
$$+\sum_{v=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau^-(-v)\in dt\}\sum_{y=1}^{u} g_1'(0,u-y,v)p_y^+. \qquad (7.101)$$

Генератриса числа вимог $N^*(u) = n(T'(u))$ $\big(\mathbf{E}z^{n(t)} = e^{t\lambda_1(1-z)}\big)$ визначається співвідношенням ($s_z = \lambda_1(1-z)$, $\lambda_1 = \lambda p$ — інтенсивність вимог $\xi_k \geq 1$)

$$n^*(u,z) = q_-(s_z)\sum_{v=1}^{\infty} z_1^v(s_z)\phi_1(u,v) = q_-(s_z)T_0(u,z_1(s_z)),$$
$$n^*(0,z) = q_-(s_z)T_0(0,z_1(s_z)), \quad q_-(s_z) \underset{z\to1}{\to} 1, \quad s_z \underset{z\to1}{\to} 0, \quad (7.102)$$
$$n^*(u,1) = T_0(u,1) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\},$$
$$n^*(0,1) = \mathbf{P}\{T'(0)<\infty\} = q_+.$$

Генератриса числа вимог до банкрутства $N_*(u) = n(\tau^+(u))$ визначається співвідношенням

$$\mathbf{E}\big[z^{N_*(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] = \mathbf{E}\big[e^{-s_z \tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] = \\ = V(s_z, u, 1) = \overline{P}_+(s_z, u),$$

Доведення. На основі співвідношення $\Phi(s, v, z) = z^v \Phi(s, 0, z)$ для генератриси $\zeta_v^+(\theta_s)$ встановлюється (7.97). При $m < 0$ граничним переходом ($s \searrow 0$) доводиться справедливість (7.98). При цьому перший рядок в (7.99) є гратчастим аналогом формули dos Reis'a (6.30). Усередненням генератриси для $\tau^-(-v)$ по розподілу $\mathbf{P}\{\gamma^+(u) = v\}$ знаходимо генератрису (7.99) для $T'(u)$ та (7.100) для $T_0'(0)$, а також відповідну щільність (7.101). Усередненням генератриси $n_t(z)$ (див. (6.29) по щільності (7.101) встановлюється справедливість співвідношень (7.102), а усередненням $n_t(z)$ за розподілом $\tau^+(u)$ — співвідношення для генератриси $N_*(u)$. $\square$

Для напівнеперервних знизу цілозначних процесів ризику всі співвідношення наслідку 7.1 та теореми 7.11 спрощуються, оскільки при $b = 0$ спрощуються всі функції в лемі 7.7.

7.5 Граничні задачі на інтервалі для цілозначних пуассонівських процесів

Граничні функціонали, пов'язані з виходом цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$ із значеннями в $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ з обмеженого інтервалу $(x - T, x)$ $(0 < x < T)$, позначаються так само, як і для процесів із значеннями в R

$$\begin{aligned}
&\tau(x, T) = \inf\{t > 0 : \xi(t) \notin (x - T, x)\},\\
&A_+(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) > x\} = \{\tau^+(x) < \tau^-(x - T)\},\\
&A_-(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) < x - T\} = \{\tau^-(x - T) < \tau^+(x)\},\\
&\tau(x, T) = \begin{cases} \tau^+(x, T), & \omega \in A_+(x),\\ \tau^-(x, T), & \omega \in A_-(x); \end{cases}\\
&\tau^+(x) = \inf\{t : \xi(t) > x\}, \quad x > 0,
\end{aligned}$$

$$\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,$$
$$\gamma_T^+(x) = \xi(\tau^+(x,T)) - x,$$
$$\gamma_T^-(x) = x - T - \xi(\tau^-(x,T)).$$

Генератриси функціоналів, пов'язаних з виходом $\xi(t)$ з $(x-T,x)$, позначимо як і раніше

$$Q^T(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x,T)}, A_+(x)\big],$$
$$Q_T(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, A_-(x)\big],$$
$$V^{\pm}(s,z,x,T) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^{\pm}(x,T)} z^{\gamma_T^{\pm}(x)}, A_{\pm}(x)\big],$$
$$V(s,z,x,T) = \mathbf{E}\big[z^{\xi(\theta_s)}, \tau(x,T) > \theta_s\big],$$
$$V_{\pm}(s,z,x,T) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^{\pm}(x,T)} z^{\xi(\tau^{\pm}(x,T))}, A_{\pm}(x)\big].$$

Ще позначатимемо сукупність цілих чисел, що лежать відповідно справа (зліва) від $x > 0$, або справа (зліва) від $x - T < 0$

$$\mathbb{Z}_x^+ \in (x, +\infty), \quad \mathbb{Z}_x^- \in (-\infty, x),$$
$$\mathbb{Z}_{x-T}^+ \in (x-T, +\infty), \quad \mathbb{Z}_{x-T}^- \in (-\infty, x-T).$$

Для обмежених послідовностей $\{g_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ таких, що $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |g_k| < \infty$ та для обмеженого або напівобмеженого інтервалу I цілих чисел введемо позначення для класу твірних перетворень

$$R(I): \left\{ g(z) = \sum_{k\in I} g_k z^k \right\}, \quad R^0(I): \ \{c + g(z),\ 0 \notin I\}, \quad c \neq 0.$$

Для твірних перетворень (генератрис)

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| = 1$$

позначимо операції проектування

$$[g(z)]_I = \sum_{k\in I} g_k z^k.$$

Очевидно, що вище введені функції $V(s,z,x,T) \in R(I)$, $I \in (x-T,x)$; $V_\pm(s,z,x,T) \in R(I_\pm)$, $I_+ = \mathbb{Z}_x^+$, $I_- = \mathbb{Z}_{x-T}^-$; $(\mathbb{Z}_x^\pm = \{k : k \geq x, k \leq x\})$ $g_\pm(s,z) \in R(\mathbb{Z}_\pm^0)$, $\mathbb{Z}_\pm^0 = \{\pm k \geq 0\}$.

Для знаходження генератрис, що вводились на початку § 7.3, доведемо спочатку лему про проекційні факторизаційні тотожності (аналоги тотожностей Печерського для процесів із значеннями на дійсній прямій R^1).

Зауваження. Якщо цілозначний процес $\xi_u(t) = u + \xi(t)$ стартує з $u > 0$ (u – ціле), тоді згідно з (4.4) будемо позначати моменти першого виходу з інтервалу $(0,B)$ $(0 < u < B)$

$$\tau_B(u) = \inf\{t > 0 : \xi_u(t) \overline{\in} (0,B)\},$$

$$\tau_B(u) = \begin{cases} \tau_B^+(u), & \omega \in A_+ = \{\tau^+(B-u) < \tau^-(-u)\}, \\ \tau_B^-(u), & \omega \in A_- = \{\tau^-(B-u) < \tau^+(B-u)\}. \end{cases}$$

Для генератрис $Q_B^\pm(s,u) = \mathbf{E}[e^{-s\tau_B^\pm(u)}, A_\pm]$ ми зберігаємо позначення (4.45), які узгоджуються з позначеннями в [84]

$$Q^B(s,u) = Q_B^+(s,u), \quad Q_B(s,u) = Q_B^-(s,u).$$

Лема 7.8. *Нехай $\xi(t)$ довільний цілозначний пуассонівський процес. Тоді генератриси $V(s,z,x,T)$ та $V^\pm(s,z,x,T)$ задовольняють співвідношення зв'язку*

$$V(s,z,x,T) = g(s,z)[1 - V_+(s,z,x,T) - V_-(s,z,x,T)]. \tag{7.103}$$

При $s > 0$ мають місце проекційні тотожності відносно інтервалів $\mathbb{Z}_x^\pm$

$$\begin{aligned} V_+(s,z,x,T) &= g_+^{-1}(s,z)[g_+(s,z) \\ &\qquad \times (1 - V_-(s,z,x,T))]_{\mathbb{Z}_x^+}, \quad |z| \leq 1, \\ V(s,z,x,T) &= g_-(s,z)[g_+(s,z) \times \\ &\qquad \times (1 - V_-(s,z,x,T))]_{\mathbb{Z}_x^-}, \quad |z| = 1. \end{aligned} \tag{7.104}$$

$$\begin{aligned} V_-(s,z,x,T) &= g_-^{-1}(s,z)[g_-(s,z) \times \\ &\qquad \times (1 - V_+(s,z,x,T))]_{\mathbb{Z}_{x-T}^-}, \quad |z| \geq 1, \\ V(s,z,x,T) &= g_+(s,z)[g_-(s,z) \times \\ &\qquad \times (1 - V_+(s,z,x,T))]_{\mathbb{Z}_{x-T}^+}, \quad |z| = 1. \end{aligned} \tag{7.105}$$

Доведення. З очевидного співвідношення для генератриси $\xi(t)$ знаходимо, що

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\big[z^{\xi(t)}, \tau(x,T) > T\big] = \mathbf{E}z^{\xi(t)} - \mathbf{E}\big[z^{\xi(t)}, \tau(x,T) \le T\big] = \\ &\quad = e^{tk(z)-\mathcal{I}_+(t,z)} - \mathcal{I}_-(t,z), \qquad (7.106)\\ &\mathcal{I}_\pm(t,z) = \int_0^t e^{(t-u)k(z)}\mathbf{E}\big[e^{\xi(u)}, \tau^\pm(x,T) \in du\big].\end{aligned}$$

Після перетворення Лапласа–Карсона по t знаходимо

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\pm(s,z) = g(s,z)V_\pm(s,z,x,T).$$

Тоді із (7.106) випливає (7.103). Для стислості запису V змінну T та інші опустимо. Тоді з (7.103) випливає, що

$$V(s,z,x) = g(s,z)(I - V_-) - g(s,z)V_+$$

і на основі о.ф.т. із останнього співвідношення одержимо

$$\begin{aligned}&g(s,z)V_+(s,z,x) = g(s,z)(1 - V_-(s,z,x)) - V(s,z,x), \qquad (7.107)\\ &g_+(s,z)V_+(s,z,x) = g_+(s,z)(1 - V_-(s,z,x)) - g_-^{-1}(s,z,x)V.\end{aligned}$$

З умови $g_-^{-1}(s,z)V \in \mathbb{Z}_x^-, V \in R(I)$ випливає, що $[g_-^{-1}(s,z)V]_{\mathbb{Z}_x^+} = 0$. тому після операції проектування $[\ \ ]_{\mathbb{Z}_x^+}$ із другої формули в (7.107) випливає співвідношення (еквівалентне першому в (7.104))

$$g_+(s,z)V_+(s,z,x) = [g_+(s,z)(1 - V_-(s,z,x))]_{\mathbb{Z}_x^+}.$$

Аналогічно з першої формули в (7.107) знаходимо, що

$$V(s,z,x)g_-^{-1}(s,z) = g_+(s,z)(1 - V_-) - g_+(s,z)V_+. \qquad (7.108)$$

Оскільки $Vg_-^{-1}(s,z) \in R_x^-$, $g_+(s,z)V_+ \in \mathbb{Z}_x^+$, то з (7.108) після проектування $[\ \ ]_{\mathbb{Z}_x^-}$ одержимо співвідношення

$$V(s,z,x)g_-^{-1}(s,z) = [g_+(s,z)(1 - V_-)]_{\mathbb{Z}_x^-},$$

еквівалентне другому співвідношенню в (7.104). Тотожності (7.105) виводяться аналогічно із співвідношення

$$g(s,z)V_-(s,z,x) = g(s,z)(1 - V_+) - V(s,z,x). \qquad \square$$

На основі результатів § 7.1–7.2 встановлюється, що для цілозначних пуассонівських процесів розподіли функціоналів описуються різницевими рівняннями з твірним оператором

$$\mathbf{K}f(x) = \lambda \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_y(f(x-y) - f(x)); \quad \sum_{y \neq 0} p_y = 1, \quad x \in \mathbb{Z},$$

символом якого є кумулянта $k(z) = \lambda(p(z) - 1)$.

Для напівнеперервних зверху (знизу) процесів ці оператори мають вигляд

$$\mathbf{K}_+ f(x) = \lambda \sum_{y=-\infty}^{1} p_y(f(x-y) - f(x)),$$
$$\mathbf{K}_- f(x) = \lambda \sum_{y=-1}^{\infty} p_y(f(x-y) - f(x)).$$

Як і в розділі 4 для напівнеперервних цілозначних процесів можна ввести поняття потенціалу й резольвенти.

Основні властивості потенціала й резольвенти для цілозначних процесів такі ж самі як і для цілозначних випадкових блукань (див. розділ 5 в [84] та розділ 2 в [86], а також далі в § 7.7).

За визначальну властивість резольвенти в ґратчастому випадку можна використати її зображення у вигляді згортки деякої степеневої функції з розподілом одного з екстремальних значень $\xi^{\pm}(\theta_s)$.

Означення 7.3. Нехай $\xi(t)$ — цілозначний напівнеперервний зверху пуасонівський процес (див. (7.4)), для якого згідно з (7.24)

$$g_+(s,z) = \mathbf{E} z^{\xi^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)z} \quad (q_+(z) = z_s^{-1} < 1,\ k(z_s) = s).$$

Тоді резольветою цього процесу називається функція від цілого $x > 0$

$$R_s(x) = s^{-1} p_+(s) \sum_{k=0}^{x-1} q_+^{k-x}(s) p_{-k}^-(s), \quad x > 0, \tag{7.109}$$
$$R_s(0) = 0,\ p_{-k}^-(s) = \mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) = k\}, \quad k \geq 0.$$

Означення 7.4. Нехай $\xi(t)$ — цілозначний напівнеперервний знизу пуассонівський процес (див. (7.2)), для якого згідно з (7.31)

$$g_-(s,z) = \mathbf{E} z^{\xi^-(\theta_s)} = \frac{zp_-(s)}{z - q_-(s)} \quad (z_s = q_-(s) < 1,\ k(z_s) = s).$$

Тоді резольвентою цього процесу називають функцію від цілого $x > 0$

$$R_s(x) = s^{-1} p_-(s) \sum_{k=0}^{x-1} q_-^{k-x}(s) p_k^+(s), \quad x > 0, \tag{7.110}$$
$$R_s(0) = 0, \quad p_k^+(s) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = k\}, \quad k \geq 0.$$

Легко доводиться наступна властивість для $R_s(x)$ (яка в неґратчастому випадку була визначальною).

Властивість 7.1. *Резольвента* (7.109) *напівнеперервного зверху процесу задовольняє співвідношення*

$$R(s, z^{-1}) =: \sum_{x=1}^{\infty} z^{-x} R_s(x) = \frac{1}{k(z) - s}, \tag{7.111}$$
$$s > 0, \quad z_s = q_+^{-1}(s) < z.$$

Генератриса резольвенти (7.110) *напівнеперервного знизу процесу задовольняє співвідношення*

$$R(s, z) =: \sum_{x=1}^{\infty} z^x R_s(s) = \frac{1}{k(z) - s}, \tag{7.112}$$
$$s > 0, \quad 0 < z < z_s = q_-(s).$$

Обмежимось доведенням (7.111). При $zq_+(s) > 1$ після підрахунку $R(s, z^{-1})$ знаходимо, що

$$\sum_{x=1}^{\infty} z^{-x} \sum_{k=0}^{x-1} q_+^{k-x}(s) p_{-k}^-(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{-k}^-(s) q_+^k(s) \sum_{x=k+1}^{\infty} (q_+(s) z)^{-x} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{-k}^-(s) z^{-k} \frac{1}{q_+(s) z - 1} = \frac{1}{zq_+(s) - 1} \mathbf{E} z^{\xi^-(\theta_s)}.$$

Домножаючи на $p_+(s)s^{-1}$, з останнього співвідношення знаходимо, що

$$R(s,z^{-1}) = -s^{-1}g_-(s,z)g_+(s,z) = \frac{1}{k(z)-s}.$$

Аналогічно доводиться (7.112).

Властивість 7.2 ([86, § 3.2, с. 193])**.** *Функція* $V_s(x) = R_s(s)I(x>0)$ *є единим розв'язком рівняння*

$$(\mathbf{K}_\pm - s\mathbf{I})V_s(x) = \delta_x \quad (x \geq 0). \tag{7.113}$$

Властивість 7.3. *Функція*

$$V_s(x) = \begin{cases} \sum\limits_{y=0}^{x} R_s(x-y)G(y), & x>0, \\ 0, \quad x<0; \quad \sum\limits_{y>0} |G(y)| < \infty \end{cases} \tag{7.114}$$

задовольняє рівняння

$$(\mathbf{K}_\pm - s\mathbf{I})V_s(x) = G(x), \quad x>0. \tag{7.115}$$

Властивості 7.2, 7.3 доводяться так само як і для напівнеперервних цілозначних випадкових блукань (див. [86]).

З властивостей 7.2, 7.3 випливає

Властивість 7.4. *Загальний розв'язок рівняння* (7.115) *при умові* $V_s(x) = 0$ *для* $x<0$ *має вигляд*

$$V_s(x) = c_s R_s(x) + \sum_{y=0}^{x} G(y)R_s(x-y), \quad x>0. \tag{7.116}$$

Означення 7.5. Потенціалом напівнеперервного зверху (знизу) процесу називається функція $R(x) = \lim\limits_{s\to 0} R_s(x)$, генератриса якої $\widetilde{R}(z) = \sum\limits_{x=1}^{\infty} z^x R(x)$ задовольняє співвідношення

$$\widetilde{cR}(z^{\mp 1}) = R(0,z) = \frac{1}{k(z)}, \quad R(0) = 0.$$

При обчисленні $R(x)$ на основі (7.109) та (7.110) шляхом граничного переходу ($s \to 0$) слід враховувати знак $m = \mathbf{E}\xi(1)$.

Зокрема, для напівнеперервного зверху процесу з (7.109) знаходимо для $x > 0$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbf{P}\{\xi^-(t) = -k\}dt = \mathbf{E}[\tau^-(-k) - \tau^-(k-1)],\\
&R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) =\\
&\quad = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\mathbf{P}\{\xi^- > -x\}, \quad m > 0,\\ p_+ \displaystyle\sum_{k=0}^{x-1} q_+^{k-x}\mathbf{E}[\tau^-(-k) - \tau^-(-k-1)], \quad m < 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

для напівнеперервного знизу процесу з (7.110) знаходимо для $x > 0$

$$
R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|m|}\mathbf{P}\{\xi^+ < x\}, \quad m < 0,\\ p_- \displaystyle\sum_{k=0}^{x-1} q_-^{k-x}\mathbf{E}[\tau^+(k+1) - \tau^+(k)], \quad m > 0. \end{cases}
$$

Властивості $R(x)$ для процесу аналогічні властивостям потенціалу для ґратчастих блукань і виводяться із властивостей резольвенти.

Генератриси моментів виходу з інтервалу визначаються на основі властивостей $R_s(x)$ та $R(x)$ в наступному твердженні.

Теорема 7.11. *Для напівнеперервного зверху цілозначного пуассонівського процесу генератриси $\tau^{\pm}(x,T)$ та $\tau(x,T)$ визначаються співвідношеннями* (*в термінах $R_s(x)$ із* (7.109))

$$
Q^T(s,x) = \frac{R_s(T-x)}{R_s(T)} \quad (0 < x < T), \tag{7.117}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_T(s,x) = 1 - Q^T(s,x) -\\
&\qquad - s\left[Q^T(s,x)\sum_{k\le T} R_s(k) - \sum_{k\le x} R_s(k)\right],
\end{aligned}
\tag{7.118}
$$

$$
Q(T,s,x) = 1 - s\left[Q^T(s,x)\sum_{k\le T} R_s(k) - \sum_{k\le x} R_s(k)\right]. \tag{7.119}
$$

Розподіл значень процесу до виходу з інтервалу визначається для $x - T < y < x$

$$
h_s(T,x,y) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = y, \tau(x,T) > \theta_s\} =
$$

$$= sQ^T(s,x)R_s(x-y) - sR_s(-y)\delta(y<0). \tag{7.120}$$

Спільний розподіл $\{\tau^-(x,T), \xi(\tau^-(x,T))\}$ *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) \le z\big] = \tag{7.121}$$
$$= \sum_{x-T<y<x} \Pi_-(z-y)R_s(x-y)Q^T(s,x) -$$
$$- \sum_{x-T<y<0} \Pi_-(z-y)R_s(-y), \quad z < x-T.$$

Для напівнеперервного знизу цілозначного пуассонівського процесу генератриси $\tau^\pm(x,T)$ *та* $\tau(x,T)$ *визначаються співвідношеннями* (*в термінах* $R_s(x)$ *із* (7.110))

$$Q_T(s,x) = \frac{R_s(x)}{R_s(T)} \quad (0<x<T), \tag{7.122}$$

$$Q^T(s,x) = 1 - Q_T(s,x) - \tag{7.123}$$
$$- s\left[Q_T(s,x)\sum_{k=1}^{T} R_s(x) - \sum_{k=1}^{x} R_s(x)\right],$$

$$Q(T,s,x) = 1 - s\left[Q_T(s,x)\sum_{k=1}^{T} R_s(x) - \sum_{k=1}^{x} R_s(x)\right]. \tag{7.124}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок неперервності знизу. Із стохастичного співвідношення

$$\tau^-(x,T) \doteq \begin{cases} \zeta, & \xi_1 \le x-T, \\ \zeta + \tau^-(x-\xi_1,T), & x-T \le \xi_1 < x, \end{cases}$$

знаходимо, що ($\tau^-(x,T) = 0$, $x \ge T$)

$$Q_T(s,x) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\mathbf{P}\{\xi_1 < x-T\} +$$
$$+ \frac{\lambda}{s+\lambda}\sum_{k \ge x-T} p_k Q_T(s,x-k), \quad 0<x<T.$$

З умови $Q_T(s,x) = 1$, $x \ge T$ та останнього рівняння випливає, що $Q_T(s,x)$ задовольняє рівняння

$$(\mathbf{K}_- - s\mathbf{I})Q_T(s,x) = 0, \quad x > 0, \tag{7.125}$$

тобто рівняння (7.115) з $G(x) \equiv 0$, $x > 0$. При $x < 0$ $Q_T(s,x) = 0$, тому за властивістю 7.4 розв'язок рівняння (7.115) шукаємо у вигляді

$$Q_T(s,x) = C_s R_s(x), \quad 0 < x < T.$$

З умови $Q_T(s,T) = 1$ випливає, що $c(s) = R_s^{-1}(T)$ і (7.122) доведено.

Для $\tau^+(x,T)$ має місце стохастичне зображення

$$\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} \zeta, \quad \xi_1 > x, \\ \zeta + \tau^+(x-\xi_1,T), \quad x - T < \xi_1 \le x, \end{cases}$$

з якого випливає, що

$$Q^T(s,x) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\overline{F}(x) + \frac{\lambda}{s+\lambda}\sum_{x-T<k\le x} p_k Q^T(s,x-k).$$

Оскільки $Q^T(s,x) = 1$ при $x \le 0$, тоді з останнього співвідношення випливає рівняння

$$(\mathbf{K}_- - s\mathbf{I})Q^T(s,x) = 0, \quad x > 0.$$

Після заміни $\widetilde{Q}^T(s,x) = 1 - Q^T(s,x)$ одержимо рівняння

$$\begin{aligned} &(\mathbf{K}_- - s\mathbf{I})\widetilde{Q}^T(s,x) = -s, \quad x > 0; \\ &\widetilde{Q}^T(s,x) = 0, \quad x \le 0. \end{aligned} \tag{7.126}$$

За властивістю 7.4 розв'язок рівняння (7.126) визначається співвідношенням

$$\widetilde{Q}^T(s,x) = c_s R_s(x) + s\sum_{k=1}^{x} R_s(k).$$

Звідси (враховуючи, що $\widetilde{Q}^T(s,T) = 1$) при $x = T$ знаходимо, що

$$c_s R_s(T) + s\sum_{k=0}^{T} R_s(k) = 1, \quad c_s = R_s^{-1}(T)\left(1 - s\sum_{k=0}^{T} R_s(k)\right).$$

Таким чином одержимо співвідношення

$$\widetilde{Q}^T(s,x) = R_s^{-1}(T)R_s(x)\left(1 - s\sum_{k=1}^{T} R_s(k)\right) - s\sum_{k=1}^{x} R_s(k),$$

еквівалентне (7.123). З (7.122) та (7.123) випливає (7.124). Цілком аналогічно встановлюються співвідношення (7.117)–(7.119). Слід врахувати, що для напівнеперервного зверху процесу $\xi(\tau^+(x,T)) = x$, тому після підстановки

$$V_+(s,z,x,T) = Q^T(s,x)z^x$$

в останнє співвідношення (7.105) одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} V(s,z,x,T) = g_+(s,z) \times \\ \times \{[g_-(s,z)]_{(x-T,0)} - Q^T(s,x)[z^x g_-(s,z)]_{(x-T,x)}\}. \end{aligned}$$

Після обернення першого доданка знаходимо

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(s,y) &= \sum_{k=(-y)\vee 0}^{T-x-1} p^+_{k+y}(s)p^-_{-k}(s) = \\ &= p_+(s) \sum_{k=(-y)\vee 0} p_+(s)q_+(s)^{k+y}p^-_{-k}(s) \\ &= sq_+(s)^{T+y-x}R_s(T-x) - sR_s(-y)I\{y>0\}. \end{aligned}$$

Після обернення другого доданка (без множника $-Q^T(s,x)$) одержимо

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_2(s,y) = \sum_{x-T<k<y} p^+_{y-k}(s)\mathbf{P}\{-\xi^-(\theta_s) = x-k\} = \\ &= \sum_{x-y<r<T} p^-_{-r}(s)p^+_{y+k-x}(s) = \left(\sum_{r<T} - \sum_{r<x-y}\right) p^-_{-r}(s)p^+_{y+r-s}(s) = \\ &= sq_+(s)^{T+y-x}R_s(T) - sR_s(x-y). \end{aligned}$$

Склавши одержані доданки, знаходимо, що

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_1(s,y) - Q^T(s,x)\mathcal{I}_2(s,y) = \\ &\quad = sQ^T(s,x)R_s(x-y) - sR_s(-y)I\{y<0\}, \end{aligned}$$

і таким чином (7.120) доведено.

Співвідношення (7.121) можна одержати із загальної формули (4.130), якщо врахувати, що $\gamma^-_T(x) = x - T - \xi(\tau^-(x,T))$, $\Pi_-(y) =$

$\lambda \sum\limits_{k \le y} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}$ при $y < 0$. Тоді для розподілу пари $\{\tau^-(x,T),$ $\xi(\tau^-(x,T))\}$ одержимо співвідношення

$$s\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) \le z\big] = \sum_{x-T<y<x} \Pi_-(z-z) h_s(T,x,y),$$

а після підстановки в нього (7.120) встановлюється (7.121). □

Для майже напівнеперервних цілозначних пуасонівських процесів встановлюються аналоги тверджень § 4.5 для генератрис функціоналів, пов'язаних з виходом з обмеженого інтервалу.

Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху цілозначний пуассонівський процес, додатні стрибки якого геометрично розподілені

$$\begin{aligned}
&p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p(1-c)c^{k-1}, \quad k \ge 1 \quad (0<c<1),\\
&\mathbf{P}\{\xi_1 \le -1\} = q,
\end{aligned}$$

тоді на основі стохастичних співвідношень для функціоналів

$$\begin{aligned}
&\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} \zeta, \quad \xi \ge x, \quad \mathbf{P}\{\xi \ge x\} = pc^{x-1}, \quad x>0,\\ \zeta + \tau^+(x-\xi,T), \quad x-T<\xi<x; \end{cases}\\
&\gamma_T^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, \quad \xi \ge x,\\ \gamma_T^+(x-\xi), \quad x-T<\xi<x; \end{cases}\\
&\xi(\tau^+(x,T)) = \begin{cases} \xi, \quad \xi \ge x,\\ \xi^+(\tau^+(x-\xi,T)), \quad x-T<\xi<x \end{cases}
\end{aligned}$$

виводяться різницеві рівняння для генератрис відповідних функціоналів. Зокрема для генератриси $\tau^+(x,T)$

$$Q^T(s,x) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x,T)}, A_+(x)\big]$$

легко вивести рівняння на відрізку

$$\begin{aligned}
Q^T(s,x) = {}&\frac{\lambda}{s+\lambda}\mathbf{P}\{\xi \ge x\} +\\
&+ \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{x-T<k<x} p_k Q^T(s,x-k) \quad (0<x<T)
\end{aligned}$$

з граничними умовами

$$Q^T(s,x) = \begin{cases} 0, & x \geq T, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Введемо доповняльну функцію до генератриси

$$\overline{Q}^T(s,x) = 1 - Q^T(s,x) \quad (0 < x < T),$$

яка при $x \leq 0$ має нульове значення. Рівняння на відрізку $(0 < x < T)$ для $\overline{Q}^T(s,x)$ набуває вигляду

$$(s+\lambda)\overline{Q}^T(s,x) = s + \lambda F(x-T) + \lambda \sum_{x-T<k<x} \overline{Q}^T(s,x-k)p_k.$$

Після продовження на піввісь $x \geq 0$ одержимо рівняння

$$(s+\lambda)Q^T(s,x) = sC(x) + \lambda \sum_{r \neq x} Q^T(s,r)p_{x-r} + \\ + C_T(s,x), \quad x \geq 0 \tag{7.127}$$

з компенсуючими функціями

$$C(x) = I_{\{x>0\}} : C_T(s,x) = C_T^{>}(s)C^x I\{x \geq T\},$$
$$C_T(s) = \lambda p C^{-1} \left[1 + (1-c) \sum_{0<r<T} \overline{Q}^T(s,r)C^{-r} \right].$$

На основі рівняння (7.127) знайдемо генератритсу

$$y(T,s,z) = \sum_{x=1}^{\infty} z^x Q^T(s,x) \tag{7.128}$$

розв'язку цього рівняння, який визначає $\overline{Q}^T(s,x)$ лише на інтервалі $(0,T)$, а при $x > T$ не має ніякого ймовірнісного сенсу.

Для майже неперервних зверху процесів $Q^T(s,x)$ виражається через

$$p_k^+(s) = p_+(s)(1 - cz(c))z(s)^{-k}, \quad k \geq 1, \quad z(s) > 1.$$

Теорема 7.12. *Для майже напівнеперервних зверху цілозначних процесів* $\xi(t)$ *генератриса* (7.128) *розв'язку рівняння* (7.127) *визначається співвідношенням*

$$sy(T,s,z) = g_+(s,z)\left[g_-(s,z)\left(\frac{sz}{1-z} + \widetilde{C}_T(s,z)\right)\right]_+, \qquad (7.129)$$

після обернення якого відносно z *знаходимо* $\overline{Q}^T(s,x)$ *та* $Q^T(s,x)$

$$\begin{aligned} Q^T(s,x) = \overline{\mathbf{P}}_+(s,x) - \\ - s^{-1}C_T(s)\sum_{y=1}^{x} p^-_{x-y}B_T(s,y), \quad 0<x<T, \end{aligned} \qquad (7.130)$$

де згідно з (7.27)

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{P}}_+(s,x) = q_+(s)z^{1-x}(s), \\ &B_T(s,x) = C_T(s)\sum_{k\le x-T} c^{x-k}p^-_k(s), \quad x>0. \end{aligned}$$

Після визначення $C_T(s)$ *встановлюється дискретний аналог співвідношення* (4.142)

$$\begin{aligned} Q^T(s,x) = q_+(s)\sum_{r=x-T+1}^{0} z^{1-x+r}(s)p^-_r(s)\times \\ \times\left(\sum_{r=1-T}^{0} z^r(s)p^-_r(s) + cz(s)^{1-T}\sum_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}(s)\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (7.131)$$

Спільна генератриса $\{\tau^+(x,T),\gamma^+_T(x)\}$ *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^+(x,T)}z^{\gamma^+_T(x)}, A_+(x)\big] = Q^T(s,x)\frac{1-c}{1-cz}. \qquad (7.132)$$

Доведення. Після твірного перетворення рівняння (7.127) легко одержати співвідношення

$$(s-k(z))y(T,s,z) = \frac{sz}{1-z} + \widetilde{C}_T(s,z) - [y(T,s,z)p(z)]^0_-,$$

яке зводиться до вигляду

$$sy(T,s,z)g^{-1}(s,z) = \frac{sz}{1-z} + \widetilde{C}_T(s,z) - [y(T,s,z)p(z)]_-^0.$$

Звідси після факторизаційно-проекційних перетворень випливає співвідношення

$$sy(T,s,z)g_+^{-1}(s,z) = \left[g_-(s,z)\left(\frac{sz}{1-z} + \widetilde{C}_T(s,z)\right)\right]_+,$$

еквівалентне (7.129). При оберненні по z першому доданку в (7.129) відповідає $P_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\}$, а другому доданку під знаком проекції після обернення по z відповідає функція $B_T(s,x)$.

Другий доданок після обернення по z повністю визначає згортку

$$\sum_{0\le y\le x} p_{x-y}^+(s)B_T(s,y) = p_+(s)B_T(s,x) +$$
$$+ C_T(s)p_+(s)\sum_{0\le y<x}\frac{1-cz(s)}{z(s)^{x-y}}\sum_{k\le y-T} c^{y-k}p_k^-(s).$$

З останньої подвійної суми після зміни порядку сумування одержимо

$$\sum_{k\le -T} p_k^-(s)c^{-k}(1-cz(s))z(s)^{-x}\sum_{y=0}^{x-1}(cz(s))^y +$$
$$+ \sum_{1-T\le k<x-T} c^{-k}(1-cz(s))z(s)^{-x}\sum_{y=k+T}^{x-1}(cz(s))^y =$$
$$= \sum_{k\le -T} p_k^-(s)z(s)^{-k}c^{-k} + \sum_{1-T\le k<x-T} c^T p_k^-(s)z(s)^{T+k-x} -$$
$$- \sum_{k<x-T} p_k^-(s).$$

Після домноження на $C_T(s)p_+(s)$ остання сума компенсує перший доданок обчислюваної згортки. В результаті складання обернених по z функцій одержимо співвідношення

$$s\overline{Q}^T(s,x) = s\mathbf{P}_+(s,x) + p_+(s)C_T(s)z(s)^{-x}\times$$

$$\times \left[\sum_{k \le -T} p_k^-(s) c^{-k} + \sum_{1-T \le k \le x-T} c^T p_k^-(s) z(s)^{T+K} \right], \quad 0 < x < T.$$

Шляхом відповідних перетворень, пов'язаних з обчисленням $C_T(s)$, знаходимо його значення

$$C_T(s) = (cz(s))^{1-T} \frac{s(1-cz(s))}{cz(s)(1-c)p_+(s)} \times$$
$$\times \left(\sum_{r=1-T}^{0} z(s)^r p_r^-(s) + (cz(s))^{1-T} \sum_{r=-\infty}^{-T} c^{-r} p_r^-(s) \right)^{-1},$$

після підстановки якого в попереднє співвідношення встановлюється співвідношення (7.131).

Зауважимо, що із (7.131) при $c \to 0$ випливає співвідношення (7.117) для напівнеперервних цілозначних процесів.

Із стохастичних співвідношень для $\tau^+(x,T)$, $\gamma_T^+(x)$ випливає рівняння для $V^+(s,z,x) = V^+(s,z,x,T)$ $(0 < x < T)$

$$V^+(s,z,x) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \frac{c^{x-1}(1-c)}{1-cz} + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{x-T<k<x} p_k V^+(s,z,x-k).$$

Звідси при $z = 1$ випливає раніше одержане рівняння для $Q^T(s,x)$

$$Q^T(s,x) = \frac{\lambda p}{s+\lambda} c^{x-1} + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sum_{x-T<k<x} p_k Q^T(s,x-k).$$

Легко перевірити, що після підстановки (7.132) в рівняння для V^+ ми одержимо рівняння для $Q^T(s,x)$. Отже справедливість співвідношення (7.132) доведена і з нього випливає, що $\tau^+(x,T)$ не залежить від $\gamma_T^+(x)$. При цьому $\gamma_T^+(x)$ — геометрично розподілена випадкова величина $(0 < c < 1)$. □

Для майже напівнеперервних зверху цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$ справедлива

Теорема 7.13. *Генератриса процесу $\xi(\theta_s)$ до виходу з інтервалу визначаєтъся дискретним аналогом* (4.145)

$$V(s,z,x,T) = \qquad (7.133)$$

$$= g_+(s,z)\left[g_-(s,z)\left(1 - Q^T(s,z)\frac{z^x(1-c)}{1-cz}\right)\right]_{\mathbb{Z}^+_{x-T}},$$

обернення якого по z визначає розподіл $\xi(\theta_s)$ до виходу з інтервалу

$$h_s(T,x,y) =: \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = y, \tau(x,T) > \theta_s\} = \tag{7.134}$$
$$= p_+(s)p_y^-(s)I\{y \le 0\} + p_+(s)(1 - cz_s)\sum_{r=x-T+1}^{(y-1)\wedge 0} z^{r-y} p_r^-(s) -$$
$$- (1-c)p_+(s)z_s^{x-y} \times$$
$$\times \left(\sum_{r=-\infty}^{-T} p_r(s)c^{-r}(cz_s)^{-T} + \sum_{r=1-T}^{y-x} p_r^-(s)z_s^{-r}\right) Q^T(s,x),$$
$$z_s = \hat{z}_s = (q_+(s) + cp_+(s))^{-1} \in (1, c^{-1}).$$

Імовірність невиходу $\xi(\theta_s)$ з інтервалу та розподіл значення процесу в момент нижнього виходу визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{P}\{\tau(x,T) > \theta_s\} = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) > x - T\} -$$
$$- Q^T(s,x)[\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) > -T\} + c\sum_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}(s)], \tag{7.135}$$
$$s\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) \le z\big] =$$
$$= \sum_{x-T<y<x} \Pi(z-y)h_s(T,x,y), \quad z < x - T;$$
$$(\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x), \quad x < 0).$$

Для напівнеперервних зверху пуассонівських процесів співвідношення (7.131) ((7.133)–(7.135)) *спрощуються при* $c \to 0$, *оскільки* $q_+(s) = z_s^{-1}$, $p_k^+(s) = p_+(s)z_s^{-k}$. *Тому при* $x - T < y < x$

$$Q^T(s,x) = R_s(T-x)R_s^{-1}(T), \quad 0 < x < T; \tag{7.136}$$
$$h_s(T,x,y) = sQ^T(s,x)R_s(x-y) - sR_s(-y)\delta(y<0), \tag{7.137}$$
$$\mathbf{P}\{\tau(x,T) > \theta_s\} = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) > x - T\} -$$
$$- Q^T(s,x)\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) > -T\}; \tag{7.138}$$

при $z < x - T$

$$s\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, \xi(\tau^-(x,T)) \le z\big] = \sum_{x-T<y<x} \Pi(z-y)h_s(T,x,y) =$$

$$= Q^T(s,x) \sum_{x-T<y<x} \Pi(z-y) R_s(x-y) -$$
$$- \sum_{x-T<y<x} \Pi(z-y) R_s(-y). \tag{7.139}$$

Ці співвідношення є відповідними дискретними аналогами результатів теореми 6.9.

Для майже напівнеперервних знизу процесів (див. (7.3) з $b \in (0,1)$, $z(s) < 1$) генератриса $Q_T(s,x)$ визначається аналогічним до (7.131) співвідношенням

$$Q_T(s,x) = q_-(s) \sum_{r=0}^{x-1} z(s)^{T-x+r-1} p_r^+(s) \times \tag{7.140}$$
$$\times \left(\sum_{r=0}^{T-1} z(s)^r p_r^+(s) + b z(s)^{T-1} \sum_{r=0}^{\infty} b^r p_{r+T}^+(s) \right)^{-1},$$
$$Q_T^{(b)}(s,x) \underset{b\to 0}{\longrightarrow} \frac{R_s(x)}{R_s(T)}. \tag{7.141}$$

При цьому слід врахувати, що розподіл $\xi^-(\theta_s)$ виражається степенями найближчого до 1 зліва кореня $z(s) = z_-(s) < 1$ рівняння Лундберга

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) \le k\} = \frac{z_-(s) - b}{1-b} z_-(s)^{|k|-1}, \quad k \le -1, \tag{7.142}$$

так само як для майже напівнеперервних зверху $\xi(t)$ розподіл $\xi^+(\theta_s)$ виражається степенями найближчого до 1 справа кореня $z(s) = z_+(s) = \widehat{z}_s > 1$ рівняння $(\mathcal{L}_s)$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) \ge k\} = \frac{1 - c z_+(s)}{1-c} z_+(s)^{-k}, \quad k \ge 1. \tag{7.143}$$

Для визначення імовірностей банкрутства із (7.130) та (7.140) слід врахувати знак $m = \mathbf{E}\xi(1)$ при $s \to 0$. При умові (7.5) з $c \in (0,1)$ встановлюється, що

1) при $m < 0$

$$z_+(s) \to z_+ > 1, \quad p_+(s) \to p_+ = \frac{z_+ - 1}{(1-c) z_+} \quad (s \to 0),$$

$$p_k^+(s) \to p_k^+ = p_+(1 - cz_+)z_+^{-k}, \tag{7.144}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+ < k\} = 1 - \frac{1 - cz}{1 - c} z_+^{-k}, \quad k \geq 1,$$

$$\dot{p}_r^- = \lim_{s \to 0} s^{-1} p_r^-(s) = \tag{7.145}$$

$$= p_+^{-1} \left[p_r'(0) + (c - z_+^{-1}) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r-j}'(0) c^{j-1} \right], \quad r \leq -1;$$

2) при $m > 0$ $(z_+'(0) = m^{-1})$ і $s \to 0$

$$z_+(s) \to 1, \quad s^{-1} p_+(s) \to \frac{z_+'(0)}{1 - c},$$

$$s^{-1} p_k^+(s) \to z_+'(0) \quad (s \to 0), \quad k \geq 1,$$

$$\lim_{s \to 0} p_r^-(s) = p_r^- = \tag{7.146}$$

$$= \frac{1 - c}{z_+'(0)} \left[p_r'(0) + (c - 1) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r-j}' c^{j-1} \right], \quad r \leq -1;$$

3) при $m = 0$ і $s \to 0$

$$\widehat{z}_s = z_+(s) \to 1, \quad p_+(s) s^{-1/2} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1(1 - c)},$$

$$p_k^+(s) s^{-1/2} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1} \quad (k \geq 1, s \to 0), \quad \sigma_1^2 = D\xi(1),$$

$$\widetilde{p}_k^- = \lim_{s \to 0} p_k^-(s) s^{-1/2} = \tag{7.147}$$

$$= \frac{\sigma_1(1 - c)}{\sqrt{2}} \left[p_k'(0) + (c - 1) \sum_{r=1}^{\infty} p_{k-r}'(0) c^{r-1} \right], \quad k \leq -1.$$

При умові (7.3) з $b \in (0, 1)$ аналогічно встановлюється, що
1) при $m > 0$ і $s \to 0$

$$z_-(s) \to z_- < 1, \quad p_-(s) \to p_- = \frac{1 - z_-}{1 - b} \quad (s \to 0),$$

$$p_k^-(s) \to p_k^- = p_-(z_- - b) z_-^{-k-1}, \tag{7.148}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^- \leq k\} = \frac{z_- - b}{1 - b} z_-^{|k|-1}, \quad k \leq -1;$$

2) при $m < 0$ і $s \to 0$

$$z_-(s) \to 1, \quad s^{-1}p_-(s) \to -\frac{z'_-(0)}{1-b},$$
$$s^{-1}p_k^-(s) \to -z'_-(0) = \frac{1}{|m|} \quad (s \to 0,\ k \le -1),$$

3) при $m = 0$ і $s \to 0$

$$z_-(s) \to 1, \quad p_-(s)s^{-1/2} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1(1-b)},$$
$$p_k^-(s)s^{-1/2} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1} \quad (s \to 0,\ k \le -1).$$

Наведені граничні співвідношення слід використати при граничному переході ($s \to 0$) в (7.130) при доведенні наступного твердження.

Наслідок 7.2. *Для майже напівнеперервного зверху цілозначного процесу імовірність банкрутства $Q^T(x)$ визначається залежно від знаку m троїстим співвідношенням*

$$Q^T(x) = \begin{cases} \mathbf{P}\{\xi^- > x - T\} \times \\ \times \left[\mathbf{P}\{\xi^- > -T\} + c\sum\limits_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}\right]^{-1}, \quad m > 0; \\ q_+ \sum\limits_{r=x-T+1}^{0} z_+^{1-x+r}\dot{p}_r^- \times \\ \times \left[\sum\limits_{r=1-T}^{0} z_+^r \dot{p}_r^- + cz_+^{1-T}\sum\limits_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}\right]^{-1}, \quad m > 0, \\ \sum\limits_{r=x-T+1}^{0} \widetilde{p}_r^- \left[\sum\limits_{r=1-T}^{0} \widetilde{p}_r^- + c\sum\limits_{r=0}^{\infty} c^r \widetilde{p}^-_{-r-T}\right]^{-1}, \quad m = 0, \end{cases} \tag{7.149}$$

де $\dot{p}_r^- = \lim\limits_{s\to 0} s^{-1}p_r^-(s)$ *визначається в* (7.145), $\widetilde{p}_r^- = \lim\limits_{s\to 0} s^{-1/2}p_r^-(s)$ *– в* (7.147).

При умові (7.3) *із співвідношення* (7.140) *для процесу майже напівнеперервного знизу випливає* ($s \to 0$) *співвідношення для* $Q_T(x)$ *при* $m < 0$

$$Q_T(x) = \mathbf{P}\{\xi^+ < x\} \times \tag{7.150}$$

$$\times \left[\mathbf{P}\{\xi^+ < T\} + b \sum_{r=0}^{\infty} b^r p^+_{r+T} \right]^{-1}, \quad (0 < x < T).$$

Доведення наслідку випливає із (7.131) після граничного переходу ($s \to 0$) з урахуванням граничних співвідношень (7.144)–(7.147), а (7.149) випливає з (7.140) при $s \to 0$.

Якщо виконуються одноразово умови (7.3) та (7.5), то має місце твердження, яке ми наводимо без доведення.

Наслідок 7.3. *Для майже напівнеперервного зверху і знизу цілозначного пуасонівського процесу при $m > 0$ імовірності банкрутства визначаються співвідношеннями*

1) *при* $m > 0$

$$\begin{aligned} &Q^T(x) = \mathbf{P}\{\xi^- > x - T\} \left[\mathbf{P}\{\xi^- > -T\} + c \sum_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T} \right]^{-1}, \\ &Q_T(x) = 1 - Q^T(x), \quad (0 < x < T); \\ &\mathbf{P}\{\xi^- > x\} = 1 - \frac{z_- - b}{1 - b} z_-^{|x|-1}, \quad x \le -1; \end{aligned} \tag{7.151}$$

2) *при* $m < 0$

$$\begin{aligned} &Q_T(x) = \mathbf{P}\{\xi^+ < x\} \left[\mathbf{P}\{\xi^+ < T\} + b \sum_{r=0}^{\infty} b^r p^+_{r+T} \right]^{-1}, \quad 0 < x < T, \\ &Q^T(x) = 1 - Q_T(x); \\ &\mathbf{P}\{\xi^+ < x\} = 1 - \frac{1 - c z_+}{1 - z_+} z_+^{-x}, \quad x \ge 1; \end{aligned} \tag{7.152}$$

3) *при* $m = 0$

$$\begin{aligned} &Q^T(x) = \frac{b + (1-b)(T-x)}{c(1-b)(1-c)^{-1} + b + (1-b)T}, \quad 0 < x < T, \\ &Q_T(x) = \frac{c(1-b)(1-c)^{-1} + (1-b)x}{c(1-b)(1-c)^{-1} + b + (1-b)T}. \end{aligned} \tag{7.153}$$

Для симетричного випадку ($b = c$, $p = q = \frac{1}{2}$, $m = 0$)

$$Q^T(x) = \frac{b + (1-b)(T-x)}{2b + (1-b)T},$$

$$Q_T(x) = \frac{b + (1-b)x}{2b + (1-b)T} \quad (b = c \neq 0),$$
$$Q^T(x) = \frac{T - x}{T}, \quad Q_T(x) = \frac{x}{T} \quad (0 < x < T, \quad b = c = 0). \quad (7.154)$$

Якщо $0 < b < 1$, $c = 0$ *і* $m = 0$, *тоді*

$$Q^T(x) = \frac{b + (1-b)(T-x)}{b + (1-b)T}, \quad Q_T(x) = \frac{(1-b)x}{b + (1-b)T}. \quad (7.155)$$

Якщо $0 < c < 1$, $b = 0$, $m = 0$, *тоді*

$$Q^T(x) = \frac{(T-x)(1-c)}{c + (1-c)T}, \quad Q_T(x) = \frac{c + (1-c)x}{c + (1-c)T}. \quad (7.156)$$

7.6 Граничні функціонали для цілозначних випадкових блукань

Нехай $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з дискретним розподілом

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p_k, \quad p(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1} = \sum z^k p_k, \quad |z| = 1.$$

Для випадкового блукання

$$S_n^x = \sum_{k=0}^{n} \xi_k + x \quad (\xi_0 = 0, \quad x \text{ — ціле}), \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k$$

розглянемо такі самі функціонали, як і для цілозначних пуассонівських процесів, а їх позначення аналогічні позначенням функціоналів для S_n в розділі 5. Крім того позначатимемо

$$\widetilde{\nu}(s): \ \mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(s) = n\} = (1-s)s^n, \quad n \geq 0, \quad 0 < s < 1,$$
$$g(s,z) = \mathbf{E} z^{S_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1-s}{1 - sp(z)} \quad (|z| = 1), \quad (7.157)$$
$$g_\pm(s,z) = \mathbf{E} z^{S^\pm_{\widetilde{\nu}(s)}}, \quad |z|^{\pm 1} \leq 1.$$

Як і для блукань з неперервно розподіленим кроком для цілозначних S_n має місце лема про безмежно подільну факторизацію та теорема про основну факторизаційну тотожність (див. [177]).

Лема 7.9. *Для генератриси $g(s,z)$ має місце факторизаційний розклад*

$$g(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi_s^+}\mathbf{E}z^{\xi_s^-}, \quad |z| = 1, \tag{7.158}$$

де $\xi_s^\pm$ — безмежно подільні цілозначні випадкові величини з генератрисами

$$\mathbf{E}z^{\xi_s^\pm} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathbf{E}[(z^{S_n}-1), \pm S_n > 0]\right\} =$$
$$= \exp\left\{\sum_{\pm k>0}(z^k-1)n_k^\pm(s)\right\}, \tag{7.159}$$
$$n_k^\pm(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}p_{\pm k}(n), \quad p_{\pm k}(n) = \mathbf{P}\{S_n = \pm k\}.$$

Як і в § 7.1, на основі леми 7.9 встановлюється

Теорема 7.14. *Для генератриси $g(s,z)$ справедлива о.ф.т.*

$$g(s,z) = g_+(s,z)g_-(s,z), \quad |z| = 1, \tag{7.160}$$
$$g_\pm(s,z) = \exp\left\{\sum_{\pm k>0}(z^k-1)n_k^\pm(s)\right\}, \quad |z|^{\pm 1} \le 1,$$

де співвідношення для множників о.ф.т. $g_\pm(s,z)$ називаються тотожностями Спітцера.

Для напівнеперервних зверху (знизу) випадкових блукань мають місце твердження, аналогічні теоремам 7.5, 7.6.

Теорема 7.15. *Якщо $\{S_n\}_{n\ge 0}$ — напівнеперервне зверху цілозначне випадкове блукання, тоді генератриса $\tau^+(x)$ визначається співвідношеннями*

$$T(s,x) =: \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = \mathbf{P}\{S_{\tilde{\nu}(s)}^+ > x\} = q_+(s)^{x+1},$$
$$q_+(s) = z(s)^{-1}, \quad x > 0, \quad q_+(s) = 1 - p_+(s), \tag{7.161}$$

де $z(s) = z_s > 1$ — єдиний корінь рівняння Лундберга

$$1 - sp(z) = 0, \quad 0 < s \le 1. \tag{7.162}$$

Генератриса $\overline{\tau}^+(x) = \inf\{n : S_n \geq x\}$ $(x > 0)$ *визначається співвідношенням*

$$\overline{T}(s,x) =: \mathbf{E}[s^{\overline{\tau}^+(x)}, \overline{\tau}^+ < \infty] = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} \geq x\} = q_+(s)^x. \qquad (7.163)$$

Якщо $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *— майже напівнеперервне зверху блукання з умовною генератрисою кроку* (7.5) *з параметром* $c \in (0;1)$, *тоді* $z(s) = \hat{z}_s$ *— корінь рівняння Лундберга* (7.162) $\hat{z}_s \in (1, c^{-1})$ *визначає генератрису* $\tau^+(x)$ $(x > 0)$ (*та* $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$)

$$T(s,x) = q_+(s) z_s^{-x}, \quad q_+(s) = \frac{1 - c z_s}{(1-c) z_s}, \qquad (7.164)$$

$$\overline{T}(s,x) = q_+(s) z_s^{1-x}, \quad z_s^{-1} = q_+(s) + c p_+(s),$$

$$g_+(s,z) = \mathbf{E} z^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{p_+(s)(1-cz)}{1 - z z_s^{-1}}, \quad p_+(s) = \frac{z_s - 1}{(1-c) z_s}. \qquad (7.165)$$

Після обернення (7.165) *по* z *одержується розподіл* $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$p_k^+(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} = k\} = p_+(s)(1 - c z_s) z_s^{-k}, \qquad (7.166)$$
$$= q_+(s)(1 - z_s^{-1}) z_s^{1-k}, \ k \geq 1.$$

Генератриса $S^-_{\widetilde{\nu}(s)}$ *визначається проекційним співвідношенням*

$$g_-(s,z) =: \mathbf{E} z^{S^-_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{1}{p_+(s)} \left[(1 - z z_s^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k g(s,z) \right]_-^0, \qquad (7.167)$$

а розподіл $S^-_{\widetilde{\nu}(s)}$ *виражається через* $p_k(s) = \mathbf{P}\{s_{\widetilde{\nu}(s)} = k\}$,

$$p_k^-(s) =: \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} = k\} = \qquad (7.168)$$
$$= \frac{1}{p_+(s)} \left[p_k(s) + (c - z_s^{-1}) \sum_{r=1}^{\infty} c^{r-1} p_{k-r}(s) \right], \quad k < 0.$$

Якщо $m = \mathbf{E}\xi_1 > 0$, *тоді* $z_s \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 1$, $p_+(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 0$, $p'_+(1) = \frac{z'(1)}{1-c}$, *а генератриса та розподіл* S^- *визначаються співвідношеннями*

$$g_-(z) =: \mathbf{E} z^{S^-} = \lim_{s\to 1} g_-(s,z) =$$

$$= \frac{1}{p'_+(1)} \left[(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k \sum_{r=-\infty}^{0} z^r p'_k(1) \right]_-^0, \tag{7.169}$$

$$p_k^- = \mathbf{P}\{S^- = k\} = \frac{1}{p'_+(1)} \left[p'_k(1) - (1-c) \sum_{r=1}^{\infty} c^{r-1} p'_{k-r}(1) \right],$$

$$k < 0, \quad z'(1) = \frac{1}{m}, \quad p'_+(1) = \frac{1}{m(1-c)}.$$

Якщо $m = 0$, *тоді* $z_s \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 0$, $p_+(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 0$, $\mathbf{P}\{S^\pm = \pm\infty\} = 1$.

Якщо $m < 0$, *тоді* $z_s \to z_0 \in (1, c^{-1})$, *а генератриса та розподіл* S^+ *визначаються співвідношеннями*

$$g_+(z) =: \mathbf{E} z^{S^+} = \frac{p_+(1-cz)}{1 - z z_0^{-1}} = p_+ + \frac{q_+(1 - z_0^{-1})z}{1 - z z_s^{-1}}, \tag{7.170}$$

$$p_+ = \frac{z_0 - 1}{z_0(1-c)}; \quad z_0^{-1} = q_+ + c p_-;$$

$$p_k^+ = \mathbf{P}\{S^+ = k\} = p_+ z_0^{-k}(1 - c z_0) = q_+(1 - z_0^{-1}) z_0^{1-k}, \quad k > 0.$$

Доведення. Доведення співвідношень (7.161) та (7.163) грунтується на стохастичних зображеннях $\tau^+(x)$ та $\overline{\tau}^+(x)$

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 1 + \tau^+(x - \xi), & \xi \le x; \end{cases}$$

$$\overline{\tau}^+(x) \doteq \begin{cases} 1, & \xi \ge x; \\ 1 + \overline{\tau}^+(x - \xi), & \xi < x. \end{cases}$$

Доведення решти співвідношень аналогічне доведенню теорем 7.4 та 7.5. Якщо $m > 0$, тоді граничним переходом ($s \to 1$) у (7.167), (7.168) встановлюється (7.169); а при $m < 0$ із (7.164) та (7.165) при $s \to 1$ випливають співвідношення (7.170). □

Сформулюємо без доведення аналогічне твердження для майже напівнеперервних знизу блукань.

Теорема 7.16. *Нехай* S_n — *майже напівнеперервне знизу цілозначне випадкове блукання з умовною генератрисою кроку* (7.3) (*з параметром* $b \in (0,1)$), *тоді* $z_s = z(s)$ ($b < z_s < 1$) *єдиний корінь* *рівняння Лундберга* (7.162) *визначає від'ємну компоненту о.ф.т.* $g_-(s,z)$ *та генератрису* $\tau^-(x)$ $(x<0)$

$$\begin{aligned} &g_-(s,z) = \mathbf{E} z^{S^-_{\tilde\nu(s)}} = \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_s}, \quad p_-(s) = \frac{1-z_s}{1-b}, \\ &\mathbf{E}[s^{\tau^-(s)}, \tau^-(x)<\infty] = \mathbf{P}\{S^-_{\tilde\nu(s)} < x\} = q_-(s) z_s^x, \quad x<0, \quad (7.171) \\ &p^-_{-k}(s) = p_-(s)(z_s-b) z_s^{k-1}, \quad k\ge 1, \quad q_-(s) = 1-p_-(s). \end{aligned}$$

генератриса $S^+_{\tilde\nu(s)}$ *визначається проекційним співвідношенням*

$$\begin{aligned} &g_+(s,z) = \frac{1}{p_-(s)} \left[\frac{1-z_s z^{-1}}{1-bz^{-1}} \sum_{k\ge 0} z^k p_k(s) \right]_+^0, \\ &z_s = q_-(s) + b p_-(s), \qquad (7.172) \\ &p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)} \left[p_k(s) + (b-z_s) \sum_{r=1}^{\infty} b^{r-1} p_{k+r}(s) \right], \quad k\ge 0. \end{aligned}$$

Якщо $m<0$, *тоді* $z_s \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 1$, $-p'_-(1) = \frac{z'(1)}{1-b} = \frac{1}{|m|(1-b)}$, $p'_k(1) < 0$,

$$\begin{aligned} &g_+(z) =: \mathbf{E} z^{S^+} = \\ &= \frac{1}{p'_-(1)} \left[\left(1 + (b-1) \sum_{r=1}^{\infty} b^{r-1} z^{-r} \right) \sum_{k=0}^{\infty} z^k p'_k(1) \right]_+^0 . \end{aligned}$$

Якщо $m>0$, *тоді* $z_s \underset{s\to 1}{\longrightarrow} z_0$ $(b < z_0 = q_- + bp_- < 1)$

$$\begin{aligned} &g_-(z) =: \mathbf{E} z^{S^-} = (1-z_0) \frac{1-bz^{-1}}{1-z_0 z^{-1}}, \quad p_- = \frac{1-z_0}{1-b}, \qquad (7.173) \\ &p^-_{-k} = \mathbf{P}\{S^- = k\} = p_-(z_0-b) z_0^{k-1}, \quad k\ge 1. \end{aligned}$$

Для напівнеперервних зверху і знизу випадкових блукань ($b=c=0$) співвідношення теорем 6.13 та 6.14 значно спрощуються. Зокрема, генератриси для $\xi^\pm(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями через корені $z_-(s) < 1 < z_+(s)$ рівняння (7.162)

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)}{1-z^{-1} z_-(s)}, \quad z(s) = z_-(s) = q_-(s) < 1, \qquad (7.174)$$

$$g_+(s,z) = \frac{p_+ s)}{1 - z z_+(s)^{-1}}, \quad z(s) = z_+(s) > 1, \quad q_+(s) = z_+(s)^{-1}.$$

Для спільного розподілу пар $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ та $\{\overline{\tau}^+(x), \overline{\gamma}^+(x)\}$ має місце друга ф.т., яка встановлюється в термінах твірного перетворення, породженого геометрично розподіленою величиною $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ ($\mathbf{P}\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k, k \geq 0$).

Теорема 7.17. *Для спільного розподілу* $\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}, \gamma^+(y)\}$ *має місце співвідношення*

$$T(s,u,y) = \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(y)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y\big] = \\ = \frac{1}{g_+(s,u)}\mathbf{E}\big[u^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} - y}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y\big], \tag{7.175}$$

а для спільної генератриси $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon), \gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ *має місце друга ф.т.*

$$\widetilde{T}(s,\varepsilon,u) =: \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} s^{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}, \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty\big] = \\ = \frac{u(1-\varepsilon)}{u-\varepsilon}\left[1 - \frac{g_+(s,\varepsilon)}{g_+(s,u)}\right]. \tag{7.176}$$

Аналогічна тотожність справедлива для генератриси $\{\overline{\tau}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon), \overline{\gamma}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$

$$\mathbf{E}\big[u^{\overline{\gamma}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} s^{\overline{\tau}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}, \overline{\tau}^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty\big] = \\ = \frac{1-\varepsilon}{u-\varepsilon}[u g_+(s,u) - \varepsilon g_+(s,\varepsilon)] g_+(s,u)^{-1}. \tag{7.177}$$

Доведення. Для доведення теореми використовуються відповідні стохастичні співвідношення зв'язку між $\tau^+(x)$ та $\gamma^+(x)$ ($\overline{\tau}^+(x)$ та $\overline{\gamma}^+(x)$). Зокрема, для першої пари із стохастичного співвідношення

$$\tau^+(x+y) \doteq \begin{cases} \tau^+(y), \gamma^+(y) > x, & x \geq 0, \\ \tau^+(y) + \tau^+(x - \gamma^+(y)), & \gamma^+(y) \leq x, \end{cases}$$

виводиться співвідношення

$$\mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x+y)}, \tau^+(x+y) < \infty\big] = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y, \gamma^+(y) > x\} + \\ + \sum_{l=0}^{x} \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(y)}, \gamma^+(y) = l\big] \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > x - l\}. \tag{7.178}$$

Після твірного перетворення по x ліва частина (7.178) має вигляд

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(s,y,u) &= \sum_{x=0}^{\infty} u^x \mathbf{P}\{s^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y+x\} = \sum_{x=0}^{\infty} u^x \sum_{k>y+x} p_k^+(s) = \\ &= \frac{1}{1-u}\big\{\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y\} - \mathbf{E}\big[u^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}-y}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y\big]\big\}.\end{aligned}$$

Після подібного перетворення перший доданок справа в (7.178) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(s,y,u) &= \sum_{x=0}^{\infty} u^x \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y, \gamma^+(y) > x\} = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} u^x \sum_{r=x+1}^{\infty} \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y, \gamma^+(y) = r\} = \\ &= \frac{1}{1-u} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y, \gamma^+(y) = r\}(1-u^r) = \\ &= \frac{1}{1-u}[\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y\} - T(s,y,u)].\end{aligned}$$

Для перетворення другого доданку в (7.178) аналогічно знаходимо, що

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(s,y,u) &= T(s,u,1) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y, \gamma^+(y) = l\} u^l = \\ &= \widetilde{T}(s,u,1)\mathbf{E}[u^{\gamma^+(u)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > y], \\ \widetilde{T}(s,u,1) &= \frac{1}{1-u}\mathbf{E}[1 - u^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}}],\end{aligned}$$

тоді

$$\mathcal{I}(s,y,u) - \mathcal{I}_1(s,y,u) = T(s,u,1)T(s,y,u).$$

Звідси після спрощення встановлюється співвідношення (7.175). Застосувавши до (7.175) твірне перетворення по y одержимо співвідношення (7.176). На основі стохастичного співвідношення

$$\overline{\tau}(x+y) \doteq \begin{cases} \overline{\tau}^+(y), & \overline{\gamma}^+(y) \geq x, \\ \tau^+(y) + \tau^+(x - \overline{\gamma}^+(y)), & \gamma^+(y) < x, \end{cases}$$

аналогічно встановлюється співвідношення (7.177). □

З теореми 7.14 випливає

Наслідок 7.4. *Генератриса пари* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *та генератриса* $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$ *задовольняють співвідношення зв'язку*

$$T(s,0,u) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(0)} u^{\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty\big] =$$
$$= \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(0)}, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0\big] = 1 - \frac{p_+(s)}{g_+(s,u)}, \tag{7.179}$$
$$g_+(s,u) = \mathbf{E}u^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}}, \quad p_+(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} = 0\},$$

з якого випливає дограничне узагальнення формули Полячека–Хінчина

$$g_+(s,u) = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)\mathbf{E}[u^{\gamma^+(0)} | S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0]}. \tag{7.180}$$

Якщо $m < 0$, *тоді генератриса* S^+ *дискретним аналогом формули Полячека–Хінчина*

$$\mathbf{E}u^{S^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\mathbf{E}[u^{\gamma^+(0)} | S^+ > 0]}, \quad p_+ = \mathbf{P}\{S^+ = 0\}. \tag{7.181}$$

Для майже напівнеперервного зверху блукання справедливе співвідношення

$$\widetilde{T}(s,\varepsilon,u) = \frac{(1-\varepsilon)(1-cz_s)}{z_s - \varepsilon}\frac{u}{1-cu} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} T(s,0,u) =$$
$$= q_+(s)\frac{u(1-c)}{1-cu}. \tag{7.182}$$

Отже,для майже напівнеперервних зверху блукань $\gamma^+(x)$ *не залежить від* $\tau^+(x)$ *та* x, *тобто*

$$T(s,x,u) = \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big]\mathbf{E}u^{\gamma^+(x)} =$$
$$= \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > x\}\mathbf{E}u^{\gamma^+(x)},$$

при цьому $\mathbf{E}u^{\gamma^+(x)} = \frac{(1-c)u}{1-cu}$, $\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > x\} = q_+(s)^{x+1}$.

Приклад 7.5. Нехай $S_n = \sum\limits_{k\le n}\xi_k$ — випадкове блукання з генератрисою кроку

$$p(z) = \frac{2}{3z} + \frac{1}{3}\frac{(1-c)z}{1-cz} \quad (0 < c < 1).$$

Охарактеризувати S_n, знайти $m = \mathbf{E}\xi$ та $g(s,z)$. Знайти $g_\pm(s,z)$. Записати другу ф.т., знайти зв'язок $G_+(s,z)$ з генератрисою $\gamma^+(0)$. Знайти генератриси для абсолютних екстремумів $\zeta^\pm$.

Блукання S_n — напівнеперервне знизу і майже напівнеперервне зверху.

$$m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-c} - 2\right) = \frac{2c-1}{3(1-c)}; \sigma^2 = \frac{2}{3}; \quad m = 0 \ \text{ при } c = \frac{1}{2};$$

$$g(s,z) = \frac{1-s}{1-sp(z)} = -\frac{(1-s)3z(1-cz)}{z^2(3c+s(1-c)) - z(3+2sc) + 2s}.$$

Рівняння Лундберга зводиться до квадратного рівняння

$$z^2(3c+s(1-c)) - z(3+2sc) + 2s = 0,$$

яке при $s = 1$ має вигляд

$$z^2(1+2c) - z(3+2c) + 2 = 0, \quad D = (1-2c)^2 > 0.$$

Легко перевірити, що останнє рівняння має корінь $z = 1$.

а) При $m = 0$ 1 є кратним коренем $z_\pm = 1$;

б) при $m < 0$, $z_- = 1$, $z_+ > 1$ ($c < \frac{1}{2}$);

в) при $m > 0$, $z_- < 1$, $z_+ = 1$ ($c > \frac{1}{2}$).

Для як завгодно близького до 1 $s < 1$ корені рівняння ($\mathcal{L}_s$) строго відмінні від 1: $z_-(s) < 1 < z_+(s)$. Ці корені визначають компоненти о.ф.т. $g_\pm(s,z) = \mathbf{E}z^{S^\pm_{\nu(s)}}$

$$g_+(s,z) = \frac{(z_+(s)-1)(1-cz)}{(z_+(s)-z)(1-c)} = p_+(s)\frac{1-cz}{1-z_+^{-1}(s)z},$$

$$p_+(s) = \frac{z_+(s)-1}{z_+(s)(1-c)} \quad (\text{при } c = 0 \ \ z_+^{-1}(s) = q_+(s));$$

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)z}{z - z_-(s)}, \quad p_-(s) = 1 - z_-(s), \quad q_-(s) = z_-(s).$$

а) При $m_1 = 0$, $p_\pm(s) \to 0$, оскільки $z_\pm(s) \to 1$ при $s \to 1$, отже $g_\pm(s,z) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 0$;

б) при $m < 0$, $p_-(s) \to 0$, $g_-(s,z) \to 0$ при $s \to 0$, $\mathbf{P}\{S^- {=} {-\infty}\} = 1:$

$$z_+(s) \to z_+ > 1, \quad g_+(s,z) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} \mathbf{E}z^{S^+} = p_+\frac{1-cz}{1-z_-^{-1}z} \quad (z_- > 1).$$

в) При $m > 0$ $z_+(s) \to 1$, $p_+(s) \to 0$ при $s \to 1$. Отже $\mathbf{P}\{S^+ = -\infty\} = 1$; $z_-(s) \to z_- < 1$, $g_-(s,z) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} \mathbf{E}z^{S^-} = \frac{p_-}{1-z_-z^{-1}}$, $q_- = z_-$.

За другою ф.т. знаходимо

$$\mathbf{E}[s^{\tau^+(\nu_\varepsilon)}u^{\gamma^+_{\nu_\varepsilon}}, \tau^+(\nu_\varepsilon)] = \frac{u(1-\varepsilon)}{u-\varepsilon}\left[1 - \frac{g_+(s,\varepsilon)}{g_+(s,u)}\right] =$$
$$= \frac{u(1-\varepsilon)(1-cz_+(s))}{(1-cu)(z_+(s)-\varepsilon)} \quad (\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k, \quad k \geq 0).$$

Після обернення по ε звідси випливає, що

$$\mathbf{E}[s^{\tau^+(x)}u^{\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \frac{u(1-c)}{1-cu}\frac{1-cz_+(s)}{(1-c)z_+(s)^{1+x}}.$$

Звідси випливає, що $\tau^+(x)$ і $\gamma^+(x)$ — незалежні і $\gamma^+(x)$ не залежать від x

$$\mathbf{E}[s^{\tau^+(x)}, \tau^+(x) < \infty] = \frac{1-cz_+(s)}{(1-c)z_+(s)^{1+x}},$$
$$g_0(u) = \mathbf{E}u^{\gamma^+(x)} = \frac{u(1-c)}{1-cu}.$$

Оскільки $\gamma^+(0)$ не залежить від $\tau^+(0)$, то згідно (7.180) $g_+(s,z)$ виражається через генератрису $\gamma^+(0)$

$$g_+(s,z) = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)\mathbf{E}u^{\gamma^+(0)}}, \quad q_+(s) = 1 - p_+(s),$$

а при $m < 0$ звідси при $s \to 1$ випливає формула Полячека–Хінчина

$$\mathbf{E}u^{S^+} = \frac{p_+}{1-q_+g_0(u)}, \quad g_0(u) = \mathbf{E}u^{\gamma^+(0)} = \frac{u(1-c)}{1-cu},$$

$\gamma^+(0)$ — геометрично розподілена випадкова величина.

Для перестрибкових функціоналів та часу перебування цілозначних S_n у фіксованому стані мають місце аналогічні твердження § 7.2 для цілозначних процесів $\xi(t)$. Зокрема із стохастичних зображень

$$\tau^+(x) \doteq \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 1 + \tau^+(x-\xi), & \xi \leq x, \end{cases} \qquad \gamma^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ \gamma^+(x-\xi), & \xi \leq x, \end{cases}$$

$$\gamma_+(x) \doteq \begin{cases} x, & \xi > x, \\ \gamma_+(x-\xi), & \xi \le x \end{cases}$$

для генератриси

$$V(s,x,u,v) = \mathbf{E}[s^{\tau^+(x)} u^{\gamma^+(x)} v^{\gamma_+(x)}, \tau^+(x) < \infty]$$

виводиться подібне до (7.44) рівняння

$$\begin{aligned} &V(s,x,u,v) - \sum_{k \le x} V(s,x-k,u,v) p_k = s A_x(u,v), \quad x \ge 0, \\ &A_x(u,v) = \sum_{k \ge x+1} u^{k-x} v^x p_k, \\ &A_x(u) = A_x(u,1) = \sum_{r \ge 1} u^r p_{x+r}, \quad x \ge 0, \quad A_x(1) = P\{\xi > x\}. \end{aligned} \tag{7.183}$$

Після твірного перетворення по x в термінах генератрис

$$a(\beta,u) = \sum_{x \ge 0} \beta^x A_x(u), \quad a(\beta,u,v) = \sum_{x \ge 0} \beta^x A_x(u,v) = a(\beta v, u),$$

на підставі рівняння (7.183) встановлюється аналог теореми 7.7.

Теорема 7.18. *Для довільного цілозначного випадкового блукання S_n твірне перетворення*

$$v(s,\beta,u,v) = \sum_{x \ge 0} \beta^x V(s,x,u,v) \ (v(s,\beta,u) = v(s,\beta,u,1))$$

визначається проекційним співвідношенням (аналогом (7.45))

$$(1-s) v(s,\beta,u,v) = [g_-(s,\beta) a(\beta,u,v)]_+^0 g_+(s,\beta), \tag{7.184}$$

після обернення якого $V(s,x,u,v)$ визначається згорткою

$$\begin{aligned} &(1-s) V(s,x,u,v) = \sum_{y=0}^{x} G(s,x-y,u,v) p_y^+(s), \quad x > 0, \qquad (7.185) \\ &G(s,x,u,v) = \sum_{y \le 0} A_{x-y}(u,v) p_y^-(s), \quad x > 0, \\ &G(s,x,u) = G(s,x,u,1). \end{aligned}$$

Після твірного перетворення (7.185) *набуває вигляду*

$$(1-s)v(s,\beta,u,v) = g(s,\beta,u,v)g_+(s,\beta), \tag{7.186}$$

$$g(s,\beta,u,v) = \sum_{x=0}^{\infty} \beta^x G(s,x,u,v), (g(s,\beta,u) = g(s,\beta,u,1)).$$

Генератриса $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$ *виражається також через*

$$k(s,z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \mathcal{K}_s(x), \quad \mathcal{K}_s(x) = G(s,x,1) = \sum_{k\geq x} p^-_{x-k}(s)\overline{F}(x),$$

$$g_+(s,\beta) = \frac{1-s}{1-s+(1-\beta)k(s,\beta)}, \quad p_+(s) = \frac{s}{s+k(s,0)}. \tag{7.187}$$

Якщо S_n — *майже напівнеперервне знизу блукання, тоді* $g_-(s,z)$ *та* $g(s,\beta,u,v)$ *виражаються через корінь рівняння Лундберга* $0 < z_s = z(s) < 1$, *а саме*

$$G(s,x,u,v) = p_-(s)\left[A_x(u,v) + (z_s - b)\sum_{j<0} A_{x-j}(u,v) z_s^{-j-1}\right] =$$

$$= p_-(s) z_s^{-1}\left[bA_x(u,v) + (z_s-b)\sum_{j\geq 0} A_{x+j}(u,v) z_s^j\right],$$

$$g(s,\beta,u,v) = p_-(s)\left[a(\beta v,u) + \frac{z_s-b}{z_s-\beta}(a(vz_s,u) - a(v\beta,u))\right].$$

Генератриса $S^+_{\widetilde{\nu}(s)}$ *виражається через умовну генератрису* $\gamma^+(0)$ *дограничним узагальненням дискретного аналогу формули Полячека–Хінчина*

$$g_+(s,u) = \frac{p_+(s)}{1-V(s,0,u)} = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)g_s(u)}, \tag{7.188}$$

$$g_s(u) = \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(0)} \,|\, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0\big] = \frac{bA_0(u) + (z_s-b)a(z_s,u)}{G(s,0,1)}.$$

Якщо $m < 0$, *тоді при* $s \to 1$ *має місце дискретний аналог формули Полячека–Хінчина*

$$\lim_{s\to 1} g_+(s,u) = g_+(u) = \frac{p_+}{1-q_+g_1(u)}, \quad q_+ = \frac{b\overline{F}(0) + (1-b)\mu_+}{q+bp},$$

$$g_1(u) = \mathbf{E} z^{\xi_1^*} = \frac{bA_0(u) + (1-b)a(u,1)}{bA_0(1) + (1-b)a(1,1)}, \tag{7.189}$$

$$a(u,1) = \sum_{r=1}^{\infty} u^r \overline{F}(r-1), \quad A_0(1) = \overline{F}(0),$$

$$a(1,1) = \sum_{r\ge 0} \overline{F}(r) = \mu_+.$$

Якщо $b = 0$, *тоді для напівнеперервних знизу блукань*

$$g_1(u) = \mathbf{E}[u^{\gamma^+(0)} \,|\, S^+ > 0] = \frac{a(u,1)}{a(1,1)}, \quad q_+ = 1 - p_+ = \frac{\mu_+}{q}.$$

Для напівнеперервного знизу блукання ($b = 0$) *спрощуються* $G(s,x,u,v)$ *та* $g(s,\beta,u,v)$ *і відповідно спрощуються співвідношення* (7.185)–(7.188), *зокрема у формулі* (7.188)

$$g_s(u) = \mathbf{E}\big[u^{\gamma^+(0)} \,|\, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > 0\big] = \frac{a(z_s,u)}{a(z_s,1)}.$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 7.7. З (7.166) випливає, що $g_1(u) = \mathbf{E} u^{\xi_1^*}$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^* = r\} = \frac{bp_r + (1-b)\overline{F}(r-1)}{b\overline{F}(0) + (1-b)a(1,1)}, \quad \mathbf{E} u^{S^+} = \mathbf{E} u^{S^*_{\widetilde{\nu}(q_+)}}.$$

Це означає, що S^+ є рандомізованою сумою $S_n^* = \sum\limits_{k\le n} \xi_k^*$ доданків $\{\xi_k^*\}_{k\ge 1}$ з генератрисою $g_1^*(u)$ та з відповідним індексом $n = \widetilde{\nu}(q_+)$, що має геометричний розподіл з параметром $q_+ \in (0;1)$.

З теореми 7.17 для майже напівнеперервних знизу цілозначних випадкових блукань легко одержати результати, аналогічні тим, що встановлені в § 7.3 для цілозначних пуассонівських процессів. Щоб сформулювати ці результати нам знадобиться аналог леми 7.3.

Лема 7.10. *Для майже напівнеперервних знизу блукань згортка* $G(s,x,u,v)$ (*див.* (7.185)) *має зображення аналогічне* (7.87)

$$G(s,x,u,v) = \tag{7.190}$$

$$= p_-(s) z_s^{-1} v^x \left[b \sum_{k=1}^{\infty} u^k p_{k+x} + (z_s - b)\widetilde{q}(s,x,u,v) \right],$$

де $\widetilde{q}(s,x,u,v)$ *допускає обернення по* u

$$\widetilde{q}(s,x,u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k q_k(s,x,v),$$

а функція $q_k(s,x,v)$ *допускає обернення по* v

$$q_k(s,x,v) = \sum_{y \geq k} (vz_s)^{y-k} p_{x+k} = \sum_{r=0}^{\infty} (vz_s)^r p_{x+k+r},$$
$$q_{k,r}(s,x) = z_s^r p_{x+k+r}, \quad r \geq 0.$$

Тому (7.190) *допускає обернення по* u

$$\widetilde{g}(s,x,k,v) = p_-(s) z_s^{-1} v^x [p_{k+x} b + (z_s - b) q_k(s,x,v)]. \tag{7.191}$$

Оберненням (7.191) *по* v *встановлюється, що*

$$g(s,x,k,r) = \tag{7.192}$$
$$= p_-(s) z_s^{-1} [p_{k+x} I\{r = x\} + (z_s - b) z_s^{r-x} p_{r+k} I\{r > x\}].$$

Функція $G_1(s,x,u) = G(s,x,u,1)$ *допускає обернення по* u

$$G_1(s,x,u) = p_-(s) z_s^{-1} \sum_{k=1} \left[bu^k + (z_s - b) u \frac{u^k - z_s^k}{u - z_s} \right] p_{k+x},$$
$$g_1(s,x,k) = \lambda p_-(s) z_s^{-1} [bp_{k+x} + (z_s - b) q_k(s,x)], \tag{7.193}$$
$$q_k(s,x) = \sum_{y=k}^{\infty} z_s^{y-k} p_{x+y}, \quad k \geq 1.$$

Функції $G_2(s,x,v) = G(s,x,1,v)$ *та* $G_3(s,x,\mu)$ $(x > 0)$ *допускають обернення по* v *та* μ

$$G_2(s,x,v) = p_-(s) z_s^{-1} v^x \left[z_s \overline{F}(x) + (z_s - b) \sum_{k=1}^{\infty} (z_s v)^k \overline{F}(k+x) \right],$$
$$g_2(s,x,r) = \begin{cases} p_-(s)\overline{F}(x), \overline{F}(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 > x\}, & r = x, \\ p_-(s) z_s^{-1} (z_s - b) z_s^{r-x} \overline{F}(r), & r > x; \end{cases} \tag{7.194}$$
$$G_3(s,x,\mu) = \sum_{y \leq 0} A_{x-y}^{(s)}(\mu) p_y^-(s), \quad A_x(\mu) = \sum_{k=x+1}^{\infty} \mu^k p_k,$$

$$g_3(s,x,r) = \frac{p_-(s)}{1-z_s}[1-b+(z_s-b)z_s^{r-x}]p_r I\{r>x\}. \tag{7.195}$$

Якщо $m = \mathbf{E}S_1 = \mathbf{E}\xi_1 < 0$, *тоді* $p'_-(1) = -\frac{z'(1)}{1-b} > 0$, *існують похідні по* s ($s \nearrow 1$)

$$\begin{aligned}
&g'(1,x,k,r) = p'_-(1)[p_{k+r}I\{r=x\} + (1-b)p_{r+k}I\{r>x\}];\\
&G'_1(1,x,u) = p'_-(1)\sum_{k=1}^{\infty}\left[bu^k + (1-b)\frac{u^k-1}{u-1}\right]p_{k+x}, &(7.196)\\
&g'_1(1,x,k) = p'_-(1)(bp_{k+x} + (1-b)\overline{F}(x+k-1)), \quad k\ge 1;\\
&G'_2(1,x,v) = p'_-(1)v^x\left[\overline{F}(x) + (1-b)\sum_{k=1}^{\infty}v^k\overline{F}(k+x)\right],\\
&g'_2(1,x,r) = p'_-(1)[\overline{F}(x)I\{r=x\} + (1-b)\overline{F}(r)I\{r>x\}],\\
&g'_3(1,0,r) = p'_-(1)[1+(1-b)r]p_r, \quad r>0. &(7.197)
\end{aligned}$$

Доведення леми 7.6 аналогічне доведенню леми 7.3. Зауважимо, що співвідношення для G, G_k та G', G'_k відрізняються від аналогічних співвідношень (7.87)–(7.91) відсутністю множника λ.

Для багатозначної функції банкрутства

$$\varphi_s(u,x,y) = \mathbf{P}\{\gamma^+(u)=x, \gamma_+(u)=y, S^+_{\widetilde{\nu}(s)} > u\},$$

подвійна генератриса якої згідно з теоремою 7.17 визначається співвідношеннями (7.185), має місце твердження аналогічне наслідку 7.1.

Наслідок 7.5. *Для майже напівнеперервного знизу блукання багатозначна функція банкрутства визначається співвідношеннями* ($\varphi_s(u,k,r) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} \varphi_1(u,k,r) = \mathbf{P}\{\gamma^+(u)=k, \gamma_+(u)=r, \tau^+(u)<\infty\}$)

$$\begin{aligned}
&(1-s)\varphi_s(u,k,r) = \sum_{y=0}^{u} g(s,u-y,k,r)p_y^+(s), \quad u\ge 0;\\
&\varphi_1(u,k,r) = \sum_{y=0}^{u} g'(1,u-y,k,r)p_y^+, \quad m<0, &(7.198)
\end{aligned}$$

($g(s,u,k,r)$ *та* $g'(1,u,k,r)$ *див. в* (7.192) *та в* (7.196)).

Маргінальні функції банкрутства визначаються співвідношеннями ($k=\overline{1,3}$)

$$(1-s)\mathbf{E}[u_k^{\gamma_k(u)}, S^+_{\tilde{\nu}(s)}>u] = \sum_{y=0}^{u} G_k(s,u-y,u_1)p_y^+(s), \qquad (7.199)$$

$$(1-s)\mathbf{P}\{\gamma_k(u)=r, S^+_{\tilde{\nu}(s)}>u\} = \sum_{y=0}^{u} g_k(s,u-y,r)p_y^+(s)$$

($G_k(s,u,u_k)$ *та* $g_k(s,u,r)$ *див. в* (7.193)).

При $u=0$

$$(1-s)\mathbf{P}\{\gamma^+(0)=r, S^+_{\tilde{\nu}(s)}>0\} = p_-(s)p_+(s)(bp_r+(z_s-b)q_r(s,0),$$

$$(1-s)\mathbf{P}\{\gamma_+(0)=r, S^+_{\tilde{\nu}(s)}>0\} = $$
$$= \begin{cases} p_+(s)p_-(s)\overline{F}(0)I\{r=0\}, \\ p_+(s)p_-(s)z_s^{-1}(z_s-b)z_s^r\overline{F}(r)I\{r>0\}; \end{cases} \qquad (7.200)$$

$$(1-s)\mathbf{P}\{\gamma_0^+=r, S^+_{\tilde{\nu}(s)}>0\} =$$
$$= \frac{p_+(s)p_-(s)}{1-z_s}[(1-b)+(z_s-b)z_s^r]p_rI\{r>0\},$$

$$p_\pm(s)=\mathbf{P}\{S^\pm_{\tilde{\nu}(s)}=0\}, \quad q_k(s,0)=\sum_{y=k}^{\infty} z_s^{y-k}p_k, \quad k\geq 1.$$

Якщо $m<0$, *тоді граничні* ($s\to 1$) *маргінальні функції банкрутства визначаються співвідношеннями* ($k=\overline{1,3}$)

$$\mathbf{P}\{\gamma_k(u)=r, \tau^+(u)<\infty\} = \sum_{y=0}^{u} g_k'(1,u-y,r)p_y^+, \quad r\geq 0, \qquad (7.201)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(0)=r, \tau^+(0)<\infty\} =$$
$$= p_-'(1)p_+(bp_r+(1-b)\overline{F}(r-1)), \quad r\geq 1, \qquad (7.202)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_+(0)=r, \tau^+(0)<\infty\} = \begin{cases} p_+p_-'(1)\overline{F}(0), & r=0, \\ p_+p_-'(1)(1-b)\overline{F}(r), & r>0, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0^+=r, \tau^+(0)<\infty\} = p_+p_-'(1)[1+(1-b)r]p_r, \quad r>0. \qquad (7.203)$$

Доведення наслідку 7.5 аналогічне доведенню наслідку 7.1.

Для напівнеперервних знизу блукань при $b = 0$ співвідношення леми 7.6 спрощуються, тому відповідно спрощуються результати наслідку 7.5.

До цілозначних процесів з п.н. та з дискретним часом можна віднести процеси, що задаються двома послідовностями незалежних випадкових величин:

$$\{\xi_n\}_{n\geq 1} \quad \text{з генератрисою} \quad p(z) = \sum_{k\neq 0} z^k p_k = \mathbf{E} z^{\xi_1},$$
$$\{\eta_n\}_{n\geq 1}; \quad \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = (1-\rho)\rho^k, \quad k \geq 0 \quad (0<\rho<1).$$

Якщо процес відновлення для $\{\eta_n\}$ позначити

$$N(t) = \max\Big\{n : \sum \eta_k \leq t\Big\},$$
$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = C_t^k \rho^k (1-\rho)^{t-k}, \quad 0 \leq k \leq t,$$

тоді адитивний процес

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} \xi_k \quad (\mathbf{P}\{\xi_0 = 0\} = 1), \quad t = 0, 1, 2 \ldots \tag{7.204}$$

є цілозначним біноміальним процесом. Якщо позначити $\rho = q$, $p = 1 - q$, то як було показано в § 5.3, генератриса $\xi(t)$ має зображення

$$g_t(z) =: \mathbf{E} z^{\xi(t)} = (\widetilde{p}(z))^t, \quad \widetilde{p}(z) = q + pp(z),$$

з якого випливає, що

$$\xi(t) \doteq \widetilde{S}_t = \sum_{k\leq t} \widetilde{\xi}_k, \quad \widetilde{p}(z) = \mathbf{E} z^{\widetilde{\xi}_1}.$$

Якщо $\widetilde{\nu}(s)$ – геометрично розподілена випадкова величина незалежна від $\widetilde{S}_t$, тоді

$$\widetilde{g}(s,z) =: \mathbf{E} z^{\widetilde{S}_{\widetilde{\nu}(s)}} = \mathbf{E} z^{\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1-s}{1-s\widetilde{p}(z)}. \tag{7.205}$$

Якщо η_k мають довільний дискретний розподіл з генератрисою

$$g(z) = \mathbf{E} z^{\eta_k} \neq \frac{(1-\rho)z}{1-\rho z},$$

тоді $N(t)$ має не біноміальний розподіл. В цьому випадку $\xi(t)$ — неоднорідний процес, який задається стохастичним співвідношенням

$$\xi(t) \doteq \begin{cases} 0, & \eta_1 > t, \\ \xi_1 + \xi(t-\eta_1), & \eta_1 \le t. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\widetilde{g}(s,z) =: \mathbf{E} z^{\xi(\widetilde{\nu}(s))} = \frac{1-g(s)}{1-g(s)p(z)}. \tag{7.206}$$

Для таких неоднорідних процесів розподіли граничних функціоналів вивчались у наших роботах з А.М. Розуменном та в роботах В.С. Королюка з його учнями Б. Пірджановим, Б. Пірлієвим та іншими. Ці результати заслуговують на окремий виклад в іншій роботі і вони частково розглядалися в розділі 4 нашої монографіїї [45].

Ми обмежимось зауваженням, що стосується біноміальних процесів з генератрисою (7.205). Всі результати, одержані в § 7.5 для випадкових блукань легко переформулювати для біноміальних процесів, якщо замінити позначення відповідних функціоналів та їх генератрис для блукання $\widetilde{S}_n$ з генератрисою кроку $\widetilde{p}(z)$.

7.7 Про вихід з інтервалу цілозначних блукань

Як і для ґратчастих пуассонівських процесів у випадку напівнеперервності для напівнеперервних випадкових блукань (див. [86, гл. 3]) використовуються поняття потенціалу й резольвенти з тією різницею, що при їх визначенні використовуються замість $\xi^{\pm}(\theta_s)$ розподіли $S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)}$ та атомарні ймовірності $p_{\pm}(s) = \mathbf{P}\{S^{\pm}_{\widetilde{\nu}(s)} = 0\}$, що виражаються за допомогою коренів $z_s^{\pm} = z^{\pm}(s)$ рівняння Лундберга ($z_s^- < 1 < z_s^+$).

Означення 7.6. Нехай S_n — цілозначне напівнеперервне зверху блукання, для якого згідно (7.151) при $c = 0$

$$g_+(s,z) =: \mathbf{E} z^{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)z} \quad (q_+(s) = (z_s^+)^{-1}).$$

Тоді резольвентою такого блукання називається функція

$$R_s(x) = \frac{1}{1-s} p_+(s) \sum_{k=0}^{x-1} q_+(s)^{k-x} p^-_{-k}(s), \quad x > 0, \tag{7.207}$$
$$R_s(0) = 0, p^-_{-k}(s) = \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} = -k\}, \quad k \geq 0.$$

Означення 7.7. Нехай S_n — цілозначне напівнеперервне знизу блукання, для якого згідно (7.151) при $b = 0$

$$g_-(s,z) =: \mathbf{E} z^{S^-_{\widetilde{\nu}(s)}} = \frac{zp_-(s)}{z - q_-(s)} \quad (z_s^- = q_-(s) < 1).$$

Тоді резольвентою такого блукання називається функція

$$R_s(x) = \frac{1}{1-s} p_-(s) \sum_{k=0}^{x-1} q_-(s)^{k-x} p^+_k(s), \quad x > 0, \tag{7.208}$$
$$R_s(0) = 0, p^+_k(s) = \mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)} = k\}, \quad k \geq 0.$$

Має місце властивість $R_s(x)$, яку інколи вважають визначальною.

Властивість 7.5. *Генератриса резольвенти* (7.207) *задовольняє співвідношення*

$$R(s, z^{-1}) =: \sum_{x=0}^{\infty} z^{-x} R_s(x) = \frac{1}{sp(z) - 1}, \tag{7.209}$$
$$|z|^{-1} < (z_s^+)^{-1} < 1;$$

генератриса резольвенти (7.208) — *співвідношення*

$$R(s, z) =: \sum_{x=0}^{\infty} z^x R_s(x) = \frac{1}{sp(z) - 1}, \quad |z| < z_s^- < 1. \tag{7.210}$$

Означення 7.8. Потенціалом напівнеперервного зверху (знизу) цілозначного блукання S_n називається функція $R(x) = \lim_{s \to 1} R_s(x)$, генератриса якої задовольняє співвідношення

$$\widetilde{R}(z^{\mp 1}) =: \sum_{x=0}^{\infty} z^{\mp x} R(x) = \frac{1}{p(z) - 1}, \quad |z|^{\mp 1} < (z_1^{\pm})^{\mp 1} \leq 1. \tag{7.211}$$

Для застосування потенціалу та резольвенти в граничних задачах для цілозначних S_n наведемо ще деякі їх властивості, обмежившись напівнеперервним знизу блуканням з генератрисою кроку

$$p(z) = p_{-1}z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (0 < |z| \le 1).$$

Відповідний різницевий оператор $\mathbf{K} = \mathbf{L} - \mathbf{I}$

$$\mathbf{K}u_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_n u_{k-n} - u_k \quad \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k| < \infty\Big)$$

називають твірним оператором S_n ($\mathbf{L} \Leftrightarrow p(z)$), а $k(z) = p(z) - 1$ — символом оператора $\mathbf{K}$.

Для $0 < s \le 1$ введемо позначення різницевого оператора

$$\mathbf{K}_s u_k = (s\mathbf{L} - \mathbf{I})u_k = s \sum_{n=-1}^{\infty} p_n u_{k-n} - u_k,$$

символом якого є функція

$$k_s(z) = sp(z) - 1 \quad (k(z) = k_1(z)).$$

Властивість 7.6. *Потенціал $R(x)$ напівнеперервного знизу S_n є единим розв'язком граничної задачі*

$$\mathbf{K}R(x) = \delta_x, \quad x \ge 0, \quad \delta_x = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \ne 0, \end{cases}$$
$$R(x) = 0, \quad x < 0. \tag{7.212}$$

Доведення. Застосуємо твірне перетворення до лівої частини рівняння в (7.212), обчисливши спочатку перетворення для $\mathbf{L}R(x)$ ($x \ge 0$, $R(x) \equiv 0$, $x < 0$) з дописом у ньому $z^{-1}R(-1) \equiv 0$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mathbf{L}R(x)z^x = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \sum_{n=1}^{x} p_n R(x-n) = \sum_{x=-1}^{\infty} z^x \sum_{n=-1}^{x} p_n R(x-n),$$
$$\sum_{x=0}^{\infty} \mathbf{L}R(x)z^x = \sum_{n=-1}^{\infty} p_n z^n \sum_{x=n}^{\infty} R(x-n)z^{x-n} = p(z)\widetilde{R}(z).$$

Після твірного перетворення (7.212) звідси випливає

$$(p(z)-1)\widetilde{R}(z) = 1 \Rightarrow \widetilde{R}(z) = \frac{1}{k(z)}.$$

Згідно з (7.211) твірне перетворення розв'язку (7.212) є твірним перетворенням потенціалу і властивість 7.6 доведена. □

Аналогічно встановлюються наступні властивості.

Властивість 7.7. *Загальний розв'язок стандартної граничної задачі*

$$\begin{aligned}&\mathbf{K}u(x) = g(x), \quad x \geq 1, \left(\sum_{x\geq 0} |g(x)| < \infty\right);\\ &u(x) = 0, \quad x \leq 0,\end{aligned} \tag{7.213}$$

має вигляд (*c — деяка стала*)

$$u(x) = cR(x) + \sum_{n=0}^{x} R(x-n)g(n), \quad x \geq 1. \tag{7.214}$$

Властивість 7.8. *Зсунена стандартна задача*

$$\mathbf{K}u(x) = g(x), \quad x \geq 0, \quad u(x) = 0, \quad x < 0, \tag{7.215}$$

має загальний розв'язок

$$u(x) = cR(x+1) + \sum_{n=0}^{x} R(x+1-n)g(n), \quad x \geq 0. \tag{7.216}$$

Властивість 7.9. *Резольвента $R_s(x)$ напівнеперервного знизу блукання є единим розв'язком граничної задачі*

$$\begin{aligned}&\mathbf{K}_s R_s(x) =: (s\mathbf{L} - \mathbf{I})R_s(x) = \delta_x, \quad x \geq 0;\\ &R_s(x) = 0, \quad x < 0.\end{aligned} \tag{7.217}$$

Властивість 7.10. *Загальний розв'язок стандартної граничної задачі*

$$\mathbf{K}_s u_s(x) = g_s(x), \quad x \geq 1 \quad (x > 0); \quad u_s(x) = 0, \quad x \leq 0, \tag{7.218}$$

має вигляд

$$u_s(x) = C(s)R_s(x) + \sum_{n=0}^{x} R_s(x-n)g_s(n), \quad x \geq 1. \tag{7.219}$$

Властивість 7.11. *Загальний розв'язок стандартної зсуненої задачі*

$$\mathbf{K}_s u_s(x) = g_s(x), \quad x \geq 1 \quad (x > 0); \quad u_s(x) = 0, \quad x < 0, \tag{7.220}$$

має вигляд

$$u_s(x) = C(s)R_s(x+1) + \sum_{n=0}^{x} R_s(x+1-n)g_s(n), \quad x \geq 0. \tag{7.221}$$

Наведемо кілька тверджень на застосування $R(x)$ та $R_s(x)$.

Теорема 7.19. *Спільна генератриса пари* $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ *напівнеперервного знизу блукання виражається в термінах* $R_s(x)$

$$T(s,x,z) =: E\big[s^{\tau^+(x)} z^{\gamma^+(x)}, \tau^+(x) < \infty\big] = z^{-x} - \tag{7.222}$$
$$- k_s(z) \sum_{n=1}^{x} R_s(n) z^{n-1-x} - \frac{p_+(s)}{Ez^{S^+_{\nu(s)}}} \frac{R_s(x+1)}{R_s(1)} \quad (x \geq 0, \ |z| \leq 1).$$

Доведення. Із стохастичних співвідношень для $\tau^+(x)$, $\gamma^+(x)$ (див. с. 482) легко вивести різницеве рівняння для $T(s,z,x)$

$$T(s,z,x) = s\left[\sum_{k=-1}^{x} p_k T(s, x-k, z) + \sum_{k=x+1}^{\infty} p_k z^{k-x}\right], \tag{7.223}$$
$$T(s,x,z) = z^{-x}, \quad x < 0 \quad (\text{оскільки } \tau^+(x) = 0, \ \gamma^+(x) = x).$$

Отже гранична задача для $T(s,z,x)$ має нестандартну форму

$$\mathbf{K}_s T(s,x,z) = 0, \quad x \geq 0; \quad T(s,x,z) = z^{-x}, \quad x < 0,$$

яка після заміни $\overline{T}(s,x,z) = T(s,x,z) - z^{-x}$ $(x \geq 0)$ зводиться до стандартної "зсуненої" задачі

$$\mathbf{K}_s \overline{T}(s,x,z) = -z^{-x} k_s(z), \quad x \geq 0;$$
$$\overline{T}(s,x,z) = 0, \quad x < 0. \tag{7.224}$$

За властивістю 7.11 розв'язок задачі (7.224) при $x \geq 0$ має вигляд

$$\overline{T}(s,x,z) = C(s,z)R_s(x+1) - k_s(z)\sum_{n=0}^{x} R_s(n+1)z^{n-x},$$

а шукана генератриса визначається співвідношенням

$$T(s,x,z) = C(s,z)R_s(x+1) + \\ + k_s(z)\left[z^{-x} - \sum_{n=0}^{x} R_s(1+n)z^{n-x}\right], \quad x \geq 0. \quad (7.225)$$

Після підстановки $x = 0$ з (7.225) знаходимо

$$C(s,z) = k_s(z) + (T(s,z,0)-1)R_s^{-1}(1). \quad (7.226)$$

Згідно з (7.179)

$$T(s,0,z) = 1 - p_+(s)g_+^{-1}(s,z), \quad (7.227)$$
$$C(s,z) = k_s(z) - p_+(s)(R_s(1)g_+(s,z))^{-1}.$$

Після підстановки $C(s,z)$ в (7.225) одержимо співвідношення

$$T(s,x,z) = k_s(z)R_s(x+1) - \frac{p_+(s)R_s(x+1)}{g_+(s,z,)R_s(1)} + \\ + z^{-x} - k_s(z)\sum_{n=0}^{x} R_s(1+n)z^{n-x}, \quad x \geq 0,$$

в якому останній доданок суми при $n = x$ компенсується першим доданком після знаку рівності. Таким чином встановлюється формула (7.222). Згідно з (7.208)

$$R_s(1) = \frac{p_-(s)p_+(s)}{(1-s)q_-(s)}, \quad q_-(s) = z_s^- = z_-(s) < 1. \quad (7.228)$$

Після підстановки (7.228) у (7.222) одержується співвідношення

$$T(s,x,z) = z^{-x} - k_s(z)\sum_{n=1}^{x} R_s(n)z^{n-1-x} - \\ - R_s(x+1)\frac{(1-s)q_-(s)}{p_-(s)g_+(s,z)}, \quad (7.229)$$

яке при $x = 0$ узгоджується з (7.227) ($\sum\limits_{n=1}^{0} \cdots = 0$). $\square$

Зауважимо, що при $s \to 1$ згідно з (7.208) потенціал $R(x)$ залежно від знаку $m = \mathbf{E}\xi_1$ має різні зображення. Зокрема при $m < 0$, $z'_-(1) = \frac{1}{|m|}$, а при $m > 0$ $q_-(s) \underset{s\to 1}{\to} q_- = z_-(1) = \mathbf{P}\{S^- < 0\}$. Тому з (7.208) при $s \to 1$ одержимо співвідношення:

1) $m < 0$, тоді

$$R(x) = \lim_{s\to 1} R_s(x) = \frac{1}{|m|}\mathbf{P}\{S^+ < x\}, \quad x > 0. \tag{7.230}$$

2) $m > 0$ $(p_k^+(1)' < 0)$, тоді

$$R(x) = \lim_{s\to 1} R_s(x) = -\sum_{k=0}^{x-1} q_-^{k-x}(p_k^+(s))'_{s=1}, \quad x > 0. \tag{7.231}$$

3) $m = 0$, тоді

$$R(x) = k_0 H_0(x) \approx k_0' x \quad \text{при } x \to \infty, \tag{7.232}$$

де $H_0(x)$ — функція відновлення для деякої послідовності додатних випадкових величин, розподіл яких визначається нормованим хвостом розподілу $\overline{F}(x)$, $x > 0$.

Наслідок 7.6. *Для неперервних знизу блукань S_n генератриса $\gamma^+(x)$*

$$T(z,x) =: \mathbf{E}\big[z^{\gamma^+(x)}, \zeta^+ > x\big] = \mathbf{P}\{\zeta^+ > x\}\mathbf{P}\big[z^{\gamma^+(z)} \,|\, \zeta^+ > x\big]$$

при $m < 0$ визначається співвідношенням

$$T(z,x) = z^{-x} + \frac{1-p(z)}{|m|}\sum_{n=1}^{x}\mathbf{P}\{S^+ < n\}z^{n-1-x} - \\ - \frac{\mathbf{P}\{S^+ \le x\}}{\mathbf{E}z^{S^+}}, \quad x \ge 0. \tag{7.233}$$

При $x \to 0$ одержується раніше встановлені співвідношення

$$T(z,0) = 1 - \frac{p_+}{\mathbf{E}z^{S^+}}, \quad \mathbf{E}z^{S^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)}|\zeta^+ > 0]},$$

де згідно з (7.189) при $b = 0$ і $m < 0$

$$\mathbf{E}[z^{\gamma^+(0)} \,|\, \zeta^+ > 0] = \frac{a(1,z)}{a(1,1)} = \frac{1}{\mu_+}\sum_{x=1}^{\infty} z^x \mathbf{P}\{\xi \ge x\},$$

$$\mathbf{P}\{\gamma^+(0) = x \,|\, \zeta^+ > 0\} = \frac{1}{\mu_+}\mathbf{P}\{\xi \ge x\}, \quad x \ge 1.$$

Далі ми наводимо основні результати застосування $R_s(x)$ та $R(x)$, не зупиняючись на їх доведенні. В першу чергу це результати, пов'язані з виходом напівнеперервних блукань із обмеженого інтервалу, які доводяться так же, як результати теореми 7.10 для напівнеперервних цілозначних пуассонівських процесів. Наступні дві теореми наводяться без доведення.

Теорема 7.20. *Нехай S_n — напівнеперервне зверху блукання. Тоді генератриса моментів першого виходу S_n із інтервалу $(x-T,x)$*

$$\begin{aligned}
&\tau(x,T) = \inf\{t>0 : S_n \notin (x-T,x)\}\\
&A_+(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} > x\},\ A_-(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} < x-T\},\\
&\tau(x,T) = \begin{cases} \tau^+(x,T), & \omega \in A_+(x),\\ \tau^-(x,T), & \omega \in A_-(x).\end{cases}
\end{aligned}$$

визначаються співвідношеннями в термінах резольвенти (7.175)

$$\begin{aligned}
&Q^T(s,x) =: \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x,T)}, \tau^+(x,T) < \infty\big] =\\
&\quad = \frac{R_s(T-x)}{R_s(T)} \quad (0<x<T),\\
&Q_T(s,x) =: \mathbf{E}\big[s^{\tau^-(x,T)}, \tau^-(x,T) < \infty\big] = \qquad (7.234)\\
&\quad = 1 - Q^T(s,x) - (1-s)\left[Q^T(s,x)\sum_{k\le T} R_s(k) - \sum_{k\le x} R_s(k)\right];\\
&Q(T,s,x) =: \mathbf{E}[s^{\tau(x,T)}] = Q^T(s,x) + Q_T(s,x).
\end{aligned}$$

Розподіл $S_{\widetilde{\nu}(s)}$ до виходу з інтервалу та розподіл $\{\tau^{\pm}(x,T), S_{\tau^{\pm}(x,T)}\}$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&h_s(T,s,y) =: \mathbf{P}\{S_{\widetilde{\nu}(s)} = y, \tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\} = \qquad (7.235)\\
&= (1-s)[Q^T(s,x)R_s(x-y) - R_s(-y)\delta(y<0)], \quad x-T<y<x;\\
&\mathbf{E}[s^{\tau^+(x,T)} z^{S_{\tau^+(x,T)}}, \quad A_+(x)] = Q^T(s,x)z^x, \quad |z|\le 1;\\
&\mathbf{E}[s^{\tau^-(x,T)}, S_{\tau^-(x,T)} \le k] = \qquad (7.236)\\
&\quad = Q^T(s,x)\sum_{x-T<y<x} F(k-y)R_s(x-y) -\\
&\quad - \sum_{x-T<y<0} F(k-y)R_s(-y) \quad (k<x-T).
\end{aligned}$$

Для напівнеперервних знизу цілозначних блукань генератриси моментів першого виходу з інтервалу виражаються через резольвенту (7.207), *зокрема для* $0 < x < T$

$$Q_T(s,x) =: \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^-(x,T)}, \tau^-(x,T) < \infty\big] = \frac{R_s(x)}{R_s(T)}. \tag{7.237}$$

Якщо S_n — майже напівнеперервне зверху цілозначне випадкове блукання (див. (7.5) з параметром $c \in (0,1)$), тоді також справедливі аналоги співвідношень теорем 7.11, 7.12.

Теорема 7.21. *Для майже напівнеперервного зверху цілозначного блукання* S_n *генератриси функціоналів виходу з інтервалу визначаються співвідношенням*

$$\begin{aligned} Q^T(s,x) &= q_+(s) \sum_{r=x-T+1}^{0} z_s^{T-x+r-1} p_r^-(s) \times \\ &\times \left[\sum_{r=1-T}^{0} z_s^{r+T} p_r^-(s) + c z_s \sum_{r=0}^{\infty} c^r p_{-r-T}^-(s) \right]^{-1}, \\ z_s &= z_s^+ > 1, \quad 0 < x < T, \\ \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(x,T)} z^{S_{\tau^+(x,T)}}, A_+(x)\big] &= Q^T(s,x) \frac{1-c}{1-cz} z^x. \end{aligned} \tag{7.238}$$

Розподіл $S_{\widetilde{\nu}(s)}$ *до виходу з інтервалу визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned} h_s(T,x,y) = p_+(s) p_y^-(s) I\{y \le 0\} &+ \\ &+ p_+(s)(1 - c z_s) \sum_{r=x-T+1}^{(y-1)\wedge 0} z^{r-y} p_r^-(s) - \\ &- (1-c) p_+(s) z_s^{x-y} Q^T(s,x) \times \\ &\times \left(\sum_{r=-\infty}^{-T} p_r^-(s) c^{-r} (s z_s)^{-T} + \sum_{r=1-T}^{y-x} p_r^-(s) z_s^r \right). \end{aligned} \tag{7.239}$$

Імовірність "невиходу" $S_{\widetilde{\nu}(s)}$ *з інтервалу має вигляд*

$$P(T,s,x) =: \mathbf{P}\{\tau(x,T) > \widetilde{\nu}(s)\} = \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > x - T\} -$$

$$- Q^T(s,x)\left(\mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > -T\} + c\sum_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}(s)\right), \tag{7.240}$$

$$Q(T,s,x) = \mathbf{E}e^{-s\tau(x,T)} = 1 - P(T,s,x), \quad 0 < x < T.$$

Розподіл $\{\tau^-(x,T), S^-_{\tau^-(x,T)}\}$ *визначається співвідношенням*

$$(1-s)\mathbf{E}\big[s^{\tau^-(x,T)}, S_{\tau^-(x,T)} \le z\big] = \tag{7.241}$$
$$= \sum_{x-T<y<x} F(z-y)h_s(T,x,y), \quad z < x - T.$$

Для майже напівнеперервного знизу блукання (*див.* (7.3) *з параметром* $b \in (0,1)$)

$$Q_T(s,x) = q_-(s)\sum_{r=0}^{x-1} z_s^{T-x+r-1} p_r^+(s) \times \tag{7.242}$$
$$\times\left(\sum_{r=0}^{T-1} z_s^r p_r^+(s) + b z_s^{T-1}\sum_{r=0}^{\infty} b^r p^+_{r+T}(s)\right)^{-1} \underset{b\to 0}{\longrightarrow} \frac{R_s(x)}{R_s(T)}.$$

Неважко перевірити, що при $c \to 0$ співвідношення (7.238)–(7.240) узгоджуються із співвідношеннями теореми 7.19. Зокрема, із (7.238) та (7.240) випливає, що

$$Q^T(s,x) \underset{c\to 0}{\longrightarrow} \frac{R_s(T-x)}{R_s(T)}, \tag{7.243}$$
$$P(T,s,x) \underset{c\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > x - T\} - Q^T(s,x)\mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)} > -T\}.$$

Щоб одержати граничні співвідношення при $s \to 1$ з теорем 7.19 та 7.20 з параметром $c \in (0,1)$, слід врахувати знак $m = \mathbf{E}S_1$:

1) при $m < 0$, $z_s = \widehat{z}_s^+ \to z_1^+ > 1$, $p_+(s) \to p_+ > 0$ $(s \to 1)$;
2) при $m > 0$, $z_s \to 1$, $p_+(s) \to 0$ $(s \to 1)$;
3) при $m = 0$, $z_s \to 1$, $p_\pm(s) \to 0$ $(s \to 1)$, $\sigma_1^2 = DS_1 < \infty$,

$$\frac{z_s - 1}{\sqrt{1-s}} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}, \quad \frac{p_+(s)}{\sqrt{1-s}} \to \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1(1-c)}, \quad c \in (0,1), \quad s \to 1.$$

На підставі останніх граничних співвідношень встановляється твердження.

Наслідок 7.7. *Якщо S_n — майже напівнеперервне зверху і знизу блукання (див. умови (7.3) з параметром $b \in (0,1)$ та (7.5) з параметром $c \in (0,1)$), тоді залежно від знаку $m = \frac{p}{1-c} + \frac{q}{1-b}$ і граничних значень коренів $z_1(s) < 1 < z_2(s)$ $(s \to 1)$ рівняння $(\mathcal{L}_s)$ маємо:*

1) *при* $m > 0$ $z_1(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} z_1 < 1$,

$$Q^T(x) = \mathbf{P}\{S^- > x - T\} \times \tag{7.244}$$
$$\times \left[\mathbf{P}\{S^- > -T\} + c\sum_{r=0}^{\infty} c^r p^-_{-r-T}\right]^{-1} \quad (0 < x < T),$$
$$Q_T(x) = 1 - Q^T(x);$$
$$\mathbf{P}\{S^- > x\} = 1 - \frac{z_1 - b}{1-b} z_1^{|x|-1}, \quad x \le -1; \quad s \to 1;$$

2) *при* $m < 0$ $z_2(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} z_2 > 1$,

$$Q_T(x) = \mathbf{P}\{S^+ < x\} \times \tag{7.245}$$
$$\times \left[\mathbf{P}\{S^+ < T\} + b\sum_{r=0}^{b} b^r p^+_{r+T}\right]^{-1} \quad (0 < x < T),$$
$$Q^T(x) = 1 - Q_T(x); \quad \mathbf{P}\{S^+ < T\} = 1 - \frac{1 - cz_2}{1 - z_2} z_2^{-x},$$

3) *при* $m = 0$ $z_{1,2}(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} 1$

$$Q^T(x) = \frac{b + (1-b)(T-x)}{c(1-b)(1-c)^{-1} + b + (1-b)T} \quad (0 < x < T), \tag{7.246}$$
$$Q_T(x) = \frac{c(1-b)(1-c)^{-1}}{c(1-b)(1-c)^{-1} + b + (1-b)T}.$$

Для симетричного блукання S_n $(b = c,\ m = 0)$

$$Q^T(x) = \frac{b + (1-b)(T-x)}{2b + (1-b)T}, \quad Q_T(x) = \frac{b + (1-b)x}{2b + (1-b)T}. \tag{7.247}$$

Для класичної задачі банкрутства $(b = c = 0)$, що розглядалась на початку § 4.1, корінь квадратного рівняння $(s \to 1)$ $pz^2 - z + q =$

$p(z-1)(z-\frac{q}{p})=0$, $z_{2,1}=\frac{q}{p}$ при $p<q$ $(p>q)$ визначає розподіл екстремумів $S^{\pm}$.

Так само при $0<s<1$ корені квадратного рівняння

$$(pz^2+q)s-z=0, \quad z_1(s)<1<z_2(s)$$

визначають розподіли екстремумів $S^{\mp}_{\widetilde{\nu}(s)}$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{S^-_{\widetilde{\nu}(s)}\le x\}=z_1(s)^{|x|}, \quad x\le -1; \quad p_-(s)=1-z_1(s);\\
&\mathbf{P}\{S^+_{\widetilde{\nu}(s)}<x\}=1-q_+(s)z_2(s)^{1-x}, \quad q_+(s)=z_2(s)^{-1}, \quad x\ge 1.
\end{aligned}$$

Приклад 7.6. Нехай $\xi_u(t)=u+t-S_{N(t)}$ — класичний процес ризику з дискретним часом, $N(t)$ — біноміально розподілена випадкова величина з параметром $p>0$, $S_{N(t)}$ — біноміальний процес, генератриса вимог $p(z)=\mathbf{E}z^{\xi_k}=z^2$. Знайти генератриси для $\xi(t)$, $\xi(\widetilde{\nu}(s))$, $\xi^{\pm}(\widetilde{\nu}(s))$ та для $\xi^{\pm}$ $(\pm m<0)$.

Обчислити тотальну ймовірність банкрутства при умові, що страхова надбавка

$$\delta=\frac{1-p\mathbf{E}\xi_1}{p\mathbf{E}\xi_1}=\frac{\mathbf{E}\xi(1)}{p\mathbf{E}\xi_1}>0.$$

Знайти резольвенту $R_s(x)$ та генератриси моментів $\tau^{\pm}_B(u)$ виходу $\zeta_u(t)$ з інтервалу $(0,B)$ $(0<u<B)$ в термінах $R_s(x)$.

Знайдемо спочатку генератрису $\xi(t)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}z^{\xi(t)}=z^t(q+pp(z))^t=\widetilde{p}(z)^t; \quad \text{отже}\\
&\xi(t)\doteq\widetilde{S}_t=\sum_{k\le t}\widetilde{\xi}_k, \quad \widetilde{p}(z)=\mathbf{E}z^{\widetilde{\xi}_k}=qz+pz^{-1},
\end{aligned}$$

тобто процес $\xi(t)$ напівнеперервний зверху і знизу. Корені рівняння Лундберга, яке зводиться до квадратного

$$z-s(qz^2+p)=0, \quad z_1(s)<1<z_2(s)$$

визначають генератриси $\xi^{\pm}(\widetilde{\nu}(s))$

$$g_+(s,z)=\frac{p_+(s)}{1-zz_2^{-1}(s)}, \quad q_+(s)=z_2^{-1}(s)<1,$$

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)z}{z - z_1(s)}, \quad p_-(s) = 1 - z_1(s).$$

Легко обчислити $m = \mathbf{E}\xi(1) = 1 - 2p = q - p$; залежно від знака m для рівняння $(\mathcal{L}_1)$ $qz^2 + p - z = q(z-1)(z - \frac{p}{q}) = 0$ можливі випадки:

1) $m = 0$ $(p = q = \frac{1}{2})$ при $s < 1$ $z_1 s) < 1 < z_2(s)$, а при $s \to 1$

$$z_{1,2}(s) \to 1, \quad p_\pm(s) \to 0, \quad \mathbf{P}\{S^\pm = \pm\infty\} = 1.$$

2) $m > 0$ $(q > p)$, тоді $\delta = \frac{q-p}{2p} > 0$ і при $s \to 1$ $z_1(s) \to z_1 < \frac{p}{q} < 1$ $z_2(s) \to 1$. Це означає, що $p_+(s) \to 0$, $p_-(s) \to p_- = 1 - z_1$ і генератриса ξ^- визначається співвідношенням

$$g_-(z) =: \mathbf{E}z^{\xi^-} = \lim_{s\to 1} g_-(s,z) = \frac{1 - z_1}{1 - z_1 z^{-1}},$$

з якого випливає, що тотальна ймовірність банкрутства має вигляд

$$\mathbf{P}\{\xi^- < u\} = \mathbf{P}\{\xi^- \le -(u+1)\} = z_1^{u+1}, \quad u \ge 0.$$

3) $m < 0$ $(q < p)$, $z_2(s) \to z_2 = \frac{p}{q} > 1$, $z_1(s) \to 1$ при $s \to 0$. Тоді $p_-(s) \to 0$ $(s \to 1)$

$$\lim_{c\to 1} g_+(s,z) = g_+(z) = \mathbf{E}z^{\xi^+} = \frac{p_+}{1 - zq_+}, \quad q_+ = z_2^{-1}.$$

(7.175) незалежно від знаку m

$$R_s(x) = \frac{1}{1-s} p_+(s)p_-(s) \sum_{k=0}^{x-1} z_1(s)^k = \frac{p_+(s)}{1-s}(1 - z_1(s)^x). \quad (7.248)$$

Згідно з зауваженням та позначеннями на початку § 7.5, видозмінені співвідношення (7.234) набувають вигляду

$$Q_B^+(s,u) = \frac{R_s(u)}{R_s(B)} \quad \left(Q_B^\pm(s,u) = \mathbf{E}[s^{\tau_B^\pm(u)}, A_\pm]\right), \quad (7.249)$$

$$Q_B^-(s,u) = 1 - \frac{R_s(u)}{R_s(B)} - (1-s)\left[\frac{R_s(u)}{R_s(B)} \sum_{y=1}^{B} R_s(y) - \sum_{y=1}^{u} R_s(y)\right].$$

Співвідношення (7.249) є дискретним аналогом відповідних співвідношень в (4.46). Щоб одержати кінцевий результат для даного прикладу слід підставити (7.248) в (7.249). Якщо $m > 0$ $(\delta > 0, q > p)$, тоді $z_1(s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} z_1 < 1$ імовірності банкрутства (для задачі виходу з інтервалу!) виражаються співвідношеннями

$$Q_B^+(u) = \frac{R(u)}{R(B)} = \frac{1 - z_1^u}{1 - z_1^B}, \quad 0 < u < B, \tag{7.250}$$

$$Q_B^-(u) = 1 - \frac{R(u)}{R(B)} = \frac{z_1^u - z_1^B}{1 - z_1^B}, \quad z_1 = \frac{p}{q}.$$

Приклад 7.7. Нехай $\zeta(t) = S_{N(t)} - t$ — надлишковий процес ризику, де $S_{N(t)}$ — біноміальний процес $(p \neq q)$ з генератрисою вимог $p(z) = \mathbf{E} z^{\xi_1} = \frac{1}{3}(z + z^2 + z^3)$. Знайти генератриси для $\zeta(t), \zeta(\widetilde{\nu}(s)), \zeta^{\pm}(\widetilde{\nu}(s))$. Знайти резольвенту $R_s(x)$ та генератрису моментів виходу $\zeta(t)$ з інтервалу $(x - T, x)$ через нижній рівень.

Спочатку знайдемо $m = pp'(1) - 1 = 2p - 1 = p - q$ і генератрису $\xi(t)$

$$g_t(z)(z) = \mathbf{E} z^{\zeta(t)} = z^{-t}(q + pp(z))^t = \widetilde{p}(z)^t,$$

$$\widetilde{p}(z) = \mathbf{E} z^{\widetilde{\xi}_1} = qz^{-1} + \frac{p}{3}(1 + z + z^2), \quad \widetilde{p}_k = \frac{p}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Отже $\zeta(t) = \widetilde{S}_t = \sum\limits_{k \le t} \widetilde{\xi}_k$ $(\widetilde{\xi}_0 = 0)$ — напівнеперервне знизу блукання (процес). Генератриса $\zeta(\widetilde{\nu}(s))$ має вигляд

$$g(s, z) = \frac{1 - s}{1 - s\widetilde{p}(z)} = \frac{(1 - s)z}{z - s(s + \frac{p}{3}(z + z^2 + z^3))}.$$

Додатний корінь рівняння Лундберга, яке зводиться до кубічного рівняння $s[\frac{p}{3}(z^3 + z^2 + z)] + q - z = 0$ визначає

$$g_-(s, z) = p_-(s) z (z - q_-(s))^{-1}, \quad q_-(s) = z_1(s) < 1.$$

Проаналізуємо кубічне рівняння при $s = 1$,

$$p(z^3 + z^2) + (p - 3)z + 3q = 0,$$

коренем якого є 1. Отже звідси випливає квадратне рівняння

$$(pz^2 + 2pz + 3q)(z - 1) = 0,$$

$$pz^2 + 2pz - 3q = 0, \quad D = 4p^2 + 12pq > 0,$$

$$z_{2,3} = \frac{-2p \pm \sqrt{D}}{2p}; \quad \text{при} \quad p = q = \frac{1}{2} \quad D = 4, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -3.$$

При $0 < s < 1$ вище наведене кубічне рівняння після скорочення на $z - z_1(s)$ зводиться до квадратного: $P_2(s, z) = 0$, де

$$P_2(s, z) = sqq_-^{-1}(s) - 3^{-1}sp[(1 + q_-(s))z + z^2].$$

Корені цього рівняння при $0 < s < 1$ $z_2(s) > 1$, $|z_3(s)| > z_2(s)$ визначають генератрису $g_+(s, z)$. Дійсно, якщо врахувати о.ф.т. і очевидне співвідношення

$$g(s, z) = \frac{p_-(s)z}{z - q_-(s)} \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{z - q_-(s)}{P_3(s, z)} = g_-(s, z) \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{1}{P_2(s, z)},$$

то після розкладу $P_2(s, z)$ на лінійні множники, одержимо

$$g_+(s, z) = \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{1}{P_2(s, z)} = \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{3}{p(z_2(s) - z)(|z_3(s)| + z)}.$$

Після розкладу останньої дробово-раціональної функції на дробово-лінійні знаходимо, що при $|z| \leq q$

$$\begin{aligned} g_+(s, z) &= \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{3}{p(z_2(s) + (z_3(s))} \left[\frac{1}{z_2(s) - z} + \frac{1}{|z_3(s)| + z} \right] = \\ &= \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{3}{p(z_2(s) + |z_3(s)|)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{z_2(s)} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{z_2(s)})^k + \frac{1}{|z_3(s)|} \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{z}{|z_3(s)|})^k \right], \end{aligned}$$

з якого випливає, що при $r \geq 0$

$$p_{2r}^+(s) = \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{3}{p(z_2(s) + |z_3(s)|)} [z_2(s)^{-(2r+1)} + |z_3(s)|^{-(2r+1)}]$$
$$p_{2r+1}^+(s) = \frac{1 - s}{p_-(s)} \frac{3}{p(z_2(s) + |z_3(s)|)} [z_2(s)^{-(2r+1)} - |z_3(s)|^{-(2r+1)}].$$

При $m = p - q < 0$, $(p < q)$ абсолютний максимум ζ^+ має невироджений розподіл, який одержується при переході до границі $(s \to 1)$, якщо врахувати, що

$$\frac{(1 - s)}{p_-(s)} \underset{s \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{p'_-(1)} > 0, \quad z_2(s) \to z_2 > 1, \quad |z_3(s)| \to |z_3| > z_2,$$

$$p_k^+ = \lim_{s\to 1} p_k^+(s) = \frac{1}{p'_-(1)} \frac{3}{p(z_2+|z_3|)} \left[z_2^{-k-1} + \frac{1}{|z_3|}(-z_3)^{-k} \right].$$

Резольвенту $R_s(x)$ можна переписати так $(z_1(s) = q_-(s))$

$$\begin{aligned} R_s(x) &= \frac{3}{p(z_2(s)+|z_3(s)|)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{x_1} q_-(s)^{k-x} \left(\frac{1}{z_2(s)} \left(\frac{1}{z_2(s)}\right)^k + \frac{1}{|z_3(s)|} \left(\frac{1}{z_3(s)}\right)^k \right) = \\ &= \frac{3}{p(z_2(s)+|z_3(s)|)} \left[\frac{z_1(s)^{-x} - z_2(s)^{-x}}{z_2(s)+z_1(s)} + \frac{z_1(s)^{-x} - (z_3(s))^{-x}}{z_1(s)+|z_3(s)|} \right]. \end{aligned}$$

Генератриса моменту виходу $\tau^-(x,T)$ через нижній рівень має вигляд

$$\begin{aligned} Q_T(s,x) &= \frac{R_s(x)}{R_s(T)} = \frac{f(x; z_1(s), z_2(s), z_3(s))}{f(T; z_1(s), z_2(s), z_3(s))}, \\ f(x; z_1, z_2, z_3) &= z_1^{-x}(2z_1 + z_2 + |z_3|) - \\ &\qquad - z_2^{-x}(z_1 + |z_3|) - z_3^{-x}(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Потенціал $R(x) = \lim\limits_{s\to 1} R_s(x)$ обчислюється залежно від знаку m

1) $m > 0$, $p > q$, $q_-(s) \to q_- < 1$, $z_2(s) \to z_2 = 1$, $z_3(s) \to z_3$, $z_2 < |z_3| < 3$ $(s \to 1)$

$$R(x) = \frac{3}{p(1+|z_3|)} \left[\frac{q_-^{-x} - 1}{1+q_-} + \frac{q_-^{-x} - z_3^{-x}}{q_- + |z_3|} \right];$$

2) $m = 0$ $(p = q = \frac{1}{2})$ $z_{1,2}(s) \to 1$, $z_3(s) \to -3$ при $s \to 1$

$$R(x) = \frac{3}{2} \left[x - \frac{1-(-3)^{-x}}{4} \right];$$

3) $m < 0$, $p < q$, $z_1(s) \to 1$, $z_2(s) \to z_2 > 1$, $z_3(s) \to z_3$, $|z_3| > 3$

$$R(x) = \frac{3}{p(z_2+|z_3|)} \left[\frac{1-z_2^{-x}}{1+z_2} + \frac{1-z_3^{-x}}{1+|z_3|} \right] = \frac{1}{|m|} \mathbf{P}\{\zeta^+ < x\}.$$

При $s \to 1$ знаходимо ймовірність банкрутства

$$Q_T(x) = \lim_{s\to 1} Q_T(s,x) = R(x) R^{-1}(T),$$

де $R(x)$ при $m > 0$ визначається за допомогою показниково зростаючої функції $(1/q_-)^x$ $(x \to \infty)$, при $m = 0$ — лінійно зростаючою функцією $(x \to \infty)$. При $m < 0$ $R(x)$ є обмеженою функцією: $R(x) = \frac{1}{m}\mathbf{P}\{\zeta^+ < x\}$. Отже тотальна ймовірність банкрутства (для задачі виходу з інтервалу через рівень $x - T$) має вигляд при $m < 0$

$$Q_T(x) = \mathbf{P}\{\zeta^+ < x\}\mathbf{P}^{-1}\{\zeta^+ < T\}, \quad 0 < x < T.$$

Щоб знайти генератрису багатозмінної (складної) функції банкрутства для біноміального процесу ризику банкрутства при умові $m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$ використаємо деякі результати леми 6.6, застосувавши їх до блукання $\widetilde{S}_t \doteq \xi(t)$ з кроком $\widetilde{\xi}_1$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_1 = -1\} = q, \quad \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_1 = k\} = \frac{p}{3}, \quad k = 0, 1, 2,$$
$$p_k = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_1 = k\} = 0, \quad k > 2.$$

Для цього блукання $\widetilde{A}_x(u_1, u_2) = 0$, $G(s, x, u_1, u_2) = 0$ при $x \geq 2$

$$3\widetilde{G}(s, 0, u_1, u_2) = p_-(s)p(u_1 + u_1^2) + pp_{-1}^-(s)u_1u_2,$$
$$3\widetilde{G}(s, 1, u_1, u_2) = pp_-(s)u_1u_2, \quad p_{-1}^-(s) = p_-(s)(z_s - b).$$

Згідно з (7.162) шукана генератриса визначається співвідношеннями

$$V(s, u, u_1, u_2) =: \mathbf{E}\big[s^{\tau^+(u)}u_1^{\gamma^+(u)}u_2^{\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty\big] =$$
$$= (1 - s)^{-1}\big[p_{u-1}^+(s)\widetilde{G}(s, 1, u_1, u_2) + p_u^+(s)\widetilde{G}(s, 0, u_1, u_2)\big], \ u \geq 1,$$

які можна обернути по $u_{1,2}$. Крім того існують похідні при $s \nearrow 1$

$$3\widetilde{G}'(1, 0, u_1, u_2) = p'_-(1)p(u_1 + u_2^2) + pp'_-(1)(1 - b)u_1u_2,$$
$$3\widetilde{G}'(1, 1, u_1, u_2) = pp'_-(1)u_1u_2.$$

Тому гранична генератриса $(s \nearrow 1)$ визначається співвідношенням

$$V(1, u, u_1, u_2) = p_{u-1}^+\widetilde{G}'(1, 1, u_1, u_2) + p_u^+\widetilde{G}'(1, 0, u_1, u_2),$$

яке також можна обернути по $u_{1,2}$.

Processes with stationary independent increments in the Risk theory

D.V. Husak (Gusak)

Summary

The monograph is a revised and extended version of our book [46], published on 2007. If is devoted to furthest investigations of distributions of boundary functionals for processes with stationary independent increments and to theirs applications in the risk theory and in financial Mathematics.

Recent result (obtained by author during last 3 years) amplify Chapters 3, 4, 6, 7 of mentioned monograph [46] and they are included in §§ 3.5–3.6, § 4.4, and §§ 6.4–6.5, § 7.4 of its new extended version. There complementations are concerning meanly some functionals for queuing processes and integervalued Poisson processes. Some of complementations are connected with prelimit generalizations of Pollachek–Khinchine formula, cumulant representation of roots of Lundberg's equation and with the simplifications of Spitzer's formula for semi-continuous (almost semi-continuous) processes.

Risk processes are described by compound Poisson processes (with a diffusion or without it), by binomial processes (which are reduced to random walks), sometimes by Poisson processes with a reflection. Main characteristics investigated in the risk theory are connected with distributions of different boundary functionals of processes with independent increments (extremums on finite intervals, absolute extremums, overjump functionals, sojourntimes and others).

Sometimes in papers and monographs on Risk theory a lots of probabilistic problems are studied without mentions about the connection with corresponding results in the boundary problems for processes with stationary and independent increments.

The aim of our monograph: to summarize the results on investigation of distributions of all boundary functionals for processes with independent increments and to attract attention on the connection between

the problems in the Risk theory and boundary problems for corresponding processes and random walks.

The monograph will be useful for researchers in the probability theory and in the theory of stochastic processes who are occupied with boundary problems for random processes (especially for processes with stationary independent increments) and with their applications in the risk theory, in a renewal and a reliability theory, in actuarial mathematics, in the queuing theory and in other applied areas.

This book can be recommended to scientists, engineers, students and post-graduate students of economics and mathematical specialities, who are interested in applications of probabilistic methods in insurance, in storage and reliability models and in different fields of economics.

Chapter 1 is devoted to the presentation of general informations on processes with stationary and independent increments stated in monographs of A.V. Skorokhod [110] (1964, 1986) and in monograph of P. Levy [93] (translation of [198] to Russian in 1972).

Chapter 2 is devoted to factorization identities for mentioned processes and their connections with distributions of corresponding functionals for these processes. Some of these results were stated by different ways in early published monographs and papers of well-known probabilists: V.S. Korolyuk, A.A. Borovkov, B.A. Rogozin, J. Kemperman, F. Spitzer, L. Tacács and others(see [6, 7, 62–64, 84, 86, 91, 102, 103, 106–109, 119, 176–181, 193, 207, 208, 210–213]).

Chapter 3 is devoted to semi-continuous (almost semi-continuous) processes with stationary and independent increments. For these processes are defined concretely components of the first factorization identity, which are more convenient then their general representations by Spitzer's identity. The concrete definition of factorization components allows to study more completely distributions of all boundary functionals for semi-continuous (almost semi-continuous) processes (see [7, 14, 29–39, 46, 50–65, 119, 175–181]). The main assertions for distributions of basic functionals (extremums), overjump functionals and sojourntimes for considered processes are stated in this important chapter, which is complemented by §§ 3.5–3.6.

Chapter 4. The concrete definition of a factorization components allows also to develop the potential method for compound Poisson processes (see [83–86]) and with the help of the resolvent function (introduced by V.S. Korolyuk) the boundary problems (on a semi-axis and a finite interval) for semi-continuous processes are studied. In §§ 4.3, 4.4

are described the queuing processes and in § 4.5 we introduce and study the processes with reflection, which are connected with some processes in the queuing theory; § 4.6 is devoted to the exit problems of semi-continuous (almost semi-continuous) processes from a finite interval. The recent problems are studied in [11, 12, 14, 56, 76–78, 84, 86, 160, 182, 189, 190, 193].

Chapter 5 is completely devoted to the connection of boundary problems for compound Poisson processes with the distributions of all risk characteristics (for semi-continuous and almost semi-continuous risk process — processes with exponentionally distributed premiums). For the sake of the completeness in the end of Chapter 5 the case of the discrete time is considered. In the end of the chapter §§ 5.3, 5.4 are devoted to boundary problems for random walks and binomial processes with continuously distributed jumps ξ_k.

Chapter 6. In § 6.1 the behavior of semi-continuous risk processes and the multivariate ruin function are studied, in § 6.2 analogues problems are studied for risk processes with exponentially distributed premiums. In § 6.3 the total durations of sojourntimes of risk processes in the survival (green) and risk (red) zones are investigated. Some problems of Chapters 5 and 6 mainly were considered in the monographs of foreign authors (well-known specialists in the risk theory) S. Asmussen [130], H. Bühlmann [141], H.U. Gerber [166], J. Grandell [170], T. Rolsky, H. Shmidly, V. Shmidt, J. Teugels [210] and in many papers of other authors (see References). Chapter 6 is complemented by §§ 6.4–6.5, devoted to the behaviour of risk processes with random premiums after ruine and to the simplification of Spitzer's formula for semicontinuous and almost semicontinuous risk processes.

Chapter 7. In the last chapter the case of the discrete phase is considered. This chapter is devoted to the consideration of lattice (integer-valued) Poisson processes and random walks and to the short study of corresponding boundary problems for these processes and random walks, which include the problem of exit from a finite interval. Some problems for the integer-valued processes and random walks of the Chapter 7 are studied in [40,43,47,49,53,66,67,76,84,86,177,178] and others. Chapter 7 is completed by § 7.3, devoted to the study of the sojourntime of the integer-valued processes in the fixed state.

Distributions of boundary functions for oscillating processes (see [34–41, 68]) and for processes defined on a finite Markov chain (see [72]) are studied in [45, 130, 172, 174, 175] and in other publications.

Graphs of most important processes and theirs functionals are illustrated in the end of the monograph. Comparative relations for roots of Lundberg's equations and relations for ruin's probabilities with some theirs approximations. are gathered in Appendixes pages of our book. All chapters contain about a half hundred problems, some of which are considered in [69, chapters XI, XX]

Some important results of the monograph are used in [69], which was composed by the collective of probabilists and twice published in Ukrainian (2008, 2009) by the publisher of Kiev National University in Ukraine and in English (2010) by "Springer".

Бібліоґрафія

[1] *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Случайные процессы в теории масового обслуживания и управления запасами. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 110 с.

[2] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Москва: Наука, 1969. – 344 с.

[3] *Бойков А.В.* Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероят. и ее примен. – 2002. – **47**, № 3. – С. 549–553.

[4] *Боровков А.А.* О распределении величины первого перескока // Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 5–10 сент. 1960 г. – Вильнюс: Вильн. ун-т., 1962. – С. 7–23.

[5] *Боровков А.А.* О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1965. – **10**, № 2. – С. 360–364.

[6] *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

[7] *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – Москва: Наука, 1972. – 367 с.

[8] *Братийчук Н.С.* О резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 96–100.

[9] *Братийчук Н.С.* Положение процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – С. 660–663.

[10] *Братийчук Н.С.* Граничные задачи, связанные с выходом случайного блуждания из интервала // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 4. – С. 498–503.

[11] *Братийчук Н.С.* Двуграничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев. – 1983. – 24 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.70).

[12] *Братийчук Н.С.* Построение резольвенты процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода из интервала // Теория вероят. и мат. статистика. – 1984. – **30**. – С. 25–34.

[13] *Братійчук М.С.* Залишковий час обслуговування в системі $GI/G/1/\infty$ // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 7–12.

[14] *Братийчук Н.С., Гусак Д.В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.

[15] *Братийчук Н.С., Гусак Д.В.* Эргодическое распределение осциллирующего процеса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 547–554.

[16] *Братийчук Н.С., Королюк В.С.* Резольвента однородного процесса с независимыми приращениями, обрывающегося на полуоси // Теория вероят. и ее примен. – 1985. – **30**, № 2. – С. 366–372.

[17] *Вендель Дж.* Краткое доказательство формулы Спитцера // Математика: Период. сб. пер. – 1964. – **8**, № 4. – С. 151–154 (перев. с англ. 1956 г.).

[18] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

[19] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – Москва: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.; 1973. – Т. 2. – 635 с.; 1975. – Т. 3. – 496 с.

[20] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 567 с.

[21] *Гнеденко Б.В.* Курс теорії ймовірностей. – Львів; Київ: Рад. школа, 1949. – 260 с.

[22] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 264 с.

[23] *Гусак Д.В.* Про розподіл моменту досягнення максимуму однорідним процесом з незалежними приростами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 5. – С. 396–399.
Gusak D.V. The distribution of time the maximum is achived by a homogeneous process with independent increments // Selected Transl. in Math. Stat. and Probab. – 1978. – **14**. – P. 107–110.

[24] *Гусак Д.В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1969. – **14**, № 1. – С. 15–23.

Gusak D.V. On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with indep increments // Theory Prob. Appl. – 1969. – **14**, № 1. – P. 14–23.

[25] *Гусак Д.В.* Про канонічну та безмежно подільну факторизацію // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 4. – С. 284–288.

[26] *Гусак Д.В.* Случайные блуждания, описываемое однородным процессом с независимыми приращениями и асимптотический аналих его характеристик // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 1. – С. 24–35. *Gusak D.V.* Random walk described by a homogeneous process with independent increments and asymptotic analyse of its characteristics // Selected transl. in Math. statist. and Probab. – 1971. – **9**. – P. 189–204.

[27] *Гусак Д.В.* Замечание о распределении момента и величины первого перескока для пуассоновских процессов // Теория случайных процессов: Вопр. статистики и упр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 10–21.

[28] *Гусак Д.В.* О пересечении уровня однородным процессом с независимыми приращениями и с невырожденной винеровской компонентой // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 3. – С. 373–378.

[29] *Гусак Д.В.* Распределение времени пребывания однородного процесса с независимыми приращениями над произвольным уровнем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 14–17.

[30] *Гусак Д.В.* О пребывании над уровнем сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн. – 1982. — **34**, № 3. — С. 289–295.

[31] *Гусак Д.В.* Факторизационные тождества для сумм случайного числа слагаемых // В кн.: Прикладные задачи теории вер. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 25–44.

[32] *Гусак Д.В.* Распределение времени пребывания однородного процесса с независимыми приращениями над произвольным уровнем // Теория вероят. и ее примен. – 1983. – **28**, № 3. – С. 478–488. *Gusak D.V.* Distribution of the sojourn time of a homogeneous process with independent inxrements over an arbitrary level // Theory Prob. Appl. – 1983, **28**, № 3. – P. 503–514.

[33] *Гусак Д.В.* Метод факторизации в граничных задачах для однородных процессов с независимыми приращениями // Распределение некоторых функционалов для процессов с независимыми приращениями и полумарковских процессов. – Киев, 1985. – С. 12–42 (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.43).

[34] *Гусак Д.В.* Об одной модели осциллирующего случайного блуждания // В кн.: Аналит. методы в вероятн. задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 25–28.

[35] *Гусак Д.В.* Об осциллирующих схемах случайного блуждания. I, II // Теория вероят. и мат. статистика. – 1988. – **39**. – С. 33–39; 1989. – **40**. – С. 11–17.
Gusak D.V. On oscillating random walk schemes. I, II // Theory Prob. and Math. Stat. – 1990. – № 39. – P. 41–46; № 40. –P. 11–17.

[36] *Гусак Д.В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями и кумулянтами специального вида // В кн.: Аналит. методы исследования эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 4–10.

[37] *Гусак Д.В.* Осциллирующие процессы с невырожденной винеровской компонентой // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1415–1421.
Gusak D.V. Oscillating processes with independent increments and a nondegenerate Wiener component // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, № 10. – P. 1257–1261.

[38] *Гусак Д.В.* Про перетин рівня процесами, що задаються сумами випадкового числа доданків // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 897–914.
Gusak D.V. On the crossing of a level by processes defined by sums of a random number of terms // Ukr. Math. J. – 1990. – **47**, № 7. – P. 1030–1049.

[39] *Гусак Д.В.* Сумісний розподіл процесу, що задається сумами випадкового числа доданків, та його екстремумів I, II // Теорія ймов. та мат. статистика. – 1995. – № 52. – С. 41–52; № 53. – С. 3–8.
Gusak D.V. The joint distribution of a process difined by the sum of a random number of summands and its extrema. I, II // Theor. Prob. and Math. Statist. – 1996. – № 52. – P. 43–54; № 53. – P. 46–50.

[40] *Гусак Д.В.* Час перебування у фіксованому стані цілозначних адитивних послідовностей // Доп. НАН України. – 1996. – № 2. – С. 16–20.

[41] *Гусак Д.В.* Основні тотожності для аддитивних неперервно розподілених послідовностей // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1651–1660.
Husak D.V. Basic identities for additive continuoosly distributed sequences // Ukr. Math. J. – 1996. – **47**, № 12. – P. 1868–1879.

[42] *Гусак Д.В.* Про модифікації процесів ризику // Теор. ймов. та мат. статистика. – 1997. – № 56. – С. 87–95.
Gusak D.V. On modifications of ruin processes // Theor. Prob. and Math. Statist. – 1998. – № 56. – P. 87–95.

[43] *Гусак Д.В.* Про одну модель осцилюючого випадкового блукання, що описує процес ризику // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 7–11.

[44] *Гусак Д.В.* Про момент першого розорення для модифікованого процесу ризику з миттєвим відбиттям // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1419–1425.
Husak D.V. The first ruin time for a modified risk process with instantaneous reflection // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 10. – P. 1622–1629.

[45] *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінчених ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.

[46] *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами. – Київ: Праці Інституту математики НАН України, 2007. – **65**. – 459 с.

[47] *Гусак Д.В.* Про узагальнений напівнеперервний пуассонівський цілозначний процес з відбиттям // Теор. ймов. та мат. стат. – 1998. – № 59. – С. 37–43.
Gusak D.V. On a generalized semicontinuous integer-valued Poisson process with reflection // Theor. Prob. and Math. Statist. – 1999. – № 59. – 41–46.

[48] *Гусак Д.В.* Гранична поведінка розподілу моменту руйнації модифікованого процесу ризику // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 847–853.

[49] *Гусак Д.В.* Про задачу руйнації для неоднорідного напівнеперервного цілозначного процесу // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 2. – С. 208–219.

[50] *Гусак Д.В.* Уточнення факторизаційної тотожності для напівнеперервних процесів на ланцюгах Маркова // Теор. ймов. та мат. статистика. – 2001. – **64**. – С. 25–37.
Gusak D.V. Refinement of the factorization identy for semicontinuous process on a Markov chain // Theor. Prob. and Math. Statist. – 2002. – № 64. – 37–50.

[51] *Гусак Д.В.* Розподіл перестрибкових функціоналів однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 303–322.
Husak D.V. Distribution of overjump functionals of a semicontinuous homogeneous process with independent increments // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 3. – 371–397.

[52] *Гусак Д.В.* Складні пуассонівські процеси з двостороннім відбиттям // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1616–1625.
Husak D.V. Compound Poisson process with two-sided reflection // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, № 12. – P. 1958–1970.

[53] *Гусак Д.В.* Перестрибкові функціонали для цілозначних пуассонівських процесів // Теор. ймов. та мат. статистика. – 2003. – **68**. – С. 24–36.
Gusak D.V. Exit time functionals for integer-valued Poisson processes // Theory Prob. and Math. Stat. – 2004. – № 68. – P. 27–39.

[54] *Гусак Д.В.* Розподіли екстремумів процесів Леві і їх зв'язок зі сходинковими точками // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2003. – **8**. – С. 15–29.

[55] *Гусак Д.В.* Модифікації складного пуассонівського процесу з двостороннім відбиттям // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2003. – № 69. – С. 11–22.
Gusak D.V. Version of a compound Poisson process // Theory Prob. and Math. Stat. – 2004. – № 69. – P. 27–37.

[56] *Гусак Д.В.* Про вихід з інтервалу одного класу випадкових блукань // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1209–1217.
Husak D.V. On the exit of one class of random walks from an interval // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 9. – P. 1413–1423.

[57] *Гусак Д.В.* Поведінка класичних процесів ризику після банкрутства та багатозмінна функція банкрутства // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1339–1352.
Husak D.V. The behavior of classical risk processes after ruin, and the multivariate ruin function // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 10. – P. 1501–1516.

[58] *Гусак Д.В.* Поведінка процесів ризику з випадковими преміями після банкрутства та багатозмінна функція банкрутства // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1473–1484.
Husak D.V. The behavior of classical risk processes with random premiums after ruin, and the multivariate ruin function // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 11. – P. 1653–1667.

[59] *Гусак Д.В.* Допограничне та граничне узагальнення формули Полячека–Хінчина // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2009. – № 80. – С. 34–42.
Gusak D.V. Prelimit and limit generalizations of the Pollaazec–Khinchin formula // Theor. Prob. and Math. Statist. – 2010. – № 80. – 37–46.

[60] *Гусак Д.В.* Кумулянтне зображення кореня Лундберга для напівнеперервних процесів // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2010. –

№ 82. – С. 21–29.
Gusak D.V. The cumulant representation of the root of Lundberg's equation for semicontinuous processes // Theor. Prob. and Math. Statist. – 2011. – № 82. – to appear.

[61] *Гусак Д.В.* Спрощення форули Спітцера для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів // Теорія ймовір. та мат. статистика (прийнята до друку).

[62] *Гусак Д.В., Королюк В.С.* О моменте прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1968. – **13**, № 3. – С. 471–478.
Gusak D.V., Korolyuk V.S. On the first passage time across agiven level for processes with independent increments // Theory Prob. Appl. – 1968. – **13**, № 3. – P. 448–456 .

[63] *Гусак Д.В., Королюк В.С.* О совместном распределении процесса со стационарными приращениями и его максимума // Теория вероят. и ее примен. – 1969. – **14**, № 3. – С. 421–430.
Gusak D.V., Korolyuk V.S. On the joint distribution of a process with stationary increments and its maximum // Theory Prob. Appl. – 1969. – **14**, № 3. – P. 400–409.

[64] *Гусак Д.В., Королюк В.С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 55–73.
Gusak D.V., Korolyuk V.S. The distribution of functionals of homogeneous process with independent increments // Theory Probab. and Math. Stat. – 1974. – № 1. – P. 53–72.

[65] *Гусак Д.В., Королюк В.С.* Асимтотическое поведение полумарковских процессов с расщепляемым множеством состояний // Теория вероят. и мат. статистика. – 1971. – Вып. 1. – С. 43–50.
Gusak D.V., Korolyuk V.S. The asymptotic behaviour of semi-Markov processes with a decomposable set of states // Theory Probab. and Math. Stat. – 1975. – № 5. – P. 43–51.

[66] *Гусак Д.В., Каплан Б.И.* О распределении ремени пребывания в фиксированном состоянии для одной схемы блужданий с дискретно распределенными скачками // Аналитические методы в задачах теории вероятностей: – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР. – 1984. – С. 27–40.

[67] *Гусак Д.В., Розуменко А.М.* Час перебування в фіксованому стані процесів, що задаються сумами випадкового числа дискретно розподілених доданків. – Киев: Изд. Ин-та математики АН Украины. – 1994. – С. 74–93.

[68] *Гусак Д.В., Коркуна О.П.* Про момент першого досягнення рівня осцилюючими напівнеперервними процесами // Доп. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 18–23.

[69] *Гусак Д.В., Кукуш О.Г., Кулик О.М., Мішура Ю.С., Пилипенко А.Ю.* Збірник задач з теорії випадкових процесів та ї застосувань. – Київ: Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.
Gusak D., Kukush A., Kulik A., Michura Yu., Pilipenko A. Theory of stochastic processes. With applications to financial mathematics and risk theory. – New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2010. – 376 p.

[70] *Дынкин Е.Б.* Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечным математическим ожиданием // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – **19**, № 4. – С. 247–266.

[71] *Дъячковский С.В., Супрун В.Н., Пирджанов Б.* Изучение величины перескова для обобщенного пуассоновского процесса со сносом методом потенциала // Теория вероят. и мат. статистика. – 1975. – Вып. 13. – С. 53–59.

[72] *Ежов И.И., Скороход А.В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте, Теория вероят. и ее примен. – 1969. – **14**, № 1. – С. 3–14; № 4. – С. 679 –692.

[73] *Ежов И.И., Каданков В.Ф.* Распределение основных характеристик системы обслуживания $G^{\varkappa}/G/1$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1343 – 1357.

[74] *Ежов И.И., Каданков В.Ф.* Системы $G/G^{\varkappa}/1$ с групповым обслуживанием требований // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 447–465.

[75] *Золотарев В.М.* Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1964. – **9**, № 4. – С. 724–733.

[76] *Каданкова Т.В.* Двограничні задачі для випадкового блукання з геометрично розподіленими від'ємними стрибками // Теор. ймов. та мат. стат. – Вип. 68. – 2003. – С. 60–71.

[77] *Каданков В.Ф., Каданкова Т.В.* О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1359–1385.

[78] *Каданков В.Ф., Каданкова Т.В.* Двухграничные задачи для процесса Пуассона с показательно распределенной компонентой // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 922–953.

[79] *Кингман Дж. Ф.Ч.* Об алгебре очередей // Математика: Период. сб. пер. – 1971. – **15**, № 2. – С. 126–165.

[80] *Климов Г.П.* Стохастические системы обслуживания. – Москва: Наука, 1966. – 244 с.

[81] *Коваленко И.И.* О предельном распределении величины первого перескока // Теория вероят. и ее примен. – 1960. – **5**, № 4. – С. 469–472.

[82] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.

[83] *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложного пуассосновского процесса // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – **19**, № 1. – С. 3–14.

[84] *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.

[85] *Королюк В.С.* О задачах разорения для сложного пуассоновского процесса // Теория вероят. и ее примен. – 1975. – **20**, № 1. – С. 382–384.

[86] *Королюк В.С., Братийчук Н.С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 250 с.

[87] *Королюк В.С., Супрун В.Н., Шуренков В.М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероят. и ее примен. – 1976. – **22**, № 2. – С. 251–259.

[88] *Королюк В.С., Ткаченко Е.П.* Асимптотичний розклад твірної функції часу перебування пуассонівського процесу в смузі з затримуючим екраном // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 4. – С. 315–317.

[89] *Королюк В.С., Шуренков В.М.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1977. – **39**, № 4. – С.464–471.

[90] *Королюк В.С., Пирлиев Б.* Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления// Укр. мат. журн. – 1984. – **46**, № 4. – С.433–436.

[91] *Коэн Дж., Боксма О.* Граничные задачи в теории массового обслуживания. – Москва: Мир, 1978. – 272 с.

[92] *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3–120.

[93] *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – Москва: Наука, 1972 (переклад з франц.).

[94] *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – Київ, 1995. – 380 с.

[95] *Лотов В.И.* Асимптотическсий анализ распределений в двухграничных задачах // Теория вероят. и ее примен. – 1979. – **24**, № 3. – С. 475–485; № 4. – С. 873–879.

[96] *Лугавов В.С.* О распределении времени пребывания на полуоси и положения в последний момент времени процесса с независимыми приращениями, управляемого цепь Маркова // Предельные теоремы для сумм случайных величин. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 143–159.

[97] *Лугавов В.С.* Распределение времени пребывания на полуоси и положения процесса с независимыми приращениями, заданного на цепи Маркова // Теория вероят. и ее примен. – 1982. – **27**, № 3. – С. 619–620.

[98] *Малышев В.А.* Уравнения Винера–Хопфа и их применения в теории вероятностей: (Обзор) // Итоги науки и техники. Т. 13: Теория вероятностей. Мат.статистика. Теорет. кибернетика. – Москва: ВИНИТИ, 1976. – С. 5–35.

[99] *Могульський А.А.* О величине первого перескока для процесса с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1976. – **21**, № 3. – С. 481–496.

[100] *Насирова Т.И.* Процессы полумарковского блуждания. – Баку: Элм., 1984. – 170 с.

[101] *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

[102] *Печерский Е.А., Рогозин Б.А.* О совместном распределении случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1969. – **14**, № 3. – С. 431–444.

[103] *Печерский Е.А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и полуинтервала // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – **19**, № 1. – С. 104–109.

[104] *Пирджанов Б.* Предельная теорема для момента достижения уровня регенерирующим полумарковским блужданием // В кн.: Асимптотические и прикладные задачи теории случайных эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1990. – С. 74–83.

[105] *Прабху Н.* Стохастические процессы теории запасов. – Москва: Мир, 1984. – 184 с.

[106] *Рогозин Б.А.* О локальном поведении процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1968. – **13**, № 3. – С. 507–511.

[107] *Рогозин Б.А.* О распределении величины первого перескока // Теория вероят. и ее примен. – 1964. – **9**, № 3. – С. 498–512.

[108] *Рогозин Б.А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1966. – **11**, № 4. – С. 656–670.

[109] *Рогозин Б.А.* Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Сиб. мат. журн. – 1969. – **10**, № 6. – С. 1334–1363.

[110] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – Москва: Наука, 1964. – 278 с.; изд. 2-е, 1986. – 320 с.
Skorokhod A.V. Random processes with independent increments. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1986. – 279 p.

[111] *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. – Київ: Либідь, 1990. – 168 с.

[112] *Спитцер Ф.* Принципы случайного блуждания. – Москва: Мир, 1969. – 472 с.

[113] *Спитцер Ф.* Комбинаторная лемма и ее применение к теории вероятностей // Математика: Период. сб. пер. – 1964. – **8**, № 4. – С. 135–150. (Перев. с англ. 1956 г.).

[114] *Супрун В.Н., Шуренков В.М.* Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с нулевым средним и бесконечной дисперсией // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 262–264.

[115] *Супрун В.Н., Шуренков В.М.* Предельное распределение положения полунепрерывного процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала // Проблемы теории вероятностных распределений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 96–106.

[116] *Супрун В.Н., Шуренков В.М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УСССР, 1975. – С.170–174.

[117] *Супрун В.Н.* Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53–61.

[118] *Супрун В.Н., Шуренков В.М.* Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с отрицательным беконечным средним // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 538–541.

[119] *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – Москва: Мир, 1971. – 264 с.

[120] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей: в 2-х т. – Москва: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.

[121] *Фихтенгольц М.Г.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 5-и т. – Москва: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

[122] *Фохт А.И.* О распределении величины первого перескока для обобщенного пуассоновского процесса // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – **19**, № 1. – С. 159–163.

[123] *Халмош П.* Теория меры. – Москва: ИЛ, 1953.

[124] *Штатланд Э.С.* О распределении максимума процесса с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1965. – **10**, № 3. – С. 531–535.

[125] *Штатланд Э.С.* Распределение времени достижения максимума для процессов с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – 1966. – **11**, № 4. – С. 720–726.

[126] *Шуренков В.М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов // Вероятностные методы бесконечномерного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 133–168.

[127] *Шуренков В.М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. 1 // Матем. сб. – 1980. – **112**, № 1. – С. 115–132.

[128] *Шуренков В.М.* Случайные блуждания на полуоси // Теория вероят. и ее примен. – 1981. – **26**, № 1. – С. 45–58; № 3. – С. 484–479.

[129] *Asmussen S.* Approximations for the probability of ruin within finite time // Scand. Act. J. – **1984**. – P. 31–37; ibid. – **1985**. –P. 57.

[130] *Asmussen S.* Ruin probability. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.

[131] *Baxter G., Donsker M.D.* On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – **85**, № 1. – P. 73–87.

[132] *Baxter G.* An analytic approach to finite fluctuation problems in probability // J. Anal. Math. – 1961. – **9**, № 1. – P. 31–70.

[133] *Berman S.M.* An asymptotic formula for the distribution of the maximum of a Gaussian process with stationary increments // J. Appl. Probab. – 1985. – **22**, № 3. – P. 454–460.

[134] *Berman S.M.* The supremum of a process with stationary and symmentic increments // Stochast. Process. and Appl. – 1986. – **23**, № 2. – P. 281–290.

[135] *Bingham N.H.* Limit theorems for occupation-times of Markov process // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw Geb. – 1971. – **17**, № 1. – P. 1–22.

[136] *Bingham N.H.* Fluctuation theory in continuous time // Adv. Appl. Probab. – 1975. – **7**. – P. 705–766.

[137] *Bingham N.H.* Maxima of sums of random variables and supreme of stable process // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw Geb. – 1973. – **26**, № 4. – P. 273–296.

[138] *Bingham N.H.* Limit theorems in fluctuation theory // Adv. Appl. Probab. – 1973. – **5**. – P. 554–569.

[139] *Blumenthal R.M., Getoor R.K., Ray D.* On the distribution of the first hits for symmetric stable process // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **99**, № 3. – P. 540–554.

[140] *Blumenthal R.M., Getoor R.K.* Local times for Markov process // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw Geb. – 1964. – **3**, № 1. – P. 50–74.

[141] *Bühlmann H.* Mathematical methods in risk theory. – Berlin: Springer Verlag, 1970. – 196 p.

[142] *Cohen T.W.* On the tail of the stationary waiting-time distribution and limit theorems for the $M/G/I$ queue // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1969. – **8**, № 3. – P. 255–263.

[143] *Cramer H.* Collective risk theory // Jubilee Volume of Försakringsaktiebolaget. Scandia. – Stockholm, 1955. – P. 1–92.

[144] *Cramer H.* On some questions connected with mathematical risk theory // Univ. Calif. Publis. Stat. – 1954. – **2**, № 5. – P. 99–125.

[145] *Daley D.T.* Single-server queuing processes with uniformly limited queuing time // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – **4**, № 4. – P. 489–505.

[146] *De Vylder F.E.* Advanced risk theory. – Editions de l'Iniversite de Bruxells. – 1996. – 970 p.

[147] *De Vylder F.E., Goovaerts M.J.* Explicit finite-time and infinite-time ruin probabilities in the continiuous time// Insurance: Mathem. and Economics. – 1999. – **24**. – P. 155–172.

[148] *Delbrouck L.E.N.* A set of Wiener–Hopf integral equations with common solution in fluctuation theory // J. Math. and Appl. – 1973. – **44**, № 3. – P. 100–112.

[149] *Dickson D.C.M.* On the distribution of the surplus prior to ruin // Insurance: Mathem. and Economics. – 1992, **11**, № 3. – P. 191–207.

[150] *Dickson D.C.M., Dos Reis A.D.E.* On the distribution of the duratoin of negative surplus // Scand. Actuar. J. – **1996**. – P. 148–164.

[151] *Dickson D.C.M., Dos Reis A.D.E.* The effect of interest on negative surplus // Insurance: Mathem. and Economics. – 1997, **12**. – P. 23–38.

[152] *Dickson D.C.M., Drekic S.* The joint distribution of the surplus prior to ruin and the deficit at ruin in some Sparre Andersen models // Insurance: Mathem. and Economics. – 2004, **34**. – P. 97–107.

[153] *Dickson D.C.M., Hipp Ch.* Ruin probabilities for Erlang(2) risk process // Insurance: Math. and Econom. – 1998, **22**. – P. 251–262.

[154] *Dickson D.C.M., Waters H.R.* The probability and severity of ruin in finite and infinite time // Astin Bulletin. – 1992. – **22**. – P. 177–190.

[155] *Dinges N.* Eine kombinatorisue riberlegung und enre masstheoretische Erweitcrung // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw Geb. – 1963. – **1**, № 2. – P. 278–287.

[156] *Doney R.A.* On Wiener–Hopf factorisation and the distribution of the extreme for certain stable processes // An. Probab. – 1987. – **15**, № 4. – P. 1352–1362.

[157] *Dos Reis A.D.E.* How long is the surplus below zero? // Insurance: Mathem. and Economics. – 1993. – **12**, № 1. – P. 23–38.

[158] *Dufrence F., Gerber H.U.* The surplus immediatly before and at ruin // Insurance: Mathem. and Economics. – 1988. – **7**. – P. 193–199.

[159] *Emery D.J.* Limiting beheviour of the distribution of the maxima of partial sums of certain random variables // J. Appl. Probab. – 1972. – **9**, № 3. – P. 572–579.

[160] *Emery D.J.* Exit problem for a spectrally positive processes // Adv. Appl. Probab. – 1973. – **5**. – P. 498–520.

[161] *Fristeadt B.* Sample function of stochastic processes with stationary independent increments // Adv. Appl. Probab. – 1973. – **3**. – P. 241–396.

[162] *Frostig E.* Upper bounds on the expected time to ruin and the expected recovery time // Adv. Appl. Probab. – 2004. – **36**. – P. 377–397.

[163] *Furrer H.J., Shmidli H.* Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion// Insurance: Mathem. and Economics. – 1994. – **15**. – P. 23–26.

[164] *Gani J., Prabhu N.* A storage model with continuous infinitely-divisible inputs // Proc. Cambrige Phil. – Soc. – 1963. – **5**, № 2. – P. 417–429.

[165] *Gani J., Pyke R.* The content of a dam as supremum of an infinitely divisible process // J. Math. and Mech. – 1960. – **9**, № 4. – P. 639–659.

[166] *Gerber H.U.* An introduction to mathematical risk theory. – S.S. Huebner Foundation, Wharton Scool, Philadelphia, 1979.

[167] *Gerber H.U., Shiu E.S.W.* The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediatly before ruin and the deficit at ruin// Insurance: Mathem. and Econom. – 1997. – **21**. – P. 129–137.

[168] *Gerber H.U., Shiu E.S.W.* On the time value of ruin// North Amer. Actuar. J. – 1998. – **2**. – P. 48–78.

[169] *Grandell J.* A class of approximations of ruin probabilities // Scand. Act. J. Suppl. – **1977**. – P. 37–52.

[170] *Grandell J.* Aspects of risk theory. – New York: Springer-Verlag. – 1993. – 175 p.

[171] *Grandell J.* Simple approximations of ruin probabilities // International Conference "Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin". – Riga Aviation Univ., 1999. – P. 47–51.

[172] *Grigelionis B.* Two-sided inequalities in a Markov environment // Lithuanian Math. J. – 1993. – **33**, № 1. – P. 23–32.

[173] *Greenwood P.* Wiener–Hopf methods, decomposition and factorisation identities for maxima and minima of homogeneous random process // Adv. Appl. Probab. – 1975. – **7**. – P. 767–785.

[174] *Gusak D.V.* On the continuous passage trough a fixed level of homogeneous process with independent increments on a Markov chain // Lecture Notes in Math. (Springer Verlag). – 1973. – **330**. – P. 95–103.

[175] *Gusak D.V.* Oscillating random walks in the storage theory and in the risk theory // In: "Evolutionary Stochastic Systems in Physics and Biology" TVP / VSP Moscow / Utrecht. – 1994. – P. 366–373.

[176] *Gusak D.V.* Ruin probability and the First exit time for a class of processes with independent increments // Proc. of II Ukrainian-Hungarian Conf. on Probability. – TBIMC/VSP, Kyiv/Utrecht. – 1994. – P. 329–340.

[177] *Gusak D.V.* Fundamental identities for boundary functionals of additive sequences // Exploring Stochastic Laws.– VSP, 1995. – P. 135–146.

[178] *Gusak D.V.* The ruin problems for nongomogeous semicontinuous integer-valued processes // Theory of Stoch. Processes. – 1999. – **5(21)**, № 3–4. – P. 72–83.

[179] *Gusak D.V.* The distribution of extrema for risk processes on the finite Markov chain // Theory of Stoch. Processes. – 2001. – **7(23)**, № 1-2. – P. 109–120.

[180] *Gusak D.V.* The connection of distributions of extreme for Levy process with its ladder points // Theory of Stoch. Processes. – 2004. – **10(26)**, № 3–4. – P. 35–42.

[181] *Gusak D.V.* Risk processes with stochastic premiums and distributions of their functionals // Theory of Stoch. Proc. – 2005. – **11(27)**, № 1–2. – P. 29–39.

[182] *Gusak D.V., Karnaukh E.V.* On the exit from a finite interval for the risk process with stochastic premiums // Theory of Stoch. Proc. – 2005. – **11 (27)**, № 3–4. – P. 71–81.

[183] *Gusak (Husak) D.V.* On some generalization of he Pollachek–Khinchine formula // Theory of Stoch. Processes. – 2010. – **16 (32)**, № 1. – C. 49–56.

[184] *Gusak D.V., Korolyuk V.S.* The asymptotic beheviour of distribution of maximal deviation for Poisson process // Selected transl. in Math. Statist. and Probab. – 1965. – P. 274–277.

[185] *Heyde C.C.* Some local limit results in fluctuation theory // J. Austral. Math. Soc. – 1967. – **7**, № 4. – P. 455–464.

[186] *Heyde C.C.* On the maximum of sums of random variables and the supremum functional for stable process // J. Austral. Math. Soc. – 1969. – **6**, № 2. – P. 419–429.

[187] *Heyde C.C.* On a fluctuation theorem for process with independent increments // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**, № 2. – P. 688–691.

[188] *Ito K., McKean H.P.* Brownian motion on a half-line // Illinois J. Math. – 1963. – **7**, № 2. – P. 181–231.

[189] *Kadankov V.F.* Exit from an interval by a difference of two renewal processes // Theory of Stoch. Proc. – 2005. – **11(27)**. – P. 92–96.

[190] *Kadankov V.F., Kadankova T.V.* On the distribution of the first exit time from an interval and the value of overjump trough borders for the process with independent increments and random walks // Random Oper. Stoch. Equ. (ROSE). – 2005. – **13**, № 3. – P. 219–244.

[191] *Kartashov N.V.* On ruin probabilities for risk processes with bounded reserves // Theory Probab. and Math. Stat. – 2000. – № 60. – P. 60–65.

[192] *Keilson J.H.B.* The first passage time density for time homogeneous skip-free walks on the continuum // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**, № 3. – P. 1001–1011.

[193] *Kemperman J.* The passage problem for a stationary Markov chain. – Chicago: Univ. of Chicago press, 1961. – 127 p.

[194] *Kemperman J.H.B.* A Wiener–Hopf type method for a general random walk with two-sided boundary // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**, № 4. – P. 1168–1193.

[195] *Kendall D.G.* Some problems in the theory of queues // J. Roy. Statist. Soc. B. – 1951. – **13**, № 2. – P. 151–185.

[196] *Kingman J.E.* On continuous time models in the theory of dams // J. Austral. Math. Soc. – 1963. – **3**, № 4. – P. 480–487.

[197] *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. – Paris. – 1937. – 328 p.; 2nd ed. – 1954. – 384 p.

[198] *Lévy P.* Processus stochastiques et mouvemeent brownien. – Paris, 1948. – 438 p.; 2nd ed. – 1965. – 438 p.

[199] *Li S., Dickson D.C.M.* The maximum surplus before ruin in an Erlang(n) risk process and related problems// InsInsurance: Mathem. and Economics. – 2006. – **38**. – P. 529–539.

[200] *Lindley D.V.* The theory of queues with a single server // Proc. Cambrige Phil. Soc. – 1952. – **48**, № 2. – P. 277–289.

[201] *Lindvall J.* Weak convergence of Probability measures and random functions in the functionn-space $D[0,\infty)$ // J. Appl. Probab. – 1963. – **10**, № 1. – P. 109–121.

[202] *Mordecki E.* Ruin probabilities for Levy process with mixed – exponential negative jumps // Theory Prob. Appl. – 2003. – **48**, № 1. – P. 170 176.

[203] *Pegg P.A.* Some ration identities for a class of skip-free random walk // Theory Prob. Appl. – 1973. – **10**, № 2. – P. 213–217.

[204] *Port S.C.* An elementary approach to fluctuation theory // J. Math. Anal. and Appl. – 1963. – **6**, № 1. – P. 109–151.

[205] *Prabhu N., Rubinovich M.* On a regenerative phenomenon arising in a storage model // J. Roy. Statist. Soc. B. – 1971. – **32**, № 3. – P. 354–361.

[206] *Prabhu N., Rubinovich M.* Further results for ladder-process in continuous-time // Stochast. Processes and Appl. – 1973. – **1**, № 1. – P. 151–168.

[207] *Prabhu N.* Wiener–Hopf factorisation for convolution semigroups // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw Geb. – 1972. – **23**, № 2. – P. 103–113.

[208] *Prabhu N.* Further results on Wiener–Hopf factorisation // Adv. Appl. Probab. – 1973. – **5**, № 1. – P. 19–20.

[209] *Pyke R.* The supremum and infinum of the Poison process // Ann. Math. Statist. – 1959. – **30**, № 2. – P. 568–576.

[210] *Rolsky T., Shmidly H., Shmidt V., Teugels J.* Stochastic process for insurance and finance. – New York: John Wiley, 1999. – 654 p.

[211] *Schmidli H.* Perturbed risk processes: a review // Theory of Stoch. Processes. – 1999. – **5(21)**, № 1–2. – P. 145–165.

[212] *Schmidli H.* On the distribution of the surplus of the prior and at the ruin // Astin Bulletin. – 1999. –**9a**. – P. 227–244.

[213] *Schmidt K.D.* Lectures on risk theory. – Stuttgart: Teubner-Verlang, 1996.

[214] *Silvestrov D.S.* Limit theorems for random stopped stochastic processes. – London: Springer, 2004.

[215] *Spitzer F.A.* A combinatorial lemma and its application to probability theory // Trans. Amer. Soc. – 1956. – **82**. – P. 323–329.

[216] *Spitzer F.* The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density // Duke Math. J. – 1957. – **24**, № 3. – P. 327–344.

[217] *Spitzer F.* A tauberuan theorem and its probability interpretation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **94**, № 1. – P. 150–169.

[218] *Takács L.* On the distribution of the supremum of stochastic processes with exchangeable increments // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **119**, № 2. – P. 367–379.

[219] *Takács L.* On the distribution of the supremum of stochastic processes // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1970. – **6**, № 3. – P. 237–247.

[220] *Takács L.* On fluctuations of sums of random variables // Stud. probab. and ergodic theory. – New York, 1979. – P. 45–93.

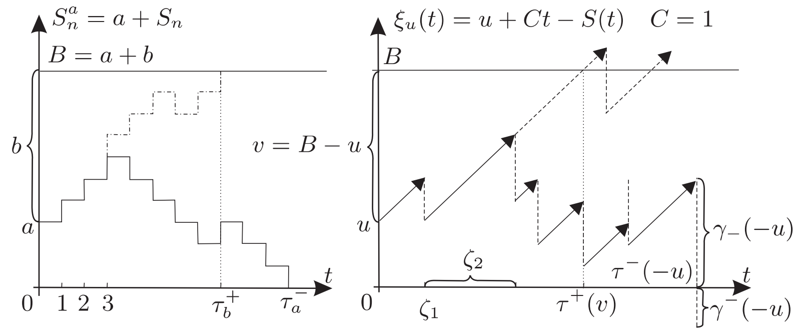
[221] *Tuckwell H.C.* On the first-exit time problem for temporally homogeneous Markov processes // J. Appl. Probab. – 1976. – **13**, № 1. – P. 39–48.

[222] *Veraverbeke N.* Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion // Insurance: Mathem. and Economics. – 1993. – **13**. – P. 57–62.

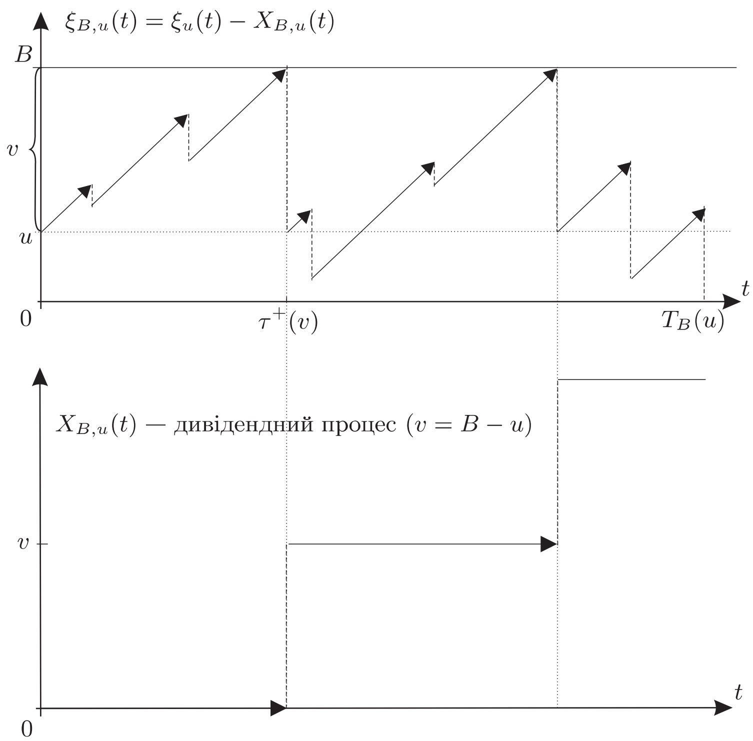
[223] *Willmot G.E., Dickson D.C.M.* // Insurance: Mathem. and Economics. – 2003. – **32**. — P. 403–411.

[224] *Winkel M.* Electronic foreing-exchange markets and passage events of independent subordinators // J. Appl. Prob. – 2005. – **42**. – P. 238–152.

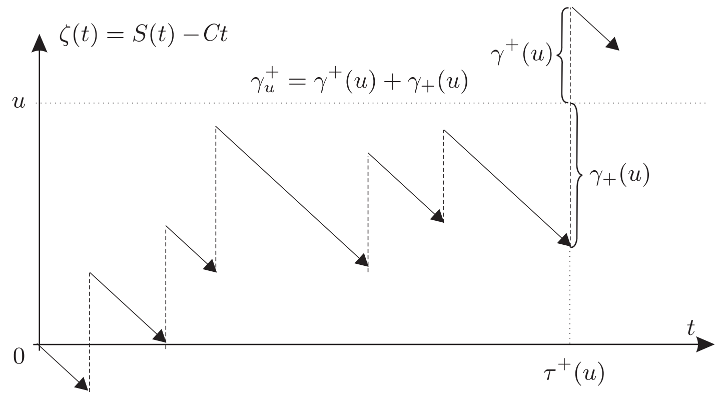
I. 1. Графіки до класичної задачі банкрутства та резервного процесу ризику.



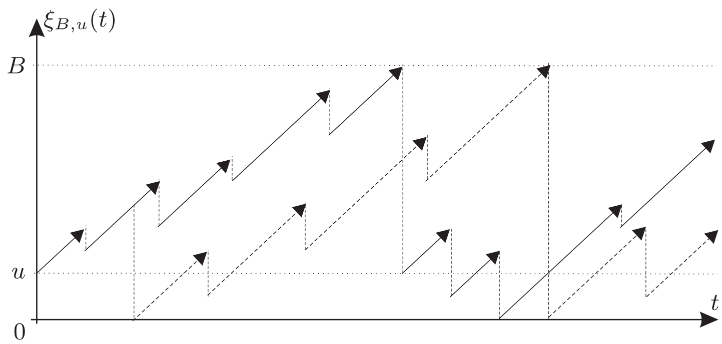
2. Процеси ризику з миттєвим відбиттям.

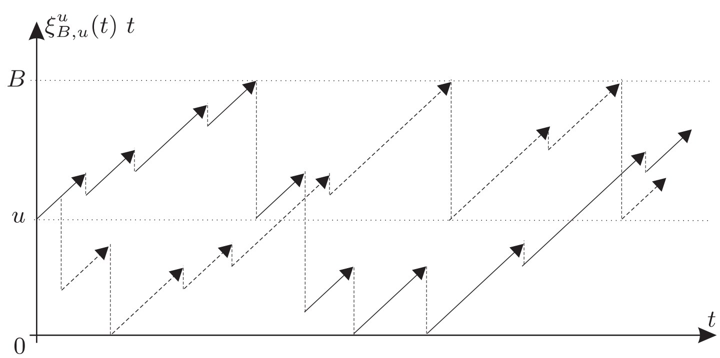


3. Перестрибкові функціонали надлишкового процесу ризику.

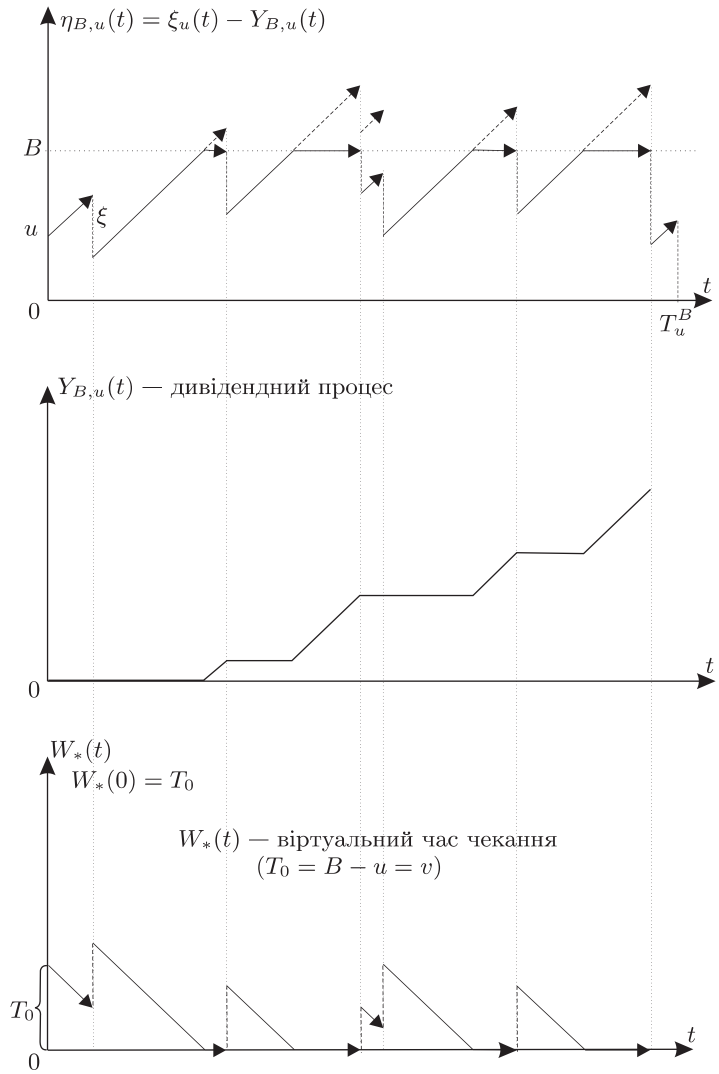


4. Процеси ризику з 2-стороннім відбиттям.



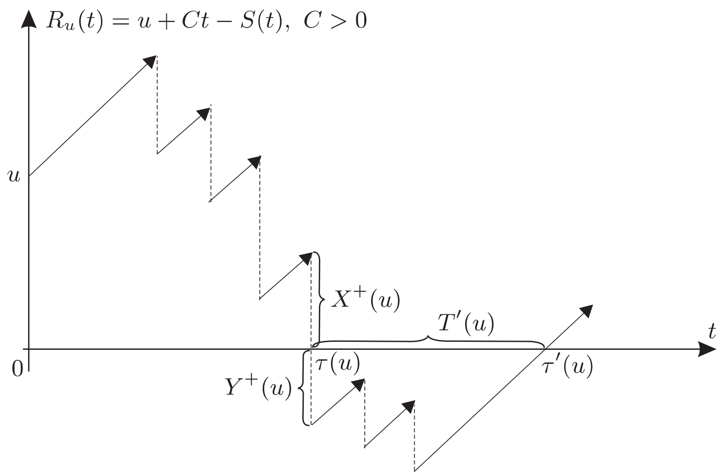


5. Процеси ризику з затримкою та відбиттям.

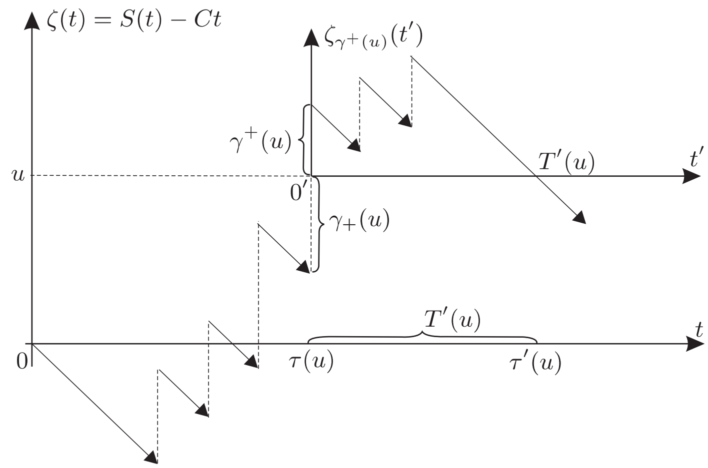


6. Графіки основних процесів ТМО.

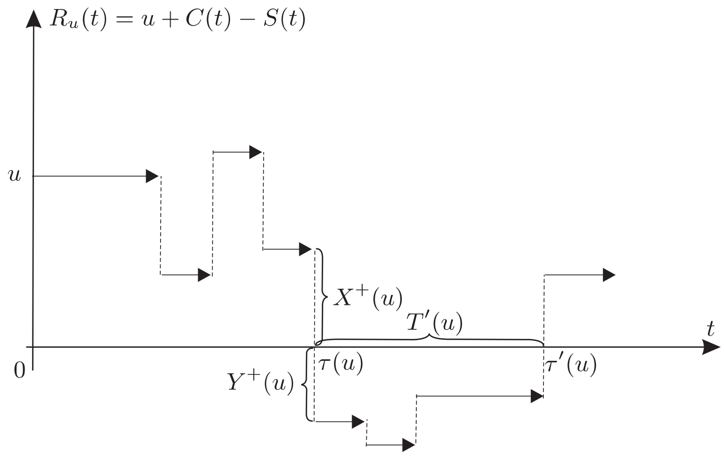
7. Поведінка $R_u(t)$ при $t > \tau^+(u)$.



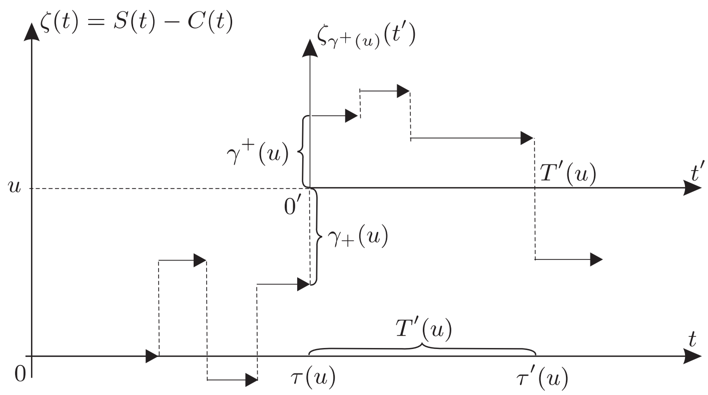
8. Поведінка $\zeta(t)$ при $t > \tau^+(u)$.



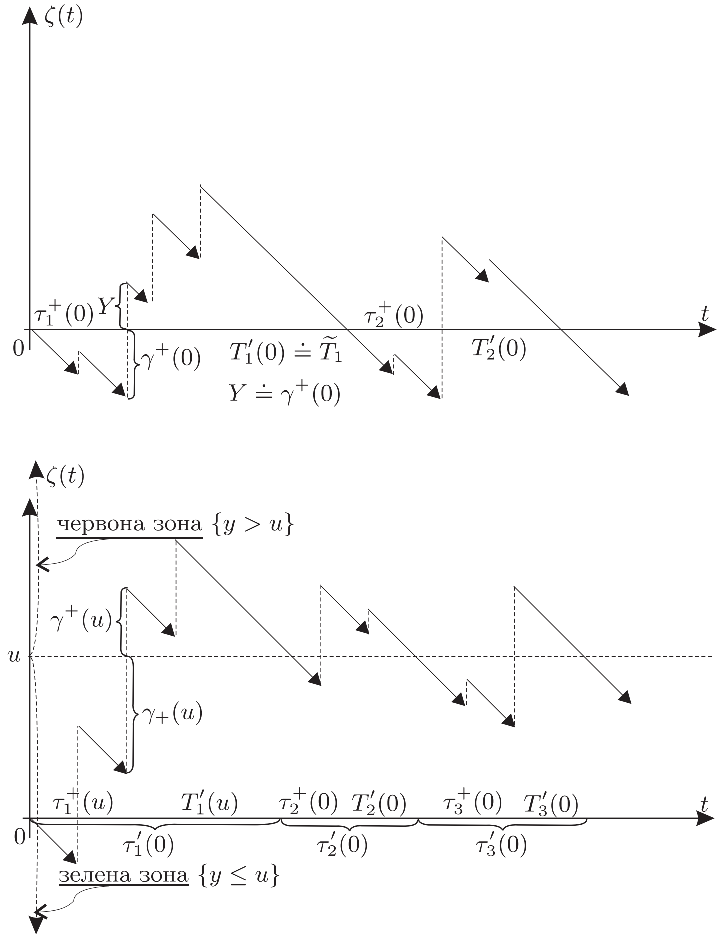
9. Поведінка резервного процесу ризику
з випадковими преміями при $t > \tau^{+}(u)$.



10. Поведінка надлишкового процесу вимог
з випадковими преміями при $t > \tau^{+}(u)$.



11. Перебування $\zeta(t)$ в ризикованій зоні $\{y > u\}$ та в зоні виживання $\{y \le u\}$.



II. Таблиця значень коренів рівняння Лундберга ($\ln \mathbf{E} e^{r\xi(1)} =: k(r) = s$) для процесів $\xi(t)$ зі значеннями в $\mathbf{R}^1$.

Процес, тип напівнеперервності	Значення коренів при $s>0$ та їх зв'язок з $p_\pm(s)$	Граничні значення при $s \to 0$		
		$m<0$	$m=0$	$m>0$
1) $\xi(t) = at + \sigma W(t)$, $m = \mathbf{E}\xi(1) = a$, $k(r) = ar + r^2\sigma^2/2$ неперервний зверху і знизу	$\rho_\mp(s) = \frac{\sqrt{2s\sigma^2+a^2}\pm a}{\sigma^2}$, $\rho_+(s)\rho_-(s) = 2s\sigma^{-2}$, $\sigma \ge 0$, a– довільне, $p_\pm(s) \equiv 0$, $s \ge 0$	$\rho_+ = 2\|m\|\sigma^{-2}$, $\rho'_-(0) = \|m\|^{-1}$	$\rho_\pm(s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma^{-1}$, $\mathbf{D}\xi(1) = \sigma^2$	$\rho'_+(0) = \|m\|^{-1}$, $\rho_- = 2m\sigma^{-2}$
2) $\xi(t)$ без додатних стрибків з $\operatorname{var}\xi(t) < \infty$, напівнеперервний зверху	$\rho_+(s) = s(ap_-(s))^{-1}$, $a>0$, $p_-(s)>0$, $p_+(s) \equiv 0$, $s \ge 0$	$\rho_+ = \|m\|a^{-1}$, $p_+ = 0$, $p'_-(0) = \|m\|^{-1}$	$\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1)$, $\rho_+(s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1{}^{-1}$	$\rho'_+(0) = m^{-1}$, $p_- = ma^{-1}$, $q_- = \lambda\mu_1 a^{-1}$
3) $\xi(t)$ без від'ємних стрибків з $\operatorname{var}\xi(t) < \infty$, напівнеперервний знизу	$\rho_-(s) = s(\|a\|p_+(s))^{-1}$, $a<0$, $p_+(s)>0$, $p_-(s) \equiv 0$, $s \ge 0$	$\rho'_-(0) = \|m\|^{-1}$, $p_+ = ma^{-1}$, $q_+ = \lambda\mu_1\|a\|^{-1}$	$\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1)$, $\rho_-(s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1{}^{-1}$	$\rho_- = m\|a\|^{-1}$, $p_- = 0$, $p'_+(0) = m^{-1}$
4) $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху ($\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi}\|\xi>0] = c(c-i\alpha)^{-1}$)	$\rho_+(s) = cp_+(s)$, $c>0$ при відсутності зсуву $p_+(s)p_-(s) = s(s+\lambda)^{-1}$	$\rho_+ = cp_+$, $p'_-(0) = (\lambda p_+)^{-1}$	$\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1)$, $\rho_+(s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1{}^{-1}$	$\rho'_+(0) = m^{-1}$, $p_- = cm\lambda^{-1}$, $q_- = 1 - p_-$
5) $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу ($\mathbf{E}[e^{i\alpha\xi}\|\xi>0] = b(b+i\alpha)^{-1}$)	$\rho_-(s) = bp_-(s)$, $b>0$, при відсутності зсуву $p_+(s)p_-(s) = s(s+\lambda)^{-1}$	$\rho'_-(0) = \|m\|^{-1}$, $p_+ = b\|m\|\lambda^{-1}$, $q_+ = p(1+b\mu'_1)$	$\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi(1)$, $\rho_-(s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1{}^{-1}$	$\rho_-(0) = bp_-$, $p'_+(0) = (\lambda p_-)^{-1}$

III. Таблиця значень коренів рівняння Лундберга ($\ln \mathbf{E} z^{\xi(1)} =: k(z) = s$) для цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$

Процес, тип напівнеперервності	Значення коренів при $s > 0$ та їх зв'язок з $p_\pm(s)$	Граничні значення при $s \to 0$		
		$m = \mathbf{E}\xi(1) < 0$	$m = 0$	$m > 0$
1) $\xi(t)$ — напівнеперервний зверху і знизу з кумулянтою $k(z) = \ln \mathbf{E} z^{\xi(1)} =$ $= \lambda(pz + qz^{-1} - 1)$, $\sigma_1^2 = 2\lambda q$, $p + q = 1$	$z_{1,2}(s) = \frac{s+\lambda\pm\sqrt{D_s}}{2\lambda p}$, $m = \lambda(p - q)$, $z_1(s) = \hat{z}_s > 1$, $z_2(s) = z_s < 1$, $D_s = (\lambda + s)^2 - 4\lambda^2 pq$, $p_\pm(s) = 1 - z_{1,2}^{\mp 1}(s)$	$\hat{z}_0 = q_+^{-1} =$ $(1+\sqrt{1-4pq})(2p)^{-1}$, $z_s'(0) = m^{-1}$, $p_+ = 1 - \widehat{z}_0^{-1}$	$\mathbf{D}\xi(1) = \sigma_1^2$, $(\hat{z}_s - 1)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1^{-1}$, $(1 - z_s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1^{-1}$	$\hat{z}_s'(0) = m^{-1}$, $z_0 = q_- =$ $(1-\sqrt{1-4pq})(2p)^{-1}$, $p_- = 1 - z_0$
2) $\xi(t)$ — майже напівнеперервний зверху $\mathbf{E}[z^\xi \mid \xi > 0] =$ $= (1 - c)z(1 - cz)^{-1}$	$\hat{z}_s = (q_+(s) + cp_+(s))^{-1}$, $\hat{z}_s \in (1, c^{-1})$, $0 < c < 1$, $p_+(s) = (1-\widehat{z}_s^{-1})(1-c)^{-1}$	$\hat{z}_0 =$ $(q_+ + cp_+)^{-1} > 1$, $p_+ = (1-\widehat{z}_0^{-1})(1-c)^{-1}$	$\mathbf{D}\xi(1) = \sigma_1^2$, $(\hat{z}_s - 1)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1^{-1}$	$\hat{z}_s'(0) = m^{-1}$, $q_- = \frac{(1-c)\mu_- + cq}{p+cq}$, $q = F(0)$, $p_- = 1 - q_-$
3) $\xi(t)$ — напівнеперервний зверху	$\hat{z}_s = q_+(s)^{-1} > 1$, $c = 0$, $p_+(s) = 1 - \widehat{z}_s^{-1}$	$\hat{z}_0 = q_+^{-1} > 1$, $p_+ = 1 - q_+$	$-''-$	$pq_- = \mu_- = \sum\limits_{k\le 0} F(k)$
4) $\xi(t)$ — майже напівнеперервний знизу $\mathbf{E}[z^\xi \mid \xi < 0] =$ $= 1 - b(z - b)^{-1}$	$z_s = q_-(s) + bp_-(s)$, $z_s \in (b, 1)$, $0 < b < 1$, $p_-(s) = (1-z_s)(1-b)^{-1}$	$z_s'(0) = m^{-1}$, $q_+ = \frac{(1-b)\mu_+ + bp}{q+bp}$, $p = \overline{F}(0)$, $p_+ = 1 - q_+$	$\mathbf{D}\xi(1) = \sigma_1^2$, $(1 - z_s)s^{-1/2} \underset{s\to 0}{\to} \sqrt{2}\sigma_1^{-1}$	$z_0 = q_- + bp_-$, $p_- = (1-z_0)(1-b)^{-1}$
5) $\xi(t)$ — напівнеперервний знизу	$z_s = q_-(s) < 1$, $b = 0$, $p_-(s) = 1 - z_s$	$qq_+ = \mu_+ =$ $= \sum\limits_{k\ge 0} \overline{F}(k)$	$-''-$	$z_0 = q_- < 1$, $p_- = 1 - q_-$

IV. Формули для $\Psi(u) = 1 - \phi(u) = \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\}$

1. Обернення формули Поллячека–Хінчина (див. (5.16) та (6.60))
а) для напівнеперервного знизу процесу вимог $\zeta(t)$

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n>0} q_+^n \mu^{-n} \overline{\overline{F}}(u)^{*n}, \quad \overline{\overline{F}}(u) = \int_u^\infty \overline{F}(x)dx, \quad u > 0; \quad (1)$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n>0} \overline{F_*}(u)^{*n}, \quad \overline{F_*}(u) = \overline{F}(u) + b\overline{\overline{F}}(u), \quad u > 0. \quad (2)$$

2. Формула, що випливає з мартингальності $X(t) = \mathbf{E}e^{-R_+\zeta(t)}$ $(k(R_+) = 0)$ (див. (5.27))

$$\Psi(u) = e^{-R_+u} g_+(u, R_+), \quad g_+(u, z) = \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(u)}, \zeta^+ > u\big]; \quad (3)$$

а) для напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$

$$g_+(u, z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-zx} \overline{F}(u + x)dx + \\ + \frac{\lambda}{|m|} \int_{+0}^u \int_0^\infty e^{-zx} \overline{F}(u - y + x)dxd\phi(y); \quad (4)$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$

$$g_+(u, z) = \int_0^\infty e^{-zx} F_*'(u + x) + \\ + \frac{\lambda}{b|m|} \int_{+0}^u \int_0^\infty e^{-yz} F_*'(u + -y + x)dxd\phi(y), \quad (5)$$

$$F_*'(x) = F'(x) + b\overline{F}(x), \quad \overline{F}(x) = p\overline{F}_1(x), \\ F_1(x) = \mathbf{P}\{\xi_1' < x\}, \quad x > 0.$$

3. Формули для $\Psi(u)$ в термінах “хвостів” 2-го порядку $\overline{\overline{F}}(x)$:
а) (див. формулу після (6.19))

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|} \int_0^u \overline{\overline{F}}(u - z)\phi'(z)dz, \quad (6)$$

$$\Psi(0) = q_+ = \frac{\lambda\mu_1}{c};$$

б) (див. першу формулу в (6.57) з $\overline{F}_*(x) = \overline{F}(x) + b\overline{\overline{F}}(x)$, $x > 0$)

$$\Psi(u) = \overline{F}_*(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{F}_*(u-y)\phi'(y)dy, \tag{7}$$

$$\Psi(0) = q_+ = p(1 + b\mu_2'), \quad \mu_k' = \mathbf{E}(\xi_1')^k, \quad k = 1, 2.$$

4. Асимптотична формула (див. (5.29) і значення $\Psi(0)$ в (5), (6))

$$\Psi(u) = e^{-R_+ u}(\Psi(0) + o(1)) \quad (u \to \infty). \tag{8}$$

а) $\Psi(0) = \dfrac{\lambda\mu_1}{c}$, б) $\Psi(0) = \overline{F}_*(0) = p(1 + b\mu_1')$.

5. Узагальнення формули Полячека–Хінчина

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}_0(z)} : \ \widetilde{\varphi}_0(z) := \mathbf{E}\big[e^{-z\gamma^+(0)}\,|\,\zeta^+ > 0\big],$$

а) $\widetilde{\varphi}_0(z) = \mu^{-1}\displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx;$

б) $\widetilde{\varphi}_0(z) = q_+^{-1}\displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}dF_*(x) \quad (F_*(x)$ див. (2)).

V. Десять наближень $\Psi_k(u) \sim \Psi(u)$ $(u \to \infty)$ в термінах $\mu_n = \int_0^\infty x^n dF(x)$, $n = \overline{1,3}$, $m = \mathbf{E}\zeta(1)$, $\rho = \frac{c-\lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} > 0$

0. Наближення $\Psi_0(u)$ із прикладу 3.13 ($p_+^0 = \rho_+^0 = \frac{2\mu_1|m|}{\mu_2}$)

$$\Psi_0(u) = q_+^0 e^{-u\rho_+^0} = q_+^0 e^{-\frac{2\mu_1|m|}{\mu_2}u},$$

$$q_+^0 = \lambda_0\mu_1 = 1 - p_+^0, \quad \lambda_0 = \frac{2\mu_1^2}{\mu_2}.$$

1. Наближення Реньї (подібне до $\Psi_0(u)$) $\Psi_1(u) = \Psi_R(u)$

$$\Psi_R(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2(1+\rho)}} = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|}{\mu_2}u}, \quad q_+ = \Psi(0).$$

2. Наближення Крамера–Ф. Лундберга $\Psi_2(u) = \Psi_{\mathrm{CL}}(u)$ $(R_+ > 0)$

$$\Psi_{\mathrm{CL}}(u) = \frac{|m|}{k'(R_+)}e^{-R_+ u}, \ R_+ \text{ — корінь рівняння } (\mathcal{L}_0)\colon k(R_+) = 0.$$

3. Наближення Де Вільдера $\Psi_3(u) = \Psi_{DV}(u)$

$$\Psi_{\mathrm{DV}}(u) = \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\rho} \exp\left\{-\frac{6\mu_1\mu_2\rho u}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\rho}\right\}.$$

4. Наближення Беекмана–Боверса $\Psi_4(u) = \Psi_{\mathrm{BB}}(u)$ (з $\Gamma(x)$ і $c = \frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}$)

$$\Psi_{\mathrm{BB}}(u) = \frac{1}{1+\rho}\int_{\beta u}^{\infty} \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-x} dx,$$

$$\beta = \frac{2\mu_1\rho}{\mu_2 + (c-\mu_2)\rho}, \quad \gamma = \frac{1+\rho}{1+(c-1)\rho}.$$

5. Експоненційне наближення

$$\Psi_5(u) = \Psi_{\mathrm{E}}(u) = \exp\left\{-1 - \frac{2\rho\mu_1 u - \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \frac{4}{3}\rho\mu_1\mu_3}}\right\}.$$

6. Дифузійне наближення $\Psi_6(u) = \Psi_{\mathrm{D}}(u)$

$$\Psi_{\mathrm{D}}(u) = e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2}} \quad (\Psi_{\mathrm{D}}(0) = 1 \text{ не дає нічого для } \Psi(0) = q_+).$$

7. Наближення Ове Лундберга (сина Ф. Лундерга) $\Psi_7(u) = \Psi_{\mathrm{OL}}(u)$

$$\Psi_{\mathrm{OL}}(u) = \Psi_{\mathrm{D}}(u)\left[1 + \left(\rho u - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{4\rho\mu_1^2\mu_3}{3\mu_2^3}\right],$$

$$\Psi_{\mathrm{OL}}(0) = 1 - \frac{4\rho\mu_1^2\mu_3}{3\mu_2^3} < 1.$$

8. Наближення (подібне до $\Psi_{\mathrm{CL}}(u)$)

$$\Psi_8(u) = \Psi_*(u) = \Psi(0)e^{-R_+ u}$$

(R_+ — корінь рівняння Лундберга ($\mathcal{L}_0$), див. 2.).

9. Наближення для випадку "важких" $\overline{F}(x)$ $\Psi_9(u) = \Psi_{**}(u)$

$$\Psi_{**}(u) = (\rho\mu_1)^{-1}\overline{\overline{F}}(u), \quad \text{(див. (4.6), [130, с. 17])}.$$

Зміст

Наукове видання

Дмитро Васильович Гусак

ПРОЦЕСИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ В ТЕОРІЇ РИЗИКУ

Редактор *В.Е. Гонтковська*

Комп'ютерна верстка
та підготовка оригінал-макет *Н.Ф. Рябова*

Підписано до друку 10.05.2011. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 31,0. Умов. друк. арк. 29,7. Зам. № 85. Тираж 150 пр.

Інститут математики НАН України
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3