НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О.А. Бойчук, С.М. Чуйко

Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань

ПРОЄКТ
«НАУКОВА КНИГА»

Київ
Наукова думка
2023

https://doi.org/10.37863/6581477912-64
УДК 517.91, 517.927.4

Основою монографії є розвинення найефективніших методів розв'язування крайових задач теорії нелінійних коливань. Працю створено на базі курсу обчислювальної математики та спецкурсів, прочитаних авторами на фізико-математичному факультеті Слов'янського державного педагогічного університету та механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для студентів, аспірантів і викладачів фізико-математичних спеціальностей ВНЗ.

Рецензенти:

професор кафедри моделювання складних систем
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
доктор фізико-математичних наук *Д.Я. Хусаінов*,

провідний науковий співробітник ІМ НАН України,
доктор фізико-математичних наук *О.О. Покутний*,

директор Інституту прикладної математики і механіки НАН України,
член-кореспондент НАН України *І.І. Скрипнік*

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту математики НАН України
(протокол № 12 від 31.09.2021 р.)

Видання здійснено за кошти Цільової комплексної програми НАН України «Наукові основи функціонування та забезпечення умов розвитку науково-видавничого комплексу НАН України»

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *О.А. Микитенко*

© О.А. Бойчук, С.М. Чуйко, 2023
© НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України», дизайн, 2023

ISBN 978-966-00-1853-2

Зміст

Передмова **5**

Вступ. Необхідні відомості з лінійної алгебри **6**
Псевдообернена матриця 6
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь 7

1 Неавтономні крайові задачі **8**
1.1 Постановка задачі 8
1.2 Некритичний випадок 8
1.2.1 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом найменших квадратів 14
1.2.2 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом Ньютона—Канторовича 17
1.2.3 Побудова ітераційної процедури методом найменших квадратів 21
1.3 Критичний випадок першого порядку 34
1.3.1 Рівняння для породжувальних сталих 35
1.3.2 Достатня умова існування розв'язку 37
1.3.3 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом Ньютона—Канторовича 47
1.3.4 Побудова наближених розв'язків крайової задачі методом найменших квадратів 54
1.4 Критичний випадок другого порядку 73
1.4.1 Періодична задача для рівняння Льєнара 77
1.5 Кратні корені рівняння для породжувальних сталих 86
1.5.1 Рівняння для породжувальних сталих 87
1.5.2 Практичний спосіб побудови розв'язку 87
1.6 Неавтономні крайові задачі в особливому критичному випадку 97
1.6.1 Постановка задачі 97
1.6.2 Необхідні умови існування розв'язку 97
1.6.3 Достатня умова існування розв'язку 98
1.6.4 Періодична задача для рівняння руху маятника, точка підвісу якого здійснює гармонічні коливання . . . 99

2 Автономні крайові задачі **104**
2.1 Постановка задачі 104
2.2 Рівняння для породжувальних сталих 106
2.3 Критичний випадок першого порядку 108
2.4 Автономні періодичні задачі 122

2.4.1 Некритична періодична задача 123
2.4.2 Періодична крайова задача в критичному випадку 123
2.4.3 Періодична задача для рівняння ван дер Поля 133
2.4.4 Доведення збіжності ітераційної схеми 137
2.5 Про наближене розв'язування автономних крайових задач 144
2.5.1 Ітераційна схема 150
2.5.2 Періодична крайова задача в критичному випадку 171
2.5.3 Періодична задача для рівняння ван дер Поля 174
2.5.4 Періодична крайова задача для рівняння Льєнара 180
2.5.5 Ітераційна схема для рівняння ван дер Поля 199

Список позначень **222**

Предметний покажчик **223**

Іменний покажчик **223**

Список літератури **224**

Передмова

Розвинено найефективніші методи розв'язування крайових задач теорії нелінійних коливань, зокрема, у випадку параметричного резонансу, при цьому значна увага приділяється використанню найбільш ефективних методів розв'язування нелінійних рівнянь: методу Ньютона та методу найменших квадратів, яким притаманна пришвидшена збіжність [27, 113].

За тридцять років, які минули після опублікування статей [20, 25] і монографій [1, 17, 18], досліджено нові класи крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, і з'явилася необхідність уточнення традиційної [17, 38] класифікації нелінійних крайових задач. Окрім зміни деяких акцентів у відомих результатах, отриманих академіком НАН України А.М. Самойленком [71, 72] та членом-кореспондентом НАН України О.А. Бойчуком, а також у класичних результатах теорії нелінійних коливань [4, 8, 9, 10, 11, 40, 45, 46, 51, 59, 61, 63, 69, 70], до праці війшли нові ітераційні схеми з пришвидшеною збіжністю, що побудовані з використанням методу найменших квадратів [83], методу Ньютона [33], Ньютона—Канторовича [43] та різних модифікацій методу Ньютона—Канторовича [43, 87, 88, 131].

Як приклади наведених методів розв'язування нелінійних крайових задач, розглянуто періодичні та двоточкові задачі для рівнянь ван дер Поля, Дюффінга, Льєнара, Лотка-Вольтерра та Ейрі. Монографію створено на базі курсу теорії нелінійних коливань та курсу обчислювальної математики, а також серії спецкурсів, які викладали автори протягом тридцяти років на фізико-математичному факультеті Слов'янського державного педагогічного університету (на сьогодні Донбаського державного педагогічного університету) та на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка [26]. У розширеному вигляді матеріал видано у Словаччині [114].

Автори висловлюють подяку академіку НАН України А.М. Самойленку, членам-кореспондентам НАН України І.І. Скрипніку, В.Я. Гутлянському та О.Л. Зуєву за сприяння та постійну увагу.

Вступ. Необхідні відомості з лінійної алгебри

Ефективним апаратом, який дає змогу розв'язувати системи лінійних алгебричних рівнянь, є псевдообернення матриць за Муром—Пенроузом [2, 37].

Псевдообернена матриця

Матрицю Q^+ розміром $(n \times m)$ називають псевдооберненою для $(m \times n)$-матриці Q, якщо виконуються рівності

$$QQ^+Q = Q, \quad Q^+QQ^+ = Q^+, \quad (QQ^+)^* = QQ^+, \quad (Q^+Q)^* = Q^+Q,$$

які називають рівняннями Мура—Пенроуза. Припустимо, що ранг матриці Q дорівнює n_1 : $\operatorname{rank} Q = n_1$. Скелетним розкладом матриці Q називають добуток [37]

$$Q = R \cdot S, \tag{1}$$

де $(m \times n_1)$-матриця R та $(n_1 \times n)$-матриця S є матрицями повного рангу:

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} S = n_1.$$

Для знаходження псевдооберненої матриці застосовною є формула [37]

$$Q^+ = S^+R^+ = S^*(SS^*)^{-1}(R^*R)^{-1}R^*,$$

де $Q = RS$ — скелетний розклад матриці Q. Псевдообернена матриця існує для будь-якої матриці, крім того вона єдина [35, 37, 143]. Для того щоб отримати розклад (1), достатньо як стовпці матриці R взяти будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпці матриці Q або будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпці, через які лінійно зображаються стовпці матриці Q. Тоді довільний j-й стовпець матриці Q буде лінійною комбінацією стовпців матриці R. Доведення наведених у цьому і наступному пунктах тверджень подано у [2, 35, 37, 54, 143]. Для обчислення псевдообернених матриць на комп'ютері зручні пакети Mathematica [41] і Matlab [68]. Ортопроєктором P_Q для $(m \times n)$-матриці Q називають $(n \times n)$-матрицю, яка задовольняє такі умови:

$$QP_Q = 0, \quad P_Q^* = P_Q, \quad P_Q^2 = P_Q.$$

Аналогічно визначають ортопроєктор P_{Q^*}:

$$Q^*P_{Q^*} = 0, \quad P_{Q^*}^* = P_{Q^*}, \quad P_{Q^*}^2 = P_{Q^*}.$$

Ортопроєктори P_Q та P_{Q^*} можна обчислити за формулами

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+, \quad P_Q = I_n - Q^+Q.$$

Нуль-простором $\mathbb{N}(Q)$ $(m \times n)$-матриці Q називають множину векторів $c \in \mathbb{R}^n$, для яких виконується рівність $Q\,c = 0$. Аналогічним є означення нуль-простору $\mathbb{N}(Q^*)$:

$$\mathbb{N}(Q^*) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m : \quad Q^* c = 0 \right\}.$$

Для будь-якого вектора $c \in \mathbb{R}^n$ вектор $P_Q c$ належить $\mathbb{N}(Q)$; таким чином, ортопроєктор P_Q проєктує евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ у нуль-простір матриці Q: $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$. Аналогічно ортопроєктор P_{Q^*} проєктує будь-який вектор $c \in \mathbb{R}^m$ у нуль-простір матриці Q^*.

Системи лінійних алгебричних рівнянь

Розглянемо задачу про знаходження умов існування і побудову розв'язків системи

$$Q\,c = b \tag{2}$$

зі сталою $(m \times n)$-матрицею Q, невідомим вектором c і заданим вектором $b \in \mathbb{R}^m$. Алгебрична система (2) з $(m \times n)$-матрицею Q є розв'язною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\, b = 0. \tag{3}$$

Якщо умова (3) виконується, розв'язок системи (2) має зображення

$$c = Q^+ b + P_{Q_r}\, c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{4}$$

Матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора P_{Q^*}, а матриця P_{Q_r} — з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора P_Q. За умови $P_{Q^*} \neq 0$ казатимемо, що для алгебричної системи (2) має місце критичний випадок, і, навпаки, за умови $P_{Q^*} = 0$ будемо говорити, що для алгебричної системи (2) має місце некритичний випадок. У некритичному випадку алгебрична система (2) є розв'язною для будь-яких векторів $b \in \mathbb{R}^m$; при цьому розв'язок системи (2) має вигляд (4).

1 Неавтономні крайові задачі

1.1 Постановка задачі

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

крайової задачі [18, 19, 58, 116]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{6}$$

Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо в малому околі розв'язку породжувальної нетерової ($m \neq n$) крайової задачі

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Тут $A(t)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця та $f(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець, елементи яких — неперервні на відрізку $[a,b]$ дійсні функції, $\ell z(\cdot)-$ лінійний обмежений векторний функціонал:

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m.$$

Припускаємо, що нелінійності $Z(z,t,\varepsilon)$ і $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нелінійної крайової задачі (5), (6) є неперервно-диференційовними за невідомою z у малому околі породжувального розв'язку та за малим параметром ε у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо вектор-функцію $Z(z,t,\varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною t на відрізку $[a,b]$.

1.2 Некритичний випадок

Припустимо, що для породжувальної задачі має місце некритичний випадок: $P_{Q^*} = 0$. Тут $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)$-вимірна матриця, $P_{Q^*}-$ $(m \times m)$-вимірна матриця-ортопроєктор:

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*),$$

$X(t)-$ нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця [7, 116] однорідної частини системи (7). При цьому загальний розв'язок задачі (7):

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t)$$

визначає узагальнений оператор Гріна крайової задачі (7):

$$G[f(s);\alpha](t) = X(t)Q^{+}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\} + K\Big[f(s)\Big](t).$$

Тут $Q^{+}-$ псевдообернена матриця за Муром—Пенроузом [116]. У некритичному випадку задача (5), (6) є розв'язною для будь-яких нелінійностей диференціальної системи $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ і крайової умови $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Розв'язок крайової задачі (5), (6) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язку породжувальної задачі. Для знаходження збурення

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,\Big(x_1(t,\varepsilon),\ ...,\ x_n(t,\varepsilon)\Big), \quad x(t,0) \equiv 0,$$

$$x_j(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x_j(t,\ \cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n,$$

породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ отримуємо задачу

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{9}$$

Розв'язок задачі (8), (9) зображується у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \quad c_r(0) = 0, \tag{10}$$

де

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

крім того,

$$c_r(\varepsilon) = \mathrm{col}\,\Big(c_r^{(1)}(\varepsilon),\ ...\ ,\ c_r^{(r)}(\varepsilon)\Big),\ c_r^{(j)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ r,$$

є довільним вектором. Оператор Гріна в рівності (10) визначає неперервний оператор

$$\Phi_0\, x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \varepsilon X(t)Q^{+}\Big\{J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + \varepsilon K\Big[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t).$$

Операторна система $x(t,\varepsilon) = \Phi_0\, x(t,\varepsilon)$ у некритичному випадку є еквівалентною до крайової задачі (8), (9) на множині функцій $x(t,\varepsilon)$, які перетворюються на нуль при $\varepsilon = 0$. Для побудови розв'язків цієї операторної системи застосовним [38, 116] є метод простих ітерацій. Так само отримуємо ітераційну схему:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \Phi_0\, x_k(t,\varepsilon), \quad x_0(t,\varepsilon) \equiv 0,\ k = 0, 1,\ \ldots \tag{11}$$

Припустимо, що $x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon)$ — довільні вектор-функції з малого околу нуля, причому

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(x_1(t,\varepsilon),\ \ldots\ ,\ x_n(t,\varepsilon)\Big), x_i(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], x_i(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

$$y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(y_1(t,\varepsilon),\ \ldots\ ,\ y_n(t,\varepsilon)\Big),\ y_i(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b],\ y_i(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0].$$

Норму функції

$$\varphi(t) = \mathrm{col}(\varphi_1(t),\ \ldots\ ,\ \varphi_n(t)),\ \varphi_i(\cdot) \in \mathbb{C}[a,b] \quad i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ n$$

покладемо такою, що становить [37, с.385], [43, с.123]

$$||\varphi(t)|| = \max_{1\le i\le n} ||\varphi_i(t)||,\ ||\varphi_i(t)|| = \max_{a\le t\le b}\ |\varphi_i(t)|.$$

Нормою $(m \times n)$-вимірної матриці

$$A(t) = a_{ij}(t),\ a_{ij}(\cdot) \in \mathbb{C}[a,b]$$

називають число

$$||A(t)|| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} ||a_{ij}(t)||.$$

Як наслідок теореми Рісса векторний функціонал

$$\ell x(\cdot) = \mathrm{col}(\ell_1 x(\cdot),\ \ldots\ ,\ \ell_m x(\cdot)),$$

визначений у просторі неперервних вектор-функцій, подамо у вигляді інтеграла Рімана—Стілтьєса:

$$\ell x(\cdot) = \int_a^b d\Omega(t) x(t),$$

де $\Omega(t)-$ $(m \times n)$-матриця, елементи якої — це функції обмеженої на відрізку $[a,b]$ варіації; при цьому $||\ell x(\cdot)|| = ||\Omega(t)||$. Для деяких точок $\xi(t,\varepsilon)$ і $\zeta(t,\varepsilon)$

відрізка, що з'єднує точки $z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon)$ та $z_0(t,c_r)+y(t,\varepsilon)$ та досить малих норм векторів $x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon)$ справедливими є оцінки

$$||Z(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),s,\varepsilon)-Z(z_0(t,c_r)+y(t,\varepsilon),s,\varepsilon)|| \leq$$

$$\leq \left|\left|\frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z\ =\ \xi(t,\varepsilon)}\right|\right| ||x-y|| \leq \theta_1 \cdot ||x-y||, \tag{12}$$

$$J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J(z_0(\cdot,c_r)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \leq \theta_2||x-y||, \tag{13}$$

де

$$\theta_1 = \max_{\substack{||x||,||y||\leq\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\\ t\in[a,b]}} \left|\left|\frac{\partial Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z\ =\ \xi(t,\varepsilon)}\right|\right|,$$

$$\theta_2 = \max_{\substack{||x||,||y||\leq\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left|\left|\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z\ =\ \zeta(\cdot,\varepsilon)}\right|\right|.$$

Існування та скінченність сталих θ_1,θ_2 гарантовано неперервною диференційовністю нелінійної вектор-функції $Z(z,t,\varepsilon)$ за першим аргументом і неперервною диференційовністю (у сенсі Фреше) за першим аргументом векторного функціонала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ у малому околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon=0$. Нехай

$$q=||X(t)Q^+||,\ \lambda=||\ell K[\,*\,](\cdot)||,\ \mu=||K[\,*\,](t)||.$$

З урахуванням нерівностей (12), (13) отримуємо оцінку

$$||\Phi_0x(t,\varepsilon)-\Phi_0y(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon q\theta_2\cdot||x-y||+\varepsilon q\lambda\theta_1\cdot||x-y||+\varepsilon\mu\theta_1\cdot||x-y||;$$

за умови $0<\varepsilon<\varepsilon_*$ оператор $\Phi_0x(t,\varepsilon)$ є стискальним. Тут

$$\varepsilon_* := \frac{1}{q(\theta_2+\theta_1\lambda)+\mu_1} \leq \varepsilon^*.$$

Таким чином, використовуючи принцип Каччіопполі—Банаха [43], доведено наступну теорему [38, 77, 116, 122].

Теорема 1.1 *(Достатня умова). У некритичному випадку* ($P_{Q^*} = 0$) *породжувальна задача (7) є розв'язною для будь-яких неоднорідностей диференціальної системи та крайової умови (7) і має r лінійно-незалежних розв'язків $z_0(t, c_r)$. Задача (5), (6) при цьому є розв'язною для будь-яких неоднорідностей диференціальної системи $Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ і крайової умови $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ і має r-параметричний розв'язок $z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t,\varepsilon)$. Для знаходження збурення*

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\ (x_1(t,\varepsilon),\ \dots\ ,\ x_n(t,\varepsilon)), \quad x(t,0) \equiv 0,$$

$$x_j(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b],\ x_j(t,\ \cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$$

породжувального розв'язку $z_0(t, c_r)$ застосовною є збіжна при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційна схема (11).

Оцінювання величини ε_* у кожному конкретному випадку можна поліпшити, наприклад, оптимальним вибором норм вектор-функцій і узгоджених з ними норм матриць [38]. Окрім того, як продемонстровано в [38], ітераційна схема вигляду (11) може збігатися до шуканого розв'язку навіть, якщо оператор Φ_0 не є стискальним.

Приклад 1.1 *Знайдемо значення величини ε^* у задачі про визначення T-періодичного розв'язку $z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0,T]$ скалярного рівняння*

$$\frac{dz}{dt} = z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \arccos z. \tag{14}$$

Оскільки

$$X(t) = e^t,\ Q = \ell X(\cdot) = 1 - e^T \neq 0,$$

існує некритичний випадок. Таким чином, відповідно до теореми 1.1 рівняння (14) має єдиний періодичний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний. Ітераційна схема

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \arccos(z_k(t,\varepsilon)),\ z_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad k = 0, 1, 2,\ \dots\ ,$$

збігається до періодичного розв'язку рівняння (14). Вважаючи $T = 1$, виконуємо оцінювання:

$$\varepsilon^* \geq \varepsilon_* = \frac{e-1}{e\,(2\,e-1)\cdot 0,8578} \approx 0,1661.$$

При цьому $\varepsilon^* \approx 0,6033$.

Приклад 1.2 *Розглянемо задачу про знаходження розв'язку*

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0,1]$$

двоточкової задачі для рівняння Ейрі:

$$z'' = \varepsilon\, t\, z, \quad z(0) - z(1) = 0. \tag{15}$$

Рівняння названо на честь британського астронома Джорджа Бідделя Ейрі [107, 144]. Оскільки

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = 0,$$

у випадку двоточкової задачі для рівняння Ейрі існує некритичний випадок. Таким чином, відповідно до теореми 1.1 двоточкова задача для рівняння Ейрі (15) має однопараметричний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний:

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r, \quad X_r(t) = 1, \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Для побудови цього розв'язку знаходимо оператор Гріна задачі Коші:

$$K\Big[f(s)\Big](t) = -e^t \int_0^t (t-s)\, f(s)\, ds$$

для однорідної частини рівняння Ейрі (15), а також оператор Гріна двоточкової задачі для однорідної частини рівняння Ейрі (15):

$$G\Big[f(s)\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) - t \int_0^1 (1-s)\, f(s)\, ds.$$

Покладемо $c_r := c_r(\varepsilon) := 1$. Першим наближенням до відхилення від породжувального розв'язку відповідно до теореми 1.1 є функція

$$x_1(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon\, t}{6}\left(1 - t^2\right).$$

Друге наближення до відхилення від породжувального розв'язку — функція

$$x_2(t,\varepsilon) = \frac{t\,\varepsilon}{360}\left(-60 + 60\, t^2 + 3\,\varepsilon - 5\, t^3 \varepsilon + 2\, t^5\, \varepsilon\right).$$

Третє наближення до відхилення від породжувального розв'язку — функція

$$x_3(t,\varepsilon) = \frac{1}{90\;720}\Big(15\;120\, t^3 \varepsilon + 504\, t^6 \varepsilon^2 + 63\, t^4 (-20 + \varepsilon)\varepsilon^2 -$$

$$-30\,t^7\varepsilon^3 + 7\,t^9\varepsilon^3 - 4\,t\varepsilon\left(3780 - 189\,\varepsilon + 10\,\varepsilon^2\right)\Big)\,.$$

Для оцінювання точності знайдених наближень до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15) визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\|z_k''(t,\varepsilon) - \varepsilon\,t\,z_k(t,\varepsilon)\right\|_{\mathbb{C}[0;1]}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,1, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,000\ 416\ 667,$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 2,20\ 895 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_3(0,1) \approx 1,16\ 430 \cdot 10^{-8},$$

крім того,

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,01, \quad \Delta_1(0,01) \approx 4,16\ 667 \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 2,20\ 895 \cdot 10^{-9}, \quad \Delta_3(0,01) \approx 1,16\ 430 \cdot 10^{-12}.$$

Нагадаємо, що будуючи наближення до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15), припустили, що $c_r := c_r(\varepsilon) := 1$.

1.2.1 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом найменших квадратів

Для збільшення точності наближень до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15) величину $c_r(\varepsilon)$ на кожному кроці можна визначити з умови мінімізації нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$, наприклад, згідно з М.М. Криловим, використовуючи класичний [5, 47, 48] метод найменших квадратів. Покладемо $c_r := 1$. Перше наближення до відхилення від породжувального розв'язку відповідно до теореми 1.1, — це функція

$$x_1(t,\varepsilon) = c_{r_1}(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon\,t}{6}\left(1 - t^2\right).$$

Позначимо $(1 \times p_1)$-вимірну матрицю як

$$\varphi_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \ldots\ \varepsilon^{p_1-1} \end{pmatrix}.$$

Наближення до функції $c_1(\varepsilon)$ шукаємо у вигляді $c_{r_1}(\varepsilon) \approx \varphi_1(\varepsilon)\gamma_1$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$. Вимагатимемо, щоб

$$F(\gamma_1) = \left\|\left\|\left\|x_1''(t,\varepsilon) - \varepsilon\,t\,x_1(t,\varepsilon)\right\|_{\mathbb{L}^2[0,1]}\right\|_{\mathbb{L}^2[0,\varepsilon_0]}\right\|^2 \to \min$$

для фіксованої матриці $\varphi_1(\varepsilon)$. Функцію

$$F(\gamma_1) = \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 \left\{ x_1''(t,\varepsilon) - \varepsilon\, t\, x_1(t,\varepsilon) \right\}^2 dt\, d\varepsilon$$

зображуємо у вигляді

$$\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot)\Big)\, \gamma_1 = \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 t\, \varphi_1(\varepsilon) \left\{ x_1''(t,\varepsilon) - \varepsilon\, t\, x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \right\} dt\, d\varepsilon.$$

Таким чином, за умови невиродженості $(p_1 \times p_1)$-вимірної матриці Грама [5]:

$$\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot)\Big) := \varepsilon \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 t^2\, \varphi_1^*(\varepsilon)\varphi_1(\varepsilon)\, dt\, d\varepsilon$$

знаходимо вектор

$$\gamma_1 = \Gamma\Big(\varphi_1(\cdot)\Big)^{-1} \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 t\, \varphi_1(\varepsilon) \left\{ x_1''(t,\varepsilon) - \varepsilon\, t\, x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \right\} dt\, d\varepsilon.$$

Покладемо $\varepsilon_0 := 1,\ p_1 := 2$, при цьому умову невиродженості виконано, тому перше наближення до функції $c_r(\varepsilon)$ — це функція

$$c_{r_1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{24}.$$

Тут

$$\Gamma\Big(\varphi_1(\cdot)\Big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Друге наближення до відхилення від породжувального розв'язку відповідно до теореми 1.1 — функція

$$x_2(t,\varepsilon) = c_{r_2}(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon); \quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon) =$$

$$= \frac{t\,\varepsilon}{720} \left(-120 + \varepsilon - 10\, t^3\varepsilon + 4\, t^5\varepsilon + 5\, t^2(24+\varepsilon)\right).$$

Покладемо також $p_2 := 3$, при цьому умову невиродженості виконано, тому друге наближення до функції $c_r(\varepsilon)$ — це функція

$$c_{r_2}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{24} - \frac{5\,\varepsilon^2}{12\ 096}.$$

Таким чином, отримуємо друге наближення до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15):

$$y_2(t,\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{24} - \frac{5\varepsilon^2}{12096} + \frac{t\,\varepsilon}{720} \left(-120 + \varepsilon - 10\, t^3\varepsilon + 4\, t^5\varepsilon + 5\, t^2(24+\varepsilon)\right).$$

Третє наближення до відхилення від породжувального розв'язку відповідно до теореми 1.1 — це функція $x_3(t,\varepsilon) = c_{r_3}(\varepsilon) + x_3^{(1)}(t,\varepsilon)$. Тут

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = -\frac{t\varepsilon}{6} + \frac{t^3\varepsilon}{6} + \frac{t\varepsilon^2}{720} + \frac{t^3\varepsilon^2}{144} - \frac{t^4\varepsilon^2}{72} + \frac{t^6\varepsilon^2}{180} - \frac{t\varepsilon^3}{40\ 320} - \frac{5t^3\varepsilon^3}{72\ 576} +$$

$$+\frac{t^4\varepsilon^3}{8\ 640} + \frac{t^6\varepsilon^3}{4\ 320} - \frac{t^7\varepsilon^3}{3\ 024} + \frac{t^9\varepsilon^3}{12\ 960}.$$

Покладемо також $p_3 := 3$, при цьому умову невиродженості виконано, тому третє наближення до функції $c_r(\varepsilon)$ — це функція

$$c_{r_3}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{24} - \frac{5\,\varepsilon^2}{12\ 096} + \frac{\varepsilon^3}{161\ 280}.$$

Отже, отримуємо третє наближення до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15):

$$y_3(t,\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{24} - \frac{t\varepsilon}{6} + \frac{t^3\varepsilon}{6} - \frac{5\varepsilon^2}{12096} + \frac{t\varepsilon^2}{720} + \frac{t^3\varepsilon^2}{144} - \frac{t^4\varepsilon^2}{72} + \frac{t^6\varepsilon^2}{180} +$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{161\ 280} - \frac{t\varepsilon^3}{40\ 320} - \frac{5t^3\varepsilon^3}{72\ 576} + \frac{t^4\varepsilon^3}{8\ 640} + \frac{t^6\varepsilon^3}{4\ 320} - \frac{t^7\varepsilon^3}{3\ 024} + \frac{t^9\varepsilon^3}{12\ 960}.$$

Для оцінювання точності знайдених наближень до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15) з використанням методу найменших квадратів визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$, $\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Зокрема,

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,1, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,000\ 416\ 667,$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 4,13\ 36 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_3(0,1) \approx 6,20\ 040 \cdot 10^{-10},$$

крім того,

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,01, \quad \Delta_1(0,01) \approx 4,16\ 667 \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 4,13\ 360 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_3(0,01) \approx 6,20\ 042 \cdot 10^{-14}.$$

Таким чином, наближення до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15), отримані з використанням методу найменших квадратів, значно менші, ніж наближення до розв'язку двоточкової задачі для рівняння Ейрі (15), одержані відповідно до теореми 1.1.

1.2.2 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом Ньютона—Канторовича

Задля контролю за швидкістю збіжності ітераційних процедур введемо наступне означення [40]. Припустимо, що деякий ітераційний процес визначає послідовність

$$\{z_k\} = z_1,\ z_2,\ \dots\ ,\ z_k,\ \dots\ ,\ \lim_{k\to\infty} z_k = \tilde{z}.$$

Означення 1.1 *Збіжність послідовності $\{z_k\}$ називають лінійною, якщо існує стала $\gamma \in \mathbb{R}^1,\ 0 < \gamma < 1$, і номер k_0, для яких, починаючи з номера k_0, виконується нерівність $||z_{k+1} - \tilde{z}|| \le \gamma ||z_k - \tilde{z}||$.*

Означення 1.2 *Збіжність послідовності $\{z_k\}$ до величини $\tilde{z}$ називають принаймні квадратичною, якщо існує стала $\gamma \in \mathbb{R}^1,\ 0 < \gamma < 1$, і номер k_0, для яких, починаючи з номера k_0, виконується нерівність*

$$||z_{k+1} - \tilde{z}|| \le \gamma ||z_k - \tilde{z}||^2.$$

Ітераційна схема (11) має лінійну збіжність, тому природно поставити задачу щодо пришвидшення збіжності цих ітерацій. Для цього використаємо метод Ньютона—Канторовича [33, 43]. Розглянемо оператор

$$\varphi_0\Big(x(t,\varepsilon)\Big) = \Phi_0\Big(x(t,\varepsilon)\Big) - x(t,\varepsilon).$$

Оператор $\varphi_0(x(t,\varepsilon))$ діє з простору неперервних на відрізках $[a,b]$ й $[0,\varepsilon_0]$ дійсних вектор-функцій $x(t,\varepsilon)$ до цього самого простору. Припускатимемо далі, що вектор-функція $Z(z,t,\varepsilon)$ є двічі неперервно-диференційовною за першим аргументом у малому околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon = 0$. Також припускатимемо, що вектор-функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ є двічі неперервно-диференційовним (у сенсі Фреше) за першим аргументом у малому околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon = 0$. Оскільки

$$\det\left[\frac{\partial\varphi_0(0,0)}{\partial x}\right] = -1 \ne 0,$$

то за досить малого значення малого параметра $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*] \subset [0;\varepsilon_0]$ існує окіл

$$\Omega^* :\ \left|\left|x(t,\varepsilon)\right|\right| \le \rho(\varepsilon^*)$$

точки $x(t,\varepsilon) = 0$, у межах якого

$$\det\left[\frac{\partial\varphi_0(x(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right] \ne 0,$$

при цьому обернений оператор

$$\left[\frac{\partial\varphi_0(x(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right]^{-1}$$

зберігає неперервність [53, с. 243]. У випадку виродженості матриці $\varphi_0'(x(t,\varepsilon))$ А. Бен-Ізраель запропонував [65, 109] замість оберненої матриці використовувати псевдообернену матрицю. Докладніше умови використання псевдооберненої матриці наведено в [88]. Отже, згідно з теоремою Канторовича [43, с. 680] у некритичному випадку для знаходження розв'язку крайової задачі (8), (9) одержуємо таку ітераційну процедуру:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) - \left[\frac{\partial\Phi_0\Big(z_0(t,c_r)+x_k(t,\varepsilon)\Big)}{\partial x} - I_n\right]^{-1} \times$$

$$\times\left[\Phi_0\Big(z_0(t,c_r)+x_k(t,\varepsilon)\Big) - x_k(t,\varepsilon)\right], x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\ k=0,1,2,\ \ldots \qquad (16)$$

Ітераційна процедура збігається за умови, що існує число $\lambda\in\mathbb{R}$, для якого в досить малому околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon = 0$ виконується нерівність

$$2\cdot\gamma_1(\varepsilon)\cdot\gamma_2(\varepsilon)\cdot\gamma_3(\varepsilon)\le\lambda<1. \qquad (17)$$

Тут величини $\gamma_1(\varepsilon),\ \gamma_2(\varepsilon),\ \gamma_3(\varepsilon)$ гарантують виконання співвідношень

$$\left\|\left\{\frac{\partial\varphi_0(z_0(t,c_r),\varepsilon)}{\partial z}\right\}^{-1}\right\|\le\gamma_1(\varepsilon),$$

$$\left\|\varphi_0\Big(z_0(t,c_r),\varepsilon\Big)\right\|\le\gamma_2(\varepsilon),\left\|\frac{\partial^2\varphi_0(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\|\le\gamma_3(\varepsilon).$$

У межах указаного околу породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon = 0$ ітераційна схема (16) забезпечує квадратичну збіжність. На практиці має сенс використовувати таку умову збіжності:

$$2\cdot\gamma_1(\varepsilon)\cdot\gamma_2(\varepsilon)\cdot\tilde\gamma_3(k,\varepsilon)\le\lambda<1,\quad \left\|\frac{\partial^2\varphi_0(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\|\le\tilde\gamma_3(k,\varepsilon).$$

Нормою другої похідної (за Фреше) оператора $\varphi(z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ є

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi_0(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\| = \sup_{||x||\le 1}\frac{\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial\varphi_0(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\cdot x\right\}\cdot x\right\|}{||x||^2}.$$

Таким чином, доведено наступну теорему [79].

Теорема 1.2 *У некритичному випадку ($P_{Q^*}=0$) породжувальну задачу (7) розв'язано для довільних неоднорідностей $f(t)$ та α диференціальної системи (7) і крайової умови (7). Вона має r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](t),\ \ c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Задача (5), (6) при цьому є розв'язною для довільних нелінійностей диференціальної системи $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ і крайової умови $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ та має принаймні один розв'язок. Для знаходження збурення $x(t,\varepsilon)$ породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ застосовно ітераційну процедуру (16). Якщо в досить малому околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ і точки $\varepsilon=0$ виконується нерівність (17), то ітераційна процедура (16) забезпечує квадратичну збіжність.

Приклад 1.3 *Покажемо, що для знаходження періодичного розв'язку $z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[0,T]$ скалярного рівняння (14) застосовною є ітераційна процедура (16).*

Для цього досліджуємо породжувальну задачу

$$\frac{dz_0}{dt} = z_0 - \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(T) = 0. \tag{18}$$

Нормальна фундаментальна матриця цього рівняння — $X(t)=e^t$. Оскільки $Q=\ell X(\cdot)=1-e^T\neq 0$, то $P_{Q^*}=0$, отже, має місце некритичний випадок. Таким чином, згідно з теоремою 1.2 рівняння (14) має єдиний періодичний розв'язок. Породжувальний розв'язок T-періодичної задачі для рівняння (14) є єдиним:

$$z_0(t) = G\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right](t) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, згідно з теоремою 1.2 рівняння (14) має єдиний періодичний розв'язок. Для побудови цього розв'язку знаходимо оператор Гріна задачі Коші для рівняння (18):

$$K\Big[f(s)\Big](t) = -e^t\int_0^t e^{-s}f(s)ds.$$

Для задачі (14) оператор $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0\Big](t) - x(t,\varepsilon);$$

Похідна цього оператора:

$$\varphi'(x) = G\Big[Z'_x(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0\Big](t) - 1$$

визначає ітераційну процедуру

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) - \frac{\varepsilon\, G\Big[Z(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0\Big](t) - x_k(t,\varepsilon)}{G\Big[Z'_x(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0\Big](t) - 1},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Оскільки

$$Z(z_0(t,c_r), t, 0) = \arccos(z_0(t,c_r)) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

то

$$x_1(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon G\Big[\frac{\pi}{4}; 0\Big](t)}{G\Big[-\sqrt{2}; 0\Big](t) - 1} = -\frac{-\frac{\varepsilon\pi}{4}}{\varepsilon\sqrt{2} - 1} = -\frac{\varepsilon\pi}{4\Big(1 - \varepsilon\sqrt{2}\Big)}.$$

Для знаходження першого наближення поклали $x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$; подальші наближення $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon)$, ... є функціями малого параметра ε. Оператор Гріна в задачі про знаходження періодичного розв'язку рівняння (14) діє на функції малого параметра ε так:

$$G\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x_k(\varepsilon)\right); 0\right](t) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x_k(\varepsilon)\right).$$

Отже, щоб знайти періодичний розв'язок рівняння (14), можна скористатися ітераційною процедурою:

$$x_{k+1}(\varepsilon) = x_k(\varepsilon) - \frac{x_k(\varepsilon) + \varepsilon\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x_k(t,\varepsilon)\right)}{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x_k(\varepsilon)\right)^2}}}. \tag{19}$$

Оцінимо проміжок значень малого параметра, на якому зберігається збіжність цієї ітераційної процедури; згідно з теоремою 1.2 достатня умова (17) має вигляд

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{2\cdot\varepsilon\cdot z_k(\varepsilon)\cdot\left(\arccos\left(z_k(\varepsilon)\right)+x_k(\varepsilon)\right)}{\left(\varepsilon-\sqrt{1-z_k^2(\varepsilon)}\right)\cdot\left(1-z_k^2(\varepsilon)\right)}\right|\leq\lambda<1.$$

Остання нерівність виконується для всіх натуральних значень індексу k за умови зміни малого параметра на відрізку $[0;\ 0,465\ 954]$ для $T=1$. Покладемо умовою закінчення ітерацій

$$\Delta=\varphi(z_{k+1})<10^{-15}.$$

У цьому випадку за максимального значення малого параметра $\varepsilon=0,465\ 954$ ітераційна процедура (19) збігається на четвертому кроці. Зазначимо, що для знайденого значення ε_* ітерації $x_k(t,\varepsilon)$ не виходять за межі області

$$\Omega_*=\left\{\left[-1,707\ 107\leq x(t,\varepsilon)\leq 0,292\ 893\right]\times[0;1]\times[0,\varepsilon_*]\right\}\subset\Omega_0,$$

тому виконуються умови теореми 1.2. Отже, запропонована ітераційна процедура є застосовною для знаходження періодичного розв'язку рівняння (14). Для методу Ньютона характерною є квадратична збіжність і числова стійкість [33], однак на практиці обчислення похідних зумовлює суттєве ускладнення виразів. З метою порівняння швидкості збіжності ітераційних процедур (11) та (19) зафіксуємо $\varepsilon=0,349\ 590$. У цьому випадку ітераційна процедура (11), яка відповідає методу простих ітерацій, збігається на 32-му кроці, а схема (19), одержана за методом Ньютона—Канторовича — на третьому. Знайдені три перших наближення досить складні та є функціями малого параметра, незалежними від часу, тому такий наближений періодичний розв'язок рівняння (14) природно зобразити у вигляді многочлена:

$$z_3(t,\varepsilon)\approx\tilde{z}(\varepsilon)=0,707\ 107-\varepsilon\cdot 0,785\ 398-\varepsilon^2\cdot 1,11\ 072-\varepsilon^3\cdot 0,953\ 946\ .$$

Останнє наближення є досить точним, наприклад, для $\varepsilon=0,1$. Нев'язка цього наближення становить $\Delta(0,1)\approx 0,000\ 049\ 170$.

1.2.3 Побудова ітераційної процедури методом найменших квадратів

Побудова наближених розв'язків некритичної крайової задачі (8), (9) за методом простих ітерацій найпростіша і найзручніша, але для ітераційної процедури (11) характерною є лінійна збіжність. Для ітерацій, побудованих за

методом Ньютона—Канторовича, характерна квадратична збіжність, однак використання схеми Ньютона—Канторовича пов'язане з швидко збільшуваною від ітерації до ітерації складністю розрахунків. Побудова наближених розв'язків некритичної крайової задачі (8), (9) як за методом простих ітерацій, так і з використанням схеми Ньютона—Канторовича, зумовлює необхідність фіксації малого параметра. Для знаходження наближених розв'язків некритичної крайової задачі (8), (9) як функцій малого параметра у вигляді часткових сум узагальненого ряду Фур'є, згідно з М.М. Криловим, застосовано класичний [5, 48] метод найменших квадратів. Використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом функції $Z(z,t,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку та неперервну диференційовність за третім аргументом, розкладаємо цю функцію в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$:

$$Z(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=Z(z_0(t,c_r),t,0)+A_1(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де

$$A_1(t)=\left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r),\\ \varepsilon\ =\ 0,}} \quad A_2(t)=\left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r),\\ \varepsilon\ =\ 0}} .$$

Залишок $R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ розвинення функції $Z(z_0+x,t,\varepsilon)$ має вищий порядок малості за x та ε в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$R_1(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першим та другим аргументами функціонала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, виділяємо лінійну частину цього функціонала $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ за $x(\cdot,\varepsilon)$, лінійну частину $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0)$ за ε і член $J(z(\cdot,0),0)=J(z_0(\cdot,c_r),0)$ нульового порядку за ε в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$:

$$J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$= J(z_0(\cdot, c_r), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функціонала $J(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ має вищий порядок малості за x та ε в околі точок $x = 0$ й $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0, \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0.$$

Нехай $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots\ ,\ \varphi_k(t),\ \ldots$ – система лінійно-незалежних неперервно-диференційовних n-вимірних вектор-функцій. Перше наближення до розв'язку крайової задачі (8), (9):

$$x_1(t, \varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$$

знаходимо як розв'язок крайової задачі:

$$dx_1(t, \varepsilon)/dt = A(t) x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon \Bigg[Z(z_0(t, c_r), t, 0) + A_1(t) x_1(t, \varepsilon) \Bigg], \qquad (20)$$

$$\ell x_1(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon \Bigg[J(z_0(\cdot, c_r), 0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) \Bigg]. \qquad (21)$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (20), (21) шукаємо у вигляді

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) \approx \xi_1(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_1^{(i)}(\varepsilon) \varphi_i(t).$$

Позначимо $(n \times k)$-вимірну матрицю як

$$\varphi(t) = \Bigg[\varphi_1(t) \;\; \varphi_2(t) \;\; \ldots \;\; \varphi_k(t) \Bigg].$$

У загальному випадку перше наближення:

$$\xi_1(t, \varepsilon) = \varphi(t) c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) = \Bigg[c_1^{(1)}(\varepsilon) \;\; c_1^{(2)}(\varepsilon) \;\; \ldots \;\; c_1^{(k)}(\varepsilon) \Bigg]^*$$

не є розв'язком крайової задачі (20), (21), тому вимагатимемо, щоб

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Bigg\| \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r),t,0) -$$

$$-\xi_1'(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Bigg\| \Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r),0)\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функцію $F(c_1(\varepsilon))$ подано у вигляді

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Phi(t,\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r),t,0)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Bigg\|\Psi(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r),0)\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m},$$

де

$$\Phi(t,\varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\varphi(t) - \varphi'(t), \quad \Psi(\varepsilon) = [\varepsilon\ell_1 - \ell]\varphi(\cdot).$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $F(c_1(\varepsilon))$ маємо рівняння

$$\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big] \cdot c_1(\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon \cdot \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r),t,0)dt - \varepsilon \cdot \Psi^*(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r),0),$$

однозначно розв'язне щодо вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^k$ за умови невиродженості доданка $(k \times k)$-матриць Грама [5]:

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) = \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) \cdot \Phi(t,\varepsilon)dt, \quad \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = \Psi^*(\varepsilon) \cdot \Psi(\varepsilon).$$

Таким чином, маємо вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \Bigg\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r),0)\Bigg\},$$

який визначає перше наближення $x_1(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (20), (21). Тут

$$\xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r),0)\right\}$$

є найкращим (у сенсі найменших квадратів) наближенням до частинного розв'язку $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (20), (21). Друге наближення до розв'язку крайової задачі (8), (9) $x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ шукаємо як розв'язок крайової задачі:

$$dx_2(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r),t,0)+ \tag{22}$$

$$+A_1(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

$$\ell x_2(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r),0) + \ell_1 x_2(\cdot,\ \varepsilon)+ \tag{23}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big].$$

Наближення до розв'язку крайової задачі (22), (23):

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_2(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_2^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t),\ c_2(\varepsilon) = \Big[c_2^{(1)}(\varepsilon)\ \ c_2^{(2)}(\varepsilon)\ \ \dots\ \ c_2^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

У загальному випадку сума $\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)$ не є розв'язком крайової задачі (22), (23), тому вимагатимемо

$$F(c_2(\varepsilon)) = \Big\|\Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t)+$$

$$+\varepsilon R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - \xi_2'(t,\varepsilon)\Big\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\Big\|\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функцію $F(c_2(\varepsilon))$ можна подати у вигляді

$$F(c_2(\varepsilon)) = \int_a^b \Big\{ \Phi(t,\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ \Phi(t,\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 A_2(t) + \varepsilon R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \Big\} dt +$$

$$+ \Big\{ \Psi(\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 \ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ \Psi(\varepsilon)c_2 + \varepsilon^2 \ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + \varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}.$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $F(c_2(\varepsilon))$ отримуємо рівняння

$$\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) \Big] \cdot c_2(\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon \cdot \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) \Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \Big] dt -$$

$$-\varepsilon \cdot \Psi^*(\varepsilon) \Big[\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big].$$

За умови

$$\det \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) \Big] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) \Big]^{-1} \times$$

$$\times \Big\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) \Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \Big] dt +$$

$$+ \Psi^*(\varepsilon) \Big[\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big] \Big\},$$

який визначає найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ крайової задачі (22), (23). Тут

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big]\, dt + \right.$$

$$\left. + \Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\}.$$

Отже, на другому кроці ітераційної процедури знайдено найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення $x_2(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (22), (23). Третє наближення до розв'язку крайової задачі (8), (9) $x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_3^{(1)}(t,\varepsilon)$ шукаємо, як розв'язок крайової задачі

$$dx_3(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_3(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r),t,0) + \tag{24}$$

$$+ A_1(t)x_3(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

$$\ell x_3(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r),0) + \ell_1 x_3(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]. \tag{25}$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (24), (25):

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_3(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_3(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_3^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t), c_3(\varepsilon) = \Big[c_3^{(1)}(\varepsilon)\ \ c_3^{(2)}(\varepsilon)\ \ \dots\ \ c_3^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

Вимагатимемо, щоб

$$F(c_3(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\xi_3(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon) -$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]-\xi_3'(t,\varepsilon)\Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]}+\Big|\Big|\Big[\varepsilon\ell_1-\ell\Big]\xi_3(\cdot,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функцію $F(c_3(\varepsilon))$ подамо у вигляді

$$F(c_3(\varepsilon))=\int_a^b\Big\{\Phi(t,\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Big\}^*\times$$

$$\times\Big\{\Phi(t,\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Big\}dt+$$

$$+\Big\{\Psi(\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\}^*\Big\{\Psi(\varepsilon)c_3+$$

$$+\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\}.$$

За умови

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]\neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_3(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Big\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\},$$

який визначає найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x_3^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$ крайової задачі (24), (25). Тут

$$\xi_3(t,\varepsilon)=-\varepsilon\varphi(t)\cdot\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Big\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\}.$$

Таким чином, на третьому кроці ітераційної процедури визначено найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_3(t,\varepsilon)\approx X_r(t)c_r(\varepsilon)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$$

до розв'язку крайової задачі (24), (25). Припустимо, що знайдено $(j+1)$-наближення $(j=1,2,\ \dots\ )$ до розв'язку крайової задачі (8), (9). Наступне $(j+2)$-наближення до розв'язку крайової задачі (8), (9) шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$dx_{j+2}(t,\varepsilon)/dt=A(t)x_{j+2}(t,\varepsilon)+\varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r),t,0)+ \tag{26}$$

$$+A_1(t)x_{j+2}(t,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z_0(t,c_r)+x_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

$$\ell x_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon)=\varepsilon\Big[J(z_0(\cdot,c_r),0)+\ell_1x_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0)+J_1(z_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]. \tag{27}$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (26), (27):

$$x_{j+2}^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon)=\varphi(t)c_{j+2}(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{k}c_{j+2}^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t),\ \ c_{j+2}(\varepsilon)=\Big[c_{j+2}^{(1)}(\varepsilon)\ c_{j+2}^{(2)}(\varepsilon)\ \dots\ c_{j+2}^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

Вимагатимемо, щоб

$$F(c_{j+2}(\varepsilon)) = \Bigg|\Bigg|\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_{j+2}(t,\varepsilon)+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+...+\xi_j(t,\varepsilon)\Big]-\xi'_{j+2}(t,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]}+$$

$$+\Bigg|\Bigg|\Big[\varepsilon\ell_1-\ell\Big]\xi_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon)+\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. За умови

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]\neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_{j+2}(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+...+\xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\},$$

який визначає найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x^{(1)}_{j+2}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (26), (27). Тут

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon)=-\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+...+\xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\}.$$

Таким чином, на $(j+2)$-му кроці ітераційної процедури знайдено найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_{j+2}(t,\varepsilon)\approx X_r(t)c_r(\varepsilon)+\sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon)$$

до розв'язку крайової задачі (26), (27). Задля оцінювання точності ітерацій за методом найменших квадратів у некритичному випаду припустимо, що оператор $\Phi_0 x(t,\varepsilon)$ є оператором стиснення, при цьому для довільних вектор-функцій $y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon)$ з малого околу нуля виконується нерівність

$$\Big|\Big|\Phi_0 y_1(t,\varepsilon)-\Phi_0 y_2(t,\varepsilon)\Big|\Big|\le\lambda\cdot||y_1(t,\varepsilon)-y_2(t,\varepsilon)||,\quad \lambda<1.$$

Згідно з принципом Каччіопполі—Банаха [43, с. 605] у цьому випадку в малому околі нуля існує єдина нерухома точка $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi_0\,x(t,\varepsilon)$, яка є положенням рівноваги рівняння $x(t,\varepsilon)=\Phi_0 x(t,\varepsilon)$. Задля пошуку нерухомої точки $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi_0 x(t,\varepsilon)$ застосовна ітераційна процедура

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=\Phi_0 x_k(t,\varepsilon),\quad x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\quad k=0,1,\ ... \tag{28}$$

Природно припустити, що перше наближення $x_1(t,\varepsilon)=\Phi_0(0)\neq 0$, тобто припустимо, що нерухома точка $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi_0 x(t,\varepsilon)$ відмінна від нуля. В цьому випадку

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\Big|\Big|=\Big|\Big|\Phi_0 x^*(t,\varepsilon)-\Phi_0(0)\Big|\Big|\le\lambda\cdot||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Позначимо

$$\delta_1(\varepsilon)=\frac{\Big|\Big|x_1(t,\varepsilon)-\xi_1(t,\varepsilon)\Big|\Big|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Величина $\delta_1(\varepsilon)$ залежить від вибору $(n\times k)$-матриці $\varphi(t)$. Використовуючи нерівність трикутника, одержуємо оцінку

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon)-\xi_1(t,\varepsilon)\Big|\Big|\le(\lambda+\delta_1)\cdot||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Для другого наближення, обчисленого згідно з ітераційною процедурою (28), виконується нерівність

$$\left|\left|x^*(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)\right|\right| \leq \lambda \cdot ||x^*(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)|| \leq \lambda^2 \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Позначимо

$$\delta_2(\varepsilon) = \frac{\left|\left|x_2(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\right|\right|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Використовуючи нерівність трикутника, одержуємо оцінку

$$\left|\left|x^*(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\right|\right| \leq (\lambda^2 + \delta_2) \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Аналогічно

$$\left|\left|x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon)\right|\right| \leq (\lambda^k + \delta_k) \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Тут

$$\delta_k(\varepsilon) = \frac{\left|\left|x_k(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \ \dots \ + \xi_k(t,\varepsilon)\Big)\right|\right|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Для досить малої величини

$$\delta(\varepsilon) = \max_{0 \leq i \leq k} \delta_i(\varepsilon)$$

для $k \leq \kappa$ виконуються нерівності

$$\lambda^k + \delta(\varepsilon) < \lambda^{k-1} + \delta(\varepsilon) < \ \dots \ < \lambda^2 + \delta(\varepsilon) < \lambda + \delta(\varepsilon) < 1,$$

які гарантують досить мале значення норми різниці

$$\left|\left|x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon)\right|\right|.$$

На відміну від методу простих ітерацій, використання ітераційної процедури, побудованої за методом найменших квадратів, дає змогу знаходити ітерації скільки завгодно високого порядку. Однак точність одержаного за допомогою методу найменших квадратів наближення обмежена величиною порядку $\delta(\varepsilon)$, яка залежить від вибору $(n \times k)$-матриці $\varphi(t)$. Крім того, на точність одержаного за допомогою методу найменших квадратів наближення впливають похибки проміжних наближених обчислень. Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1.3 *У некритичному випадку* ($P_{Q^*} = 0$) *породжувальна задача (7) є розв'язною для довільних неоднорідностей* $f(t)$ *та* α *диференціальної системи (7) і крайової умови (7) та має* r *лінійно-незалежних розв'язків*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](t), \;\; c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Задача (5), (6) при цьому є розв'язною для довільних нелінійностей диференціальної системи $Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ *і крайової умови* $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ *та має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t,\varepsilon)$. *Задля знаходження найкращого (в сенсі найменших квадратів) за фіксованої матриці* $\varphi(t)$ *наближення до збурення* $x(t,\varepsilon)$ *породжувального розв'язку* $z_0(t, c_r)$ *для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ *за умови*

$$\det\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg] \neq 0 \tag{29}$$

застосовною є така ітераційна процедура:

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r),0)\Bigg\};$$

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), \quad \xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big]dt +$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\};$$

$$x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon), \;\; \xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\}; \;\ldots\,,$$

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2} \xi_i(t,\varepsilon),\ j=1,2,\ \dots\ , \tag{30}$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\dots+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r)+\xi_1(t,\varepsilon)+\dots+\xi_j(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\dots+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\dots+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\},\ \dots$$

Зазначимо, що довільний вектор c_r, наявний у зображенні породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ задачі (7) в розвиненні наближень до розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (8), (9) можна вважати нулем.

1.3 Критичний випадок першого порядку

Припускаємо, що нелінійності $Z(z,t,\varepsilon)$ та $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нелінійної крайової задачі (5), (6) є двічі неперервно-диференційовними за невідомою z у малому околі породжувального розв'язку і за малим параметром ε у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо вектор-функцію $Z(z,t,\varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною t на відрізку $[a,b]$. Досліджуємо критичний випадок ($P_{Q^*}\neq 0$), причому припускаємо, що виконується така умова:

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha-\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\}=0. \tag{31}$$

У цьому випадку породжувальна задача має ($r=n-n_1$)-параметричну сім'ю розв'язків [15, 16, 17, 18, 116]:

$$z_0(t,c_0)=X_r(t)c_0+G\Big[f(s);\alpha\Big](t),\quad c_0\in\mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)-$ нормальна ($X(a)=I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини породжувальної системи, $X_r(t):=X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n\times r)$-вимірна матриця, утворена з r-лінійно-незалежних стовпців $(n\times n)$-матриці-ортопроєктора $P_Q:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{N}(Q)$, $Q:=\ell X(\cdot)\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $P_{Q_d^*}-$ $(d\times m)$-матриця, утворена

з d лінійно-незалежних рядків $(m \times m)$-матриці-ортопроєктора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to$ $\to \mathbb{N}(Q^*)$, крім того

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) = X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](t)$$

є узагальненим оператором Гріна породжувальної крайової задачі,

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

є оператором Гріна задачі Коші породжувальної системи, Q^+- псевдообернена матриця за Муром—Пенроузом [18, 19, 116]. Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (5), (6) має вигляд

$$F(c(\varepsilon)) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[Z(z_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{32}$$

1.3.1 Рівняння для породжувальних сталих

Переходячи в рівності (32) до межі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо необхідну умову існування розв'язку

$$F_0(c_0) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0),0) - \ell K\Big[Z(z_0(s,c_0),s,0)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{33}$$

Таким чином, доведено таку лему [18, 19, 28, 116].

Лема 1.1 *Нехай крайова задача (5), (6) є критичним* ($P_{Q^*} \neq 0$) *випадком і виконується умова розв'язності (31) нетерової* ($m \neq n$) *породжувальної крайової задачі. Припустимо також, що в малому околі породжувального розв'язку* $z_0(t,c_0^*) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ *слабконелінійна крайова задача (5), (6) має розв'язок*

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ z(t,0) = z_0(t,c_0^*).$$

Тоді виконується рівність (33).

Рівняння (33) традиційно називають рівнянням для породжувальних сталих вихідної задачі (5), (6) у критичному випадку [17, 18, 19, 38, 58, 116].

Корені рівняння для породжувальних сталих крайової задачі (5), (6) визначають породжувальний розв'язок $z_0(t, c_0^*)$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки вихідної крайової задачі (5), (6). Якщо рівняння для породжувальних сталих не має дійсних коренів, то вихідна крайова задача (5), (6) не має шуканих розв'язків. Припустимо, що рівняння (33) має дійсні корені і не перетворюється на тотожність [30]. Фіксуючи один із розв'язків $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (33), отримуємо задачу про відшукання розв'язків

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), \ x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \ x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

крайової задачі

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{34}$$

$$\ell\ x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \tag{35}$$

в околі породжувального розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)\, c_0^* + G[f; \alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Розв'язок задачі (34), (35) зображується у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad c(\varepsilon) := c_0^* + \xi(\varepsilon), \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_0^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big](t).$$

Приклад 1.4 *Задача про розв'язування скалярного рівняння*

$$dz/dt = \varepsilon \cos^2 z, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = z(1, \varepsilon) - z(-1, \varepsilon) = 2 \text{ arctg } \varepsilon \tag{36}$$

не має розв'язків $z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[-1; 1]$.

Оскільки $P_{Q^*} = 1 \neq 0$, має місце критичний випадок, при цьому породжувальний розв'язок — це довільні сталі $z_0(t, c) = c, \ c \in \mathbb{R}^1$. Рівняння (32) у випадку задачі (36) $\cos^2 c = 2$ не має дійсних коренів, отже, задача (36) не має розв'язків.

Необхідна і достатня умова (32) розв'язності задачі (5), (6) визначає вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, для знаходження якого використовується техніка лінеаризації та метод простих ітерацій.

1.3.2 Достатня умова існування розв'язку

Припустимо, що рівняння (32) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32), одержуємо задачу про відшукання розв'язку задачі (5), (6):

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon) \tag{37}$$

в околі породжувального розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\Big[f(s);\alpha\Big](t). \tag{38}$$

Маємо задачу про знаходження збурення $x(t,\varepsilon)$ породжувального розв'язку $z_0(t, c_r^*)$:

$$dx(t,\varepsilon)/dt = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{39}$$

$$\ell\ x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{40}$$

Використовуючи неперервну диференційовність за першим і третім аргументами функції $Z(z,t,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку, розкладаємо цю функцію в околі точок $x = 0$ та $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) +$$

$$+A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{41}$$

де

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}}, \quad A_2(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Залишок $R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ має вищий порядок малості за x і ε в околі точок $x = 0$ й $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$R_1(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність за першим і другим аргументами функціонала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ та неперервність за другим аргументом, виділяємо лінійні $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ та $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ частини цього функціонала і член нульового порядку за ε в околі точок $x = 0$ та $\varepsilon = 0$:

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \tag{42}$$
$$+\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ має вищий порядок малості за x і ε у малому околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0.$$

На відміну від некритичного випадку, похідні $A_1(t)$, $A_2(t)$ та функціонали $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$, $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ є фіксованими і залежать від вибору породжувального розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ (якщо він не єдиний), тобто від вектора c_r^*.

Приклад 1.5 *У працях [38, 116] фактично були використані вимоги*

$$\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_r^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0,$$

суттєві для малості залишків $R_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$, $J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ за x та ε у малому околі точок $x = 0$ та $\varepsilon = 0$. Дійсно, для крайової задачі

$$dz/dt = \varepsilon, \quad z(0) - z(1) = 0$$

Породжувальний розв'язок $z_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$ визначає величини

$$Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) \equiv A_1(t)x \equiv 0,$$

а тому й залишок $R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \varepsilon$, який тотожний до нелінійності. Отже,

$$\Big\|Z(z_0(t, c_r^*), t, 0)\Big\| \equiv \Big\|A_1(t)x\Big\| \equiv 0 < \varepsilon = \Big\|R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\Big\|.$$

Протиріччя тут відсутнє, оскільки

$$\left\|R(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\| = \varepsilon > \left\|R_1(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\| \equiv 0.$$

Враховуючи розвинення (41), перетворюємо умову розв'язності задачі (5), (6) до вигляду

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0)+A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\}=0.$$

Оскільки рівність (32) вважається виконаною, ця умова розв'язності спрощується:

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\}=0.$$

Розв'язок задачі (39), (40) набуває вигляду $x(t,\varepsilon)=X_r(t)c_r+x^{(1)}(t,\varepsilon)$, де

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*),s,0)+A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](t).$$

Тут $c_r=c_r(\varepsilon)-$ невідома, неперервна в малому додатному околі нуля вектор-функція малого параметра. Оскільки відхилення $x(t,\varepsilon)$ від породжувального розв'язку $z_0(t,c_r^*)$ за $\varepsilon=0$ перетворюється на нульовий вектор, то повинна виконуватись рівність $c_r(0)=0$ і тотожність $x^{(1)}(t,0)\equiv 0$ на всьому відрізку $[a,b]$. Перша вимога є суттєвою, а друга випливає із неперервності узагальненого оператора Гріна породжувальної задачі й неперервності нелінійностей $Z(z,t,\varepsilon)$ та $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ за z і ε в околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_r^*)$ та точки $\varepsilon=0$. Використовуючи розвинення невідомої, одержуємо рівність, яка є необхідною й достатньою умовою розв'язності задачі (5), (6):

$$P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot)-\ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\Big\}c_r=$$

$$= -P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\}$$

і яку можна застосовувати для знаходження вектор-функції $c_r(\varepsilon)$. Позначаючи $(d\times r)$-матрицю як

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\Big[A_1(s)X_r(s)\Big](\cdot)\Bigg\},$$

отримуємо операторну систему, рівнозначну задачі про визначення розв'язків системи (39), що задовольняють крайову умову (40):

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon), \quad B_0\, c_r = -P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \tag{43}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\},$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Ліва частина другого рівняння операторної системи (43) за $\varepsilon \to 0$ обертається на нульовий вектор. Праву частину цього рівняння можна подати так:

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{\varepsilon\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot) +$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s) +$$

$$+\varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} =$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} +$$

$$+\varepsilon P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)-\ell K\Bigg[\varepsilon A_2(s)+A_1(s)G\Big[Z(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Bigg](\cdot)\Bigg\}.$$

Перший доданок:

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell K\Big[R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\}$$

при $\varepsilon\to 0$ перетворюється на нульовий вектор унаслідок неперервності узагальненого оператора Гріна і рівностей

$$R_1(z_0(t,c_r^*),t,0)\equiv 0,\quad J_1(z_0(\cdot,c_r^*),0)=0.$$

Другий доданок:

$$\varepsilon P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)-\ell K\Bigg[A_2(s)+A_1(s)G\Big[Z(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Bigg](\cdot)\Bigg\}$$

при $\varepsilon\to 0$ перетворюється на нульовий вектор унаслідок неперервності функціоналів ℓ і ℓ_1 та неперервності за ε нелінійностей $Z(z,t,\varepsilon)$ і $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ в околі точки $\varepsilon=0$. Таким чином, установлено обмеженість за $\varepsilon\to 0$ виразу

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)-\ell K\Bigg[A_2(s)+A_1(s)G\Big[Z(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Bigg](\cdot)\Bigg\}.$$

Позначимо

$$F_1(c_r^*)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)-$$

$$-\ell K\Bigg[A_2(s)+A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Bigg](\cdot)\Bigg\}=$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) - \ell K\Big[A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](s) + A_2(s)\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Вектор-функцію $F_1(c_r^*)$ застосовуватимемо далі. Для розв'язності другого рівняння операторної системи (43) необхідно й достатньо виконання рівності

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon A_2(s) + A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} = 0,$$

де $P_{B_0^*}-$ $(d\times d)$-вимірна матриця-ортопроєктор: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*)$. За умови $P_{B_0^*} = 0$ загальний розв'язок другого рівняння операторної системи (43) набуває вигляду

$$c_r = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[\varepsilon A_2(s) + A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} + P_{B_0}\bar{c}_r.$$

Тут $\bar{c}_r \in \mathbb{R}^r-$ довільний вектор. Нехай rank $P_{B_0} = \rho$, де P_{B_0} — $(r\times r)$-матриця-ортопроєктор. Позначимо P_ρ $(r\times\rho)$-матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроєктора P_{B_0}. При цьому вектор-функція

$$c_r = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[\varepsilon A_2(s) + A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} + P_\rho\, c_\rho$$

залежить від довільного вектора c_ρ. Таким чином, за умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ загальний розв'язок крайової задачі (39), (40) визначає операторна система:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_r = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \tag{44}$$

$$+J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg[\varepsilon A_2(s) + A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} + P_\rho\, c_\rho,$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)x(s,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](t),$$

яка для довільного $c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$ еквівалентна задачі про побудову розв'язку системи рівнянь (39), що задовольняють крайову умову (40). Операторна система (44) відрізняється від аналогічної системи [17, 18, 19] врахуванням похідних $A_2(s)$ та $\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)$ нелінійностей крайової задачі (39), (40). Матрицю B_0, ключову в дослідженні резонансних слабконелінійних крайових задач, можна знайти безпосередньо з рівняння для породжувальних сталих як похідну:

$$B_0 = \frac{\partial F_0(c_r)}{\partial c_r}\Bigg|_{\;c_r\;=\;c_r^*}. \tag{45}$$

Дійсно,

$$\frac{\partial F_0(c_r^*)}{\partial c_r} = \frac{\partial}{\partial c_r}P_{Q_d^*}\Bigg\{J(z_0(\cdot,c_r^*) + \ell_1\Bigg[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Bigg] +$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*),s,0) +$$

$$+A_1(s)\Bigg[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\Bigg] + \varepsilon A_2(s) + R_1(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\;\varepsilon\;=\;0}.$$

Використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом вектор-функції $Z(z,t,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку й неперервність за третім аргументом, а також неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першим аргументом векторного функціонала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ і неперервність за другим аргументом, перетворимо останню похідну до вигляду

$$\frac{\partial F_0(c_r^*)}{\partial c_r} = P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1\Bigg[X_r(\cdot) + \frac{\partial}{\partial c_r}x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Bigg] + \frac{\partial}{\partial c_r}J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Bigg[A_1(s)X_r(s) + \frac{\partial}{\partial c_r}x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \frac{\partial}{\partial c_r}R_1(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\varepsilon\ =\ 0} = B_0.$$

Ця рівність і доводить формулу (45). Операторна система

$$x(t,\varepsilon) = \Phi\Bigg(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)\Bigg) \tag{46}$$

у критичному випадку є еквівалентною задачі про побудову розв'язку системи рівнянь (39), які задовольняють крайову умову (40). Для побудови розв'язків цієї операторної системи традиційно [13, 14, 17, 18, 19] застосовується ітераційна процедура

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \Phi\Bigg(z_0(t,c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)\Bigg),\ x_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \tag{47}$$

яка відповідає методу простих ітерацій. Тут

$$\Phi\Bigg(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)\Bigg) =$$

$$= -X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\Bigg\{\varepsilon\ell_1 G\Bigg[Z(z_0+x,s,\varepsilon);J(z_0+x,\varepsilon)\Bigg](\cdot) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+J_1(z_0+x,\varepsilon) - \ell K\Bigg[\varepsilon A_1(s)G\Bigg[Z(z_0+x,\tau,\varepsilon);J(z_0+x,\varepsilon)\Bigg](s) + \varepsilon A_2(s) +$$

$$+R_1(z_0+x,s,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} + \varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](t) + X_r(t)P_\rho\, c_\rho, \quad k = 0,1,\ \ldots$$

Достатньою умовою збіжності ітераційної процедури (47) є умова [43]:

$$\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]}\left\|\frac{\partial\Phi\Big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\Big)}{\partial x}\right\|\leq\lambda<1, \tag{48}$$

де $x(t,\varepsilon)-$ вектор-функція з малого околу нуля. Достатня умова збіжності ітераційної процедури (47) безпосередньо випливає з означення оператора стиснення та теореми про середнє значення:

$$\left\|\Phi\Big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\Big)-\Phi\Big(z_0(t,c_r^*)+y(t,\varepsilon)\Big)\right\|=\left\|\frac{\partial\Phi\xi(t,\varepsilon)}{\partial x}\right\|\cdot||x(t,\varepsilon)-y(t,\varepsilon)||.$$

Тут $\xi(t,\varepsilon)-$ точка відрізка, який сполучає точки $z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)$ та $z_0(t,c_r^*)+$ $+y(t,\varepsilon)$. Для оператора $\Phi\Big(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)\Big)$ умова (48) набуває вигляду

$$\varepsilon\left\|G\left[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)}{\partial x};\ \frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t)\right\|\leq\lambda<1.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1.4 *Нехай для крайової задачі (5), (6) задовольняється критичний випадок $P_{Q^*}\neq 0$ і виконується умова (31) розв'язності породжувальної задачі. Тоді для кожного кореня $c_r^*\in\mathbb{R}^r$ рівняння (33) за умови (48) і*

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0 \tag{49}$$

задача (8), (9) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon=0$ перетворюється на нульовий $x(t,0)\equiv 0$ ($P_{B_0^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}(B_0^*)-$ $(d\times d)$-вимірна матриця-ортопроєктор). Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного для $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$ ітераційного процесу (47).

Послідовність наближень, утворена схемою (47), лише на границі перетворюється на розв'язок крайової задачі (39), (40). Інакше кажучи, у частинному випадку у задачі про відшукання періодичних розв'язків системи (39) послідовність наближень, утворена схемою (47), взагалі кажучи, не є періодичною, а тільки на границі перетворюється на періодичний розв'язок крайової задачі (39).

У випадку $m=n$, наприклад, для періодичних крайових задач матриця B_0 стає квадратною, при цьому умова (49) перетворюється на відому вимогу невиродженості матриці B_0. Отже, у критичному випадку за умови (49)

для відповіді на питання про існування розв'язків крайової задачі (5), (6) достатньо проаналізувати доданки перших диференціалів нелінійностей цієї задачі. Такий критичний випадок далі називатимемо критичним випадком першого порядку. Проміжок $[0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon_0 \geq \varepsilon^*$, на якому зберігається збіжність ітераційної процедури, можна знайти як безпосередньо з означення оператора стиснення, так і за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [17, 18, 19]. Теорема 1.4 відрізняється від аналогічного твердження [17, 18, 19] врахуванням похідних $A_2(s)$ та $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ нелінійностей крайової задачі (39), (40).

Наступний приклад запропонований студенткою фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного університету О. Зінченко.

Приклад 1.6 *Покажемо, що ітераційну процедуру (47) можна застосувати для знаходження періодичного розв'язку рівняння*

$$z' = (2t-1)z + \varepsilon z \ln z, \;\; \ell z(\cdot) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0. \tag{50}$$

Для цього досліджуємо породжувальну задачу

$$z_0' = (2t-1)z_0, \;\; \ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(1) = 0. \tag{51}$$

Нормальна фундаментальна матриця однорідної частини диференціального рівняння (51) — це функція $X(t) = e^{t^2-t}$. Оскільки $Q = 0$, то існує критичний випадок. Загальний розв'язок породжувальної задачі (51) має вигляд $z_0(t,c) = c\, e^{t^2-t}$. Оператор Гріна задачі Коші для рівняння (51) з довільною неоднорідністю $f(t)$:

$$K\Big[f(s)\Big](t) = e^{t^2-t} \int_0^t e^{s-s^2} f(s) ds$$

визначає функціонал

$$\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot) = K\Big[f(s)\Big](0) - K\Big[f(s)\Big](1) = -\int_0^1 e^{s-s^2} f(s) ds.$$

Рівняння (33) для задачі (50):

$$F_0(c) = \int_0^1 e^{s-s^2} c\, e^{s^2-s} \ln(c e^{s^2-s}) ds = c \ln c - \frac{c}{6} = 0$$

має єдиний розв'язок $c_1^* = e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18\,136$, який визначає похідну

$$A_1(t) = 1 + \ln z_0(t, c_1^*) = t^2 - t + \frac{7}{6},$$

і за його допомогою можна знайти сталу $B_0 = 1$. Оскільки $B_0 \neq 0$, то умова (49) виконується. Оскільки $Q = Q^+ = 0$, то оператор Гріна крайової задачі (51) є тотожним до оператора Гріна задачі Коші для рівняння (51) з довільною неперервною на відрізку $[0; 1]$ неоднорідністю $f(t)$:

$$G\Big[f(s);\ \alpha\Big](t) \equiv K\Big[f(s)\Big](t).$$

Перше наближення до відхилення від породжувального розв'язку:

$$x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon e^{\frac{1}{6}} e^{t^2 - t} \left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

задовольняє умову $x_1(0, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon) = 0$. Подальші наближення визначаються схемою (47). Задля перевірки точності третього наближення, обчисленого за формулою (47), побудуємо розв'язок задачі Коші $\tilde{z}(0; \varepsilon) = z_3(0; \varepsilon)$ для рівняння (50). Неперіодичність в цьому випадку дорівнює

$$\tilde{z}(0; 0,1) - \tilde{z}(1; 0,1) \approx -0,000\ 000\ 000\ 792\ 347,$$

$$\tilde{z}(0; 0,5) - \tilde{z}(1; 0,5) \approx -0,000\ 003\ 047\ 662.$$

1.3.3 Прискорення збіжності ітераційної процедури методом Ньютона—Канторовича

Для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32) скористаємось ефективним методом Ньютона—Канторовича [43, 87, 94, 131]. Згідно з прийнятими угодами функція $F(c(\varepsilon))$ є двічі неперервно-диференційовною за невідомою $c(\varepsilon)$ у малому околі точки c_0^*. Припустимо, що для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується нерівність

$$\Big|\Big|\mathcal{J}_j^+(\varepsilon)\Big|\Big| \leq \sigma_1(j),\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

$$\Big|\Big|d^2 F(\zeta_j(\varepsilon)\,; c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon))\Big|\Big| \leq \sigma_2(j) \cdot ||c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)||$$

та існує стала

$$\theta := \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{\frac{\sigma_1(j)\,\sigma_2(j)}{2}\right\}.$$

Тоді згідно з [43, 87, 131] за умови, що існує число $\lambda \in \mathbb{R}$, для якого в досить малому околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ і точки $\varepsilon = 0$ задовольняється нерівність

$$P_{\mathcal{J}_j^*} = 0, \quad \theta \cdot ||c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)|| \leq \lambda < 1, \tag{52}$$

для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) застосовною є ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^+ F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ , \tag{53}$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) є квадратичною. Тут

$$\mathcal{J}_j(\varepsilon) := F'(c_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d\times r}$$

є якобіаном перетворення

$$F(c(\varepsilon)):\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

у точці $c_j(\varepsilon)$. Крім того, $P_{\mathcal{J}_j^*}:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(\mathcal{J}_j^*)$ — ортопроєктор матриці $\mathcal{J}_j^*$. Зауважимо, що умова (52) рівнозначна вимозі повноти рангу матриці $\mathcal{J}_j$ і можлива лише у випадку $d \le r$. Розв'язок вихідної задачі (5), (6) визначається за ітераційною схемою:

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \quad x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{54}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_0^*) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*) + x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \quad c_{k+1}(\varepsilon) = c_0^* + \xi_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Таким чином, доведено теорему [18, 19, 28, 116].

Теорема 1.5 *(Достатня умова). Нехай крайова задача (5), (6) є критичним ($P_{Q^*} \ne 0$) випадком і виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \ne n$) породжувальної задачі. Припустимо, що рівняння (33) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Припустимо також, що для рівняння (32) виконуються умови (52). Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжувальних сталих (33) в околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_0^*)$ для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) застосовною є ітераційна схема (54).*

Область значень $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$, $0 < \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (54) до розв'язку крайової задачі (5), (6), можна знайти з умов (52) та [43, с. 639], [77]

$$\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]} \left\| \frac{\varepsilon\, \partial G\Big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t)}{\partial x} \right\| \le \lambda < 1. \tag{55}$$

У малому околі породжувального розв'язку існує розвинення

$$Z(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=Z(z_0(t,c_0^*),t,0)+A_1(t)x+\varepsilon A_2(t)+R_0(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{56}$$

Тут

$$A_1(t)=\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}} \qquad A_2(t)=\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Залишок $R_0(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ розвинення функції $Z(z,t,\varepsilon)$ має вищий порядок малості за невідомою x у малому околі нуля та за малим параметром ε у малому додатному околі нуля, ніж перші три члени розвинення (56), тому $R_0(z_0(t,c_0^*),t,0)\equiv 0$. Аналогічно в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$ має місце розвинення

$$J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J(z_0(\cdot,c_0^*),0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{57}$$

Тут

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_0),0)=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}}$$

є похідними (за Фреше). Залишок $J_0(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ розвинення функціонала $J(z,\varepsilon)$ має вищий порядок малості за x та ε в околі точок $x=0$ та $\varepsilon=0$, ніж перші два члени розвинення (57), тому $J_0(z_0(\cdot,c_0^*),0)=0$. Позначимо сталу $(d\times r)$-вимірну матрицю як

$$B_0=P_{Q_d^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot)-\ell K\Big[A_1(s)X_r(s)\Big](\cdot)\right\}.$$

Традиційна [116] вимога $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$ є менш жорсткою, оскільки за умови (52) з огляду на рівність $B_0=\mathcal{J}_0$ ця вимога виконується. Проте за умови (52) наближення до розв'язку задачі (5), (6), отримані за допомогою ітераційної схеми (54), задовольняють відповідні наближення до крайових умов (6).

Зокрема, у випадку знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння (5) за виконання умови (52) наближення, отримані за допомогою ітераційної схеми (54), не містять вікових членів. На відміну від праць [100, 139] для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32) використано модифікацію [87, 131] традиційного методу Ньютона—Канторовича [43]. За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ будемо казати, що крайова задача (5), (6) є критичним випадком першого порядку. Тут $P_{B_0^*}$ — матриця-ортопроєктор: $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*)$. Для ключової матриці у традиційній схемі аналізу та для побудови її розв'язків виконується рівність [38, 116]

$$B_0 = \frac{\partial F_0(c_0^*)}{\partial c_0}.$$

Зауважимо також, що вигляд (5), (6) отримується за допомогою матричних крайових задач, при цьому визначення критичного випадку першого порядку поширюється і на матричні крайові задачі [127, 129].

Приклад 1.7 *Продемонструємо ефективність теореми 1.5 на прикладі задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків нелінійного рівняння Дюффінга зі збуренням:*

$$y'' + y = f(t) + Y(y), \quad Y(y) := y^3. \tag{58}$$

Неоднорідність $f(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$ нелінійного рівняння Дюффінга $f(t)$ вважатимемо неперервною 2π-періодичною функцією. Періодичні розв'язки нелінійного рівняння Дюффінга (58) будемо шукати в околі розв'язку $y_0(t, c_0) = c_0 \cos t$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$, однорідної частини цього рівняння. Вважаємо виконаною умову розв'язності 2π-періодичної задачі для лінійної частини рівняння Дюффінга (58):

$$\int_0^{2\pi} \cos t \, f(t) \, dt = 0, \tag{59}$$

при цьому лінійна частина цієї задачі має однопараметричну сім'ю розв'язків:

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t + G\Big[f(s)\Big](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

зображувану оператором Гріна

$$G\Big[f(s)\Big](t) := \int_0^t \sin(t - s) \, f(s) \, ds$$

2π-періодичної задачі для лінійної частини рівняння $y'' + y = f(t)$. Періодичні розв'язки рівняння Дюффінга (58) $y(t) = y_0(t, c_0) + x(t)$ будемо шукати в

околі розв'язку $y_0(t, c_0)$ лінійної частини цього рівняння у вигляді розкладу за косинусами незалежної змінної [98]. Для знаходження збурення $x(t)$ одержуємо 2π-періодичну задачу для рівняння $x'' + x = Y(y_0 + x)$, розв'язної тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0) + x(t)) \cos t \, dt = 0. \tag{60}$$

Для знаходження амплітуди $c_0 \in \mathbb{R}^1$ породжувального розв'язку $y_0(t, c_0)$ застосовуємо рівняння

$$F_0(c_0) := \int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0)) \cos t \, dt = 0. \tag{61}$$

Це рівняння традиційно називають рівнянням для породжувальних амплітуд 2π-періодичної задачі для рівняння Дюффінга (58). Рівняння (61) при $f(t) = \cos 3t$ має єдиний простий дійсний корінь [98]:

$$c_0^* = -\frac{1}{8}, \quad B_0 := F'(c_0^*), \quad B_0 = \frac{3\pi}{128} \neq 0.$$

Наближення до періодичного розв'язку нелінійного рівняння Дюффінга (58) шукатимемо в околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ у вигляді

$$y_{k+1}(t) = c_{k+1}(\varepsilon) \cos t + x_{k+1}(t), \quad c_0(\varepsilon) \equiv c_0^*, \tag{62}$$

$$x_{k+1}(t) := G\Big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k \cos s + x_k(s))\Big](t), \ k = 0, \ 1, \ 2 \ , \ ...$$

Ітераційна схема (62) відповідає методу простих ітерацій [116]. Умовою збіжності ітераційної схеми (62) є вимога стиснення:

$$\left|\left| G'_x \Big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k \cos s + x_k(s))\Big] \right|\right| < \lambda < 1, \ k = 0, \ 1, \ 2 \ ...$$

Періодична задача для рівняння першого наближення

$$x_1''(t) + x_1(t) = Y(y_0(t, c_0^*))$$

є розв'язною з огляду на рівність $F_0(c_0^*) = 0$, при цьому

$$x_1(t) = -\frac{31 \cos t}{163\ 840} + \frac{3 \cos 3t}{16\ 384} + \frac{\cos 9t}{163\ 840}.$$

Умову збіжності ітераційної схеми (62), а саме: вимогу стиснення для оператора G для рівняння першого наближення виконано:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_0(s, c_0^*)) \right](\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0,2\pi]} \approx 0,0455\ 389 \ll 1\ .$$

Умова існування 2π-періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (58) на першому кроці має вигляд

$$\int\limits_0^{2\pi} Y(y_1(t, c_1))\ \cos t\, dt = 0.$$

Для знаходження розв'язку $c_1 \in \mathbb{R}^1$ останнього рівняння застосуємо ітераційну схему (53), при цьому

$$c_1 \approx \frac{1\ 184\ 219}{6\ 286\ 734\ 039}, \quad F(c_1) \approx 0,$$

і умову (52) на першому кроці виконано:

$$\theta \cdot |c_1 - c_0^*| \approx 0,00\ 726\ 098 \ll 1.$$

Для другого кроку покладемо

$$y_2(t) = c_2 \cos t + x_2(t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^1,$$

де

$$x_2(t) = -\frac{2\ 679\ 191 \cos t}{14\ 223\ 197\ 261} + \frac{11\ 140\ 594 \cos 3t}{61\ 113\ 645\ 011} + \frac{220\ 541 \cos 9t}{36\ 303\ 344\ 650} - \frac{835 \cos 15t}{2\ 622\ 815\ 013\ 818}.$$

Вимогу стиснення у разі оператора G для рівняння другого наближення виконано:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_1(s, c_1)) \right](\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,0454\ 055 \ll 1\ .$$

Для знаходження сталої $c_2 \in \mathbb{R}^1$ застосовуємо ітераційну схему (53), при цьому

$$c_2 \approx \frac{1\ 184\ 219}{6\ 286\ 734\ 039}, \quad F_2(c_2^*) \approx 0,$$

і умову (52) на другому кроці виконано: $\theta \cdot |c_2 - c_0^*| \approx 0,0362\ 726 \ll 1$. Вимогу стиснення для оператора G у разі рівняння третього наближення виконано:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_2(s, c_2^*)) \right](\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0,0454\ 064 \ll 1\ .$$

Для знаходження сталої $c_3 \in \mathbb{R}^1$ використаємо ітераційну схему (53), причому

$$c_3 \approx \frac{2\ 395\ 933}{12\ 719\ 180\ 575}, \quad F_3(c_3) \approx 0,$$

і умову (52) на третьому кроці виконано: $\theta \cdot |c_3 - c_0^*| \approx 0,0362\ 733 \ll 1$. Зауважимо, що ітераційна схема (53) дає змогу знаходити сталі $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}^1$ за одну ітерацію. Отже, знайдено третє наближення до розв'язку нелінійного рівняння Дюффінга (58):

$$y_3(t) = -\frac{345\cos t}{1\ 608\ 254\ 353\ 012} - \frac{19\ 084\ 003\cos 3t}{152\ 895\ 002} + \frac{85\ 835\cos 9t}{14\ 129\ 039\ 197} - \frac{1763\cos 15t}{5\ 564\ 301\ 169\ 003}.$$

З метою оцінювання точності знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Дюффінга (58) визначимо нев'язки

$$\Delta_k := \left|\left| y_k''(t) + y_k(t) - f(t) - y_k^3(t) \right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Зокрема,

$$\Delta_0 \approx 0,00195\,313,\ \Delta_1 \approx 8,87\,541{\cdot}10^{-6},\ \Delta_2 \approx 3,93\,095{\cdot}10^{-8},\ \Delta_3 \approx 1,77\,160{\cdot}10^{-10}.$$

Порівняємо знайдені нульове і перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (58) з нульовим $y_{0p}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*)$ та першими трьома наближеннями до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (58), які знайдено за допомогою методу Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t),\ u_1(t) = \frac{1}{163\ 840}\Big(30\cos 3t + \cos 9t\Big),$$

$$y_{2p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t),$$

$$u_2(t) = -\frac{3}{46\ 976\ 204\ 800}\Big(12\ 740\cos 3t + 448\cos 9t + 5\cos 15t\Big),$$

$$y_{3p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t) + \varepsilon^3\, u_3(t).$$

Тут

$$u_3(t) = \frac{3}{74\ 079\ 595\ 921\ 408\ 000}\Big(119\ 097\ 440\cos 3t +$$

$$+4\ 250\ 631\cos 9t + 61\ 270\cos 15t + 406\cos 21t\Big).$$

Визначені за допомогою методу Пуанкаре нульове та перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (58) характеризують нев'язки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left\| y''_{kp}(t) + y_{kp}(t) - f(t) - y^3_{kp}(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\delta_{1p}(0,1) \approx 8,85\,575 \cdot 10^{-6},\ \delta_{2p}(0,1) \approx 5,27\,928 \cdot 10^{-8},\ \delta_{3p}(0,1) \approx 3,59\,541 \cdot 10^{-10}.$$

Таким чином, знайдені нульове та перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння Дюффінга (58) за допомогою ітераційної схеми (62) точніші ніж відповідні нев'язки перших наближень, визначених за допомогою методу Пуанкаре. Зазначимо, що досліджена нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга (58) не є слабконелінійною на відміну від найбільш досліджених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [38, 100, 116, 139]. Крім того, в разі побудови наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Дюффінга (58) (на відміну від статті [110]) на кожному кроці забезпечено точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових членів. За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ у критичному випадку першого порядку для розв'язування крайової задачі (5), (6) можна використати техніку найменших квадратів [83, 140].

1.3.4 Побудова наближених розв'язків крайової задачі методом найменших квадратів

Побудова наближених розв'язків крайової задачі (8), (9) за методом простих ітерацій у критичному випадку першого порядку є найпростішою та найзручнішою, але для ітераційної процедури (47) характерна лінійна збіжність. Для ітерацій, побудованих за методом Ньютона—Канторовича, властивою є квадратична збіжність, однак використання схеми Ньютона—Канторовича пов'язане зі швидко збільшуваною від ітерації до ітерації складністю розрахунків. Побудова наближених розв'язків крайової задачі (8), (9) як за методом простих ітерацій, так і з використанням схеми Ньютона—Канторовича в критичному випадку першого порядку зумовлює необхідність фіксації малого параметра. Для знаходження наближених розв'язків крайової задачі (8), (9) в критичному випадку першого порядку як функцій малого параметра у вигляді часткових сум узагальненого ряду Фур'є (за М.М. Криловим) застосуємо класичний [5, 48] метод найменших квадратів. Припустимо, що $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_k(t),\ \ldots$ — система лінійно-незалежних неперервно-диференційовних n-вимірних вектор-функцій. Перше наближення до розв'язків крайової задачі (39), (40):

$$x_1(t,\varepsilon) = X_r(t) c_r(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$$

шукатимемо як розв'язок крайової задачі:

$$x_1'(t,\varepsilon) = A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg[Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1(t,\varepsilon)\Bigg], \tag{63}$$

$$\ell x_1(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Bigg[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon)\Bigg]. \tag{64}$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (63), (64) шукаємо у вигляді

$$x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_1^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t).$$

Позначимо $(n \times k)$-вимірну матрицю як

$$\varphi(t) = \Bigg[\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \ \dots\ \ \varphi_k(t)\Bigg].$$

Взагалі кажучи, перше наближення

$$\xi_1(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_1(\varepsilon), \quad c_1(\varepsilon) = \Bigg[c_1^{(1)}(\varepsilon)\ \ c_1^{(2)}(\varepsilon)\ \ \dots\ \ c_1^{(k)}(\varepsilon)\Bigg]^*$$

не є розв'язком крайової задачі (63), (64), тому вимагатимемо, щоб

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Bigg[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Bigg]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) -$$

$$-\xi_1'(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Bigg\|\Bigg[\varepsilon\ell_1 - \ell\Bigg]\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функція $F(c_1(\varepsilon))$ зображується у вигляді

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Phi(t,\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Bigg\|\Psi(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m},$$

де

$$\Phi(t,\varepsilon) = \Bigg[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Bigg]\varphi(t) - \varphi'(t), \quad \Psi(\varepsilon) = \Bigg[\varepsilon\ell_1 - \ell\Bigg]\varphi(\cdot).$$

З огляду на необхідність умови мінімізації функції $F(c_1(\varepsilon))$ отримуємо рівняння

$$\Bigg[\Gamma\Bigg(\varphi(\cdot)\Bigg) + \Gamma\Bigg(\ell\varphi(\cdot)\Bigg)\Bigg] \cdot c_1(\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon \cdot \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r^*),t,0)\,dt - \varepsilon \cdot \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot,c_r*),0),$$

що є однозначно розв'язним відносно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^k$ за умови невиродженості суми $(k \times k)$-вимірних матриць Грама [83, 124]:

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) = \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) \cdot \Phi(t,\varepsilon) dt, \quad \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = \Psi^*(\varepsilon) \cdot \Psi(\varepsilon).$$

Так само знаходимо вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r^*),t,0) dt + \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot,c_r^*),0) \right\},$$

який визначає перше наближення $x_1(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (63), (64). Тут

$$\xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r),t,0) dt + \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot,c_r),0) \right\}$$

є найкращим (в сенсі найменших квадратів) наближенням до частинного розв'язку крайової задачі (63), (64). Оскільки систему $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., ..., $\varphi_k(t)$, ... утворюють неперервно-диференційовні вектор-функції, то знайдене наближення також неперервно-диференційовне. Друге наближення до розв'язку крайової задачі (39), (40) $x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ шукаємо, як розв'язок крайової задачі:

$$dx_2(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg[Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + \tag{65}$$

$$+A_1(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg],$$

$$\ell x_2(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Bigg[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_2(\cdot,\ \varepsilon) + \tag{66}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg].$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (65), (66):

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_2(t,\varepsilon)=\varphi(t)c_2(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{k}c_2^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t),c_2(\varepsilon)=\Big[c_2^{(1)}(\varepsilon)\ \ c_2^{(2)}(\varepsilon)\ \ ...\ \ c_2^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

У загальному випадку доданок $\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)$ не є розв'язком крайової задачі (65), (66), тому вимагатимемо, щоб

$$F(c_2(\varepsilon))=\Bigg\|\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_2(t,\varepsilon)+\varepsilon^2A_2(t)+$$

$$+\varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\xi_2'(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]}+\Bigg\|\Big[\varepsilon\ell_1-\ell\Big]\xi_2(\cdot,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функцію $F(c_2(\varepsilon))$ зображують у вигляді

$$F(c_2(\varepsilon))=\int_a^b\Bigg\{\Phi(t,\varepsilon)c_2+\varepsilon^2A_2(t)+\varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg\}^*\times$$

$$\times\Bigg\{\Phi(t,\varepsilon)c_2+\varepsilon^2A_2(t)+\varepsilon R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg\}dt+$$

$$+\Bigg\{\Psi(\varepsilon)c_2+\varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}^*\times$$

$$\times\Bigg\{\Psi(\varepsilon)c_2+\varepsilon^2\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}.$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $F(c_2(\varepsilon))$ отримуємо рівняння

$$\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg]\cdot c_2(\varepsilon)=$$

$$= -\varepsilon \cdot \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt-$$

$$-\varepsilon \cdot \Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big].$$

За умови

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\,dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ крайової задачі (65), (66). Тут

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\}.$$

Таким чином, на другому кроці ітераційної процедури знайдено найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення $x_2(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ до частинного розв'язку крайової задачі (65), (66). Третє наближення до розв'язку крайової задачі (39), (40) $x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x_3^{(1)}(t,\varepsilon)$ шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$dx_3(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_3(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_r^*,t,0)+ \tag{67}$$

$$+A_1(t)x_3(t,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg],$$

$$\ell x_3(\cdot,\ \varepsilon)=\varepsilon\Bigg[J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_1 x_3(\cdot,\ \varepsilon)+ \tag{68}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg].$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (67), (68):

$$x_3^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_3(t,\varepsilon)=\varphi(t)c_3(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{k}c_3^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t),\ c_3(\varepsilon)=\Big[c_3^{(1)}(\varepsilon)\ \ c_3^{(2)}(\varepsilon)\ \ \dots\ \ c_3^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

У загальному випадку сума $\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$ не є розв'язком крайової задачі (67), (68), тому вимагатимемо, щоб

$$F(c_3(\varepsilon))=\Bigg\|\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_3(t,\varepsilon)+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]-\xi_3'(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{L^2[a,b]}+\Bigg\|\Big[\varepsilon\ell_1-\ell\Big]\xi_3(\cdot,\ \varepsilon)+$$

$$-\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. Функція $F(c_3(\varepsilon))$ зображується у вигляді

$$F(c_3(\varepsilon))=\int_a^b\Bigg\{\Phi(t,\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Bigg\}^*\times$$

$$\times\Bigg\{\Phi(t,\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Bigg\}dt+$$

$$+\left\{\Psi(\varepsilon)c_3+\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\}^*\times$$

$$\times\left\{\Psi(\varepsilon)c_3-\varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\}.$$

За умови

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]\neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_3(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+\right.$$

$$\left.+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x_3^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$ крайової задачі (67), (68). Тут

$$\xi_3(t,\varepsilon)=-\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\left\{\int_a^b\Phi^*(t,\varepsilon)\times\right.$$

$$\times\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+$$

$$\left.+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\}.$$

Таким чином, на третьому кроці ітераційної процедури маємо найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_3(t,\varepsilon)\approx X_r(t)c_r(\varepsilon)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon)$$

до частинного розв'язку крайової задачі (67), (68). Припустимо, що знайдено $(j+1)$-наближення ($j=1,2,\ \dots$) до розв'язку крайової задачі (39), (40). Наступне $(j+2)$-наближення до розв'язку крайової задачі (39), (40) шукаємо, як розв'язок крайової задачі

$$dx_{j+2}(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_{j+2}(t,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg[Z(z_0(t,c_r^*),t,0)+ \tag{69}$$

$$+A_1(t)x_{j+2}(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg],$$

$$\ell x_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Bigg[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon)+ \tag{70}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg].$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (69), (70):

$$x_{j+2}^{(1)}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2} \xi_i(t,\varepsilon)$$

визначає вектор-функція

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = \varphi(t)c_{j+2}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} c_{j+2}^{(i)}(\varepsilon)\varphi_i(t),\ \ c_{j+2}(\varepsilon) = \Big[c_{j+2}^{(1)}(\varepsilon)\ c_{j+2}^{(2)}(\varepsilon)\ ...\ c_{j+2}^{(k)}(\varepsilon)\Big]^*.$$

Вимагатимемо, щоб

$$F(c_{j+2}(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big[A(t)+\varepsilon A_1(t)\Big]\xi_{j+2}(t,\varepsilon)+\varepsilon\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + ... + \xi_j(t,\varepsilon)\Big] - \xi'_{j+2}(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+\Bigg\|\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_{j+2}(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + ... + \xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + ... + \xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min$$

для фіксованої матриці $\varphi(t)$. За умови

$$\det\Bigg[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Bigg] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \Bigg\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + ... + \xi_{j+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) -$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + ... + \xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt +$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку $x_{j+2}^{(1)}(t,\varepsilon)$ крайової задачі (69), (70). Тут

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \Bigg\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + ... + \xi_{j+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) -$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + ... + \xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt +$$

$$+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+...+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Bigg\}.$$

Таким чином, на $(j+2)$-му кроці ітераційної процедури знайдено найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до частинного розв'язку:

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx X_r(t)c_r(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{j+2} \xi_i(t,\varepsilon)$$

крайової задачі (69), (70). Задля оцінювання точності ітерацій за методом найменших квадратів у критичному випадку припустимо, що оператор $\Phi\Big(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)\Big)$ у деякому досить малому околі Ω нуля є оператором стиснення, при цьому для довільних вектор-функцій $y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon) \in \Omega$, справджується нерівність

$$\Big|\Big|\Phi y_1(t,\varepsilon) - \Phi y_2(t,\varepsilon)\Big|\Big| \le \lambda \cdot ||y_1(t,\varepsilon) - y_2(t,\varepsilon)||, \quad \lambda < 1.$$

Згідно з принципом Каччіопполі—Банаха [43, с. 605] у цьому випадку в досить малому додатному околі Ω нуля існує єдина нерухома точка $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi x(t,\varepsilon)$, яка є положенням рівноваги рівняння $x(t,\varepsilon) = \Phi\Big(x(t,\varepsilon)\Big)$. Для знаходження нерухомої точки $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi x(t,\varepsilon)$ застосовують ітераційну процедуру (47). Природно припустити, що перше наближення $x_1(t,\varepsilon) = \Phi(0) \neq 0$, тобто припустимо, що нерухома точка $x^*(t,\varepsilon)$ відображення $\Phi x(t,\varepsilon)$ є відмінною від нуля. У цьому випадку

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)\Big|\Big| = \Big|\Big|\Phi x^*(t,\varepsilon) - \Phi(0)\Big|\Big| \leq \lambda \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Позначимо

$$\delta_1(\varepsilon) = \frac{\Big|\Big|x_1(t,\varepsilon) - \xi_1(t,\varepsilon)\Big|\Big|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Величина $\delta_1(\varepsilon)$ залежить від вибору $(n \times k)$-матриці $\varphi(t)$. Використовуючи нерівність трикутника, одержуємо оцінку

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon) - \xi_1(t,\varepsilon)\Big|\Big| \leq (\lambda + \delta_1) \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Для другого наближення, обчисленого згідно з ітераційною процедурою (47), виконується нерівність

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)\Big|\Big| \leq \lambda^2 \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Позначимо

$$\delta_2(\varepsilon) = \frac{\Big|\Big|x_2(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\Big|\Big|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Використовуючи нерівність трикутника, одержуємо оцінку

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)\Big)\Big|\Big| \leq (\lambda^2 + \delta_2) \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Аналогічно

$$\Big|\Big|x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon)\Big|\Big| \leq (\lambda^k + \delta_k) \cdot ||x^*(t,\varepsilon)||.$$

Тут

$$\delta_k(\varepsilon) = \frac{\left|\left| x_k(t,\varepsilon) - \Big(\xi_1(t,\varepsilon) + \ \dots \ + \xi_k(t,\varepsilon)\Big) \right|\right|}{||x^*(t,\varepsilon)||}.$$

Для досить малої величини

$$\delta(\varepsilon) = \max_{0 \le i \le k} \delta_i(\varepsilon)$$

при $k \le \kappa$ виконуються нерівності

$$\lambda^k + \delta(\varepsilon) < \lambda^{k-1} + \delta(\varepsilon) < \ \dots \ < \lambda^2 + \delta(\varepsilon) < \lambda + \delta(\varepsilon) < 1,$$

які гарантують досить мале значення норми різниці

$$\left|\left| x^*(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{k} \xi_i(t,\varepsilon) \right|\right|.$$

На відміну від методу простих ітерацій використання побудованої за методом найменших квадратів ітераційної процедури дає змогу знаходити ітерації довільно високого порядку, однак точність наближення, отриманого за допомогою методу найменших квадратів, обмежена величиною порядку $\delta(\varepsilon)$, яка в свою чергу залежить від вибору $(n \times k)$-матриці $\varphi(t)$. Окрім того, на точність одержаних за методом найменших квадратів наближень впливають похибки наближених обчислень. Отже, доведено таку теорему [83, 124].

Теорема 1.6 *Припустимо, що для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконується умова (31) розв'язності породжувальної задачі. За цих умов для кожного кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (33) у разі (49) задача (39), (40) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на нульовий $x(t,0) \equiv 0$. У випадку*

$$\det \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) \right] \neq 0$$

цей розв'язок можна обчислити за допомогою збіжного для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ітераційного процесу:

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon) Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt + \Psi^*(\varepsilon) J(z_0(\cdot,c_r^*),0) \right\}; \ \ x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),$$

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+\right.$$

$$\left.+\Psi^*(\varepsilon)\Big[\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\};$$

$$x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon),\ \ \xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt+\right.$$

$$\left.+\Psi^*(\varepsilon)\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \xi_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},\ \dots\ ;$$

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon),\ \ j = 1,2,\ \dots\ , \tag{71}$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^b \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-\right.$$

$$-R_1(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \dots + \xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt + \Psi^*(\varepsilon)\times$$

$$\left.\times\Big[J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\dots+\xi_{j+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\dots+\xi_j(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\right\},\ \dots$$

Задача (5), (6) при цьому має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z_0(t,c_r^*)$, *і може бути наближеним за формулою* $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon),\ k = 1,2,\ \dots$, *за допомогою ітераційного процесу (71).*

У випадку періодичної крайової задачі для рівняння (5) для побудови наближеного розв'язку має сенс використовувати періодичну матрицю $\varphi(t)$, при цьому ітераційна процедура (71) значно спрощується, оскільки

$$\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = 0, \quad \Psi^*(\varepsilon) \equiv 0.$$

Окрім того, для лінійної періодичної крайової умови $\ell z(\cdot,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) - z(T,\varepsilon)$ справедливими є такі тотожності [83, 124]:

$$\ell_1 z(\cdot) = \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \equiv 0, \;\; J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0.$$

Наслідок 1.1 *Припустимо, що для задачі з періодичною крайовою умовою для рівняння (5) існує критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконується умова (31) розв'язності породжувальної задачі. За цих умов для кожного простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *кореня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (33) задача (8), (9) має єдиний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на нульовий $x(t,0) \equiv 0$. У випадку*

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right] \neq 0$$

цей розв'язок для $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ може бути наближеним за допомогою ітераційного процесу

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt;$$

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), \quad \xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[\varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt;$$

$$x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon), \quad \xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]dt, \; \dots;$$

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{j+2}\xi_i(t,\varepsilon), \;\; j = 1,2, \; \dots, \tag{72}$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon)+...+$$

$$+\xi_{j+1}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - R_1(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+...+\xi_j(t,\varepsilon)\Big]dt,\ ...$$

Задача з періодичною крайовою умовою для рівняння (5) при цьому має єдиний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z(t,0)\equiv z_0(t,c_r^*)$, *і може бути наближеним за формулою* $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*)+$ $+x_k(t,\varepsilon),\ k=1,2,\ ...$ *, за допомогою ітераційного процесу (72).*

Приклад 1.8 *Покажемо, що ітераційна процедура (72) є застосовною для знаходження наближення до періодичного розв'язку рівняння (50):*

$$\frac{dz}{dt} = (2t-1)z + \varepsilon z\ln z, \quad \ell z(\cdot) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0.$$

Породжувальну задачу (51) для цього рівняння досліджено в прикладі 1.6. Нормальна фундаментальна матриця однорідної частини диференціального рівняння (51) — функція $X(t) = e^{t^2-t}$. Оскільки $Q = 0$, то існує критичний випадок. Загальний розв'язок породжувальної задачі (51) має вигляд $z_0(t,c) = c\cdot e^{t^2-t}$. З огляду на єдиний нетривіальний розв'язок $c_1^* = e^{\frac{1}{6}}$ отримуємо сталу $B_0 = 1$. Покладемо [83, 124]

$$\varphi_6(t) = \Big[1 \quad t\cdot(1-t) \quad t\cdot(1-t)^2 \quad t\cdot(1-t)^3 \quad t\cdot(1-t)^4 \quad t\cdot(1-t)^5\Big].$$

Матриця $\varphi_6(t)$ задовольняє крайову умову (50) і визначає невироджену (6×6)-матрицю Грама $\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)$. Задля перевірки останнього твердження знайдемо розвинення

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)\right] \approx \frac{1212919}{647\ 244\ 981\ 444\ 399\ 245\ 107\ 200\ 000} +$$

$$+\frac{3\ 679\ 913\ 919\ 765\ 888\ 641}{1\ 386\ 398\ 750\ 253\ 903\ 183\ 019\ 622\ 400\ 000}\cdot\varepsilon^2 + ... \neq 0.$$

Невиродженість матриці Грама $\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)$ забезпечує можливість знаходження наближення до розв'язку крайової задачі (50) за допомогою ітераційного процесу (72). Перше наближення $x_1(t,\varepsilon)\approx\xi_1(t,\varepsilon) = \varphi(t)\cdot c_1(\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (39), (40) визначає вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)\right]^{-1}\cdot\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r^*),t,0)dt \approx$$

$$\approx \mathrm{col}\Bigg[-2,72\,097\cdot 10^{-7}-1,45\,621\cdot 10^{-10}\cdot\varepsilon-0,00\,320\,359\cdot\varepsilon^2-$$
$$-1,59\,131\cdot 10^{-7}\cdot\varepsilon^3+0,0\,000\,809\,896\cdot\varepsilon^4-0,0\,000\,408\,258\cdot\varepsilon^5+$$
$$+0,000\,414\,518\cdot\varepsilon^6-0,00\,317\,151\cdot\varepsilon^7+0,0\,178\,324\cdot\varepsilon^8-$$
$$-0,0\,720\,259\cdot\varepsilon^9+0,198\,016\cdot\varepsilon^{10}-0,332\,254\cdot\varepsilon^{11}+0,257\,046\cdot\varepsilon^{12},$$
$$2,72\,073\cdot 10^{-7}-0,19\,554\cdot\varepsilon+0,00\,343\,683\cdot\varepsilon^2+0,00\,396\,644\cdot\varepsilon^3-$$
$$-0,0\,000\,726\,042\cdot\varepsilon^4-0,0\,000\,533\,456\cdot\varepsilon^5-0,000\,424\,831\cdot\varepsilon^6+$$
$$+0,00\,326\,058\cdot\varepsilon^7-0,0\,183\,758\cdot\varepsilon^8+0,0\,744\,472\cdot\varepsilon^9-$$
$$-0,205\,278\cdot\varepsilon^{10}+0,34\,539\cdot\varepsilon^{11}-0,267\,864\cdot\varepsilon^{12},$$
$$-1,35\,394\cdot 10^{-7}+0,563\,049\cdot\varepsilon+0,106\,853\cdot\varepsilon^2-0,00\,649\,617\cdot\varepsilon^3-$$
$$-0,00\,238\,175\cdot\varepsilon^4+0,000\,114\,958\cdot\varepsilon^5+0,000\,117\,308\cdot\varepsilon^6-$$
$$-0,000\,358\,307\cdot\varepsilon^7+0,00\,138\,363\cdot\varepsilon^8-0,00\,299\,176\cdot\varepsilon^9+$$
$$+0,000\,921\,885\cdot\varepsilon^{10}+0,010\,609\cdot\varepsilon^{11}-0,0172\,272\cdot\varepsilon^{12},$$
$$1,75\,841\cdot 10^{-7}-0,515\,905\cdot\varepsilon-0,237\,509\cdot\varepsilon^2-0,00\,430\,925\cdot\varepsilon^3+$$
$$+0,00\,420\,828\cdot\varepsilon^4+0,000\,197\,839\cdot\varepsilon^5-0,0\,000\,183\,747\cdot\varepsilon^6-$$
$$-0,000\,567\,387\cdot\varepsilon^7+0,00\,276\,651\cdot\varepsilon^8-0,00\,766\,056\cdot\varepsilon^9+$$
$$+0,0\,051\,925\cdot\varepsilon^{10}+0,0\,295\,068\cdot\varepsilon^{11}-0,0\,616\,531\cdot\varepsilon^{12},$$
$$-8,08\,892\cdot 10^{-8}+0,343\,937\cdot\varepsilon+0,261\,311\cdot\varepsilon^2+0,00\,287\,231\cdot\varepsilon^3-$$
$$-0,00\,364\,128\cdot\varepsilon^4-0,000\,270\,189\cdot\varepsilon^5+0,0\,014\,102\cdot\varepsilon^6-$$
$$-0,00\,992\,461\cdot\varepsilon^7+0,05\,392\cdot\varepsilon^8-0,208\,951\cdot\varepsilon^9+$$
$$+0,547\,188\cdot\varepsilon^{10}-0,867\,501\cdot\varepsilon^{11}+0,628\,253\cdot\varepsilon^{12},$$
$$4,04\,485\cdot 10^{-8}-1,23\,674\cdot 10^{-10}\cdot\varepsilon-0,130\,656\cdot\varepsilon^2-$$
$$-1,48\,305\cdot 10^{-7}\cdot\varepsilon^3+0,0\,018\,283\cdot\varepsilon^4-0,0\,000\,369\,977\cdot\varepsilon^5+$$
$$+0,000\,342\,181\cdot\varepsilon^6-0,00\,291\,183\cdot\varepsilon^7+0,0\,168\,427\cdot\varepsilon^8-$$
$$-0,0\,707\,827\cdot\varepsilon^9+0,203\,738\cdot\varepsilon^{10}-0,357\,727\cdot\varepsilon^{11}+0,287\,339\cdot\varepsilon^{12}\Bigg].$$

Зображення вектора $c_1(\varepsilon)$ одержано розвиненням добутку

$$-\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi_6(\cdot)\Big)\right]^{-1}\cdot\int_0^T\Phi^*(t,\varepsilon)Z(z_0(t,c_r^*),t,0)\,dt$$

у ряд Тейлора в малому околі точки $\varepsilon = 0,1$ (нехтуючи доданками, які містять малий параметр ε степеня вище за 12) і зведенням подібних доданків. Коефіцієнти розвинення подано з точністю до шести значущих цифр; наступні наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50) не наведено, оскільки їх запис з точністю до шести значущих цифр не відрізняється від першого наближення. Задля оцінки точності наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50), одержаних за допомогою ітераційного процесу (72), зафіксуємо $\varepsilon = 0,1$ і збільшимо розмірність матриці

$$\varphi_{12}(t) = \mathrm{col}\left[1\ ,\quad t\cdot(1-t)\ ,\quad t\cdot(1-t)^2\ ,\ \ldots\ ,\quad t\cdot(1-t)^{11}\right]^*.$$

Матриця $\varphi_{12}(t)$ задовольняє крайову умову (50) і визначає невироджену (12×
×12)-матрицю Грама $\Gamma\Big(\varphi_{12}(\cdot)\Big)$, при цьому

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi_{12}(\cdot)\Big)\right] \approx 5,93\ 620\cdot 10^{-63}.$$

Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50), одержане за допомогою методу найменших квадратів, має вигляд

$$x_1(t,\varepsilon) \approx -0,0\ 000\ 320\ 264 - t\cdot\Big[0,0196\ 536\cdot(1-t)+$$

$$+0,0601\ 986\cdot(1-t)^2 - 0,0\ 718\ 794\cdot(1-t)^3 + 0,0\ 869\ 444\cdot(1-t)^4-$$
$$-0,07\ 242\cdot(1-t)^5 + 0,0\ 594\ 333\cdot(1-t)^6 - 0,038\ 034\cdot(1-t)^7 t+$$
$$+0,0\ 214\ 742\cdot(1-t)^8 - 0,00\ 829\ 416\cdot(1-t)^9+$$
$$+0,00\ 207\ 076\cdot(1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 446\cdot(1-t)^{11}\Big].$$

Друге наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50)

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$$

визначає вектор

$$\xi_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\varphi(t)\cdot\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1}\int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[Z(z_0(t,c_r^*)+\xi_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-$$

$$-Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - A_1(t)\xi_1(t,\varepsilon)\Big]dt.$$

Отже,

$$x_2(t,\varepsilon) \approx -0,0\ 000\ 328\ 073 - t \cdot \Big[0,0\ 196\ 527 \cdot (1-t) +$$
$$+0,0\ 601\ 981 \cdot (1-t)^2 - 0,0\ 718\ 842 \cdot (1-t)^3 + 0,086\ 969 \cdot (1-t)^4 -$$
$$-0,072\ 472 \cdot (1-t)^5 + 0,0\ 595\ 019 \cdot (1-t)^6 - 0,0\ 381\ 007 \cdot (1-t)^7 +$$
$$+0,0\ 215\ 211 \cdot (1-t)^8 - 0,00\ 831\ 588 \cdot (1-t)^9 +$$
$$+0,00\ 207\ 643 \cdot (1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 812 \cdot (1-t)^{11}\Big].$$

Третє наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50) відповідно до схеми (72) $x_3(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon)$ визначає вектор

$$\xi_3(t,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right]^{-1} \int_0^T \Phi^*(t,\varepsilon)\Big[Z(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), t, \varepsilon) -$$
$$-Z(z_0(t,c_r^*) + \xi_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon) - A_1(t)\xi_2(t,\varepsilon)\Big]\, dt,$$

при цьому

$$x_3(t,\varepsilon) \approx -0,0\ 000\ 328\ 073 - t \cdot \Big[0,0196\ 527 \cdot (1-t) +$$
$$+0,0601\ 981 \cdot (1-t)^2 - 0,0\ 718\ 841 \cdot (1-t)^3 + 0,086\ 969 \cdot (1-t)^4 -$$
$$-0,072\ 472 \cdot (1-t)^5 + 0,0595\ 019 \cdot (1-t)^6 - 0,0\ 381\ 007 \cdot (1-t)^7 +$$
$$+0,0\ 215\ 211 \cdot (1-t)^8 - 0,0\ 083\ 159 \cdot (1-t)^9 +$$
$$+0,00\ 207\ 644 \cdot (1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 813 \cdot (1-t)^{11}\Big].$$

Зазначимо, що перші три наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50), одержані за допомогою методу найменших квадратів, задовольняють крайову умову (50). Точність цих наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50) демонструє послідовне зменшення від ітерації до ітерації норм нев'язок [83, 124]:

$$\Delta_i(\varepsilon) = \left\{ \Big|\Big| A(t)z_i(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z_i(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - dz_i(t,\varepsilon)/dt \Big|\Big|^2_{\mathbb{C}[0;1]} + \right.$$
$$\left. + \Big|\Big| \ell z_i(\cdot) - \alpha - J(z_0(\cdot,c_r^*) + x_i(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big|\Big|^2_{\mathbb{R}} \right\}^{\frac{1}{2}},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

розв'язку періодичної задачі для рівняння (50). Дійсно, для $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\Delta_0(0,1) = \left\| A(t)z_0(t,c_r^*) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0) - z_0'(t,c_r^*) \right\|_{\mathbb{C}[0;1]} \approx 0,0196\ 893;$$

$$\Delta_1(0,1) = \left\| A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - dx_1(t,\varepsilon)/dt \right\|_{\mathbb{C}[0;1]} \approx$$

$$\approx 1,29\ 484 \cdot 10^{-7};$$

$$\Delta_2(0,1) = \left\| A(t)x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - dx_2(t,\varepsilon)/dt \right\|_{\mathbb{C}[0;1]} \approx$$

$$\approx 2,20\ 191 \cdot 10^{-8};$$

$$\Delta_3(0,1) = \left\| A(t)x_3(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_3(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - dx_3(t,\varepsilon)/dt \right\|_{\mathbb{C}[0;1]} \approx$$

$$\approx 2,20\ 212 \cdot 10^{-8}.$$

Збіжність ітераційної процедури (72) для періодичної задачі для рівняння (50) зберігається і для $\varphi(t) = \varphi_{12}(t)$, $\varepsilon = 0,5$. У цьому випадку (12×12)-вимірна матриця Грама $\Gamma\Big(\varphi_{12}(\cdot)\Big)$ також є невиродженою:

$$\det\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big)\right] \approx 1,51\ 014 \cdot 10^{-61}.$$

Перші три наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50), одержані за допомогою методу найменших квадратів, мають вигляд

$$x_1(t,\varepsilon) \approx -0,000\ 796\ 009 + t \cdot \Big[-0,0\ 971\ 863 \cdot (1-t) +$$

$$+0,32\ 332 \cdot (1-t)^2 - 0,422\ 451 \cdot (1-t)^3 + 0,545\ 246 \cdot (1-t)^4 -$$

$$-0,509\ 062 \cdot (1-t)^5 + 0,450\ 928 \cdot (1-t)^6 - 0,325\ 793 \cdot (1-t)^7 +$$

$$+0,200\,838 \cdot (1-t)^8 + 0,0\,903\,003 \cdot (1-t)^9 + 0,0\,266\,859 \cdot (1-t)^{10} - 0,00\,344\,663 \cdot (1-t)^{11} \Big];$$

$$x_2(t,\varepsilon) \approx -0,000\ 815\ 267 + t \cdot \Big[-0,097\ 156 \cdot (1-t) +$$

$$+0,323\ 286 \cdot (1-t)^2 - 0,423\ 051 \cdot (1-t)^3 + 0,548\ 582 \cdot (1-t)^4 -$$

$$-0,516\ 835 \cdot (1-t)^5 + 0,462\ 339 \cdot (1-t)^6 - 0,338\ 136 \cdot (1-t)^7 +$$

$$+0,210\,577\cdot(1-t)^8-0,0\,955\,366\cdot(1-t)^9+0,0\,284\,016\cdot(1-t)^{10}-0,00\,368\,446\cdot(1-t)^{11}\Big];$$

$$x_3(t,\varepsilon)\approx -0,000\,815\,255+t\cdot\Big[-0,097\,156\cdot(1-t)+$$

$$+0,323\,285\cdot(1-t)^2-0,42\,305\cdot(1-t)^3+0,548\,579\cdot(1-t)^4-$$

$$-0,51\,683\cdot(1-t)^5+0,462\,342\cdot(1-t)^6-0,33\,816\cdot(1-t)^7+$$

$$+0,210\,613\cdot(1-t)^8-0,0\,955\,622\cdot(1-t)^9+0,0\,284\,098\cdot(1-t)^{10}-0,00\,368\,526\cdot(1-t)^{11}\Big].$$

Точність наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння (50), одержаних за допомогою методу найменших квадратів, демонструє послідовне зменшення від ітерації до ітерації норм нев'язок розв'язку періодичної задачі для рівняння (50). Дійсно, для $\varepsilon = 0,5$ маємо

$$\Delta_1(\varepsilon)\approx 9,96\,275\cdot 10^{-11};\ \Delta_2(\varepsilon)\approx 2,12\,559\cdot 10^{-15};\ \Delta_3(\varepsilon)\approx 1,06\,182\cdot 10^{-16}.$$

Зазначимо, що отримані таким способом перші три наближення задовольняють крайову умову (50).

Порівняємо точність одержаних за допомогою побудованих ітераційних процедур наближених розв'язків періодичної задачі для рівняння (50), для цього зафіксуємо значення малого параметра $\varepsilon = 0,1$. Якість наближень, які маємо за допомогою ітераційного процесу (54), що відповідає методу Ньютона—Канторовича, демонструє послідовне зменшення норм нев'язок:

$$\Delta_1(0,1)\approx 0,0196\,893,\ \Delta_2(0,1)\approx 1,23\,248\cdot 10^{-3},\ \Delta_3(0,1)\approx 6,28\,002\cdot 10^{-5}.$$

Точність наближень, одержаних за допомогою ітераційного процесу (72), який відповідає методу найменших квадратів, демонструє найшвидше зменшення нев'язок:

$$\Delta_1(0,1)\approx 1,29\,484\cdot 10^{-7};\ \Delta_2(0,1)\approx 2,20\,191\cdot 10^{-8};\ \Delta_3(0,1)\approx 2,20\,212\cdot 10^{-8}.$$

За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$ для розв'язування крайової задачі (5), (6) з використанням техніки лінеаризації можна використовувати також модифіковану схему простих ітерацій [82]. За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\neq 0$ для розв'язування крайової задачі (5), (6) з використанням техніки лінеаризації можна застосувати техніку зведення до критичного випадку першого порядку [138] або уточнення розкладів нелінійностей крайової задачі (5), (6), при цьому можливі критичні випадки другого чи вищого порядку [12, 17, 18, 56, 90].

1.4 Критичний випадок другого порядку

Припустимо, що в задачі про побудову розв'язку крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок, і рівняння (33) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (33), одержуємо задачу про пошук розв'язків [12, 17, 18, 56, 90]:

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),\ \ x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b],\ \ x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

крайової задачі (34), (35) в околі породжувального розв'язку

$$z_0(t,c_0^*) = X_r(t)\, c_0^* + G[f(s);\alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що виконується нерівність $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$. У малому околі точок $x(t,\varepsilon) = 0$ і $\varepsilon = 0$ мають місце розклади (56) та (57), де

$$R_0(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) + R_1(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Тут

$$d^2(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) = A_3(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) + 2\,\varepsilon A_4(z_0(t,c_0^*))x(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_5(z_0(t,c_0^*)),$$

крім того,

$$A_3(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) := \frac{\partial}{\partial x}\left\{ Z'_x(z,t,\varepsilon)\, x \right\}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$A_4(z_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial}{\partial z}\left\{ Z'_\varepsilon(z,t,\varepsilon) \right\}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$A_5(z_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Аналогічно

$$J_0(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 J_0(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)) + J_1(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Тут

$$d^2 J_0(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)) =$$

$$= \ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon))x(\cdot, \varepsilon) + 2\,\varepsilon\,\ell_4(z_0(\cdot, c_0^*))x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_5(z_0(\cdot, c_0^*)),$$

крім того,

$$\ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon))x(\cdot, \varepsilon) := \frac{\partial}{\partial x}\left\{ J'_x(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\, x \right\}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_0^*),\\ \varepsilon \;=\; 0,}}$$

$$\ell_4(z_0(\cdot, c_0^*))x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ J'_\varepsilon(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right\}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_0^*),\\ \varepsilon \;=\; 0,}}$$

$$\ell_5(z_0(\cdot, c_0^*)) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(t, c_0^*),\\ \varepsilon \;=\; 0.}}$$

Розв'язок крайової задачі (34), (35) природно шукати в околі розв'язку задачі

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0(t, c_0^*), t, \varepsilon),\ \ \ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot, c_0^*), \varepsilon)$$

у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G_1(t), G_1(t) := G\Big[Z(z_0(s, c_0^*)s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*), \varepsilon) \Big](t).$$

Позначимо сталу $(d \times r)$-вимірну матрицю як

$$B_1 = P_{Q_d^*}\Bigg\{ \Big[\ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), G_1(\cdot)) + \ell_4(z_0(\cdot, c_0^*)) \Big] X_r(\cdot) -$$

$$-\ell K \Big[\Big[A_3(z_0(s, c_0^*), G_1(s)) + A_4(z_0(s, c_0^*)) \Big] X_r(s) \Big](\cdot) \Bigg\}.$$

З урахуванням других диференціалів нелінійностей:

$$Z(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

а також рівності (33), рівняння (32) набуває вигляду

$$(B_0 + \varepsilon B_1)\, c(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\Bigg\{ \varepsilon \ell_1 G_1(\cdot) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*)) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)c(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),G_1(\cdot))G_1(\cdot)+$$

$$+\varepsilon^2\,\ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))G_1(\cdot)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_5(z_0(\cdot,c_0^*))+J_1(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Bigg[\varepsilon\,A_1(s)G_1(s)+\varepsilon\,A_2(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(z_0(s,c_0^*),G_1(s))G_1(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(z_0(t,c_0^*),X_r(s)c(\varepsilon))X_r(s)c(\varepsilon)+\varepsilon^2\,A_4(z_0(s,c_0^*))G_1(s)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_5(z_0(s,c_0^*))+R_1(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\}.$$

Це рівняння є розв'язним за умови

$$P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}P_{Q_d^*}=0,\quad P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}((B_0+\varepsilon B_1)^*). \tag{73}$$

За умови (73) принаймні один розв'язок крайової задачі (34), (35) визначає операторна система:

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)c(\varepsilon)+\varepsilon\,G_1(t), \tag{74}$$

$$c(\varepsilon)=(B_0+\varepsilon B_1)^+\,P_{Q_d^*}\Bigg\{\varepsilon\ell_1G_1(\cdot)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*))+$$

$$+\frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)c(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),G_1(\cdot))G_1(\cdot)+$$

$$+\varepsilon^2\,\ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))G_1(\cdot)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_5(z_0(\cdot,c_0^*))+J_1(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Bigg[\varepsilon\,A_1(s)G_1(s)+\varepsilon\,A_2(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(z_0(s,c_0^*),G_1(s))G_1(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(z_0(t,c_0^*),X_r(s)c(\varepsilon))X_r(s)c(\varepsilon)+\varepsilon^2\,A_4(z_0(s,c_0^*))G_1(s)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_5(z_0(s,c_0^*))+R_1(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\}.$$

Для побудови розв'язку операторної системи (74) за умови (73) застосуємо метод простих ітерацій [116]. Таким чином, доведено таку теорему [28].

Теорема 1.7 *(Достатня умова). Нехай виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \neq n$) породжувальної задачі і для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок. Припустимо також, що рівняння (33) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Крім того, нехай виконується умова (73). Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжувальних сталих (33) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ для знаходження принаймні одного розв'язку задачі (5), (6) застосовною є операторна система (74).*

За умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$ у випадку (73) будемо казати, що для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок другого порядку. У частинному випадку за умови $P_{(B_0+\varepsilon B_1)} = 0$ розв'язок задачі (5), (6) є єдиним. Тут $P_{(B_0+\varepsilon B_1)} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{N}(B_0 + \varepsilon B_1)$ — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроєктор. Критичний випадок другого порядку вперше описано в [56] для нелінійних періодичних крайових задач. Урахування похідних

$$A_2(z(t, c_0^*)) \neq 0, \;\; A_3(z(t, c_0^*), x(t, \varepsilon)) \neq 0, \;\; \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*)) \neq 0, \;\; \ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon)) \neq 0$$

відрізняє теорему 1.7 від аналогічних теорем [17, с. 42], [18, с. 193]. Крім того, розглядуваний випадок нелінійностей крайової задачі (5), (6), для яких $A_3(z(t, c_0^*), x(t, \varepsilon)) \cdot x(t, \varepsilon) \neq 0$, $\ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon))x(\cdot, \varepsilon) \neq 0$, є загальнішим, ніж наведений у [85]. Матриця B_1 аналогічна, але істотно відрізняється від використаної однойменної матриці [17, 18, 38]. Довжину відрізка $[0, \varepsilon_*]$, на якому застосовано метод простих ітерацій, можна оцінити як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [17, 18, 38, 56, 90, 115, 116, 135, 137], так і безпосередньо з умови стиснення оператора, визначеного операторною системою (74), аналогічно до [77]. Необхідна і достатня умова (32) розв'язності задачі (5), (6) визначає вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, для знаходження якого в теоремі 1.7 використовується техніка лінеаризації разом із методом простих ітерацій. У цьому випадку, зокрема, в процесі визначення наближень до періодичного розв'язку рівняння (5) з'являються вікові члени. Щоб уникнути цього, для розв'язування рівняння (32) скористаємось ефективним методом Ньютона—Канторовича [43, 87, 131]. Згідно з прийнятими угодами функція $F(c(\varepsilon)) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d$ є двічі неперервно-диференційовною за невідомою $c(\varepsilon)$ в малому околі точки c_0^*. Припустимо, що для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується умова (52). Тоді згідно з [43] для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) застосовною є ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^+ F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots \, ,$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) є квадратичною. Розв'язок вихідної задачі (5), (6) визначає ітераційна схема (54). Таким чином, доведено таку теорему [28].

Теорема 1.8 *(Достатня умова). Нехай виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \neq n$) породжувальної задачі і для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок. Припустимо, що рівняння (33) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Нехай виконується умова (73). Крім того, припустимо, що для рівняння (32) для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується умова (52). Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжувальних сталих (33) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ з метою пошуку принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) застосовують ітераційну схему (54).*

Проміжок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, збіжності ітераційної схеми (54) до розв'язку задачі (5), (6) можна знайти з умов (52) та (55). Тоді наближення до розв'язку крайової задачі (5), (6), одержані за допомогою ітераційної схеми (54), задовольняють відповідні наближення до крайових умов (6). Зокрема, у процесі визначення наближень до періодичного розв'язку рівняння (5), за виконання умов (52) і (55) наближення, одержані за допомоги ітераційної схеми (54), не містять вікових членів.

1.4.1 Періодична задача для рівняння Льєнара

Продемонструємо ефективність теореми 1.8 на прикладі задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків:

$$y(t, \varepsilon): \ y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2[0; \varepsilon_0],$$

нелінійного рівняння Льєнара [42, с. 174], [105]:

$$y'' + y = \varepsilon\, Y(y, t, \varepsilon). \tag{75}$$

Нелінійність $Y(y, t, \varepsilon)$ рівняння Льєнара (75) припускаємо двічі неперервно-диференційовною за невідомою y в малому околі породжувального розв'язку і за малим параметром ε у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо вектор-функцію $Y(y, t, \varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною t на відрізку $[0, 2\pi]$. Періодичні розв'язки нелінійного рівняння Льєнара (75) шукатимемо в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t, \quad c_{0a}, c_{0b} \in \mathbb{R}^1,$$

однорідної частини цього рівняння. Припустимо, шо виконується умова розв'язності:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} f(t)\, dt = 0$$

2π-періодичної задачі для рівняння $y'' + y = f(t)$, яка має однопараметричну сім'ю розв'язків:

$$y_0(t, c_0) = c_{0a}\,\cos t + c_{0b}\,\sin t + G\Big[f(s)\Big](t), \quad c_{0a}\,, c_{0b}\,\in \mathbb{R}^1,$$

подану оператором Гріна:

$$G\Big[f(s)\Big](t) := \int_0^t \sin(t-s)\,f(s)\,ds.$$

Необхідна і достатня умови існування розв'язку

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t,\varepsilon), \quad c_0 := \begin{pmatrix} c_{0a} \\ c_{0b} \end{pmatrix},$$

вихідної 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара має вигляд

$$F(c(\varepsilon)) := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\,dt = 0. \tag{76}$$

Прямуючи в рівності (76) до межі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо необхідну умову

$$F_0(c_0) := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y_0(t, c_0), t, 0)\,dt = 0 \tag{77}$$

існування шуканого розв'язку

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t,\varepsilon), \quad x(t,\varepsilon) = c_a(\varepsilon)\,\cos t + c_b(\varepsilon)\,\sin t +$$

$$+ x^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x^{(1)}(t,\varepsilon) := \varepsilon\, G\Big[Y(y(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t),\ c_{0a}\,, c_{0b}\,\in \mathbb{R}^1.$$

Таким чином, доведено таку лему [28].

Лема 1.2 *Припустимо, що в малому околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi]$ 2π-періодична слабконелінійна крайова задача для рівняння Льєнара (75) має розв'язок*

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi], \quad y(t,\cdot) \in \mathbb{C}^2[0; \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $y(t, 0) = y_0(t, c_0^*)$. Тоді виконується рівність (77).

Рівняння (77) традиційно називають рівнянням для породжувальних амплітуд 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75). Припустимо, що рівняння (77) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $c_0^* \in \mathbb{R}^2$ рівняння (77), отримуємо задачу про пошук розв'язку

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), \quad c_0^* := \begin{pmatrix} c_{0a}^* \\ c_{0b}^* \end{pmatrix},$$

крайової задачі (34), (35) в околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*)$. У малому околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ існує розвинення

$$Y(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Y(y_0(t, c_0^*), t, 0) + A_1(t)x + \tag{78}$$

$$+\varepsilon A_2(t) + R_0(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon).$$

Тут

$$A_1(t) = \frac{\partial Y(y,t,\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y \;=\; y_0(t,c_0^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}}, \quad A_2(t) = \frac{\partial Y(y,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{y \;=\; y_0(t,c_0^*), \\ \varepsilon \;=\; 0}}.$$

Залишок $R_0(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ розвинення функції $Y(y,t,\varepsilon)$ має вищий порядок малості за невідомою x в малому околі нуля і за малим параметром ε у малому додатному околі нуля, ніж перші три члени розвинення (78), тому $R_0(y_0(t, c_0^*), t, 0) \equiv 0$. Позначимо сталу (2×2)-вимірну матрицю як

$$B_0 = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} A_1(t) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \end{pmatrix} dt.$$

За умови невиродженості матриці B_0 для розв'язування 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) застосовується теорема 1.5. Розглянемо менш вивчений випадок виродженості матриці B_0. У малому околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ і точки $\varepsilon = 0$ існує розвинення (78), де

$$R_0(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 Y(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon))x(t,\varepsilon) +$$

$$+R_1(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon).$$

Тут

$$d^2 Y(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)) = A_3(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)) + 2\,\varepsilon A_4(y_0(t, c_0^*))x(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_5(y_0(t, c_0^*)),$$

крім того,

$$A_3(y_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) := \frac{\partial}{\partial x}\left\{Y_x'(y,t,\varepsilon)\,x\right\}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$A_4(y_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial}{\partial y}\left\{Y_\varepsilon'(y,t,\varepsilon)\right\}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$A_5(y_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial^2 Y(y,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара $y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*)+$ $+x(t,\varepsilon)$ природно шукати в околі розв'язку 2π-періодичної задачі

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Y(y_0(t,c_0^*),t,\varepsilon)$$

у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = c_a(\varepsilon)\,\cos t + c_b(\varepsilon)\,\sin t + \varepsilon\, G_1(t), G_1(t) := G\Big[Y(y_0(s,c_0^*)s,\varepsilon)\Big](t).$$

Позначимо сталу (2×2)-вимірну матрицю як

$$B_1 := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \Big[A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t)) + A_4(y_0(t,c_0^*))\Big] X_2(t)\,dt,$$

де

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

є (1×2)-вимірною матрицею. З урахуванням другого диференціала нелінійності $Y(y_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, а також рівності (77) рівняння (76) набуває вигляду

$$(B_0+\varepsilon B_1)\,c(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \Bigg[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s) + \varepsilon\, A_2(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\, A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t))G_1(t) + \varepsilon^2\, A_4(y_0(t,c_0^*))G_1(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(y_0(t,c_0^*),X_2(t)c(\varepsilon))X_2(t)c(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_5(y_0(t,c_0^*))+$$

$$+R_1(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg]\,X_2(t)\,dt.$$

Останнє рівняння є розв'язним за умови

$$\det(B_0+\varepsilon B_1)\neq 0. \tag{79}$$

У випадку (79) єдиний розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара визначає операторна система:

$$y(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),\;\; x(t,\varepsilon)=X_r(t)c(\varepsilon)+\varepsilon\,G_1(t), \tag{80}$$

$$c(\varepsilon)=(B_0+\varepsilon B_1)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}\Bigg[\varepsilon\,A_1(s)G_1(s)+\varepsilon\,A_2(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t))G_1(t)+\varepsilon^2\,A_4(y_0(t,c_0^*))G_1(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(y_0(t,c_0^*),X_2(t)c(\varepsilon))X_2(t)c(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_5(y_0(t,c_0^*))+$$

$$+R_1(y_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg]\,X_2(t)\,dt.$$

Для побудови розв'язку операторної системи (80) за умови (79) застосовується метод простих ітерацій [116]. Таким чином, доведено таке твердження [28].

Лема 1.3 *Припустимо, що рівняння (77) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*\in\mathbb{R}^2$. Припустимо також, що виконано умову (79). Тоді для кореня $c_0^*\in\mathbb{R}^2$ рівняння для породжувальних сталих (77) в околі породжувального розв'язку $y_0(t,c_0^*)$ з метою пошуку розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) за умови (52) застосовною є операторна система (80).*

За умови (79) 2π-періодична задача для рівняння Льєнара (75) є критичним випадком другого порядку [18, 19, 56, 90, 115, 116, 135, 137]. Матриця B_1 аналогічна, але істотно відрізняється від раніше використовуваної однойменної матриці [12, 15, 17]. Необхідну і достатню умови розв'язності 2π-періодичої задачі для рівняння Льєнара (75) визначає вектор $c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^2$, для знаходження якого в теоремі 1.8 використано техніку лінеаризації спільно з методом простих ітерацій [92]. У цьому випадку, зокрема, в процесі пошуку наближень

до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (75), з'являються вікові члени. Щоб уникнути цього, для розв'язування 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) скористаємось ефективним методом Ньютона—Канторовича [43, 87, 131]. Згідно з прийнятими угодами функція $F(c(\varepsilon))$ є двічі неперервно-диференційовною за невідомою $c(\varepsilon)$ у малому околі точки c_0^*. Припустимо, що для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується умова (52). Тоді згідно з [43] для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) застосовується ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^{-1} F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) є квадратичною. Шуканий розв'язок вихідної 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) визначає ітераційна схема

$$\begin{gathered} y_{k+1}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ , \\ x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_2(t)\xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),\ F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \\ x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Y(y_0(s,c_0^*) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t),\ c_{k+1}(\varepsilon) = c_0^* + \xi_{k+1}(\varepsilon). \end{gathered} \tag{81}$$

Таким чином, доведено таке твердження [28].

Лема 1.4 *Припустимо, що рівняння (77) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Припустимо також, що 2π-періодична задача для рівняння Льєнара (75) є критичним випадком другого порядку. Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжувальних сталих (77) в околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ з метою пошуку розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) застосовною є ітераційна схема (81).*

Проміжок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, збіжності ітераційної схеми (81) до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (75) можна знайти з умов (52) і (55) з урахуванням умови стиснення оператора, який визначено операторною системою (74) аналогічно до [77].

Приклад 1.9 *Продемонструємо ефективність леми 1.4 на прикладі задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків рівняння Льєнара:*

$$y'' + y = \varepsilon \cdot \left(\frac{y^3}{3} - y\right) + \varepsilon^2 \sin t. \tag{82}$$

Періодичні розв'язки нелінійного рівняння Льєнара (82) шукатимемо в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t, \quad c_{0a}\,, c_{0b}\, \in \mathbb{R}^1,$$

лінійної частини цього рівняння. Рівняння для породжувальних амплітуд 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара [42, с. 174]:

$$F(c_0) = \frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} c_{0a}\left(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4\right) \\ -c_{0b}\left(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4\right) \end{bmatrix} = 0$$

має нескінченну множину розв'язків; покладемо [92] $c_{0a}^* := 0$, $c_{0b}^* = 2$, при цьому

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix}.$$

З урахуванням виродження матриці B_0 обчислимо матрицю

$$B_1 = \frac{\pi}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

З огляду на невиродженість

$$\det(B_0 + \varepsilon\, B_1) = \frac{\pi^2\,(6 - 5\,\varepsilon)}{9}, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{6}{5},$$

матриці $B_0 + \varepsilon\, B_1$ періодична задача для рівняння Льєнара (82) є критичним випадком другого порядку. Періодичну задачу для рівняння першого наближення:

$$x_1''(t) + x_1(t) = \varepsilon\, Y(y_0(t, c_0^*), t, 0)$$

розв'язано за умови $F_0(c_0^*) = 0$, при цьому

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0) + x_1(t,\varepsilon), \quad x_1(t,\varepsilon) = c_{a1}(\varepsilon)\,\cos t + c_{b1}(\varepsilon)\,\sin t + \varepsilon\, G_1(t),$$

крім того,

$$c_{a1}(\varepsilon) = 0, \quad c_{b1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\,(323\,\varepsilon - 168)}{96\,(5\,\varepsilon - 6)}.$$

Наступні наближення не наводимо, оскільки у ході знаходження вже другого наближення до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (82) з'являються вікові члени:

$$y_1(0,\varepsilon) - y_1(2\pi,\varepsilon) = \frac{19\,\pi\,\varepsilon^2}{12} - \frac{65\,\pi\,\varepsilon^3}{128} - \frac{3\;721\,\pi\,\varepsilon^4}{4\;608} -$$

$$-\frac{115\;351\pi\,\varepsilon^5}{221\;184} - \frac{204\;655\,\pi\,\varepsilon^6}{663\;552} - \frac{1\;209\;325\,\pi\,\varepsilon^7}{7\;962\;624} - \frac{465\;125\,\pi\,\varepsilon^8}{11\;943\;936}.$$

Точність знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Льєнара (82) характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| d^2 y_k(t,\varepsilon)/dt^2 + y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,0766\ 667, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,00\ 878\ 317;$$

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,00\ 676\ 667, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,0000\ 937\ 332.$$

Задача про побудову 2π-періодичних розв'язків нелінійного рівняння Льєнара (82) також задовольняє вимоги леми 1.4. Періодичні розв'язки рівняння Льєнара будемо шукати в околі наведеного вище породжувального розв'язку $y_0(t,c_0^*) = 2\sin t$. Через невиродженість матриці $B_0 + \varepsilon B_1$ для періодичної задачі для рівняння Льєнара (82) існує критичний випадок другого порядку. Періодична задача для рівняння першого наближення

$$x_1''(t,\varepsilon) + x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon Y(y_0(t,c_0^*),t,\varepsilon)$$

є розв'язною за умови

$$F_0(c_0(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),t,\varepsilon)\,dt = 0,$$

при цьому

$$c_{a0}(0,1) \approx 0, \quad c_{b0}(0,1) \approx \frac{20\ 470\ 144}{204\ 187\ 105}, \quad \det \mathcal{J}_1(0,1) \approx -9,77\ 060.$$

Для знаходження розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (82) застосовною є ітераційна схема (81), причому

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x_1(t,\varepsilon),\ x_1(t,\varepsilon) = c_{a1}(\varepsilon)\cos t + c_{b1}(\varepsilon)\sin t + x_1^{(1)}(t,\varepsilon),$$

крім того,

$$x_1^{(1)}(t,0,1) \approx -\frac{861\ 764\sin t}{27\ 369\ 103\ 227} + \frac{54\ 712\sin 3t}{5\ 212\ 860\ 049},$$

$$c_{a1}(0,1) \approx 0, c_{b1}(0,1) \approx \frac{222\ 072}{70\ 588\ 291\ 615}.$$

Періодична задача для рівняння другого наближення

$$x_2''(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon Y(y_0(t,c_0^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

є розв'язною за умови $F(c_1) = 0$, при цьому

$$\det \mathcal{J}_2(0,1) \approx -9,77\ 060.$$

Отже, для знаходження розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (82) застосовна ітераційна схема (81), причому

$$y_2(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x_2(t,\varepsilon),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = c_{a2}(\varepsilon)\ \cos t + c_{b2}(\varepsilon)\ \sin t + x_2^{(1)}(t,\varepsilon),\ \ c_{a2}(0,1) \approx 0,$$

крім того,

$$y_2(t,0,1) \approx \frac{50\ 034\ 590 \sin t}{499\ 088\ 739} + \frac{41\ 096 \sin 3t}{38\ 674\ 523\ 721} +$$
$$+ \frac{119 \sin 5t}{3\ 610\ 021\ 696\ 231}, \quad c_{b2}(0,1) \approx \frac{71\ 410}{22\ 419\ 315\ 869}.$$

Точність знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Льєнара (82), розрахованих за допомогою ітераційної схеми (81), характеризує нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$. Зокрема,

$$\Delta_0(0,1) \approx 8,39\ 647 \cdot 10^{-6},\ \Delta_1(0,1) \approx 1,04\ 560 \cdot 10^{-7},\ \Delta_2(0,1) \approx 1,81\ 966 \cdot 10^{-9}.$$

Таким чином, точність наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Льєнара (82), знайдених за допомогою ітераційної схеми (81), значно перевищує точність наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння Льєнара (82), отриманих за допомогою операторної системи (80). Порівняємо знайдені нульове і перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (82) з нульовим $y_{0p}(t,c_0^*) = y_0(t,c_0^*)$ і першими п'ятьма наближеннями до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (82), розрахованими за допомогою методу Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*) - \frac{11\,\varepsilon\ \sin t}{24} + \frac{\varepsilon^2 \sin 3t}{12},$$

$$y_{2p}(t,\varepsilon) = y_{1p}(t,\varepsilon) + \frac{493\,\varepsilon^2\ \sin t}{2\ 304} - \frac{13\,\varepsilon^2\ \sin 3t}{192} + \frac{\varepsilon^2\ \sin 5t}{128},$$

$$y_{3p}(t,\varepsilon) = y_{2p}(t,\varepsilon) + \frac{12\ 971\,\varepsilon^3\ \sin t}{110\ 592} + \frac{89\,\varepsilon^3\ \sin 3t}{18\ 432} - \frac{65\,\varepsilon^3\ \sin 5t}{13\ 824} + \frac{\varepsilon^3\ \sin 7t}{6\ 912};$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon) = y_{3p}(t,\varepsilon) + \frac{2\ 233\ 693\,\varepsilon^4\ \sin t}{21\ 233\ 664} - \frac{24\ 535\,\varepsilon^4\ \sin 3t}{2\ 654\ 208} +$$
$$+ \frac{2\ 039\,\varepsilon^4\ \sin 5t}{1\ 327\ 104} - \frac{91\,\varepsilon^4\ \sin 7t}{331\ 776} + \frac{\varepsilon^4\ \sin 9t}{165\ 888};$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon) = y_{3p}(t,\varepsilon) - \frac{31\ 256\ 459\,\varepsilon^5\ \sin t}{339\ 738\ 624} - \frac{688\ 271\,\varepsilon^5\ \sin 3t}{169\ 869\ 312} -$$

$$-\frac{13\ 199\,\varepsilon^5\ \sin 5t}{21\ 233\ 664} + \frac{193\,\varepsilon^5\ \sin 7t}{1\ 179\ 648} - \frac{13\,\varepsilon^5\ \sin 9t}{884\ 736} + \frac{\varepsilon^5\ \sin 11t}{3\ 981\ 312}.$$

Визначені з використанням методу Пуанкаре нульове та перші п'ять наближень до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (82) характеризують нев'язки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left|\left| y''_{kp}(t) + y_{kp}(t) - \varepsilon\, Y(y_{kp}(t), t, \varepsilon) \right|\right|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\delta_{1p}(0,1) \approx 0,00\ 566\ 849, \quad \delta_{2p}(0,1) \approx 0,000\ 184\ 039,$$

$$\delta_{3p}(0,1) \approx 9,68\ 229 \cdot 10^{-6},\ \delta_{4p}(0,1) \approx 4,59\ 922 \cdot 10^{-7}, \delta_{5p}(0,1) \approx 3,52\ 039 \cdot 10^{-8}.$$

Знайдені нульове та перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння Льєнара (82) за допомогою ітераційної схеми (81) точніші за відповідні нев'язки нульового і перших п'яти наближень, визначених із методу Пуанкаре.

Якщо в критичному випадку умову (73) не виконано, для крайової задачі може існувати критичний випадок третього або вищого порядку. Критичний випадок третього порядку вперше описано в [12] для нелінійних періодичних крайових задач. Для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32) з використанням методу Ньютона—Канторовича [43] , коли умову (73) не виконано, у випадку повноти рангу $\mathcal{J}_j(\varepsilon)$ можна також скористатися узагальненням методу Ньютона—Канторовича [87, 88, 131].

1.5 Кратні корені рівняння для породжувальних сталих

Вище [28] наведено схему дослідження нелінійної крайової задачі (5), (6):

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$

у критичному випадку за припущення, що рівняння (33) має дійсні розв'язки $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, для яких виконуються умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ або (73). Потрібно побудувати альтернативну схему дослідження нелінійної крайової задачі (5), (6) у критичному випадку за припущення, що рівняння (33) має дійсні корені $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, для яких умови $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ та (73) не виконуються.

1.5.1 Рівняння для породжувальних сталих

Переходячи в рівності (32) до межі при $x(t,\varepsilon) \to 0$, отримуємо необхідну умову існування шуканого розв'язку:

$$\mathcal{F}_0(c_0(\varepsilon),\varepsilon) := P_{Q_d^*}\left\{ J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\varepsilon) - \ell K\Big[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon)),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} = 0. \quad (83)$$

Таким чином, доведено таке твердження [138].

Лема 1.5 *Припустимо, що виконано умову розв'язності (31) нетерової ($m \neq n$) породжувальної задачі. Припустимо також, що крайова задача (5), (6) є критичним ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок, причому в околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_0^*(\varepsilon))$ задача (5), (6) має розв'язок $z(t,\varepsilon)$: $z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$. Тоді вектор $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння (83).*

Рівняння (83) визначає породжувальні розв'язки $z_0(t,c_0^*(\varepsilon))$, у малому околі яких можуть бути шукані розв'язки крайової задачі (5), (6) в критичному випадку. За аналогією до нелінійних крайових задач у критичному випадку [116] рівняння (83) будемо називати рівнянням для породжувальних сталих крайової задачі (5), (6). Гладкість вектора $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ істотно впливає на вигляд розв'язку крайової задачі (5), (6).

1.5.2 Практичний спосіб побудови розв'язку

Припустимо, що рівняння (83) має дійсні корені і не перетворюється на тотожність [58, 80, 84, 125]. Фіксуючи один з неперервних дійсних коренів $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ рівняння (83), отримуємо задачу про побудову розв'язків

$$x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

крайової задачі (34), (35). Розв'язок крайової задачі (34), (35) подамо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[Z(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

крім того,

$$c(\varepsilon) := c_0^*(\varepsilon) + \xi(\varepsilon), \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \xi(0) = 0.$$

У малому околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ існує таке розвинення:

$$Z(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)), t, \varepsilon) +$$
$$+\mathcal{A}_1\Big(z_0(t, c_0^*(\varepsilon))\Big)x(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon).$$

Тут

$$\mathcal{A}_1\Big(z_0(t, c_0^*(\varepsilon))\Big) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\ z\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))}.$$

Залишок $\mathcal{R}_1(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ має вищий порядок малості за $x(t,\varepsilon)$ в околі точки $x = 0$, ніж перші два члена розвинення, тому

$$\mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big|_{\ z(t,\varepsilon)\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial\, \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\ z(t,\varepsilon)\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0.$$

Аналогічно, у малому околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ існує розвинення

$$J(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{J}_0(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)), \varepsilon) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\ z\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))}.$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)$ має вищий порядок малості за $x(t,\varepsilon)$ в околі точки $x = 0$, ніж перші два члена розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\ z(t,\varepsilon)\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\ z(t,\varepsilon)\ =\ z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0.$$

Позначимо $(d \times r)$-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big) = P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t, c_0^*(\varepsilon))\Big)X_r(t)\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Враховуючи отримане розвинення і рівняння для породжувальних сталих, одержуємо операторну систему, рівнозначну задачі про знаходження розв'язків системи (34), які задовольняють крайову умову (35):

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G\Big[Z(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$\mathcal{B}_0\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big)\xi(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))\Big)x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

За умови [29]

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*} \neq 0, \quad P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}P_{Q_d^*} \neq 0,$$

$$P_{\mathcal{B}_0^*(c_0^*(\varepsilon))}P_{Q_d^*} = 0, \quad \mathcal{B}_0^+\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \tag{84}$$

принаймні один розв'язок другого рівняння отриманої операторної системи має вигляд

$$\xi(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))\Big)x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Тут $P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}-$ $(d \times d)-$ матриця-ортопроєктор: $\mathbb{R}^d \to N(\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon)))$. Отже, за умови (84) принаймні один розв'язок крайової задачі (34), (35) визначає операторна система:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{85}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G\Big[Z(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$\xi(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))\Big)x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Операторна система (85) відрізняється від аналогічних операторних систем [19, 116, 138] визначенням похідних $\mathcal{A}_1(s)$ та $\ell_1(z_0(\cdot,c_0^*))$ нелінійностей крайової задачі (34), (35). Для побудови її розв'язків традиційно [19, 55, 116] використовується ітераційна схема, яка відповідає методу простих ітерацій

[55, 123, 138]. Для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32) можна застосувати метод Ньютона—Канторовича [43, 87, 131]. Припустимо, що для рівняння (32) у малому околі точки $c_0^*(\varepsilon)$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$ існує стала θ. Тоді згідно з [43, 87, 131] за умов (52) для пошуку розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (32) у малому околі точки $c_0^*(\varepsilon)$ застосовною є ітераційна схема (53), при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) є квадратичною. Шуканий розв'язок задачі (5), (6) визначає ітераційна схема:

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{86}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_0^*(\varepsilon)) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x_k(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big](t),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = c_0^*(\varepsilon) + \xi_{k+1}(\varepsilon), \quad F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

Таким чином, доведено таку теорему [29].

Теорема 1.9 *(Достатня умова). Нехай виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \ne n$) породжувальної задачі й крайова задача (5), (6) є критичним випадком. Припустимо, що рівняння (83) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Нехай також для рівняння (32) виконується умова (52) при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$. Тоді для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ застосовною є ітераційна схема (86).*

Проміжок значень $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (86) до розв'язку задачі (5), (6), можна знайти з умов (52) і (55). Припустимо, що виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \ne n$) породжувальної задачі й крайова задача (5), (6) є критичним випадком. Крім того, нехай рівняння(83) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Припустимо також, що

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \ne 0, \quad P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*} P_{Q_d^*} \ne 0, \quad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0^*(\varepsilon))} P_{Q_d^*} \ne 0.$$

У малому околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ існує розвинення

$$\mathcal{R}_1(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 Z(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)), x(t,\varepsilon)) + \mathcal{R}_2(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

де

$$d^2 Z(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)), x(t,\varepsilon)) = A_3(z_0(t, c_0^*(\varepsilon)), x(t,\varepsilon))x(t,\varepsilon),$$

крім того,

$$\mathcal{A}_3(z_0(t,c_0^*(\varepsilon)),x(t,\varepsilon)) := \frac{\partial}{\partial x}\left\{ Z'_x(z,t,\varepsilon)\,x \right\}\Big|\ z\ =\ z_0(t,c_0^*(\varepsilon)).$$

Аналогічно

$$\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{2}\,d^2J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),x(\cdot,\varepsilon))+\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Тут

$$d^2\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),x(\cdot,\varepsilon)) = \ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon),$$

крім того,

$$\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon) := \frac{\partial}{\partial x}\left\{ J'_x(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\,x \right\}\Big|\ z\ =\ z_0(t,c_0^*(\varepsilon)).$$

Розв'язок крайової задачі (34), (35) природно шукати в околі розв'язку задачі

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\,Z(z_0(t,c_0^*(\varepsilon)),t,\varepsilon), \quad \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\,J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),\varepsilon)$$

у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon)+\varepsilon\,G_1(t),\ \ G_1(t) := G\Big[Z(z_0(s,c_0^*(\varepsilon))s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),\varepsilon)\Big](t).$$

Позначимо $(d\times r)$-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_1(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\left\{ \ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),G_1(\cdot))X_r(\cdot) - \ell K\Big[A_3(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)),G_1(s))X_r(s)\Big](\cdot)\right\}.$$

З урахуванням других диференціалів нелінійностей:

$$Z(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\quad J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

а також рівності (83) рівняння (32) набуває вигляду

$$(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))\,\xi(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\Bigg\{\varepsilon\ell_1G_1(\cdot)+\frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)\xi(\varepsilon)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),G_1(\cdot))G_1(\cdot)+\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)),G_1(s))G_1(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(z_0(t,c_0^*(\varepsilon)),X_r(s)\xi(\varepsilon))X_r(s)\xi(\varepsilon)+\mathcal{R}_2(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

За умови [29]

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\neq 0,\ P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}P_{Q_d^*}\neq 0,\ P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}P_{Q_d^*}=0, \tag{87}$$

$$(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^+\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \tag{88}$$

принаймні один розв'язок крайової задачі (34), (35) визначає операторна система:

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)\xi(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{89}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\,G\Big[Z(z_0(s,c_0^*(\varepsilon))+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$\xi(\varepsilon)=(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^+\,P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon\,\ell_1G_1(\cdot)+\frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)\xi(\varepsilon)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon)),G_1(\cdot))G_1(\cdot)+\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0^*(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(z_0(s,c_0^*(\varepsilon)),G_1(s))G_1(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\,A_3(z_0(t,c_0^*(\varepsilon)),X_r(s)\xi(\varepsilon))X_r(s)\xi(\varepsilon)+\mathcal{R}_2(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}\Big\}.$$

Тут $P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}$ — матриця-ортопроєктор:

$$P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}((\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*).$$

Шуканий розв'язок задачі (5), (6) визначає ітераційна схема [19, 55, 116], побудована за методом простих ітерацій [55, 123, 138]. Таким чином, доведено таку теорему [29].

Теорема 1.10 *(Достатня умова). Нехай виконано умову розв'язності (31) нетерової ($m\neq n$) породжувальної задачі, а для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок. Припустимо, що рівняння (83) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$. Припустимо також, що для рівняння (32) при $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_*\leq\varepsilon_0$ виконується умова (88). Тоді для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) в околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_0^*(\varepsilon))$ застосовною є операторна система (89).*

Для знаходження розв'язку крайової задачі (5), (6) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ можна використати метод Ньютона—Канторовича [43, 87, 131].

Теорема 1.11 *(Достатня умова). Припустимо, що виконано умову розв'язності (31) нетерової ($m \neq n$) породжувальної задачі, а для крайової задачі (5), (6) існує критичний випадок. Нехай рівняння (83) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$. Припустимо також, що для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ існує стала θ. Тоді для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*(\varepsilon))$ застосовною є ітераційна схема (86).*

Проміжок значень $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, $0 < \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (86) до розв'язку задачі (5), (6), можна знайти з умов (52) і (55).

Приклад 1.10 *Продемонструємо ефективність теореми 1.11 на прикладі задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків рівняння типу Дюффінга:*

$$y'' + y = \varepsilon\, Y(y, t, \varepsilon), \quad Y(y, t, \varepsilon) := \frac{y^3}{12} - \frac{\varepsilon^3 \sin t}{16}. \tag{90}$$

Періодичні розв'язки нелінійного рівняння (90) будемо шукати в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t, \quad c_{0a}\,, c_{0b} \in \mathbb{R}^1,$$

лінійної частини цього рівняння. Рівняння для породжувальних амплітуд (33) у випадку задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків рівняння (90) не перетворюється на тотожність і має кратний: $B_0 = B_1 = 0$ сталий дійсний корінь $c_0^* = 0$, отже, результати теорем 1.5, 1.7, 1.8 не можна використати через існування нерівностей

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \quad P_{(B_0 + \varepsilon B_1)^*} P_{Q_d^*} \neq 0.$$

Проте рівняння для породжувальних сталих (83) :

$$\mathcal{B}_0\Big(c_0(\varepsilon)\Big) = -P_{Q_d^*} \ell K \Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t, c_0^*(\varepsilon))\Big) X_r(t)\Big](\cdot) = \frac{\pi\, \varepsilon^2}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

має простий неперервний дійсний корінь [29]: $c_0^*(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^*$, отже, виконуються умови теореми 1.5. Зафіксуємо $\varepsilon_0 := 0$. На першому кроці ітераційної схеми (86) унаслідок повноти рангу матриці J_0 умова $P_{\mathcal{J}_0^*} = 0$ виконується.

Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (90) у малому околі породжувального розв'язку $y_0(t, c_0^*(\varepsilon)) = \varepsilon \sin t$ має вигляд

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*(\varepsilon)) + x_1(t, \varepsilon),\ x_1(t, \varepsilon) = X_r(t)\xi_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t, \varepsilon),$$

де

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{384}\Big(\sin 3t - \sin t\Big), \quad \xi_1(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

Покладемо $\xi_1^{(0)}(\varepsilon) := 0$. Оскільки умова $P_{\mathcal{J}_0^*} = 0$ виконується, перше наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку 2π-періодичної задачі для рівняння (90) є таким:

$$\xi_1^{(1)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^4\left(245\ 760 - 2\ 240\,\varepsilon^3 + 7\,\varepsilon^6\right)}{64\left(442\ 368 - 7\ 680\,\varepsilon^3 + 35\,\varepsilon^6\right)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$F\Big(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\Big) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{25\pi\,\varepsilon^9}{1\ 769\ 472} + \frac{925\pi\,\varepsilon^{12}}{6\ 115\ 295\ 232} + \frac{24\ 085\pi\,\varepsilon^{15}}{9\ 393\ 093\ 476\ 352} + \ldots\right).$$

Тут

$$\Big\|\Big\| F\Big(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\Big)\Big\|_\infty\Big\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 4,43\ 864 \cdot 10^{-14}.$$

Оскільки умова (52) на першому кроці ітераційної схеми (53) виконується:

$$\theta_1 \cdot |c_1 - c_0^*| \approx 0,0000\ 347\ 223 \ll 1,$$

знаходимо друге наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку 2π-періодичної задачі для рівняння (90):

$$\xi_1^{(2)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{5\,\varepsilon^7}{1\ 327\ 104} - \frac{\varepsilon^{10}}{286\ 654\ 464} + \frac{625\,\varepsilon^{13}}{110\ 075\ 314\ 176} + \right.$$

$$\left. + \frac{15\ 415\,\varepsilon^{16}}{126\ 806\ 761\ 930\ 752} + \frac{3\ 104\ 791\,\varepsilon^{19}}{2\ 337\ 302\ 235\ 907\ 620\ 864} + \ldots\right),$$

при цьому

$$F\Big(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\Big) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{625\pi\,\varepsilon^{15}}{587\ 068\ 342\ 272} - \right.$$

$$\left. - \frac{23\ 125\pi\,\varepsilon^{18}}{1\ 014\ 454\ 095\ 446\ 016} - \frac{3\ 436\ 625\pi\,\varepsilon^{21}}{14\ 023\ 813\ 415\ 445\ 725\ 184} + \ \ldots\right),$$

де

$$\left\|\left\| F\left(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\right)\right\|_\infty\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 3,34\ 464\cdot 10^{-24}.$$

Умова (52) на другому кроці ітераційної схеми (53) також справджується:

$$\theta_1\cdot|c_1-c_0^*(\varepsilon)|\approx 0,0000\ 347\ 223\ll 1.$$

Умова (55) збіжності ітераційної схеми (86) на першому і на другому кроках також виконується:

$$\left\|\left\|\varepsilon\, G_y'\Big[Y(y_0(s,c_0^*(\varepsilon)),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} 0,000\ 712\ 246\ll 1$$

$$\left\|\left\|\varepsilon\, G_y'\Big[Y(y_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 0,000\ 712\ 246\ll 1\ .$$

Нульове і перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90) характеризують нев'язки [29]:

$$\Delta_k(\varepsilon)=\left\|y_k''(t,\varepsilon)+y_k(t,\varepsilon)-\varepsilon\, Y(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},\quad k=0,\ 1.$$

Зокрема, при $\varepsilon=0,1$ маємо

$$\Delta_0(0,1)\approx 2,08\ 333\cdot 10^{-6},\quad \Delta_1(0,1)\approx 4,34\ 028\cdot 10^{-11}.$$

Порівняємо нульове і перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90) з першими п'ятьма наближеннями до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90), знайденими за допомогою методу Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon)=y_{2p}(t,\varepsilon)=y_{3p}(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0^*(\varepsilon)),$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon)=y_{5p}(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0^*(\varepsilon))-\frac{\varepsilon^4\,\sin t}{128}+\frac{\varepsilon^4\sin 3t}{384}.$$

Перші п'ять наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90), знайдені за допомогою методу Пуанкаре, характеризують нев'язки

$$\Delta_{0p}(0,1)=\Delta_{1p}(0,1)=\Delta_{2p}(0,1)=\Delta_{3p}(0,1)\approx 2,08\ 333\cdot 10^{-6},$$

$$\Delta_4(0,1)=\Delta_{5p}(0,1)\approx 2,60\ 414\cdot 10^{-10}.$$

Отже, знайдені за допомогою ітераційної схеми (86) нульове і перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90) точніші за

перші п'ять наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (90), отриманих за допомогою методу Пуанкаре.

Для знаходження розв'язків операторної системи (85) також можна використати метод найменших квадратів [5, 123, 83, 138]. Згідно з рівністю [138]

$$\mathcal{B}_0\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big) := F_c'\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big)$$

для пошуку принаймні одного розв'язку операторної системи (85) можна застосувати ітераційну схему:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi_{k+1}^{(j+1)}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

$$\xi_{k+1}^{(j+1)}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\Big(c_0^*(\varepsilon)\Big)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0^*(\varepsilon))\Big)x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},$$

яка узагальнює модифікований метод Ньютона [43, с. 670] на випадок $m \neq n$. Як відомо, така ітераційна схема має порядок збіжності менший за другий. Повертаючись до прикладу 1.10, покладемо $\xi_1^{(0)}(\varepsilon) := 0$. Оскільки умова $P_{\mathcal{B}_0^*} = 0$ виконується, перше наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку 2π-періодичної задачі для рівняння (90) має вигляд

$$\xi_1^{(1)}(\varepsilon) \approx \left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{35\,\varepsilon^7}{442\ 368} + \frac{7\,\varepsilon^{10}}{28311552} + \ \dots\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\Big\|\Big\|\ F\Big(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\Big)\Big\|_\infty\Big\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 4,43\ 858 \cdot 10^{-14}.$$

Шукаємо друге наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку періодичної задачі для рівняння (90):

$$\xi_1^{(2)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{5\,\varepsilon^7}{1\ 327\ 104} - \frac{\varepsilon^{10}}{286\ 654\ 464} + \frac{875\,\varepsilon^{13}}{146\ 767\ 085\ 568} + \ \dots\right),$$

при цьому нев'язка

$$\Big\|\Big\|\ F\Big(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\Big)\Big\|_\infty\Big\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 3,51\ 177 \cdot 10^{-24}$$

не набагато гірша, ніж нев'язка другого наближення, знайденого за допомогою ітераційної схеми (53).

1.6 Неавтономні крайові задачі в особливому критичному випадку

1.6.1 Постановка задачі

Розглянемо менш вивчений випадок, коли рівняння для породжувальних сталих перетворюється на тотожність [58, 80, 112]:

$$F_0(c_0) \equiv 0, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r. \tag{91}$$

Крайова задача (5), (6) за умови (91) за класифікацією І.Г. Малкіна [58, с.139] є *особливим критичним випадком,* оскільки традиційна схема аналізу та побудови розв'язку [38, 116] для таких задач не може застосовуватися через неможливість визначення параметра c_0^*, який відповідає за вибір породжувального розв'язку, безпосередньо з рівняння (91). Для знаходження збурення

$$x(t,\varepsilon): \ x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) \equiv 0,$$

породжувального розв'язку $z_0(t,c_r)$ отримуємо задачу

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{92}$$

$$\ell\ x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{93}$$

Розв'язок задачі (92), (93) подамо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \xi(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \xi(0) = 0,$$

де

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

У малому околі точок $x = 0$ та $\varepsilon = 0$ існують розвинення (56), (57).

1.6.2 Необхідні умови існування розв'язку

В особливому критичному випадку рівність (91) перетворюється на тотожність, оскільки ключова в традиційній схемі аналізу і побудови розв'язків [38, 116] матриця є такою:

$$B_0 = \frac{\partial F_0(c_0)}{\partial c_0} = P_{Q_d^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\Big[A_1(s)X_r(s)\Big](\cdot)\right\} \equiv 0.$$

Переходячи в рівності (32) до межі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо необхідну умову існування шуканого розв'язку:

$$F_1(c_0) = P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 G\Big[Z(z_0(s,c_0),s,0); J(z_0(\cdot,c_0),0)\Big](\cdot) + \ell_3(z_0(\cdot,c_0),0) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_0),0)\Big](s) + A_3(s)\Big](\cdot)\Bigg\} = 0. \qquad (94)$$

В особливому критичному випадку ця вимога є рівнянням відносно вектора $c_0 \in \mathbb{R}^r$. Таким чином, доведено таке твердження [80, 84, 125].

Лема 1.6 *Нехай виконується умова розв'язності (31) нетерової* ($m \neq n$) *породжувальної задачі й крайова задача (5), (6) є особливим критичним випадком (91). Припустимо також, що задача (5), (6) має розв'язок*

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad z(t,0) = z_0(t,c_0^*),$$

тоді вектор $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ *задовольняє рівняння (94).*

Корені рівняння (94) визначають породжувальний розв'язок, у малому околі якого в особливому критичному випадку можуть існувати шукані розв'язки вихідної задачі (5), (6). Якщо рівняння (94) не має дійсних коренів, то вихідна задача (5), (6) в особливому критичному випадку не має шуканих розв'язків. Припустимо, що рівняння (94) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$.

1.6.3 Достатня умова існування розв'язку

Розв'язок вихідної задачі (5), (6):

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon), \quad x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[Z(z_0(s,c_0^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t)$$

шукаємо в околі породжувального розв'язку $z_0(t,c_0^*)$. Необхідна і достатня умова (32) розв'язності задачі (5), (6) визначає шуканий вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, для знаходження якого використовували техніку лінеаризації разом з методом простих ітерацій [80]. У цьому випадку, зокрема, у процесі пошуку наближень до періодичного розв'язку рівняння (5) з'являлися [112] вікові члени. Щоб уникнути цього, для розв'язування рівняння (32) скористаємось більш ефективним методом Ньютона—Канторовича [43, 87, 131]. Згідно з прийнятими умовами функція $F(c(\varepsilon)) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d$ є двічі неперервно-диференційовною

за невідомою $c(\varepsilon)$ у малому околі точки c_0^*. Припустимо, що для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується умова (52). Тоді згідно з [43] для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) застосовують ітераційну схему:

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^+ F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (32) є квадратичною. Шуканий розв'язок вихідної задачі (5), (6) визначає ітераційна схема (54). Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1.12 *(Достатня умова). Нехай виконується умова розв'язності (31) нетерової ($m \neq n$) породжувальної задачі й крайова задача (5), (6) є особливим критичним випадком (91). Припустимо, що рівняння (94) не вироджується на тотожність і має дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Нехай також для рівняння (32) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ виконується умова (52). Тоді для кореня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжувальних сталих (33) в околі породжувального розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (5), (6) застосовною є ітераційна схема (54).*

Проміжок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, збіжності ітераційної схеми (54) до розв'язку задачі (5), (6) можна знайти з умови (52).

Використовувана в працях [80, 84, 112, 125] вимога $P_{\Xi_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ менш жорстка, оскільки за виконання умови (52) унаслідок рівності $\Xi_0 = \mathcal{J}_0$ ця вимога виконується. Водночас за виконання умови (52) наближення до розв'язку задачі (5), (6), одержувані за допомогою ітераційної схеми (54), задовольняють відповідні наближення до крайових умов (6). Зокрема, у випадку пошуку наближень до періодичного розв'язку рівняння (5) за виконанні умови (52) наближення, які отримали за допомогою ітераційної схеми (54), не містять вікових членів [112].

1.6.4 Періодична задача для рівняння руху маятника, точка підвісу якого здійснює гармонічні коливання

Продемонструємо ефективність теореми 1.12 для задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків $y(t) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi]$ нелінійного рівняння [44, 58], яке описує рух маятника, точка підвісу якого здійснює вертикальні гармонічні коливання високої частоти. В окремому випадку це рівняння має вигляд

$$y'' = -\varepsilon^2 \sin y - 2\varepsilon \sin y \cos t. \tag{95}$$

Згідно з прийнятими умовами отримуємо задачу про знаходження 2π-періодичного розв'язку

$$z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(z_a(t, \varepsilon),\ z_b(t, \varepsilon)\right) \in \mathbb{C}^1[0, T], \quad \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

диференціального рівняння

$$dz/dt = Az + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \tag{96}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Z(z, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \sin z_a - 2 \sin z_a \cos t \end{pmatrix}.$$

Нормальна фундаментальна матриця лінійної однорідної частини системи (96):

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю Q і її ортопроєктори

$$Q = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{Q^*} \neq 0$, то існує критичний випадок. Традиційна необхідна умова існування 2π-періодичного розв'язку системи (96) виконується тотожно $F_0(c_0) \equiv 0$ за будь-якого дійсного c_r. Отже, 2π-періодична задача для системи (96) є особливим критичним випадком. Обчислюючи похідні нелінійної вектор-функції $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$, отримуємо рівняння для породжувальних амплітуд 2π-періодичної задачі для системи (96)

$$F_1(c_0) = -2\pi \Big(2 \cos c_0 + 1 \Big) \sin c_0 = 0.$$

Серія коренів

$$c_0^* = \pi k, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ ...,$$

рівняння для породжувальних амплітуд відповідає положенням рівноваги системи (96), які визначають верхнє і нижнє положення рівноваги маятника. Серія коренів рівняння

$$\cos c_0^* = -\frac{1}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ ...,$$

визначає амплітуди породжувальних розв'язків $z_0(s, c_0^*)$, на які можуть перетворюватися шукані 2π-періодичні розв'язки системи (96). Покладемо для визначеності $c_0^* = \frac{2\pi}{3}$. Отже, породжувальний розв'язок знайдено:

$$z_0(t, c_0^*) = \frac{2\pi}{3} \cdot \mathrm{col} \ \Big(1, 0 \Big) \ .$$

Матриця $\Xi_0 = 3\pi$, яка відповідає цьому кореню, є невиродженою, що свідчить про простоту коренів рівняння $F_1(c_0) = 0$ для породжувальних амплітуд

2π-періодичної задачі для системи (96) і гарантує розв'язність періодичної задачі для системи (96). Періодична задача для рівняння першого наближення $x_1''(t) + x_1(t) = Z(z_0(t, c_0^*), t)$ є розв'язною унаслідок рівності $F_1(c_0^*) = 0$, при цьому

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\sqrt{3}\begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Для знаходження розв'язку $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ рівняння (32) застосовною є ітераційна схема (53), згідно з якою

$$c_{1a}(\varepsilon) \approx \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\,\varepsilon - \frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^2}{32} + \sqrt{3}\,\varepsilon^3 - \frac{309\sqrt{3}\,\varepsilon^4}{1024} + \frac{6279\sqrt{3}\,\varepsilon^5}{5120},$$

при цьому умову (52) на першому кроці виконано:

$$\theta \cdot |c_{1a}(0,1) - c_0^*| \approx 0,000\ 149\ 888.$$

На другому кроці

$$c_{1b}(\varepsilon) \approx \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\,\varepsilon - \frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^2}{32} - \frac{21\sqrt{3}\,\varepsilon^4}{1\ 024} - \frac{9\sqrt{3}\,\varepsilon^6}{2\ 048} - \frac{2\ 187\sqrt{3}\,\varepsilon^8}{2\ 621\ 440},$$

причому умову (52) на другому кроці виконано:

$$\theta \cdot |c_{1b}(0,1) - c_0^*| \approx 1,865 \cdot 10^{-10}.$$

На третьому кроці

$$c_1(\varepsilon) \approx \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\,\varepsilon - \frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^2}{32} - \frac{21\sqrt{3}\,\varepsilon^4}{1\ 024} - \frac{9\sqrt{3}\,\varepsilon^6}{2\ 048} - \frac{2\ 187\sqrt{3}\,\varepsilon^8}{2\ 621\ 440} - \frac{1\ 287\sqrt{3}\,\varepsilon^{10}}{10\ 485\ 760} + \ \dots\ ,$$

при цьому

$$F(c_{1b}(\varepsilon)) \approx 4\sqrt{3}\pi\,\varepsilon^{28} - \frac{81}{8}\sqrt{3}\pi\,\varepsilon^{29} + \frac{68\ 691\sqrt{3}\pi\,\varepsilon^{30}}{1\ 280} + \ \dots\ ,$$

крім того,

$$x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{2a}^{(1)}(t, \varepsilon) \\ x_{2b}^{(1)}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Тут

$$x_{2a}^{(1)}(t, \varepsilon) \approx -\sqrt{3}\,\varepsilon + \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^2}{8} + \frac{151\,\varepsilon^3}{32\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^4}{128} - \frac{221\ 807\,\varepsilon^5}{153\ 600\sqrt{3}} + \frac{727\,\varepsilon^6}{81\ 920\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{61\ 737\ 299\,\varepsilon^7}{401\ 408\ 000\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon\left(-65\ 536 + 100\ 352\,\varepsilon^2 - 30\ 432\varepsilon^4 + 3\ 105\,\varepsilon^6\right)}{65\ 536}\cos t -$$

$$-\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^2\left(2\ 048-64\varepsilon^2+39\,\varepsilon^4\right)}{16\ 384}\cos 2t-\frac{\varepsilon^3\left(30\ 720-11\ 840\,\varepsilon^2+2\ 733\,\varepsilon^4\right)}{245\ 760\sqrt{3}}\cos 3t-$$

$$-\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^4\left(-160+21\,\varepsilon^2\right)}{40\ 960}\cos 4t-\frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^5\left(-160+29\,\varepsilon^2\right)}{512\ 000}\cos 5t-$$

$$-\frac{\varepsilon^6}{5\ 120\sqrt{3}}\cos 6t-\frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^7}{250\ 880}\cos t;$$

$$x_{2a}^{(1)}(t,\varepsilon)\approx\frac{\varepsilon^3\left(30\ 720-11\ 840\,\varepsilon^2+2\ 733\,\varepsilon^4\right)}{81\ 920\sqrt{3}}\sin 3t+$$

$$+\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon\,\left(-65\ 536+100\ 352\,\varepsilon^2-30\ 432\,\varepsilon^4+3\ 105\,\varepsilon^6\right)}{65\ 536}\sin t+$$

$$+\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^2\left(2\ 048-64\,\varepsilon^2+39\,\varepsilon^4\right)}{8\ 192}\sin 2t+\frac{\sqrt{3}\varepsilon^4\left(-160+21\varepsilon^2\right)}{10240}\sin 4t+$$

$$+\frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^5\left(-160+29\,\varepsilon^2\right)}{102\ 400}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon^6}{2\ 560}\sin 6t+\frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon^7}{35\ 840}\sin 7t.$$

Для знаходження розв'язку $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^1$ рівняння (32) застосуємо ітераційну схему (53), при цьому

$$c_2(\varepsilon)\approx\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\,\varepsilon+\frac{27\sqrt{3}\,\varepsilon^2}{128}-\frac{151\,\varepsilon^3}{32\sqrt{3}}+\frac{7\ 733\sqrt{3}\,\varepsilon^4}{16\ 384}+\frac{221\ 807\,\varepsilon^5}{153\ 600\sqrt{3}}+\frac{1\ 501\ 111\,\varepsilon^6}{2\ 621\ 440\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{61\ 737\ 299\,\varepsilon^7}{401\ 408\ 000\sqrt{3}}-\frac{1\ 480\ 671\ 307\,\varepsilon^8}{3\ 355\ 443\ 200\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{35\ 455\ 122\ 151\,\varepsilon^{10}}{134\ 217\ 728\ 000\sqrt{3}}+\frac{2\ 036\ 157\ 846\ 299\ 581\,\varepsilon^{12}}{1\ 202\ 590\ 842\ 880\ 000\sqrt{3}}.$$

Для оцінювання точності знайдених наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння (95) визначимо нев'язки

$$\Delta_k:=\left\|y_k''(t)+\varepsilon^2\sin y_k(t)+2\varepsilon\sin y_k(t)\cos t\right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},\ \ k=0,\ 1,\ 2.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,161\ 268,\quad \Delta_1(0,1)\approx 0,0119\ 375,\quad \Delta_2(0,1)\approx 0,000\ 531\ 165,$$

крім того,

$$\Delta_0(0,01)\approx 0,0172\,306,\ \ \Delta_1(0,01)\approx 0,0000\,899\,028,\ \ \Delta_2(0,01)\approx 5,52\,769\,949\cdot 10^{-7}.$$

Порівняємо знайдені нульове і перші три наближення до періодичного розв'язку рівняння (95) з нульовим $y_{0p}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*)$ і першими двома наближеннями до періодичного розв'язку рівняння (95), знайденими за допомогою методу Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = \frac{1}{3}\Big(2\pi + 3\sqrt{3}\,\varepsilon\cos t\Big), \quad y_{2p}(t,\varepsilon) = \frac{1}{192}\Big(128\pi -$$

$$-591\sqrt{3}\,\varepsilon^2 + 192\sqrt{3}\,\varepsilon\cos t - 24\sqrt{3}\,\varepsilon^2\cos 2t\Big).$$

Зокрема,

$$\Delta_{0p}(0,1) \approx 0,181\ 865, \Delta_{1p}(0,1) \approx 0,0121\ 566, \Delta_{2p}(0,1) \approx 0,00372\ 908,$$

крім того,

$$\Delta_{0p}(0,01) \approx 0,0174\,071,\ \Delta_{1p}(0,01) \approx 0,0000\,900\,709,\ \Delta_{2p}(0,01) \approx 2,42\,107{\cdot}10^{-6}.$$

Отже, знайдені нульове і перші два наближення до періодичного розв'язку (95) за допомогою ітераційної схеми (53) є точнішими, ніж відповідні перші наближення, які отримані за допомогою методу Пуанкаре.

У разі $P_{B_1^*}P_{Q_d^*} \neq 0$ аналогічні умови розв'язності слабконелінійної крайової задачі (5), (6) в особливому критичному випадку можна знайти з урахуванням третіх або вищих похідних за умови відповідної гладкості нелінійностей цієї задачі. Результати дослідження слабконелінійних крайових задач (5), (6) у критичних випадках у праці [73] перенесено на нелінійні крайові задачі, які не розв'язано відносно похідної. Запропоновану в [73] схему дослідження нелінійних крайових задач, нерозв'язних відносно похідної, аналогічно до випадку з[74, 117, 118, 132] можна перенести на нелінійні диференціально-алгебричні крайові задачі, нерозв'язні відносно похідної. Крім того, результати дослідження слабконелінійних крайових задач (5), (6) у критичних випадках аналогічно до випадку, наведеного [126, 127, 128, 129], можна перенести на нелінійні матричні крайові задачі, в тому числі в абстрактних просторах [86]. Результати дослідження слабонелінійних крайових задач (5), (6) у критичних випадках також можна перенести на крайові задачі з імпульсним впливом [21, 115, 116, 148] та крайові задачі зі запізненням [1, 24].

2 Автономні крайові задачі

2.1 Постановка задачі

Слабконелінійною автономною крайовою задачею будемо називати задачу про знаходження розв'язків [25, 91, 99, 100, 102, 111, 147]

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ \dots\ ,\ z^{(n)}(t,\varepsilon)\Big),\ z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ i = 1,2,\ \dots\ ,\ n,$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{97}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{98}$$

Розв'язки задачі (97), (98) шукаємо в малому околі розв'язку

$$z_0(t) = \mathrm{col}\Big(z_0^{(1)}(t),\ \dots\ ,\ z_0^{(n)}(t)\Big),\ z_0^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a,b^*],\ b^* = b(0),$$

породжувальної нетерової крайової задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f,\quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{99}$$

Тут A — $(n \times n)$-вимірна матриця, $Z(z,\varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за z у малому околі розв'язку породжувальної задачі та неперервно-диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$, $\ell(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ лінійний і $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ нелінійний векторний функціонали:

$$\ell(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : \mathbb{C}[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m,$$

причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою z та за малим параметром ε в малому околі розв'язку породжувальної задачі та на відрізку $[0,\varepsilon_0]$. Припустимо, що існує критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f\Big](\cdot)\Big\} = 0; \tag{100}$$

при цьому породжувальна задача (99) має r-параметричну сім'ю розв'язків:

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f;\alpha\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Автономна крайова задача (97), (98) суттєво відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач; на відміну від останніх, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (97), (98), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови самого розв'язку. Шукатимемо його у вигляді

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon\Big(b^* - a\Big)\beta(\varepsilon). \tag{101}$$

Функція $\beta(\varepsilon)$ є неперервною за малим параметром на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Покладемо її значення в нулі таким, що $\beta(0) = \beta^*$. Здійснюючи в задачі (97), (98) заміну незалежної змінної:

$$t = a + (\tau - a)\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big), \tag{102}$$

отримуємо задачу про пошук розв'язку

$$z(\tau, \varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(1)}(\tau, \varepsilon),\ \dots\ ,\ z^{(n)}(\tau, \varepsilon)\Big),\ z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b^*],$$

$$z^{(i)}(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2,\ \dots\ ,\ n,$$

системи диференціальних рівнянь:

$$dz(\tau, \varepsilon)/d\tau = Az(\tau, \varepsilon) + f + \varepsilon\Big\{\beta(\varepsilon)\Big(Az(\tau, \varepsilon) + f\Big) + \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\Big\}, \tag{103}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\Big(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big). \tag{104}$$

Тут $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний, а $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежені векторні функціонали [91, 136] $\ell z(\cdot, \varepsilon)$, $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b^*] \to \mathbb{R}^m$. Лінійний векторний функціонал $\ell(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ зображується за допомогою інтеграла Рімана—Стілтьєса [52, с.362] у вигляді

$$\ell(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \int_a^{b(\varepsilon)} d\Omega(t)z(t, \varepsilon),$$

де $\Omega(t)$– $(m \times n)$-матриця, елементи якої — функції обмеженої на $[a, b(\varepsilon)]$ варіації. Заміною змінної (102) одержуємо інтеграл

$$\int_a^{b(\varepsilon)} d\Omega(t)z(t, \varepsilon) = \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\int_a^{b^*} d\Omega(\tau)z(\tau, \varepsilon).$$

Отримана так рівність

$$\ell(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\ell z(\cdot,\varepsilon)$$

пояснює вигляд крайової умови (104).

2.2 Рівняння для породжувальних сталих

Розв'язок крайової задачі (103), (104):

$$z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$$

шукаємо в околі розв'язку $z_0(\tau,c_r)$ породжувальної задачі (99). Для знаходження збурення $x(\tau,\varepsilon)$ отримуємо крайову задачу [23, 91, 136]:

$$dx(\tau,\varepsilon)/d\tau = Ax(\tau,\varepsilon)+ \tag{105}$$

$$+\varepsilon\Bigg\{\beta(\varepsilon)\Big[A(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon))+f\Big]+\Big[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big]Z(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\},$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon)+\varepsilon\Big[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{106}$$

Розглядаючи нелінійності задачі (105), (106) формально як неоднорідності, отримуємо необхідну і достатню умову її розв'язності:

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{\alpha\beta(\varepsilon)+\Big[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)- \tag{107}$$

$$-\ell K\Bigg\{\beta(\varepsilon)\Big[A(z_0+x)+f\Big]+\Big[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big]Z(z_0+x,\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\} = 0.$$

Враховуючи неперервність вектор-функції $Z(z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ та нелінійного векторного функціонала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ за ε у малому додатному околі нуля, переходимо до межі при $\varepsilon\to 0$ у рівності (107) та отримуємо необхідну умову

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{\alpha\beta^*+J(z_0(\cdot,c_r),0)-\ell K\Bigg\{\beta^*\Big[Az_0(s,c_r)+f\Big]+Z(z_0(s,c_r),0)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\} = 0$$

існування розв'язку вихідної задачі (97), (98) у критичному випадку, де $\beta^* = \beta(0)$. Позначаючи

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^*+J(z_0(\cdot,c_r^*),0), f_0(s,c^*) = \beta^*\Big[Az_0(s,c_r^*)+f\Big]+Z(z_0(s,c_r^*),0),$$

одержуємо таке твердження [91, 136].

Теорема 2.1 *Нехай для крайової задачі (97), (98) існує критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконується умова (100) розв'язності породжувальної задачі (99). Якщо при цьому задача (97), (98) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $z(t,0) = z_0(t, c_r^*)$, то вектор*

$$c^* = \mathrm{col}\left(c_r^*,\ \beta^*\right) \in \mathbb{R}^{r+1}$$

задовольняє рівняння

$$F_0(c^*) = P_{Q_d^*}\left\{\varphi_0(c^*) - \ell K\left[f_0(s, c^*)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{108}$$

Перші r компонент $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ кореня $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (107) визначають амплітуду породжувального розв'язку $z_0(t, c_r^*)$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки вихідної задачі (97), (98). Крім того, з рівняння (108) можна знайти величину $\beta^* \in \mathbb{R}^1$, яка визначає перше наближення $b_1(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta^*$ до довжини відрізка $b(\varepsilon)$, на якому визначено шуканий розв'язок. Якщо це рівняння не має дійсних коренів, то вихідна задача (97), (98) не має шуканих розв'язків.

Означення 2.1 *Рівняння (108) називають рівнянням для породжувальних сталих автономної крайової задачі (97), (98). У разі періодичної задачі рівняння (108) називають рівнянням для породжувальних амплітуд.*

Приклад 2.1 *Як ілюстрацію до теореми 2.1 розглянемо задачу про знаходження розв'язку*

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T_1(\varepsilon)],\ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

скалярної періодичної задачі

$$dz/dt = \varepsilon \cdot \mathrm{ch}\ z, \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) - z(T_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0, \tag{109}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на розв'язок породжувальної задачі

$$dz_0/dt = 0, \quad T_1(0) = 1, \quad \ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(1) = 0.$$

Породжувальна задача має сім'ю розв'язків $z_0(t) \equiv c$. Рівняння для породжувальних амплітуд (107) $F(c) = -\mathrm{ch}\ c = 0,\ c \in \mathbb{R}^1$, не має дійсних коренів, отже, і періодична задача (109) не має шуканих розв'язків. Дійсно, загальний розв'язок рівняння (109):

$$z(t,\varepsilon) = \ln\left|\mathrm{tg}\ \left(\frac{\varepsilon \cdot (t+c)}{2}\right)\right|$$

не є обмеженим у малому околі точки $\varepsilon = 0$, отже, не містить шуканих розв'язків.

2.3 Критичний випадок першого порядку

Припустимо, що рівняння для породжувальних сталих (108) має дійсні корені. Фіксуючи один з розв'язків $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (108), одержуємо задачу про пошук розв'язків задачі (103), (104) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку

$$z_0(\tau, c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G\Big[f;\alpha\Big](\tau).$$

Використовуючи неперервну диференційовність функції $Z(z,\varepsilon)$ і за першим, і за другим аргументом в околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ і точки $\varepsilon = 0$, розкладаємо цю функцію:

$$Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(\tau) + R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \tag{110}$$

де

$$A_1(\tau) = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0,}} \qquad A_2(\tau) = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0.}}$$

Залишок $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ розвинення функції $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ має вищий порядок малості за x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розкладу, тому

$$R_1(z,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) векторного функціонала $\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ і за першим, і за другим аргументом в околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ і точки $\varepsilon = 0$, виділяємо лінійну за x та лінійну за ε частини цього функціонала:

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0,}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) = \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0,}}$$

а також член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = \tilde{J}(z(\cdot, 0), 0)$ нульового порядку за ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))+J_1(z_0(\cdot, c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{111}$$

Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ розвинення функціонала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ має вищий порядок малості за x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші три члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z \;=\; z_0(\tau, c_r^*),\\ \varepsilon \;=\; 0}} = 0.$$

Приклад 2.2 *Доданок $\varepsilon A_2(\tau)$ суттєво впливає на значення залишку $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$.*

Дійсно, для автономної періодичної задачі $dz/dt = \varepsilon^2$, $z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0$ породжувальний розв'язок $z_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$ визначає величини

$$Z(z_0(\tau, c_r^*), 0) \equiv A_1(\tau)x \equiv 0, \quad A_2(\tau) \equiv 1,$$

а отже, і $R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$. Якщо доданок $\varepsilon A_2(\tau)$ віднести до залишку, то маємо

$$R_1(z_0(\tau, c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau, c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-Z(z_0(\tau, c_r^*), 0)-A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2.$$

Таким чином, для цієї задачі отримуємо залишок, який збігається з нелінійністю:

$$\Big\|Z(z_0(\tau, c_r^*), 0)\Big\| \equiv \Big\|A_1(\tau)x\Big\| \equiv 0 < \varepsilon^2 = \Big\|R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|.$$

Використовуючи розвинення (110), перетворимо вираз, розташований в квадратних дужках умови (107) розв'язності задачі (105), (106),

$$\beta(\varepsilon)\Big[A(z_0+x)+f\Big]+\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z_0+x,\varepsilon)=$$

$$=f_0(s,c^*)+\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+\bar\beta\Big(A(z_0(s,c_r^*)+f\Big)+r(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon).$$

Тут $\bar\beta(\varepsilon)=\beta(\varepsilon)-\beta^*-$ невідома неперервна скалярна функція, яка обертається на нуль при $\varepsilon=0$. Розв'язок задачі (103), (104) подамо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)c_r(\varepsilon)+x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*),0)+A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+R_1(z(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\tau).$$

Невідома $c_r=c_r(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$ є неперервною в малому додатному околі нуля вектор-функції малого параметра. Отже, вираз, що стоїть в квадратних дужках в умові (107) розв'язності задачі (105), (106) набуває вигляду

$$\beta(\varepsilon)\Big(A(z_0+x)+f\Big)+\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z_0+x,\varepsilon)=$$

$$=f_0(s,c^*)+\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon)+\bar A_1(s)c(\varepsilon)+\varepsilon A_2(s)+r(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon).$$

Тут

$$\bar A_1(s)=\Big\{\Big[\beta^*A+A_1(s)\Big]X_r(s);\ Az_0(s,c_r^*)+f\Big\}$$

є $(n\times(r+1))$-вимірною матрицею, $c(\varepsilon)=\mathrm{col}\,\Big(c_r(\varepsilon),\bar\beta(\varepsilon)\Big)-$ $(r+1)$-вимірна вектор-функція,

$$r(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)=\bar\beta Ax(s,\varepsilon)+\varepsilon\beta Z(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(s,\varepsilon),\varepsilon)$$

є n-вимірним вектор-стовпцем. У нових позначеннях отримуємо задачу про пошук розв'язку системи диференціальних рівнянь:

$$dx/d\tau=Ax+\varepsilon\Big\{f_0(\tau,c^*)+\bar A_1(\tau)c(\varepsilon)+\varepsilon A_2(\tau)+ \tag{112}$$

$$+\Big(\beta^* A + A_1(\tau)\Big)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + r(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1\Big[X_r(\cdot)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big] + \tag{113}$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Необхідна і достатня умова (107) розв'язності задачі (105), (106), а отже і задачі (112), (113) у нових позначеннях набуває вигляду

$$P_{Q_d^*}\Big\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1\Big[X_r(\cdot)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big] + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big\{ f_0(s, c^*) + \bar{A}_1(s)c(\varepsilon) + \Big[\beta^* A + A_1(s)\Big]x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(\cdot)\Big\} = 0.$$

З урахуванням рівняння для породжувальних сталих маємо рівність

$$P_{Q_d^*}\Big\{ \ell_1\Big[X_r(\cdot)\ I_1\ c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big] + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[\bar{A}_1(s)c(\varepsilon) +$$

$$+\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s, c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0,$$

яка рівнозначна рівнянню

$$P_{Q_d^*}\Big\{ \ell_1 X_r(\cdot)\ I_1 - \ell K\Big[\bar{A}_1(s)\Big](\cdot)\Big\} \cdot c(\varepsilon) =$$

$$= -P_{Q_d^*}\Big\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s, c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Тут $I_1 = \mathrm{col}\ (I_r,\ O)$ — стала $\Big(r \times (r+1)\Big)$-вимірна матриця. Позначаючи $(d \times (r+1))$-вимірну матрицю як

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Big\{ \ell_1 X_r(\cdot)\ I_1 - \ell K\Big[\bar{A}_1(s)\Big](\cdot)\Big\},$$

одержуємо операторну систему, яка рівнозначна задачі про пошук розв'язків системи (112), що задовольняють крайову умову (113):

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad B_0\, c(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) +$$

$$+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg[\Bigg(\beta^* A + A_1(s)\Bigg)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\},$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[f_0(s,c^*) + \bar{A}_1(s)c(\varepsilon) + \tag{114}$$

$$+\Bigg(\beta^* A + A_1(s)\Bigg)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1\Bigg[X_r(\cdot)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Bigg] + \varepsilon\,\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\tau).$$

Для розв'язності другого рівняння операторної системи (114) необхідно і достатньо виконання рівності

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Bigg[\Bigg(\beta^* A + A_1(s)\Bigg)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} = 0,$$

де $P_{B_0^*}$– $(d\times d)$-вимірна матриця-ортопроєктор. За умови $P_{B_0^*} = 0$ загальний розв'язок другого рівняння операторної системи (114) має вигляд

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Bigg[\Bigg(\beta^* A + A_1(s)\Bigg)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} + P_{B_0}\bar{c},$$

де $\bar{c} \in \mathbb{R}^{r+1}$ — довільний вектор. Нехай rank $P_{B_0} = \rho$; тут $P_{B_0} : \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{N}(B_0)$ — $(d\times d)$-матриця-ортопроєктор. Позначимо $P_\rho \in \mathbb{R}^{(r+1)\times\rho}$ матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроєктора P_{B_0}. При цьому вектор-функція

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[\left(\beta^* A + A_1(s)\right)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Bigg\} + P_\rho\, c_\rho$$

залежить від довільного вектора

$$c_\rho = \mathrm{col}\ (c_\rho^{(1)}(\varepsilon),\ \dots\ ,\ c_\rho^{(\rho)}(\varepsilon)),\ c_\rho^{(i)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0^*],\ c_\rho^{(i)}(0) = 0,\ i = 1,2,\ \dots\ ,\ \rho.$$

Таким чином, за умови $P_{B_0^*} = 0$ спільний розв'язок крайової задачі (112), (113) визначає операторна система:

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[\left(\beta^* A + A_1(s)\right)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Bigg\} + P_\rho c_\rho,$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[f_0(s,c^*) + \bar{A}_1(s)c(\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \tag{115}$$

$$+\left(\beta^* A + A_1(s)\right)x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1\left[X_r(\cdot)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\tau),$$

що для будь-якого $c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$ еквівалентна задачі про побудову розв'язку системи рівнянь (112), які задовольняють крайову умову (113). Операторна система (115) належить до класу систем, для розв'язування яких застосовують метод простих ітерацій [17, 18, 19]. Перше наближення до розв'язку операторної системи (115) шукаємо як розв'язок крайової задачі першого наближення до задачі (112), (113):

$$dx_1/d\tau = Ax_1 + \varepsilon f_0(\tau,c^*),\quad \ell x_1(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0). \tag{116}$$

Існування розв'язку задачі (116) гарантовано вибором вектора c^*, що є коренем рівняння для породжувальних сталих. Подамо цей розв'язок у вигляді

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s,c^*); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](\tau).$$

Друге наближення до розв'язку операторної системи (115) є розв'язком крайової задачі другого наближення до задачі (112), (113):

$$\begin{cases} dx_2/d\tau = Ax_2 + \varepsilon\Big\{ f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1(\tau)c_1 + \varepsilon A_2(\tau) + \\ +\Big(\beta^* A + A_1(\tau)\Big)x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + r(z_0(\tau, c_r^*) + x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}, \\ \ell x_2(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\Big\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_1(\cdot,\ \varepsilon),\varepsilon)\Big\}. \end{cases} \tag{117}$$

Розв'язок задачі (117) зображується у вигляді

$$x_2(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c_2(\varepsilon) + x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s, c^*) + \bar{A}_1(s)c_1 +$$

$$+\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot,\ \varepsilon),\varepsilon)\Big](\tau).$$

Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (117) другого наближення:

$$P_{Q_d^*}\Big\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot,\ \varepsilon),\varepsilon) - \tag{118}$$

$$-\ell K\Big[f_0(s, c^*) + \bar{A}_1(s)c_1 + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0$$

з урахуванням рівняння для породжувальних сталих подається так:

$$P_{Q_d^*}\Big\{ \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot,\ \varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\bar{A}_1(s)c_1 + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

З її використанням одержуємо рівняння відносно вектора $c_1(\varepsilon)$:

$$B_0\, c_1(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

За умови $P_{B_0^*} = 0$ розв'язок цього рівняння має вигляд

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\ell K \Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) x_1^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_1(s, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg](\cdot) \Bigg\} + P_\rho c_\rho.$$

Для знаходження розв'язку операторної системи (115) маємо таку ітераційну схему [91, 136]:

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(\tau, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(2)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G \Bigg[\bar{A}_1(s) c_k + \Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) x_k^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_k^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon);$$

$$\ell_1 x_k^{(1)}(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k^{(1)}(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon) \Bigg](\tau),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s, c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg](\cdot) \Bigg\} + P_\rho c_\rho, \quad k = 1, 2,\ \ldots$$

Доведемо збіжність отриманої ітераційної процедури до шуканого розв'язку задачі (112), (113) і оцінимо довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, на якому зберігається збіжність цієї процедури. Розв'язок задачі (112), (113) шукаємо в досить малому околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*) = X_r(\tau) c_r^* + G[f;\, \alpha](\tau)$. Припускаємо, що вектор $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ задовольняє рівняння (108) для породжувальних амплітуд. Операторна система (115) еквівалентна задачі про побудову розв'язку рівняння $x(\tau, \varepsilon) = \Phi x(\tau, \varepsilon)$ на множині функцій $x(\tau, \varepsilon)$, які обертаються на нуль при $\varepsilon = 0$. Тут

$$\Phi x(\tau, \varepsilon) = -X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\ell K \Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg](\cdot) \Bigg\} -$$

$$-X_r(\tau) P_\rho c_\rho + \varepsilon G \Bigg[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg](\tau) =$$

$$= -X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \Bigg\{ \varepsilon \ell_1 G \Bigg[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);$$

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (\cdot) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-\ell K \Bigg[\varepsilon \Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) G \Bigg[Z(z_0(\nu, c_r^*) + x(\nu, \varepsilon), \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (s) +$$

$$+ r(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (\cdot) \Bigg\} - X_r(\tau) P_\rho c_\rho + \varepsilon\, G \Bigg[Z(z(s, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (\tau).$$

Неперервний обмежений оператор

$$\Phi x(\tau, \varepsilon) = \Phi \Big(Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big)$$

є суперпозицією білінійного за $Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ і $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ оператора $\Phi x(\tau, \varepsilon)$, що діє на неперервно-диференційовні за z функцію $Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ і нелінійний функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$. Оператор $\Phi x(\tau, \varepsilon)$ діє з простору неперервних на відрізках $[a; b^*]$ і $[0, \varepsilon_0]$ дійсних вектор-функцій $x(\tau, \varepsilon)$ у цей самий простір. З огляду на білінійність оператора $\Phi x(\tau, \varepsilon)$ подамо його у вигляді

$$\Phi x(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{7} \Phi_i\ x(\tau, \varepsilon) - X_r(\tau) P_\rho c_\rho\ ,$$

де

$$\Phi_1 x(\tau, \varepsilon) = -G \Bigg[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (\tau),$$

$$\Phi_2 x(\tau, \varepsilon) = -\varepsilon X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \ell_1 G \Bigg[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (\cdot),$$

$$\Phi_3 x(\tau, \varepsilon) = -X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\Phi_4 x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \ell K \Bigg\{ \Big(\beta^* A + A_1(s) \Big) \times$$

$$\times G \Bigg[Z(z_0(\nu, c_r^*) + x(\nu, \varepsilon), \varepsilon);\ J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg] (s) \Bigg\} (\cdot),$$

$$\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \ell K \Big\{ \bar{\beta}(\varepsilon) A x(s,\varepsilon) \Big\}(\cdot),$$

$$\Phi_6 x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \ell K \Big\{ R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}(\cdot),$$

$$\Phi_7 x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \ell K \Big\{ \beta(\varepsilon) Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) \Big\}(\cdot)$$

та $\xi_1(\tau,\varepsilon)$, $\zeta_1(t,\varepsilon)$ — точки відрізка, який з'єднує точки $z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$ і $z_0(\tau,c_r^*) + y(\tau,\varepsilon)$.

Увівши позначення:

$$\sigma_1 = \max_{\substack{||x||,||y|| \le \rho, \\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}} \left|\left| \left. \frac{\partial Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right|_{z \,=\, \xi_1(\tau,\varepsilon)} \right|\right|,$$

$$\sigma_2 = \max_{\substack{||x||,||y|| \le \rho, \\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}} \left|\left| \left. \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right|_{z \,=\, \zeta_1(\tau,\varepsilon)} \right|\right|,$$

$$q = ||X(t)Q^+||, \ \lambda = ||\ell K[\,*\,](\cdot)||, \ \mu = ||K[\,*\,](\tau)||,$$

отримаємо оцінку норми різниці:

$$\Big|\Big|\Phi_1 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_1 y(\tau,\varepsilon)\Big|\Big| \le \varepsilon \left[q\Big(\sigma_1 + \lambda\sigma_2\Big) + \mu \right] \cdot ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||.$$

Аналогічно

$$\Big|\Big|\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_2 y(\tau,\varepsilon)\Big|\Big| \le \varepsilon\, q_1 \Big(\lambda_1\sigma_2 + \lambda\lambda_1\sigma_2 + \lambda_2\sigma_1\Big) ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||.$$

Тут

$$q_2 = \Big|\Big| X_r(\tau) I_1 B_0^+ P_{Q_d^*} \Big|\Big|, \ \lambda_1 = \Big|\Big| \ell_1 X(\cdot) Q^+ \Big|\Big|,$$

$$\lambda_2 = \Big|\Big| \ell_1 K\Big[\ *\ \Big](\cdot) \Big|\Big|, \ \lambda_3 = \Big|\Big| \ell_1 K\Big[A_1(s)\ *\ \Big](\cdot) \Big|\Big|.$$

Згідно з теоремою про середнє:

$$||J_1(z_0 + x,\varepsilon) - J_1(z_0 + y,\varepsilon)|| = \left|\left| \left. \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right|_{z \,=\, \zeta_2(\tau,\varepsilon)} \cdot (x - y) \right|\right|$$

функціонал $J'_{1_z}(\zeta_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ є похідною (в сенсі Фреше) функціонала $J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ у деякій точці $\zeta_2(t,\varepsilon)$ відрізка, який з'єднує точки $z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon)$ і $z_0(\tau,c_r^*)+y(\tau,\varepsilon)$. За умови $||x||,||y||\le\rho,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ функціонал

$$\left.\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z\ =\ \zeta_2(\tau,\varepsilon)}=\frac{\partial J(\zeta_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}-\ell_1$$

є нескінченно малою величиною, оскільки

$$\left.\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon=0}}-\ell_1=\frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*),0)}{\partial z}-\ell_1\equiv 0.$$

Отже, за теоремою про середнє в певній точці ε_1 відрізка $[0,\varepsilon_0]$ виконується рівність

$$\left.\frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z\ =\ \zeta_2(\tau,\varepsilon)}\cdot(x-y)=\left.\frac{\partial^2 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\ \partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}}\cdot\varepsilon\,(x-y).$$

Таким чином,

$$||J_1(z_0+x,\varepsilon)-J_1(z_0+y,\varepsilon)||\le\sigma_3\cdot\varepsilon||x-y||,$$

де

$$\sigma_3=\max_{\substack{||x||,||y||\le\rho,\\ \varepsilon_1\in[0,\varepsilon_0]}}\left|\left|\left.\frac{\partial^2 J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\ \partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=\zeta_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon=\varepsilon_1}}\right|\right|.$$

Отже,

$$\left|\left|\Phi_3x(\tau,\varepsilon)-\Phi_3y(\tau,\varepsilon)\right|\right|\le\varepsilon q_2\sigma_3\cdot||x-y||.$$

Подамо функціонал $\Phi_4x(\tau,\varepsilon)$ у вигляді

$$\Phi_4x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Bigg\{\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)\Bigg\{X(s)Q^+\Bigg[J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[Z(z_0(\nu,c_r^*)+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big]+K\Big[Z(z_0(\nu,c_r^*)+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Big\}(\cdot)$$

і оцінимо різницю:

$$\Big\|\Phi_4x(\tau,\varepsilon)-\Phi_4y(\tau,\varepsilon)\Big\|\le\varepsilon\Big\|X_r(\tau)I_1B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)(\cdot)\Big\|\times$$

$$\times\Big\{\Big\|X(s)Q^+\Big[J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-J(z_0(\cdot,c_r^*)+y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big\|+$$

$$+\Big\|X(s)Q^+\ell K\Big[Z(z_0(\nu,c_r^*)+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon)-Z(z_0(\nu,c_r^*)+y(\nu,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\|+$$

$$+\Big\|K\Big[Z(z_0(\nu,c_r^*)+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon)-Z(z_0(\nu,c_r^*)+y(\nu,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\Big\|\Big\}\le$$

$$\le\varepsilon q_2\lambda_4\Big[q(\lambda\sigma_1+\sigma_2)+\mu\sigma_1\Big]\cdot||x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)||.$$

Тут

$$\lambda_4=\Big\|\ell K\Big[\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)\ *\ \Big](\cdot)\Big\|.$$

Для оцінювання $||\bar\beta(\varepsilon)||$ запишемо невідому $\beta(\varepsilon)$ у вигляді суми:

$$\beta(\varepsilon)=\beta^*+\varepsilon\beta^{**}+\varepsilon\omega(\varepsilon)\ .$$

Згідно з прийнятими позначеннями

$$\bar\beta(\varepsilon)=\varepsilon\Big(\beta^{**}+\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big)\ .$$

Тут $\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ — малий залишок за умов $||x||\le\rho$, а також $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. У цьому випадку існує число ρ_1, для якого виконується нерівність

$$\varepsilon\Big(\beta^{**}-\rho_1\Big)\le\bar\beta(\varepsilon)\le\varepsilon\Big(\beta^{**}+\rho_1\Big).$$

Нехай

$$\rho_2=\max\Big\{\Big|\beta^{**}+\rho_1\Big|,\ \Big|\beta^{**}-\rho_1\Big|\Big\},$$

тоді

$$||\bar\beta(\varepsilon)||=|\bar\beta(\varepsilon)|\le\varepsilon\cdot\rho_2.$$

Таким чином,

$$\left|\left|\Phi_5 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_5 y(\tau,\varepsilon)\right|\right| \leq \varepsilon q_1 q_2 \lambda \rho_2 \cdot ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||,$$

де $q_1 = ||A||$. Для оцінювання норми різниці

$$||\Phi_6 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_6 y(\tau,\varepsilon)|| \leq \left|\left|X_r(\tau) I_1 B_0^+\right|\right| \cdot \left|\left|P_{Q_d^*} \ell K[\,*\,](\cdot)\right|\right| \times$$

$$\times \left|\left|R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - R_1(z_0(\tau, c_r^*) + y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\right|$$

перетворимо вираз

$$\left|\left|R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - R_1(z_0(\tau, c_r^*) + y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\right|.$$

Згідно з теоремою про середнє

$$||R_1(z_0 + x,\varepsilon) - R_1(z_0 + y,\varepsilon)|| = \left|\left|\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\,z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)} \cdot (x - y)\right|\right|;$$

похідна $R'_{1_z}(\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ є похідною функції $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ у деякій точці $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ відрізка, який з'єднує точки $z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$, $z_0(\tau, c_r^*) + y(\tau,\varepsilon)$. За умови $||x||, ||y|| \leq \rho$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ця похідна

$$\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\,z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)} = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\,z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)} - A_1(\tau)$$

є нескінченно малою, оскільки

$$\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon\,=\,0}} = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon\,=\,0}} - A_1(\tau) \equiv 0.$$

Отже, з теореми про середнє випливає, що в деякій точці ε_2 відрізка $[0, \varepsilon_0]$ виконується рівність

$$||R_1(z_0 + x,\varepsilon) - R_1(z_0 + y,\varepsilon)|| = \left|\left|\frac{\partial^2 R_1(z,\varepsilon)}{\partial z\, \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z\,=\,\xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon\,=\,\varepsilon_2}} \cdot \varepsilon(x - y)\right|\right|.$$

Таким чином,

$$||\Phi_6 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_6 y(\tau,\varepsilon)|| \leq \varepsilon \cdot q_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_4 \cdot ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||,$$

де

$$\sigma_4 = \max_{\substack{||x||,||y|| \leq \rho, \\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}} \left|\left| \frac{\partial^2 R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\ \partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z\ =\ \xi_2(\tau,\varepsilon) \\ \varepsilon\ =\ \varepsilon_2}} \right|\right|.$$

Оцінимо функцію

$$||\beta(\varepsilon)|| \leq |\beta^*| + ||\bar{\beta}(\varepsilon)|| \leq |\beta^*| + \varepsilon_0 \cdot \rho_2,$$

при цьому

$$||\Phi_7 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_7 y(\tau,\varepsilon)|| \leq \varepsilon \cdot q_2 \cdot \lambda \cdot \rho_3 \cdot \sigma_1 ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||.$$

Тут $\rho_3 = |\beta^*| + \varepsilon_0 \cdot \rho_2$. Використовуючи нерівності для різниць

$$||\Phi_i\ x(\tau,\varepsilon) - \Phi_i\ y(\tau,\varepsilon)||, \quad i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ 7,$$

отримуємо оцінку $\varepsilon_* \leq \varepsilon^*$, де [78, 123]

$$\frac{1}{\varepsilon_*} = q\Big(\sigma_1 + \lambda\sigma_2\Big) + \mu + q_1\Big[\lambda\Big(\sigma_2 + \lambda_1\sigma_2 + q_1\rho_2\Big) + \lambda_2\sigma_1\Big] +$$

$$+ q_2\Big\{\sigma_3 + \lambda_4\Big[q\Big(\sigma_2 + \lambda\sigma_1\Big) + \mu\sigma_1\Big] + \lambda\Big(\sigma_4 + q_2\rho_3\sigma_1\Big)\Big\}.$$

Одержуємо таке твердження [91, 136].

Теорема 2.2 *Для кожного простого* $\Big(P_{B_0^*} = 0\Big)$ *кореня* c^* *рівняння* $F(c^*) = 0$ *для породжувальних сталих задача (97), (98) має* ρ*-параметричний розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_r^*)$. *Цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу, який збігається при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$:

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad c^* = \mathrm{col}\ \Big(c_r^*, \beta^*\Big),$$

$$x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[f_0(s,c^*); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](\tau),$$

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s, c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} + P_\rho\, c_\rho,\ \dots\ ;$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\ I_1\ c_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon), \tag{119}$$

$$x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[\bar{A}_1(s) c_k + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_r^*) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_k^{(1)}(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_k^{(1)}(\cdot,\ \varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\tau),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big) x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s, c_r^*) + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} + P_\rho\, c_\rho, \quad k = 1, 2,\ \dots$$

З урахуванням заміни незалежної змінної (102) задача (97), (98) має ρ-параметричний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $z(t,0) \equiv z_0(t, c_r^*)$ і який можна знайти з використанням ітераційного процесу (119) за формулою $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t,\varepsilon)$. Величина $\beta_k(\varepsilon)$ є останньою компонентою вектора $c_k(\varepsilon)$.

Запропонована схема оцінювання величини ε^* дає змогу побудувати відповідні оцінки для автономних крайових задач вигляду (97), (98), а також крайових задач у складніших критичних випадках, наприклад у критичному випадку другого порядку [56, 90].

2.4 Автономні періодичні задачі

Нехай A — $(n \times n)$-вимірна матриця, а $Z(z,\varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція. Слабконелінійною автономною періодичною задачею будемо називати задачу про знаходження розв'язку

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ \dots\ ,\ z^{(n)}(t,\varepsilon)\Big), \quad z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T_1(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad T_1(0) = T, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$$

системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$dz/dt = Az + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \tag{120}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = z(0, \varepsilon) - z(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{121}$$

Розв'язок задачі (120), (121) шукаємо в малому околі розв'язку

$$z_0(t) = \operatorname{col}\left(z_0^{(1)}(t),\ \dots\ ,\ z_0^{(n)}(t)\right) \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[0, T], \quad i = 1, 2,\ \dots\ ,\ n,$$

породжувальної задачі

$$dz_0/dt = Az_0, \tag{122}$$

$$\ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(T) = 0. \tag{123}$$

Припускаємо, що вектор-функція $Z(z, \varepsilon)$ є неперервно-диференційовною за невідомою $z(t, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжувальної задачі та неперервно-диференційовною за малим параметром ε у малому додатному околі нуля.

2.4.1 Некритична періодична задача

Нехай періодична задача (120), (121) є некритичним випадком $\det Q \neq 0$, $Q := \ell X(\cdot)$. Тоді задача (120), (121) є однозначно розв'язною для будь-якої нелінійності $Z(z, \varepsilon)$ системи (120), тому, як і у випадку знаходження положень рівноваги задачі (120), (121), залежність довжини відрізка $T_1(\varepsilon)$, на якому визначено шуканий розв'язок цієї задачі, від малого параметра ε несуттєва, при цьому можна покласти $T_1(\varepsilon) \equiv T$. Таким чином, період шуканого розв'язку задачі (120), (121) відомий. Отже, для побудови цього розв'язку є застосовними метод простих ітерацій [116], метод Ньютона—Канторовича [43], а також метод найменших квадратів. Методи розроблено для некритичних періодичних задач.

2.4.2 Періодична крайова задача в критичному випадку

Припустимо, що періодична задача (120), (121) є критичним випадком $P_{Q^*} \neq \neq 0$. Як відомо, критичний випадок існує тоді і тільки тоді, коли матриця A має власні числа на уявній осі, а саме — чисто уявні числа вигляду

$$\lambda = \frac{2\pi i k}{T}, \quad k = 0, 1, 2,\ \dots\ , \quad i = \sqrt{-1}.$$

У критичному випадку породжувальна задача (122), (123) має r-параметричну сім'ю розв'язків:

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ — нормальна ($X(0) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (122); матриця $X_r(t)$ складена з r-лінійно-незалежних стовпців нормальної фундаментальної матриці $X(t)$. Як відомо [58], автономна задача (120), (121) суттєво відрізняється від аналогічних неавтономних періодичних задач; на відміну від останніх правий кінець $T_1(\varepsilon)$ проміжку $[0, T_1(\varepsilon)]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (120), (121), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови самого розв'язку. Скористаємося прийомом, який вперше застосував М.В. Остроградський, а згодом розвинув О.М. Ляпунов [6, 58]. Цей прийом полягає у зображенні невідомої функції

$$T_1(\varepsilon) = T\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)$$

через нову невідому

$$\beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta^*.$$

Величину $\beta(\varepsilon)$ визначають у процесі знаходження розв'язку задачі (120), (121). Сутність прийому О.М. Ляпунова полягає в заміні незалежної змінної

$$t = \tau\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big) \tag{124}$$

та визначенні розв'язку задачі (120), (121) і функції $\beta(\varepsilon)$ у вигляді рядів за степенями малого параметра. Метод О.М. Ляпунова давав змогу знаходити області збіжності отриманих рядів; згодом його удосконалили О.М. Крилов і І.Г. Малкін [49, 50, 57, 58].

Істотна різниця автономної задачі (120), (121) та аналогічної неавтономної періодичної задачі також полягає в тому, що будь-який розв'язок $z(t, \varepsilon)$ задачі (120), (121) існує поряд з цілою серією розв'язків $z(t+h, \varepsilon)$, які відрізняються від вихідного зсувом за незалежною змінною. Цей факт дає змогу [57, 58] зафіксувати початок відліку незалежної змінної так, щоб остання компонента вектора $c_r \in \mathbb{R}^r$ у поданні розв'язку породжувальної задачі (122), (123) стала нульовою. Отже, загалом розв'язок породжувальної задачі (122), (123):

$$z_0(t, c_{r-1}) = X_{r-1}(t)c_{r-1}, \ c_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1} \tag{125}$$

визначається $(n \times (r-1))$-вимірною матрицею $X_{r-1}(t)$, аналогічною до матриці $X_r(t)$, і залежить від $r-1$ компоненти сталого вектора $c_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}$

(а також від довільної скалярної величини h, яка відповідає за зсув за незалежною змінною). Зафіксувати початок відліку незалежної змінної так, щоб остання компонента вектора $c_r \in \mathbb{R}^r$ в поданні розв'язку породжувальної крайової задачі (122), (123) стала нульовою, можна також у загальніших задачах із властивістю $\mathcal{P}$, докладно вивчених О. Вейводою [147]. Заміною (124) отримуємо задачу (120), (121) у вигляді

$$dz/d\tau = Az + \varepsilon\left\{\beta(\varepsilon)Az(\tau,\varepsilon) + \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right\}, \tag{126}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) - z(T,\varepsilon) = 0. \tag{127}$$

Розв'язок задачі (126), (127) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язку $z_0(\tau,c_{r-1})$ породжувальної задачі (122), (123). Для знаходження збурення одержуємо задачу

$$dx/d\tau = Ax + \varepsilon\left\{\beta(\varepsilon)A\Big(z_0+x\Big) + \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z_0+x,\varepsilon)\right\}, \tag{128}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = x(0,\varepsilon) - x(T,\varepsilon) = 0. \tag{129}$$

Розглядаючи нелінійності задачі (128), (129) формально як неоднорідності, отримуємо необхідну і достатню умову її розв'язності:

$$P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\beta(\varepsilon)A\Big(z_0(s,c_{r-1}) + x(s,\varepsilon)\Big) + \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{130}$$

Сенс зображення розв'язку породжувальної задачі (122), (123) у вигляді (125) полягає в переході від нетерової крайової задачі, а саме: у знаходженні r-параметричного розв'язку $z(t,\varepsilon)$ системи (122) (в околі розв'язку $z_0(\tau,c_r)$) і функції $\beta(\varepsilon)$ з r-вимірної умови розв'язності (130), до фредгольмової задачі про знаходження $(r-1)$-параметричного розв'язку $z(t,\varepsilon)$ системи (122) (в околі розв'язку $z_0(\tau,c_{r-1})$) і функції $\beta(\varepsilon)$ з r-вимірної умови розв'язності (130) задачі (120), (121). Використовуючи неперервність нелінійної вектор-функції $Z(z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ за ε у малому додатному околі нуля, переходимо до межі при $\varepsilon \to 0$ у рівності (130) і отримуємо необхідну умову:

$$P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\beta^* Az_0(s,c_{r-1}^*\Big) + Z(z_0(s,c_{r-1}^*),0)\right](\cdot)\right\} = 0$$

існування розв'язку вихідної задачі (120), (121) у критичному випадку. Позначаючи

$$f_0(s,c_r^*) = \beta^* Az_0(s,c_{r-1}^*) + Z(z_0(s,c_{r-1}^*),0),$$

одержуємо таке твердження [25, 91, 111, 136].

Теорема 2.3 *Припустимо, що автономна крайова задача (120), (121) є критичним випадком* $P_{Q^*} \neq 0$ *і має розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z(t,0) = z_0(t, c^*_{r-1})$. *Тоді вектор* $c^*_r = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1}, \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ *задовольняє рівняння*

$$F_0(c^*_r) = P_{Q^*_r}\left\{\ell K\left[f_0(s, c^*_r)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{131}$$

Перші $r-1$ компоненти $c^*_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}$ кореня c^*_r рівняння (131) визначають амплітуду породжувального розв'язку $z_0(t, c^*_{r-1})$, у малому околі якого може існувати шуканий розв'язок вихідної задачі (120), (121). Крім того, з рівняння (131) можна знайти величину β^*, яка визначає перше наближення $T_{1_1}(\varepsilon) = T(1 + \varepsilon\beta^*)$ до періоду шуканого розв'язку. Якщо рівняння (131) не має дійсних коренів, то вихідна задача (120), (121) не має шуканих розв'язків.

Означення 2.2 *Рівняння (131) називають рівнянням для породжувальних амплітуд автономної періодичної крайової задачі (120), (121).*

Припустимо, що рівняння для породжувальних амплітуд (131) має дійсні корені. Фіксуючи один із дійсних розв'язків $c^*_r \in \mathbb{R}^r$ рівняння (131), отримуємо задачу про пошук розв'язку задачі (128), (129) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку

$$z_0(\tau, c^*_{r-1}) = X_{r-1}(\tau)c^*_{r-1}.$$

Використовуючи неперервну диференційовність за першим аргументом функції $Z(z,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку і неперервну диференційовність за другим аргументом у малому додатному околі нуля, розкладаємо цю функцію в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= Z(z_0(\tau, c^*_{r-1}), 0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + R_1(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), \varepsilon), \tag{132}$$

де

$$A_1(\tau) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(\tau, c^*_{r-1}),\\ \varepsilon = 0.}}$$

Залишок $R_1(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функції $Z(z_0(\tau, c^*_{r-1}) + x(\tau,\varepsilon), \varepsilon)$ за умови

$$\left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(\tau, c^*_{r-1}),\\ \varepsilon = 0}} \equiv 0$$

має вищий порядок малості за x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени, тому

$$R_1(z,\tau,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(\tau,c^*_{r-1}),\\ \varepsilon\ =\ 0,}} \equiv 0 \quad \frac{\partial R_1(z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(\tau,c^*_{r-1}),\\ \varepsilon\ =\ 0.}} \equiv 0$$

Загальний випадок $Z(z,\varepsilon)'_\varepsilon \neq 0$ розглянуто вище у випадку загальної нелінійної автономної крайової задачі. З огляду на розклад (132) перетворимо вираз, який стоїть в квадратних дужках в умові (130) розв'язності задачі (120), (121):

$$\beta(\varepsilon)A\Big(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon)\Big) + \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) =$$

$$= f_0(s,c^*_r) + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\bar\beta A z_0(s,c^*_{r-1}) + \bar\beta A x(s,\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon),\varepsilon).$$

Тут $\bar\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ — невідома неперервна скалярна функція, яка перетворюється на нуль при $\varepsilon = 0$. Розв'язок задачі (128), (129) подамо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau)c_{r-1} + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c^*_{r-1}),0) + A_1(s)x(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c^*_{r-1}) + x(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Big](\tau).$$

Невідома $c_{r-1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r-1}$– неперервна в малому додатному околі нуля вектор-функція малого параметра. Узагальнений оператор Гріна:

$$G\Big[f(s);0\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) - X(t)Q^+\Big\{\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

визначає частинний розв'язок T-періодичної задачі для диференціальної системи $dz_0/dt = Az_0 + f(t)$ з довільною неперервною вектор-функцією $f(t)$. Тут

$$K\Big[f(s)\Big](\tau) = X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(s)f(s)ds$$

є оператором Гріна задачі Коші. Відхилення $x(\tau,\varepsilon)$ від породжувального розв'язку $z_0(\tau,c^*_{r-1})$ при $\varepsilon = 0$ перетворюється на нульовий вектор, тому

необхідне виконання рівності $c_{r-1}(0) = 0$ і тотожності $x^{(1)}(\tau, 0) \equiv 0$ на всьому відрізку $[0, T]$. Перша вимога є суттєвою, а друга випливає з неперервності узагальненого оператора Гріна породжувальної задачі і неперервності нелінійності $Z(z, \varepsilon)$ за z та ε в околі породжувального розв'язку $z_0(\tau, c_r^*)$ і точки $\varepsilon = 0$. Необхідна і достатня умова (130) розв'язності задачі (128), (129) набуває вигляду

$$P_{Q_r^*}\Bigg\{\ell K\Bigg[f_0(s, c^*) + \bar{A}_1(s)c_r +$$

$$+\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_{r-1}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} = 0.$$

Тут

$$\bar{A}_1(s) = \Bigg\{\Big[\beta^* A + A_1(s)\Big]X_{r-1}(s);\ AX_{r-1}(s)c_{r-1}^*\Bigg\}$$

є $(n \times r)$-вимірною матрицею,

$$c_r(\varepsilon) = \mathrm{col}\ (c_{r-1}(\varepsilon), \bar{\beta}(\varepsilon))$$

є r-вимірною вектор-функцією,

$$r(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = \bar{\beta} A x(\tau, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\beta Z(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) + R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$$

є n-вимірним вектор-стовпцем. Оскільки прогнозується, що рівність (131) виконується, остання умова розв'язності спрощується:

$$P_{Q_r^*}\Bigg\{\ell K\Bigg[\bar{A}_1(s)c_r + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_{r-1}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} = 0,$$

і отримуємо рівняння

$$B_0\ c_r(\varepsilon) = -P_{Q_r^*}\Bigg\{\ell K\Bigg[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c_{r-1}^*) + x(s, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\},$$

однозначно розв'язне у випадку невиродженості матриці

$$B_0 = P_{Q_r^*}\ell K\Big[\bar{A}_1(s)\Big](\cdot).$$

Отже, за умови $\det B_0 \neq 0$, одержуємо операторну систему, рівнозначну до задачі про знаходження розв'язків системи (128), які задовольняють умову періодичності (129):

$$x(\tau, \varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1 c_r + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad I_1 := \begin{pmatrix} I_{r-1} & O \end{pmatrix},$$

$$c_r(\varepsilon) = -B_0^{-1} P_{Q_r^*} \left\{ \ell K \left[\left(\beta^* A + A_1(s) \right) x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_{r-1}^*) + x(s,\varepsilon), \varepsilon) \right](\cdot) \right\}, \tag{133}$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G \left[f_0(s, c_r^*) + \bar{A}_1(s) c_r + \left(\beta^* A + A_1(s) \right) x^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0 \right](\tau).$$

Операторна система (133) належить до класу систем, для розв'язування яких можна застосувати метод простих ітерацій [17]. Перше наближення до розв'язку операторної системи (133) шукаємо, як розв'язок крайової задачі першого наближення до задачі (128), (129):

$$dx_1/d\tau = Ax_1 + \varepsilon f_0(\tau, c_r^*), \quad \ell x_1(\cdot,\ \varepsilon) = x_1(0,\ \varepsilon) - x_1(T,\ \varepsilon) = 0. \tag{134}$$

Існування розв'язку задачі (134) гарантовано вибором вектора c_r^*, який є коренем рівняння (131) для породжувальних амплітуд з періодичністю матриці $X_r(\tau)$. Подамо його у вигляді

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau) I_1 c_{r_1} + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, G \left[f_0(s, c_r^*);\ 0 \right](\tau).$$

Друге наближення до розв'язку операторної системи (133) є розв'язком крайової задачі другого наближення до задачі (128), (129):

$$dx_2/d\tau = Ax_2 + \varepsilon \Big\{ f_0(\tau, c_r^*) + \bar{A}_1(\tau) c_{r_1} +$$

$$+ \left(\beta^* A + A_1(\tau) \right) x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + r(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \varepsilon) \Big\}, \tag{135}$$

$$\ell\ x_2(\cdot,\ \varepsilon) = x_2(0,\ \varepsilon) - x_2(T,\ \varepsilon).$$

Розв'язок задачі (135) запишемо як

$$x_2(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau) I_1 c_{r_2} + x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

при цьому

$$x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon G \left[\bar{A}_1(s) c_{r_1} + \left(\beta^* A + A_1(s) \right) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s, c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon), \varepsilon);\ 0 \right](\tau).$$

Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (135) другого наближення

$$P_{Q_r^*} \Big\{ \ell K \Big[f_0(s, c_r^*) + \bar{A}_1(s) c_{r_1} + \left(\beta^* A + A_1(s) \right) x_1^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+r(z_0(s,c^*_{r-1})+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0$$

спрощується з урахуванням рівності (131):

$$P_{Q^*_r}\Big\{\ell K\Big[\bar{A}_1(s)c_{r_1}+\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c^*_{r-1})+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0.$$

Отримуємо рівняння

$$B_0\,c_{r_1}(\varepsilon)=-P_{Q^*_r}\Big\{\ell K\Big[\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c^*_{r-1})+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Таким чином, на другому кроці ітераційної процедури за умови $\det\,B_0\neq 0$ знайдено перше наближення до розв'язку системи (133):

$$x_1(\tau,\varepsilon)=X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_1}+x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$c_{r_1}(\varepsilon)=-B_0^{-1}P_{Q^*_r}\Big\{\ell K\Big[\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c^*_{r-1})+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Періодичність другого наближення до розв'язку системи (133) гарантована вибором вектора $c_{r_1}(\varepsilon)$ і періодичністю матриці $X_r(\tau)$. Третє наближення до розв'язку операторної системи (133) є розв'язком крайової задачі третього наближення до задачі (128), (129):

$$dx_3/d\tau=Ax_3+\varepsilon\Big\{f_0(\tau,c^*_r)+\bar{A}_1(\tau)c_{r_2}+$$

$$+\Big(\beta^*A+A_1(\tau)\Big)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)+r(z_0(\tau,c^*_{r-1})+x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},\qquad(136)$$

$$\ell\;x_3(\cdot,\;\varepsilon)=x_3(0,\;\varepsilon)-x_3(T,\;\varepsilon).$$

Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (136) третього наближення

$$P_{Q^*_r}\Big\{\ell K\Big[f_0(s,c^*_r)+\bar{A}_1(s)c_{r_2}+\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+r(z_0(s,c^*_{r-1})+x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0$$

спрощується з урахуванням рівності (131):

$$P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\bar{A}_1(s)c_{r_2}+\Big(\beta^* A+A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c_{r-1}^*)+x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\}=0.$$

Одержуємо рівняння

$$B_0\, c_{r_2}(\varepsilon)=-P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\Big(\beta^* A+A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c_{r-1}^*)+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\}.$$

Таким чином, на третьому кроці ітераційної процедури за умови $\det B_0 \neq 0$ знайдено друге наближення до розв'язку системи (133):

$$x_2(\tau,\varepsilon)=X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_2}+x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$c_{r_2}(\varepsilon)=-B_0^{-1}P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\Big(\beta^* A+A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c_{r-1}^*)+x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\}.$$

Розв'язок задачі (136) подамо у вигляді

$$x_3(\tau,\varepsilon)=X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_3}+x_3^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad x_3^{(1)}(\tau,\varepsilon)=x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)+x_3^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

при цьому

$$x_3^{(2)}(\tau,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon G\left[\bar{A}_1(s)c_{r_2}+\Big(\beta^* A+A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c_{r-1}^*)+x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0)\right](\tau).$$

Періодичність третього наближення до розв'язку системи (133) гарантована вибором вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$ і періодичністю матриці $X_{r-1}(\tau)$. Продовжуючи викладки, отримуємо таке твердження [25, 91, 111, 136].

Теорема 2.4 *Для кожного простого* ($\det B_0 \neq 0$) *кореня* $c^* = \mathrm{col}\,(c_{r-1}^*,\beta^*)$ *рівняння* $F(c_r^*)=0$ *задача (128), (129) має єдиний* T*-періодичний розв'язок, який при* $\varepsilon=0$ *перетворюється на нульовий. Цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу який збігається при* $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$:

$$x_1(\tau,\varepsilon)=X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_1}+x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[f_0(s,c_r^*);\ 0\Big](\tau),$$

$$c_{r_1}(\varepsilon)=-B_0^{-1}P_{Q_r^*}\left\{\ell K\left[\Big(\beta^* A+A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+r(z_0(s,c_{r-1}^*)+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\};$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_2} + x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s)c_{r_1} + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Big](\tau),$$

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -B_0^{-1}P_{Q_r^*}\Big\{\ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},\ldots;$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_{k+1}} + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(2)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s)c_{r_k} + \Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + \tag{137}$$

$$+ r(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Big](\tau),\ \ldots\ ,\ k = 1,2,3,\ \ldots\ ,$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -B_0^{-1}P_{Q_r^*}\Big\{\ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_k^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+ r(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

З урахуванням заміни незалежної змінної $t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ задача (120), (121) має єдиний $T_1(\varepsilon)$-періодичний розв'язок, що перетворюється на породжувальний розв'язок $z(t,0) \equiv z_0(t,c_r^*)$, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу (137) за формулою

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_{r-1}^*) + x_k(t,\varepsilon),\ t \in [0,T_{1_k}(\varepsilon)], \quad T_{1_k}(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)).$$

Величина $\beta_{k+1}(\varepsilon)$, $\beta(0) = \beta^*$ є останньою компонентою вектора $c_{r_{k+1}}(\varepsilon)$.

Ітераційна схема (137) дещо відрізняється від традиційної [20, 22] і не є окремим випадком схеми [25]. У критичному випадку за умови ($\det B_0 \neq 0$) для відповіді на питання про існування розв'язків крайової задачі (120), (121) досить врахувати першу похідну нелінійності цієї задачі. Такий критичний випадок далі називатимемо критичним випадком першого порядку. Проміжок $[0,\varepsilon^*]$, на якому зберігається збіжність ітераційної процедури, можна знайти як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [17, 38, 55, 56], так і безпосередньо з визначення оператора стиснення [78, 123].

2.4.3 Періодична задача для рівняння ван дер Поля

Переконаємося в існуванні періодичного розв'язку слабконелінійної системи

$$dz/dt = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \quad z = z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\ (z^{(a)}, z^{(b)}), \tag{138}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на розв'язок породжувальної системи, та побудуємо перші наближення до нього. Тут

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ Z(z,\varepsilon) = \mathrm{col}\ \left[0,\ \left(1 - (z^{(a)})^2\right) z^{(b)}\right].$$

Система (138) визначає коливання в ламповому генераторі у «м'якому режимі» [3, 146]. Нормальною фундаментальною матрицею однорідної частини диференціального рівняння (138), а саме породжувальної системи, є матриця

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Оскільки $Q = 0$, то існує критичний випадок, причому $P_{Q^*} = P_{Q_r} = I_2$. Обчислюємо оператор Гріна задачі Коші для породжувального рівняння з довільною неоднорідністю $f(t)$:

$$K\left[f(s)\right](t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds, \quad X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

При цьому

$$P_{Q_r^*}\ell K\left[f(s)\right](\cdot) = -\int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Відкидаючи другий стовпець матриці $X(t) = X_r(t)$, отримуємо загальний (з урахуванням довільної скалярної величини h, яка визначає зсув за незалежною змінною) розв'язок породжувальної задачі

$$z_0(t, c_{r-1}) = X_{r-1}(t)c_{r-1}, \quad c_{r-1} \in \mathbb{R}^1.$$

З рівняння для породжувальних амплітуд періодичної задачі для рівняння (138) отримуємо систему

$$F(c_r) = \pi c_{r-1}\begin{bmatrix} 1/4\left(c_{r-1}^2 - 4\right) \\ 2\beta \end{bmatrix} = 0. \tag{139}$$

Перший корінь $c_{r-1}^* = 2,\ \beta^* = 0$ рівняння (162) визначає породжувальний розв'язок

$$z_0(t, c_{r-1}^*) = \mathrm{col}\ \left(2\cos t, -2\sin t\right),$$

а другий корінь $c^*_{r-1} = -2,\ \beta^* = 0$ — симетричну йому сім'ю розв'язків. Третій корінь $z_0(t, c^*_{r-1}) \equiv 0,\ c^*_{r-1} = 0,\ \beta^* \in \mathbb{R}^1$ відповідає тривіальному породжувальному розв'язку. Першому кореню рівняння (162) $c^*_{r-1} = 2,\ \beta^* = 0$ відповідає матриця

$$B_0 = \int\limits_0^{2\pi} X^{-1}(s)\bar{A}_1(s)ds = 2\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\det B_0 \neq 0$, періодична задача для рівняння ван дер Поля є критичним випадком першого порядку і згідно з теоремою 2.4 має єдиний нетривіальний $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$-періодичний розв'язок. Унаслідок рівності $Q = Q^+ = 0$ оператор Гріна 2π-періодичної задачі для породжувального рівняння з довільною неоднорідністю $f(t)$ збігається з оператором Гріна задачі Коші для породжувального рівняння з довільною неоднорідністю $f(\tau)$, неперервною на відрізку $[0; 2\pi]$:

$$G\Big[f(s); 0\Big](\tau) \equiv K\Big[f(s)\Big](\tau).$$

Перше наближення до відхилення від породжувального розв'язку шукаємо у вигляді

$$x_1(\tau, \varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1 c_{r_1}(\varepsilon) + x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

причому вектор $x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ визначає 2π-періодична задача:

$$dx_1^{(1)}/d\tau = Ax_1^{(1)} + \varepsilon f_0(\tau, c^*_r), \quad \ell x_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon) = x_1^{(1)}(0, \varepsilon) - x_1^{(1)}(2\pi, \varepsilon) = 0.$$

Для його обчислення знаходимо функцію

$$x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c^*_r), 0);\ 0\Big](\tau) = \frac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} 3\sin\tau - \sin 3\tau \\ 3\cos\tau - 3\cos 3\tau \end{bmatrix}.$$

Як і слід було очікувати, з огляду на рівність (131) функція $x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ є 2π-періодичною. Для обчислення вектора

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^{-1}P_{Q^*_r}\Big\{\ell K\Big[\Big(\beta^* A + A_1(s)\Big)x_1^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},$$

запишемо залишок:

$$r(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) = \bar{\beta}_0(\varepsilon)Ax_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\beta_0(\varepsilon)Z(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) +$$

$$+ R_1(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) = R_1(z_0(s, c^*_{r-1}) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon).$$

Використовуючи розклад (132) та рівність $\beta^* = 0$, отримуємо вектор

$$c_{r_1}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5\varepsilon^2\pi}{32} \\ \frac{\varepsilon\pi}{4} - \frac{21\varepsilon^3\pi}{128} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5\varepsilon^2}{64} \\ \frac{\varepsilon}{16} - \frac{21\varepsilon^3}{512} \end{pmatrix}.$$

Отже, перше наближення до шуканого періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля має вигляд

$$z_1(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix} \cdot \left(2 - \frac{5\varepsilon^2}{64}\right) + \frac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} 3\sin\tau - \sin 3\tau \\ 3\cos\tau - 3\cos 3\tau \end{bmatrix}.$$

Перше наближення до шуканого періоду розв'язку цього рівняння — функція

$$T_{1_1}(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{21\varepsilon^4}{512}\right).$$

Період $T_{1_1}(\varepsilon)$ першого наближення монотонно зростає на відрізку

$$\varepsilon \in \left[0\ ;\ \frac{4}{\sqrt{21}}\right],$$

отже, природно обмежити проміжок зміни малого параметра відрізком $[0\ ;\ 0,872872]$, оскільки праворуч від точки $\frac{4}{\sqrt{21}}$ знайдений період $T_{1_1}(\varepsilon)$ монотонно спадає та в точці

$$\varepsilon = \frac{4\sqrt{1+\sqrt{43}}}{\sqrt{21}} \approx 2,39959$$

перетворюється на нуль. Друге наближення $x_2(\tau,\varepsilon)$ до періодичного відхилення $x(\tau,\varepsilon)$ від породжувального розв'язку рівняння ван дер Поля шукаємо у вигляді

$$x_2(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau)I_1c_{r_2} + x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon),$$

де

$$x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon G\left[\bar{A}_1(s)c_{r_1} + \left(\beta^* A + A_1(s)\right)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) + r(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\right](\tau) =$$

$$= \varepsilon G\left[\bar{A}_1(s)c_{r_1} + Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon) - Z(z_0(s,c_{r-1}^*),0);\ 0\right](\tau) =$$

$$= \varepsilon X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(s)\left[\bar{A}_1(s)c_{r_1}(\varepsilon) + Z(z_0(s,c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon) - Z(z_0(s,c_{r-1}^*),0)\right]ds.$$

Вектор-функція

$$x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\cdot X(\tau)\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1(\tau,\varepsilon)\\ \psi_1(\tau,\varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{2_a}^{(2)}(\tau,\varepsilon)\\ x_{2_b}^{(2)}(\tau,\varepsilon)\end{bmatrix}.$$

є розв'язком 2π-періодичної задачі

$$\begin{cases} dx_2^{(2)}/d\tau=Ax_2^{(2)}+\varepsilon\Big\{\bar{A}_1(\tau)c_{r_1}+\\ +\Big[\beta^*A+A_1(\tau)\Big]x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)+r(z_0(\tau,c_{r-1}^*)+x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},\\ \ell x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon)=x_2^{(1)}(0,\varepsilon)-x_2^{(2)}(2\pi,\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Тут

$$x_2^{(2a)}(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{61440}\cdot\Big(-8320\varepsilon\cos\tau+2016\varepsilon^3\cos\tau+11520\varepsilon\cos3\tau-$$

$$-2520\varepsilon^3\cos3\tau-3200\varepsilon\cos5\tau+600\varepsilon^3\cos5\tau-105\varepsilon^3\cos7\tau+$$

$$+9\varepsilon^3\cos9\tau-16800\varepsilon^2\sin\tau+8280\varepsilon^2\sin3\tau-2000\varepsilon^2\sin5\tau+280\varepsilon^2\sin7\tau\Big),$$

$$x_2^{(2b)}(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{61440}\cdot\Big(-16800\varepsilon^2\cos\tau+24840\varepsilon^2\cos3\tau-10000\varepsilon^2\cos5\tau+$$

$$+1960\varepsilon^2\cos7\tau+16000\varepsilon\sin\tau-7056\varepsilon^3\sin\tau-34560\varepsilon\sin3\tau+$$

$$+7560\varepsilon^3\sin3\tau+16000\varepsilon\sin5\tau-3000\varepsilon^3\sin5\tau+735\varepsilon^3\sin7\tau-81\,\varepsilon^3\sin9\tau\Big).$$

Періодичність вектор-функції $x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon)$ забезпечено вибором вектора $c_{r_1}(\varepsilon)$. Перша компонента вектор-функції $c_{r_2}(\varepsilon)$:

$$c_{r-1_2}(\varepsilon)=\frac{3\,\varepsilon^2}{64}-\frac{77\,\varepsilon^4}{1\,536}+\frac{47\,537\,\varepsilon^6}{2\,949\,120}-\frac{1\,947\,767\,\varepsilon^8}{377\,487\,360}+\frac{52\,128\,683\,\varepsilon^{10}}{16\,106\,127\,360}-$$

$$-\frac{10\,873\,561\,751\,\varepsilon^{12}}{10\,307\,921\,510\,400}+\frac{65\,155\,530\,073\,\varepsilon^{14}}{549\,755\,813\,888\,000}+\frac{8\,627\,113\,719\,\varepsilon^{16}}{2\,199\,023\,255\,552\,000}$$

визначає амплітуду вектора

$$x_2(\tau,\varepsilon)=X_{r-1}(\tau)c_{r-1_2}(\varepsilon)+x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon).$$

Друга компонента вектор-функції $c_{r_2}(\varepsilon)$:

$$\bar{\beta}_2(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) = \frac{31\ \varepsilon^3}{3\ 072} - \frac{683\ \varepsilon^5}{61\ 440} + \frac{112\ 883\ \varepsilon^7}{23\ 592\ 960} -$$

$$-\frac{40\ 955\ 339\ \varepsilon^9}{18\ 119\ 393\ 280} + \frac{6\ 631\ 463\ 819\ \varepsilon^{11}}{7\ 730\ 941\ 132\ 800} - \frac{301\ 949\ 919\ \varepsilon^{13}}{2\ 748\ 779\ 069\ 440} + \frac{964\ 160\ 379\ \varepsilon^{15}}{879\ 609\ 302\ 220\ 800}$$

визначає друге наближення до шуканого періоду розв'язку цього рівняння:

$$T_{1_2}(\varepsilon) = 2\pi \cdot \Big(1 + \varepsilon\beta_2(\varepsilon)\Big).$$

Період $T_{1_2}(\varepsilon)$ другого наближення монотонно зростає на відрізку $[0\ ;\ 0,899617]$. Так можна природно обмежити проміжок зміни малого параметра відрізком $[0\ ;\ 0,899\ 617]$, оскільки праворуч від точки $\varepsilon \approx 0,899617$ знайдений період $T_{1_2}(\varepsilon)$ монотонно спадає і в точці $\varepsilon \approx 1,23443$ перетворюється на нуль.

2.4.4 Доведення збіжності ітераційної схеми

Доведемо збіжність ітераційної схеми (137) до шуканого розв'язку задачі (128), (129) і оцінимо довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, на якому зберігається збіжність цієї процедури. Припустимо, що виконуються вимоги теореми 2.3. Розв'язок задачі (128), (129), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на нуль $x(\tau, 0) \equiv\ 0$, шукаємо в досить малому околі породжувального розв'язку нуля:

$$z_0(\tau, c^*_{r-1}) = X_{r-1}(\tau)c^*_{r-1}.$$

Припускаємо, що вектор $c^*_r \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння (131) для породжувальних амплітуд. Операторна система (133) еквівалентна задачі про побудову розв'язку операторного рівняння $x(\tau, \varepsilon) = \Phi x(\tau, \varepsilon)$ на множині функцій $x(\tau, \varepsilon)$, які перетворюються на нуль при $\varepsilon = 0$. Тут

$$\Phi x(\tau, \varepsilon) = -X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q^*_r}\Bigg\{\ell K\Bigg[\Big(\beta^*A + A_1(s)\Big)x^{(1)}(s, \varepsilon) + r(z(s, \varepsilon), \varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} +$$

$$+\varepsilon\, G\Bigg[Z(z_0(s, c^*_{r-1}) + x(s, \varepsilon), \varepsilon);\ 0\Bigg](\tau) = -X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q^*_r} \times$$

$$\times \ell K\Bigg\{\varepsilon\Big(\beta^*A + A_1(s)\Big)G\Bigg[Z(z_0(\nu, c^*_{r-1}) + x(\nu, \varepsilon), \varepsilon);\ 0\Bigg](s) +$$

$$+\bar{\beta}Ax(s,\varepsilon)+\varepsilon\beta Z(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon)+R_1(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)+$$

$$+\varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Bigg](\tau).$$

Неперервний обмежений оператор

$$\Phi x(\tau,\varepsilon)=\Phi\Bigg(Z(z_0(\tau,c^*_{r-1})+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg)$$

є суперпозицією лінійного за $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ оператора, що діє на неперервно-диференційовну за x функцію $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, і нелінійної функції $Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$. Цей оператор діє з простору неперервних на відрізках $[0;T]$ і $[0,\varepsilon_0]$ дійсних вектор-функцій у цей самий простір. З огляду на лінійність оператора $\Phi x(\tau,\varepsilon)$ подамо його у вигляді

$$\Phi x(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{5}\Phi_i\ x(\tau,\varepsilon)\ ,$$

де

$$\Phi_1 x(\tau,\varepsilon)=-\varepsilon X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\times$$

$$\times\Bigg\{\Bigg(\beta^*A+A_1(s)\Bigg)G\Bigg[Z(z_0(\nu,c^*_{r-1})+x(\nu,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Bigg](s)\Bigg\}(\cdot),$$

$$\Phi_2 x(\tau,\varepsilon)=-X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\Bigg[\bar{\beta}(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon)\Bigg](\cdot),$$

$$\Phi_3 x(\tau,\varepsilon)=-X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\Bigg[R_1(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot),$$

$$\Phi_4 x(\tau,\varepsilon)=-\varepsilon X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}P_{Q_r^*}\ell K\Bigg[\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot),$$

$$\Phi_5 x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c^*_{r-1})+x(s,\varepsilon),\varepsilon);\ 0\Bigg](\tau).$$

Оцінимо норму різниці:

$$||\Phi_1 x(\tau,\varepsilon)-\Phi_1 y(\tau,\varepsilon)||\le\varepsilon||X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}||\times$$

$$\times\Bigg\|P_{Q_r^*}\ell K\Bigg[\Bigg(\beta^*A+A_1(s)\Bigg)\ *\ \Bigg](\cdot)\Bigg\|\cdot\Bigg\|G\Bigg[\ *\ ;\ 0\ \Bigg](s)\Bigg\|\times$$

$$\times\left|\left|Z(z_0(\tau,c^*_{r-1})+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-Z(z_0(\tau,c^*_{r-1})+y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\right|.$$

Нехай $\xi(\tau,\varepsilon)$ — довільна точка відрізка, що з'єднує точки $z_0(\tau,c^*_{r-1})+x(\tau,\varepsilon)$ та $z_0(\tau,c^*_{r-1})+y(\tau,\varepsilon)$. Уводячи позначення

$$\sigma_1^{(a)}=\max_{\substack{||x||,||y||\le\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}}\left|\left|\frac{\partial Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\ z\ =\ \xi(\tau,\varepsilon)}\right|\right|,\quad q_1^{(a)}=\left|\left|X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}\right|\right|,$$

$$\mu=\left|\left|G\Big[\ *\ ;\ 0\ \Big](s)\right|\right|,\quad \lambda_a=\left|\left|P_{Q_r^*}\ell K\Big[\Big(\beta^*A+A_1(s)\Big)\ *\ \Big](\cdot)\right|\right|$$

отримуємо оцінку норми різниці:

$$\left|\left|\Phi_1x(\tau,\varepsilon)-\Phi_1y(\tau,\varepsilon)\right|\right|\le\varepsilon q_1^{(a)}\lambda_a\mu\sigma_1^{(a)}\cdot||x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)||.$$

Аналогічно

$$\left|\left|\Phi_2x(\tau,\varepsilon)-\Phi_2y(\tau,\varepsilon)\right|\right|\le\left|\left|X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}\right|\right|\cdot\left|\left|P_{Q_r^*}\ell K\Big[\ *\ \Big](\cdot)\right|\right|\times$$

$$\times||\bar\beta(\varepsilon)||\cdot||A||\cdot||x(\tau,\varepsilon)-y(\tau,\varepsilon)||.$$

Для оцінювання $||\bar\beta(\varepsilon)||$ зобразимо невідому $\beta(\varepsilon)$ у вигляді суми:

$$\beta(\varepsilon)=\beta^*+\varepsilon\beta^{**}+\varepsilon\omega(\varepsilon)\ .$$

Згідно з прийнятими позначеннями

$$\bar\beta(\varepsilon)=\varepsilon\Big(\beta^{**}+\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big)\ .$$

Тут $\omega(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-$ малий залишок за умов $||x||\le\rho$, а також $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. У цьому випадку існує число ρ_1, для якого виконується нерівність

$$\varepsilon\Big(\beta^{**}-\rho_1\Big)\le\bar\beta(\varepsilon)\le\varepsilon\Big(\beta^{**}+\rho_1\Big).$$

Нехай

$$\rho_2=\max\left\{\Big|\beta^{**}+\rho_1\Big|,\ \Big|\beta^{**}-\rho_1\Big|\right\},$$

тоді

$$||\bar\beta(\varepsilon)||=|\bar\beta(\varepsilon)|\le\varepsilon\cdot\rho_2.$$

Отже,

$$\left|\left|\Phi_2 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_2 y(\tau,\varepsilon)\right|\right| \leq \varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot q_1 \cdot \rho_2 \cdot ||x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)||,$$

де

$$\lambda = \left|\left|P_{Q_r^*}\ell K\left[\ *\ \right](\cdot)\right|\right|,\ q_1 = ||A||.$$

Для оцінювання норми різниці:

$$||\Phi_3 x(\tau,\varepsilon) - \Phi_3 y(\tau,\varepsilon)|| \leq \left|\left|X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1}\right|\right| \cdot \left|\left|P_{Q_r^*}\ell K[\ *\ ](\cdot)\right|\right| \times$$

$$\times \left|\left|R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\right|$$

перетворимо вираз

$$\left|\left|R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - R_1(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\right|.$$

Відповідно до формули скінченних різниць [75, с. 390]:

$$||R_1(z_0 + x,\varepsilon) - R_1(z_0 + y,\varepsilon)|| = \left|\left|\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\ z = \xi_2(\tau,\varepsilon)} \cdot (x - y)\right|\right|;$$

похідна $R'_{1_z}(\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ є похідною функції $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ у деякій точці $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ відрізка, який з'єднує точки $z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau,\varepsilon)$ та $z_0(\tau, c_{r-1}^*) + y(\tau,\varepsilon)$. За умови

$$||x||, ||y|| \leq \rho,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

ця похідна:

$$\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\ z = \xi_2(\tau,\varepsilon)} = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\ z = \xi_2(\tau,\varepsilon)} - A_1(\tau)$$

є нескінченно малою, оскільки

$$\frac{\partial R_1(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z = \xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon = 0}} = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\ z = \xi_2(\tau,\varepsilon)\varepsilon = 0} - A_1(\tau) \equiv 0.$$

Отже, у деякій точці ε_2 відрізка $[0, \varepsilon_0]$ існує зображення

$$||R_1(z_0 + x, \varepsilon) - R_1(z_0 + y, \varepsilon)|| = \left|\left| \frac{\partial^2 R_1(z, \varepsilon)}{\partial z \; \partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z = \xi_2(\tau, \varepsilon) \\ \varepsilon = \varepsilon_2}} \cdot \varepsilon(x - y) \right|\right|.$$

Таким чином,

$$||\Phi_3 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_3 y(\tau, \varepsilon)|| \leq \varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot \sigma_4 \cdot ||x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon)||.$$

Тут введено позначення:

$$\sigma_4 = \max_{\substack{||x||, ||y|| \leq \rho, \\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}} \left|\left| \frac{\partial^2 R_1(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z \; \partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z \; = \; \xi_2(\tau, \varepsilon) \\ \varepsilon \; = \; \varepsilon_2}} \right|\right|.$$

Оцінимо функцію

$$||\beta(\varepsilon)|| \leq |\beta^*| + ||\bar{\beta}(\varepsilon)|| \leq |\beta^*| + \varepsilon_0 \cdot \rho_2,$$

при цьому

$$\left|\left| \Phi_4 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_4 y(\tau, \varepsilon) \right|\right| \leq \varepsilon \left|\left| X_{r-1}(\tau) I_1 B_0^{-1} \right|\right| \cdot \left|\left| P_{Q_r^*} \ell K[\, * \,](\cdot) \right|\right| \cdot ||\beta(\varepsilon)|| \times$$

$$\times \left|\left| Z(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - Z(z_0(\tau, c_{r-1}^*) + y(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right|\right|,$$

отже,

$$\left|\left| \Phi_4 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_4 y(\tau, \varepsilon) \right|\right| \leq \varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot \rho_3 \cdot \sigma_1^{(a)} \cdot \left|\left| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \right|\right|, \quad \rho_3 = |\beta^*| + \varepsilon_0 \cdot \rho_2.$$

Аналогічно

$$\left|\left| \Phi_5 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_5 y(\tau, \varepsilon) \right|\right| \leq \varepsilon \cdot \left|\left| G\Big[\, * \; ; \; 0 \,\Big](\tau) \right|\right| \cdot \left|\left| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \right|\right|,$$

тоді

$$\left|\left| \Phi_5 x(\tau, \varepsilon) - \Phi_5 y(\tau, \varepsilon) \right|\right| \leq \varepsilon \cdot \mu \cdot \left|\left| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \right|\right|.$$

Використовуючи нерівності для різниць

$$||\Phi_i \; x(\tau, \varepsilon) - \Phi_i \; y(\tau, \varepsilon)||, \quad i = 1, 2, \; \ldots \; , 5,$$

отримуємо оцінку

$$\left|\left|\Phi\ x(\tau,\varepsilon) - \Phi\ y(\tau,\varepsilon)\right|\right| \le \varepsilon q_1^{(a)} \lambda_a \mu \sigma_1^{(a)} \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right| +$$

$$+\varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot q_1 \cdot \rho_2 \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right| + \varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot \sigma_4 \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right| +$$

$$+\varepsilon \cdot q_1^{(a)} \cdot \lambda \cdot \rho_3 \cdot \sigma_1^{(a)} \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right| + \varepsilon \cdot \mu \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right|.$$

Отже,

$$\left|\left|\Phi\ x(\tau,\varepsilon) - \Phi\ y(\tau,\varepsilon)\right|\right| \le$$

$$\le \varepsilon \left\{ \mu + q_1^{(a)} \left[\lambda_a \mu \sigma_1^{(a)} + \lambda \left(q_1 \rho_2 + \sigma_4 + \rho_3 \sigma_1^{(a)} \right) \right] \right\} \cdot \left|\left|x(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)\right|\right|,$$

при цьому шукане значення $\varepsilon_* \le \varepsilon^*$, де

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\mu + q_1^{(a)} \cdot \left\{ \lambda_a \cdot \mu \cdot \sigma_1^{(a)} + \lambda \cdot \left[q_1 \cdot \rho_2 + \sigma_4 + \rho_3 \cdot \sigma_1^{(a)} \right] \right\}}.$$

Приклад 2.3 *Оцінимо довжину відрізка* $[0, \varepsilon^*]$, *на якому зберігається збіжність ітераційної схеми для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (138).*

Зазначимо, що з огляду на сталу

$$\sigma_1^{(a)} = \max_{\substack{||x||, ||y|| \le \rho, \\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}} \left|\left| \frac{\partial Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \Bigg|_{z\ =\ \xi(\tau,\varepsilon)} \right|\right|$$

отримуємо оцінку норми матриці:

$$\frac{\partial Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \Bigg|_{z\ =\ \xi(\tau,\varepsilon)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2z_a(\tau,\varepsilon) z_b(\tau,\varepsilon) & 1 - z_a^2(\tau,\varepsilon) \end{bmatrix} \Bigg|_{z\ =\ \xi(\tau,\varepsilon)}.$$

Покладемо для визначеності $\rho = \rho_1 = 0,1,\ \varepsilon \in [0;\ 0,1]$, при цьому

$$||z_a(\tau,\varepsilon)|| \le ||2\cos\tau|| + ||x_a(\tau,\varepsilon)|| \le 2 + 0,1 = 2,1.$$

Аналогічно

$$\left|\left|1 - z_a^2(\tau,\varepsilon)\right|\right| \le 1 + \left|\left|z_a^2(\tau,\varepsilon)\right|\right| \le 1 + \Big(||2\cos\tau|| + ||x_a(\tau,\varepsilon)||\Big)^2 \le 1 + 2,1^2.$$

Отже,

$$\sigma_1^{(a)} \le \left[\left|\left| - 2z_a(\tau,\varepsilon)z_b(\tau,\varepsilon)\right|\right| + \left|\left|1 - z_a^2(\tau,\varepsilon)\right|\right|\right] = 3\cdot 2,1 + 1 = 14,23.$$

Сталу

$$q_1^{(a)} = \left|\left|X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1}\right|\right|$$

визначає матриця

$$X_{r-1}(\tau)I_1B_0^{-1} = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} \cos\tau & 0 \\ -\sin\tau & 0 \end{bmatrix},$$

тоді

$$q_1^{(a)} = \max\left\{\left|\left|\cos\tau\right|\right|,\ \left|\left|-\sin\tau\right|\right|\right\} = \frac{1}{2\pi}.$$

За нормою оператора

$$\mu = \left|\left|G\Big[\,*\,;\ 0\,\Big](\tau)\right|\right| = \left|\left|K\Big[\,*\,\Big](\tau)\right|\right| = \left|\left|X(\tau)\int_0^\tau X^{-1}(s)f(s)ds\right|\right| = 2\pi\left\{\left|\left|X(s)\right|\right|\right\}$$

отримуємо рівність

$$\left|\left|X(s)\right|\right| = \left|\left|X^{-1}(s)\right|\right| = 2,$$

отже, $\mu = 8\pi$. Аналогічно

$$\lambda_a = \left|\left|P_{Q_r^*}\ell K\Big[\Big(\beta^*A + A_1(s)\Big)\ *\ \Big](\cdot)\right|\right| =$$

$$= 2\pi\left|\left|\begin{bmatrix} -4\sin s\sin 2s & \sin s(1+2\cos s) \\ 4\cos s\sin 2s & -\cos s(1+2\cos s) \end{bmatrix}\right|\right|,$$

тоді $\lambda = 14\pi$, а $q_1 = ||A|| = 1$. Окрім того,

$$\sigma_4 = \max_{\substack{||x||,||y||\le\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}} \left|\left|\frac{\partial^2 R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\ \partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ \xi_2(\tau,\varepsilon)\\ \varepsilon\ =\ \varepsilon_2}}\right|\right| = 0,$$

оскільки нелінійність у рівнянні ван дер Поля $Z(z,\varepsilon)$, а значить, і залишок її розвинення $R_1(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ явно не залежать від малого параметра ε. При цьому $\varepsilon_* \le \varepsilon^*$, де [78, 123]

$$\varepsilon_* = \frac{1}{\mu + q_1^{(a)} \cdot \left\{ \lambda_a \cdot \mu \cdot \sigma_1^{(a)} + \lambda \cdot \left[q_1 \cdot \rho_2 + \sigma_4 + \rho_3 \cdot \sigma_1^{(a)} \right] \right\}} =$$

$$= \frac{1}{8\,\pi + 428,9} \approx 0,002\ 202\ .$$

Як свідчать чисельні оцінки, припущення про те, що $||x|| < \rho = 0,1$, $\rho_1 = 0,1$, справджується при $0 < \varepsilon \le \varepsilon^*$. Отримана оцінка ε_* величини ε^* є досить грубою, оскільки, як видно з чисельних розрахунків, справжнє значення $\varepsilon^* \gg \varepsilon_*$.

Крім того, збіжність ітераційної процедури (137) до шуканого періодичного розв'язку рівняння (120) може зберігатися і за відсутності властивості стиснення відповідного оператора, тому природно досліджувати якість отриманого періоду $T_{1_2}(\varepsilon)$ і другого наближення до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля $z_2^{(a)}(\tau,\varepsilon)$ для значень $\varepsilon > \varepsilon_*$. Для порівняння використовуємо друге наближення до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля:

$$y^{(a)}(\tau,\varepsilon) = 2\cos\tau + \frac{\varepsilon}{4}\Big(3\sin\tau - \sin 3\tau\Big) + \varepsilon^2\Big(-\frac{1}{8}\cos\tau + \frac{3}{16}\cos 3\tau - \frac{5}{96}\cos 5\tau\Big)$$

та його періоду

$$T(\varepsilon) = 2\,\pi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{8}\right),$$

наведені в праці [76] і отримані розкладом шуканого періодичного розв'язку в ряд за степенями малого параметра. Розв'язок рівняння ван дер Поля у вигляді тригонометричного полінома отримали також Є.О. Гребеніков та Ю.О. Рябов [38].

2.5 Про наближене розв'язування автономних крайових задач методом найменших квадратів

Досліджуючи нелінійну автономну крайову задачу (97), (98), позначаємо як

$$\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon) = \beta(\varepsilon)A\Big(z(\tau,\varepsilon) + f\Big) + \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$$

нелінійну вектор-функцію, неперервно-диференційовну за невідомою z у малому околі розв'язку породжувальної задачі, за невідомою $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0 і неперервно-диференційовну за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, а як

$$\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon) = \Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \alpha\beta(\varepsilon)$$

нелінійний векторний функціонал, неперервно-диференційовний за невідомою z, за невідомою $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0 і за малим параметром ε у малому околі розв'язку породжувальної задачі і на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Окрім того, $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний і $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ нелінійний векторні функціонали:

$$\ell z(\cdot,\varepsilon),\ \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : \mathbb{C}[a,b^*] \to \mathbb{R}^m.$$

Розв'язок задачі (103), (104) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язку породжувальної задачі (99). Для знаходження збурення $x(\tau,\varepsilon)$ отримуємо задачу

$$dx/d\tau = Ax + \varepsilon\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon), \tag{140}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon). \tag{141}$$

Аналогічно [25] одержуємо необхідну умову [91] розв'язності крайової задачі (140), (141).

Лема 2.1 *Якщо автономна нетерова крайова задача (97), (98) у критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) має розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $z_0(t,c_0)$, то вектор*

$$\check{c}_0 = \mathrm{col}\,\Big(c_0,\ \beta_0\Big) \in \mathbb{R}^{r+1}$$

задовольняє рівняння

$$F(\check{c}_0) = P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) - \ell K\Big[\mathcal{Z}(z_0(s,c_0),\beta_0,0)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{142}$$

Тут

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) = \alpha\beta_0 + J(z_0(\cdot,c_0),0),$$

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0) = \beta_0\Big[Az_0(s,c_0) + f\Big] + Z(z_0(s,c_0),0).$$

Означення 2.3 *Рівняння (142) називають рівнянням для породжувальних сталих автономної крайової задачі (97), (98).*

Припустимо, що рівняння (142) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (142), отримуємо задачу про пошук розв'язків задачі (97), (98) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку

$$z_0(\tau, c_0) = X_r(\tau)c_0 + G\Big[f;\alpha\Big](\tau).$$

Використовуючи неперервну диференційовність функції $\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ за невідомою z у малому околі розв'язку породжувальної задачі, неперервну диференційовність за невідомою

$$\beta(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \zeta(0) := 0,$$

у малому околі точки β_0 і неперервну диференційовність за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, розкладаємо цю функцію в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{Z}(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) +$$

$$+ A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)A_2(z_0(\tau, c_0)) + \varepsilon A_3(z_0(\tau, c_0)) + R_1(z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$A_1(\tau) = \frac{\partial \mathcal{Z}(z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0,\\ \varepsilon = 0,}}$$

$$A_2(z_0(\tau, c_0)) = \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \zeta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0,\\ \varepsilon = 0,}}$$

$$A_3(z_0(\tau, c_0)) = \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0,\\ \varepsilon = 0.}}$$

Залишок $R_1(z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ розвинення нелінійності $\mathcal{Z}(z(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ системи (140) має вищий порядок малості за $x(\tau, \varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому [18, с. 186]

$$R_1(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial R_1(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0)}{\partial x} \equiv 0.$$

З огляду на неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за першим аргументом векторного функціонала $\mathcal{J}(z(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$, неперервну диференційовність за невідомою $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0 і неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) за третім аргументом виділяємо лінійні частини цього функціонала [43]:

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0,}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot, c_0)) = \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \zeta} \Bigg|_{\substack{z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0}}$$

$$\varepsilon \cdot \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) = \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_0), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_0, \\ \varepsilon = 0}}$$

і член

$$\mathcal{J}(z(\cdot, 0), \beta(0), 0) = \mathcal{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0, 0)$$

нульового порядку за ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0, 0) +$$

$$+ \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \zeta(\varepsilon) \ell_2(z_0(\cdot, c_0)) + \varepsilon \ell_3(z_0(\cdot, c_0)) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon).$$

Залишок $\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)$ розвинення нелінійності $\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)$ крайової умови (141) має вищий порядок малості за $x(\tau,\varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому [18, с. 186]

$$\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0)}{\partial x}\equiv 0.$$

З урахуванням розвинень нелінійностей задача (140), (141) є такою

$$dx(\tau,\varepsilon)/d\tau = Ax(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\Bigg\{\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+ \tag{143}$$

$$+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+\zeta(\varepsilon)A_2(z_0(\tau,c_0))+\varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))+R_1(z_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\},$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\Bigg\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+ \tag{144}$$

$$+\zeta(\varepsilon)\ell_2(z_0(\cdot,c_0))+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))+\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}.$$

Розв'язок задачі (143), (144) шукаємо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)\nu(\varepsilon)+\xi(\tau,\varepsilon),\ \ \nu(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ \ \nu(0):=0.$$

Тут

$$\xi(\tau,\varepsilon):=\varepsilon G\Bigg[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\zeta(\varepsilon)A_2(z_0(\tau,c_0))+\varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))+R_1(z_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\zeta(\varepsilon)\ell_2(z_0(\cdot,c_0))+$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))+\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\tau).$$

Позначимо сталу $\Big(d\times(r+1)\Big)$-вимірну матрицю як

$$B_0=P_{Q_d^*}\Bigg\{\Big[\ell_1 X_r(\cdot);\ \ell_2(z_0(\cdot,c_0))\Big]-\ell K\Big[A_1(s)X_r(s);\ A_2(z_0(s,c_0))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

З умови розв'язності задачі (143), (144) отримуємо рівняння

$$B_0 \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1\xi(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)\xi(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(s,c_0)) + R_1(z_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\},$$

розв'язне у випадку [25, 91] $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$. При цьому задача (97), (98) має принаймні один розв'язок:

$$z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon), \quad x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\nu(\varepsilon) + \xi(\tau,\varepsilon);$$

$$\xi(\tau,\varepsilon) := \varepsilon G\Bigg[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\zeta(\varepsilon)A_2(z_0(\tau,c_0)) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0)) + R_1(z_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)\ell_2(z_0(\cdot,c_0)) +$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg];$$

$$\begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -B_0^+ \cdot P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_1\xi(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)) + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)\xi(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(s,c_0)) + R_1(z_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\},$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний $z_0(\tau,c_0)$. Тут

$$P_{B_0^*} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*), \quad P_{B_0^*} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

є матрицею-ортопроєктором. Для побудови цього розв'язку запропоновано ітераційну схему [25, 91], яка відповідає методу простих ітерацій. Цей метод відрізняється простою та чисельною стійкістю, проте побудова наближених розв'язків із застосуванням методу простих ітерацій пов'язана зі складністю обчислень, яка швидко зростає від ітерації до ітерації.

2.5.1 Ітераційна схема

Необхідно побудувати ітераційну схему для знаходження наближених розв'язків крайової задачі (143), (144) аналогічно до наведеної в працях [83, 124] з використанням методу найменших квадратів [101], який забезпечує більшу точність за меншої кількості ітерацій. Позначимо як

$$\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(k)}(t),\ \dots$$

систему лінійно-незалежних неперервно-диференційовних n-вимірних вектор-функцій. Перше наближення $x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon)$ до розв'язку задачі (143), (144) шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$d\xi_1(\tau,\varepsilon)/d\tau = A\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg\{\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+ \tag{145}$$

$$+A_1(\tau)\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Bigg\},$$

$$\ell\xi_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Bigg\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \ell_1\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))\Bigg\}. \tag{146}$$

Наближення до частинного розв'язку крайової задачі (145), (146) шукаємо у вигляді $\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon),\ \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$. Тут

$$\varphi_1(\tau) = \Big[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(\mu_1)}(t)\Big]$$

є $(n \times \mu_1)$-вимірною матрицею. Вимагатимемо, щоб

$$\Theta(\gamma_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big[A + \varepsilon A_1(\tau)\Big]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+$$

$$+\varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Big] - \xi_1'(\tau,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b^*]} + \Bigg\|\Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\xi_1(\cdot,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))\Big]\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min\,.$$

Позначимо $(n \times \mu_1)$-вимірну матрицю як

$$\Phi_1(\tau,\varepsilon) = \Big[A + \varepsilon A_1(\tau)\Big]\varphi_1(\tau) - \varphi_1'(\tau)$$

та $(m \times \mu_1)$-матрицю як

$$\Pi_1(\varepsilon) = \Big[\varepsilon\ell_1 - \ell\Big]\varphi_1(\cdot).$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $\Theta(\gamma_1(\varepsilon))$ маємо рівняння

$$\Big[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_1(\varepsilon)\Big)\Big]\gamma_1(\varepsilon) =$$

$$= -\varepsilon\int_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Big]d\tau -$$

$$-\varepsilon\cdot\Pi_1^*(\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))\Big],$$

однозначно розв'язне відносно вектора $\gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ за умови невиродженості суми $(\mu_1 \times \mu_1)$-матриць Грама [5]:

$$\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_1(\tau,\varepsilon)\ d\tau, \quad \Gamma\Big(\Pi_1(\varepsilon)\Big) := \Pi_1^*(\varepsilon)\cdot\Pi_1(\varepsilon).$$

За умови

$$\det\Big[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_1(\varepsilon)\Big)\Big] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\Big[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_1(\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Big]d\tau +$$

$$+\varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Big]d\tau + \Pi_1^*(\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))\Big]\Bigg\},$$

який визначає найкраще (у сенсі найменших квадратів) наближення $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ до частинного розв'язку крайової задачі (147), (148). Наступне наближення до розв'язку задачі (143), (144):

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon) + \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$dx_1(\tau,\varepsilon)/d\tau = Ax_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg\{\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon) + \qquad (147)$$

$$+\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))X_r(\tau)\cdot\nu_1(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_2(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\Bigg\},$$

$$\ell x_1(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\Bigg\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)+ \tag{148}$$

$$+\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon)+\ell_2(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\Bigg\}.$$

Позначимо $\Big(d\times(r+1)\Big)$-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)=P_{Q_d^*}\Bigg\{\Big[\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot);$$

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\Big]-\ell K\Big[\mathcal{A}_1(z_0(s,c_0)+\xi_1(s,\varepsilon))X_r(s);\mathcal{A}_2(z_0(s,c_0)+\xi_1(s,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\;=\;z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\;=\;\beta_0,}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\;=\;z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\;=\;\beta_0,}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\;=\;z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\;=\;\beta_0}}$$

є похідними, які в околі точок $\nu_1(\varepsilon)=0$ і $\zeta_1(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon):=$$

$$=\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))+$$

$$+\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon)+\mathcal{A}_2(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)+$$
$$+\mathcal{R}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon),\beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

системи (140) має вищий порядок малості за $\nu_1(\varepsilon)$ і $\zeta_1(\varepsilon)$, ніж перші чотири доданки, тому [18, с. 186]

$$\mathcal{R}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{R}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)}{\partial\nu_1}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_1(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)}{\partial\zeta_1}\equiv 0.$$

Аналогічно функціонали

$$\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_0,}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_0,}}$$

$$\varepsilon\cdot\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)):=\varepsilon\cdot\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_0}}$$

в околі точок $\nu_1(\varepsilon)=0$ і $\zeta_1(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійного векторного функціонала

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)+\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon)+$$
$$+\ell_2(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))+$$
$$+\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\cdot\nu_1(\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової умови (141) має вищий порядок малості за $\nu_1(\varepsilon)$ і $\zeta_1(\varepsilon)$, ніж перші чотири доданки, тому [18, с. 186]

$$\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\ \beta_0,\varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\ \beta_0,\varepsilon)}{\partial\nu_1}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}_1(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\ \beta_0,\varepsilon)}{\partial\zeta_1}\equiv 0.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_1(\tau,\varepsilon)=0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))=B_0,$$

отже, для досить малих значень ε виконується рівність

$$P_{\mathcal{B}_0^*(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))}\cdot P_{Q_d^*}=P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0,$$

при цьому принаймні однозначно знаходимо функції $\nu_1(\varepsilon)$ та $\zeta_1(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_1(\varepsilon)\\ \zeta_1(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^+(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\cdot P_{Q_d^*}\times$$

$$\times\Bigg\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)+\varepsilon\cdot\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_0(s,c_0)+\xi_1(s,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Наступні наближення $x_2(\tau,\varepsilon):=x_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі (143), (144) визначає розв'язок $\xi_2(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon),\ \gamma_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_2}$, крайової задачі

$$d\xi_2(\tau,\varepsilon)/d\tau=A\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\Bigg\{\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{149}$$

$$+\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon))\Bigg\}+Ax_1(\tau,\varepsilon)-x_1'(\tau,\varepsilon),$$

$$\ell\xi_2(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\Bigg\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{150}$$

$$+\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon))\xi_2(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon))\Bigg\}.$$

Тут

$$\varphi_2(\tau)=\left[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(\mu_2)}(t)\right]$$

є $(n\times\mu_2)$-матрицею,

$$\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ і $\varepsilon=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)=\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon))+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon))+$$

$$+\mathcal{R}_2(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_2(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

системи (140) має вищий порядок малості за $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому [18, с. 186]

$$\mathcal{R}_2(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{R}_2(z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\xi_2}\equiv 0.$$

Аналогічно функціонали

$$\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)):=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)):=$$

$$=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\varepsilon\cdot\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)):=$$

$$=\varepsilon\cdot\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon)}}$$

в околі точок $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ і $\varepsilon=0$ визначають розвинення нелінійного векторного функціонала

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\ell_1(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon))\xi_2(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon))+\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової умови (141) має вищий порядок малості за $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому [18, с. 186]

$$\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{J}_2(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\xi_2}\equiv 0.$$

Вимагатимемо, щоб

$$\Theta(\gamma_2(\varepsilon)) = \Bigg|\Bigg|\Big[A + \varepsilon\mathcal{A}_1(z_1(\tau,\varepsilon))\Big]\xi_2(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon))\Big] + Ax_1(\tau,\varepsilon) - x_1'(\tau,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{L}^2[a,b^*]} + \Bigg|\Bigg|\Big[\varepsilon\ell_1(z_1(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell\Big]\xi_2(\cdot,\ \varepsilon)+\varepsilon\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0)+x_1(\cdot,\varepsilon))\Big]\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min.$$

Позначимо $(n \times \mu_2)$-вимірну матрицю як

$$\Phi_2(\tau,\varepsilon) = \Big[A + \varepsilon\mathcal{A}_1(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon))\Big]\varphi_2(\tau) - \varphi_2'(\tau),$$

$(m \times \mu_2)$-матрицю як

$$\Pi_2(\varepsilon) = \Big[\varepsilon\ell_1(z_0(\cdot,c_0) + x_1(\cdot,\varepsilon)) - \ell\Big]\varphi_2(\cdot),$$

а відповідні їм $(\mu_2 \times \mu_2)$-матриці Грама як

$$\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) = \int_a^{b^*} \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_2(\tau,\varepsilon)\ d\tau, \quad \Gamma\Big(\Pi_2(\varepsilon)\Big) = \Pi_2^*(\varepsilon)\cdot\Pi_2(\varepsilon).$$

За умови

$$\det\Big[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_2(\varepsilon)\Big)\Big] \neq 0$$

знаходимо вектор

$$\gamma_2(\varepsilon) = -\Big[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_2(\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\Bigg\{\int_a^{b^*}\Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{Ax_1(\tau,\varepsilon) - x_1'(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon))\Big]\Bigg\}d\tau+$$

$$+\Pi_2^*(\varepsilon)\cdot\Bigg\{\varepsilon\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0) + x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0) + x_1(\cdot,\varepsilon))\Big] - \ell x_1(\cdot,\varepsilon)\Bigg\}\Bigg\},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_2(\tau,\varepsilon) = x_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \xi_2(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_2(\tau)\cdot\gamma_2(\varepsilon), \quad \gamma_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_2},$$

для функції $x_2(\tau,\varepsilon)$ за фіксованої матриці $\varphi_2(t)$ і першого наближення $\beta_1(\varepsilon)$ до функції $\beta(\varepsilon)$. Друге наближення до розв'язку задачі (143), (144):

$$x_2(\tau,\varepsilon) := x_1(\tau,\varepsilon) + X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon) := \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon)$$

визначає крайова задача

$$d\xi_2(\tau,\varepsilon)/d\tau = A\xi_2(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Big\{\mathcal{Z}(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{151}$$

$$+\mathcal{A}_1(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)))X_r(\tau)\cdot\nu_2(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_2(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)))\zeta_2(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\Big\} + Ax_1(\tau,\varepsilon) - x_1'(\tau,\varepsilon),$$

$$\ell\xi_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{152}$$

$$+\ell_1(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+\ell_2(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\zeta_2(\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\Big\}.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\nu_2(\varepsilon)=0$ і $\zeta_2(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\varepsilon) =$$

$$= \mathcal{Z}(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\mathcal{A}_1(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)))\times$$
$$\times X_r(\tau)\cdot\nu_2(\varepsilon)+\mathcal{A}_2(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)))\zeta_2(\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)))+\mathcal{R}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

системи (140) має вищий порядок малості за $\nu_2(\varepsilon)$ і $\zeta_2(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,\ \frac{\partial\mathcal{R}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\nu_2}\equiv 0,$$
$$\frac{\partial\mathcal{R}_3(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\zeta_2}\equiv 0.$$

Аналогічно функціонали

$$\ell_1(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\ell_2(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\varepsilon\cdot\ell_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)):=\varepsilon\cdot\frac{\partial\mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon)\ =\ z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon)\ =\ \beta_1(\varepsilon)}}$$

в околі точок $\nu_2(\varepsilon)=0$ і $\zeta_2(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійного векторного функціонала

$$\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\ell_1(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+$$
$$+\ell_2(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\zeta_2(\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))+$$

$$+\mathcal{J}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{J}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+X_r(\cdot)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової умови (141) має вищий порядок малості за $\nu_2(\varepsilon)$ і $\zeta_2(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{J}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{J}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\nu_2}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\zeta_2}\equiv 0.$$

Позначимо $\Big(d\times(r+1)\Big)$-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=P_{Q_d^*}\Bigg\{\Big[\ell_1(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot);$$

$$\ell_2(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\Big]-\ell K\Big[\mathcal{A}_1(z_1(s,\varepsilon)+\xi_2(s,\varepsilon))X_r(s);\ \mathcal{A}_2(z_1(s,\varepsilon)+\xi_2(s,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big)=z_0(\tau,c_0),$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0\Big(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=B_0.$$

Отже, для досить малих значень ε виконується рівність

$$P_{\mathcal{B}_0^*\Big(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)}\cdot P_{Q_d^*}=P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0,$$

при цьому принаймні однозначно знаходимо функції $\nu_2(\varepsilon)$ і $\zeta_2(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_2(\varepsilon)\\ \zeta_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^+(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\cdot P_{Q_d^*}\times$$

$$\times\Bigg\{\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\cdot\ell_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_1(s,\varepsilon)+\xi_2(s,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\Big](\cdot)\Big\}.$$

Продовжуючи міркування, припустимо, що знайдено наближення

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=x_k(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+1}(\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi_{k+1}(\tau)\gamma_{k+1}(\varepsilon),\ \gamma_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+1}},\ k=1,\,2,\ \dots\ ,$$

до розв'язку крайової задачі (143), (144) і наближення $\beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_k(\varepsilon)+$ $+\zeta_{k+1}(\varepsilon)$ до функції $\beta(\varepsilon)$. Тут

$$\varphi_{k+1}(\tau)=\Big[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(\mu_{k+1})}(t)\Big]$$

є $(n\times\mu_{k+1})$-вимірною матрицею. Наступне наближення до розв'язку задачі (143), (144):

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon)=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\qquad k=1,2,\ \dots\ ,$$

визначає розв'язок

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_{k+2}(\tau)\gamma_{k+2}(\varepsilon),\quad \gamma_{k+2}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+2}},$$

крайової задачі

$$d\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)/d\tau=A\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\Big\{\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{153}$$

$$+\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Big\}+Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon)-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\ell\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\Big\{\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{154}$$

$$+\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\Big\}.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)):=\frac{\partial\mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} z(\tau,\varepsilon) &=& z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_{k+1}(\varepsilon),\end{array}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=0$ і $\varepsilon=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon) = \mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+$$
$$+\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))+$$
$$+\mathcal{R}_{2k+3}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_{2k+3}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

системи (140) має вищий порядок малості за $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_{2k+3}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_{2k+3}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \xi_{k+2}}\equiv 0.$$

Аналогічно функціонали

$$\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\ell_2(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\varepsilon\cdot\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) := \varepsilon\cdot\frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

в околі точок $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=0$ і $\varepsilon=0$ визначають розвинення нелінійного векторного функціонала

$$\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))+\mathcal{J}_{2k+3}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{J}_{2k+3}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової умови (141) має вищий порядок малості за $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)$ і ε, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{J}_{2k+3}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{J}_{2k+3}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\xi_{k+2}}\equiv 0.$$

Будемо вимагати, щоб

$$\Theta(\gamma_{k+2}(\varepsilon))=\Bigg\|\Bigg[A+\varepsilon\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Bigg]\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Bigg[\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Bigg]+Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon)-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b^*]}+$$

$$+\Bigg\|\Bigg[\varepsilon\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))-\ell\Bigg]\xi_{k+2}(\cdot,\ \varepsilon)+\varepsilon\Bigg[\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\Bigg]\Bigg\|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min.$$

Позначимо $(n\times\mu_{k+2})$-вимірну матрицю як

$$\Phi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=\Bigg[A+\varepsilon\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Bigg]\varphi_{k+2}(\tau)-\varphi'_{k+2}(\tau),$$

$(m\times\mu_{k+2})$-матрицю як

$$\Pi_{k+2}(\varepsilon)=\Bigg[\varepsilon\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))-\ell\Bigg]\varphi_{k+2}(\cdot),$$

а відповідні їм $(\mu_{k+2}\times\mu_{k+2})$-матриці Грама як

$$\Gamma\Bigg(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Bigg)=\int_a^{b^*}\Phi^*_{k+2}(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\ d\tau,\Gamma\Bigg(\Pi_{k+2}(\varepsilon)\Bigg)=\Pi^*_{k+2}(\varepsilon)\cdot\Pi_{k+2}(\varepsilon).$$

За умови

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)+\Gamma\Big(\Pi_{k+2}(\varepsilon)\Big)\right]\neq 0$$

знаходимо вектор

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon)=-\left[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)+\Gamma\Big(\Pi_{k+2}(\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_a^{b^*}\Phi^*_{k+2}(\tau,\varepsilon)\left\{Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon)-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\right.\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left[\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\right]\right\}d\tau+$$

$$\left.+\Pi^*_{k+1}(\varepsilon)\cdot\left\{\varepsilon\left[\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\right]-\ell x_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\right\}\right\},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon)=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_{k+2}(\tau)\cdot\gamma_{k+2}(\varepsilon),\ \gamma_{k+2}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+2}},$$

для функції $x_{k+2}(\tau,\varepsilon)$ за фіксованої матриці $\varphi_{k+2}(t)$ і наближення $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ до функції $\beta(\varepsilon)$. Наступне наближення до розв'язку задачі:

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon):=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+2}(\varepsilon):=\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon)$$

визначає крайова задача

$$d\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)/d\tau=A\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\left\{\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\right. \tag{155}$$

$$+\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)))X_r(\tau)\cdot\nu_{k+2}(\varepsilon)+\mathcal{A}_2(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)))\zeta_{k+2}(\varepsilon)+$$

$$\left.+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\right\}+Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon)-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\ell\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\left\{\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\right. \tag{156}$$

$$+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\ell_2(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\zeta_{k+2}(\varepsilon)+$$

$$\left.+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\right\}.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+2}(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\nu_{k+2}(\varepsilon)=0$ і $\zeta_{k+2}(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\ \varepsilon) =$$

$$= \mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\mathcal{A}_1(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)))X_r(\tau)\cdot\nu_{k+2}(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_2(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)))\zeta_{k+2}(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))+$$

$$+\mathcal{R}_{2k+4}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_{2k+4}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

системи (140) має вищий порядок малості за $\nu_2(\varepsilon)$ і $\zeta_2(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_{2k+4}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{2k+4}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \nu_2}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{2k+4}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \zeta_2}\equiv 0.$$

Аналогічно функціонали

$$\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+2}(\varepsilon),}}$$

$$\ell_2(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\varepsilon\cdot\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)) := \varepsilon\cdot\frac{\partial \mathcal{J}(z(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

в околі точок $\nu_{k+2}(\varepsilon) = 0$ і $\zeta_{k+2}(\varepsilon) = 0$ визначають розвинення нелінійного векторного функціонала

$$\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon) =$$

$$= \mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) + \ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon)+$$

$$+\ell_2(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\zeta_{k+2}(\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))+$$

$$+\mathcal{J}_{2k+4}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{J}_{2k+4}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + X_r(\cdot)\nu_{k+2}(\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon)$$

крайової умови (141) має вищий порядок малості за $\nu_{k+2}(\varepsilon)$ і $\zeta_{k+2}(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{J}_{2k+4}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{2k+4}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \nu_{k+2}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{2k+4}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \zeta_{k+2}} \equiv 0.$$

Позначимо $\Big(d \times (r+1)\Big)$-матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big) :=$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{\Big[\ell_1(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))X_r(\cdot);\ell_2(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\Big]-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1(z_{k+1}(s,\varepsilon)+\xi_{k+2}(s,\varepsilon))X_r(s);\mathcal{A}_2(z_{k+1}(s,\varepsilon)+\xi_{k+2}(s,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(z_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\Big) = z_0(\tau,c_0),$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0\Big(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big) = B_0.$$

Отже, для досить малих значень ε виконується рівність

$$P_{\mathcal{B}_0^*\Big(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)}\cdot P_{Q_d^*} = P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0,$$

при цьому принаймні однозначно знаходимо функції $\nu_{k+2}(\varepsilon)$ та $\zeta_{k+2}(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_{k+2}(\varepsilon)\\ \zeta_{k+2}(\varepsilon)\end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^+(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\times$$

$$\times P_{Q_d^*}\Bigg\{\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\cdot\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_{k+1}(s,\varepsilon)+\xi_{k+2}(s,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\}.$$

Таким чином, доведено таку теорему [101, 140].

Теорема 2.5 *Для кожного простого* $(P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0)$ *кореня*

$$\check{c}_0 = \mathrm{col}\,\Big(c_0,\ \beta_0\Big) \in \mathbb{R}^{r+1}$$

рівняння $F(\check{c}_0) = 0$ *задача (143), (144) має принаймні один розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_0)$. *За умови*

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_k(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_k(\varepsilon)\Big)\right] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon),\ \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon),$$

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_1(\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{\int_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_0))\Big]d\tau +\right.$$

$$\left. +\Pi_1^*(\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0),\beta_0,0) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0))\Big]\right\},$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^+(z_0(\cdot,c_0) + \xi_1(\cdot,\varepsilon)) \cdot P_{Q_d^*} \times$$

$$\times\left\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon) + \varepsilon\cdot\ell_3(z_0(\cdot,c_0) + \xi_1(\cdot,\varepsilon)) -\right.$$

$$\left. -\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_0(s,c_0) + \xi_1(s,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\Big](\cdot)\right\};$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) := x_1(\tau,\varepsilon) + X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon),$$

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon),\ \gamma_2(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) + \Gamma\Big(\Pi_2(\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{\int_a^{b^*} \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\left\{Ax_1(\tau,\varepsilon) - x_1'(\tau,\varepsilon) +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\varepsilon\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon))\Big]\right\}d\tau +\right.$$

$$\left. +\Pi_2^*(\varepsilon)\cdot\left\{\varepsilon\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_0) + x_1(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_0) + x_1(\cdot,\varepsilon))\Big] - \ell x_1(\cdot,\varepsilon)\right\}\right\},$$

$$\begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^+(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\cdot P_{Q_d^*}\Bigg\{\mathcal{J}(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\cdot\ell_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_1(s,\varepsilon)+\xi_2(s,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\};\ \dots\ ,$$

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon)=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \tag{157}$$

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_{k+2}(\tau)\gamma_{k+2}(\varepsilon),\quad \beta_{k+2}(\varepsilon)=\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),$$

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon)=-\Big[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)+\Gamma\Big(\Pi_{k+2}(\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int_a^{b^*}\Phi_{k+2}^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon)-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\Big[\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Big]\Bigg\}d\tau+$$

$$+\Pi_{k+1}^*(\varepsilon)\cdot\Bigg\{\varepsilon\Big[\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon))\Big]-\ell x_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Bigg\}\Bigg\},$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+2}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+2}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^+(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\times$$

$$\times P_{Q_d^*}\Bigg\{\mathcal{J}(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\cdot\ell_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_{k+1}(s,\varepsilon)+\xi_{k+2}(s,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\Big](\cdot)\Bigg\},\ \dots\ ,\ k\in\mathbb{N}.$$

З урахуванням заміни незалежної змінної (102) задача (97), (98) має принаймні один розв'язок, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу (157) за формулою $z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0)+x_k(t,\varepsilon),\ k\in\mathbb{N}$.

Ітераційна схема (157) використовує зображення шуканого розв'язку у вигляді суми послідовності збурень невідомої

$$x_1(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)\nu_1(\varepsilon)+\xi_1(\tau,\varepsilon), x_2(\tau,\varepsilon)=x_1(\tau,\varepsilon)+X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),$$

$$x_3(\tau,\varepsilon) = x_2(\tau,\varepsilon) + X_r(\tau)\nu_3(\varepsilon) + \xi_3(\tau,\varepsilon),\ \ldots$$

і поправок

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \quad \beta_3(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) + \zeta_3(\varepsilon),\ \ldots$$

на довжину відрізка $[a, b(\varepsilon)]$, на якому визначено невідому. Послідовність наближень [103]:

$$\left\{\beta_j(\varepsilon)\right\}_{j=0}^{\infty} \longrightarrow \beta(\varepsilon)$$

визначає послідовність замін незалежних змінних:

$$\left\{t_j\Big(\beta_j(\varepsilon)\Big)\right\}_{j=0}^{\infty} \longrightarrow t \in [a, b(\varepsilon)], \quad t_0 \in [a, b^*].$$

Схема (157) не є розвиненням шуканого розв'язку за степенями малого параметра і не передбачає розвинення нелінійностей за степенями розв'язку задачі (97), (98). Праві частини рівнянь ітераційної процедури (102) на відміну від традиційної схеми [25] не містять повторюваних доданків, тому точність наближених обчислень зростає. Знайти оцінку ε_* довжини відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому зберігається збіжність ітераційної процедури (157), можна за формулою [78]. Для нелінійних автономних крайових задач вигляду (97), (98), для яких виконуються умови теореми 2.5, відповідно до традиційної класифікації крайових задач [25, 116] існує критичний випадок першого порядку. Він характеризується тим, що для відповіді на питання про розв'язність крайової задачі (97), (98), достатньо проаналізувати перші похідні нелінійностей. Матрицю B_0, ключову для аналізу автономних крайових задач вигляду (97), (98), можна отримати диференціюванням правої частини рівняння (142):

$$B_0 = \frac{\partial F(\check{c}_0)}{\partial \check{c}}\Bigg|_{\ \check{c} = \check{c}_0} .$$

Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{Q_d^*}\left\{\mathcal{J}(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Big](\cdot)\right\} =$$

$$= P_{Q_d^*}\left\{\Big[\mathcal{J}'_{c_0}(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon); \mathcal{J}'_{\beta_0}(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Big] - \right.$$

$$\left. -\ell K\Big[\mathcal{Z}'_{c_0}(z(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon); \mathcal{Z}'_{\beta_0}(z(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Big](\cdot)\right\}\Bigg|_{\ \varepsilon = 0} =$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{\Bigg[\mathcal{J}'_x(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)X_r(\cdot);\mathcal{J}'_{\beta_0}(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg]-$$

$$-\ell K\Bigg[\mathcal{Z}'_x(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)X_r(\tau);\mathcal{Z}'_{\beta_0}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{\Bigg[\ell_1 X_r(\cdot);\ \ell_2(z_0(\cdot,c_0))\Bigg]-\ell K\Bigg[A_1(\tau)X_r(\tau);A_2(z_0(\tau,c_0))\Bigg](\cdot)\Bigg\} := B_0.$$

Умова [89]

$$\det\Bigg[\Gamma\Bigg(\Phi_k(\cdot,\varepsilon)\Bigg)+\Gamma\Bigg(\Pi_k(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\neq 0,\quad k\in\mathbb{N},$$

гарантує включення $\gamma_k(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$, $k\in\mathbb{N}$. Знайти оцінку ε_* довжини відрізка $[0,\varepsilon^*]$, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми (157), можна за формулою [123] або з використанням мажоруючих рівнянь Ляпунова [38, 55, 116].

2.5.2 Періодична крайова задача в критичному випадку

Автономна періодична задача для системи (120) набуває вигляду (97), (98) у випадку використання лінійного функціонала [58, с. 109]:

$$\ell\varphi(\cdot) := \int_0^T H_r^*(s)\varphi(s)ds$$

і рівностей

$$\alpha=0,\quad f=0,\quad J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\equiv 0.$$

Тут $H_r(t)\in\mathbb{R}^{n\times r}-$ матриця, утворена з r лінійно незалежних стовпців нормальної ($H(0)=I_n$) фундаментальної матриці $H(t)$, спряженої до однорідної частини диференціальної системи (122). Аналогічно [116] отримуємо необхідну умову розв'язності автономної періодичної задачі для системи (120).

Наслідок 2.1 *Якщо автономна періодична задача для системи (120) у критичному випадку має розв'язок, який при $\varepsilon=0$ перетворюється на породжувальний $z(t,0)=z_0(t,c_\theta)$, то вектор $\check{c}_\theta=\mathrm{col}\ (c_\theta,\ \beta_0)\in\mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння*

$$F(\check{c}_\theta) := -\ell K\Bigg[\mathcal{Z}(z_0(s,c_\theta),\beta_0,0)\Bigg](\cdot)=0. \tag{158}$$

Тут

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_\theta),\beta_0,0)=\beta_0\Bigg[Az_0(s,c_\theta)\Bigg]+Z(z_0(s,c_\theta),0).$$

Означення 2.4 *Рівняння (158) називають рівнянням для породжувальних амплітуд автономної періодичної задачі для системи (120).*

Припустимо, що рівняння (158) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_\theta \in \mathbb{R}^r$ рівняння (158), одержуємо задачу про пошук розв'язків автономної періодичної задачі для системи (120) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_\theta) + x(\tau,\varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку

$$z_0(\tau, c_\theta) = X_{r-1}(\tau)c_\theta.$$

Позначимо $(r \times r)$-матрицю як

$$B_0 := -P_{Q_d^*}\ell K\Big[A_1(s)X_r(s);\ A_2(z_0(s,c_0))\Big](\cdot),$$

та введемо матриці

$$\mathcal{B}_0\Big(z_k(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big) := -\ell K\Big[\mathcal{A}_1(z_k(s,\varepsilon) + \xi_{k+1}(s,\varepsilon))X_{r-1}(s);$$

$$\mathcal{A}_2(z_k(s,\varepsilon) + \xi_{k+1}(s,\varepsilon))\Big](\cdot), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Тут

$$\mathcal{A}_1(z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2(z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_3(z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Z}(z(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(\tau,\varepsilon) = z_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon).}}$$

Аналогічно до теореми 2.5 отримуємо достатню умову розв'язності автономної періодичної задачі для системи (120).

Наслідок 2.2 *Для кожного простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *кореня* $\check{c}_\theta \in \mathbb{R}^r$ *рівняння (158) автономна періодична задача для системи (120) має єдиний розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжувальний* $z_0(\tau, c_\theta)$. *За умов*

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_k(\cdot,\varepsilon)\Big)\right] \neq 0, \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \quad k \in \mathbb{N},$$

цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу:

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_{r-1}(\tau)\nu_1(\varepsilon) + \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon),$$

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\Big[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_\theta),\beta_0,0) + \varepsilon A_3(z_0(\tau,c_\theta))\Big]d\tau,$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = \mathcal{B}_0^+(z_0(\cdot,c_\theta) + \xi_1(\cdot,\varepsilon))\ell K \times$$

$$\times\Big[\mathcal{Z}(z_0(s,c_\theta) + \xi_1(s,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_\theta) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\Big](\cdot);$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) := x_1(\tau,\varepsilon) + X_r(\tau)\nu_2(\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \;\; \beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon),$$

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon), \quad \gamma_2(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_a^{b^*} \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{Ax_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\Bigg[\mathcal{Z}(z_0(\tau,c_\theta) + x_1(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_0(\tau,c_\theta) + x_1(\tau,\varepsilon)) - x_1'(\tau,\varepsilon)\Bigg]\Bigg\}d\tau,$$

$$\begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \mathcal{B}_0^+(z_1(\cdot,\varepsilon) + \xi_2(\cdot,\varepsilon)) \cdot P_{Q_d^*} \times$$

$$\times\ell K\Big[\mathcal{Z}(z_1(s,\varepsilon) + \xi_2(s,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(z_1(\cdot,\varepsilon) + \xi_2(\cdot,\varepsilon))\Big](\cdot), \;\; \ldots\;;$$

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon) = x_{k+1}(\tau,\varepsilon) + X_r(\tau)\nu_{k+2}(\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \tag{159}$$

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_{k+2}(\tau)\gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad \beta_{k+2}(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),$$

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon) = \left[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \cdot \int_a^{b^*} \Phi_{k+2}^*(\tau,\varepsilon)\Big\{Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon) -$$

$$-x'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\Bigg[\mathcal{Z}(z_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\tau,\varepsilon))\Bigg]\Bigg\}d\tau,$$

$$\begin{bmatrix}\nu_{k+2}(\varepsilon)\\ \zeta_{k+2}(\varepsilon)\end{bmatrix}=\mathcal{B}_0^+(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\ell K\Bigg[\mathcal{Z}(z_{k+1}(s,\varepsilon)+\xi_{k+2}(s,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_3(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\Bigg](\cdot),\ \dots\ ,\ k\in\mathbb{N},$$

за формулою $z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,c_\theta)+x_k(t,\varepsilon),\ k\in\mathbb{N}$.

2.5.3 Періодична задача для рівняння ван дер Поля

Як ілюстрацію до наслідків 2.1 і 2.2 досліджуємо задачу про розв'язність і побудову розв'язків

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^2[0,T_1(\varepsilon)],\ T_1(0)=2\pi,\ y(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономної періодичної задачі для рівняння ван дер Поля [32, 58, 108, 141]:

$$y''+y=\varepsilon\cdot\left(1-y^2\right)\cdot y'. \tag{160}$$

Згідно з прийнятими позначеннями поставлена задача набуває вигляду

$$dz/dt=Az+\varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{161}$$

де

$$z=z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}z^{(a)}(t,\varepsilon)\\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad Z(z,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0\\ \left(1-(z^{(a)})^2\right)z^{(b)}\end{bmatrix}.$$

Рівняння ван дер Поля (160) описує коливання лампового генератора в «м'якому режимі» [3]. Нормальна фундаментальна матриця однорідної частини диференціального рівняння (161) має вигляд

$$X(t)=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\ -\sin t&\cos t\end{bmatrix}.$$

Оскільки $Q=0$, то існує критичний випадок, при цьому $r=2$. Відкидаючи другий стовпець матриці $X(t)=X_r(t)$, отримуємо загальний розв'язок породжувальної задачі:

$$z_0(t,c_\theta)=X_{r-1}(t)c_\theta,\quad c_\theta\in\mathbb{R}^1.$$

З огляду на очевидну рівність $-A^* = A$ матриця однорідної частини диференціального рівняння (161) є кососиметричною, отже, $H(t) = X(t)$ і $H_r(t) = X_r(t)$. З рівняння для породжувальних амплітуд (158) періодичної задачі для рівняння (161) отримуємо систему

$$F(\check{c}_\theta) = \pi c_\theta \begin{bmatrix} 1/4\Big(c_\theta^2 - 4\Big) \\ 2\beta_0 \end{bmatrix} = 0. \tag{162}$$

Перший корінь $c_\theta = 2,\ \beta_0 = 0$ рівняння (162) визначає породжувальний розв'язок

$$z_0(t, c_\theta) = 2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix},$$

а другий корінь $c_\theta = -2,\ \beta_0 = 0$ — симетричну до нього сім'ю розв'язків. Третій корінь $c_\theta = 0,\ \beta_0$ відповідає тривіальному $\Big(z_0(t, c_\theta) \equiv 0\Big)$ породжувальному розв'язку. Першому кореню $c_\theta = 2,\ \beta_0 = 0$ рівняння (162) відповідають матриці

$$A_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4\sin 2\tau & -1 - 2\cos 2\tau \end{bmatrix}, \quad A_2(z_0(\tau, c_\theta)) = \begin{bmatrix} -2\sin\tau \\ -2\cos\tau \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$B_0 = \int\limits_0^{2\pi} H_r^*(s)\Big[A_1(s)X_{r-1}(s); A_2(z_0(s, c_\theta))\Big]ds = -2\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

і $\det B_0 \neq 0$, періодична задача для рівняння ван дер Поля є критичним випадком першого порядку, і відповідно до наслідку 2.2 має єдиний $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$-періодичний розв'язок. Покладемо

$$\varphi_1(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_a(\tau) & 0 \\ 0 & \varphi_a(\tau) \end{bmatrix},$$

де

$$\varphi_a(\tau) = \Big(\sin\tau \quad \sin 3\tau \quad \sin 5\tau \quad \sin 7\tau \quad \cos 3\tau \quad \cos 5\tau \quad \cos 7\tau\Big).$$

Матриця $\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot, \varepsilon)\Big)$ при цьому є невиродженою:

$$\det\Big[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot, \varepsilon)\Big)\Big] = 28\ 855\ 583\ 153\ 353\ 344\ \pi^{14} +$$

$$+69\ 007\ 926\ 739\ 599\ 360\ \pi^{14}\varepsilon^2 + 70\ 450\ 163\ 402\ 932\ 224\ \pi^{14}\varepsilon^4 +$$
$$+40\ 167\ 429\ 334\ 106\ 112\ \pi^{14}\varepsilon^6 + \ ...\ \neq 0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Знаходимо неперервний вектор

$$\gamma_1(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(a)}(\varepsilon) \\ \gamma_1^{(b)}(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до розв'язку:

$$z_1(\tau, \varepsilon) \approx z_0(t, c_\theta) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \quad \xi_1(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon) \\ \xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}$$

періодичної задачі для рівняння ван дер Поля. Наближення $z_1(\tau, \varepsilon)$ визначає вектор-функцію

$$\mathcal{Z}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) := \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^{(a)}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) \\ \mathcal{Z}^{(b)}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) \end{bmatrix}$$

і матриці

$$\mathcal{A}_1(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1a}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \\ \mathcal{A}_{1b}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{2a}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \\ \mathcal{A}_{2b}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \end{bmatrix}.$$

Тут

$$\mathcal{Z}^{(a)}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) \equiv 0,$$
$$\mathcal{Z}^{(b)}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) = 2\sin 3\tau + 4\sin 2\tau \cdot \xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon) +$$
$$+2\sin\tau\left(\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon)\right)^2 - \xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) - 2\cos 2\tau\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) -$$
$$-4\cos\tau\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon)\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) - \left(\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon)\right)^2\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon),$$
$$\mathcal{A}_{1a}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \equiv 0, \quad \mathcal{A}_{1b}(z_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) =$$
$$= 2\sin\tau + 32\sin 3\tau + 2\sin 3\tau + 4\sin 2\tau\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon) +$$
$$+\sin\tau\left(\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon)\right)^2 - 2\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) - 2\cos 2\tau\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon) - 2\cos\tau\xi_1^{(a)}(\tau, \varepsilon)\xi_1^{(b)}(\tau, \varepsilon),$$

$$\mathcal{A}_{2a}(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)) = -2\sin\tau + \xi_1^{(b)}(\tau,\varepsilon),$$

$$\mathcal{A}_{2b}(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)) = -2\cos\tau + 2\varepsilon\sin 3\tau - \xi_1^{(a)}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+4\varepsilon\xi_1^{(a)}(\tau,\varepsilon)\sin 2\tau + 2\varepsilon\sin\tau\left(\xi_1^{(a)}(\tau,\varepsilon)\right)^2 - \varepsilon\xi_1^{(b)}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-2\varepsilon\cos 2\tau\xi_1^{(b)}(\tau,\varepsilon) - 4\varepsilon\cos\tau\xi_1^{(a)}(\tau,\varepsilon)\xi_1^{(b)}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\left(\xi_1^{(a)}(\tau,\varepsilon)\right)^2\xi_1^{(b)}(\tau,\varepsilon).$$

Матриця

$$\mathcal{B}_0\Big(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)\Big) := \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0^{(11)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(12)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) \\ \mathcal{B}_0^{(21)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(22)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) \end{bmatrix}$$

для досить малих значень ε є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = -8\pi^2 - \frac{202\ 144\ 949\ \varepsilon^2}{13\ 654\ 377}+$$

$$+\frac{316\ 754\ 924\ \varepsilon^4}{14\ 141\ 239} - \frac{923\ 483\ 172\ \varepsilon^6}{36\ 083\ 071} + \frac{375\ 702\ 771\ \varepsilon^8}{14\ 804\ 584}-$$

$$-\frac{918\ 744\ 378\ \varepsilon^{10}}{38\ 823\ 515} + \frac{322\ 680\ 075\ \varepsilon^{12}}{15\ 379\ 663} - \frac{479\ 922\ 532\ \varepsilon^{14}}{26\ 671\ 271} + \ \ldots$$

Тут

$$\mathcal{B}_0^{(11)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = -\frac{491\ 701\ 844}{78\ 256\ 779} + \frac{45\ 419\ 629\ \varepsilon^2}{77\ 106\ 757} - \frac{115\ 689\ 313\ \varepsilon^4}{168\ 593\ 979}+$$

$$+\frac{83\ 270\ 975\ \varepsilon^6}{168\ 589\ 987} - \frac{19\ 868\ 933\ \varepsilon^8}{84\ 912\ 785} + \frac{20\ 515\ 235\ \varepsilon^{10}}{5\ 76128\ 751} + \frac{80\ 254\ 049\ \varepsilon^{12}}{923\ 206\ 461} - \frac{40\ 651\ 271\ \varepsilon^{14}}{287\ 539\ 319} + \ldots,$$

$$\mathcal{B}_0^{(12)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = -\frac{19\ 376\ 458\ \varepsilon^3}{43\ 859\ 329} + \frac{33\ 493\ 667\ \varepsilon^5}{57\ 737\ 707} - \frac{59\ 714\ 703\ \varepsilon^7}{77\ 739\ 278}+$$

$$+\frac{484\ 636\ 438\ \varepsilon^9}{576\ 167\ 545} - \frac{109\ 897\ 219\ \varepsilon^{11}}{130\ 195\ 415} + \frac{120\ 237\ 725\ \varepsilon^{13}}{144\ 580\ 098} - \frac{29\ 229\ 248\ \varepsilon^{15}}{36\ 228\ 251} + \ \ldots,$$

$$\mathcal{B}_0^{(21)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = \frac{101\ 534\ 659\ \varepsilon}{129\ 277\ 943} - \frac{317\ 265\ 955\ \varepsilon^3}{228\ 116\ 081} + \frac{97\ 589\ 605\ \varepsilon^5}{55\ 730\ 476}-$$

$$-\frac{115\ 490\ 778\ \varepsilon^7}{65\ 952\ 659} + \frac{102\ 347\ 293\ \varepsilon^9}{67\ 297\ 398} - \frac{324\ 431\ 737\ \varepsilon^{11}}{274\ 630\ 772} + \frac{96\ 996\ 517\ \varepsilon^{13}}{115\ 230\ 880} + \ \ldots,$$

$$\mathcal{B}_0^{(22)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) = -\frac{411\ 557\ 987}{32\ 750\ 744} + \frac{90\ 839\ 258\ \varepsilon^2}{77\ 106\ 757} - \frac{110\ 131\ 785\ \varepsilon^4}{54\ 335\ 087}+$$

$$+\frac{1\ 451\ 573\ 777\ \varepsilon^6}{559\ 060\ 411}-\frac{103\ 263\ 280\varepsilon^8}{38\ 733\ 067}+\frac{96\ 263\ 309\ \varepsilon^{10}}{40\ 135\ 766}-\frac{131\ 988\ 899\ \varepsilon^{12}}{68\ 161\ 591}+\ \dots$$

Таким чином, на першому кроці ітераційної схеми (159) знаходимо функції

$$\nu_1(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{64}-\frac{15\ 393\ 162\ 788\ 865\ \varepsilon^4}{112\ 589\ 990\ 6842\ 697}-\frac{1\ 027\ 825\ \varepsilon^6}{42\ 467\ 328}+$$

$$+\frac{15\ 374\ 255\ \varepsilon^8}{340\ 694\ 709}+\ \dots\ ,\quad \zeta_1(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{16}-\frac{151\ \varepsilon^3}{1\ 536}+\frac{107\ 647\ \varepsilon^5}{884\ 736}-\frac{56\ 312\ 155\ \varepsilon^7}{482\ 755\ 612}+\ \dots$$

Покладемо

$$\varphi_2(\tau)=\begin{bmatrix}\varphi_b(\tau) & 0\\ 0 & \varphi_b(\tau)\end{bmatrix},$$

де

$$\varphi_b(\tau)=\Big(\sin 5\tau\sin 7\tau\sin 9\tau\sin 11\tau\cos 5\tau\cos 7\tau\cos 9\tau\cos 11\tau\Big).$$

Для спрощення подальших викладок зафіксуємо значення малого параметра $\varepsilon=0,1$. Матриця $\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)$ при цьому є невиродженою:

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]=$$

$$=1\ 357\ 159\ 306\ 746\ 799\ 930\ 705\ 126\ 718\ 995\ 169\ 280\neq 0.$$

Знаходимо вектор який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення до розв'язку:

$$z_2(\tau,\varepsilon)\approx z_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\quad \xi_2(\tau,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\xi_2^{(a)}(\tau,\varepsilon)\\ \xi_2^{(b)}(\tau,\varepsilon)\end{bmatrix}$$

періодичної задачі для рівняння ван дер Поля. Тут

$$\xi_2^{(a)}(\tau,\varepsilon)=\frac{67\ 679\cos 5\tau}{46\ 873\ 613\ 854}+\frac{115\ 195\cos 7\tau}{167\ 022\ 096\ 987}+\frac{39\ 836\cos 9\tau}{135\ 750\ 739\ 419}-$$

$$-\frac{5\ 899\cos 11\tau}{4\ 851\ 092\ 314\ 912}+\frac{126\ 501\sin 5\tau}{19\ 791\ 024\ 518}\frac{159\ 629\sin 7\tau}{35\ 446\ 991\ 699}-\frac{10\ 528\sin 9\tau}{266\ 142\ 984\ 425}+\ \dots\ ,$$

$$\xi_2^{(b)}(\tau,\varepsilon)=\frac{937\ 751\cos 5\tau}{+}28\ 610\ 024\ 002+\frac{1\ 247\ 029\cos 7\tau}{39\ 618\ 778\ 921}-\frac{44\ 247\cos 9\tau}{124\ 032\ 435\ 881}-$$

$$-\frac{63\ 495\cos 11\tau}{784\ 000\ 496\ 479}-\frac{107\ 342\sin 5\tau}{56\ 077\ 407\ 141}-\frac{142\ 629\sin 7\tau}{29\ 468\ 129\ 606}-\frac{85\ 733\sin 9\tau}{32\ 406\ 769\ 904}+\ \dots$$

Матриця

$$\mathcal{B}_0\Big(z_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)\Big):=$$

$$:=\begin{bmatrix} \mathcal{B}_0^{(11)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(12)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) \\ \mathcal{B}_0^{(21)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(22)}\Big(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) \end{bmatrix}$$

при $\varepsilon=0,1$ є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0\Big(z_1(\cdot,\varepsilon+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\approx -8\pi^2+\frac{16\ 692\ 642}{228\ 917\ 605}.$$

Тут

$$\mathcal{B}_0\Big(z_1(\cdot,\varepsilon+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=\begin{bmatrix} -\dfrac{234\ 136\ 175}{37\ 266\ 897} & -\dfrac{2\ 798\ 430}{5\ 248\ 101\ 149} \\ \dfrac{62\ 015\ 519}{1\ 608\ 279\ 329} & -\dfrac{313\ 732\ 019}{24\ 987\ 096} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, на другому кроці ітераційної схеми (159) знаходимо функції

$$\nu_2(0,1)\approx -\frac{19\ 147}{812\ 081\ 703\ 721},\ \zeta_2(0,1)\approx -\frac{68\ 873}{153\ 128\ 635\ 801}\ .$$

Для оцінювання точності перших двох наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння ван дер Поля, отриманих за допомогою схеми (159), визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon):=\Bigg|\Bigg|y_k''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(1-y_k^2(\tau,\varepsilon)\Big)\cdot y_k'(\tau,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},\quad k=1,\ 2,$$

та нев'язку

$$\Delta_a(\varepsilon):=\Bigg|\Bigg|y_a''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_a(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(1-y_a^2(\tau,\varepsilon)\Big)\cdot y_a'(\tau,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$

наближення

$$y_a(\theta,\varepsilon)=2\cos\theta+\left(\frac{3\sin\theta}{4}-\frac{\sin 3\theta}{4}\right)\cdot\varepsilon+\Bigg(-\frac{\cos\theta}{8}+\frac{3\cos 3\theta}{16}-$$

$$-\frac{5\cos 5\theta}{96}\Bigg)\cdot\varepsilon^2+\left(\frac{7\sin\theta}{256}+\frac{21\sin 3\theta}{256}-\frac{35\sin 5\theta}{576}+\frac{7\sin 7\theta}{576}\right)\cdot\varepsilon^3+$$

$$+\left(\frac{73\cos\theta}{12\ 288}-\frac{47\cos 3\theta}{1\ 536}+\frac{1\ 085\cos 5\theta}{27\ 648}+\frac{2149\cos 7\theta}{110\ 592}+\frac{61\cos 9\theta}{20\ 480}\right)\cdot\varepsilon^4,$$

$$t=\theta\cdot\varpi(\varepsilon),\quad \varpi(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon^2}{16}+\frac{17\cdot\varepsilon^4}{3\ 072}+\frac{35\cdot\varepsilon^6}{884\ 736}-\frac{678\ 899\cdot\varepsilon^8}{5\ 096\ 079\ 360}+$$

$$+\frac{28\ 160\ 413\cdot\varepsilon^{10}}{2\ 293\ 235\ 712\ 000}+\frac{16\ 729\ 607\ 288\ 111\cdot\varepsilon^{12}}{36\ 985\ 305\ 563\ 136\ 000\ 000},$$

отриманого за допомогою техніки Бубнова—Гальоркіна [108, 141]. Зауважимо, що точність другого наближення при $\varepsilon=0,1$:

$$\Delta_1(0,1)\approx 0,000\ 406\ 754,\quad \Delta_2(0,1)\approx 0,000\ \ 154\ 192$$

вища, ніж точності наближення

$$y_a(\tau,\varepsilon)=2\cos\tau+\left(\frac{3\sin\tau}{4}-\frac{\sin 3\tau}{4}\right)\cdot\varepsilon+\Bigg(-\frac{\cos\tau}{8}+\frac{3\cos 3\tau}{16}-$$

$$-\frac{5\cos 5\tau}{96}\Bigg)\cdot\varepsilon^2+\left(\frac{7\sin\tau}{256}+\frac{21\sin 3\tau}{256}-\frac{35\sin 5\tau}{576}+\frac{7\sin 7\tau}{576}\right)\cdot\varepsilon^3+$$

$$+\left(\frac{73\cos\tau}{12\ 288}-\frac{47\cos 3\tau}{1\ 536}+\frac{1\ 085\cos 5\tau}{27\ 648}+\frac{2149\cos 7\tau}{110\ 592}+\frac{61\cos 9\tau}{20\ 480}\right)\cdot\varepsilon^4,$$

$$\beta_a(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{16}-\frac{5\cdot\varepsilon^3}{3\ 072}-\frac{431\cdot\varepsilon^5}{884\ 736}+\frac{557\ 039\cdot\varepsilon^7}{5\ 096\ 079\ 360}+$$

$$+\frac{51\ 720\ 623\cdot\varepsilon^9}{9\ 172\ 942\ 848\ 000}-\frac{61\ 760\ 513\ 621\ 111\cdot\varepsilon^{11}}{36\ 985\ 305\ 563\ 136\ 000\ 000}$$

до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля $\Delta_a(0,1)\approx 0,000\ 202$ з [108, 141].

2.5.4 Періодична крайова задача для рівняння Льєнара

Обчислюючи наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння ван дер Поля (161) за допомогою ітераційної схеми (159), одержуємо громіздкі проміжні обчислення, які суттєво впливають на точність наближених розв'язків. Зручнішим є зображення рівняння ван дер Поля у вигляді (160).

Для отримання відповідної ітераційної схеми досліджуємо задачу про знаходження розв'язків автономної періодичної крайової задачі для нелінійного рівняння Льєнара [42, с. 174], [93]:

$$y'' + y = \varepsilon \cdot Y(y, \varepsilon) \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{163}$$

Розв'язок періодичної крайової задачі для рівняння (163) шукаємо в малому околі розв'язку породжувальної задачі

$$y'' + y_0 = 0. \tag{164}$$

Тут $Y(y, \varepsilon)$ — нелінійна скалярна функція неперервно-диференційовна за y в малому околі розв'язку породжувальної задачі і неперервно-диференційовна за ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Будь-який розв'язок $z(t, \varepsilon)$ задачі (120) існує нарівні з серією розв'язків $z(t + h, \varepsilon)$. Зафіксуємо початок відліку незалежної змінної так, щоб розв'язок породжувальної задачі (122) став однопараметричним, наприклад

$$y_0(t) = c_0 \cdot \cos t, \ c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Для автономної періодичної крайової задачі для рівняння (163) існує критичний випадок. Для довільної функції $f(t) \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$ періодична задача для рівняння $y'' + y_0 = f(t)$ є розв'язною тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{2\pi} H_r^*(s) f(s) \ ds = 0$$

і за відповідної фіксації початку відліку незалежної змінної має загальний розв'язок вигляду

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + g\Big[f(s)\Big](t), \ g\Big[f(s)\Big](t) = \int_0^t \sin(t - s) f(s) \ ds, \ c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Заміною змінної $t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ отримуємо задачу про знаходження 2π-періодичних розв'язків рівняння

$$y''(\tau, \varepsilon) + y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \, \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{165}$$

Тут

$$\mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big) Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \cdot y'(\tau, \varepsilon) - \beta(\varepsilon)\Big(2 + \beta(\varepsilon)\Big) y(\tau, \varepsilon)$$

є нелінійною функцією, неперервно-диференційовною за невідомою $y(\tau, \varepsilon)$ та її похідною $y'(\tau, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжувальної задачі та його

похідною за невідомою $\beta(\varepsilon)$ у малому околі точки β_0, а також неперервно-диференційовною за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. За умови розв'язності 2π-періодичної задачі для рівняння (165):

$$\int_0^{2\pi} H_r^*(s)\ \mathcal{Y}(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\ ds = 0 \tag{166}$$

одержуємо рівняння для породжувальних амплітуд автономної періодичної крайової задачі для рівняння Льєнара:

$$F(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H_r^*(s)\ \mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), \beta_0, 0)\ ds = 0. \tag{167}$$

Припустимо, що рівняння для породжувальних амплітуд має дійсний корінь

$$\check{c}_0 = \mathrm{col}\left(c_0,\ \beta_0\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння (165) шукаємо у вигляді $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon)$. Використовуючи неперервну диференційовність нелінійної функції

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$$

за y і y' в малому околі розв'язку $y_0(t, c_0)$ породжувальної задачі та його похідної $y_0'(t, c_0)$, а також неперервну диференційовність за невідомою

$$\beta(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \zeta(0) := 0,$$

у малому околі точки β_0, розкладаємо цю функцію в малому околі точки $x = 0$:

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0) + x'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0))x(\tau,\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0))x'(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\zeta(\varepsilon)\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)) + \mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0) + x'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon).$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y_0'(\tau,c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0,}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y_0'(\tau,c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0,}}$$

$$\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y_0'(\tau,c_0),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_0.}}$$

Залишок

$$\mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0+\zeta(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0+\zeta(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $x(\tau,\varepsilon)$, $x'(\tau,\varepsilon)$ і $\zeta(\varepsilon)$, ніж перші чотири доданки, тому [18]

$$\mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0),\ y_0'(\tau,c_0),\ \beta_0,\ 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0),\ y_0'(\tau,c_0),\ \beta_0,\ 0)}{\partial x(\tau,\varepsilon)} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0),\ y_0'(\tau,c_0),\ \beta_0,\ 0)}{\partial x'(\tau,\varepsilon)} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0),\ y_0'(\tau,c_0),\ \beta_0,\ 0)}{\partial \zeta} \equiv 0.$$

З урахуванням розвинень нелінійності 2π-періодична крайова задача для рівняння (163) набуває вигляду

$$x''(\tau,\varepsilon)+x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Bigg\{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),\beta_0,0)+ \tag{168}$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0))x(\tau,\varepsilon)+\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0))x'(\tau,\varepsilon)+\zeta(\varepsilon)\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0))+$$

$$+\mathcal{R}_1(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg\}.$$

Розв'язок періодичної задачі для рівняння (168) шукаємо у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cos\tau+\xi(\tau,\varepsilon), \quad \nu(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \nu(0) := 0,$$

де

$$\xi(\tau,\varepsilon) := \varepsilon g\Bigg[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), \beta_0, 0)+$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_0(s,c_0))x(s,\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(y_0(s,c_0))x'(s,\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)\mathfrak{A}_3(y_0(s,c_0))+$$

$$+\mathcal{R}_1(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon),\ y_0'(s,c_0) + x'(s,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg](\tau).$$

Позначимо сталу (2×2)-матрицю як

$$B_0 = \int_0^{2\pi} H_r^*(s)\ \Big[\mathfrak{A}_1(y_0(s,c_0))\cos s - \mathfrak{A}_2(y_0(s,c_0))\sin s; \mathfrak{A}_3(y_0(s,c_0))\Big]\ ds.$$

За умови розв'язності 2π-періодичної задачі для рівняння (168) з урахуванням рівності (167) отримуємо рівняння

$$B_0 \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\int_0^{2\pi} H_r^*(s)\ \Bigg[\mathfrak{A}_1(y_0(s,c_0))\xi(s,\varepsilon)+$$

$$+\mathfrak{A}_2(y_0(s,c_0))\xi'(s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg]ds,$$

яке є однозначно розв'язним у випадку [18, 91, 136] $\det B_0 \neq 0$. З оглядом на задачу про знаходження 2π-періодичних розв'язків рівняння (168) одержуємо операторну систему:

$$x(\tau,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cos\tau + \xi(\tau,\varepsilon),$$

$$\begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -B_0^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} H_r^*(s)\ \Bigg[\mathfrak{A}_1(y_0(s,c_0))\xi(s,\varepsilon)+ \tag{169}$$

$$+\mathfrak{A}_2(y_0(s,c_0))\xi'(s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(y(s,\varepsilon), y''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Bigg]ds,$$

$$\xi(\tau,\varepsilon) = \varepsilon g\Bigg[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), \beta_0, 0) + \mathfrak{A}_1(y_0(s,c_0))x(s,\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(y_0(s,c_0))x'(s,\varepsilon)+$$

$$+\zeta(\varepsilon)\mathfrak{A}_3(y_0(s,c_0)) + \mathcal{R}_1(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), y_0'(s,c_0) + x'(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Bigg](\tau).$$

При цьому згідно з наслідком 2.2 періодична задача для рівняння Льєнара (163) у досить малому околі точок $y_0(t,c_0)$ та $\varepsilon = 0$ має єдиний нетривіальний $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$-періодичний розв'язок. Позначимо як

$$\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots,\ \varphi^{(k)}(t),\ \dots$$

систему лінійно-незалежних двічі неперервно-диференційовних скалярних функцій.

Перше наближення

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \xi_1(\tau,\varepsilon) := \varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1},$$

до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168) шукаємо як розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння

$$\xi_1''(\tau,\varepsilon) + \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Bigg\{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \tag{170}$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0))\xi_1(\tau,\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0))\xi_1'(\tau,\varepsilon)\Bigg\},$$

$$\varphi_1(\tau) := \Big[\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \ \dots\ , \ \varphi^{(\mu_1)}(t)\Big].$$

Вимагатимемо, щоб

$$\Theta(\gamma_1(\varepsilon)) = \Bigg\|\Big[\varepsilon\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)) - 1\Big]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0))\xi_1'(\tau,\varepsilon) -$$

$$-\xi_1''(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), \beta_0, 0)\Bigg\|^2_{\mathbb{L}^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Позначимо $(1 \times \mu_1)$-матрицю як

$$\Phi_1(\tau,\varepsilon) = \Big[\varepsilon\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)) - 1\Big]\varphi_1(\tau) + \varepsilon\,\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0))\varphi_1'(\tau) - \varphi_1''(\tau).$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $\Theta(\gamma_1(\varepsilon))$ отримуємо рівняння

$$\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\int_0^{2\pi} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\ \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), \beta_0, 0)\ d\tau,$$

однозначно розв'язне відносно вектора $\gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ за умови невиродженості $(\mu_1 \times \mu_1)$-матриці Грама [5]:

$$\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_1(\tau,\varepsilon)\ d\tau.$$

Таким чином, знаходимо вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),\beta_0,0)\,d\tau\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ до частинного розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (170). Наступне наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_1(\tau,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon)$$

шукаємо як розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння

$$\begin{aligned}\xi_1''(\tau,\varepsilon)+\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{&\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)+\\ &+\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\nu_1(\varepsilon)\cos\tau-\\ &-\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\nu_1(\varepsilon)\sin\tau+\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)\Big\}.\end{aligned} \tag{171}$$

Позначимо (2×2)-вимірну матрицю як

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0\Big(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big) := -\int_0^{2\pi} H_r^*(\tau)\,\Big[&\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\cos\tau-\\ &-\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\Big]\,d\tau.\end{aligned}$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$:= \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),\ y'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0,\end{array}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$:= \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),\ y'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0,\end{array}}$$

$$\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$:= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),\ y'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) & = & y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon), \\ y'(\tau,\varepsilon) & = & y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) & = & \beta_0 \end{array}}$$

є похідними, які в малому околі точок $\nu_1(\varepsilon)=0$ та $\zeta_1(\varepsilon)=0$ визначають розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau,\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\sin\tau,$$

$$\beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon) = \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon), \beta_0, \varepsilon)+$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\nu_1(\varepsilon)\sin\tau+\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\zeta_1(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau,$$

$$y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\sin\tau, \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau, y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\sin\tau,\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau, y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\nu_1(\varepsilon)\sin\tau,\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $\nu_1(\varepsilon)$ та $\zeta_1(\varepsilon)$, ніж перші чотири доданки, тому

$$\mathcal{R}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)}{\partial \nu_1}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon)}{\partial \zeta_1}\equiv 0.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_1(\tau,\varepsilon)=0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))=B_0.$$

Отже, для досить малих значень ε виконується нерівність

$$\det \mathcal{B}_0(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon)) \neq 0,$$

при цьому однозначно знаходимо функції $\nu_1(\varepsilon)$ і $\zeta_1(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0) + \xi_1(\cdot, \varepsilon)) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} H_r^*(\tau) \left[\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + \xi_1'(\tau, \varepsilon), \beta_0, \varepsilon) \right] d\tau.$$

Таким чином, знайдено наближений розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_1(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cos \tau + \xi_1(\tau, \varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon).$$

Наступне наближення $x_2(\tau, \varepsilon) := x_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon)$ до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168) визначає розв'язок $\xi_2(\tau, \varepsilon) \approx \varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon)$, $\gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$, 2π-періодичної задачі для рівняння

$$\xi_2''(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \Big\{ \mathcal{Y}(y_1(\tau, \varepsilon), y_1'(\tau, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \varepsilon) + \tag{172}$$

$$+ \mathfrak{A}_1(y_1(\tau, \varepsilon))\xi_2(\tau, \varepsilon) - \mathfrak{A}_2(y_1(\tau, \varepsilon))\xi_2'(\tau, \varepsilon) \Big\} - x_1''(\tau, \varepsilon) - x_1(\tau, \varepsilon).$$

Тут

$$\varphi_2(\tau) = \left[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots,\ \varphi^{(\mu_2)}(t) \right]$$

є $(1 \times \mu_2)$-матрицею,

$$\mathfrak{A}_1(y_1(\tau, \varepsilon)) = \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_1(\tau, \varepsilon), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y_1'(\tau, \varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon),}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_1(\tau, \varepsilon)) = \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau, \varepsilon), y'(\tau, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y'} \Bigg|_{\substack{y(\tau, \varepsilon) = y_1(\tau, \varepsilon), \\ y'(\tau, \varepsilon) = y_1'(\tau, \varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ і $\xi_2'(\tau,\varepsilon)=0$ визначають розвинення

$$\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)=$$

$$=\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)+\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ та $\xi_2'(\tau,\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_3(y_1(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathcal{R}_3(y_1(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial\xi_2(\tau,\varepsilon)}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_3(y_1(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial\xi_2'(\tau,\varepsilon)}\equiv 0.$$

Вимагатимемо, щоб

$$\Theta(\gamma_2(\varepsilon))=\Bigg|\Bigg|\Big[\varepsilon\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))-1\Big]\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2'(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)-\xi_1''(\tau,\varepsilon)-\xi_1(\tau,\varepsilon)-\xi_2''(\tau,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{L}^2[0,2\pi]}\to\min.$$

Позначимо $(1\times\mu_2)$-матрицю як

$$\Phi_2(\tau,\varepsilon)=\Big[\varepsilon\,\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))-1\Big]\varphi_2(\tau)+\varepsilon\,\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))\varphi_2'(\tau)-\varphi_2''(\tau).$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $\Theta(\gamma_2(\varepsilon))$ одержуємо рівняння

$$\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\gamma_2(\varepsilon)=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\Big[\varepsilon\ \mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon),y_1'(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)-\xi_1''(\tau,\varepsilon)-\xi_1(\tau,\varepsilon)\Big]d\tau,$$

однозначно розв'язне відносно вектора $\gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ за умови невиродженості $(\mu_2 \times \mu_2)$-матриці Грама [5]:

$$\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_0^{2\pi} \Phi_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_2(\tau,\varepsilon)\ d\tau.$$

Таким чином, знаходимо вектор

$$\gamma_2(\varepsilon) = -\Big[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\Big[\varepsilon\ \mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon),y_1'(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) - \xi_1''(\tau,\varepsilon) - \xi_1(\tau,\varepsilon)\Big]d\tau \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення $\xi_2(\tau,\varepsilon)$ до частинного розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (172). Наступне наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_2(\tau,\varepsilon) = x_1(\tau,\varepsilon) + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ \ \beta_2(\varepsilon) := \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon)$$

шукаємо, як розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння

$$\xi_2''(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)+ \tag{173}$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\nu_2(\varepsilon)\cos\tau-$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\nu_2(\varepsilon)\sin\tau + \mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\zeta_2(\varepsilon)\Big\}.$$

Позначимо (2×2)-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) = -\int_0^{2\pi} H_r^*(\tau)\ \Big[\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\cos\tau-$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\Big]\ d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_1(\varepsilon),\end{array}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon)}}$$

$$\mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_2(\tau,\varepsilon) = 0$, $\xi_2'(\tau,\varepsilon) = 0$ та $\zeta_2(\varepsilon) = 0$ визначають розвинення

$$\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau, y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon) - \nu_2(\varepsilon)\sin\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \varepsilon) +$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon))\nu_2(\varepsilon)\cos\tau - \mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon))\nu_2(\varepsilon)\sin\tau +$$

$$+\mathcal{R}_4(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\cos\tau,\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)-\nu_2(\varepsilon)\sin\tau, \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_4(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\cos\tau,\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)-\nu_2(\varepsilon)\sin\tau,\ \ \beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau,\ y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon) - \nu_2(\varepsilon)\sin\tau, \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $\nu_2(\varepsilon)$ та $\zeta_2(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_4(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon) \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_4(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial \nu_2} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_4(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial \zeta_2} \equiv 0.$$

Позначимо (2×2)-вимірну матрицю як

$$\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon) + \xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) := -\int_0^{2\pi} H_r^*(\tau)\ \Big[\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon))\cos\tau -$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\Bigg]\,d\tau.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_2(\tau,\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0),$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0((y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))=B_0.$$

Отже, для досить малих значень ε виконується нерівність

$$\det\mathcal{B}_0((y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\neq 0,$$

при цьому однозначно знаходимо функції $\nu_2(\varepsilon)$ та $\zeta_2(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_2(\varepsilon)\\ \zeta_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^{-1}((y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\Bigg[\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg]\,d\tau.$$

Таким чином, знайдено наближений розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_2(\tau,\varepsilon)=x_1(\tau,\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\cos\tau+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon)=\beta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon).$$

Припустимо, що знайдено наближення

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=x_k(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+1}(\varepsilon)\cos\tau+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi_{k+1}(\tau)\gamma_{k+1}(\varepsilon),\quad \gamma_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+1}},\quad k=1,2,\ \dots\ ,$$

до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168) і наближення

$$\beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_k(\varepsilon)+\zeta_{k+1}(\varepsilon)$$

до функції $\beta(\varepsilon)$, де

$$\varphi_{k+1}(\tau)=\Bigg[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(\mu_{k+1})}(t)\Bigg]$$

є $(1\times\mu_{k+1})$-вимірною матрицею. Наступне наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon)=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\qquad k=1,2,\ \dots\ ,$$

визначає розв'язок

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) \approx \varphi_{k+2}(\tau)\gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad \gamma_{k+2}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+2}}$$

2π-періодичної задачі для рівняння

$$\xi''_{k+2}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon), y'_{k+1}(\tau,\varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon), \varepsilon) + \tag{174}$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon) - \mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)\Big\} - x''_{k+1}(\tau,\varepsilon) - x_{k+1}(\tau,\varepsilon).$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),\ y'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon),}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)) := \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),\ y'(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ та $\xi'_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ визначають розвинення

$$\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon) =$$

$$= \mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon) +$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}_{2k+3}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$\varphi_{k+2}(\tau) = \Big[\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots,\ \varphi^{(\mu_{k+2})}(t)\Big]$$

є $(1 \times \mu_{k+2})$-вимірною матрицею. Залишок

$$\mathcal{R}_{2k+3}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon), \varepsilon)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)$ та $\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_{2k+3}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_{2k+3}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_{2k+3}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)}{\partial\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)}\equiv 0.$$

Вимагатимемо, щоб

$$\Theta(\gamma_{k+2}(\varepsilon))=\Bigg|\Bigg|\Bigg[\varepsilon\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))-1\Bigg]\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\,\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\xi''_{k+1}(\tau,\varepsilon)-\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)-\xi''_{k+2}(\tau,\varepsilon)\Bigg|\Bigg|^2_{\mathbb{L}^2[0,2\pi]}\to\min.$$

Позначимо $(1\times\mu_{k+2})$-вимірну матрицю як

$$\Phi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=\Bigg[\varepsilon\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))-1\Bigg]\varphi_{k+2}(\tau)+\varepsilon\,\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon))\varphi'_{k+2}(\tau)-\varphi''_{k+2}(\tau).$$

З огляду на необхідну умову мінімізації функції $\Theta(\gamma_{k+2}(\varepsilon))$ одержуємо рівняння

$$\Gamma\Bigg(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Bigg)\gamma_{k+2}(\varepsilon)=-\int_0^{2\pi}\Phi^*_{k+2}(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\Bigg[\varepsilon\ \mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)-\xi''_{k+1}(\tau,\varepsilon)-\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg]d\tau,$$

однозначно розв'язне відносно вектора $\gamma_{k+2}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+2}}$ за умови невиродженості $(\mu_{k+2}\times\mu_{k+2})$-матриці Грама [5]:

$$\Gamma\Bigg(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Bigg):=\int_0^{2\pi}\Phi^*_{k+2}(\tau,\varepsilon)\cdot\Phi_{k+2}(\tau,\varepsilon)\ d\tau.$$

Таким чином, знаходимо вектор

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \Phi^*_{k+2}(\tau,\varepsilon)\Bigg[\varepsilon\ \mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon), y'_{k+1}(\tau,\varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\xi''_{k+1}(\tau,\varepsilon) - \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg] d\tau \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

який визначає найкраще (в сенсі найменших квадратів) наближення $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)$ до частинного розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (174). Наступне наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon) = x_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \quad \beta_{k+2}(\varepsilon) := \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon)$$

шукаємо як розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння

$$\xi''_{k+2}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) = \tag{175}$$

$$= \varepsilon\Bigg\{\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon), \beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau -$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau + \mathfrak{A}_3(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\zeta_{k+2}(\varepsilon)\Bigg\}.$$

Позначимо (2×2)-вимірну матрицю

$$\mathcal{B}_0\Big(y_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big) := -\int_0^{2\pi} H^*_r(\tau)\ \Bigg[\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\cos\tau -$$

$$-\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\sin\tau; \mathfrak{A}_3(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\Bigg]\ d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$= \frac{\partial\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_{k+1}(\varepsilon), \end{array}}$$

$$\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

$$\mathfrak{A}_3(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)) :=$$

$$= \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon) = y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ y'(\tau,\varepsilon) = y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\\ \beta(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon)}}$$

є похідними, які в околі точок $\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=0$, $\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)=0$ та $\zeta_{k+2}(\varepsilon)=0$ визначають розвинення

$$\mathcal{Y}\Bigg(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau,$$

$$y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)-\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau,\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\varepsilon\Bigg) =$$

$$= \mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\ \beta_{k+1}(\varepsilon),\ \varepsilon)+$$

$$+\mathfrak{A}_1(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon))\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau-\mathfrak{A}_2(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon))\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau+$$

$$+\mathcal{R}_{2k+4}\Bigg(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau,$$

$$y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)-\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau,\ \beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\ \varepsilon\Bigg).$$

Залишок

$$\mathcal{R}_{2k+4}\Bigg(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau,$$

$$y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)-\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau,\ \beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\ \varepsilon\Bigg)$$

розвинення нелінійності

$$\mathcal{Y}\Bigg(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau,$$

$$y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon)-\nu_{k+2}(\varepsilon)\sin\tau,\ \beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon),\ \varepsilon\Big)$$

рівняння (165) має вищий порядок малості за $\nu_{k+2}(\varepsilon)$ і $\zeta_{k+2}(\varepsilon)$, ніж перші доданки, тому

$$\mathcal{R}_{2k+4}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1},\varepsilon)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_{2k+4}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1})}{\partial\nu_{k+2}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}_{2k+4}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1})}{\partial\zeta_{k+2}}\equiv 0.$$

Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0),$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{B}_0((y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))=B_0.$$

Отже, для досить малих значень ε виконується нерівність

$$\det\mathcal{B}_0((y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\neq 0,$$

при цьому однозначно знаходимо функції $\nu_{k+2}(\varepsilon)$ і $\zeta_{k+2}(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_{k+2}(\varepsilon)\\ \zeta_{k+2}(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^{-1}((y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\Big[\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)\Big]d\tau.$$

Таким чином, знайдено наближений розв'язок 2π-періодичної задачі для рівняння (168):

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon)=x_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),\quad \beta_{k+2}(\varepsilon)=\beta_{k+1}(\varepsilon)+\zeta_{k+2}(\varepsilon).$$

Аналогічно до наслідку 2.2 отримуємо достатню умову розв'язності автономної 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (163).

Наслідок 2.3 *Для кожного простого* $(\det B_0\neq 0)$ *кореня* $\check{c}_0=\mathrm{col}\ (c_0,\ \beta_0)\in\in\mathbb{R}^2$ *рівняння для породжувальних амплітуд (167) автономна періодична задача для рівняння Льєнара (163) має єдиний розв'язок, який при* $\varepsilon=0$ *перетворюється на породжувальний* $y_0(\tau,c_0)$. *За умови*

$$\det\Big[\Gamma\Big(\Phi_k(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0,\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\quad k\in\mathbb{N},$$

цей розв'язок можна визначити за допомогою ітераційного процесу:

$$x_1(\tau,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon),$$

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\cdot\left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\ \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),\beta_0,0)\ d\tau,$$

$$\begin{bmatrix}\nu_1(\varepsilon)\\ \zeta_1(\varepsilon)\end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^{-1}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\left[\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)\right]d\tau;$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) = x_1(\tau,\varepsilon) + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau + \xi_2(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon),$$

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon),\ \gamma_2(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\Phi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times\left[\varepsilon\,\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon),y_1'(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon) - \xi_1''(\tau,\varepsilon) - \xi_1(\tau,\varepsilon)\right]d\tau,$$

$$\begin{bmatrix}\nu_2(\varepsilon)\\ \zeta_2(\varepsilon)\end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^{-1}((y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\left[\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon),\varepsilon)\right]d\tau,\ \dots\ ,$$

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon) = x_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \nu_{k+2}(\varepsilon)\cos\tau + \xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \tag{176}$$

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+2}(\tau)\gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad \beta_{k+2}(\varepsilon) = \beta_{k+1}(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon),$$

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon) = -\left[\Gamma\Big(\Phi_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\Phi_{k+2}^*(\tau,\varepsilon)\Big[\varepsilon\ \mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),y_{k+1}'(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\xi_{k+1}''(\tau,\varepsilon) - \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big]d\tau,\ \dots\ ,\ k\in\mathbb{N},$$

$$\begin{bmatrix}\nu_{k+2}(\varepsilon)\\ \zeta_{k+2}(\varepsilon)\end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^{-1}((y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\ \times$$

$$\times\left[\mathcal{Y}(y_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon),y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+\xi'_{k+2}(\tau,\varepsilon),\beta_{k+1}(\varepsilon),\varepsilon)\right]d\tau.$$

З урахуванням заміни незалежної змінної (124) автономна 2π-періодична задача для рівняння Льєнара (163) має єдиний розв'язок, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу (176) за формулою

$$y_k(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0)+x_k(t,\varepsilon),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Послідовність наближень:

$$\left\{\beta_j(\varepsilon)\right\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow\beta(\varepsilon),\quad j\in\mathbb{N},$$

визначає послідовність замін незалежних змінних:

$$\left\{t_j\Big(\beta_j(\varepsilon)\Big)\right\}_{j=0}^{\infty}\longrightarrow t\in[0,T_1(\varepsilon)],\quad t_0\in[0,2\pi].$$

Ітераційна схема (176) не є розвиненням шуканого розв'язку за ступенями малого параметра і не передбачає розвинень нелінійностей за степенями розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння Льєнара (163). Праві частини рівнянь ітераційної схеми (176) на відміну від традиційної схеми [25] не містять повторюваних доданків, тому точність наближених обчислень зростає. Знайти оцінку ε_* довжини відрізка $[0,\varepsilon^*]$, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми (176), можна за формулою, наведеною в [78, 123].

2.5.5 Ітераційна схема для рівняння ван дер Поля

Ітераційну схему (176) застосовують для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (160):

$$y''+y=\varepsilon\cdot\Big(1-y^2\Big)\cdot y'.$$

Дійсно, рівняння для породжувальних амплітуд (167) у випадку періодичної задачі для рівняння (160) має простий корінь $c_0=2$, $\beta_0=0$, тому умови наслідку 2.3 виконано. Покладемо

$$\varphi_1(\tau)=[\sin\tau\quad\sin3\tau\quad\sin5\tau\quad\sin7\tau\quad\cos\tau\quad\cos5\tau\quad\cos7\tau].$$

Матриця Грама, яка відповідає породжувальному розв'язку $y_0(t,c_0)=$ $=2\cos t$, є невиродженою:

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right]\approx 4\ 057\ 816\ 381\ 784\ 064\ \pi^7\varepsilon^4+$$

$$+2\ 143\ 386\ 517\ 635\ 072\ \pi^7\varepsilon^6 + 390\ 100\ 798\ 144\ 512\ \pi^7\varepsilon^8 + \ \ldots\ \neq 0.$$

Оскільки вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{4} - \dfrac{397}{9\ 216}\cdot\varepsilon^3 + \dfrac{197\ 173}{21\ 233\ 664}\cdot\varepsilon^5 \\ -\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{33}{1\ 024}\cdot\varepsilon - \dfrac{15\ 397}{2\ 359\ 296}\cdot\varepsilon^5 \\ \dfrac{25}{2\ 304}\cdot\varepsilon^3 - \dfrac{7\ 325}{2\ 654\ 208}\cdot\varepsilon^5 \\ \dfrac{35}{4\ 608}\cdot\varepsilon^3 - \dfrac{23\ 183}{10\ 616\ 832}\cdot\varepsilon^5 \\ -\dfrac{3}{128}\cdot\varepsilon^2 + \dfrac{159}{32\ 768}\cdot\varepsilon^4 - \dfrac{72\ 437}{25\ 165\ 824}\cdot\varepsilon^6 \\ -\dfrac{5}{96}\cdot\varepsilon^2 + \dfrac{2\ 299}{221\ 184}\cdot\varepsilon^4 - \dfrac{1\ 115\ 023}{509\ 607\ 936}\cdot\varepsilon^6 \\ \dfrac{595}{221\ 184}\cdot\varepsilon^4 - \dfrac{394\ 201}{509\ 607\ 936}\cdot\varepsilon^6 \end{bmatrix}$$

є неперервним, то ітераційну схему (176) застосовують для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (160) і, зокрема, вона визначає функцію

$$\xi_1(\tau,\varepsilon) = -\frac{3}{128}\cdot\varepsilon^2\cdot\cos\tau + \frac{159}{32\ 768}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos\tau - \frac{72\ 437}{25\ 165\ 824}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos\tau +$$

$$+\frac{2\ 602\ 279}{2\ 610\ 978\ 839}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos\tau - \frac{1\ 453\ 439}{4\ 976\ 640\ 572}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos\tau - \frac{5}{96}\cdot\varepsilon^2\cdot\cos 5\tau +$$

$$+\frac{38\ 495\ 630\ 880}{3\ 703\ 617\ 929\ 779}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos 5\tau - \frac{1\ 115\ 023}{509\ 607\ 936}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos 5\tau +$$

$$+\frac{5\ 028\ 188}{7\ 567\ 573\ 897}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 5\tau - \frac{1\ 392\ 332}{6\ 549\ 389\ 093}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 5\tau +$$

$$+\frac{39\ 851\ 937\ 801}{14\ 814\ 472\ 286\ 683}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos 7\tau - \frac{14\ 505\ 730}{18\ 752\ 451\ 479}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos 7\tau +$$

$$+\frac{877\ 925}{4\ 844\ 712\ 536}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 7\tau - \frac{1\ 107\ 469}{21\ 899\ 409\ 947}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 7\tau + \frac{1}{4}\cdot\varepsilon\cdot\sin\tau -$$

$$-\frac{397}{9\ 216}\cdot\varepsilon^3\cdot\sin\tau + \frac{197\ 173}{21\ 233\ 664}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin\tau - \frac{4\ 314\ 162}{1\ 434\ 282\ 755}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin\tau - \frac{1}{4}\cdot\varepsilon\cdot\sin 3\tau +$$

$$+\frac{4\ 747\ 775}{4\ 890\ 688\ 354}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin\tau + \frac{33}{1\ 024}\cdot\varepsilon^3\cdot\sin 3\tau - \frac{15\ 397}{2\ 359\ 296}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 3\tau +$$

$$+\frac{2\ 881\ 191}{1\ 210\ 774\ 045}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 3\tau-\frac{3\ 581\ 769}{4\ 539\ 479\ 942}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 3\tau+$$
$$+\frac{25}{2\ 304}\cdot\varepsilon^3\cdot\sin 5\tau-\frac{2\ 987\ 711\ 828}{1\ 082\ 595\ 035\ 573}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 5\tau+$$
$$+\frac{240\ 125}{382\ 205\ 952}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 5\tau-\frac{872\ 068}{4\ 798\ 115\ 435}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 5\tau+\frac{35}{4\ 608}\cdot\varepsilon^3\cdot\sin 7\tau-$$
$$-\frac{23\ 183}{10\ 616\ 832}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 7\tau+\frac{2\ 199\ 745}{4\ 300\ 770\ 273}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 7\tau-\frac{29\ 555}{207\ 113\ 553}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 7\tau.$$

В околі точки $y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)$ знаходимо матрицю

$$\mathcal{B}_0\Big(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big):=-\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\ \Big[\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\cos\tau-$$
$$-\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\Big]\ d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\cos\tau-\mathfrak{A}_2(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\sin\tau=2\sin\tau+3\sin 3\tau+$$
$$+4\sin 2\tau\cdot\xi_1(\tau,\varepsilon)+\sin\tau\cdot\xi_1^2(\tau,\varepsilon)-2\xi_1'(\tau)-2\cos 2\tau\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon)-2\cos\tau\cdot\xi_1(\tau,\varepsilon)\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon),$$
$$\mathfrak{A}_3(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon))=-4\cos\tau+2\varepsilon\cdot\sin 3\tau-2\xi_1(\tau,\varepsilon)+4\varepsilon\cdot\sin 2\tau\cdot\xi_1^2(\tau,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon)-2\varepsilon\cdot\cos 2\tau\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon)-4\varepsilon\cdot\cos\tau\cdot\xi_1(\tau,\varepsilon)\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\xi_1^2(\tau,\varepsilon)\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon).$$

Для досить малих значень ε матриця $\mathcal{B}_0(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))$ є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0(z_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))=-8\pi^2+\frac{38\ 719\ 078}{4\ 828\ 385}\cdot\varepsilon^2-\frac{211\ 305\ 222}{152\ 504\ 131}\cdot\varepsilon^4+\ +...\ \neq 0,$$

де

$$\mathcal{B}_0(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)):=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0^{(11)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)) & \mathcal{B}_0^{(12)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\\ \mathcal{B}_0^{(21)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)) & \mathcal{B}_0^{(22)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))\end{bmatrix}.$$

Тут

$$\mathcal{B}_0^{(11)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))=\frac{19\ 152\ 642}{351\ 156\ 977}\cdot\varepsilon^3-\frac{32\ 429\ 086}{2\ 138\ 218\ 173}\cdot\varepsilon^5+\frac{2\ 182\ 528}{571\ 261\ 443}\cdot\varepsilon^7-...\ ,$$
$$\mathcal{B}_0^{(12)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon))=-\frac{411\ 557\ 987}{32\ 750\ 744}+\frac{127\ 577\ 830}{136\ 789\ 169}\cdot\varepsilon^2-$$
$$-\frac{18\ 315\ 699}{130\ 908\ 865}\cdot\varepsilon^4+\frac{13\ 378\ 361}{293\ 791\ 880}\cdot\varepsilon^6-\frac{25\ 869\ 704}{1\ 527\ 585\ 221}\cdot\varepsilon^8+...\ ,$$

$$\mathcal{B}_0^{(21)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)) = -\frac{491\ 701\ 844}{78\ 256\ 779} + \frac{37\ 745\ 744}{219\ 699\ 995}\cdot\varepsilon^2 -$$

$$-\frac{7\ 764\ 432}{225\ 902\ 269}\cdot\varepsilon^4 + \frac{10\ 892\ 531}{452\ 424\ 821}\cdot\varepsilon^6 - \frac{21\ 589\ 650}{257\ 412\ 172}\cdot\varepsilon^8 + \dots\ ,$$

$$\mathcal{B}_0^{(22)}(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)) = \frac{80\ 143\ 857}{51\ 021\ 164}\cdot\varepsilon - \frac{20\ 131\ 837}{90\ 857\ 889}\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+\frac{15\ 274\ 219}{281\ 364\ 822}\cdot\varepsilon^5 - \frac{33\ 777\ 294}{3\ 881\ 493\ 761}\cdot\varepsilon^7 + +\frac{11\ 660\ 765}{4\ 492\ 324\ 466}\cdot\varepsilon^9 + \dots$$

При цьому однозначно знаходимо функції $\nu_1(\varepsilon)$ і $\zeta_1(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^{-1}\Big(y_0(\cdot,c_0)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} H_r^*(\tau)\ \Big[\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\beta_0,\varepsilon)\Big]\ d\tau,$$

де

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0,\ \varepsilon) = 4\sin 2\tau\cdot\xi_1(\tau,\varepsilon)+2\sin(\tau)\cdot\xi_1^2(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\xi_1'(\tau,\varepsilon) - 2\cos 2\tau\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon) - 4\cos\tau\cdot\xi_1(\tau,\varepsilon)\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon) - \xi_1^2(\tau,\varepsilon)\cdot\xi_1'(\tau,\varepsilon).$$

Отже,

$$\nu_1(\varepsilon) = \frac{52\ 776\ 558\ 133\ 246}{2\ 251\ 799\ 813\ 685\ 163}\cdot\varepsilon^2 - \frac{1\ 903}{589\ 824}\cdot\varepsilon^4 +$$

$$+\frac{3\ 492\ 439}{1\ 447\ 912\ 829}\cdot\varepsilon^6 + \frac{2\ 392\ 747}{3\ 506\ 122\ 721}\cdot\varepsilon^8 + \dots\ ,$$

$$\zeta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{16} - \frac{25}{6\ 144}\cdot\varepsilon^3 + \frac{9\ 119}{7\ 077\ 888}\cdot\varepsilon^5 - \frac{1\ 210\ 361}{2\ 308\ 985\ 876}\cdot\varepsilon^7 + \dots$$

Таким чином, знайдено перше наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння ван дер Поля (160):

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ x_1(\tau,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon), \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon),$$

у малому околі якого визначено функцію

$$\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\ y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\ \beta_0+\zeta_1(\varepsilon),\ \varepsilon) =$$

$$= -\zeta_1(\varepsilon)(2+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)) +$$

$$+(1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))(-2\sin\tau-\nu_1(\varepsilon)\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon))\Big[1-(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon))^2\Big]$$

та похідні

$$\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)) = -\zeta_1(\varepsilon)(2+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon)) - 2(1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))\times$$
$$\times(-2\sin\tau - \nu_1(\varepsilon)\sin\tau + \xi_1'(\tau,\varepsilon))(2\cos\tau + \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)),$$
$$\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)) = (1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))\left[1-(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon))^2\right].$$

Покладемо

$$\varphi_2(\tau) = [\ \sin\tau\ \ \sin 3\tau\ \ \sin 5\tau\ \ \sin 7\tau\ \ \sin 9\tau$$
$$\sin 11\tau\ \ \sin 13\tau\ \ \cos\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\ \ \cos 11\tau\ \ \cos 13\tau\ ].$$

Матриця Грама, що відповідає першому наближенню

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + \xi_1(\tau,\varepsilon), \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \zeta_1(\varepsilon),$$

є невиродженою. Оскільки вектор

$$\gamma_2(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \gamma_2^{(a)}(\varepsilon) \\ \gamma_2^{(b)}(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],$$

є неперервним, то ітераційну схему (176) застосовують для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (160) і, зокрема, вона визначає функцію

$$\xi_2(\tau,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{628\ 725\ 051\ 663\ 019\ 533}\cdot\cos\tau - \frac{20\ 222\ 137\ 563}{7\ 036\ 874\ 375\ 197}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos\tau+$$
$$+\frac{7\ 004\ 910}{3\ 256\ 948\ 579}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos\tau - \frac{1\ 615\ 767}{1\ 020\ 022\ 421}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos\tau+$$
$$+\frac{2\ 943\ 605}{2\ 751\ 291\ 192}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos\tau - \frac{56\ 431\ 097\ 897}{8\ 796\ 092\ 993\ 129}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos 5\tau+$$
$$+\frac{529\ 741}{169\ 869\ 312}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos 5\tau - \frac{3\ 645\ 417}{2\ 325\ 171\ 167}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 5t+$$
$$+\frac{6\ 455\ 195}{8\ 442\ 436\ 602}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 5\tau - \frac{240\ 518\ 168\ 579}{281\ 474\ 976\ 714\ 167}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos 7\tau+$$
$$+\frac{1\ 684\ 339}{2\ 395\ 007\ 866}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos 7\tau - \frac{951\ 034}{4\ 410\ 679\ 719}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 7\tau+$$
$$+\frac{678\ 085}{9\ 057\ 907\ 098}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 7\tau + \frac{61}{20\ 480}\cdot\varepsilon^4\cdot\cos 9\tau-$$
$$-\frac{24\ 794\ 146}{61\ 569\ 282\ 979}\cdot\varepsilon^6\cdot\cos 9\tau - \frac{1\ 181\ 654}{10\ 669\ 973\ 953}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 9\tau+$$

$$+\frac{2\ 883\ 033}{25\ 364\ 776\ 015}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 9\tau-\frac{540\ 133}{2\ 654\ 208\ 000}\cdot\varepsilon^{6}\cdot\cos 11\tau+$$
$$+\frac{44\ 524}{15\ 979\ 036\ 433}\cdot\varepsilon^{8}\cdot\cos 11\tau+\frac{3\ 185\ 298}{171\ 983\ 598\ 167}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 11\tau-$$
$$-\frac{715\ 247}{3\ 715\ 891\ 200}\cdot\varepsilon^{6}\cdot\cos 13\tau+\frac{785\ 867}{15\ 495\ 043\ 724}\cdot\varepsilon^{8}\cdot\cos 13\tau+$$
$$+\frac{41\ 669}{8\ 752\ 387\ 002}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 13\tau+\frac{41}{1\ 024}\cdot\varepsilon^{3}\cdot\sin\tau-$$
$$-\frac{3\ 555\ 458\ 858}{274\ 875\ 638\ 557}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin\tau+\frac{1\ 192\ 929}{241\ 950\ 992}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin\tau-$$
$$-\frac{2\ 192\ 647}{1\ 149\ 451\ 334}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin\tau-\frac{21}{1\ 024}\cdot\varepsilon^{3}\cdot\sin 3\tau+$$
$$+\frac{9\ 762\ 937\ 468}{1\ 099\ 511\ 161\ 225}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin 3\tau-\frac{3\ 159\ 392}{648\ 693\ 179}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 3\tau+$$
$$+\frac{4\ 015\ 582}{1\ 760\ 953\ 801}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 3\tau-\frac{5}{768}\cdot\varepsilon^{3}\cdot\sin 5\tau+$$
$$+\frac{395}{147\ 456}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin 5\tau-\frac{2\ 427\ 621}{3\ 881\ 154\ 344}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 5\tau+$$
$$+\frac{456\ 223}{2\ 505\ 843\ 714}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 5\tau+\frac{7}{1\ 536}\cdot\varepsilon^{3}\cdot\sin 7\tau+$$
$$+\frac{5\ 363}{5\ 898\ 240}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin 7\tau-\frac{3\ 067\ 669}{3\ 653\ 599\ 090}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 7\tau+$$
$$+\frac{3\ 136\ 789}{6\ 677\ 124\ 388}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 7\tau-\frac{11\ 138\ 281\ 468}{17\ 592\ 185\ 434\ 291}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin 9\tau+$$
$$+\frac{633\ 061}{59\ 813\ 871\ 274}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 9\tau+\frac{731\ 669}{19\ 206\ 988\ 389}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 9\tau-$$
$$-\frac{5\ 533}{7\ 372\ 800}\cdot\varepsilon^{5}\cdot\sin 11\tau+\frac{564\ 398}{4\ 165\ 848\ 683}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 11\tau+$$
$$+\frac{2\ 386\ 391}{72\ 767\ 705\ 070}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 11\tau+\frac{1\ 264\ 804}{19\ 560\ 544\ 319}\cdot\varepsilon^{7}\cdot\sin 13\tau-$$
$$-\frac{198\ 999}{38\ 204\ 634\ 886}\cdot\varepsilon^{9}\cdot\sin 13\tau\ +\ \ldots$$

В околі точки $y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)$ знаходимо матрицю

$$\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big):=-\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\ \Big[\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\cos\tau-$$
$$-\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\Big]\ d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\cos\tau-\mathfrak{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\sin\tau=$$
$$=2\zeta_1(\varepsilon)\cos\tau-\varepsilon\zeta_1^2(\varepsilon)\cos\tau+(1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))\times$$
$$\times\Bigg[-\sin\tau\Bigg(1-(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))^2\Bigg)-$$
$$-2\cos\tau(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))\times$$
$$\times(-2\sin\tau-\nu_1(\varepsilon)\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon))\Bigg],$$

$$\mathfrak{A}_3(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))=-2(1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))\Bigg[2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Bigg]+$$
$$+\Bigg[1-(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))^2\Bigg](2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)).$$

Для досить малих значень ε матриця $\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)$ є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=-8\pi^2-\frac{860\ 861\ 400}{10\ 902\ 937}-\frac{150\ 847\ 595\varepsilon^2}{24\ 454\ 491}+$$
$$+\frac{52\ 635\ 803\varepsilon^4}{93\ 708\ 391}-\frac{31\ 513\ 081\varepsilon^6}{65\ 424\ 784}+\frac{36\ 668\ 545\varepsilon^8}{123\ 328\ 107}-\frac{30\ 253\ 862\varepsilon^{10}}{243\ 853\ 331}-\frac{9\ 527\ 509\varepsilon^{12}}{763\ 587\ 866}+\ldots\neq 0.$$

Тут

$$\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big):=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0^{(11)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(12)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\\ \mathcal{B}_0^{(21)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(22)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\end{bmatrix},$$

де

$$\mathcal{B}_0^{(11)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{112\ 230\ 060\varepsilon}{285\ 791\ 501}+\frac{4\ 746\ 195\varepsilon^3}{732\ 798\ 497}-\frac{6\ 697\ 800\varepsilon^5}{1\ 529\ 277\ 113}+$$
$$+\frac{4\ 367\ 684\varepsilon^7}{1\ 057\ 831\ 165}-\frac{894\ 179\varepsilon^9}{963\ 676\ 919}-\frac{756\ 593\varepsilon^{11}}{1\ 906\ 036\ 198}+\ldots,$$
$$\mathcal{B}_0^{(12)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{411\ 557\ 987}{32\ 750\ 744}+\frac{\varepsilon^2}{31\ 453\ 749\ 215\ 215\ 433}+$$

$$+\frac{8\ 233\ 425\varepsilon 4}{589\ 100\ 336}-\frac{11\ 665\ 868\varepsilon^6}{343\ 941\ 763}+\frac{10\ 042\ 433\varepsilon^8}{449\ 944\ 778}-\frac{13\ 860\ 927\varepsilon^{10}}{1\ 494\ 269\ 659}-\frac{867\ 539\varepsilon^{12}}{3\ 016\ 588\ 848}+\dots,$$

$$\mathcal{B}_0^{(21)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{491701844}{78\ 256\ 779}-\frac{58\ 753\ 055\ \varepsilon^2}{132\ 989\ 712}+\frac{7\ 245\ 189\ \varepsilon^4}{199\ 568\ 827}-$$

$$-\frac{12\ 079\ 357\ \varepsilon^6}{553\ 953\ 765}+\frac{17\ 875\ 009\ \varepsilon^8}{1\ 338\ 723\ 701}-\frac{3\ 706\ 481\ \varepsilon^{10}}{615\ 448\ 205}-\frac{1\ 618\ 841\ \varepsilon^{12}}{3\ 522\ 297\ 846}+\dots,$$

$$\mathcal{B}_0^{(22)}\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon)\Big)=\frac{80\ 143\ 857\ \varepsilon}{51\ 021\ 164}-\frac{11\ 430\ 990\ \varepsilon^3}{598\ 809\ 127}-\frac{8\ 836\ 032\ \varepsilon^5}{551\ 426\ 777}+$$

$$+\frac{14\ 338\ 763\ \varepsilon^7}{3\ 363\ 553\ 394}+\frac{3\ 953\ 605\varepsilon^9}{25\ 555\ 317\ 296}-\frac{5\ 262\ 937\ \varepsilon^{11}}{1\ 268\ 454\ 952}+\dots$$

Отже, однозначно знаходимо функції $\nu_2(\varepsilon)$ і $\zeta_2(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_2(\varepsilon)\\ \zeta_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^{-1}((y_1(\cdot,\varepsilon)+\xi_2(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\Big[\mathcal{Y}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon)\Big]\,d\tau.$$

Тут

$$\mathcal{Y}\Big(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\ y_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_1(\varepsilon),\ \varepsilon\Big)=$$

$$=-\zeta_1(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon)\Big)\Big(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big)+$$

$$+(1+\varepsilon\zeta_1(\varepsilon))\Big(1-(2\cos\tau+\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon))^2\Big)\times$$

$$\times\Big(-2\sin\tau-\nu_1(\varepsilon)\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)\Big),$$

$$\nu_2(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{197\ 629\ 734\ 924\ 753\ 064}+\frac{343\ 597\ 383\ 679\ \varepsilon^4}{281\ 474\ 976\ 709\ 837}-$$

$$-\frac{73\ 069\ 187\ \varepsilon^6}{42\ 263\ 908\ 337}+\frac{4\ 309\ 637\ \varepsilon^8}{3\ 355\ 934\ 507}-\frac{4\ 591\ 648\ \varepsilon^{10}}{5\ 895\ 907\ 177}+\frac{415\ 405\ \varepsilon^{12}}{16\ 285\ 006\ 312}+\dots,$$

$$\zeta_2(\varepsilon)=\frac{5\ \varepsilon^3}{2\ 048}-\frac{1\ 863\ 759\ 221\ \varepsilon^5}{879\ 607\ 856\ 585}+\frac{5\ 807\ 353\ \varepsilon^7}{4\ 971\ 595\ 656}-$$

$$-\frac{256\ 924\ \varepsilon^9}{721\ 035\ 605}-\frac{358\ 076\ \varepsilon^{11}}{27\ 137\ 512\ 873}+\dots$$

Таким чином, знайдено друге наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння ван дер Поля (160):

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_2(\tau,\varepsilon),$$

$$x_2(\tau,\varepsilon) = x_1(\tau,\varepsilon) + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau + \xi_2(\tau,\varepsilon), \quad \beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon),$$

у малому околі якого визначено функцію

$$\mathcal{Y}(y_2(\tau,\varepsilon),\ y_2'(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon),\ \varepsilon) = -\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big[2+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big[2\cos\tau + \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]\Big[-2\sin\tau - \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\sin\tau + \xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)\Big]\times$$

$$\times\Big\{1-\Big[2\cos\tau + \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big]^2\Big\}$$

та похідні

$$\mathfrak{A}_1(y_2(\tau,\varepsilon)) = -\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big[2+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]-2\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big[2\cos\tau + \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big]\times$$

$$\times\Big[-2\sin\tau - \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\sin\tau + \xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)\Big],$$

$$\mathfrak{A}_2(y_2(\tau,\varepsilon)) = \Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big\{1-\Big[2\cos\tau + \Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)\Big]^2\Big\}.$$

Покладемо

$$\varphi_3(\tau) = \Big[\ \sin\tau\ \ \sin 3\tau\ \ \sin 5\tau\ \ \sin 7\tau\ \ \sin 9\tau\ \ \sin 11\tau\ \ \sin 13\tau\ \ \sin 15\tau$$

$$\cos\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 7\tau\ \ \cos 9\tau\ \ \cos 11\tau\ \ \cos 13\tau\ \ \cos 15\tau\ \ \cos 17\tau\ \Big].$$

Матриця Грама, яка відповідає другому наближенню, є невиродженою. Оскільки вектор

$$\gamma_3(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \gamma_3^{(a)}(\varepsilon) \\ \gamma_3^{(b)}(\varepsilon) \\ \gamma_3^{(c)}(\varepsilon) \\ \gamma_3^{(d)}(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

є неперервним, то ітераційну схему (176) застосовують для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (160) і, зокрема, вона визначає функцію

$$\xi_3(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{1\ 445\ 064\ 821\ 955\ 034\ 195} \cdot \varepsilon^4 \cdot \cos\tau -$$
$$-\frac{80\ 222\ 046}{485\ 301\ 415\ 999} \cdot \varepsilon^6 \cdot \cos\tau + \frac{6\ 304\ 757}{18\ 025\ 586\ 215} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos\tau +$$
$$+\frac{7\ 135\ 289}{36\ 915\ 562\ 80} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos\tau - \frac{2\ 673\ 082}{1\ 708\ 960\ 887} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos\tau -$$
$$-\frac{\cos 5\tau}{3\ 112\ 888\ 603\ 385\ 921\ 570} \cdot \varepsilon^4 - \frac{1\ 484\ 824\ 014}{3\ 059\ 510\ 355\ 401} \cdot \varepsilon^6 \cdot \cos 5\tau +$$
$$+\frac{6\ 245\ 861}{7\ 588\ 210\ 406} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos 5\tau - \frac{1\ 680\ 952}{2\ 420\ 357\ 977} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos 5\tau -$$
$$-\frac{866\ 606}{5\ 166\ 071\ 135} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos 5\tau - \frac{\cos 7\tau}{7\ 782\ 220\ 370\ 730\ 062\ 643} \cdot \varepsilon^4 -$$
$$-\frac{\varepsilon^6 \cdot \cos 7\tau}{10\ 869\ 994\ 627\ 958\ 599\ 271} - \frac{406\ 678}{49\ 201\ 730\ 165} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos 7\tau -$$
$$-\frac{357\ 061}{15\ 257\ 827\ 329} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos 7\tau + \frac{374\ 759}{9\ 953\ 600\ 010} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos 7\tau +$$
$$+\frac{1}{9\ 078\ 760\ 190\ 951\ 422\ 833} \cdot \varepsilon^6 \cdot \cos 9\tau + \frac{60\ 187}{943\ 718\ 400} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos 9\tau -$$
$$-\frac{1\ 493\ 340}{14\ 698\ 559\ 279} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos 9\tau + \frac{486\ 451}{8\ 281\ 277\ 667} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos 9\tau +$$
$$+\frac{1}{712\ 281\ 005\ 822\ 480\ 946\ 716\ 453\ 202\ 454\ 118\ 400} \cdot \varepsilon^6 \cdot \cos 11\tau +$$
$$+\frac{101\ 833}{7\ 218\ 479\ 724} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos 11\tau - \frac{1\ 017\ 099}{84\ 427\ 370\ 287} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos 11\tau +$$
$$+\frac{305\ 809}{55\ 753\ 479\ 140} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos 11\tau - \frac{289\ 298}{25\ 133\ 047\ 131} \cdot \varepsilon^8 \cdot \cos 13\tau -$$
$$-\frac{52\ 399}{51\ 414\ 049\ 081} \cdot \varepsilon^{10} \cdot \cos 13\tau + \frac{55\ 355}{6\ 940\ 628\ 878} \cdot \varepsilon^{12} \cdot \cos 13\tau +$$

$$+\frac{485\ 539}{25\ 278\ 461\ 357}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 15\tau-\frac{163\ 645}{60\ 328\ 516\ 342}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 15\tau+$$

$$+\frac{83\ 171}{144\ 296\ 132\ 258}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 15\tau+\frac{251\ 205}{19\ 171\ 281\ 773}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 17\tau-$$

$$-\frac{296\ 401}{78\ 131\ 817\ 333}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 17\tau+\frac{67\ 342}{159\ 994\ 182\ 769}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 17\tau+$$

$$+\frac{9\ 025\ 655\ 911}{6\ 119\ 021\ 232\ 241}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin\tau-\frac{3\ 709\ 700}{1\ 978\ 409\ 091}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin\tau+$$

$$+\frac{3\ 356\ 520}{4\ 361\ 435\ 443}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin\tau+\frac{22\ 146\ 164}{17\ 756\ 548\ 573}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin\tau-$$

$$-\frac{38\ 654\ 705\ 627}{28\ 147\ 497\ 644\ 123}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 3\tau+\frac{14\ 494\ 288}{6\ 239\ 678\ 759}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 3\tau-$$

$$-\frac{2\ 504\ 988}{1\ 330\ 181\ 597}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 3\tau-\frac{2\ 983\ 226}{4\ 619\ 456\ 577}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 3\tau-$$

$$-\frac{\cdot\sin 5\tau}{2\ 873\ 432\ 404\ 178\ 141\ 234}\cdot\varepsilon^5-\frac{1\ 067\ 846}{12\ 687\ 686\ 319}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 5\tau-$$

$$-\frac{122\ 591}{67\ 003\ 853\ 944}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 5\tau+\frac{783\ 250}{11\ 250\ 579\ 659}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 5\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon^5\cdot\sin 7\tau}{2\ 925\ 506\ 991\ 801\ 187\ 862\ 365\ 829\ 055\ 228\ 411\ 904}+$$

$$+\frac{3\ 930\ 664}{22\ 342\ 799\ 065}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 7\tau-\frac{1\ 583\ 196}{5\ 362\ 319\ 861}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 7\tau+$$

$$+\frac{5\ 360\ 107}{30\ 749\ 612\ 257}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 7\tau+\frac{\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 9\tau}{10\ 808\ 638\ 730\ 828\ 394\ 269}+$$

$$+\frac{385\ 875\ 921}{14\ 073\ 747\ 121\ 339}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 9\tau-\frac{178\ 895}{8\ 698\ 818\ 774}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 9\tau+$$

$$+\frac{175\ 913}{15\ 640\ 101\ 282}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 9\tau-\frac{521\ 137}{55\ 770\ 921\ 469}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 11\tau-$$

$$-\frac{259\ 241}{13\ 512\ 754\ 152}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 11\tau+\frac{442\ 357}{17\ 645\ 252\ 186}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 11\tau-$$

$$-\frac{1\ 668\ 463}{1\ 118\ 030\ 224\ 487}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 13\tau-\frac{199\ 493}{128\ 462\ 618\ 320}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 13\tau+$$

$$+\frac{124\ 217}{93\ 041\ 642\ 768}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 13\tau+\frac{138\ 697}{2\ 774\ 532\ 096}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 15\tau-$$

$$-\frac{170\ 144}{14\ 058\ 934\ 813}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 15\tau+\frac{142\ 936}{112\ 511\ 531\ 217}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 15\tau+\ \ldots$$

В околі точки $y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)$ знаходимо матрицю

$$\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big) := -\int_0^{2\pi} H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\Big[\mathfrak{A}_1(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon))\cos\tau-\mathfrak{A}_2(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon))\Big]\,d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1\Big(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big)\cos\tau-\mathfrak{A}_2\Big(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big)\sin\tau=$$

$$=-(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon))\Big[2+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_1(\varepsilon)\Big)\Big]\cos\tau+$$

$$+\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Big)\Big]\Big\{-\sin\tau\Big[1-\Big(2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big)^2\Big]-$$

$$-2\cos\tau\Big[2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big]\Big[-2\sin\tau-(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)\Big]\Big\},$$

$$\mathfrak{A}_3\Big(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big)=-2\Big[1+\varepsilon(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon))\Big]\times$$

$$\times\Big[2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\varepsilon\Big[1-\Big(2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big)^2\Big]\Big[-2\sin\tau-(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)\Big].$$

Для досить малих значень ε матриця $\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)$ є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)=-8\pi^2-\frac{228\ 285\ 751\ \varepsilon^2}{37\ 008\ 292}-$$

$$\frac{36\ 319\ 175\ \varepsilon^4}{892\ 473\ 026}+\frac{25957573\varepsilon^6}{163314269}-\frac{64\ 623\ 830\ \varepsilon^8}{423\ 316\ 993}-$$
$$-\frac{33\ 946\ 085\ \varepsilon^{10}}{138\ 894\ 939}+\frac{35\ 227\ 429\ \varepsilon^{12}}{150\ 860\ 627}+\ldots\ \neq 0.$$

Тут

$$\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big):=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0^{(11)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(12)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)\\ \mathcal{B}_0^{(21)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big) & \mathcal{B}_0^{(22)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)\end{bmatrix},$$

де

$$\mathcal{B}_0^{(11)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{112\ 230\ 060\ \varepsilon}{285\ 791\ 501}-\frac{9\ 520\ 367\ \varepsilon^3}{1\ 074\ 169\ 794}+$$
$$+\frac{9\ 690\ 374\ \varepsilon^5}{1\ 265\ 870\ 219}-\frac{2\ 255\ 303\ \varepsilon^7}{645\ 850\ 750}+\frac{7\ 788\ 919\ \varepsilon^9}{2\ 059\ 666\ 809}-\frac{1\ 469\ 651\ \varepsilon^{11}}{998\ 691\ 140}\ +\ldots,$$
$$\mathcal{B}_0^{(12)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{411\ 557\ 987}{32\ 750\ 744}-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{797\ 561\ 725\ 720\ 675\ 289\ 902\ 415\ 994\ 580\ 869}-$$
$$-\frac{22\ 602\ 854\ \varepsilon^4}{927\ 363\ 143}+\frac{12\ 816\ 161\ \varepsilon^6}{1\ 517\ 677\ 492}-\frac{356\ 9362\ \varepsilon^8}{379\ 938\ 937}-$$
$$-\frac{5\ 047\ 198\ \varepsilon^{10}}{767\ 621\ 813}+\frac{20\ 518\ 351\ \varepsilon^{12}}{1\ 825\ 597\ 868}\ +\ldots,$$
$$\mathcal{B}_0^{(21)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)=-\frac{491\ 701\ 844}{78\ 256\ 779}-\frac{58\ 753\ 055\ \varepsilon^2}{132\ 989\ 712}+$$
$$+\frac{10\ 331\ 273\ \varepsilon^4}{1\ 092\ 152\ 901}+\frac{6\ 072\ 804\ \varepsilon^6}{760\ 860\ 581}-\frac{27\ 361\ 595\ \varepsilon^8}{3\ 742\ 213\ 431}-$$
$$-\frac{10\ 791\ 517\ \varepsilon^{10}}{658\ 585\ 289}++\frac{8\ 224\ 009\ \varepsilon^{12}}{621\ 790\ 784}\ +\ldots,$$
$$\mathcal{B}_0^{(22)}\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon)\Big)=\frac{80\ 143\ 857\ \varepsilon}{51\ 021\ 164}-\frac{9\ 240\ 597\ \varepsilon^3}{484\ 066\ 019}-$$
$$-\frac{1\ 361\ 931\ \varepsilon^5}{128\ 592\ 077}+\frac{2\ 799\ 201\ \varepsilon^7}{6\ 237\ 455\ 627}-\frac{3\ 258\ 624\ \varepsilon^9}{1\ 366\ 002\ 683}-\frac{5\ 560\ 096\ \varepsilon^{11}}{1\ 055\ 702\ 937}\ +\ldots$$

Отже, однозначно знаходимо функції $\nu_3(\varepsilon)$ і $\zeta_3(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_3(\varepsilon)\\ \zeta_3(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^{-1}((y_2(\cdot,\varepsilon)+\xi_3(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\ \times$$

$$\times\Bigg[\mathcal{Y}(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon),\ y_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg]\,d\tau.$$

Тут

$$\mathcal{Y}(y_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon),\ y_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon),\ \beta_2(\varepsilon),\ \varepsilon)=$$

$$=-(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon))\Bigg[2+\varepsilon\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg(2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Bigg)+\Bigg[1+\varepsilon\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg\{1-\Bigg[2\cos\tau+(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Bigg]^2\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg[-2\sin\tau-(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon))\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)\Bigg],$$

$$\nu_3(\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^2}{5\ 011\ 228\ 116\ 616\ 942\ 182\ 121\ 784\ 688\ 969\ 348}-$$

$$-\frac{\varepsilon^4}{1\ 826\ 650\ 188\ 504\ 619\ 049}+\frac{141\ 281\ 794\ \varepsilon^6}{823\ 026\ 102\ 363}-$$

$$-\frac{2\ 450\ 964\ \varepsilon^8}{6\ 923\ 111\ 977}-\frac{3\ 403\ 811\ \varepsilon^{10}}{1\ 728\ 924\ 282}+\frac{6\ 359\ 350\ \varepsilon^{12}}{4\ 006\ 714\ 579}+\ldots$$

Таким чином, знайдено третє наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння ван дер Поля (160):

$$y_3(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_3(\tau,\varepsilon),\quad x_3(\tau,\varepsilon)=x_2(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\nu_3(\varepsilon)\cos\tau+\xi_3(\tau,\varepsilon),\quad \beta_3(\varepsilon)=\beta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon),$$

в малому околі якого визначено функцію

$$\mathcal{Y}(y_3(\tau,\varepsilon),\ y_3'(\tau,\varepsilon),\ \beta_3(\varepsilon),\ \varepsilon)=$$

$$=-\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Bigg)\Bigg[2+\varepsilon\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[2\cos\tau+\Bigg(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Bigg)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Bigg]+\Bigg[1+\varepsilon\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\Bigg[-2\sin\tau-$$

$$-\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)\Big]\times$$

$$\times\Big\{1-\Big[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big]^2\Big\},$$

та похідні

$$\mathfrak{A}_1(y_3(\tau,\varepsilon))=-\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big[2+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]-$$

$$-2\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]\Big[2\cos\tau+$$

$$+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big]\times$$

$$\times\Big[-2\sin\tau-\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\sin\tau+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)\Big],$$

$$\mathfrak{A}_2(y_3(\tau,\varepsilon))=\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big\{1-\Big[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)\Big]^2\Big\}.$$

Покладемо

$$\varphi_4(\tau)=\Big[\ \sin\tau\ \ \sin3\tau\ \ \sin5\tau\ \ \sin7\tau\ \ \sin9\tau\ \ \sin11\tau$$

$$\sin13\tau\ \ \sin15\tau\ \ \sin17\tau\ \ \sin19\tau\ \ \cos\tau\ \ \cos5\tau\ \ \cos7\tau\ \ \cos9\tau$$

$$\cos11\tau\ \ \cos13\tau\ \ \cos15\tau\ \ \cos17\tau\ \ \cos19\tau\ \ \cos21\tau\ \Big].$$

Оскільки вектор

$$\gamma_4(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\gamma_4^{(a)}(\varepsilon)\\ \gamma_4^{(b)}(\varepsilon)\\ \gamma_4^{(c)}(\varepsilon)\\ \gamma_4^{(d)}(\varepsilon)\end{bmatrix},\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],$$

є неперервним, то ітераційну схему (176) застосовують для побудови періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля (160) і, зокрема, вона визначає функцію

$$\xi_4(\tau,\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^4\cdot\cos\tau}{108\ 555\ 321\ 621\ 696\ 960\ 760\ 906\ 228\ 730\ 155\ 427}-$$

$$-\frac{\varepsilon^6\cdot\cos\tau}{2\ 250\ 239\ 092\ 392\ 247\ 691}-\frac{6\ 440\ 068}{277\ 042\ 081\ 771}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos\tau-$$

$$-\frac{304\ 975}{525\ 792\ 394}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos\tau+\frac{861\ 812}{1\ 985\ 813\ 073}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos\tau-$$

$$-\frac{\varepsilon^6\cdot\cos 5t}{7\ 218\ 290\ 543\ 456\ 158\ 108}-\frac{3\ 897\ 934}{57\ 114\ 830\ 281}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 5\tau+$$

$$+\frac{1\ 827\ 577}{12\ 181\ 438\ 780}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 5\tau+\frac{1\ 444\ 077}{24\ 724\ 054\ 348}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 5\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon^8\cdot\cos 7\tau}{603\ 926\ 435\ 211\ 373\ 991\ 081}+\frac{84\ 931}{18\ 732\ 071\ 247}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 7\tau-$$

$$-\frac{93\ 631\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 7\tau}{12\ 706\ 058\ 713}-\frac{\varepsilon^8\cdot\cos 9\tau}{116\ 420\ 516\ 986\ 403\ 236\ 061}+$$

$$+\frac{139\ 599}{18\ 889\ 190\ 827}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 9\tau-\frac{428\ 819}{36\ 263\ 360\ 237}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 9\tau+$$

$$+\frac{1}{283\ 168\ 218\ 692\ 593\ 600\ 212}\cdot\varepsilon^8\cdot\cos 11\tau-$$

$$-\frac{1}{428\ 901\ 240\ 967\ 823\ 719\ 652}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 11\tau-$$

$$-\frac{70\ 176\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 11\tau}{103\ 167\ 070\ 175}+\frac{\varepsilon^8\cdot\cos 13\tau}{382\ 437\ 590\ 790\ 991\ 172\ 201}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{10}\cdot\cos 13\tau}{426\ 723\ 586\ 955\ 152\ 769\ 703}-\frac{140\ 282\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 13\tau}{209\ 192\ 780\ 535}+$$

$$+\frac{\varepsilon^8\cdot\cos 15\tau}{194\ 115\ 841\ 821\ 724\ 805\ 220}+\frac{48\ 537\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 15\tau}{275\ 212\ 061\ 914}+$$

$$+\frac{7\ 627\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 15\tau}{625\ 593\ 089\ 244}-\frac{\varepsilon^8\cdot\cos 17\tau}{626\ 462\ 852\ 003\ 272\ 980\ 485}+$$

$$+\frac{35\ 213}{434\ 326\ 712\ 596}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 17\tau+\frac{11\ 493}{486\ 794\ 364\ 862}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 17\tau-$$

$$-\frac{74\ 368}{43\ 458\ 019\ 145}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 19\tau+\frac{8\ 847}{375\ 319\ 184\ 224}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 19\tau-$$

$$-\frac{106\ 229}{115\ 665\ 800\ 503}\cdot\varepsilon^{10}\cdot\cos 21\tau+\frac{48\ 757}{2\ 044\ 221\ 136\ 726}\cdot\varepsilon^{12}\cdot\cos 21\tau+$$

$$+\frac{1}{8\ 301\ 911\ 760\ 132\ 477\ 433}\cdot\varepsilon^5\cdot\sin\tau+\frac{41\ 000\ 183}{197\ 663\ 484\ 549}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin\tau-$$

$$-\frac{13\ 468\ 403}{71\ 037\ 607\ 993}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin\tau-\frac{535\ 071}{1\ 303\ 687\ 204}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin\tau-$$

$$-\frac{\cdot\varepsilon^5\cdot\sin 3\tau}{13\ 834\ 964\ 325\ 396\ 893\ 412}-\frac{97\ 068\ 068}{502\ 633\ 315\ 907}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 3\tau+$$

$$+\frac{1\ 849\ 431}{4\ 407\ 336\ 527}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 3\tau+\frac{3\ 909\ 874}{18\ 243\ 955\ 191}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 3\tau-$$

$$-\frac{\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 5\tau}{61\ 026\ 195\ 052\ 204\ 745\ 215}+\frac{501\ 358}{57\ 843\ 379\ 663}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 5\tau-$$

$$-\frac{296\ 945}{24\ 158\ 531\ 604}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 5\tau+\frac{\varepsilon^7\cdot\sin 7\tau}{15\ 373\ 336\ 254\ 219\ 726\ 170}+$$

$$+\frac{486\ 761}{21\ 131\ 629\ 811}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 7\tau-\frac{1\ 276\ 333}{36\ 480\ 714\ 072}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 7\tau+$$

$$+\frac{1}{125\ 553\ 043\ 149\ 535\ 085\ 609}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 9\tau-$$

$$-\frac{\varepsilon^9\cdot\sin 9\tau}{122\ 312\ 111\ 393\ 373\ 541\ 160}-\frac{127\ 894\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 9\tau}{102\ 156\ 488\ 661}+$$

$$+\frac{1}{1\ 219\ 787\ 006\ 507\ 413\ 650\ 048}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 11\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon^9\cdot\sin 11\tau}{373\ 361\ 689\ 565\ 740\ 284\ 163}-\frac{29\ 743\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 11\tau}{16\ 236\ 825\ 902}-$$

$$-\frac{1}{2\ 622\ 746\ 926\ 041\ 119\ 183\ 585}\cdot\varepsilon^7\cdot\sin 13\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon^9\cdot\sin 13\tau}{27\ 930\ 398\ 532\ 942\ 707\ 063\ 595}+\frac{29\ 597\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 13\tau}{154\ 415\ 316\ 913}+$$

$$+\frac{\varepsilon^9\cdot\sin 15\tau}{912\ 777\ 263\ 601\ 965\ 614\ 551}+\frac{15\ 733\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 15\tau}{111\ 264\ 473\ 630}-$$

$$-\frac{271\ 431\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 17\tau}{47\ 113\ 911\ 317}+\frac{60\ 020}{1\ 519\ 112\ 690\ 709}\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 17\tau-$$

$$-\frac{516\ 739}{149\ 381\ 232\ 921}\cdot\varepsilon^9\cdot\sin 19\tau+\frac{43\ 033\cdot\varepsilon^{11}\cdot\sin 19\tau}{1\ 150\ 954\ 271\ 115}.$$

Обчислюючи матрицю, обернену до матриці Грама $\Gamma(\Phi_4(\cdot,\varepsilon))$, використовують формулу Фробеніуса [37, с. 57]. Знаходимо матрицю

$$\mathcal{B}_0\Big(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Big):==-\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\times$$

$$\times\Big[\mathfrak{A}_1(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon))\cos\tau-\mathfrak{A}_2(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon))\sin\tau;\mathfrak{A}_3(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon))\Big]\,d\tau.$$

Тут

$$\mathfrak{A}_1\Big(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big)\cos\tau-\mathfrak{A}_2\Big(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big)\sin\tau=$$

$$=-\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big[2+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]\cos\tau+$$

$$+\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big\{-\sin\tau\Big[1-\Big(2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big)^2\Big]-$$

$$-2\cos\tau\Big[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big]\times$$

$$\times\Big[-2\sin\tau-\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)\Big)\sin\tau+$$

$$+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)+\xi_4'(\tau,\varepsilon)\Big]\Big\},$$

$$\mathfrak{A}_3\Big(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big)=-2\Big[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Big]\times$$

$$\times\Big[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\varepsilon\Big\{1-\Big[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Big]^2\Big\}\times$$

$$\times\Big[-2\sin\tau-\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\sin\tau+$$

$$+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)+\xi_4'(\tau,\varepsilon)\Bigg].$$

Для досить малих значень ε матриця

$$\mathcal{B}_0\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg)$$

є невиродженою:

$$\det\mathcal{B}_0\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg)=-8\pi^2-\frac{86\ 0861\ 400}{10\ 902\ 937}-$$

$$-\frac{77\ 438\ 156\ \varepsilon^2}{12\ 553\ 801}-\frac{8\ 692\ 979\ \varepsilon^4}{213\ 613\ 037}+\frac{30\ 144\ 103\ \varepsilon^6}{406\ 085\ 241}+\frac{3\ 961\ 037\ \varepsilon^8}{1443995575}+$$

$$+\frac{8\ 676\ 941\ \varepsilon^{10}}{105\ 558\ 507}-\frac{51\ 507\ 007\ \varepsilon^{12}}{529\ 576\ 797}+\ldots\ \neq 0,$$

де

$$\mathcal{B}_0\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg):=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0^{(11)}\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg) & \mathcal{B}_0^{(12)}\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg)\\ \mathcal{B}_0^{(21)}\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg) & \mathcal{B}_0^{(22)}\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg)\end{bmatrix},$$

при цьому

$$\mathcal{B}_0^{(11)}\Bigg(y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon)\Bigg)=-\frac{11\ 2230\ 060\ \varepsilon}{285\ 791\ 501}-\frac{9\ 520\ 367\ \varepsilon^3}{1\ 074\ 169\ 794}+$$

$$+\frac{8\ 809\ 452\ \varepsilon^5}{1\ 602\ 316\ 321}-\frac{226\ 283\ \varepsilon^7}{24\ 098\ 755\ 334}+\frac{2\ 197\ 642\ \varepsilon^9}{5\ 020\ 121\ 193}-$$

$$-\frac{3\ 653\ 871\ \varepsilon^{11}}{1\ 538\ 253\ 682}-\frac{558\ 866\varepsilon^{13}}{10\ 449\ 190\ 713}-\frac{62\ 885\ \varepsilon^{15}}{100\ 603\ 948\ 542}+\ldots$$

Отже, однозначно знаходимо функції $\nu_4(\varepsilon)$ і $\zeta_4(\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix}\nu_4(\varepsilon)\\ \zeta_4(\varepsilon)\end{bmatrix}=-\mathcal{B}_0^{-1}((y_3(\cdot,\varepsilon)+\xi_4(\cdot,\varepsilon))\int_0^{2\pi}H_r^*(\tau)\ \times$$

$$\times\Bigg[\mathcal{Y}(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon),\ y_3'(\tau,\varepsilon)+\xi_4'(\tau,\varepsilon),\ \beta_3(\varepsilon),\ \varepsilon)\Bigg]\ d\tau.$$

Тут

$$\mathcal{Y}(y_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon),\ y_3'(\tau,\varepsilon)+\xi_4'(\tau,\varepsilon),\ \beta_3(\varepsilon),\ \varepsilon)=$$

$$=-\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Bigg)\Bigg[2+\varepsilon\Bigg(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Bigg]+$$

$$+\Bigg[1+\varepsilon\Big(\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\zeta_3(\varepsilon)\Big)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg\{1-\Bigg[2\cos\tau+\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\cos\tau+$$

$$+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\xi_3(\tau,\varepsilon)+\xi_4(\tau,\varepsilon)\Bigg]^2\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg[-2\sin\tau-\Big(\nu_1(\varepsilon)+\nu_2(\varepsilon)+\nu_3(\varepsilon)\Big)\sin\tau+$$

$$+\xi_1'(\tau,\varepsilon)+\xi_2'(\tau,\varepsilon)+\xi_3'(\tau,\varepsilon)+\xi_4'(\tau,\varepsilon)\Bigg].$$

Таким чином, знайдено четверте наближення до розв'язку 2π-періодичної задачі для рівняння ван дер Поля (160):

$$y_4(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_4(\tau,\varepsilon),\quad x_4(\tau,\varepsilon)=x_3(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\nu_4(\varepsilon)\cos\tau+\xi_4(\tau,\varepsilon),\quad \beta_4(\varepsilon)=\beta_3(\varepsilon)+\zeta_4(\varepsilon).$$

Для оцінювання точності перших трьох наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння ван дер Поля, отриманих за допомогою схеми (176), визначимо нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon):=\Bigg\|y_k''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(1-y_k^2(\tau,\varepsilon)\Big)\cdot y_k'(\tau,\varepsilon)\Bigg\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

а також нев'язку

$$\Delta_a(\varepsilon):=\Bigg\|y_a''(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\Big(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_a(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon)\Big)\cdot\Big(1-y_a^2(\tau,\varepsilon)\Big)\cdot y_a'(\tau,\varepsilon)\Bigg\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$

наближення, отриманого за допомогою техніки Бубнова—Гальоркіна [108, 141]:

$$y_a(\theta,\varepsilon) = 2\cos\theta + \left(\frac{3\sin\theta}{4} - \frac{\sin 3\theta}{4}\right)\cdot\varepsilon + \left(-\frac{\cos\theta}{8} + \frac{3\cos 3\theta}{16} -\right.$$

$$\left.-\frac{5\cos 5\theta}{96}\right)\cdot\varepsilon^2 + \left(\frac{7\sin\theta}{256} + \frac{21\sin 3\theta}{256} - \frac{35\sin 5\theta}{576} + \frac{7\sin 7\theta}{576}\right)\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+\left(\frac{73\cos\theta}{12\ 288} - \frac{47\cos 3\theta}{1\ 536} + \frac{1\ 085\cos 5\theta}{27\ 648} + \frac{2149\cos 7\theta}{110\ 592} + \frac{61\cos 9\theta}{20\ 480}\right)\cdot\varepsilon^4,$$

$$t = \theta\cdot\varpi(\varepsilon),\ \varpi(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{17\cdot\varepsilon^4}{3\ 072} + \frac{35\cdot\varepsilon^6}{884\ 736} - \frac{678\ 899\cdot\varepsilon^8}{5\ 096\ 079\ 360} +$$

$$+\frac{28\ 160\ 413\cdot\varepsilon^{10}}{2\ 293\ 235\ 712\ 000} + \frac{16\ 729\ 607\ 288\ 111\cdot\varepsilon^{12}}{36\ 985\ 305\ 563\ 136\ 000\ 000}.$$

При $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\Delta_1(0,1) \approx 0,000\ 391\ 555, \quad \Delta_2(0,1) \approx 1,11\ 806\cdot 10^{-7},$$

$$\Delta_3(0,1) \approx 1,55\ 358\cdot 10^{-10}, \quad \Delta_4(0,1) \approx 3,23\ 993\cdot 10^{-13}.$$

Для $\varepsilon = 0,01$ нев'язки зменшуються:

$$\Delta_1(0,01) \approx 3,75\ 092\cdot 10^{-7}, \Delta_2(0,01) \approx 1,09\ 838\cdot 10^{-12},$$

$$\Delta_3(0,01) \approx 3,63\ 24\cdot 10^{-16} \quad \Delta_4(0,01) \approx 3,63\ 099\cdot 10^{-16}.$$

Зауважимо, що точність четвертого наближення значно вища за точність наближення

$$y_a(\tau,\varepsilon) = 2\cos\tau + \left(\frac{3\sin\tau}{4} - \frac{\sin 3\tau}{4}\right)\cdot\varepsilon + \left(-\frac{\cos\tau}{8} + \frac{3\cos 3\tau}{16} -\right.$$

$$\left.-\frac{5\cos 5\tau}{96}\right)\cdot\varepsilon^2 + \left(\frac{7\sin\tau}{256} + \frac{21\sin 3\tau}{256} - \frac{35\sin 5\tau}{576} + \frac{7\sin 7\tau}{576}\right)\cdot\varepsilon^3 +$$

$$+\left(\frac{73\cos\tau}{12\ 288} - \frac{47\cos 3\tau}{1\ 536} + \frac{1\ 085\cos 5\tau}{27\ 648} + \frac{2149\cos 7\tau}{110\ 592} + \frac{61\cos 9\tau}{20\ 480}\right)\cdot\varepsilon^4,$$

$$\beta_a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{16} - \frac{5\cdot\varepsilon^3}{3\ 072} - \frac{431\cdot\varepsilon^5}{884\ 736} + \frac{557\ 039\cdot\varepsilon^7}{5\ 096\ 079\ 360} +$$

$$+\frac{51\ 720\ 623\cdot\varepsilon^9}{9\ 172\ 942\ 848\ 000} - \frac{61\ 760\ 513\ 621\ 111\cdot\varepsilon^{11}}{36\ 985\ 305\ 563\ 136\ 000\ 000}$$

до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля:

$$\Delta_a(0,1) \approx 0,000\ 202, \quad \Delta_a(0,01) \approx 2,01\ 398 \cdot 10^{-8},$$

наведеного в працях [108, 141]. Також точність четвертого наближення значно вища, ніж точність наближення до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля, отриманого в [104]:

$$\Delta_b(0,1) \approx 0,0000\ 252\ 158, \quad \Delta_b(0,01) \approx 3,14\ 846 \cdot 10^{-9}$$

та [100]:

$$\Delta_c(0,1) \approx 8,68\ 717 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta_c(0,01) \approx 8,97\ 377 \cdot 10^{-12}.$$

Важливими є виконання умови

$$\gamma_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*], \quad k \in \mathbb{N},$$

використаної в ході доведення наслідку 2.3 для збіжності послідовності наближень (176) до періодичного розв'язку рівняння Льєнара.

Приклад 2.4 *Покажемо суттєвість виконання умови*

$$\gamma_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad k \in \mathbb{N},$$

використаної під час доведення наслідку 2.3 для збіжності послідовності наближень (176):

$$\left\{ y_j(t,\varepsilon) \right\}_{j=0}^{\infty} \longrightarrow y(t,\varepsilon), \quad \left\{ t_j\Big(\beta_j(\varepsilon)\Big) \right\}_{j=0}^{\infty} \longrightarrow t \in [0, T_1(\varepsilon)]$$

до періодичного розв'язку рівняння ван дер Поля.

Покладемо

$$\varphi_1(\tau) = [\sin\tau \quad \sin 3\tau \quad \sin 5\tau \quad \cos\tau \quad \cos 3\tau \quad \cos 5\tau].$$

Матриця Грама, що відповідає породжувальному розв'язку $y_0(t, c_0) = 2\cos t$, є невиродженою:

$$\det\left[\Gamma\Big(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\right] \approx 1\ 652\ 576\ 256\ \pi^6\varepsilon^8 +$$

$$+604\ 821\ 888\ \pi^6\varepsilon^{10} + 193\ 965\ 381\ \pi^6\varepsilon^{12} ... \neq 0.$$

Оскільки вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(a)}(\varepsilon) \\ \gamma_1^{(b)}(\varepsilon) \end{bmatrix} \notin \mathbb{C}[0, \varepsilon_*],$$

то функція

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) = \frac{54}{4981} \cdot \cos\tau - \frac{421\ 425}{198\ 482\ 888} \cdot \varepsilon^2 \cdot \cos\tau +$$

$$-\frac{19\ 347\ 419}{375\ 870\ 996} \cdot \varepsilon^4 \cdot \cos\tau + \frac{15\ 782\ 231}{826\ 819\ 664} \cdot \varepsilon^6 \cdot \cos\tau +$$

$$-\frac{108}{4\ 981} \cdot \cos 3\tau - \frac{16\ 619\ 475}{396\ 965\ 776} \cdot \varepsilon^2 \cdot \cos 3\tau + \frac{3\ 470\ 151}{219\ 213\ 767} \cdot \varepsilon^4 \cdot \cos 3\tau +$$

$$-\frac{726\ 727 \cdot \varepsilon^6 \cos 3\tau}{826\ 139\ 179} - \frac{12\ 025}{239\ 088} \cdot \varepsilon^2 \cos 5\tau + \frac{21\ 280\ 501 \varepsilon^4 \cos 5\tau}{1\ 306\ 745\ 655} -$$

$$-\frac{492\ 566}{8\ 655\ 175\ 869} \cdot \varepsilon^6 \cos 5\tau - \frac{288}{4\ 981 \cdot \varepsilon} \cdot \sin\tau + \frac{3\ 219\ 740}{24\ 810\ 361} \cdot \varepsilon \sin\tau -$$

$$-\frac{10\ 541\ 052 \varepsilon^3 \sin\tau}{667\ 059\ 107} - \frac{15\ 102\ 685 \varepsilon^5 \sin\tau}{1\ 598\ 448\ 473} + \frac{3\ 998\ 757 \varepsilon^7 \sin\tau}{752\ 677\ 531} -$$

$$-\frac{1\ 225}{4\ 981} \cdot \varepsilon \sin 3\tau + \frac{4\ 871\ 269}{124\ 268\ 581} \cdot \varepsilon^3 \sin 3\tau + \frac{6\ 818\ 577}{469\ 625\ 336} \cdot \varepsilon^5 \sin 3\tau -$$

$$-\frac{5\ 701\ 016}{575\ 003\ 837} \cdot \varepsilon^7 \sin 3\tau + \frac{45}{9\ 962} \cdot \varepsilon \sin 5\tau + \frac{11\ 316\ 987}{601\ 453\ 877} \cdot \varepsilon^3 \sin 5\tau -$$

$$-\frac{1443\ 493}{194\ 629\ 443} \cdot \varepsilon^5 \sin 5\tau + \frac{2\ 878\ 315}{5\ 689\ 259\ 828} \cdot \varepsilon^7 \sin 5\tau + \ \ldots$$

є неперервною $\xi_1(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*]$, проте $\xi_1(\tau, 0) \neq 0$. Таким чином, виконання умови

$$\gamma_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*], \ k \in \mathbb{N},$$

використаної в ході доведення наслідку 2.3, є істотним для збіжності послідовності наближень (176) до періодичного розв'язку рівняння Льєнара.

Результати дослідження автономних слабконелінійних крайових задач у критичних випадках, як і дані, наведені в [73], можна перенести на автономні нелінійні крайові задачі, нерозв'язні відносно похідної. Запропоновану у праці Ю.Д. Шлапака [106] та в [73, 145] схему дослідження нелінійних крайових задач, нерозв'язних відносно похідної, як і схеми з [39, 66, 74, 95, 96, 117, 118, 120, 121, 132], можна перенести на автономні нелінійні диференціально-алгебричні крайові задачі нерозв'язні відносно похідної [36, 73, 145]. Крім того, результати дослідження автономних слабконелінійних крайових задач (5), (6) у критичних випадках аналогічно до даних з праць [31, 97, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 134] можна перенести на нелінійні автономні матричні крайові задачі.

Список позначень

$A_1(\tau)$	похідна $\mathcal{Z}'_z(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0)$	с. 146
$A_2(z_0(\tau, c_0))$	похідна $\mathcal{Z}'_\beta(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0)$	с. 146
$A_3(z_0(\tau, c_0))$	похідна $\mathcal{Z}'_\varepsilon(z_0(\tau, c_0), \beta_0, 0)$	с. 146
$\mathcal{A}_1(z_0 + \xi_1)$	похідна $\mathcal{Z}'_z(z_0 + \xi_1, \beta_0, \varepsilon))$	с. 152
$\mathcal{A}_2(z_0 + \xi_1)$	похідна $\mathcal{Z}'_\beta(z_0 + \xi_1, \beta_0, \varepsilon))$	с. 152
$\mathcal{A}_3(z_0 + \xi_1)$	похідна $\mathcal{Z}'_\varepsilon(z_0 + \xi_1, \beta_0, \varepsilon))$	с. 152
$K\Big[f(s)\Big](t)$	оператор Гріна задачі Коші	с. 35
$G\Big[f(s); \alpha\Big](t)$	узагальнений оператор Гріна	с. 78
B_0	$(d \times (r+1))$-вимірна матриця	с. 40
$\mathcal{B}_0(z_0 + \xi_1)$	$(d \times (r+1))$-вимірна матриця	с. 152
$\mathcal{B}_0(z_1 + \xi_2)$	$(d \times (r+1))$-вимірна матриця	с. 160
$F(\check{c}_0)$	рівняння для породжувальних сталих	с. 145
$P_{B_0^*}$	ортопроєктор матриці B_0^*	с. 149
P_{Q^*}	ортопроєктор матриці Q^*	с. 6
Q^+	матриця, псевдообернена за Муром—Пенроузом до матриці Q	с. 6

Предметний покажчик

Крайові задачі з властивістю $\mathcal{P}$	с. 125
Лінійна збіжність послідовності	с. 17
Матриця Грама	с. 15
Нуль-простір	с. 7
Оператор Гріна задачі Коші	с. 35
Ортопроєктор	с. 6
Принцип Каччіопполі—Банаха	с. 63
Псевдообернена матриця за Муром—Пенроузом	с. 6
Рівняння ван дер Поля	с. 133,174
Рівняння руху маятника з рухомою точкою підвіски	с. 99
Рівняння для породжувальних амплітуд	с. 78
Рівняння для породжувальних сталих	с. 145
Рівняння для породжувальних функцій	с. 87
Рівняння Дюффінга	с. 50
Рівняння типу Дюффінга	с. 93
Рівняння Льєнара	с. 77,181
Рівняння Ейрі	с. 13
Узагальнений оператор Гріна	с. 78

Іменний покажчик

Банах С.	с. 63	Каччіопполі Р.	с. 63
Бен-Ізраель А.	с. 18	Мур Г.	с. 6
Вейвода О.	с. 125	Пенроуз Р.	с. 6
Гребеников Є.О.	с. 144	Рябов Ю.О.	с. 144
Гутлянський В.Я.	с. 5	Самойленко А.М.	с. 5
Ейрі Дж.Б.	с. 13	Скрипник І.І.	с. 5
Зінченко О.	с. 46	Шлапак Ю.Д.	с. 221
Зуєв О.Л.	с. 5		

Список літератури

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.

[2] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

[3] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

[5] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.

[6] Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

[7] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.

[8] Беллман Р. Математические методы в медицине. М.: Мир, 1987. 200 с.

[9] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.

[10] Болюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1958. 408 с.

[11] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев.: Наук. думка, 1969. 248 с.

[12] Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях *Асимптотические методы.* Киев, 1985. С. 24—30.

[13] Бойчук О.А. Ітераційні методи побудови розв'язків двоточкових крайових задач для нелінійних систем *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1988. № 3. С. 6—8.

[14] Бойчук А.А. Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях. *Український математичний журнал* 1989. Т. 41, № 10. С. 1416—1420.

[15] Бойчук А.А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1988. № 7. С. 2—6.

[16] Бойчук А.А. Краевые задачи для слабовозмущенных линейных и нелинейных систем в критических случаях. Киев, 1988. 44 с. (Препринт АН УССР. Ин-т математики)

[17] Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. Киев. Наук. думка, 1990. 96 с.

[18] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. 320 с.

[19] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Нормально-разрешимые краевые задачи. Киев: Наук. думка, 2019. 628 с.

[20] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях. *Український математичний журнал.* 1990. Т. 42. № 9. С. 1180—1187.

[21] Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях. *Дифференц. уравнения.* 1991. Т. 27. № 9. С. 1516—1521.

[22] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи. Киев, 1991. 50 с. (Препринт АН УССР. Ин-т. геофизики.)

[23] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи. Киев, 1992. 52 с. (Препринт АН УССР. Ин-т. геофизики.)

[24] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях. *Докл. АН Украины.* 1991. № 9. С. 9—13.

[25] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные слабонелинейные краевые задачи. *Дифференц. уравнения.* 1992. Т. 28. № 10. С. 1668—1674.

[26] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Лекции по теории линейных краевых задач. Славянск, 2004. 65 с.

[27] Бойчук А.А., Чуйко С.М. Метод ускоренной сходимости для построения решений нетеровой краевой задачи. *Український математичний журнал.* 2008. Т. 60, № 12, С. 1587—1601.

[28] Бойчук А.А., Чуйко С.М. О приближенном решении нелинейных краевых задач методом Ньютона—Канторовича. *Нелінійні коливання.* 2020. Т. 23, № 2. С. 162—183.

[29] Бойчук О.А., Чуйко С.М. Про наближене розв'язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона—Канторовича. *Нелінійні коливання.* 2020. Т. 23, № 3. С. 321—331.

[30] Бойчук А.А., Чуйко С.М., Чуйко А.С. Неавтономные периодические краевые задачи в особом критическом случае. *Нелінійні коливання.* 2004. Т. 7, № 1. С. 53—66.

[31] Бойчук О.А., Шегда Л.М. Вироджені нелінійні крайові задачі. *Український математичний журнал.* 2009. Т. 61, № 9. С. 1174—1188.

[32] Ван дер Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М.: Связьиздат, 1935. 42 с.

[33] Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высшая школа, 2000. 270 с.

[34] Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ОНИКС 21 век, 2005. 400 с.

[35] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.

[36] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.

[37] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

[38] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 432 с.

[39] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно производной. Новосибирск : Научная книга, 1998.

[40] Деннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.

[41] Дьяконов В.П. Mathematica в математических и научно-технических расчетах. М.: Солон-Пресс, 2004. 696 с.

[42] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 512 с.

[43] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

[44] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 1951. Т. 21. № 65. С. 499—597.

[45] Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.

[46] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.

[47] Кравчук М. Вибрані математичні праці. Київ; Нью-Йорк, 2002. 792 с.

[48] Крылов Н.М. Избранные труды. Том 1. Киев: Изд-во АН УССР. 1961. 268 с.

[49] Крыловъ А.Н. О нъкоторых дифференціальных уравненіях математической физики имеющих приложенія в техническихъ вопросахъ. Известія морской академіи. Выпуск II. Спб: Типографія императорской академіи наукъ. 1913. 364 с.

[50] Крылов А.Н. Вибрация судов. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. X. 402 с.

[51] Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. 5-е изд. М.; Л, ГИТТЛ, 1950. 400 с.

[52] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

[53] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1988. 712 с.

[54] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

[55] Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиница, 1974. 292 с.

[56] Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях. *Український математичний журнал.* 1988. Т. 40, № 1. С. 62—69.

[57] Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.

[58] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

[59] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983. 397 с.

[60] Мерман Г.А. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла. 1952. Л., Вып. 1. С. 5—86.

[61] Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 392 с.

[62] Мышкис А.Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. *Математический сборник.* 1954. Т. 34. № 3. С. 525—540.

[63] Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

[64] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 448 с.

[65] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.

[66] Перепелица М.А., Покутный А.А.. Исследование разрешимости слабонелинейных дифференциально-алгебраических систем. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование».* 2013. Т. 6, № 4. С. 55—62.

[67] Постников М.М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 567 с.

[68] Потемкин В.Г. Система MATLAB: справочное пособие. М.: Диалог МИФИ, 1997. 350 с.

[69] Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.

[70] Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 204 с.

[71] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища школа, 1976. 182 с.

[72] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наук. думка, 1986. 224 с.

[73] Самойленко А.М., Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В. Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. *Український математичний журнал.* 2020. Т. 72, № 8 С. 1106—1118.

[74] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. Київ: Вища школа, 2000. 296 с.

[75] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. 5-е изд. М.: ГИФМЛ, 1962. 607 с.

[76] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 686 с.

[77] Чуйко А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи. *Нелинейные колебания.* 2005. Т. 8, № 2. С. 278—288.

[78] Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи. *Нелінійні коливання.* 2006. Т. 9, № 3. С. 416—432.

[79] Чуйко С.М. Ускорение сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи. *Нелінійні коливання.* 2006. Т. 9, № 1. С. 127—132.

[80] Чуйко С.М. Нетерова краевая задача в особом критическом случае. *Доп. НАН України.* № 2. 2007. С. 26—30.

[81] Чуйко С.М. Модифицированный метод простых итераций в теории краевых задач (некритический случай). *Динамические системы.* 2007. Т. 22. С. 109—114.

[82] Чуйко С.М. Модифицированный метод простых итераций для критической краевой задачи. *Динамические системы.* 2008. Т. 25. С. 145—158.

[83] Чуйко С.М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов. *Нелінійні коливання.* 2008. Т. 11, № 4. С. 554—573.

[84] Чуйко С.М. Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае *Український математичний журнал.* 2009. Т. 61. № 4. С. 548—562.

[85] Чуйко С.М. Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае. *Нелінійні коливання.* 2010. Т. 13, № 1. С. 115—132.

[86] Чуйко С.М. Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения. О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете. *Дифференциальные уравнения.* 2016. Т. 52, № 11. С. 1578—1579.

[87] Чуйко С.М. Про узагальнення теореми Ньютона—Канторовича у банахововому просторі. *Доп. НАН України.* 2018. № 6. С. 22—31.

[88] Чуйко С.М. Обобщение метода Ньютона-Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений. *Доп. НАН України.* 2020. № 3. С. 3—9.

[89] Чуйко С.М. Диференціально-алгебраїчні крайові задачі у випадку матриці при похідній змінного рангу. *Український математичний вісник.* 2021. Т. 18, № 3. С. 303—318.

[90] Чуйко С.М., Бойчук Ан.А., Бойчук И.А. Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае второго порядка. *Нелінійні коливання.* 2013. Т. 16, № 2. С. 261—269.

[91] Чуйко С.М., Бойчук И.А. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае. *Нелінійні коливання.* 2009. Т. 12, № 3. С. 405—416.

[92] Чуйко С.М., Бойчук И.А. Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае. *Нелінійні коливання.* 2010. Т. 13, № 1. С 115—132.

[93] Чуйко С.М., Бойчук И.А., Пирус О.Е. О приближенном решении автономной краевой задачи методом Ньютона. *Нелінійні коливання.* 2012. Т. 12, № 2. С. 275—288.

[94] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Метод Ньютона—Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса. *Доп. НАН України.* 2019. № 12. С. 3—12.

[95] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка.* 2019. Т. 90. С. 60—72.

[96] Чуйко С.М., Несмелова О.В. Нелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем/ *Український математичний вісник.* 2020. Т. 17, № 3.

[97] Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В., Дзюба М.В. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. *Український математичний журнал.* 2018. Т. 70, № 2. С. 280—292.

[98] Чуйко С.М., Несмелова О.В., Сысоев Д.В. Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае. *Праці ІПММ.* 2017. Т. 31. С. 140—150.

[99] Чуйко С.М., Несмєлова О.В., Чуйко О.С. Автономна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу. *Нелінійні коливання.* 2020. Т. 23. № 1. С. 134—144.

[100] Чуйко С.М., Пирус О.Е. О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом Ньютона *Нелінійні коливання.* 2012. Т. 15, № 3. С. 407—421.

[101] Чуйко С.М., Старкова О.В. О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов. *Нелінійні коливання.* 2009. Т. 12, № 4. С. 556—573.

[102] Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко Ан.С. Автономные нетеровы краевые задачи в частном критическом случае. *Комплексные исследования и моделирование.* 2011. Т. 3, № 1. С. 161—175.

[103] Чуйко С.М., Чуйко Ан.С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла. *Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика.* 2010. Т. 4. С. 141—181.

[104] Чуйко С.М., Чуйко Ан.С. О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов. *Динамические системы.* 2011. Т. 29. С. 103—111.

[105] Чуйко С.М., Чуйко Ан.С., Пирус О.Е. Приближенные решения автономных нетеровых краевых задач в критическом случае. *Труды Инст. прикладной математики и механики НАН Украины.* 2011. Т. 22. С. 197—206.

[106] Шлапак Ю.Д. О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенные относительно старшей производной. *Український математичний журнал.* 1974. Т. 26, № 6. С. 850—854.

[107] Airy G.B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, University Press.* 1838. Vol. 6. P. 379—402.

[108] Andersen C.M., Geer J.F. Power expansion for the Frequency and period of limit cycle of the Van der Pol equation. *SIAM Journ. Applied Math.* 1982. Vol. 42. P. 678—693.

[109] Ben-Israel A. A modified Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. *Israel J. Math.* Vol. 3. P. 94—99.

[110] Boichuk A.A. Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1998. Vol. 50, N 2. P. 186—195.

[111] Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Differential Equations.* 1992. N 10. P. 1353—1358.

[112] Boichuk A.A., Chuiko S.M., Chuiko A.S. Nonautonomous periodic boundary value problem in special critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* 2004. Vol. 7, N 1. P. 52—64.

[113] Boichuk A.A., Chuiko S.M. Method of accelerated convergence for the construction of solution a Noetherian boundary value problem. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. 2008. Vol. 60, N 12. P. 1861—1877.

[114] Boičuk A., Čuiko S., Ružičková M. Lineárne okrajové úlohy. Žilina: EDIS-vydavatel'stvo ŽU, 2013. 177 p.

[115] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht; Boston: VSP, 2004. Vol. XIV. 317 p.

[116] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. 298 p.

[117] Boichuk A.A., Shehda L.M. Degenerate nonlinear boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2009. Vol. 61, N 9. P. 1387—1403.

[118] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. San Francisco; London; Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. 178 p.

[119] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations II. San Francisco; London; Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1982. 236 p.

[120] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. London: Pitman Publishing Limited, 1979. 272 p.

[121] Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical forms and solvable singular systems of diFFerential equations. *SIAM J. Alg. Descrete Methods.* 1983. N 4. P. 517—521.

[122] Chuiko A.S. The convergence domain of an iterative procedure for a veakly nonlinear boundary value problem. *Nonlinear Oscillations.* 2005. Vol. 8, N 2. P. 277—287.

[123] Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* 2006. Vol. 9, N 3. P. 405—422.

[124] Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)* 2008. Vol. 11, N 4. P. 585—604.

[125] Chuiko S.M. A weakly nonlinear boundary value problem in a particular critical case. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. 2009. Vol. 61, N 4. P. 548—562.

[126] Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Mathematical Journal.* 2015. Vol. 56, N 4. P. 752—760.

[127] Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes.* 2016. Vol. 17, N 1. P. 139—150.

[128] Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics.* 2016. Vol. 60, N 8. P. 64—73.

[129] Chuiko S.M. Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2017. Vol. 38 (2). P. 236—244.

[130] Chuiko S.M. On the solvability of a matrix boundary-value problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya"Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory".* 2017. Vol. 132. P. 139—143.

[131] Chuiko S.M. To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics.* 2017. Vol. 85, N 1. P. 62—68.

[132] Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol0 235, N 1. P. 2—18.

[133] Chuiko S.M. The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 242, N 3. P. 381—392.

[134] Chuiko S.M. A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Advances in Mathematics.* 2020. Vol. 30. P. 177—191.

[135] Chuiko S.M., Boichuk An.A., Boichuk I.A. Nonlinear Noetherian second-order boundary-value problems in the critical case. *Journal of Mathematical Sciences.* 2014. Vol. 198, N 3. P. 261—269.

[136] Chuiko S.M., Boichuk I.A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* 2009. Vol. 12, N 3. P. 405—416.

[137] Chuiko S.M., Boichuk I.A. Nonlinear Noetherian boundary-value problems in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* 2010. Vol. 13, N 1. P. 128—146.

[138] Chuiko S.M., Chuiko E.V., Boichuk I.A. On the reduction of a Noetherian boundary-value problem to a first-order critical case. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.).* 2015. Vol. 208, N 5. P. 607—619.

[139] Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *Journal of Mathematical Sciences.* 2013. Vol. 191, N 3. P. 449—464.

[140] Chuiko S.M., Starkova O.V. About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods. *Nonlinear oscillation.* 2009. Vol. 12, N 4. P. 556—573.

[141] Geer J.F., Andersen C.M. Resonant frequency calculations using a hybrid perturbation — Galerkin technique. NASA Contractor Report 187 632. 1991. ICASE Report N 91-68. 30 p.

[142] Ladas G., Lakshmikantham V. Asymptotic equilibrium of ordinary differential systems. *Applicable Anal.* 1975. Vol. 5, N 1. C. 33—39.

[143] Nashed M.Z. Generalized Inverses and Applications. New York: Academic Press, 1976. 1054 p.

[144] Nosova L.N., Tumarkin S.A. Tables of generalized Airy functions for the asymptotic solution of the differential equations. Elsevier Ltd. 1965. 92 p.

[145] Samoilenko A.M., Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative. *Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal.* 2020. Vol. 72, N 8. P. 1280—1293.

[146] Van der Pol B. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers.* 1934. N 22. P. 1051—1086.

[147] Veivoda O. On perturbed nonlinear boundary-value problems. *Czech. Math. Journ.* 1961. N 11. P. 323—364.

[148] Wexler D. On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems. *Ann. Vft. Pura et Appl.* 1968. Vok. 80. P. 123—136.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОЙЧУК Олександр Андрійович,
ЧУЙКО Сергій Михайлович

КОНСТРУКТИВНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2023

Художнє оформлення *Л. О. Середи*
Художній редактор *І. П. Савицька*
Технічний редактор *Т. С. Березяк*
Комп’ютерна верстка *Л. В. Багненко*

Підп. до друку 23.01.2023. Формат 70 × 100/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Computer Modern. Друк. офс. Ум. друк. арк. 18,85.
Обл.-вид. арк. 13,0. Тираж 50 прим. Зам. № ДФ-1223

Оригінал-макет виготовлено
у НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво “Фенікс”»
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13б
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 271 від 07.12.2000 р.