

Національна академія наук України  
Інститут математики

В.А. Троценко, Ю.В. Троценко

ЗАСТОСУВАННЯ  
ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ  
У СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ  
ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК  
І ГІДРОПРУЖНОСТІ

*Київ*  
*Наукова думка*  
*2023*

УДК 539.3:532.5

У монографії розвинуто варіаційний метод знаходження наближеного розв'язку сингулярно збуреної задачі про вільні коливання довільних тонких оболонок обертання. Запропонований алгоритм належить до рівномірних алгоритмів за малим параметром при старшій похідній в рівняннях. Розроблено застосування методу Рітца до знаходження розв'язків задач, поставлених з позиції декомпозиції області визначення шуканих розв'язків. Побудова розв'язків задач базується на формулюванні узагальненого функціонала, для якого умови спряження є природними граничними умовами. На основі отриманих результатів наведено розв'язки низки спектральних задач для рівнянь із розривними коефіцієнтами, граничними умовами та навантаженнями.

Для наукових та інженерно-технічних співробітників, аспірантів та студентів старших курсів вузів відповідних спеціальностей.

The monograph developed a variational method for finding an approximate solution to a singularly perturbed problem of free vibrations of arbitrary thin shells of revolution. The proposed algorithm belongs to the uniform algorithms for a small parameter with the highest derivative in the equations. The application of the Ritz method to finding solutions to problems posed from the standpoint of decomposition of the area of definition of the sought solutions has been developed. Construction of problem solutions is based on the formulation of a generalized functional, for which conjugation conditions are natural boundary conditions. Based on the obtained results, the solutions of a number of spectral problems for equations with discontinuous coefficients, boundary conditions and loads are given.

The monograph is intended for scientists and engineers, MSc. and PhD students of the corresponding specialties.

Рецензенти: академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук О.М. Тимоха  
д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю.М. Кононов

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Інституту математики НАН України  
(протокол № 2 від 21.02.2023)*

Науково-видавничий відділ природничо технічної літератури

Редактор О.А. Микитенко

© В.А. Троценко, Ю.В. Троценко, 2023

© НПП «Видавництво «Наукова думка»

ISBN 978-966-00-1906-5

НАН України», дизайн, 2023

## ЗМІСТ

Передмова	7
<b>1</b> Метод Рітца в задачі про вільні коливання оболонок обертання в умовах її сингулярного збурення	<b>21</b>
1.1 Варіаційна та диференціальна постановки задачі . .	21
1.2 Загальні принципи побудови розв'язків . . . . .	27
1.3 Побудова систем координатних функцій для тонко- стінних оболонок обертання, обмежених двома па- ралелями . . . . .	32
1.4 Розрахунки вільних коливань циліндричних оболонок . . . . .	41
1.5 Вільні коливання зрізаної конічної оболонки . . . . .	49
1.6 Формальна структура загального розв'язку рівнянь для оболонок у формі купола . . . . .	54
1.7 Вільні коливання куполоподібних оболонок . . . . .	63
1.7.1 Осесиметричні коливання оболонки у формі купола . . . . .	64
1.7.2 Неосесиметричні коливання сферичного сегмента . . . . .	71
1.8 Осесиметричні коливання замкненої у вершині ко- нічної оболонки . . . . .	78
<b>2</b> Варіаційні методи побудови розв'язків спектраль- них задач з умовами спряження	<b>97</b>

2.1	Вільні коливання складеного стержня . . . . .	98
2.1.1	Постановка задачі та побудова її розв'язку на базі методу Рітца . . . . .	98
2.1.2	Деякі числові результати та аналіз алгоритму . . . . .	106
2.2	Власні коливання рідини в резервуарах складної геометрії . . . . .	110
2.2.1	Постановка задачі та варіаційний метод її розв'язування . . . . .	110
2.2.2	Побудова розв'язків задачі для випадку, коли одна з підобластей є канонічною . . . . .	118
2.2.3	Результати розрахунків та їх аналіз . . . . .	123
2.3	Метод Рітца в задачі про вільні коливання спряжених оболонок обертання . . . . .	126
2.3.1	Постановка задачі та побудова узагальненого функціонала . . . . .	127
2.3.2	Побудова координатних функцій та алгебраїчної системи . . . . .	133
2.3.3	Колівання оболонки, складеної із конічної та циліндричної оболонок . . . . .	138
2.4	Вільні коливання циліндричної оболонки з пружним кільцевим ребром . . . . .	143
2.4.1	Варіаційне формулювання та граничні умови задачі . . . . .	144
2.4.2	Застосування методу Рітца до розв'язування варіаційного рівняння . . . . .	150
2.4.3	Результати розрахунків . . . . .	158
<b>3</b>	<b>Динаміка пружних конструкцій з резервуарами, які частково заповнені рідиною</b> . . . . .	<b>167</b>
3.1	Взаємодія тонкостінних оболонок обертання з обмеженим об'ємом рідини . . . . .	167
3.1.1	Лінійні рівняння коливань оболонки, що частково заповнена ідеальною рідиною . . . . .	167
3.1.2	Зведення рівнянь руху оболонки з рідиною до системи звичайних диференціальних рівнянь . . . . .	172

3.1.3	Застосування варіаційних методів для побудови розв'язків додатково введених спектральних задач . . . . .	179
3.1.4	Результати розрахунку неосесиметричних коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною . . . . .	192
3.2	Збурений рух твердих тіл з осесиметричною порожниною, яка частково заповнена рідиною та містить пружні елементи на її вільній поверхні . . . . .	200
3.2.1	Основні припущення, рівняння та граничні умови для потенціалу зміщень рідини і пружних елементів у вигляді пластини або мембрани . . . . .	200
3.2.2	Визначення головного вектора та головного моменту системи гідростатичних і гідродинамічних сил, які діють на порожнину . . . . .	206
3.2.3	Рівняння збуреного руху системи «тіло — рідина — пружний елемент» . . . . .	210
3.2.4	Вільні коливання рідини в осесиметричному резервуарі з пружним елементом на незбуреній поверхні . . . . .	216
3.2.5	Побудова наближених розв'язків введених у розгляд спектральних задач . . . . .	219
3.2.6	Аналіз числових результатів . . . . .	236
3.2.7	Вимушені коливання рідини в рухомому резервуарі з пружним елементом на її вільній поверхні . . . . .	247
3.3	Колівання пружних конструкцій, що несуть резервуари з рідиною . . . . .	253
3.3.1	Основні припущення та постановка задачі . . . . .	253
3.3.2	Варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання системи . . . . .	261
3.3.3	Вимушені коливання конструкції при дії на неї довільного навантаження . . . . .	270
3.3.4	Вимушені коливання системи при гармонічному збуренні основи стержня . . . . .	277
3.3.5	Результати розрахунків . . . . .	280

<b>4 Коливання довільної оболонки обертання з приєднаним абсолютно твердим тілом</b>	<b>289</b>
4.1 Постановка задачі . . . . .	290
4.2 Застосування методу Рітца до побудови наближених розв'язків задачі про поперечні коливання системи . . . . .	297
4.3 Спрощена постановка задачі про поперечні коливання механічної системи «оболонка—тверде тіло» . .	304
4.4 Побудова точних розв'язків для спрощеної постановки задачі . . . . .	310
4.5 Аналіз алгоритмів та результати розрахунків власних коливань системи . . . . .	315
4.5.1 Вільні коливання системи «оболонка—тверде тіло» . . . . .	315
4.5.2 Вільні коливання системи «балка Тимошенка — тверде тіло» . . . . .	319
<b>Список літератури</b>	<b>324</b>

# Передмова

Значна кількість сучасних реальних механічних конструкцій є багатокомпонентними системами, які містять великі маси рідини та приєднані різним чином тверді або пружні тіла скінченних розмірів. Найтипівішими об'єктами такого роду є ракети-носії, космічні апарати з рідинними двигунами та літаки. Також такі конструкції досить широко представлені в кораблебудуванні та інших галузях промислового будівництва. У процесі дослідження динамічної поведінки таких механічних систем доводиться долати значні труднощі, які полягають у необхідності сумісного описання руху декількох істотно різних об'єктів механіки – абсолютно твердого тіла, твердого–деформованого тіла та рідини. Дослідження таких багатокомпонентних механічних систем, як об'єктів аналітичної механіки, що знаходяться під дією нестационарного динамічного навантаження, зводиться до розв'язування досить складних початково–граничних задач у частинних похідних. Побудова розв'язків таких задач здебільшого базується на зведенні їх до розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують збурений рух розглядуваних механічних систем. Для ефективної реалізації цього підходу необхідно знати власні форми коливань відповідних підсистем конструкції. Тому визначення резонансних частот і форм коливань механічної системи є першочерговою задачею в загальному комплексі дослідження її динамічної поведінки. Оскільки ці задачі є базовими, то при побудові наближених методів їх розв'язування перевага надається методам, які дають аналітичну форму розв'язку та забезпечують гарантовану точність обчислювального процесу.

Загальна ідеологія побудови наближених розв'язків розгляду-

ваних у монографії спектральних задач базується на поєднанні варіаційних методів і аналітичної теорії диференціальних рівнянь. При цьому враховується наявність у шуканих розв'язках розривів у коефіцієнтах рівнянь, у граничних умовах, у навантаженнях а також великих градієнтів у вузьких примежових зонах. Урахування таких особливостей задач дає змогу уникнути розв'язування алгебраїчних систем високої розмірності, отримувати для розв'язків та їх похідних збіжність у рівномірній метриці.

Система диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує вільні коливання тонкої пружної оболонки обертання, має одну суттєву особливість, пов'язану з наявністю малого параметра при старшій похідній, який обумовлений тонкостінністю оболонки. Цей факт є визначальним під час вибору існуючих і розробки нових методів інтегрування таких рівнянь.

Традиційні методи розв'язування крайових задач (апроксимація операторів різницевиими співвідношеннями, методи типу Рітца, скінченних елементів та ін.) можна ефективно використовувати лише для середніх значень параметра при старшій похідній і виявляються непридатними в разі його малих значень. Це пов'язано з наявністю вузьких примежових зон, в яких розв'язки мають великі градієнти. Для апроксимації таких розв'язків доводиться зменшувати крок дискретизації, або брати велику кількість членів у розкладах, що призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. Здебільшого під час розв'язування сингулярно збурених задач існує така область малого параметра, де асимптотичні методи ще не дають необхідної точності розв'язку задачі (потрібно брати велику кількість наближень), а традиційні методи вже не можуть бути використані.

Тому виникає проблема розроблення таких методів розв'язування граничних задач для рівнянь з параметром при старшій похідній, які мали б однакову швидкість збіжності, як за малих, так і середніх його значеннях. Такі методи розв'язування задач з примежовими зонами в наукових джерелах називають рівномірні методи за параметром. Розробці різницевих схем, що збігаються рівномірно за параметром присвячено працю



Є. Дулана, Дж. Міллера, У. Шилдерса [29], в якій наведено досить змістовний огляд літературних джерел з цього питання. Використання асимптотичних методів стосовно спектральних задач теорії оболонок викладено в монографії О.Л. Гольденвейзера, В.Б. Лідського, П.Є. Товстіка [22].

У розділі 1 розвинуто варіаційний метод побудови наближеного розв'язку сингулярно збуреної спектральної задачі про вільні коливання довільних оболонок обертання. Побудова систем координатних функцій для методу Рітца базується на врахуванні попередньо встановленій формальній структури фундаментальних розв'язків вихідної системи рівнянь. Отримані на цій основі системи базисних функцій враховують наявність у розв'язках примежових функцій, що локалізовані у вузьких зонах біля торців оболонки, а також асимптотичну поведінку розв'язків у околі регулярної особливої точки вихідних рівнянь. На прикладах розрахунку частот і форм циліндричної, конічної і сферичної оболонок показано, що запропонований алгоритм має поточкову збіжність розв'язків та її перших чотирьох похідних у всій області інтегрування рівнянь, а також належить до рівномірних алгоритмів за малим параметром розв'язування сингулярно збурених задач.

На практиці часто зустрічаються крайові задачі для рівнянь з розривними коефіцієнтами, розривними граничними умовами або навантаженнями. До таких задач належать задачі про коливання пружних оболонок, контактні задачі, задачі про коливання рідини у частково заповнених пружних посудинах, а також багато інших задач механіки суцільного середовища. Наближені розв'язки таких задач у деяких випадках можна будувати шляхом розбиття області визначення шуканих функцій на окремі регулярні підобласті, вводячи на суміжних границях цих підобластей відповідні умови спряження. Тому розроблення методів розв'язування задач спряження є актуальною задачею як у теоретичному, так і в прикладному значенні.

Якщо підобласті мають канонічну форму, то за допомогою методу Фур'є вихідну задачу можна звести до розв'язування нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян) [4]. Розв'язуючи задачі спряження, можна використовувати ітераційний метод Шварца [32]. Розробці алгорит-

мів розв'язування задач спряження на основі методу скінченних елементів у літературі приділяється значна увага. Серед цих досліджень можна виділити праці Я.М. Григоренка, С.С. Кошкокіна [24], І.В. Сергієнка, В.В. Скопецького, В.С. Дейнеки [63], Н.П. Абовського [1], Л.О. Розіна [62], В.М. Паймушина [57], L.K. Chilton, P. Seshayer [103], F. Collino, S. Ghanemi, P. Joly [104] та багатьох інших авторів. Ці розв'язки мають багатовимірну дискретну структуру і для їх застосування необхідно залучати потужні обчислювальні комплекси. Отримання розв'язків задач спряження в аналітичній формі можливе у випадку застосування методу Рітца. Однак цей метод не набув належного розвитку через складність виконання умов спряження на суміжних границях підобластей. Тому розроблення варіаційного методу для розв'язування задач спряження є важливою задачею для механіки суцільних середовищ.

У розділі 2 розвинуто варіаційний метод побудови наближених розв'язків спектральних задач, поставлених з позиції спряження розв'язків. Загальна ідеологія такого підходу до розв'язування задач полягає в наступному. Вихідна задача зводиться до еквівалентної варіаційної задачі для деякого квадратичного функціонала  $I$ , при цьому використовується один із варіаційних принципів аналітичної механіки. Область визначення шуканих функцій розбивається на регулярні підобласті, в яких навантаження, граничні умови та коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями. Розв'язки в цих підобластях є неперервними та диференційовними функціями. При цьому встановлюються відповідні граничні умови спряження для розв'язків на суміжній границі введених підобластей, частина з яких є головними граничними умовами, а інша частина – природними для введеного функціонала.

Побудова класу допустимих функцій, що задовольняють головні граничні умови спряження в загальному випадку є досить складною задачею. Тому виникає питання про перетворення функціонала  $I$  на такий узагальнений функціонал, для якого всі граничні умови спряження були б природними умовами.

Головні умови спряження можна розглядати як допоміжні обмеження на задачу знаходження стаціонарних значень функціонала  $I$ . Виключити їх з розгляду можливо за допомогою множи-

ків Лагранжа [14, 43]. Для цього множники Лагранжа множать на різні обмеження на допустимі функції і ці добутки додають до функціонала  $I$ . Як наслідок розв'язування задачі зводиться до знаходження стаціонарних значень функціонала  $I_1$  відносно варіацій шуканих функцій та множників Лагранжа. Для уникнення штучного збільшення кількості невідомих з першої варіації функціонала  $I_1$  при вільному варіюванні шуканих функцій та множників Лагранжа встановлюються їх явні вирази через розв'язки та їх похідні розглядуваної задачі. Таким чином, виключаючи множники Лагранжа із функціонала  $I_1$ , отримуємо узагальнений функціонал  $I_2$ , який залежить лише від шуканих функцій. Визначення стаціонарних значень функціонала  $I_2$  здійснюється за допомогою методу Рітца, в якому шукані розв'язки варіюються незалежно від їх визначення в кожній із підобластей, забезпечуючи при цьому автоматичне виконання граничних умов спряження.

Цю методику було використано для визначення вільних коливань стержня кусково неперервної структури, під час побудови розв'язків двовимірної спектральної задачі про коливання ідеальної рідини в резервуарах складної геометрії, а також у ході дослідження вільних коливань циліндричної оболонки з пружним підкріплювальним ребром жорсткості та складеної оболонки. Ці задачі мають самостійне наукове та прикладне значення. Результати розрахунків свідчать, що запропоновані алгоритми забезпечують збіжність методу Рітца в рівномірній метриці розв'язків та їх похідних, які входять в умови спряження розглядуваних задач з розривними параметрами.

Розділ 3 присвячений розроблянню наближених методів розв'язування задач гідропружності з визначення коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених ідеальною рідиною, дослідженню взаємодії рідини в рухомих порожнинах з конструктивними пристроями у вигляді пружних пластин і мембран, що покривають вільну поверхню рідини, та вивченню коливань пружних конструкцій з підвісними резервуарами, які частково заповнені рідиною.

Великий внесок в розроблянню методів розрахунку та експериментальних досліджень коливань рідини в рухомих порожнинах і пружних конструкціях, а також в розв'язання багатьох практично

важливих задач зробили Ю.Г. Балакіреєв, І.Б. Богоряд, О.М. Гузь, Л.В. Докучаєв, М.Є. Жуковський, М.А. Ільгамов, К.С. Колесніков, В.Д. Кубенко, Р.Є. Лампер, І.О. Луковський, Г.Н. Мікішев, М.М. Моїсєєв, Г.С. Наріманов, Б.І. Рабінович, І.М. Рапопорт, В.В. Румянцев, В.М. Сухов, Ф.Л. Черноусько, Ю.Ю. Швейко, Ф.М. Шклярчук, В.П. Шмаков, Н.Н. Abramson, D.D. Kana, J.W. Miles та інші.

Спектральні задачі гідропружності є складними задачами математичної фізики, оскільки необхідно сумісно інтегрувати систему диференціальних рівнянь для переміщень оболонки і рівнянь у частинних похідних для потенціалу зміщень рідини. Незважаючи на це серед публікацій є такі, в яких побудовані точні розв'язки розглядуваних задач (В.Б. Кулешов, Ю.Ю. Швейко [41], Ф.М. Шклярчук [23]). Особливо відзначимо працю [41], в якій у найбільш загальній постановці з урахуванням хвильових рухів рідини побудовано точний розв'язок задачі про власні неосесиметричні коливання кругової циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною.

Для оболонок обертання довільного виду розроблено низку наближених аналітичних методів розв'язування крайових задач гідропружності. Побудова цих розв'язків базується на застосуванні методів Рітца (Р.Є. Лампер [2], Ф.М. Шклярчук [23]) і Бубнова–Гальоркіна (В.П. Шмаков [94]). У випадку їх застосування основна проблема полягає у виборі координатних функцій для переміщень оболонки і рідини. Мабуть, з цієї причини варіаційні методи розв'язування задач гідропружності не набули належного розвитку та застосування.

У разі використання методу Бубнова–Гальоркіна труднощі побудови систем базисних функцій можливо подолати шляхом його модифікації, запропонованим В.П. Шмаковим [92]. З огляду на це в працях В.П. Шмакова, Ю.Г. Балакіреєва [7, 8] запропоновано оригінальні розв'язки для низки задач гідропружності.

Розвиток чисельних методів розрахунку динамічних характеристик пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною, мабуть, започатковано в працях, В.П. Шмакова [94], який запропонував алгоритм розрахунку вільних і вимушених коливань пружних оболонок з рідиною. Вихідна задача зводиться до

системи інтегро-диференціальних рівнянь за рахунок введення до розгляду допоміжної спектральної задачі з параметром у граничній умові. Сформульована крайова задача зводиться до відповідних задач Коші, розв'язки яких знаходяться чисельним методом. Існує також велика кількість літературних даних із застосування різних варіантів методу скінченних елементів у задачах гідропружності В.Г. Григор'єв [26], В.В. Мокеєв [53], L.G. Olson, K.J. Bathe [112], Z. Alphonse [97] та ін. Розглянуті чисельні методи володіють універсальністю щодо охоплення розв'язуваних задач.

Виходячи з лінійної теорії руху ідеальної, нестисливої рідини та лінійної теорії тонких оболонок, наведено формулювання початково-граничної задачі, що описує взаємопов'язані коливання оболонки та рідини, яка в ній знаходиться, за наявності вільної поверхні. У зв'язку з достатньою складністю сформульованої задачі для рівнянь у частинних похідних здебільшого її розв'язування зводиться до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь з незалежною змінною за часом, використанням при цьому методу Бубнова-Гальборкіна. Під час реалізації цього підходу необхідно мати деякі системи базисних функцій для апроксимації потенціалу зміщень рідини та переміщень оболонки. Для визначення хвильових рухів рідини як базисні функції вибираються власні функції спектральної задачі з параметром у граничній умові, яка пов'язана з вільними коливаннями рідини в абсолютно жорсткому резервуарі. В свою чергу для апроксимації переміщень оболонки і потенціалу зміщень рідини, зумовлених деформацією оболонки, вибираються власні форми коливань оболонки з рідиною за відсутності хвильових рухів на її вільній поверхні. Введена допоміжна задача має дискретний спектр з точкою згущення на нескінченності, а її власні функції мають повноту на всій серединній поверхні оболонки та задовольняють певні умови ортогональності.

Таким чином, основною проблемою під час розв'язування розглядуваної задачі гідропружності є проблема знаходження скінченної кількості власних функцій додатково введеної спектральної задачі. У даній праці розроблено наближений метод розв'язування такої задачі з використанням її еквівалентного варіаційного формулювання.

За допомогою введення до розгляду функції Гріна для задачі Неймана додатково введена спектральна задача зводиться до граничної задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження зі сторони рідини, то для ефективної апроксимації розв'язків розглядуваної задачі і забезпечення можливості вирахування переміщень оболонки та її перших похідних у кожній точці інтервалу інтегрування рівнянь доцільно розбити цей інтервал на дві підобласті. Перша підобласть відповідає змоченій частині поверхні оболонки, а друга – не змоченій частині оболонки, що залишилась. При цьому на граничній лінії цих підобластей повинні виконуватись вісім досить складних граничних умов спряження розв'язків. Сформульована задача спряження для системи інтегро-диференціальних рівнянь розв'язується за допомогою методу Рітца. При цьому згідно з розділом 2 попередньо будується узагальнений функціонал, для якого всі вісім умов спряження будуть автоматично виконуватись при знаходженні його стаціонарних значень. Оскільки знайти функцію Гріна для даної граничної задачі в довільній області не вдається, то запропоновано наближену побудову оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі, яка зводиться до розв'язування неоднорідних задач Неймана для скінченної кількості відповідних граничних умов. Такий підхід дає змогу розділити труднощі побудови розв'язків вихідної задачі гідропружності, які виникають за сумісного інтегрування рівнянь у частинних похідних для потенціалу зміщень та системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, що описують коливання довільної оболонки обертання.

З огляду на запропоновану методику визначення динамічних характеристик довільних оболонок обертання, що частково заповнені рідиною, наведено результати розрахунків вільних коливань циліндричної оболонки і рідини. Проаналізовано ефективність розв'язування задачі спряження для оболонок обертання на основі розробленого варіаційного методу, збіжність наближених розв'язків залежно від кількості базисних функцій для переміщень оболонки і для потенціалу зміщень рідини. Проведено розрахунки вільних коливань розглядуваної механічної системи як з урахуванням хвильових рухів рідини, так і без їх урахування,

а також наведено порівняння розрахункових даних з наявними в літературних джерелах точними розв'язками задачі.

Далі досліджується взаємодія ідеальної та нестисливої рідини в рухомих порожнинах твердого тіла з конструктивними пристроями у вигляді плоских пружних пластин або гнучких мембран, що покривають вільну незбурену поверхню рідини.

У багатьох випадках рухома маса рідини є значною частиною від всієї маси механічної системи та одним із важливих чинників, які визначають стійкість руху системи «тіло–рідина». Ця проблема стала особливо актуальною у зв'язку із розвитком авіаційної, космічної техніки та під час транспортування рідинних вантажів у цистернах, танкерах, а також у разі створення великих резервуарів, які можуть знаходитись під впливом вітрових і сейсмічних навантажень. Тому, з метою покращення динамічних характеристик розглядуваних систем в інженерній практиці застосовують різні конструктивні пристрої. Одним із способів обмеження рухливості рідини в резервуарах є розміщення в них пружних пластинок або мембран, які покривають незбурену вільну поверхню рідини. Такі пристрої можуть використовуватися для запобігання перемішування газу та рідини в резервуарах, що знаходяться в умовах, близьких до невагомості.

Теоретичному дослідженню динаміки рідини в круговому циліндрі та в прямокутному каналі, вільна поверхня яких покрита пружними елементами у вигляді пластин або мембран, присвячено праці Л.В. Докучаєва [28], Ю.М. Кононова, В.П. Шевченка [38], Р. Capodanno [101], Н.Ф. Bauer [98, 100], J. Siekman, S.C. Chang [115] та інших авторів. Коливання ідеальної рідини в довільних осесиметричних резервуарах, вільна поверхня якої обмежена попередньо деформованою гідростатичним тиском оболонкою із гіперпружного матеріалу, вивчали в [66, 67].

Наведені вище результати аналізування літературних джерел свідчать про те, що запропоновані методи дослідження динаміки рідини в розглядуваних резервуарах можуть бути застосовані лише для випадку резервуарів, які мають канонічну форму (границі області, зайнятої рідиною, збігаються з координатними поверхнями циліндричної або декартової систем координат).

Також у розділі 3 наведено детальне виведення лінійної ма-

тематичної моделі руху твердого тіла під дією прикладених зовнішніх сил з порожниною загальної конфігурації, яка частково заповнена ідеальною рідиною і має на її вільній незбуреній поверхні пружні елементи у вигляді плоских пластин або мембран. Під час побудови рівнянь руху механічної системи використано основні положення лінійної теорії руху тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною, що запропонована в працях Г.С. Наріманова [54]. Для описання нестационарної поведінки рідини і пружних елементів використано власні функції спектральної задачі про вільні коливання системи «рідина–пружний елемент» у нерухомій порожнині. Як наслідок математичну модель руху розглядуваної механічної системи формалізовано у вигляді системи диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують рух тіла, рідини та пружного елемента. При цьому отримані рівняння руху набувають найпростішого вигляду.

Визначення коефіцієнтів отриманої математичної моделі пов'язане з розв'язуванням однорідної граничної задачі про власні коливання системи «рідина–пружний елемент» та неоднорідної задачі Неймана для потенціалу Стокса–Жуковського. Знаходження розв'язків для неоднорідної задачі не викликає особливих труднощів [87], тоді як побудова розв'язків спектральної задачі гідропружності потребує розроблення методів її розв'язання.

Побудова наближених розв'язків розглядуваних спектральних задач базується на поширенні методу розв'язування задач гідропружності, який запропоновано у цьому розділі. При цьому розглядаються два підходи до розв'язування задачі про коливання системи «рідина–пружний елемент».

Перший підхід ґрунтується на побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини вихідної задачі з використанням розв'язків додатково введеної скінченної послідовності неоднорідних задач Неймана для рівняння Лапласа в області, яку займає рідина. У другому підході використовуються власні функції допоміжно введеної спектральної задачі з параметром у граничній умові. Тому розв'язування вихідних задач гідропружності зводиться до розв'язання граничних задач для інтегро-диференціальних рівнянь відносно прогинів пружних елементів. Розв'язки останніх задач знаходять за допомогою узагальненого методу Бубнова–



Гальоркіна [92], в якому базисні функції можуть не задовольняти всі граничні умови задачі.

Для реалізації другого підходу запропоновано модифікацію методу Шмакова [90, 93], яка забезпечує знаходження на основі варіаційного методу скінченної кількості власних функцій і власних значень допоміжно введеної спектральної задачі.

На основі отриманих результатів розв'язано низку конкретних задач, де проаналізована збіжність запропонованих алгоритмів, а також виявлено основні закономірності впливу розглядуваних конструктивних пристроїв на динамічну поведінку рідини в рухомих і нерухомих резервуарах. Під час написання цієї частини розділу використано результати праці [69].

Заключна частина розділу 3 присвячена дослідженню поперечних коливань вертикально розташованого тонкостінного стержня з приєднаним до нього в деякому перерізі резервуара у формі тіла обертання, який частково заповнений ідеальною рідиною.

Розглядається осесиметрична конструкція, що складається з вертикально розташованої пружної оболонки обертання, до однієї з паралелей якої за допомогою шпангоута прикріплено абсолютно жорсткий резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Типовими конструкціями такого роду є корпус рідинної ракети, а також деякі промислові резервуари [61]. Динаміка таких конструкцій розглядається в рамках лінійної теорії пружності та гідродинаміки. За певних геометричних параметрів даної конструкції тонкостінну оболонку в деякому сенсі можна ототожнити з пружним стержнем. Тому як розрахункова схема використовується пружний стержень з підвішеним у деякому його перерізі жорстким резервуаром з рідиною. Для визначеності вважається, що нижній торець стержня закріплений, а верхній – вільний. Вважається, що до розглядуваної механічної системи прикладено зовнішні зосереджені та розподілені навантаження.

Виходячи з варіаційного принципу можливих переміщень, побудовано загальну математичну модель динаміки розглядуваної механічної системи, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження. Отримані граничні задачі для рівнянь у частинних похідних далі за допомогою методу Бубнова–Гальоркіна приводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь з незале-

жною змінною за часом. Ця система набуває найпростішого вигляду, якщо у якості базисних функцій для апроксимації шуканих розв'язків взяти власні форми коливань стержня з рухомим резервуаром.

Для випадку, коли масові та жорсткісні характеристики стержня є кусково-сталими функціями, для розв'язування подібної спектральної задачі в праці [61] використовується чисельний метод початкових параметрів. Оскільки граничні умови спектральної задачі з підвісним резервуаром мають у місці його кріплення розриви першого роду, то нижче для її розв'язування використовується метод Рітца в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканого розв'язку. Задача зводиться до відшукування стаціонарних значень узагальненого функціонала, для якого умови спряження є природними граничними умовами. Як наслідок визначення частот і форм коливань стержня з підвісним резервуаром зведено до розв'язування однорідної алгебраїчної задачі невеликої розмірності.

Для резервуара у формі кругового циліндра проаналізовано ефективність алгоритму розв'язування розглядуваної задачі та наведено деякі результати розрахунку частот і форм коливань даної механічної системи.

На практиці зустрічаються задачі, коли коливання розглядуваних конструкцій викликаються деяким заданим горизонтальним гармонічним рухом основи стержня. Розв'язування цієї задачі про визначення амплітуд усталених коливань зведено до розв'язування неоднорідної алгебраїчної системи. Наведені результати розрахунку для випадку кінематичного збурення основи стержня свідчать, що малі відхилення стержня від положення рівноваги можуть зумовити великі амплітуди коливань рідини в резервуарі.

Розділ 4 присвячено побудові математичної моделі руху довільної оболонки обертання з приєднаним на одному з її торців твердим тілом скінченних розмірів, що знаходиться під дією зосереджених та розподілених навантажень загального вигляду, а також розробляння наближених методів розрахунку вільних несиметричних коливань розглядуваної механічної системи.

До перших робіт, в яких досліджувалися поздовжні та кру-

тильні коливання циліндричної оболонки із зосередженими масами на її торцях належать праці В.Е. Бреславського [10, 11]. Дослідження вільних коливань попередньо деформованої гідростатичним тиском оболонки з гіперпружного матеріалу з приєднаним дископодібним тілом проведено в працях В.А. Троценка та В.С. Кладиного [34, 35, 70].

З використанням принципу можливих переміщень отримано варіаційне формулювання розглядуваної задачі. Користуючись традиційними методами варіаційного числення сформульована інтегро-диференціальна постановка задачі про визначення рівноважного стану довільної оболонки обертання та твердого тіла при дії на них навантаження самого загального вигляду.

Ґрунтуючись на принципі Д'Аламбера сформульовано крайову задачу на власні значення, що описує вільні коливання тіла та оболонки. При цьому показано, що сумісні коливання оболонки та твердого тіла можливі лише, коли кількість хвиль оболонки в круговому напрямку дорівнює одиниці. За числа хвиль більшого за одиницю коливання відбуваються так, як і у випадку жорсткого кріплення контуру оболонки в місці приєднання твердого тіла.

Проаналізовано ускладнення, з якими доводиться стикатися під час розв'язування сформульованої спектральної задачі, та обґрунтовано доцільність застосування варіаційного методу для побудови її наближеного розв'язку. На основі методу Рітца запропоновано схему знаходження стаціонарних значень відповідного квадратичного функціонала. На відміну від традиційного методу Рітца побудовані представлення для переміщень оболонки не є незалежними, оскільки містять параметри руху твердого тіла, що потрібно визначити. Базисні функції у цих поданнях будувалися на класі степеневих функцій та з використанням многочленів Лежандра.

На практиці використовують різного роду спрощені моделі реальної конструкції за рахунок введення в розгляд додаткових гіпотез і припущень. Здебільшого застосовують класичну балкову теорію Ейлера–Бернуллі. Природно виникає питання про можливість розширення меж застосування спрощеної моделі шляхом урахування деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу балки.

Розглядається механічна система, що складається з балки Тимошенка та абсолютно твердого тіла, яке приєднано до одного з її торців. Сформульовано спектральну задачу, що описує вільні коливання такої системи. З цієї задачі отримується як частинний випадок задача про коливання балки Ейлера–Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Отримано точний розв’язок для балки Тимошенка. З наведеного аналізу результатів розрахунку частот та форм власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним твердим тілом випливає, що балкова теорія, побудована на врахуванні деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу, має суттєво більшу область застосування порівняно з елементарною теорією балок. Теорія балок Тимошенка дає прийнятні для практичних розрахунків результати у ході визначення не лише нижчих, але і вищих форм коливань такої механічної системи.

У монографії використовуються і розвиваються результати, отримані авторами, а також результати, одержані іншими дослідниками, які опубліковані в науковій літературі. Викладення матеріалу ведеться з тією ступінню строгості, яку зазвичай прийнято в працях прикладного характеру.

## Розділ 1

# Метод Рітца в задачі про вільні коливання оболонок обертання в умовах її сингулярного збурення

### 1.1 Варіаційна та диференціальна постановки задачі

Розглянемо тонкостінну пружну оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання (рис. 1.1). У такої оболонки лініями головних кривизн будуть її меридіани і паралелі. Відповідно до цього серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи криволінійних координат  $s$  та  $\varphi$ , де  $\varphi$  — полярний кут, який відраховується від осі  $Ox$  за годинниковою стрілкою, якщо дивитися у бік зростання координати  $z$ ,  $s$  — довжина дуги меридіана, що відраховується від деякої початкової паралелі або полюса для замкненої оболонки.

Проекції переміщення точок серединної поверхні на додатні напрямки меридіана і паралелі, а також зовнішню нормаль до поверхні оболонки позначимо відповідно через  $u$ ,  $v$  і  $w$ .

Вважатимемо надалі, що переміщення настільки малі, що мо-

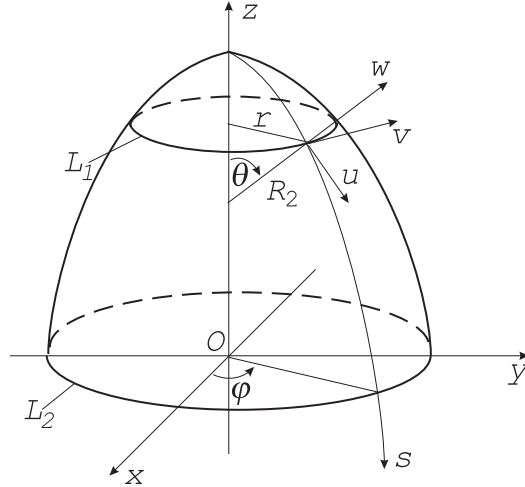


Рис. 1.1: Оболонка обертання.

жна знехтувати членами другого та вищого порядків малості порівняно з лінійними. Вважатимемо також, що для оболонки справедливі гіпотези Кірхгофа–Лява.

Рівняння рівноважного стану оболонки, що знаходиться під дією сил інерції, можна отримати з використанням деякого варіаційного принципу механіки. Такий підхід дасть змогу сформулювати варіаційну постановку задачі, яку буде використано надалі під час побудови її наближеного розв'язку.

Скористаємося принципом можливих переміщень, згідно з яким

$$\delta\Pi = \delta A. \quad (1.1)$$

Тут  $\delta\Pi$  — варіація потенціальної енергії пружної деформації оболонки;  $\delta A$  — робота сил інерції на можливих переміщеннях, яку можна подати в такому вигляді:

$$\delta A = -\rho h \iint_{\Sigma} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U} d\Sigma, \quad (1.2)$$

де  $\Sigma$ ,  $\rho$  і  $h$  — відповідно серединна поверхня, постійні густина

матеріалу та товщина оболонки;  $\vec{U}$  — вектор з компонентами  $u$ ,  $v$  та  $w$ .

Варіацію потенціальної енергії деформації серединної поверхні оболонки можна записати так [9]:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \iint_{\Sigma} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\varepsilon_{12} + \\ + M_1\delta\kappa_1 + M_2\delta\kappa_2 + 2H\delta\kappa_{12})d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут

$$\begin{aligned} T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \quad M_1 = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2); \\ M_2 = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1); \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}; \quad H = D(1-\nu)\kappa_{12}; \quad (1.4) \\ B = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \end{aligned}$$

$E$  і  $\nu$  — відповідно модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки. Компоненти тензора деформацій серединної поверхні оболонки  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\kappa_{12}$  пов'язані з компонентами вектора переміщень співвідношеннями [9]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \vartheta}{r} u + \frac{\sin \vartheta}{r} w; \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \vartheta}{r} v; \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{R_1} \right); \\ \kappa_2 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{u}{R_1}; \quad (1.5) \\ \kappa_{12} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r R_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} v + \\ + \frac{\cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial v}{\partial s}, \end{aligned}$$

де  $R_1(s)$  — радіус кривизни меридіана оболонки;  $\vartheta(s)$  — кут, утворений нормаллю до серединної поверхні та віссю обертання оболонки  $Oz$ ;  $r(s)$  — радіус кола, утвореного паралелями оболонки.

Будемо розглядати незамкнену оболонку обертання, обмежену контурами  $L_1$  і  $L_2$ , як показано на (рис. 1.1).

Скориставшись формулами інтегрування частинами для подвійних інтегралів, після низки перетворень з урахуванням співвідношень (1.2)–(1.5) варіаційне рівняння (1.1) можна подати у формі:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} \left[ \left( -\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \vartheta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{r R_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + \right. \right. \\
& + M_2 \frac{\cos \vartheta}{r R_1} - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \Big) \delta u + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \vartheta}{r} S - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \vartheta) \right) \delta v + \right. \\
& \left. + \left( \frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \vartheta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \right] d\Sigma + \\
& + \oint_{L_2} \left[ \left( T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left( S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 - \\
& - \oint_{L_1} \left[ \left( T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left( S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 = \\
& = -\rho h \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) r ds d\varphi. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Враховуючи незалежність варіацій  $\delta u$ ,  $\delta v$  і  $\delta w$  в області  $\Sigma$ , з варіаційного рівняння (1.6) отримаємо три рівняння, що описують рух оболонки під впливом її інерційних сил. З рівняння (1.6) випливають також і граничні умови задачі. Так, для випадку жорсткого кріплення краю оболонки маємо

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (1.7)$$



Відповідно на вільному краю оболонки повинні виконуватись граничні умови

$$\begin{aligned} T_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad S + 2H \frac{\sin \vartheta}{r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В інших випадках кріплення краю оболонки використовуються комбінації умов (1.7) та (1.8).

Особливо відзначимо, що найскладніші силові граничні умови (1.8) є природними граничними умовами для відповідного функціонала. Отже, пошук його мінімуму можна здійснювати на класі функцій, які відповідають лише кінематичним граничним умовам.

Надалі зручно перейти до безрозмірних величин. Для цього переміщення оболонки та всі її геометричні параметри віднесемо до деякого характерного розміру  $R_0$ .

Введемо до розгляду безрозмірні сили та моменти, які позначені рискою зверху:

$$\{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}\} = \frac{1}{B} \{T_1, T_2, S\}, \quad \{\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{H}\} = \frac{1}{BR_0} \{M_1, M_2, H\}.$$

Тоді безрозмірні сили та моменти, пов'язані з компонентами деформації її середньої поверхні і безрозмірними параметрами зміни кривини, будуть визначатися залежностями (риску над безрозмірними величинами надалі опускаємо)

$$\begin{aligned} T_1 = (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad T_2 = (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \quad M_1 = c^2(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2); \\ M_2 = c^2(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1); \quad S = \nu_1 \varepsilon_{12}; \quad H = c^2(1 - \nu) \varkappa_{12}; \\ \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Малість параметрів руху оболонки та її симетрія дають змогу розкласти загальний рух на незалежні складові в напрямку та навколо поздовжньої осі, а також у двох взаємно перпендикулярних площинах  $Oxz$  та  $Oyz$ . Надалі розглядатимемо поперечні коливання оболонки в одній з площин симетрії, якою, зокрема,

прийнемо площину  $Oxz$ . Для усталених коливань оболонки з  $n$  хвилями вздовж паралелі подамо переміщення  $u$ ,  $v$  та  $w$ :

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= u(s) \cos n\varphi \sin \omega t, \\ v(s, \varphi, t) &= v(s) \sin n\varphi \sin \omega t, \\ w(s, \varphi, t) &= w(s) \cos n\varphi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тоді визначення вектор-функції  $\vec{u} = \{u(s), v(s), w(s)\}$  і частоти коливань оболонки  $\omega$  зводиться до інтегрування однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь за відповідних граничних умов, які визначають умови закріплення торців оболонки. Переходячи до безрозмірних величин, цю систему рівнянь можна записати в такій формі:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\vec{u} - \lambda\vec{u} &= 0, \\ \mathcal{A} &= c^2 K + L, \quad \lambda = \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Диференціальні вирази, що входять до матриць  $L$  і  $K$ , мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r + \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right), \\ L_{12} &= -n \frac{d}{ds} \frac{1}{r} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r, \\ L_{13} &= \frac{1 - \nu}{R_2} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad L_{21} = \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r - \frac{(1 - \nu)n}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r}, \\ L_{22} &= \left( \frac{n^2}{r^2} - \frac{1 - \nu}{R_1 R_2} \right) - \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r, \quad L_{23} = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{31} &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d}{ds} r - \frac{1 - \nu}{r} \frac{d}{ds} \frac{r}{R_2}, \quad L_{32} = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{33} &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, \quad \Delta_n = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2}, \\ K_{33} &= \Delta_n \Delta_n + \frac{1 - \nu}{r} \left( \frac{d}{ds} \frac{r}{R_1 R_2} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2} \right). \end{aligned}$$

Оператори  $K_{ij}$ , при яких стоїть параметр  $c^2$ , містять диференціювання не вище за другий порядок при  $i, j \leq 2$  і не вище за третій

при  $i + j < 6$ . Їх явний вигляд, на відміну від  $L_{ij}$ , залежить від припущень, які робляться в рамках різних теорій оболонки, що використовують гіпотезу Кірхгофа–Лява. Вирази для  $K_{ij}$  у разі оболонки довільного обрису і найбільш загальних співвідношень пружності наведено в [5].

Якщо в параметрах зміни кривини оболонки знехтувати дотичними переміщеннями, то  $K_{ij} = 0$  при  $i + j < 6$ . Таке припущення в термінології В.З. Власова [18] відповідає технічній теорії оболонки.

Для отримання рівнянь (1.11) були використані такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} = r' = \cos\vartheta, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{r''}{\sqrt{1-(r')^2}}, \\ \frac{1}{R_2} = \frac{\sin\vartheta}{r} = \frac{\sqrt{1-(r')^2}}{r}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{r'}{r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Наведена спектральна задача породжує оператор  $\mathcal{A} = c^2K + L$ , який визначений на гладких трикомпонентних вектор-функціях  $\vec{u}$ , що задовольняють задані граничні умови. Цей оператор є симетричним і додатно визначеним [5]. Звідси випливає, що розглядувана задача має нескінченну множину дійсних власних чисел  $\lambda_i$ .

## 1.2 Загальні принципи побудови розв'язків

Розв'язки вихідної стаціонарної задачі будемо шукати, використовуючи її еквівалентне варіаційне формулювання. Після інтегрування за кутом  $\varphi$  і переходу до безрозмірних величин задача про визначення частот та форм коливань оболонки зводиться до знаходження мінімуму квадратичного функціонала  $I(\vec{u})$ , який з точністю до сталого множника має вигляд

$$I(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2 + \right.$$

$$+c^2[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu\varkappa_1\varkappa_2 + 2(1-\nu)\varkappa_{12}^2] - \left. -\lambda(u^2 + v^2 + w^2) \right\} r ds \quad (1.13)$$

на класі функцій, що задовольняють кінематичні умови кріплення торців оболонки. Пошук мінімуму функціонала здійснюватимемо за допомогою методу Рітца. Тому функції  $u(s)$ ,  $v(s)$  і  $w(s)$  подамо у вигляді відрізків узагальнених рядів

$$u(s) = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s), \quad (1.14)$$

$$v(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j(s), \quad w(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j(s).$$

Тут  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 3N$ ) — поки невизначені сталі,  $\{U_j\}$ ,  $\{V_j\}$  і  $\{W_j\}$  — системи координатних функцій, які підпорядковані граничним умовам кріплення торців оболонки.

У ході визначення стаціонарних значень функціонала  $I$  як функції  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$  необхідними умовами є рівності

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3N). \quad (1.15)$$

Як наслідок, розв'язування вихідної задачі зводиться до розв'язування узагальненої алгебраїчної проблеми на власні значення:

$$(A - \lambda B)\vec{x}^T = 0, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \quad (1.16)$$

з симетричними матрицями  $A$  і  $B$ . Симетричність матриці  $A$  впливає з симетричності оператора  $\mathcal{A}$ . Власні числа алгебраїчної задачі (1.16) є наближеними значеннями перших  $3N$  власних чисел даної граничної задачі. При цьому всі вони є верхніми межами для  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 3N$ ).

З огляду на складність виразу для введеного функціонала знаходження коефіцієнтів матриці  $A$  з умов (1.15) зумовлює істотні технічні труднощі та призводить до досить громіздких формул

для них. Тому алгоритм незручний в реалізації. Щоб уникнути цих труднощів, формувати алгебраїчну систему рівнянь пропонується, виходячи із варіації вихідного функціонала. При цьому  $\delta I$  зручно подати так:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{s_1}^{s_2} & \left[ \Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta v, v) + \right. \\ & + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \\ & \left. + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] r ds - \lambda \int_{s_1}^{s_2} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Введені тут диференціальні оператори  $\Psi_{ij}(p, q)$ , де  $p$  і  $q$  довільні функції, мають вигляд

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) = & \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} + \frac{c^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 R_1^2} + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1^2} \right) pq + \\ & + \left( \frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left[ \frac{dp}{ds} + \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{R_1} \right) \right] q + \\ & + c^2 \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{R_1} \right) + \frac{\nu \cos \vartheta}{r R_1} p \right] \frac{d}{ds} \left( \frac{q}{R_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(p, q) = & \frac{n \cos \vartheta}{r^2} \left( 1 + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r R_1} \right) pq + \\ & + \frac{\nu n}{r} \left[ \frac{dq}{ds} + \frac{c^2 \sin \vartheta}{r} \frac{d}{ds} \left( \frac{q}{R_1} \right) \right] p + \\ & + \left[ \left( \frac{\nu_1 n}{r} + \frac{2(1-\nu)c^2 n \sin \vartheta}{r^2 R_1} \right) \left( \frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right] q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{13}(p, q) = & \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \vartheta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \\ & + \frac{\cos \vartheta}{r} \left( \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{c^2 n^2}{r^2 R_1} \right) pq - \\ & - c^2 \left( \frac{d^2 p}{ds^2} - \frac{\nu n^2}{r^2} p + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left( \frac{q}{R_1} \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{c^2 \cos \vartheta}{rR_1} \left( \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} + \nu \frac{d^2 p}{ds^2} \right) q + \frac{2(1-\nu)c^2 n^2}{r^2 R_1} \left( \frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) q,$$

$$\begin{aligned} \Psi_{22}(p, q) = & \frac{1}{r^2} \left( n^2 + \nu_1 \cos^2 \vartheta + \frac{c^2 n^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \right) pq - \\ & - \frac{\nu_1 \cos \vartheta}{r} \left( \frac{dp}{ds} q + p \frac{dq}{ds} \right) + \nu_1 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} + \\ & + \frac{2(1-\nu)c^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \left[ \left( \frac{\cos \vartheta}{r} q - \frac{dq}{ds} \right) \left( \frac{\cos \vartheta}{r} p - \frac{dp}{ds} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{23}(p, q) = & \left( \frac{n \sin \vartheta}{r^2} + \frac{\nu n}{rR_1} + \frac{c^2 n^3 \sin \vartheta}{r^4} \right) pq - \frac{c^2 n \sin \vartheta}{r^2} \left( \nu \frac{d^2 p}{ds^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dp}{ds} \right) q + 2(1-\nu)c^2 \left[ \frac{n \sin \vartheta}{r^2} \left( \frac{dp}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} p \right) \left( \frac{dq}{ds} - \frac{\cos \vartheta}{r} q \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{33}(p, q) = & c^2 \left[ \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \vartheta}{r} \left( \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\nu n^2}{r^2} \left( \frac{d^2 p}{ds^2} q + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} + 2(1-\nu)n^2 \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \vartheta (3-2\nu)}{r^3} \left( \frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] + \\ & + \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \vartheta}{rR_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1-\nu)c^2 n^2 \cos^2 \vartheta}{r^4} \right) pq, \end{aligned}$$

де  $\nu_1 = (1-\nu)/2$ .

Якщо в наведених формулах для операторів  $\Psi_{ij}(p, q)$  ( $i+j < 6$ ) знехтувати членами, пропорційними  $c^2$ , то отримані формули для них будуть придатні для технічної теорії тонких оболонок.

Використовуючи вираз (1.17), для коефіцієнтів матриці  $A$  можна отримати компактні та зручні для програмування розрахункові формули. Так для знаходження похідної  $\partial I / \partial x_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) покладемо в (1.17)  $\delta u = U_i$ ,  $\delta v = 0$ ,  $\delta w = 0$ . При цьому отримаємо перші  $N$  рівнянь відносно вектора  $\vec{x}$ . Аналогічно діємо і під час знаходження частинних похідних від функціонала  $I$  за іншими компонентами вектора  $\vec{x}$ .

Елементи матриці  $A$  алгебраїчної системи (1.16), які розташовані на головній діагоналі і вище за неї, обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, & a_{i,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds, \\ a_{i,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds, & a_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds, \end{aligned}$$

а ненульові коефіцієнти матриці  $B$  мають вигляд

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \int_{s_1}^{s_2} U_j U_i r ds, & b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{s_2} V_j V_i r ds, \\ b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{s_2} W_j W_i r ds & (i = \overline{1, N}, j \geq i). \end{aligned}$$

Таким чином, у випадку заданих систем координатних функцій  $\{U_i\}$ ,  $\{V_i\}$ ,  $\{W_i\}$  отримаємо досить простий в реалізації алгоритм визначення частот і форм вільних коливань оболонки обертання.

Послідовності координатних функцій повинні бути повними і лінійно незалежними [36]. Виконання першої умови забезпечує збіжність методу, а сам  $N$ -й член послідовності Рітца можна зробити як завгодно близьким у відповідній метриці до розв'язку задачі, вибравши досить велике число  $N$ . Зазначимо, що виконання цих вимог є необхідною, але не є достатньою умовою для ефективно побудови мінімізувальної послідовності Рітца. Справа в тому, що в разі великої кількості координатних функцій необхідно розв'язувати алгебраїчні системи великої розмірності. При цьому, помилки округлення чисел починають відігравати суттєву роль з одного боку під час обчислення коефіцієнтів алгебраїчної системи, а з іншого — у ході розв'язування цієї системи рівнянь. Все

це призводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень розв'язків. Таким чином, питання про вибір послідовності координатних функцій далеко не є тривіальним і успіх використання варіаційного методу під час побудови наближеного розв'язку граничних задач істотно залежить від цього вибору.

Як впливає із теорії систем диференціальних рівнянь з аналітичними коефіцієнтами, регулярні розв'язки таких рівнянь можна побудувати у вигляді розкладів у степеневі ряди за незалежною змінною. Звідси випливає, що системи базисних функцій для незамкнених у меридіональному напрямку оболонки можна подати у вигляді степеневих функцій з певними ваговими множниками. Однак побудовані таким чином наближення придатні лише для тих випадків, коли в розкладах Рітца можна обійтися невеликою кількістю членів  $N$ , оскільки з подальшим збільшенням числа наближень порушується стійкість обчислювального процесу.

Нижче розглянемо способи побудови базисних функцій, що забезпечують збіжність у рівномірній метриці не лише самих розв'язків, а й їх перших похідних за невеликої розмірності алгебраїчної системи.

### 1.3 Побудова систем координатних функцій для тонкостінних оболонок обертання, обмежених двома паралелями

Певних успіхів можна досягти, якщо в ході апроксимації шуканих розв'язків замість степеневих функцій використовувати поліноми Лежандра, абсолютні значення яких не перевищують одиницю для будь-якого аргументу на інтервалі їх ортогональності. Це дає змогу істотно збільшити граничне значення числа  $N$  щодо степеневих базису і тим самим розширити діапазон вхідних параметрів задачі, за яких можна проводити розрахунки з заданою точністю.

На швидкість збіжності послідовності Рітца в суттєво впливає відносна товщина оболонки. Зменшення її призводить до того, що розглядувана гранична задача переходить у розряд сингу-



лярно збурених спектральних задач. Наявність малого параметра при старшій похідній у вихідній системі рівнянь свідчить про те, що шукані розв'язки мають одночасно як швидко, так і повільно змінні компоненти. Апроксимація швидко змінних компонентів розв'язку поліноміальним базисом не дає бажаного результату і, таким чином, виникає принципове питання про розширення класу допустимих функцій такими функціями, які дали б змогу отримувати наближені розв'язки з однаково високим ступенем точності як за наявності вузької зони з великими градієнтами в розв'язках, так і без неї. Зазначена проблема є проблемою побудови наближених алгоритмів розв'язування сингулярно збурених крайових задач, що мають рівномірну збіжність за малим параметром при старшій похідній [29].

Однією з важливих переваг методу Рітца є те, що він дає змогу під час побудови наближеного розв'язку враховувати властивості шуканих розв'язків, які можуть істотно впливати на швидкість збіжності обчислювального процесу. Методи малого параметра для сингулярно збурених задач, окрім свого безпосереднього призначення, можуть слугувати основою для з'ясування якісного характеру розв'язків вихідної задачі. З метою встановлення структури розв'язку задачі та характеру його виродження, коли параметр при старшій похідній в рівняннях наближається до нуля, наведемо формальні асимптотичні розклади фундаментальної системи розв'язків розглядуваних рівнянь.

Система диференціальних рівнянь (1.11) зводиться до одного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами щодо функції  $w(s)$  [21, 22]:

$$-\mu^4 \sum_{k=0}^m a_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} + \sum_{k=0}^{m-l} b_k(s) \frac{d^k w}{ds^k} = 0, \quad a_m = 1, \quad m > l. \quad (1.18)$$

Позначення малого параметра  $c^2$  через  $\mu^4$  далі використовується лише для зручності. При  $m = 8$  і  $l = 4$  до цього рівняння зводиться система рівнянь, що описує неосесиметричні коливання оболонок обертання. Для випадку осесиметричних коливань маємо  $m = 6$  і  $l = 4$ . Коефіцієнти рівняння (1.18)  $a_k(s)$  і  $b_k(s)$  є

аналітичними функціями на інтервалі  $[s_1, s_2]$ . Окрім цього,

$$b_{m-l} = b(s) = \lambda - \frac{(1 - \nu^2)}{R_2^2}. \quad (1.19)$$

Оскільки надалі вартою уваги є лише формальна структура лінійно незалежних розв'язків рівняння (1.18), то явний вигляд інших коефіцієнтів  $a_k(s)$  і  $b_k(s)$  нам не знадобиться. Вимагатимемо щоб виконувалася умова

$$b(s) < 0 \quad \text{при} \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (1.20)$$

Умова (1.20) означає, що в подальшому будемо розглядати нижчу частину частотного спектра оболонки.

Побудуємо спочатку  $m - l$  інтегралів рівняння (1.18), використовуючи прямий розклад його розв'язку за малим параметром

$$w_j(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{pl} w_{j,p}(s) \quad (j = 1, 2, \dots, m - l). \quad (1.21)$$

Підставимо ряд (1.21) у рівняння (1.18) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях  $\mu$ . Тоді для нульового наближення отримаємо однорідне диференціальне рівняння

$$M(w_{j,0}(s)) = \sum_{k=0}^{m-l} b_k(s) \frac{d^k w_{j,0}}{ds^k} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m - l). \quad (1.22)$$

Функції  $w_{j,0}$  утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (1.18) при  $\mu = 0$ . Визначення наступних функцій  $w_{j,p}$  зводиться до інтегрування цього рівняння, в праву частину якого входять раніше знайдені  $w_{j,p-1}(s)$ :

$$M(w_{j,p}(s)) = \sum_{k=0}^m a_k(s) \frac{d^k w_{j,p-1}}{ds^k}.$$

Враховуючи аналітичність функцій  $a_k(s)$  і  $b_k(s)$ , можна зробити висновок, що побудовані таким чином обмежені регулярні інтеграли можна подати у вигляді рядів Тейлора в інтервалі  $s_1 \leq s \leq s_2$ .

Наступні  $l$  інтегралів згідно з теорією сингулярно збурених рівнянь [13, 17, 22] відшукуємо у вигляді розкладів, що включають в себе експоненціальний множник:

$$w_{m-l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p w_{m-l+j,p}(s) \exp\left\{\frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \varphi_j(t) dt\right\} \quad (1.23)$$

$(j = 1, 2, \dots, l).$

Для знаходження функцій  $\varphi_j(s)$  та  $w_{m-l+j}(s)$  підставимо ряд (1.23) в диференціальне рівняння (1.18) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях  $\mu$ . В результаті отримаємо характеристичне рівняння для визначення функцій  $\varphi_j(s)$ :

$$(\varphi_j(s))^l - b(s) = 0, \quad (1.24)$$

звідси знаходимо чотири ненульові значення  $\varphi_j(s)$ . Розташовуючи їх у порядку зростання дійсних частин, маємо

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}} |b|^{1/4}, & \varphi_2(s) &= \frac{-1-i}{\sqrt{2}} |b|^{1/4}, \\ \varphi_3(s) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} |b|^{1/4}, & \varphi_4(s) &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} |b|^{1/4}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

За термінологією праці [17] виродження вихідної крайової задачі в задачу при  $\mu \rightarrow 0$  є регулярним, оскільки рівняння (1.24) у розглядуваному діапазоні частот вільних коливань оболонки має корені, з яких два мають від'ємну дійсну частину, а два — додатну. Визначення функцій  $w_{m-l+j}(s)$  зводиться до інтегрування однорідного рівняння першого порядку та цього самого рівняння з правими частинами, які лінійно залежать від розв'язків попередніх наближень. Структура цих рівнянь і аналітичні властивості їх коефіцієнтів дають можливість зробити висновок, що ці функції можна подати у вигляді розкладів у ряд Тейлора в околі точок  $s = s_1$  і  $s = s_2$ .

У представленні інтегралів (1.23) при  $j = 1, 2$  покладемо  $s_0 = s_1$ , а при  $j = 3, 4$  прийнемо  $s_0 = s_2$  і відокремимо в цих

інтегралах їх дійсну і уявну частини. При цьому для експоненціального множника отримаємо вирази

$$e^{\beta_k(s)} \cos \beta_k(s), \quad e^{\beta_k(s)} \sin \beta_k(s),$$

$$\beta_k(s) = \frac{(-1)^k}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_k}^s |b(t)|^{1/4} dt \quad (k = 1, 2). \quad (1.26)$$

Виходячи з цього можна зробити висновок, що перші два інтеграли (1.23) локалізовані в околі точки  $s = s_1$ , тоді як інші два інтеграли — в околі точки  $s = s_2$ . Іншими словами, їх внесок у загальний розв'язок рівняння (1.26) істотний тільки поблизу одного з країв оболонки на відстанях  $|s - s_k|$  ( $k = 1, 2$ ) порядку  $O(\mu)$  від краю.

Для більшості оболонок обертання інтеграл, що входить у вираз для  $\beta_k(s)$  не обчислюється в елементарних функціях. У цьому випадку інтеграли з великою змінністю можна подати в іншій формі, яка є зручнішою для їх побудови. Як показано в працях [15, 17], інтеграли (1.23), в яких  $Re\varphi_j(s) < 0$ , можна записати так:

$$w_{m-l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p P_j^{(p)}(\tau) \exp\{\varphi_j(s_1)\tau\}, \quad \tau = \frac{s - s_1}{\mu}, \quad (1.27)$$

де  $P_j^{(p)}(\tau)$  — поліном за  $\tau$  зі сталими коефіцієнтами, які залежать від коефіцієнтів рівнянь  $a_i(s)$  і  $b_i(s)$  і їх похідних у точці  $s = s_1$ .

Аналогічне подання інтегралів має місце і в околі точки  $s = s_2$  при  $Re\varphi_j(s) > 0$ . Ці поліноми в літературі називають поліномами Вішіка — Люстерніка.

Структура інтегралів з великою змінністю для функцій  $u(s, \mu)$  і  $v(s, \mu)$  збігається зі структурою інтегралів для функції  $w(s, \mu)$  з тією лише різницею, що в розкладах типу (1.23) з'являється сталий множник, що залежить від параметра  $\mu$  [22].

Зауважимо, що функції  $\varphi_j(s)$ , які входять до показника експоненти в поданні (1.27) визначаються у точці  $s = s_1$ , що істотно спрощує побудову інтегралів з великою змінністю.

Побудову інтегралів (1.21) з повільною змінністю здебільшого здійснюють за допомогою стандартних чисельних методів інте-

грування відповідної послідовності рівнянь. Явні вирази для інтегралів з великою змінністю для низки оболонок (в тому числі з урахуванням точок повороту) для нульового та першого наближень побудовані в працях Н.А. Алумяе [3], Г.І. Пшенічнова [59, 60], П.Є. Товстіка [22, 65] та інших авторів.

Наведені вище результати дають можливість сформулювати основні принципи побудови координатних функцій під час розв'язування даної задачі варіаційним методом в умовах її сингулярного збурення.

З огляду на встановлену вище регулярність функцій  $w_{j,p}(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, m, p = 0, 1 \dots$ ) у розкладах (1.21) і (1.23) їх можна подати у вигляді відповідних рядів Тейлора на замкнутому інтервалі  $s_1 \leq s \leq s_2$  з невідомими коефіцієнтами. Тоді загальний розв'язок для функцій  $u(s)$ ,  $v(s)$  і  $w(s)$  можна записати так:

$$\begin{aligned}
 f(s) = & \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,0} s^i + e^{\beta_1(s)} \cos \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,1} (s - s_1)^i + \\
 & + e^{\beta_1(s)} \sin \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,2} (s - s_1)^i + e^{\beta_2(s)} \cos \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,3} (s - s_2)^i + \\
 & + e^{\beta_2(s)} \sin \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,4} (s - s_2)^i,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

де  $f_{i,j}$  — невизначені сталі, які залежать від параметра  $\mu$ , а під функцією  $f(s)$  будемо розуміти будь-яку з невідомих функцій  $u(s)$ ,  $v(s)$  і  $w(s)$  з відповідними для них коефіцієнтами розкладів.

Відповідно до викладеного вище, загальні розв'язки (1.28) необхідно підпорядкувати головним граничним умовам даної задачі на власні значення. Виходячи з цих умов, знаходимо додаткові співвідношення між деякими коефіцієнтами в поданні (1.28). Підставляючи ці співвідношення в загальний вигляд розв'язків для функцій  $u(s)$ ,  $v(s)$ ,  $w(s)$ , отримуємо набори координатних функцій для апроксимації шуканих розв'язків. При цьому слід врахувати ту обставину, що другий і третій доданки в (1.28) суттєво

відрізняються від нуля лише в околі точки  $s = s_1$ , тоді як четвертий та п'ятий — в околі точки  $s = s_2$ . Тому взаємним впливом цих двох груп доданків при виведенні координатних функцій будемо нехтувати, допускаючи при цьому малу похибку порядку

$$\exp\left\{-\frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int_{s_1}^{s_2}|b(t)|^{1/4}dt\right\}.$$

Для отримання найпростіших співвідношень між коефіцієнтами у виразах (1.28) за виконання граничних умов першу суму, не порушуючи повноти подання, можна вибирати у вигляді розкладів за степенями  $(s - s_1)$  або за степенями  $(s - s_2)$ . Отриманий при цьому степеневий базис з деякою ваговою функцією можна записати у вигляді добутку цієї вагової функції і поліномів Лежандра, абсолютні значення яких не перевищують одиницю на відрізьку ортогональності.

Як приклад побудови систем базисних функцій нижче розглянемо задачу про вільні коливання довільної оболонки обертання з двома жорстко закріпленими паралелями.

З огляду на застосування описаної вище процедури система базисних функцій для апроксимації функції  $w(s)$  матиме таку структуру:

$$\begin{aligned} \{W_i\}_{i=1}^N = \{ & W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; \\ & W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}; W_{m+2m_p+1}, \dots, W_{m+3m_p}; \\ & W_{m+3m_p+1}, \dots, W_{m+4m_p}\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

У виразі (1.29) виділено п'ять груп функцій, які відокремлені одна від одної крапкою з комою. Перша група з  $m$  функцій являє собою регулярний базис, утворений з поліномів Лежандра з певною ваговою функцією. Друга і третя групи функцій пов'язані з наявністю примежового шару в околі точки  $s = s_1$ , а четверта і п'ята групи функцій — в околі точки  $s = s_2$ . Кількість функцій в цих групах позначено через  $m_p$ . Аналогічну структуру мають і координатні функції для апроксимації розв'язків  $u(s)$  і  $v(s)$ . Оскільки головні граничні умови для функцій  $u(s)$  і  $v(s)$  мають однаковий вигляд, то  $V_i = U_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Введемо до розгляду такі позначення:

$$\begin{aligned} b_{0,k}(\lambda) &= \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_k)}, \quad p_k = p_k(\lambda) = \frac{(-1)^k |b_{0,k}(\lambda)|^{1/4}}{\mu\sqrt{2}}, \\ g_{c_k} &= e^{p_k(s-s_k)} \cos p_k(s-s_k), \quad g_{s_k} = e^{p_k(s-s_k)} \sin p_k(s-s_k) \\ &(k = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Тоді явні вирази для координатних функцій  $U_j$  і  $W_j$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} U_j(s) &= (s-s_1)(s-s_2)P_j(z), \quad z = \frac{2s-s_2-s_1}{s_2-s_1}, \\ W_j(s) &= (s-s_1)^2(s-s_2)^2P_j(z), \\ &(j = 1, 2, \dots, m), \\ U_{m+1}(s) &= g_{c_1} - 1 + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}, \quad W_{m+1}(s) = g_{c_1} - 1 + \frac{s-s_1}{s_2-s_1} - \\ &- \frac{(s-s_1)(s-s_2)[p_1(s-s_1)(s_2-s_1)+1]}{(s_1-s_2)(s_2-s_1)} - \\ &- \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)[p_1(s-s_1)(s_2-s_1)+2]}{(s_2-s_1)^3}, \\ W_{m+2}(s) &= g_{c_1}(s-s_1) + \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{(s_2-s_1)} - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \\ U_{m+j}(s) &= g_{c_1}(s-s_1)s^{j-1}, \quad U_{m+m_p+1}(s) = g_{s_1}, \\ U_{m+m_p+j}(s) &= g_{s_1}(s-s_1)s^{j-1}, \\ U_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{s-s_1}{s_2-s_1}, \quad U_{m+2m_p+j}(s) = g_{c_2}(s-s_2)s^{j-1}, \\ U_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2}, \\ U_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s-s_2)s^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, m_p), \\ W_{m+j}(s) &= g_{c_1}(s-s_1)^2s^{j-1}, \\ W_{m+m_p+1}(s) &= g_{s_1} + \frac{p_1(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)} - \frac{p_1(s-s_1)^3(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \\ W_{m+m_p+2}(s) &= g_{s_1}(s-s_1), \quad W_{m+m_p+j}(s) = g_{s_1}(s-s_1)^2s^{j-1}, \\ W_{m+2m_p+1}(s) &= g_{c_2} - \frac{(s-s_1)}{(s_2-s_1)} - \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{(s_1-s_2)^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)[p_2(s-s_2)(s_2-s_1)-2]}{(s_2-s_1)^3}, \\
W_{m+2m_p+2}(s) &= g_{c_2}(s-s_2) - \frac{(s-s_1)^2(s-s_2)}{(s_2-s_1)^2}, \\
W_{m+2m_p+j}(s) &= g_{c_2}(s-s_2)^2 s^{j-1}, \\
W_{m+3m_p+1}(s) &= g_{s_2} - \frac{p_2(s-s_1)^2(s-s_2)^2}{(s_2-s_1)^2}, \\
W_{m+3m_p+2}(s) &= g_{s_2}(s-s_2), \\
W_{m+3m_p+j}(s) &= g_{s_2}(s-s_2)^2 s^{j-1} \quad (j=3,4,\dots,m_p).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Тут  $P_j(s)$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра. Їх знаходження, а також перші дві похідні при довільних аргументах без втрати точності обчислень проводиться за допомогою таких рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned}
P_{j+2}(s) &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)], \\
P'_{j+2}(s) &= sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s), \\
P''_{j+2}(s) &= sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s), \\
P_1(s) &= 1, \quad P_2(s) = s \quad (j=1,2,\dots,N-2).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Певні незручності під час розв'язуванні такої задачі на власні значення спричинює той факт, що, як і слід було очікувати, в показник змінності координатних функцій  $p_k$  (1.30), пов'язаних з наявністю крайових ефектів, входить параметр  $\lambda$ , який заздалегідь невідомий. Це призводить до необхідності організації ітераційного процесу послідовних наближень за параметром  $\lambda$  для знаходження його мінімального значення, що певним чином ускладнює алгоритм розв'язування задачі. Цього процесу можна уникнути, якщо знайти таке наближене значення  $\tilde{\lambda}$ , яке відрізняється від істинного значення  $\lambda$  на малу величину порядку  $\mu$ . Оскільки параметр  $\lambda$  є інтегральною характеристикою задачі, то його обчислення з достатнім ступенем точності можна провести на базі використання лише регулярної частини базису навіть в умовах сингулярного збурення задачі. Наближене значення параметра  $\lambda$  буде уточнюватись коефіцієнтами регулярних розкладів у поданні (1.28). По-



#### 1.4. Розрахунки вільних коливань циліндричних оболонок 41

чаткове значення параметра  $\lambda$  можна отримати, поклавши параметр  $m_p$  таким, що дорівнює нулю.

Нижче наведемо результати розрахунків за запропонованим алгоритмом власних коливань циліндричної та зрізаної конічної оболонки.

### 1.4 Розрахунки вільних коливань циліндричних оболонок

Розглянемо циліндричну оболонку середньої довжини  $l$ . Як характерний лінійний розмір оболонки виберемо її радіус  $R_0$ . З довжиною меридіана  $s$  пов'яжемо поздовжню координату  $z$ . Спочатку будемо вважати, що обидва торці оболонки жорстко закріплені. Всі обчислення виконані в рамках технічної теорії оболонок за значення коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0.3$  і довжини оболонки  $l = 4$ . Відношення радіуса оболонки до її товщини позначимо через  $\delta$ .

У табл. 1.1 наведені результати розрахунків при  $\delta = 1000$  перших трьох безрозмірних частот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ , функцій  $w_i(z^*)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) і їх похідних у точці  $z^* = 0.99$  для неосесиметричних коливань оболонки  $n = 1$  залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі. Тут і далі  $z^* = z/l$ .

Для апроксимації компонентів розв'язків з великими градієнтами, локалізованих в околі точок  $z^* = 0$  і  $z^* = 1$ , було використано по дві координатні функції ( $m_p = 2$ ). У таблиці наведено таку кількість знаків у обчислюваних величинах, які не змінюються зі збільшенням числа  $m_p$ . Отримані дані свідчать про рівномірну збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних. Аналогічна збіжність спостерігається і в інших точках інтервалу  $0 \leq z \leq l$ , що дає змогу визначати значення сил і моментів в усіх точках серединної поверхні оболонки.

Швидкість збіжності обчислюваних величин до їх граничних значень, як і слід було очікувати, є неоднаковою. Так, для нижчої частоти перші дев'ять знаків стабілізуються, починаючи з  $m = 8$ , тоді як для третьої похідної за цього самого значення  $m$  стабілізується лише чотири значущі цифри. В разі збільшення номера форми коливань спостерігається деяке уповільнення збіжності по-

Таблиця 1.1: Значення частот  $\omega_i$ , функцій  $w_i(z^*)$  і їх похідних у точці  $z^* = 0.99$  коливань циліндричної оболонки при  $n = 1$ ,  $m_p = 2$ ,  $\delta = 1000$  залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі

$m$	$\omega_i$	$w_i$	$w_i^I$	$w_i^{II}$	$w_i^{III}$	$w_i^{IV}$
$i = 1$						
2	0.308517	0.078491	1.946292	-49.2410	-487.154	214694.6
4	0.305471	0.073404	1.824635	-41.1165	-372.750	157571.2
6	0.305466	0.073336	1.822331	-41.3055	-373.444	159370.3
8	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3001	-373.457	159328.0
10	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3002	-373.457	159328.4
12	0.305466	0.073334	1.822307	-41.3002	-373.457	159328.4
$i = 2$						
2	0.586145	-0.06180	-2.35139	39.9794	4031.075	-409828
4	0.573173	-0.05370	-1.88036	-8.33819	658.7091	-22648.6
6	0.573034	-0.05432	-1.92459	-1.31042	1112.712	-77168.2
8	0.573034	-0.05429	-1.92222	-1.74325	1087.452	-73777.6
10	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72866	1088.174	-73892.9
12	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72897	1088.161	-73890.4
14	0.573034	-0.05429	-1.92227	-1.72896	1088.161	-73890.5
$i = 3$						
2	0.883718	0.06e11	0.21e13	-0.1e14	-0.15e16	0.72e17
4	0.774417	-0.10408	-4.07654	1.15063	4020.93	-28653.0
6	0.759725	-0.07338	-2.76493	-17.0210	1460.89	-48932.4
8	0.759391	-0.07186	-2.71864	-12.8252	1657.91	-78465.8
10	0.759388	-0.07169	-2.71190	-13.1577	1637.33	-75411.5
12	0.759388	-0.07169	-2.71184	-13.1370	1637.96	-75571.5
14	0.759388	-0.07169	-2.71184	-13.1377	1637.94	-75565.2

слідовностей Рітца.

Отримання аналогічних результатів з використанням лише регулярного базису можливе за шестикратного збільшення числа  $m$ . Це можна пояснити тією обставиною, що точні розв'язки, які включають в себе експоненти з великими аргументами, погано апроксимуються рядами Тейлора. У випадку подальшого зменшення відносної товщини оболонки використання регулярного базису для отримання розв'язків такої якості стає неефективним,

#### 1.4. Розрахунки вільних коливань циліндричних оболонок 43

оскільки втрачається стійкість обчислень до досягнення граничних значень обчислюваних величин.

Таблиця 1.2: Значення частоти  $\omega_1$ , функції  $w_1(z^*)$  і її похідних у точці  $z^* = 0.99$  коливань циліндричної оболонки при  $n = 1$ ,  $m_p = 2$ ,  $\delta = 100$ ,  $\delta = 2000$  залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі

$m$	$\omega_1$	$w_1$	$w_1^I$	$w_1^{II}$	$w_1^{III}$	$w_1^{IV}$
$\delta = 100$						
2	0.3073112	0.0225267	0.995807	15.25770	-450.78	3971.5
4	0.3058882	0.0222008	0.957922	13.48223	-430.34	6712.7
6	0.3058869	0.0221731	0.957494	13.51401	-430.49	6613.6
8	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51337	-430.47	6614.9
10	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51336	-430.47	6614.9
12	0.3058869	0.0221732	0.957485	13.51335	-430.47	6614.9
$\delta = 2000$						
2	0.3087912	0.0932625	1.360032	-72.72263	3868.8	118159
4	0.3054399	0.0876306	1.353135	-64.16305	2832.1	81459.6
6	0.3054344	0.0875060	1.347701	-64.21545	2866.1	82253.7
8	0.3054344	0.0875046	1.347749	-64.21226	2866.1	82241.1
10	0.3054344	0.0875046	1.347748	-64.21227	2866.1	82241.1
12	0.3054344	0.0875046	1.347748	-64.21227	2866.1	82241.1

У табл. 1.2 наведено аналогічні дані для першої форми згинальних коливань оболонки, отримані при  $\delta = 100$  і  $\delta = 2000$ . Зіставляючи ці результати, можна зробити висновок, що запропонований алгоритм розв'язування цієї задачі має однакову ефективність як за середніх, так і за малих значень параметра при старшій похідній у вихідних рівняннях.

Зауважимо, що оскільки сама вихідна система рівнянь (1.11) є неточною, то немає необхідності проводити обчислення з такою точністю. Вказана кількість значущих цифр для обчислюваних величин у табл. 1.1 і 1.2 ілюструє лише можливість запропонованого підходу до побудови наближеного розв'язку спектральної задачі. Обмежуючись у практичних розрахунках реальною точністю обчислень, можна істотно зменшити порядок розв'язуваної алгебраїчної системи.

Поточкова збіжність наближених розв'язків і їх перших чотирьох похідних дає змогу провести перевірку задоволення цих розв'язків вихідних рівнянь на всьому інтервалі їх інтегрування. Позначимо через  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(z^*)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) значення лівих частин рівнянь (1.11), обчислених у точках  $z^* \in [0, 1]$ .

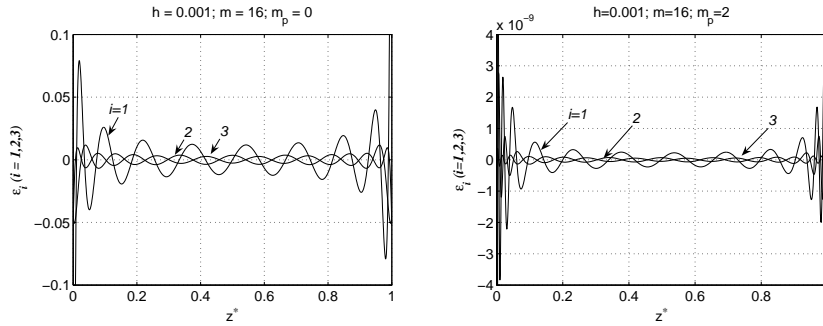


Рис. 1.2: Поведінка функцій  $\varepsilon_i(z^*)$  у всій області інтегрування рівнянь (1.11) при  $m_p = 0$  і  $m_p = 2$

На рис. 1.2 відображено поведінку функцій  $\varepsilon_i(z^*)$  в усій області інтегрування рівнянь (1.11) при  $m_p = 0$  і  $m_p = 2$ . При цьому в обох випадках в регулярному базисі утримувалося шістнадцять координатних функцій. Під час виконання розрахунків нормування власних функцій виконувалося таким чином, щоб максимум абсолютного значення для переміщень оболонки в її нормальному напрямку дорівнював одиниці. Як бачимо з рис. 1.2, розв'язки, побудовані з використанням тільки регулярного базису, задовольняють всі три рівняння з точністю, що не перевищує 0.1. Додавання до регулярного базису двох координатних функцій, локалізованих в околі закріплених торців, призводить до того, що значення  $\varepsilon_i$  не перевищують за абсолютним значенням величину приблизно  $4 \cdot 10^{-9}$ . При цьому найбільших значень  $\varepsilon_i$  набувають, як і слід було очікувати, поблизу границь кріплення оболонки. Наведені результати дають змогу трактувати отримані наближені розв'язки розглядуваної спектральної задачі як розв'язки близькі, в певному сенсі, до точних розв'язків задачі.

1.4. РОЗРАХУНКИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК 45

Розглянемо вільні коливання циліндричної оболонки, в якій торець при  $z = 0$  вільний, а при  $z = l$  жорстко закріплений.

Введемо до розгляду такі позначення:

$$\begin{aligned} g_c^{(1)}(z) &= e^{-pz} \cos pz, & g_s^{(1)}(z) &= e^{-pz} \sin pz, \\ g_c^{(2)}(z) &= e^{p(z-l)} \cos p(z-l), \\ g_s^{(2)}(z) &= e^{p(z-l)} \sin p(z-l), & p &= p(\lambda) = (1 - \nu^2 - \lambda)^{1/4} / (\mu\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Тоді явні вирази для координатних функцій  $U_j$  і  $W_j$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{z-l}{l} P_j \left( \frac{2z}{l} - 1 \right), & W_j &= \left( \frac{z-l}{l} \right)^2 P_j \left( \frac{2z}{l} - 1 \right) \\ (j &= 1, 2, \dots, m), \\ U_{m+j} &= W_{m+j} = g_c^{(1)}(z) z^{(j-1)}, \\ U_{m+m_p+j} &= W_{m+m_p+j} = g_s^{(1)}(z) z^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, m_p), \\ U_{m+2m_p+1} &= g_c^{(2)}(z) - 1, & U_{m+2m_p+2} &= (z-l) g_c^{(2)}, \\ U_{m+3m_p+1} &= g_s^{(2)}(z), \\ U_{m+3m_p+2} &= W_{m+3m_p+2} = (z-l) g_s^{(2)}(z), \\ W_{m+2m_p+1} &= \frac{g_c^{(2)}(z) - 1 - p(z-l)}{pl}, \\ W_{m+2m_p+2} &= (z-l)(g_c^{(2)}(z) - 1), \\ W_{m+3m_p+1} &= \frac{g_s^{(2)}(z) - p(z-l)}{pl}, \\ U_{m+2m_p+j} &= W_{m+2m_p+j} = (z-l)^{(j-1)} g_c^{(2)}(z), \\ U_{m+3m_p+j} &= W_{m+3m_p+j} = (z-l)^{(j-1)} g_s^{(2)}(z) \\ (j &= 3, 4, \dots, m_p). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Для цього випадку в розрахунках вважалося, що безрозмірна довжина оболонки  $l = 2$ . У табл. 1.3 наведено результати розрахунків при  $\delta = 1000$  перших трьох безрозмірних частот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ , функцій  $w_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) та їх похідних у точці  $z = 1.9$  для згинальних коливань оболонки ( $n = 1$ ) залежно від кількості членів

Таблиця 1.3: Значення частот  $\omega_i$ , функцій  $w_i(z)$  та її похідних у точці  $z = 1.9$  для трьох нижчих форм коливань оболонки ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $n = 1$ ,  $\delta = 1000$ ,  $m_p = 2$  залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі

$m$	$\omega_i$	$w_i$	$w_i'$	$w_i''$	$-w_i'''$
$i = 1$					
4	0.274757470	0.13284117	-0.3780437	0.070326	304.926
6	0.274757291	0.13281398	-0.3786006	0.126137	303.671
8	0.274757291	0.13281411	-0.3785960	0.125836	303.682
10	0.274757291	0.13281411	-0.3785960	0.125836	303.682
12	0.274757291	0.13281411	-0.3785960	0.125836	303.682
$i = 2$					
4	0.707898061	-0.02092539	2.219538	-6.18506	770.432
6	0.707797155	-0.02067484	2.195217	-5.57440	752.321
8	0.707797069	-0.02068875	2.196036	-5.59275	753.238
10	0.707797069	-0.02068857	2.196024	-5.59261	753.217
12	0.707797069	-0.02068857	2.196024	-5.59261	753.217
$i = 3$					
6	0.851573131	1.77506787	-7.110491	-186.394	6042.70
8	0.851566298	1.77441040	-7.129094	-184.507	6040.75
10	0.851566289	1.77441107	-7.128133	-184.563	6041.99
12	0.851566289	1.77441117	-7.128156	-184.563	6041.95
14	0.851566289	1.77441112	-7.128152	-184.563	6041.95

$m$  у регулярному базисі. Для апроксимації компонент розв'язків з великими градієнтами, локалізованими в околі точок  $z = 0$  і  $z = 2$ , використано по дві координатні функції ( $m_p = 2$ ). Нормування власних функцій проводилося з умови  $w(l) = 1$ . За таких значень  $m$  і  $m_p$  можна розраховувати і четверту похідну від функції  $w(z)$ . Отримання аналогічних даних з використанням лише регулярного базису можливе за істотного збільшення числа  $m$ . У випадку подальшого зменшення відносної товщини оболонки використання лише регулярного базису стає неефективним, оскільки втрачається стійкість обчислень. У табл. 1.4 наведено аналогічні дані для першої форми згинальних коливань оболонки, отримані при  $\delta = 100$  та  $\delta = 2000$ . Зіставляючи ці результати, можна зробити

1.4. РОЗРАХУНКИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК 47

Таблиця 1.4: Значення частоти  $\omega_1$ , функції  $w_1(z)$  та її похідних у точці  $z = 1.9$  для нижчої форми коливань оболонки при  $n = 1$ ,  $m_p = 2$ ,  $\delta = 100$  та  $\delta = 2000$  залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі

$m$	$\omega_1$	$w_1$	$-w_1'$	$w_1''$	$w_1'''$
$\delta = 100$					
4	0.275418500	0.09004540	1.1217103	-3.630205	108.688
6	0.275418486	0.09004761	1.1217452	-3.632626	108.729
8	0.275418486	0.09004759	1.1217453	-3.632605	108.729
10	0.275418486	0.09004759	1.1217454	-3.632605	108.729
12	0.275418486	0.09004759	1.1217454	-3.632603	108.729
$\delta = 2000$					
4	0.274692751	0.13040219	0.4471844	3.069208	170.676
6	0.274692513	0.13040613	0.4491070	3.064162	173.447
8	0.274692513	0.13040606	0.4490949	3.064322	173.428
10	0.274692513	0.13040606	0.4490950	3.064320	173.429
12	0.274692513	0.13040606	0.4490950	3.064320	173.429

висновок, що запропонований алгоритм розв'язування задачі має однакову ефективність як за середніх, так і за малих значень параметра при старшій похідній у вихідних рівняннях. На рис. 1.3 показано поведінку функції  $w_1(z)$  та її перших трьох похідних в околі граничних точок  $z = 2$  і  $z = 0$ . Наведені рисунки ілюструють виникнення та розвиток зони великих змін цих функцій зі зміною товщини оболонки від середніх до малих значень. Зі зменшенням товщини оболонки змінність функції та її похідних збільшується з одночасним зменшенням області цих змін. При цьому чим вищий порядок похідної, тим більших значень вона набуває. Так, максимальні значення другої та третьої похідної для закріпленого торця оболонки при  $z = 2.0$ ,  $\delta = 1000$  і  $\delta = 2000$  відповідно дорівнюють  $w'' = 302.928$ ;  $w'' = 22668.8$  і  $w'' = 584.784$ ;  $w''' = 62938.6$ . Аналогічна картина поведінки похідних від функції  $w_1(z)$  спостерігається і в околі вільного краю оболонки з тією різницею, що їх максимальні значення значно менші за максимальні значення в околі закріпленого краю оболонки.

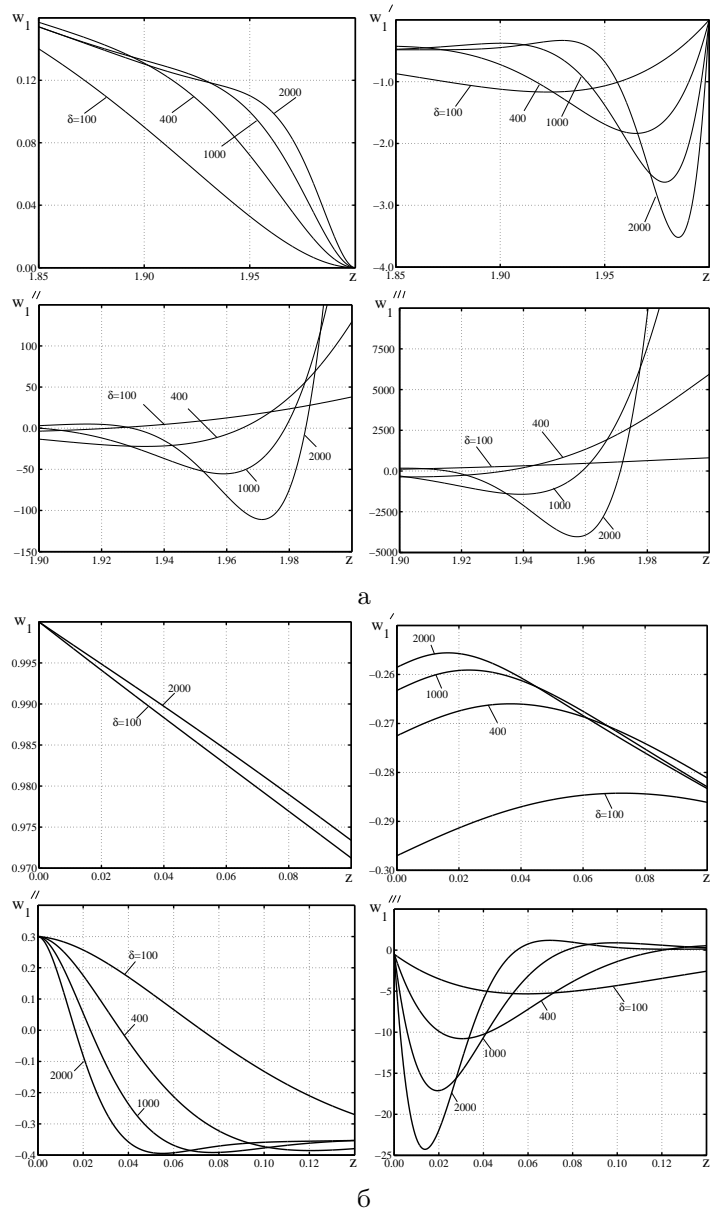


Рис. 1.3: Поведінка функції  $w(z)$  та її перших трьох похідних в околі а — закріпленого краю; б — вільного краю оболонки



Запропоновані у цьому розділі системи координатних функцій для розв'язування варіаційним методом спектральної крайової задачі про вільні коливання оболонок обертання незамкнених уздовж меридіана забезпечують за невеликої розмірності алгебраїчних систем рівномірну збіжність розв'язків та їх перших чотирьох похідних у всіх точках області інтегрування вихідних рівнянь.

Розроблений алгоритм належить до рівномірних алгоритмів за малим параметром при старшій похідній.

Порівняння розрахункових даних частот коливань з їх точними значеннями, отриманими в праці [89], свідчить про їх повний збіг.

Оскільки відносна інтенсивність крайового ефекту на вільній границі оболонки досить мала, то в монографії [21] (с. 132) зроблено висновок, що немає необхідності його враховувати в практичних розрахунках. Для оцінювання впливу крайового ефекту на вільній границі оболонки на розрахункову схему побудовано алгоритм, в якому враховуються примежові базисні функції тільки на закріпленому торці оболонки. В цьому випадку збіжність наближень Рітца істотно уповільнилася, що зумовило неможливість визначення напружено-деформованого стану оболонки. Таким чином примежовий шар на вільному краю оболонки суттєво впливає на апроксимацію шуканих функцій та їх похідних.

## 1.5 Вільні коливання зрізаної конічної оболонки

Як ще один приклад використання запропонованого алгоритму до побудови наближеного розв'язку задачі про визначення власних коливань оболонок обертання, обмежених двома паралелями, наведемо деякі результати розрахунків конічної оболонки з жорстко закріпленими торцями та кутом піврозтвору  $\alpha$ . За характерний лінійний розмір виберемо радіус  $R_0$  контуру  $L_1$ , що обмежує оболонку. Коефіцієнт Пуассона покладемо  $\nu = 0.3$ , а кут  $\alpha$  і висоту конуса  $l$  будемо варіювати. В цьому випадку для безрозмірних

величин маємо

$$r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \frac{1}{R_1} = 0; \quad \delta = \frac{1}{h}.$$

Як бачимо з розрахунків, запропоновані координатні функції дають змогу, як і у випадку циліндричної оболонки, обчислювати розв'язки та їх перші чотири похідні в кожній точці інтервалу інтегрування рівнянь. Тим самим підтверджується ефективність подання примежових функцій у формі Вішіка—Люстерніка для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Відомо, що

Таблиця 1.5: Значення перших трьох частот  $\omega_i$  згинальних коливань  $n = 1$  зрізаної конічної оболонки залежно від кількості членів у регулярному базисі  $m$ , отримані при  $l = 20; 30$ ,  $\delta = 2000$ ,  $\alpha = 15^\circ$  і  $m_p = 2$

$m$	$l = 20$			$l = 30$		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
2	0.059030	0.111711	0.146790	0.038377	0.074419	0.103706
4	0.057773	0.105058	0.144611	0.037463	0.068582	0.099733
6	0.057679	0.104800	0.143988	0.037363	0.068313	0.098588
8	0.057672	0.104789	0.143981	0.037351	0.068287	0.098567
10	0.057671	0.104788	0.143978	0.037348	0.068282	0.098562
12	0.057671	0.104788	0.143978	0.037345	0.068279	0.098559
14	0.057671	0.104788	0.143978	0.037340	0.068274	0.098557
16	0.057671	0.104788	0.143978	0.037335	0.068269	0.098554

на збіжність розв'язків впливає не тільки товщина оболонки, а й її довжина. В табл. 1.5 наведено результати розрахунку перших трьох частот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  згинальних коливань ( $n = 1$ ) зрізаної конічної оболонки залежно від кількості членів у регулярному базисі  $m$ , які отримані при таких вхідних даних  $l = 20; 30$ ,  $\delta = 2000$  і  $\alpha = 15^\circ$ . При цьому було покладено  $m_p = 2$ .

Як видно з таблиці, збільшення довжини оболонки, як і слід було очікувати, зумовлює зниження швидкості збіжності. Для стабілізації шести значущих цифр у перших трьох частотах при  $l = 20$  досить утримувати десять координатних функцій в регулярному базисі при  $m_p = 2$ . У випадку  $l = 30$  при  $m = 16$  гарантується

лише п'ять значущих цифр для перших трьох частот коливань. Щоб отримати аналогічний результат без урахування приміжових функцій необхідно утримувати значно більше членів у розкладах.

Додаткові розрахунки показали, що збільшення кута  $\alpha$  істотно не впливає на процес збіжності.

Таблиця 1.6: Мінімальні частоти зрізаної конічної оболонки для  $l = 4$  і  $\alpha = 30^\circ$  за різних її відносних товщин.

$m$	$\omega_{min}$			
	$\delta = 100,$ $n = 7$	$\delta = 400,$ $n = 11$	$\delta = 1000,$ $n = 12$	$\delta = 2000,$ $n = 15$
2	0.0494923	0.0285036	0.0183033	0.0137052
4	0.0481154	0.0260378	0.0161554	0.0115560
6	0.0481085	0.0259863	0.0161529	0.0115525
8	0.0481084	0.0259860	0.0161528	0.0115523
10	0.0481084	0.0259860	0.0161527	0.0115523
12	0.0481084	0.0259860	0.0161527	0.0115523

Результати розрахунку мінімальних безрозмірних частот і відповідних їм значень кількості хвиль у круговому напрямку конічної оболонки при  $l = 4$  і  $\alpha = 30^\circ$  наведено в табл. 1.6 залежно від кількості членів у регулярному базисі  $m$  при  $m_p = 2$ .

Як бачимо з табл. 1.6 вже при  $m = 6$  забезпечується точність обчислень до п'яти значущих цифр, як для середньої, так і для малої товщини оболонки. Порівняння даних цієї таблиці з аналогічними результатами праці [12], отриманими на базі чисельного розв'язання розглядуваної задачі, свідчить про їх повний збіг. Таким чином, запропонований алгоритм дає можливість визначення частот коливань оболонки і у випадку великої кількості хвиль  $n$  в її круговому напрямку.

На рис. 1.4 показано поведінку функції  $w_1(z^*)$  та її перших чотирьох похідних в околі жорстко закріпленого краю зрізаної конічної оболонки за кута піврозтвору конуса  $\alpha = 30^\circ$  та її висоти  $l = 4$ . Наведені рисунки ілюструють виникнення та розвиток зони великих змін цих функцій по мірі зміни товщини оболонки від середніх до малих значень. Зі зменшенням товщини оболонки

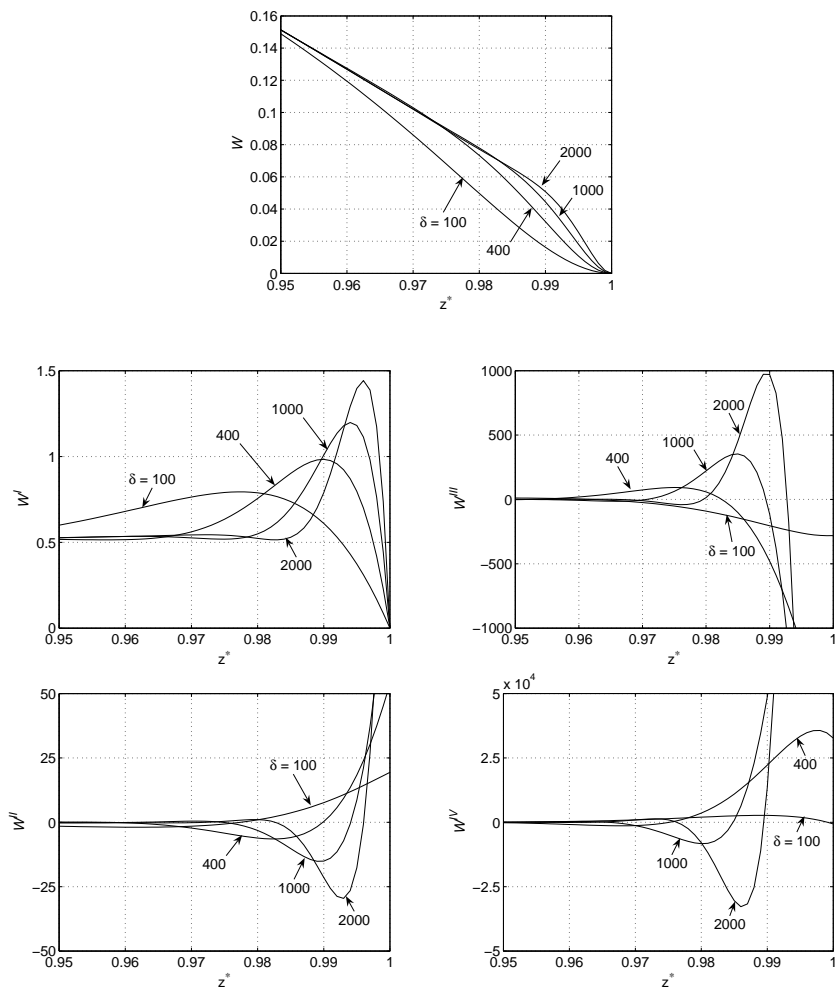


Рис. 1.4: Поведінка функції  $w_1(z^*)$  і її перших чотирьох похідних в околі жорстко закріпленого краю зрізаної конічної оболонки при  $\alpha = 30^\circ$

змінність функції та її похідних збільшується з одночасним зменшенням області цих змін. При цьому чим вищий порядок похідної, тим більших значень вона набуває.

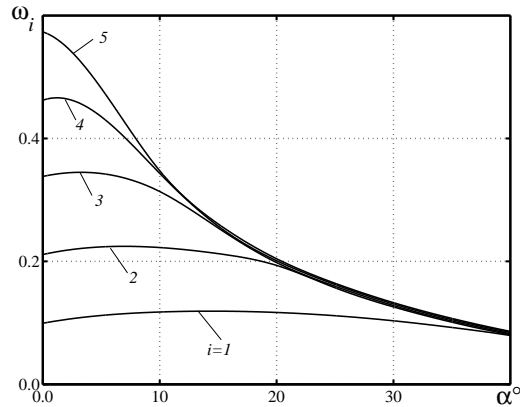


Рис. 1.5: Поведінка перших п'яти частот  $\omega_i$  оболонки залежно від кута піврозтвору конуса  $\alpha^\circ$  при  $l = 10$ ,  $h = 0.001$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$

На рис. 1.5 відображено поведінку перших п'яти безрозмірних частот  $\omega_i$  зрізаної конічної оболонки залежно від кута піврозтвору конуса  $\alpha^\circ$  при  $l = 10$ ,  $h = 0.001$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$ . Зі збільшенням кута  $\alpha$  спостерігається монотонне зменшення всіх частот. При цьому має місце істотне згущення спектра власних частот. Так, вже при  $\alpha = 40^\circ$  різниця між частотами спостерігається в третій значущій цифрі.

Таким чином, запропоновані системи координатних функцій для розв'язування варіаційним методом спектральної крайової задачі про вільні коливання оболонки обертання забезпечують за невеликого порядку алгебраїчних систем рівномірну збіжність розв'язків і їх перших чотирьох похідних у всіх точках області інтегрування вихідних рівнянь. Окрім того, розв'язки збігаються рівномірно відносно малого параметра при старшій похідній до розв'язків вихідної задачі.

## 1.6 Формальна структура загального розв'язку рівнянь для оболонок у формі купола

Під куполоподібними будемо розуміти такі оболонки, для яких у вершині є горизонтальна дотична площина і для радіусів кривини виконуються співвідношення

$$(R_1)_{s=0} = (R_2)_{s=0} = R.$$

Для таких оболонок функція  $r(s)$  буде аналітичною та непарною функцією, яку в околі точки  $s = 0$  можна подати у вигляді розкладу:

$$r(s) = s \left( 1 - \frac{1}{6R^2} s^2 + a_4 s^4 + \dots \right). \quad (1.34)$$

До такого класу оболонок належать сфера, еліпсоїд, параболоїд і гіперболоїд обертання. Зауважимо, що розглядувана спектральна задача має дві характерні особливості. Перша з них пов'язана з розкладом (1.34), який визначає ступінь виродження коефіцієнтів вихідної системи рівнянь при  $s \rightarrow 0$  і, відповідно, асимптотику обмежених розв'язків в околі полюса оболонки. Друга особливість обумовлена наявністю малого параметра при старшій похідній у рівняннях для тонкостінних оболонок.

При розв'язанні спектральних задач на основі методу Рітца вибір апроксимувальних виразів для шуканих функцій істотно впливає на кінцевий результат і обсяг обчислень, необхідних для його отримання.

Тому з'ясуємо структуру фундаментальних інтегралів вихідних рівнянь, використовуючи аналітичну теорію диференціальних рівнянь.

Перші інтеграли рівнянь (1.11), які набувають обмежених значень при  $s = 0$ , будемо шукати у вигляді прямого розкладу за параметром  $\mu$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} u_k(s); \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} v_k(s); \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} w_k(s). \quad (1.35)$$

Для визначення функцій  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  і  $w_k(s)$  підставимо розклади (1.35) у рівняння (1.11) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при різних степенях параметра  $\mu$ . При  $\mu = 0$  отримаємо систему диференціальних рівнянь четвертого порядку відносно функцій  $u_0(s)$ ,  $v_0(s)$  і  $w_0(s)$ , яку можна привести до вигляду

$$\begin{aligned}\alpha_1 \frac{du_0}{ds} + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 v_0 + \alpha_4 w_0 &= 0, \\ \beta_1 \frac{d^2 v_0}{ds^2} + \beta_2 \frac{dv_0}{ds} + \beta_3 v_0 + \beta_4 \frac{du_0}{ds} + \beta_5 u_0 + \beta_6 w_0 &= 0, \\ \gamma_1 \frac{dw_0}{ds} + \gamma_2 w_0 + \gamma_3 u_0 + \gamma_4 \frac{dv_0}{ds} + \gamma_5 v_0 &= 0.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Змінні коефіцієнти рівнянь (1.36) визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}, \quad \alpha_2 = \frac{r'}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha_3 = \frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \alpha_4 &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta_2 = \beta_1 \frac{r'}{r}, \\ \beta_3 &= \frac{1-\nu}{R_1 R_2} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)' - \frac{n^2}{r^2} + \lambda, \quad \beta_4 = -\frac{n(1+\nu)}{2r}, \\ \beta_5 &= -\frac{(3-\nu)nr'}{2r^2}, \quad \beta_6 = -\frac{n}{r} \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \gamma_1 = -\alpha_1 \left( \lambda - \frac{1-\nu^2}{R_2^2} \right), \\ \gamma_2 &= (1-\nu^2) \left[ \frac{1}{R_2^2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)' + \frac{2}{R_1 R_2} \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right] + \\ &+ \lambda \left[ \left( \frac{1}{R_1} \right)' + (2\nu-1) \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right], \\ \gamma_3 &= (\nu-1) \left( \frac{r'}{r} \right)' \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu-1}{R_1 R_2} - \frac{\nu}{R_2^2} \right) + (\nu^2-1) \frac{r'}{r} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} \right)' - \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right] + (1-\nu) \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \left( \frac{\nu}{R_1^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2^2} \right) - \\ &- \alpha_1^2 \left( \lambda + \frac{1-\nu}{R_1 R_2} - \beta_1 \frac{n^2}{r^2} \right), \\ \gamma_4 &= \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1^2 \beta_4, \quad \gamma_5 = \alpha_1 \alpha_3' - \beta_5 \alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1' \alpha_3 + \frac{r'}{r} \alpha_1 \alpha_3.\end{aligned}$$

Очевидно, що функції  $u_0(s)$ ,  $v_0(s)$  і  $w_0(s)$  визначають розв'язки для рівнянь безмоментної теорії оболонок обертання.

Визначення наступних членів розкладів (1.35) зводиться до інтегрування системи рівнянь (1.36), праві частини якої містять деякі оператори від розв'язків, знайдених на попередньому наближенні. Оскільки вищі наближення в розкладах (1.35) не впливають на структуру розв'язків нульового наближення, то далі встановимо поведінку інтегралів рівнянь (1.36) в околі точки  $s = 0$ . Для цього зведемо вихідну систему рівнянь до нормальної форми, коефіцієнти якої є аналітичними функціями при  $s \in [0, s_1]$ . Зауважимо при цьому, що з урахуванням розкладу (1.34) коефіцієнти  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_6$  і  $\gamma_4$  мають полюси першого порядку, а коефіцієнти  $\beta_3$ ,  $\beta_5$ ,  $\gamma_3$  і  $\gamma_5$  — полюси другого порядку при  $s \rightarrow 0$ . Решта коефіцієнтів є аналітичними функціями.

Введемо до розгляду нові функції

$$y_1 = u_0, \quad y_2 = v_0, \quad y_3 = sw_0, \quad y_4 = s \frac{dw_0}{ds}. \quad (1.37)$$

Тоді систему рівнянь (1.36) можна звести до системи чотирьох рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідних. У векторно-матричній формі ця система набуде вигляду

$$s \frac{d\vec{y}}{ds} = F(s, \lambda) \vec{y}. \quad (1.38)$$

Тут  $\vec{y}$  — вектор з компонентами  $y_i (i = \overline{1, 4})$ , а елементи матриці  $F(s, \lambda)$  визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} s, & f_{12} &= -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} s, & f_{13} &= -\frac{\alpha_4}{\alpha_1}, & f_{14} &= 0, \\ f_{21} &= f_{22} = f_{23} = 0, & f_{24} &= 1, & f_{31} &= -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} s^2, & f_{32} &= -\frac{\gamma_5}{\gamma_1} s^2, \\ f_{33} &= 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} s & f_{34} &= -\frac{\gamma_4}{\gamma_1} s & f_{41} &= \left( \frac{\alpha_2 \beta_4}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\beta_5}{\beta_1} \right) s^2, \\ f_{42} &= \left( \frac{\alpha_3 \beta_4}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right) s^2, & f_{43} &= \left( \frac{\alpha_4 \beta_4}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\beta_6}{\beta_1} \right) s, & f_{44} &= 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} s. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в такому поданні вихідної системи диференціальних рівнянь усі функції  $f_{pq}(s)$  є аналітичними функціями при



$s \in [0, s_1]$  і не перетворюються одночасно на нуль у точці  $s = 0$ . З вигляду рівнянь (1.38) випливає, що точка  $s = 0$  є регулярною особливою точкою для цих рівнянь [13]. Для побудови інтегралів рівнянь (1.38) будемо користуватися узагальненим методом степеневих рядів.

З урахуванням розкладу (1.34) матрицю  $F(s, \lambda)$  можна подати у вигляді розкладу за парними степенями незалежної змінної  $s$ :

$$F(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i} s^{2i}. \quad (1.39)$$

Тут матриці  $F_{2i}$  мають таку структуру:

$$F_0 = \begin{vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & f_{13}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31}^{(0)} & f_{32}^{(0)} & f_{33}^{(0)} & f_{34}^{(0)} \\ f_{41}^{(0)} & f_{42}^{(0)} & f_{43}^{(0)} & 0 \end{vmatrix}, \quad F_{2i} = \begin{vmatrix} f_{11}^{(2i)} & f_{12}^{(2i)} & f_{13}^{(2i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{(2i)} & f_{32}^{(2i)} & f_{33}^{(2i)} & f_{34}^{(2i)} \\ f_{41}^{(2i)} & f_{42}^{(2i)} & f_{43}^{(2i)} & f_{44}^{(2i)} \end{vmatrix}$$

( $k = 1, 2, \dots$ ),

де

$$\begin{aligned} f_{11}^{(0)} &= -1, \quad f_{12}^{(0)} = -n, \quad f_{13}^{(0)} = \frac{\lambda R}{1 + \nu} - \frac{2}{R}, \quad f_{31}^{(0)} = \frac{n^2(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, \\ f_{32}^{(0)} &= \frac{n(1 - \nu^2)}{2Rb_0^{(0)}}, \quad b_0^{(0)} = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R^2}, \quad f_{33}^{(0)} = 1, \quad f_{34}^{(0)} = f_{32}^{(0)}, \\ f_{41}^{(0)} &= 2n, \quad f_{42}^{(0)} = 1 + n^2, \quad f_{43}^{(0)} = \frac{n\lambda R}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Вирази для наступних елементів матриць  $F_{2i}$  тут не наводяться через їх громіздкість.

Розв'язок системи (1.38) будемо шукати у вигляді

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} s^k \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (1.40)$$

У цих розкладах  $\sigma$  і  $g_{i,k}$  — невизначені сталі. Скориставшись далі формулою Коші для множення степеневих рядів, отримаємо

$$f_{p,q} y_q = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k g_{q,j} f_{p,q}^{(k-j)} s^k \quad (p, q = \overline{1, 4}). \quad (1.41)$$

Підстановка рядів (1.40) і (1.41) у рівняння (1.38) і прирівнювання коефіцієнтів при  $s^\sigma$  в обох частинах отриманої рівності призводить до однорідної алгебраїчної системи відносно перших коефіцієнтів розкладів (1.40), яка в матричному поданні матиме вигляд

$$(F_0 - \sigma E)\vec{g}_0 = 0, \quad (1.42)$$

де  $E$  — одинична матриця;  $\vec{g}_0$  — вектор з компонентами  $g_{i,0}$  ( $i = \overline{1,4}$ ).

Прирівнювання коефіцієнтів при  $s^{\sigma+k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) приводить до неоднорідних алгебраїчних систем вигляду

$$[F_0 - (\sigma + k)]\vec{g}_k = \vec{d}_k, \quad (1.43)$$

Тут  $\vec{g}_k$  — вектори з компонентами  $g_{i,k}$ , а  $\vec{d}_k$  — вектори з компонентами  $d_i^{(k)}$ , які визначаються за формулами

$$d_i^{(k)} = - \sum_{q=1}^4 \sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)}.$$

Таким чином, визначення показника  $\sigma$  і коефіцієнтів розкладів (1.40) звелось до розв'язування однорідної алгебраїчної системи (1.42) відносно вектора  $\vec{g}_0$  і послідовності неоднорідних систем (1.43) відносно векторів  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), праві частини яких лінійно виражаються через  $k-1$  розв'язки попередніх алгебраїчних систем.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (1.42) отримуємо характеристичне рівняння четвертого порядку відносно показника  $\sigma$ :

$$a_4 \sigma^4 + a_3 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0 = 0, \quad (1.44)$$

де

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = -1 - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} - f_{42}^{(0)}, \\ a_1 &= -f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)}, \quad a_0 = -f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} + \\ &+ f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{42}^{(0)} + f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} + f_{42}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{43}^{(0)}. \end{aligned}$$

З урахуванням виразів для коефіцієнтів  $f_{ij}^{(0)}$  після низки перетворень можна показати, що корені рівняння (1.44), які розташовані в порядку їх зменшення, набувають таких цілочислових значень:

$$\sigma_1 = n + 1, \sigma_2 = n - 1, \sigma_3 = -(n - 1), \sigma_4 = -(n + 1). \quad (1.45)$$

Покладаючи в рівняннях (1.42) і (1.43)  $\sigma = \sigma_1$  і розв'язуючи послідовності алгебраїчних рівнянь можна переконатися в тому, що перший розв'язок системи рівнянь (1.38) для функцій  $y_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \\ y_2^{(1)} &= s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}, \\ y_3^{(1)} &= s^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(1)} s^{2k}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Тут і надалі верхній індекс при  $y_i$  і  $g_{i,k}$  означатиме номер знайденого частинного розв'язку.

Зауважимо, що ряди (1.46) будуть збіжними рядами в області збіжності для рядів елементів матриці  $F(s, \lambda)$ .

Для отримання інших інтегралів рівнянь, коли корені характеристичного рівняння відрізняються від найбільшого кореня на ціле число, в загальному випадку необхідно знизити порядок вихідної системи за допомогою одного знайденого її розв'язку, а потім для отримання розв'язку цієї нової системи знову застосувати описаний вище прийом. На цьому шляху отримуються розв'язки, які будуть мати логарифмічні члени. Так можна діяти лише тільки тоді, коли вдається переконатися в тому, що для випадку  $\sigma = \sigma_2$  розв'язків неоднорідних систем (1.43) не існує. В іншому випадку виникає небезпека втрати обмеженого в точці  $s = 0$  інтеграла, що призведе до помилкового подання загального розв'язку системи (1.38) в околі полюса оболонки.

Покладемо в рівняннях (1.42) і (1.43)  $\sigma = \sigma_2$  і покажемо, що в цьому випадку існує обмежений в точці  $s = 0$  інтеграл системи (1.38). Оскільки при  $\sigma = \sigma_2$  визначник системи (1.42) дорівнює нулю, то існує її нетривіальний розв'язок. При цьому отримаємо

$$g_{1,0}^{(2)} = -g_{2,0}^{(2)}, \quad g_{3,0}^{(2)} = 0. \quad (1.47)$$

При  $k = 1$  система (1.43) буде однорідною системою рівнянь, визначник якої не дорівнює нулю. Тому

$$g_{1,1}^{(2)} = g_{2,1}^{(2)}, \quad g_{3,1}^{(2)} = 0. \quad (1.48)$$

Для випадку  $k = 2$  маємо неоднорідну алгебраїчну систему четвертого порядку, визначник якої дорівнює нулю, бо  $\sigma_2 + 2$  є коренем характеристичного рівняння. Після нескладних, але досить громіздких перетворень можна показати, що ранг матриці, складеної з коефіцієнтів рівнянь при невідомих дорівнює трьом і він збігається з рангом розширеної матриці. Отже, отримана система є сумісною і вона допускає існування нетривіального розв'язку.

При  $k = 3$  маємо однорідну систему з нерівним нулю визначником. Тоді

$$g_{1,3}^{(2)} = g_{2,3}^{(2)} = g_{3,3}^{(2)} = 0.$$

Скориставшись методом математичної індукції, можна показати, що другий регулярний розв'язок для функцій  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  матиме таку структуру:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(2)} s^{2k}, \\ y_2^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(2)} s^{2k}, \\ y_3^{(2)} &= s^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(2)} s^{2k}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

При цьому перші коефіцієнти цих розкладів повинні задовольняти умови (1.47).

Розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь, які відповідають кореням характеристичного рівняння  $\sigma_3$  і  $\sigma_4$ , будуть необмеженими при  $s = 0$ .

Таким чином, за допомогою прямого розкладу розв'язків за малим параметром (1.35) отримані асимптотичні подання (1.46) і (1.49) двох регулярних розв'язків рівнянь неосесиметричних коливань тонкої пружної оболонки в околі вершини купола. Відповідно до теорії сингулярно збурених рівнянь [13], [17] два інші інтеграли вихідних рівнянь повинні включати в себе експоненційний множник. Ці розв'язки мають таке формальне подання [22]:

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ v^{(j)}(s) &= \mu^2 \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} v_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\}, \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right\} \quad (j = 3, 4). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Тут  $u_{k,i}^{(j)}$ ,  $v_{k,i}^{(j)}$ ,  $w_{k,i}^{(j)}$  — невідомі коефіцієнти розкладів;  $j$  — індекс, який вказує на номер знайденого частинного розв'язку,

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} e^{\beta(s)} \cos(\beta(s)) & \text{при } j = 3, \\ e^{\beta(s)} \sin(\beta(s)) & \text{при } j = 4, \end{cases}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^s |b(t)|^{1/4} dt, \quad b(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s)},$$

$$b(s) < 0 \quad \text{при } s \in [0, s_1].$$

Ці розв'язки за малих значень параметра  $\mu$  є сильно осцилюючими і експоненціально затухаючими при віддаленні від краю оболонки. Тому не можна розраховувати на те, що класичні методи розв'язування такої спектральної задачі будуть однаково добре працювати в усій області зміни параметра  $\mu$ . За малих показників, експонента обчислюється рядом Тейлора, тоді як за великих — за допомогою апроксимації Паде.

У випадку оболонки обертання, для яких інтеграл у виразі для  $\beta(s)$  не обчислюється в елементарних функціях, функції  $\gamma^{(j)}(s)$  відповідно до праці [17] можна подати у вигляді

$$\gamma^{(j)}(s) = \gamma_0^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k^{(j)}(\eta), \quad (1.51)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(j)} &= \gamma^{(j)}(\beta(s) = \beta_0(s)); & \beta_0(s) &= p(s - s_1); \\ p &= \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \sqrt[4]{|b(s_1)|}; & \eta &= \frac{s - s_1}{\mu}, \end{aligned}$$

$P_k^{(j)}(\eta)$  — поліном зі сталими коефіцієнтами, що залежать від коефіцієнтів рівнянь (1.11) і їх похідних у точці  $s = s_1$ .

Під час побудови інтегралів (1.50) передбачалося, що область має такі геометричні параметри, за яких можна знехтувати впливом функцій примежового шару на поведінку розв'язків у околі її полюса. Для тих оболонки, для яких ця умова не виконується, користуватися формулами (1.50) не можна. В цьому випадку необхідно будувати два обмежених інтеграла в околі точки  $s = 0$  з великою змінністю, які ростуть при віддаленні від полюса оболонки. Оскільки точка  $s = 0$  є регулярною особливою точкою для вихідних рівнянь, то такі інтеграли повинні володіти встановленою асимптотикою в околі цієї точки. Тому інтеграла з великою змінністю замість експоненціального множника повинні мати множник іншої структури, що забезпечує асимптотику розв'язків при  $s \rightarrow 0$  і аналітичність функцій  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  і  $w_k(s)$ , що стоять при цьому множнику. З огляду на це асимптотичне інтегрування вихідних рівнянь в цьому випадку істотно ускладнюється.

Розглянемо випадок осесиметричних коливань оболонки обертання ( $n = 0$ ), що мають форму купола. У цьому випадку система рівнянь (1.11) набуває вигляду

$$\begin{aligned} L_{11}^{(0)}u + L_{13}w - \lambda u &= 0, \\ L_{31}u + (L_{33}w + c^2 K_{33}^{(0)}w) - \lambda w &= 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Тут верхній індекс при операторах  $L_{11}^{(0)}$  та  $K_{33}^{(0)}$  означає, що вони отримані із  $L_{11}$  та  $K_{33}$  при  $n = 0$ . Перший інтеграл рівнянь (1.52)

для функцій  $u(s)$  і  $w(s)$  знаходимо у вигляді прямого розкладу за параметром  $\mu$  (1.35). Для визначення функцій  $u_k(s)$  та  $w_k(s)$  підставимо розклади (1.35) у рівняння (1.52). При  $\mu = 0$  отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно  $u_0(s)$  та  $w_0(s)$ . Зауважимо, що два коефіцієнти цих рівнянь мають полюси першого порядку, тоді як інші є аналітичними функціями. Цю систему диференціальних рівнянь зводимо до системи двох рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних. При цьому коефіцієнти рівнянь є аналітичними функціями при  $s \in [0, s_1]$ , які одночасно не дорівнюють нулю при  $s \rightarrow 0$ , а при похідних стоїть множник із незалежною змінною. З вигляду рівнянь випливає, що точка  $s = 0$  є для них регулярною особливою точкою. Для знаходження інтегралів цих рівнянь використовується узагальнений метод степеневих рядів. Корені характеристичного рівняння набувають таких значень  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = -1$ . При  $\sigma = \sigma_1$  отримуємо наступне формальне подання першого інтеграла вихідних рівнянь:

$$u(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{2k-1}, \quad w(s) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k s^{2k}, \quad (1.53)$$

де  $c_k$  і  $d_k$  — ненульові сталі.

Для другого кореня  $\sigma_2 = -1$  отримаємо другий інтеграл для вихідних рівнянь, однак він не буде обмеженим при  $s \rightarrow 0$ .

Два інші інтеграли для функцій  $u(s)$  та  $w(s)$ , що локалізовані в околі границі оболонки при  $s = s_1$  мають формальне подання, які наведено в формулах (1.50).

## 1.7 Вільні коливання куполоподібних оболонок

Отримані вище результати якісного характеру про поведінку інтегралів рівнянь, що описують вільні коливання тонкостінної оболонки обертання в формі купола, можна використати під час побудови координатних функцій в методі Рітца.

Нижче наведемо алгоритм розрахунку осесиметричних та несесиметричних коливань куполоподібних оболонок. Як приклад

наведемо розрахунки оболонки у формі сферичного сегмента.

### 1.7.1 Осесиметричні коливання оболонки у формі купола

Побудова координатних функцій здійснюється на підставі підпорядкування загального розв'язку задачі головним граничним умовам. З цієї вимоги знаходимо набори координатних функцій для методу Рітца.

Унаслідок застосування описаної вище процедури система базисних функцій для апроксимації функції  $w(s)$  матиме таку структуру:

$$\{W_i(s)\}_{i=1}^N = \{W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}\}. \quad (1.54)$$

У виразі (1.54) виділено три групи функцій, які відокремлено одна від одної крапкою з комою. Перша група з  $m$  функцій являє собою регулярний базис, утворений з поліномів Лежандра з певною вагою функцією. Друга і третя групи пов'язані з апроксимацією примежових розв'язків у околі точки  $s = s_1$ . Кількість функцій в цих групах позначено через  $m_p$ . Аналогічну структуру мають і координатні функції для знаходження функції  $u(s)$ .

Вище встановлено, що регулярна частина розв'язків у околі полюса оболонки має вигляд

$$u = s(a_1 + a_2s^2 + a_3s^4 + \dots), \quad w = c_1 + c_2s^2 + c_3s^4 + \dots \quad (1.55)$$

Явні вирази для координатних функцій  $U_j(s)$  і  $W_j(s)$  з урахуванням асимптотики (1.55) і примежових функцій у формі Вішіка—Люстерніка будуть мати вигляд

$$U_j = s(s^2 - s_1^2)P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right),$$

$$W_j = (s^2 - s_1^2)^2 P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right) \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$



$$\begin{aligned}
U_{m+1} &= g_c - \frac{s}{s_1}, & U_{m+2} &= (s - s_1)g_c, \\
U_{m+m_p+1} &= g_s, & U_{m+m_p+2} &= (s - s_1)g_s, \\
W_{m+1} &= g_c - 1 - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+2} &= (s - s_1)g_c - \frac{1}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+m_p+1} &= g_s - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+m_p+2} &= (s - s_1)g_s, \\
U_{m+j} &= W_{m+j} = (s - s_1)^{j-1}g_c, \\
U_{m+m_p+j} &= W_{m+m_p+j} = (s - s_1)^{j-1}g_s \\
&\quad (j = 3, 4, \dots, m_p).
\end{aligned}$$

Тут функції  $g_c(s)$  і  $g_s(s)$  обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
g_c &= \exp\{p(s - s_1)\} \cos p(s - s_1), \\
g_s &= \exp\{p(s - s_1)\} \sin p(s - s_1), \\
p = p(\lambda) &= \sqrt[4]{\left| \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_1)} \right|} / (\mu\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

а  $P_j(z)$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  з ортогональністю на інтервалі  $[0, s_1]$  многочлени Лежандра.

При цьому елементи  $a_{ij}$  матриці  $A$  і  $b_{ij}$  матриці  $B$  отриманої алгебраїчної системи обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, & a_{i+N,j+N} &= \int_0^{s_1} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds, \\
b_{i,j} &= \int_0^{s_1} U_j, U_i r ds, & b_{i+N,j+N} &= \int_0^{s_1} W_j, W_i r ds \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, N, j \geq i), \\
a_{i,j+N} &= \int_0^{s_1} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds, & b_{i,j+N} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N).
\end{aligned}$$

Нижче наведено результати розрахунку за запропонованим вище алгоритмом частот і форм коливань сферичного купола з жорстко закріпленим краєм. Як характерний лінійний розмір оболонки виберемо її радіус. Відношення радіуса оболонки до її товщини позначимо через  $\delta$ . Кут між віссю симетрії оболонки і нормаллю до її середньої поверхні позначимо через  $\vartheta$ . Значення цього кута для закріпленої нормалі оболонки позначимо через  $\vartheta_f$ . У всіх наведених розрахунках коефіцієнт Пуассона  $\nu$  покладався таким, що дорівнює 0.3. У цьому випадку безрозмірні величини мають вигляд  $r(s) = \sin \vartheta$ ,  $R_1 = R_2 = 1$ .

Таблиця 1.7: Значення нижчих частот коливань сферичної оболонки в залежності від кількості членів  $m$  у регулярному базисі при  $m_p = 2$  і  $\vartheta_f = 135^\circ$

$m$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$\delta = 100$					
2	0.424822	0.810329	0.935994	1.036195	1.595648
4	0.424767	0.801161	0.886484	0.925515	1.091895
6	0.424767	0.801159	0.885994	0.920509	0.951959
8	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.943053
10	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
12	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
$\delta = 1000$					
2	0.407475	0.810061	0.962506	1.067890	1.541983
4	0.407312	0.791919	0.880269	0.925323	0.959443
6	0.407312	0.791908	0.878332	0.910762	0.929201
8	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925902
10	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
12	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
$\delta = 2000$					
2	0.405188	0.810334	0.966930	1.070927	1.562291
4	0.404998	0.790777	0.879828	0.926367	0.960434
6	0.404998	0.790765	0.877607	0.910297	0.929309
8	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925456
10	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388
12	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388

У табл. 1.7 наведено значення перших п'яти безрозмірних ча-

стот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  осесиметричних коливань сферичного купола залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі при  $\vartheta_f = 135^\circ$  для трьох значень параметра  $\delta$ . Для апроксимації розв'язків, локалізованих в околі точки  $\vartheta_f$ , що мають великі градієнти, використано дві прилежові координатні функції ( $m_p = 2$ ).

Таблиця 1.8: Значення  $w_1$ ,  $T_1$ ,  $M_1$ ,  $Q_1$  у точці  $\vartheta^* = 0.95$  при  $\vartheta_f = 135^\circ$  для першої форми коливань залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі ( $m_p = 2$ )

$m$	$w_1$	$T_1$	$M_1$	$Q_1$
$\delta = 100$				
2	-0.48655	0.32695	$-0.3572 \cdot 10^{-3}$	$0.1540 \cdot 10^{-2}$
4	-0.47964	0.32650	$-0.3433 \cdot 10^{-3}$	$0.1330 \cdot 10^{-2}$
6	-0.47954	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1332 \cdot 10^{-2}$
8	-0.47953	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
10	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
12	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
$\delta = 1000$				
2	-0.66267	0.30698	$0.2381 \cdot 10^{-5}$	$0.1218 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66974	0.31265	$0.1276 \cdot 10^{-5}$	$-0.1936 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66974	0.31285	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2058 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66972	0.31286	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2078 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66971	0.31286	$0.1254 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2084 \cdot 10^{-4}$
$\delta = 2000$				
2	-0.65883	0.30248	$0.7736 \cdot 10^{-8}$	$0.1982 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66188	0.31066	$0.6321 \cdot 10^{-7}$	$0.1384 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66158	0.31068	$0.6789 \cdot 10^{-7}$	$0.1371 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66154	0.31067	$0.6874 \cdot 10^{-7}$	$0.1372 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66153	0.31067	$0.6908 \cdot 10^{-7}$	$0.1374 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66153	0.31067	$0.6913 \cdot 10^{-7}$	$0.1375 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66153	0.31067	$0.6901 \cdot 10^{-7}$	$0.1376 \cdot 10^{-4}$

Значення нормального прогину  $w_1$ , меридіонального зусилля  $T_1$ , згинального моменту  $M_1$  і перерізувальної сили  $Q_1$  у точці  $\vartheta^* = \vartheta/\vartheta_f = 0.95$  при  $\vartheta_f = 135^\circ$  для першої форми коливань оболонки залежно від кількості членів  $m$  у регулярному базисі за фіксованої кількості прилежових базисних функцій ( $m_p = 2$ )

наведено в табл. 1.8 для трьох значень параметра  $\delta$ .

Нормування власних форм коливань оболонки тут і далі вибиралося так, щоб максимальний прогин оболонки в напрямку зовнішньої нормалі дорівнював одиниці.

Дані табл. 1.7 і 1.8 свідчать про те, що запропонований алгоритм розв'язування даної спектральної задачі має однакову збіжність як за малих, так і за середніх значень відносної товщини оболонки.

Аналогічна збіжність, наведених в табл. 1.8 величин, спостерігається і за інших значень незалежної змінної  $\vartheta$ . Отже, побудовані вище системи координатних функцій забезпечують поточкову збіжність не тільки самих розв'язків, а і їх похідних до третього порядку. Це дає змогу визначати сили і моменти в усіх точках серединної поверхні оболонки. Таким чином, за вдалого вибору системи базисних функцій варіаційний метод дає можливість побудувати наближений розв'язок задачі, який в певному сенсі близький до її точного розв'язку.

Також зауважимо, що аналогічні результати для даної оболонки можна отримати з використанням тільки регулярних координатних функцій ( $m_p = 0$ ). Однак побудований на такій основі алгоритм розв'язування задачі не матиме властивості рівномірної збіжності за параметром  $\mu$ . Для отримання результатів із заданою точністю, кількість членів у розкладах Рітца з використанням тільки регулярного базису необхідно збільшити відносно базису з приміжовими функціями в 1.5; 2 і 3 рази при  $\delta = 100; 1000$  і  $2000$ , відповідно. У випадку подальшого зменшення відносної товщини оболонки використання тільки регулярного базису для отримання розв'язків розглядуваної якості стає неефективним, оскільки може відбутися втрата стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень обчислюваних величин. Пояснення цього факту впливає з того, що точні розв'язки, які включають в себе експоненціальні функції з великим аргументом, погано апроксимуються рядами Тейлора. Якщо в практичних розрахунках немає необхідності обчислювати похідні від форм коливань, то відповідно до результатів табл. 1.7 і 1.8 можна істотно знизити порядок розв'язуваної алгебраїчної системи.

На рис. 1.6 показано поведінку функцій  $T_1(\vartheta^*)$ ,  $M_1(\vartheta^*)$  і  $Q_1(\vartheta^*)$

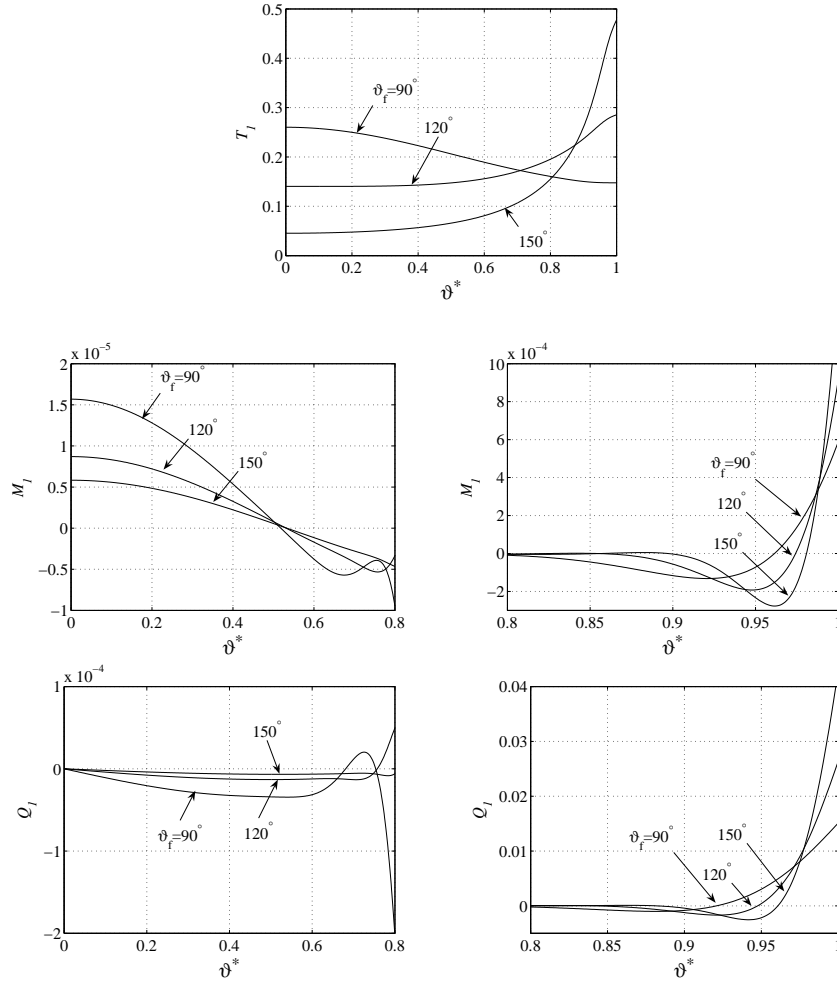


Рис. 1.6: Розподіл зусиль  $T_1$ , моментів  $M_1$  і перерізувальних сил  $Q_1$  вздовж меридіана оболонки для різних значень кута  $\vartheta_f$  при  $\delta = 150$

залежно від значення аргументу  $\vartheta^* = \vartheta/\vartheta_f$  за різних значень кута  $\vartheta_f$  закріпленої паралелі оболонки і при  $\delta = 150$ . З наведених графіків випливає, що всі розглядувані величини набувають ма-

ксимальних значень в околі закріпленого контуру оболонки (за винятком зусилля  $T_1$  при  $\vartheta_f = 90^\circ$ ). При цьому в зазначеному околі у міру зростання кута  $\vartheta_f$  збільшуються і значення цих величин. Зазначимо, що під час розрахунку замкнутих у полюсі оболонок обертання безпосереднє застосування методу ортогональної прогонки або інших наближених методів розв'язування такої спектральної задачі є неможливим, оскільки в цьому випадку система вихідних диференціальних рівнянь має регулярну особливу точку. Тому в ряді праць [46], [109], приймається додаткове припущення, що наявність малого отвору в полюсі оболонки не суттєво впливає на характер власних коливань замкнутих в полюсі оболонок. При цьому на паралелі, що відповідає цьому отвору ( $\vartheta = \vartheta_0$ ), ставляться граничні умови вільного краю:

$$(T_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = (M_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = (Q_1)_{\vartheta=\vartheta_0} = 0. \quad (1.56)$$

Виходячи зі встановленої вище поведінки розв'язків  $u(\vartheta)$  і  $w(\vartheta)$  в околі полюса оболонки, можна показати, що при  $\vartheta \rightarrow 0$  перерізувальна сила  $Q_1$  наближається до нуля, тоді як зусилля  $T_1$  і момент  $M_1$  наближаються до своїх граничних значень. Розрахунки свідчать (рис. 1.6), що функція  $M_1(\vartheta)$  в околі полюса оболонки набуває малих значень. Таким чином, для вихідної оболонки за малих значень кута  $\vartheta$  перша умова (1.56) не виконується, а друга і третя умови виконуються наближено. Проте порівняння частот коливань сферичної оболонки, які отримано в цій праці і в праці [46], підтверджує правомірність застосування в даному випадку розрахункової схеми, базованої на заміні вихідної оболонки оболонкою з малим вільним отвором в околі полюса. Можливо невідповідність умов (1.56) дійсній поведінці силових факторів оболонки під час  $\vartheta \rightarrow 0$  може позначитися при визначенні форм коливань оболонки і особливо їх похідних в околі її полюса. Загалом у процесі розрахунку інтегральних характеристик при коливаннях оболонки, згадана вище наближена розрахункова схема куполоподібних оболонок є виправданою.

Таким чином, розроблений алгоритм розв'язування задачі про осесиметричні коливання куполоподібних оболонок обертання на базі варіаційного методу належить до рівномірних методів відносно малого параметра при старшій похідній.

### 1.7.2 Неосесиметричні коливання сферичного сегмента

Для знаходження структури загального розв'язку системи (1.11) складемо лінійну комбінацію інтегралів (1.46), (1.49) і (1.50). З урахуванням подання примежових функцій у формі Вішіка—Люстерніка (1.51) загальний розв'язок можна записати так:

$$\begin{aligned}
 [u, v, w] = & R[u, v, w] + \\
 & + \exp^{\beta_0(s)} \cos \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,1}, v_{i,1}, w_{i,1}] (s - s_1)^i + \\
 & + \exp^{\beta_0(s)} \sin \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,2}, v_{i,2}, w_{i,2}] (s - s_1)^i.
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

У квадратних дужках наведено функції та відповідні їм невідомі коефіцієнти, які включають в себе також параметр  $\mu$ . Тут  $R[u, v, w]$  — регулярна частина загального розв'язку, структуру якого можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} u = s^{n-1}(a_1 + a_2 s^2 + a_3 s^4 + \dots), \\ v = s^{n-1}(b_1 + b_2 s^2 + b_3 s^4 + \dots), \\ w = s^n(c_1 + c_2 s^2 + c_3 s^4 + \dots). \end{cases} \tag{1.58}$$

При цьому перші коефіцієнти при  $s^{(n-1)}$  підпорядковані умові

$$b_1 = -a_1. \tag{1.59}$$

Подання (1.58) показують, що виродження деяких коефіцієнтів рівнянь (1.11) при  $s \rightarrow 0$  породжує цілком певну асимптотику шуканих розв'язків, що залежить від кількості хвиль  $n$  оболонки в круговому напрямку. Ця асимптотика з урахуванням залежності (1.59) забезпечує скінченність переміщень і деформацій оболонки в її полюсі. Зазначимо, що асимптотика розв'язків (1.58) збігається з асимптотикою [125], яку отримано на підставі використання спрощеного варіанта методу Фробеніуса.

По суті, подання розв'язків у формі (1.57) включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні

сингулярно збурених рівнянь. Надалі невизначені коефіцієнти в розкладах (1.57) і (1.58) будемо знаходити з головних граничних умов задачі та умов стаціонарності відповідного квадратичного функціонала.

Зауважимо, що якщо розв'язки шукати у вигляді розкладу в степеневі ряди (за винятком перших членів ряду для забезпечення скінченності деформацій при  $s \rightarrow 0$ ), то побудовані на такій основі бази для апроксимації розв'язків відповідно до подання (1.58) будуть неповними. Це зумовлює повільну збіжність рядів для шуканих функцій.

Вплив примежових координатних функцій на знаходження розв'язків спектральної задачі оцінено в ході розрахунку коливань циліндричної та зрізаної конічної оболонок, а також визначення осесиметричних коливань сферичного купола. При цьому було встановлено, що запропоновані алгоритми відносяться до рівномірних алгоритмів за малим параметром  $\mu$ . У зв'язку з цим, нижче дослідимо можливість регулярного базису, який побудований на базі встановленої вище асимптотичної поведінки розв'язків у околі полюса оболонки.

Побудова систем координатних функцій здійснюється на основі підпорядкування загального розв'язку головним граничним умовам вихідної задачі.

У відповідності зі сказаним вище, функції  $u(s)$ ,  $v(s)$  і  $w(s)$  можна записати у вигляді відрізків узагальнених рядів:

$$u = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s); \quad v = \sum_{j=1}^N x_{N+j} V_j(s); \quad w = \sum_{j=1}^N x_{2N+j} W_j(s), \quad (1.60)$$

де

$$\begin{aligned} U_1(s) &= (s^2 - s_1^2) s^{n-1}; & W_1(s) &= (s^2 - s_1^2)^2 s^n; \\ U_{j+1}(s) &= U_j(s) s^2; & W_{j+1}(s) &= W_j(s) s^2 \\ & & (j &= \overline{1, N-1}). \end{aligned}$$

Тут  $x_j$  — невизначені сталі,  $U_j(s)$ ,  $V_j(s)$ ,  $W_j(s)$  — системи координатних функцій, що задовольняють лише кінематичні граничні умови задачі при  $s = s_1$ . Крім того, згідно з асимптотикою (1.58)



у розкладах (1.60) слід покласти

$$x_{N+1} = -x_1. \quad (1.61)$$

Оскільки граничні умови для  $u(s)$  і  $v(s)$  мають однаковий вигляд, то

$$V_j(s) = U_j(s) \quad (j = \overline{1, N}).$$

Наведені системи координатних функцій виявляються придатними лише для тих випадків, коли в розкладах (1.60) можна утримувати невелику кількість членів  $N$ , бо за великих значень  $N$  спостерігається втрата стійкості обчислень. Тому надалі, не порушуючи повноти подання розв'язків, степеневі функції замінимо відповідними многочленами Лежандра, які є лінійними комбінаціями степеневих функцій. Побудовані таким чином системи базисних функцій дозволяють істотно збільшити кількість членів у розкладах (1.60) по відношенню до степеневого базису і тим самим розширити діапазон вхідних параметрів задачі, за яких можна проводити розрахунки з заданою точністю.

Ці системи координатних функцій можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= s^{n-1}(s^2 - s_1^2); \\ U_i(s) &= U_1(s) \left[ P_{2i-2}\left(\frac{s}{s_1}\right) - P_{2i-2}(0) \right]; \\ W_1(s) &= s^n(s^2 - s_1^2)^2; \\ W_i(s) &= W_1(s) \left[ P_{2i-2}\left(\frac{s}{s_1}\right) - P_{2i-2}(0) \right] \\ &(i = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (1.62)$$

де  $P_j(s)$  – многочлени Лежандра.

З необхідних умов стаціонарності функціонала  $I$  отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(A - \lambda B)\vec{X}^T = 0, \quad (1.63)$$

де вектор  $\vec{X}$  має коефіцієнти

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N, -x_1, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots, x_{2N}, x_{2N+1}, x_{2N+2}, \dots, x_{3N}\}.$$

Елементи  $\alpha_{i,j}$  верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці  $A$  можна подати:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_1, U_1) - 2\Psi_{12}(U_1, U_1) + \Psi_{22}(U_1, U_1)] r ds, \\
\alpha_{1,j} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_j, U_1) - \Psi_{12}(U_1, U_j)] r ds, \\
\alpha_{1,j+N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{12}(V_j, U_1) - \Psi_{22}(V_j, U_1)] r ds \quad (j = \overline{2, N}), \\
\alpha_{1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{13}(W_j, U_1) - \Psi_{23}(W_j, U_1)] r ds \quad (j = \overline{1, N}), \\
\alpha_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds \quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{i, N}), \\
\alpha_{i,j+N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{12}(V_j, U_i) r ds \quad (i, j = \overline{2, N}), \\
\alpha_{i,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{13}(W_j, U_i) r ds \quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{1, N}), \\
\alpha_{i+N-1,j+N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{22}(V_j, V_i) r ds \quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{i, N}), \\
\alpha_{i+N-1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{23}(W_j, V_i) r ds \quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{1, N}), \\
\alpha_{i+2N-1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{33}(W_j, W_i) r ds \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{i, N}). \quad (1.64)
\end{aligned}$$

Симетричність матриці  $A$  випливає з симетричності вихідного оператора, породженого диференціальним рівнянням, визначено-

го на класі функцій, що задовольняють граничні умови задачі та підпорядковуються встановленим вище властивостям поведінки розв'язків у околі полюса оболонки.

У свою чергу ненульові елементи  $\beta_{i,j}$  верхньої частини симетричної матриці  $B$  обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= 2 \int_0^{s_1} U_1^2 r ds, \quad \beta_{1,j} = \int_0^{s_1} U_j U_1 r ds, \\ \beta_{1,j+N-1} &= - \int_0^{s_1} V_j V_1 r ds \quad (j = \overline{2, N}), \\ \beta_{i,j} &= \int_0^{s_1} U_i U_j r ds, \quad \beta_{i+N-1,j+N-1} = \int_0^{s_1} V_j V_i r ds \\ &\quad (i = \overline{2, N}, j = \overline{i, N}), \\ \beta_{i+2N-1,j+2N-1} &= \int_0^{s_1} W_i W_j r ds \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{i, N}). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Оскільки координатні функції в виразах (1.64) і (1.65) є многочленами, то під час обчислення інтегралів доцільно користуватися квадратурною формулою Гаусса.

Нижче наведено результати розрахунку частот і форм коливань сферичного сегмента з жорстко закріпленим торцем.

У табл. 1.9 наведено значення перших п'яти безрозмірних частот  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) неосесиметричних коливань ( $n = 1$ ) розглядуваної оболонки залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (1.60) при  $\vartheta_f = 90^\circ$  для трьох значень параметра  $\delta$ . Як бачимо з таблиці регулярні координатні функції, побудовані з урахуванням асимптотичної поведінки шуканих розв'язків у околі полюса оболонки, дають можливість розраховувати з високим ступенем точності нижчі частоти коливань як для оболонок середньої товщини, так і для дуже тонких оболонок.

Значення нормального прогину для першої форми коливань оболонки і його перших двох похідних у точці  $\vartheta = 80^\circ$  залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (1.60) наведено в табл. 1.10 за

Таблиця 1.9: Значення перших п'яти частот коливань оболонки ( $n = 1$ ) залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (1.60) при  $\vartheta_f = 90^\circ$ 

$N$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$\delta = 100$					
8	.5417556	.8525449	.9215523	.9564843	1.0048565
10	.5417536	.8525446	.9215523	.9564067	.9969224
12	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968500
14	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968499
16	.5417535	.8525446	.9215523	.9564067	.9968499
$\delta = 1000$					
8	.5337277	.8414342	.9090418	.9302792	.9400686
10	.5326600	.8405728	.9087909	.9302271	.9397110
12	.5323757	.8404612	.9087818	.9302265	.9397103
14	.5323457	.8404580	.9087811	.9302262	.9397103
16	.5323436	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
18	.5323431	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
20	.5323430	.8404572	.9087810	.9302262	.9397103
$\delta = 2000$					
12	.5314705	.8391282	.9079635	.9295781	.9389937
14	.5312517	.8390431	.9079570	.9295777	.9389934
16	.5312150	.8390396	.9079563	.9295774	.9389934
18	.5312125	.8390385	.9079561	.9295774	.9389934
20	.5312116	.8390383	.9079561	.9295774	.9389934
22	.5312114	.8390383	.9079561	.9295774	.9389934

різних значень параметра  $\delta$ . Нормування власних форм коливань оболонки тут вибиралася з умови  $w(\vartheta_f/2) = 1$ .

Дані табл. 1.10 свідчать про те, що для оболонок середньої товщини ( $\delta \leq 500$ ) запропонований вище алгоритм розв'язування вихідної спектральної задачі за вибраної кількості координатних функцій має поточкову збіжність як для самої функції  $w(s)$ , так і для її перших двох похідних. Зі зменшенням відносної товщини оболонки ця збіжність уповільнюється.

Точність обчислень можна підвищити за рахунок збільшення кількості наближень  $N$  у методі Рітца. При цьому число  $N$  обмежене зверху таким його значенням  $N^*$ , за якого алгебраїчна систе-

Таблиця 1.10: Значення  $w_1$ ,  $w'_1$  і  $w''_1$  у точці  $\vartheta = 80^\circ$  для першої форми коливань залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (1.60)

$N$	8	10	12	14	16	18
$\delta = 100$						
$w_1$	.8544	.8527	.8525	.8525	.8525	.8525
$w'_1$	-3.1329	-3.0925	-3.0889	-3.0889	-3.0889	-3.0889
$w''_1$	-38.2459	-37.9901	-38.0512	-38.0529	-38.0529	-38.0529
$\delta = 300$						
$w_1$	.9735	.9528	.9514	.9513	.9514	.9514
$w'_1$	-.5723	-.4685	-.5449	-.5542	-.5585	-.5586
$w''_1$	-24.1190	-17.1345	-13.4682	-13.3579	-13.3318	-13.3251
$\delta = 600$						
$w_1$	.9676	.9213	.9266	.9304	.9312	.9312
$w'_1$	.4812	-.1412	-.4686	-.5894	-.5772	-.5738
$w''_1$	-4.5266	15.0868	14.4900	9.7187	8.5375	8.0980
$\delta = 1000$						
$w_1$	.9625	.8968	.9201	.9289	.9297	.9290
$w'_1$	.8117	-.3595	-1.0541	-1.0456	-.9095	-.8735
$w''_1$	2.5390	32.0210	11.9583	1.9427	-1.6608	-.2282

ма (1.63) є погано обумовленою і порушується стійкість обчислювального процесу. З метою обчислення похідних від функції  $w(s)$  аж до третього порядку з одночасним зменшенням розмірності алгебраїчної системи (1.63) необхідно розширити клас допустимих функцій функціями примежового шару (1.57), які локалізовані в околі закріпленого торця оболонки.

Власні частоти, отримані запропонованим методом, порівнюються в табл. 1.11 з частотами, наведеними у праці [125], які отримано за допомогою модифікованого чисельного методу розв'язування вихідної граничної задачі. За висновком авторів праці [125], запропонований ними алгоритм дає змогу з високою точністю визначати частоти і форми коливань сферичної оболонки. Однак цей алгоритм істотно ускладнюється зі зменшенням відносної товщини оболонки і при  $\delta > 1000$  він не є застосовним.

Як видно з таблиці, наведені частоти коливань досить до-

Таблиця 1.11: Значення нижчих частот першої форми коливань закріпленого сферичного купола, обчислені за запропонованим алгоритмом (верхній рядок), і відповідні значення з праці [125] (нижній рядок)

$\vartheta_f$	$n$	$\delta$			
		25	50	100	200
45°	1	.9944	.9424	.9270	.9210
		.9905	.9414	.9269	.9211
	2	1.1657	1.0207	.9704	.9469
		1.1635	1.0201	.9703	.9470
	3	1.3752	1.0892	.9974	.9606
		1.3670	1.0868	.9968	.9606
90°	1	.5600	.5485	.5418	.5375
		.5594	.5483	.5417	.5373
	2	.8749	.8636	.8599	.8583
		.8736	.8633	.8598	.8583
	3	.9471	.9155	.9044	.9003
		.9434	.9145	.9041	.9002

бре узгоджуються між собою. Найбільша розбіжність у частотах табл. 1.11 спостерігається для невеликих значень  $\delta$ . Ця розбіжність пояснюється тим, що в [125] використано рівняння загальної теорії тонких оболонок, тоді як тут — спрощені рівняння технічної теорії оболонок.

## 1.8 Осесиметричні коливання замкненої у вершині конічної оболонки

Розглянемо осесиметричні коливання тонкостінної конічної оболонки обертання з кутом  $\alpha$  між її віссю симетрії та твірною. Вважається, що оболонка обмежена однією паралеллю і має вершину. Як незалежну змінну виберемо довжину дуги твірної  $s$ , початок відліку якої знаходиться у вершині конуса ( $0 \leq s \leq s_1$ ). Позначимо через  $R_1$  і  $R_2$  головні радіуси кривини поверхні оболонки, а через  $r = r(s)$  — відстань від точки серединної поверхні оболонки

до осі обертання. Тоді

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = s \operatorname{tg} \alpha, \quad r(s) = s \sin \alpha. \quad (1.66)$$

Проекції переміщень точок оболонки на напрямки твірної та зовнішню нормаль до неї позначимо  $u(s, t)$  і  $w(s, t)$ , де  $t$  – координата за часом.

Відповідно до технічної теорії оболонок (у формулах для зміни кривини утримуються лише нормальні переміщення оболонки) після відокремлення координати за часом і переходу до безрозмірних величин усталені осесиметричні коливання конічної оболонки з частотою  $\omega$  будуть описуватися системою рівнянь:

$$\begin{aligned} F_1(u, w) &= \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (su) \right) - \frac{\nu}{s \operatorname{tg} \alpha} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} w - \lambda^2 u = 0, \\ F_2(u, w) &= \\ &= \frac{\nu}{s \operatorname{tg} \alpha} \frac{du}{ds} + \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} u + \frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} w + \mu^4 \Delta \Delta w - \lambda^2 w = 0, \\ \Delta &= \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( s \frac{d}{ds} \right), \quad \mu^4 = c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda^2 = \frac{(1 - \nu^2) \rho R_0^2 \omega^2}{E}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

де  $h$  – товщина оболонки;  $R_0$  – її характерний лінійний розмір;  $E$ ,  $\nu$  і  $\rho$  – відповідно модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу оболонки.

Розв'язки системи рівнянь (1.67) шостого порядку зі змінними коефіцієнтами повинні задовольняти відповідні однорідні граничні умови, що відображають умови кріплення на границі оболонки. У вершині оболонки при  $s = 0$  будемо вимагати виконання умов обмеженості силових та геометричних характеристик її деформації.

Еквівалентне варіаційне формулювання вихідної спектральної задачі можна отримати з принципу можливих переміщень. При

цьому варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^{s_1} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + M_1 \delta \varkappa_1 + M_2 \delta \varkappa_2) r ds - \\ & - \lambda^2 \int_0^{s_1} (u \delta u + w \delta w) r ds = 0, \end{aligned} \quad (1.68)$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{s}u + \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha}w; \quad \varkappa_1 = -\frac{d^2w}{ds^2}; \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{s} \frac{dw}{ds};$$

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2; \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1; \quad M_1 = c^2(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2); \quad M_2 = c^2(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1).$$

Після інтегрування частинами в інтегралах, які включають в себе похідні від варіацій переміщень, варіаційне рівняння (1.68) можна записати так:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^{s_1} (F_1(u, w) \delta u + F_2(u, w) \delta w) r ds + \\ & + \left( r T_1 \delta u + r Q_1 \delta w - r M_1 \frac{d \delta w}{ds} \right) \Big|_0^{s_1} = 0, \quad Q_1 = -c^2 \frac{d}{ds} (\Delta w). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Унаслідок довільності варіацій  $\delta u$  і  $\delta w$  на відрізку  $[0, s_1]$  із (1.69) випливають рівняння (1.67).

Із умови рівності нулю позаінтегрального члена випливають граничні умови:

$$\left[ u = w = \frac{dw}{ds} \right]_{s=s_1} = 0 \quad (1.70)$$

для жорстко закріпленого торця оболонки і

$$[T_1 = Q_1 = M_1]_{s=s_1} = 0 \quad (1.71)$$

для випадку вільного торця оболонки.



Якщо в полюсі оболонки не накладено обмеження на її переміщення, то при  $s = 0$  повинні виконуватися умови

$$[rT_1 = rQ_1 = rM_1]_{s=0} = 0. \quad (1.72)$$

Відзначимо, що граничні умови (1.70) — (1.72) забезпечують симетричність оператора замкнених у вершині конічних оболонок.

Встановимо формальну структуру фундаментальної системи регулярних інтегралів рівнянь (1.67), використовуючи при цьому аналітичну теорію асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем рівнянь.

Перші інтеграли рівнянь (1.67), які обмежені при  $s = 0$ , будемо шукати у вигляді прямого розкладу за параметром  $\mu$ :

$$u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} u_k(s), \quad w(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} w_k(s). \quad (1.73)$$

Для визначення функцій  $u_k(s)$  і  $w_k(s)$  підставимо розклади (1.73) у вихідні рівняння та прирівняємо до нуля коефіцієнти при різних степенях параметра  $\mu$ . При  $\mu = 0$  отримаємо вироджену систему рівнянь відносно функцій  $u_0(s)$  і  $w_0(s)$ . Після деяких перетворень її можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} s \frac{du_0}{ds} &= f_{11}u_0 + f_{12}w_0, \\ s \frac{dw_0}{ds} &= f_{21}u_0 + f_{22}w_0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

де

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{1}{\nu}; \quad f_{12} = \frac{\lambda^2 s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\nu \operatorname{tg} \alpha}; \quad f_{21} = \frac{(1 - \nu^2 + \lambda^2 \nu^2 s^2) \operatorname{tg} \alpha}{g(s)}; \\ f_{22} &= \frac{1 - \nu^2 - \lambda^2 (1 - 2\nu) s^2 \operatorname{tg} \alpha}{g(s)}; \quad g(s) = \nu(1 - \nu^2 - \lambda^2 s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha). \end{aligned}$$

У рівняннях (1.74) усі коефіцієнти  $f_{ij}(s)$  є аналітичними функціями при  $s \in [0, s_1]$  та не обертаються на нуль при  $s = 0$ .

З вигляду цієї системи рівнянь випливає, що точка  $s = 0$  є регулярною особливою точкою. Для побудови інтегралів цих рівнянь скористаємося узагальненим методом степеневих рядів.

Введемо до розгляду вектор-функцію  $\vec{y} = \{y_1, y_2\}$ ,  $y_1 = u_0(s)$ ,  $y_2 = w_0(s)$ . Тоді систему рівнянь (1.74) можна подати у векторно-матричній формі:

$$s \frac{d\vec{y}}{ds} = F(s, \lambda) \vec{y}. \quad (1.75)$$

Матрицю  $F(s, \lambda)$  можна подати у вигляді розкладу за парними степенями  $s$ :

$$F(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i} s^{2i}, \quad (1.76)$$

де матриці  $F_{2i}$  мають таку структуру:

$$F_0 = \begin{vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} \\ f_{21}^{(0)} & f_{22}^{(0)} \end{vmatrix}; \quad F_2 = \begin{vmatrix} 0 & f_{12}^{(2)} \\ f_{21}^{(2)} & f_{22}^{(2)} \end{vmatrix}; \quad F_{2i} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}^{(2i)} & f_{22}^{(2i)} \end{vmatrix} \\ (i = 2, 4, \dots).$$

Коефіцієнти перших членів розкладів елементів матриці  $F$  мають вигляд:

$$f_{11}^{(0)} = -\frac{1}{\nu}; \quad f_{12}^{(0)} = -\frac{1}{\nu \operatorname{tg} \alpha}; \quad f_{21}^{(0)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\nu}; \quad f_{22}^{(0)} = \frac{1}{\nu}.$$

Розв'язки системи (1.75) шукаються як

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik} s^k \quad (i = 1, 2) \quad (1.77)$$

де  $\sigma$  і  $g_{ik}$  — невизначені сталі.

Підставивши ряди (1.76) і (1.77) у рівняння (1.75) та прирівнявши коефіцієнти при  $s^\sigma$  в обох частинах отриманої рівності одержимо до однорідну алгебраїчну систему відносно перших коефіцієнтів розкладів (1.77):

$$(F_0 - \sigma E) \vec{g}_0 = 0, \quad (1.78)$$

де  $E$  — одинична матриця;  $\vec{g}_0$  — вектор з компонентами  $g_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ).

Прирівнявши коефіцієнти при  $s^{\sigma+k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), отримаємо неоднорідні алгебраїчні системи:

$$[F_0 - (\sigma + k)E] \vec{g}_k = \vec{d}_k. \quad (1.79)$$

Тут  $\vec{g}_k = \{g_{1k}, g_{2k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ );  $\vec{d}_k = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}\}$ . Компоненти  $d_i^{(k)}$  вектора  $\vec{d}_k$  визначаються за формулами

$$d_i^{(k)} = - \sum_{q=1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots). \quad (1.80)$$

Таким чином, знаходження показника  $\sigma$  та коефіцієнтів розкладів (1.77) звелось до розв'язування однорідної алгебраїчної системи (1.78) відносно вектора  $\vec{g}_0$  та послідовності неоднорідних систем (1.79) відносно векторів  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), праві частини яких лінійно виражаються через  $k - 1$  розв'язок попередніх алгебраїчних систем.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (1.78) отримаємо характеристичне рівняння другого порядку відносно показника  $\sigma$ . Після низки перетворень можна показати, що корені цього рівняння набувають таких значень:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = 0. \quad (1.81)$$

Покладаючи в рівняннях (1.78) і (1.79)  $\sigma = 0$  та розв'язуючи послідовності алгебраїчних рівнянь, можна переконатися, що перший розв'язок системи (1.75) набуває вигляду

$$y_1^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \quad y_2^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}. \quad (1.82)$$

При цьому перші коефіцієнти задовольняють співвідношення

$$g_{1,0}^{(1)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} g_{2,0}^{(1)}. \quad (1.83)$$

Тут і надалі верхній індекс означає номер частинного розв'язку.

Розв'язок системи (1.75), що відповідає кореню характеристичного рівняння  $\sigma_2$ , буде включати в себе логарифмічний множник і таким чином є необмеженим розв'язком при  $s = 0$ .

Співвідношення (1.83) відіграє важливу роль у забезпеченні обмеженості деформацій оболонки при  $s \rightarrow 0$  та свідчить, що подання розв'язків для  $u(s)$  та  $w(s)$  не є незалежними.

Таким чином, прямий розклад за малим параметром (1.73) дає асимптотичне подання одного регулярного розв'язку осесиметричних коливань конічної оболонки в околі її вершини. Відповідно до теорії задач з примежовим шаром [17] два інших інтеграли вихідних рівнянь включають в себе експоненційний множник. При цьому можна показати [15], що ці розв'язки мають таке формальне представлення

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left[ \sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right], \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left[ \sum_{i=0}^{\infty} w_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right] \quad (j = 2, 3). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Тут  $u_{k,i}^{(j)}$  і  $w_{k,i}^{(j)}$  — невідомі коефіцієнти розкладів;  $j$  — індекс, що вказує на номер знайденого частинного розв'язку;

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} \exp^{\beta(s)} \cos \beta(s) & \text{при } j = 2, \\ \exp^{\beta(s)} \sin \beta(s) & \text{при } j = 3; \end{cases}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^s |b(t)|^{1/4} dt; \quad b(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s)}; \quad b(s) < 0.$$

Остання нерівність означає, що будемо розглядати нижчу частину спектра частот.

Отримані вище результати якісного характеру про поведінку лінійно незалежних розв'язків рівнянь можна використати під час побудови систем базисних функцій для розв'язування вихідної задачі методом Рітца.

Для знаходження структури загального розв'язку системи (1.67) складемо лінійну комбінацію інтегралів (1.82) і (1.84). Ураховуючи представлення примежових функцій у формі Вішіка–Люстерніка [15], [17], загальний розв'язок можна подати у наступному вигляді

$$\begin{aligned} [u, w] &= R[u, w] + \exp^{\beta_0(s)} \cos \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,1}, w_{i,1}] (s - s_1)^i + \\ &+ \exp^{\beta_0(s)} \sin \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,2}, w_{i,2}] (s - s_1)^i, \quad (1.85) \\ \beta_0(s) &= p(s - s_1), \quad p = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \sqrt[4]{|b(s_1)|}, \quad b(s_1) = \lambda - \frac{(1 - \nu^2)}{R_2^2(s_1)}. \end{aligned}$$

Тут в квадратних дужках вказано функції та відповідні їм коефіцієнти розкладів,  $R[u, w]$  — регулярна частина загального розв'язку (1.82).

По суті, подання розв'язків у формі (1.85) включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні сингулярно збурених рівнянь. Надалі невизначені коефіцієнти в розкладах (1.85) будемо знаходити з умов стаціонарності відповідного квадратичного функціонала та із задоволення розв'язків головних граничних умов.

Побудова систем координатних функцій здійснюється на базі підпорядкування загального розв'язку (1.85) головним граничним умовам задачі. Виходячи з цих умов отримаємо деякі допоміжні співвідношення між коефіцієнтами в розкладах для шуканих функцій. Підставляючи ці співвідношення в загальний вигляд розв'язку, знайдемо системи базисних функцій для апроксимації розв'язків.

Проілюструємо цей підхід пі час побудови базисних функцій для знаходження розв'язку для  $u(s)$ . Відповідно до розкладів (1.85) функцію  $u(s)$  можна подати так:

$$u(s) = \sum_{k=0}^m a_k s^{2k} + g_c \sum_{k=0}^{m_p} b_k (s - s_1)^k + g_s \sum_{k=0}^{m_p} c_k (s - s_1)^k, \quad (1.86)$$

де

$$g_c = \exp^{p(s-s_1)} \cos p(s-s_1); \quad g_s = \exp^{p(s-s_1)} \sin p(s-s_1).$$

Не порушуючи повноти подання (1.86) його регулярну частину, для зручності, надалі представимо у вигляді

$$R[u] = \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k (s^2 - s_1^2)^k.$$

Підпорядкуємо функцію  $u(s)$  граничній умові  $u(s_1) = 0$ . При цьому із (1.86) отримаємо  $\tilde{a}_0 = -b_0$ . З урахуванням останнього співвідношення вираз (1.86) запишемо так:

$$\begin{aligned} u(s) = & (s^2 - s_1^2) \sum_{k=1}^m a_k s^{2k} + (g_c - 1)b_0 + \\ & + g_c \sum_{k=1}^{m_p-1} b_k (s - s_1)^k + g_s \sum_{k=0}^{m_p} c_k (s - s_1)^k. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Таким чином, система координатних функцій для  $u(s)$  набуде такої структури:

$$\begin{aligned} \{U_i(s)\}_{i=1}^N = & \{U_1, \dots, U_m; \\ & U_{m+1}, \dots, U_{m+m_p}; \quad U_{m+m_p+1}, \dots, U_{m+2m_p}\}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Тут виділені три групи функцій, відокремлених крапкою з комою. Перша група із  $m$  функцій являє собою регулярний базис, який складається зі степеневих функцій. Друга та третя групи зі  $m_p$  функцій пов'язані з апроксимацією примежових розв'язків у околі точки  $s = s_1$ , які включають в себе відповідно функції  $g_c$  і  $g_s$ . Надалі, не порушуючи повноти подання регулярного розв'язку, степеневі функції, що входять в них, замінимо відповідними поліномами Лежандра, зберігаючи при цьому їх асимптотичну поведінку при  $s \rightarrow 0$ . Доцільність такої заміни зумовлена тим, що амплітудні значення поліномів Лежандра (на відміну від степеневих базису) не зростають на відрізьку їх ортогональності при збільшенні їх порядку. Окрім цього, такі поліноми можна легко

обчислити без істотної похибки за допомогою відомих рекурентних співвідношень. Все це дає змогу суттєво збільшити порівняно зі степеневим базисом кількість наближень у розкладах за збереження стійкості обчислювального процесу. Це сприяє можливості розширення діапазону вхідних параметрів задачі, для яких можна проводити обчислення із заданою точністю.

Таким чином, явні вирази координатних функцій для апроксимації  $u(s)$  у випадку жорсткого закріплення торця при  $s = s_1$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_1 &= (s^2 - s_1^2), \quad U_i = (s^2 - s_1^2) \left[ P_{2i-2} \left( \frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right], \\ (i &= 2, 3, \dots, m), \\ U_{m+1} &= g_c - 1, \quad U_{m+2} = g_c(s - s_1), \\ U_{m+j} &= g_c(s - s_1)^{j-1}, \quad U_{m+m_p+1} = g_s, \\ U_{m+m_p+2} &= g_s(s - s_1), \quad U_{m+m_p+j} = g_s(s - s_1)^{j-1} \\ (j &= 3, 4, \dots, m_p), \end{aligned} \quad (1.89)$$

де  $P_j(s)$  — поліноми Лежандра.

Структура системи координатних функцій для розв'язку  $w(s)$  збігається зі структурою (1.88). При цьому базисні функції для розв'язків підпорядкованих умовам  $w(s_1) = \left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$  можна подати так:

$$\begin{aligned} W_1 &= (s^2 - s_1^2)^2, \quad W_i = (s^2 - s_1^2)^2 \left[ P_{2i-2} \left( \frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right], \\ (i &= 2, 3, \dots, m), \\ W_{m+1} &= g_c - 1 - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \quad W_{m+2} = g_c(s - s_1) - \frac{1}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\ W_{m+j} &= g_c(s - s_1)^{j-1}, \quad W_{m+m_p+1} = g_s - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\ W_{m+m_p+2} &= g_s(s - s_1), \quad W_{m+m_p+j} = g_s(s - s_1)^{j-1} \quad (j = 3, 4, \dots, m_p). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Під час побудови розв'язків необхідно також враховувати встановлену вище їх асимптотичну поведінку в околі вершини оболон-

ки. При  $s \rightarrow 0$  відповідно до формули (1.83) повинна виконуватися така умова для розв'язків  $u(s)$  та  $w(s)$ :

$$u(0) = -\operatorname{ctg}(\alpha)w(0). \quad (1.91)$$

Наведемо формульну схему розв'язку розглядуваної задачі з використанням регулярних базисів для шуканих функцій.

Варіаційне рівняння вихідної спектральної задачі зручно записати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta I = \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta w, u) + \\ + \Psi_{22}(w, \delta w)] r ds - \lambda^2 \int_0^{s_1} (u \delta u + w \delta w) r ds = 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Введені тут диференціальні оператори  $\Psi_{i,j}(p, q)$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \left( \frac{dp}{ds} + \frac{\nu}{s} p \right) \frac{dq}{ds} + \left( \frac{\nu}{s} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{s^2} p \right) q, \\ \Psi_{12}(p, q) &= \frac{\nu}{s \operatorname{tg} \alpha} p \frac{dq}{ds} + \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} pq + \\ &+ c^2 \left[ \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \left( \frac{\nu}{s} \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \frac{dp}{ds} \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu}{s} \frac{dp}{ds} \frac{d^2 q}{ds^2} \right]. \end{aligned}$$

Для розв'язування варіаційної задачі (1.92) відповідно до методу Рітца подамо шукані функції у вигляді відрізків узагальнених рядів:

$$u(s) = \sum_{j=1}^m x_j U_j(s); \quad w(s) = \sum_{j=1}^m x_{j+N} W_j(s). \quad (1.93)$$

Асимптотика розв'язків (1.91) встановлює зв'язок між першими коефіцієнтами розкладів (1.93):

$$x_{m+1} = \gamma x_1, \quad \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s_1^2}. \quad (1.94)$$



Співвідношення (1.94) забезпечує скінченність деформацій при  $s \rightarrow 0$ .

Для отримання алгебраїчної системи відносно невідомих  $x_j$  підставимо розв'язки (1.93) у рівняння (1.92), тоді з урахуванням співвідношення (1.94) отримаємо однорідну алгебраїчну систему порядку  $2m - 1$ :

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+2}, \dots, x_{2m-1}\} \quad (1.95)$$

з симетричними матрицями  $A$  та  $B$ .

Симетричність матриці  $A$  випливає з симетричності оператора, породженого диференціальними рівняннями (1.67) і визначеного на класі функцій, підпорядкованих граничним умовам задачі та встановленим властивостям поведінки розв'язків у околі регулярної особливої точки.

Із варіації функціонала, поданого у вигляді (1.92) можна досить просто отримати вирази для елементів матриці  $A$ . При цьому елементи  $a_{i,j}$  верхньої частини відносно головної діагоналі матриці  $A$  мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_1, U_1) + 2\gamma\Psi_{12}(W_1, U_1) + \gamma^2\Psi_{22}(W_1, W_1)] r ds, \\ a_{1,j} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_j, U_1) + \gamma\Psi_{12}(W_1, U_j)] r ds, \\ a_{1,m+j-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{12}(W_j, U_1) + \gamma\Psi_{22}(W_j, W_1)] r ds \quad (j = 2, 3, \dots, m), \\ a_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, \quad a_{m+i-1,m+j-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{22}(W_j, W_i) r ds \\ & \quad (i = 2, 3, \dots, m, j \geq i), \\ a_{i,m+j-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{12}(W_j, U_i) r ds \quad (i, j = 2, 3, \dots, m). \end{aligned}$$

У свою чергу, ненульові елементи  $b_{i,j}$  відповідної частини матриці  $B$  обчислюються за формулами

$$b_{1,1} = \int_0^{s_1} (U_1^2 + \gamma^2 W_1^2) r ds, \quad b_{1,j} = \int_0^{s_1} U_j U_1 r ds,$$

$$b_{1,m+j-1} = \gamma \int_0^{s_1} W_j W_1 r ds \quad (j = 2, 3, \dots, m),$$

$$b_{i,j} = \int_0^{s_1} U_i U_j r ds, \quad b_{m+i-1,m+j-1} = \int_0^{s_1} W_i W_j r ds$$

$$(i = 2, 3, \dots, m, j \geq i).$$

Оцінимо можливості регулярного базису під час розв'язування розглядуваної задачі з використанням методу Рітца. Наведемо результати розрахунку частот, форм власних коливань, зусиль і моментів, які виникають у серединній поверхні конкретної конічної оболонки з закріпленням торцем. Як характерний лінійний розмір оберемо радіус торця оболонки  $R_0$  і покладемо коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . Введемо до розгляду параметр  $\delta = R_0/h$ . Кут піврозтвору конуса  $\alpha$  в усіх розрахунках дорівнює  $45^\circ$ .

У табл. 1.12 наведено перші п'ять безрозмірних частот  $\lambda_i$  для різних значень параметра  $\delta$  залежно від кількості наближень  $m$  у розкладах (1.93).

Значення нормального прогину  $w$ , меридіонального зусилля  $T_1$ , згинального моменту  $M_1$  та перерізувальної сили  $Q_1$  у точці  $s = 1.25$  для першої форми коливань оболонки залежно від кількості наближень  $m$  у розкладах (1.93) наведено у табл. 1.13. Тут та надалі довільна стала в ході розв'язування однорідної алгебраїчної системи (1.95) визначалася з умови  $w(s_1/2) = 1$ .

Як і слід було очікувати, зменшення товщини оболонки призводить до необхідності збільшення кількості наближень у методі Рітца. Аналогічна збіжність спостерігається в усіх точках інтервалу інтегрування вихідних рівнянь.

Як бачимо з табл. 1.13, що запропонований алгоритм з використанням регулярних координатних функцій забезпечує поточкову

Таблиця 1.12: Значення перших п'яти безрозмірних частот  $\lambda_i$  коливань оболонки з закріпленим торцем залежно від кількості членів  $m$  у розкладах (1.93)

$m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\delta = 100$					
8	.86784	.98669	1.12998	1.24647	1.49808
10	.86757	.98437	1.12225	1.23145	1.42129
12	.86756	.98422	1.12118	1.22813	1.41129
14	.86756	.98422	1.12115	1.22765	1.40900
16	.86756	.98422	1.12114	1.22765	1.40869
18	.86756	.98422	1.12114	1.22765	1.40869
$\delta = 1000$					
12	.74580	.79123	.84997	.91620	1.01340
14	.74557	.79031	.84529	.89731	.96288
16	.74554	.78998	.84243	.88810	.94582
18	.74554	.78990	.84176	.88634	.94051
20	.74554	.78989	.84168	.88601	.93825
22	.74554	.78989	.84167	.88594	.93756
24	.74554	.78989	.84167	.88593	.93743
26	.74554	.78989	.84167	.88593	.93741
28	.74554	.78989	.84167	.88593	.93741
$\delta = 2000$					
16	.72762	.76078	.80064	.83802	.88464
18	.72759	.76042	.79815	.83173	.87508
20	.72758	.76034	.79772	.83057	.87004
22	.72758	.76034	.79765	.82992	.86677
24	.72758	.76034	.79762	.82972	.86598
26	.72758	.76034	.79762	.82969	.86585
28	.72758	.76034	.79761	.82969	.86583
30	.72758	.76034	.79761	.82969	.86582
32	.72758	.76034	.79761	.82969	.86582

збіжність не лише самих розв'язків, а і їх перших трьох похідних у широкому діапазоні відносних товщин оболонки. У разі подальшого зменшення товщини оболонки ( $\delta > 2000$ ) для отримання розв'язків такої точності запропонований алгоритм стає неефективним, оскільки за збільшення порядку алгебраїчної системи

Таблиця 1.13: Значення  $w$ ,  $T_1$ ,  $M_1$ ,  $Q_1$  у точці  $s = 1.25$  для першої форми коливань залежно від кількості членів  $m$  у розкладах (1.93)

$m$	$w$	$T_1$	$M_1$	$Q_1$
$\delta = 100$				
8	.80976E+00	.78604E-01	.24689E-03	-.52622E-02
10	.79840E+00	.77232E-01	.23750E-03	-.52981E-02
12	.79735E+00	.76752E-01	.23392E-03	-.51925E-02
14	.79732E+00	.76667E-01	.23462E-03	-.52221E-02
16	.79728E+00	.76662E-01	.23470E-03	-.52230E-02
18	.79728E+00	.76661E-01	.23470E-03	-.52235E-02
20	.79728E+00	.76661E-01	.23470E-03	-.52235E-02
$\delta = 1000$				
12	.10910E+01	.20922E+00	-.75553E-06	.15192E-03
14	.10903E+01	.21150E+00	-.14651E-05	.18441E-03
16	.10896E+01	.21171E+00	-.16437E-05	.19259E-03
18	.10897E+01	.21176E+00	-.17558E-05	.19989E-03
20	.10896E+01	.21180E+00	-.18073E-05	.20245E-03
22	.10898E+01	.21182E+00	-.18208E-05	.20252E-03
24	.10898E+01	.21181E+00	-.18224E-05	.20235E-03
26	.10898E+01	.21181E+00	-.18224E-05	.20231E-03
28	.10898E+01	.21181E+00	-.18224E-05	.20231E-03
$\delta = 2000$				
18	.84297E+00	.19898E+00	-.35565E-06	.16166E-04
20	.84235E+00	.19890E+00	-.30794E-06	.14242E-04
22	.84195E+00	.19885E+00	-.29536E-06	.14239E-04
24	.84192E+00	.19886E+00	-.29177E-06	.14063E-04
26	.84191E+00	.19886E+00	-.28954E-06	.14015E-04
28	.84189E+00	.19886E+00	-.28877E-06	.14054E-04
30	.84189E+00	.19886E+00	-.28864E-06	.14070E-04
32	.84189E+00	.19886E+00	-.28862E-06	.14072E-04
34	.84189E+00	.19886E+00	-.28862E-06	.14072E-04

може відбутися втрата стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень обчислюваних характеристик деформованої оболонки.

Розширення регулярного класу допустимих функцій функціями типу приміжового шару зумовлює зниження порядку алгебра-

їчної системи і дає змогу проводити обчислення у випадку подальшого зменшення товщини оболонки.

На рис. 1.7 відображено поведінку функцій  $w$ ,  $T_1$ ,  $M_1$  та  $Q_1$  для першої форми коливань оболонки залежно від аргументу  $s/s_1$  за різних значень параметра  $\delta$ .

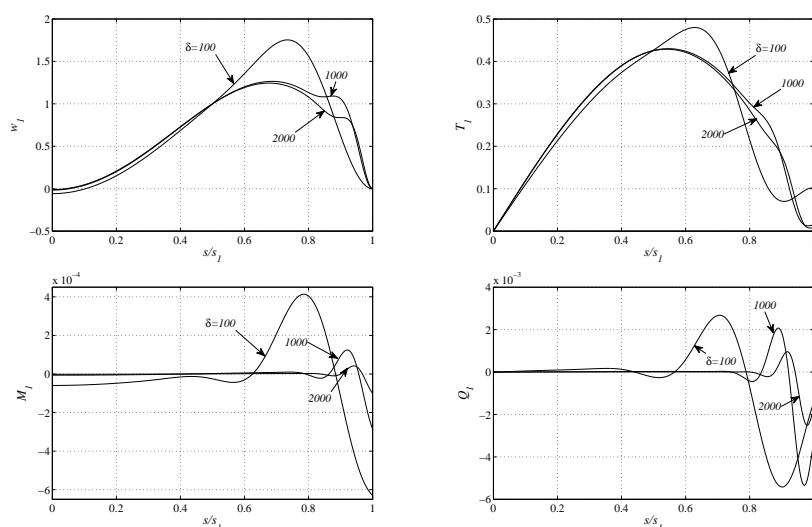


Рис. 1.7: Поведінка функцій  $w$ ,  $T_1$ ,  $M_1$  та  $Q_1$  для першої форми коливань оболонки залежно від аргументу  $s/s_1$  за різних значень параметра  $\delta$ . (\*Значення функцій  $M_1$  та  $Q_1$  при  $\delta = (1000; 2000)$  для наочності збільшено в десять разів.)

Усі розглядувані функції мають немонотонний характер. Найбільшу змінність зусилля  $T_1$  та моменти  $M_1$  мають в околі закріпленого торця оболонки і при  $s \rightarrow 0$  експоненційно затухають, наближаючись до своїх малих граничних значень. Таким чином, у полюсі оболонки виконуються граничні умови (1.72).

Основні гіпотези тонких оболонок (і зокрема Кірхгофа–Лява) базуються на припущенні, що відношенням  $h/R$  ( $R = \min(R_1, R_2)$ ) можна знехтувати щодо одиниці. Товстою називають таку оболонку, для якої це припущення не виконується. Для конічної оболонки маємо  $R = R_2 = s \operatorname{tg} \alpha$ , тому двовимірна теорія оболонок у околі вершини конуса непридатна.

Для досягнення необхідної точності розв'язку не слід наближатися до вершини оболонки на відстань  $s^*$ , де  $h/(s^* \operatorname{tg} \alpha) \ll 1$ .

З метою з'ясування поведінки розв'язків у околі полюса конічної оболонки введемо до розгляду переміщення, спроектовані на нормаль до її осі обертання і на саму вісь  $Oz$ . Відповідні переміщення позначимо через  $\Delta_r$  та  $\Delta_z$ , які виражаються функціями  $u$  і  $w$ :

$$\Delta_r = u \sin \alpha + w \cos \alpha; \quad \Delta_z = u \cos \alpha - w \sin \alpha. \quad (1.96)$$

Таблиця 1.14: Переміщення оболонки в околі її вершини

$s$	$\lambda = \lambda_1$		$\lambda = \lambda_2$	
	$\Delta_z$	$\Delta_r$	$\Delta_z$	$\Delta_r$
$\delta = 100$				
.000	.827E-01	.000E-00	.720E+00	.000E-00
.002	.827E-01	.772E-05	.720E+00	.166E-04
.004	.827E-01	.309E-04	.720E+00	.666E-04
.006	.826E-01	.695E-04	.720E+00	.150E-03
.008	.826E-01	.124E-03	.720E+00	.266E-03
.010	.825E-01	.193E-03	.719E+00	.416E-03
.012	.824E-01	.278E-03	.719E+00	.599E-03
$\delta = 1000$				
.000	.228E-01	.000E+00	-.188E-01	.000E+00
.002	.228E-01	.806E-05	-.188E-01	.817E-05
.004	.227E-01	.322E-04	-.188E-01	.327E-04
.006	.227E-01	.725E-04	-.188E-01	.735E-04
.008	.226E-01	.129E-03	-.189E-01	.131E-03
.010	.226E-01	.201E-03	-.190E-01	.204E-03
.012	.225E-01	.290E-03	-.191E-01	.294E-03

У табл. 1.14 наведено значення  $\Delta_z$  та  $\Delta_r$  для перших двох нижчих форм коливань залежно від змінної  $s$  за різних значень параметра  $\delta$ .

Як бачимо з табл. 1.14, оболонка в околі її вершини наближено рухається як єдине ціле в напрямку осі  $Oz$  (з урахуванням затухання напруженого стану при наближенні до вершини).

Таким чином, наведені особливості деформування конічної оболонки в околі її полюса можуть бути певним виправданням застосуванню двовимірної теорії для розрахунку її коливань.

Порівнюємо результати, одержані за запропонованим алгоритмом, з наведеними в літературі даними при розв'язуванні розглядуваної задачі. У праці [110] на базі тривимірної теорії пружності з використанням варіаційного методу подано безрозмірні частоти коливань конічної оболонки з вершиною. При цьому як базисні функції для апроксимації переміщень оболонки обрано степеневі функції, а для подолання труднощів, пов'язаних з наявністю сингулярностей в коефіцієнтах рівнянь, вважається, що в полюсі оболонки є отвір з малим радіусом.

Таблиця 1.15: Порівняння перших чотирьох безрозмірних частот  $\lambda_i^*$ , отриманих за запропонованим алгоритмом та алгоритмом праці [110] для оболонки з жорстко закріпленим торцем

$\lambda_i^*$	$\alpha^\circ; h/R_0$				
	[15; 0.1405]	[30; 0.03564]	[45; 0.01470]	[60; 0.006954]	[75; 0.002898]
$\lambda_1^*$	0.986	1.719	1.528	1.082	0.560
	1.056	1.747	1.537	1.084	0.561
	6.63%	1.60%	0.59%	0.19%	0.18%
$\lambda_2^*$	2.070	1.885	1.742	1.251	0.650
	2.233	1.915	1.752	1.254	0.651
	7.30%	1.57%	0.57%	0.24%	0.15%
$\lambda_3^*$	2.130	2.214	1.999	1.481	0.774
	2.284	2.247	2.014	1.484	0.775
	6.74%	1.47%	0.75%	0.20%	0.13%
$\lambda_4^*$	2.541	2.654	2.273	1.694	0.892
	2.782	2.718	2.309	1.698	0.894
	8.66%	2.36%	1.56%	0.24%	0.22%

У табл. 1.15 наведено перші чотири власних значення

$$\lambda_i^* = \sqrt{2\lambda_i^2(1 + \nu)/(1 - \nu^2)}$$

розглядуваної спектральної задачі, отримані в цій праці (перший

рядок) і в праці [110] (другий рядок) за різних значень кута піврозтвору  $\alpha^o$  та відносної товщини  $h/R_0$  конуса. У третьому рядку подано відносну похибку отриманого розв'язку, в даній праці, виражену в процентах.

Як бачимо з таблиці, перші чотири частоти за відносної товщини  $h/R = 0.03564$ , обчислені за двовимірною технічною теорією оболонок, не перевищують похибку у 2.36%. Зі зменшенням номера частоти ця похибка зменшується. За подальшого збільшення(зменшення) товщини оболонки похибка зростає (спадає).

Таким чином, цей приклад підтверджує правомірність використання двовимірної теорії під час розрахунку конічної тонкостінної оболонки з вершиною.



## Розділ 2

# Варіаційні методи побудови розв'язків спектральних задач з умовами спряження

У цьому розділі розглядаються спектральні задачі, які можуть мати розриви в коефіцієнтах рівнянь або в граничних умовах. Для побудови розв'язків таких задач використовуються варіаційні методи в поєднанні з декомпозицією області на регулярні підобласті, в яких шукані розв'язки є неперервними і диференційовними. Виконання досить складних умов спряження на суміжній границі штучно введених підобластей є основною проблемою під час реалізації такого підходу. Розв'язки розглядуваних задач будуються на формулюванні функціонала, для якого умови спряження є природними граничними умовами. Такий підхід з використанням методу Рітца дає змогу отримувати для розв'язків та їх похідних збіжність в рівномірній метриці. Відповідно до цього наведено розв'язки для низки задач, які мають самостійне прикладне значення.

## 2.1 Вільні коливання складеного стержня

### 2.1.1 Постановка задачі та побудова її розв'язку на базі методу Рітца

Розглянемо стержень довжиною  $l$ , який складається зі спряжених стержнів з різними пружно-масовими характеристиками. Вважається, що складений стержень має одну вісь симетрії. Введемо декартову систему координат  $Oxyz$ , вісь  $Oz$  якої сумісна з віссю симетрії стержня. Початок системи координат  $O$  зв'яжемо з краєм стержня. Будемо розглядати стержень, який складається з двох стержнів з різними фізичними та геометричними характеристиками. Покладемо, що спряження відбувається при  $z = \zeta$ .

Нижче розглядаються поперечні коливання конструкції на базі лінійної теорії згину стержнів без урахування поперечних зсувів та інерції повороту перерізів. Відповідно до цього згинальні вільні коливання розглядуваного стержня будуть описуватися диференціальним рівнянням [64]:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \omega^2 \rho S w = 0, \quad z \in G, \quad (2.1)$$

де

$$EJ = \begin{cases} E^{(1)}J^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ E^{(2)}J^{(2)}, & z \in [\zeta, l]; \end{cases} \quad \rho S = \begin{cases} \rho^{(1)}S^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ \rho^{(2)}S^{(2)}, & z \in [\zeta, l]; \end{cases}$$

$$w = \begin{cases} w^{(1)}, & z \in [0, \zeta], \\ w^{(2)}, & z \in [\zeta, l]; \end{cases} \quad G = G^{(1)} \cup G^{(2)}; \quad G^{(1)} = (0, \zeta); \quad G^{(2)} = (\zeta, l);$$

$J(z)$  і  $S(z)$  — момент інерції та площа поперечного перерізу з абсцисою  $z$ ;  $E(z)$  і  $\rho(z)$  — модуль пружності при згині та густина матеріалу стержня;  $\omega$  — частота вільних коливань;  $w(z)$  — поперечне переміщення точок нейтральної лінії стержня.

Будемо вважати, що згинальні жорсткості  $E^{(i)}J^{(i)}$  і погонні маси  $\rho^{(i)}S^{(i)}$  ділянок стержня є неперервно-диференційовними функціями в областях  $G^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ).

Припустимо для визначеності, що один кінець стержня закріплений, а інший — вільний. Тоді на кінцях відрізка  $[0, l]$  повинні

виконуватися граничні умови

$$w(0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (2.2)$$

$$Q^{(2)}|_{z=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z=l} = 0. \quad (2.3)$$

Тут і далі  $Q^{(i)}$  і  $M^{(i)}$  — поперечна сила і згинальний момент стержня в перерізі  $z$ :

$$Q^{(i)} = \frac{d}{dz} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2} \right); \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz^2}. \quad (2.4)$$

Крім граничних умов (2.2) і (2.3) у точці  $z = \zeta$  мають виконуватися кінематичні та силові граничні умови спряження:

$$[w^{(2)} - w^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad \left[ \frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta} = 0, \quad (2.5)$$

$$[Q^{(2)} - Q^{(1)}]_{z=\zeta} = 0, \quad [M^{(2)} - M^{(1)}]_{z=\zeta} = 0. \quad (2.6)$$

Розбиття вихідного стержня на підобласті і формулювання умов спряження пов'язано не з фізичною постановкою задачі, а з наближеним методом її розв'язання. Як наслідок умови спряження розв'язків для підобластей фігурують нарівні з рівняннями і граничними умовами вихідної задачі.

Похідні другого і більш високого порядку від розв'язків сформульованої однорідної крайової задачі (2.1) — (2.6) допускають розриви першого роду в точці  $z = \zeta$ .

Введемо до розгляду функціонал

$$F_1(w) = \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[ E^{(k)} J^{(k)} \left( \frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 \rho^{(k)} S^{(k)} (w^{(k)})^2 \right] dG^{(k)}. \quad (2.7)$$

Розглянемо задачу про стаціонарні значення функціонала (2.7), не накладаючи ніяких граничних умов на функцію  $w(z)$ , крім умов (2.2). Виконуючи інтегрування частинами, вираз для першої варіації функціонала можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta F_1(w) &= \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} L(w^{(k)}) \delta w^{(k)} dz + \\
&+ \left[ M^{(2)} \frac{d \delta w^{(2)}}{dz} - Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=l} + \\
&+ \left[ M^{(1)} \frac{d \delta w^{(1)}}{dz} - Q^{(1)} \delta w^{(1)} - M^{(2)} \frac{d \delta w^{(2)}}{dz} + Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=\zeta} = 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

де

$$L(w^{(k)}) = \frac{d^2}{dz^2} \left( E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \right) - \omega^2 \rho^{(k)} S^{(k)} w^{(k)}.$$

З довільності варіацій  $\delta w^{(k)}$  в областях  $G^{(k)}$  і варіацій на вільному кінці стержня з варіаційного рівняння (2.8) випливає, що

$$L(w^{(k)}) = 0 \text{ при } z \in G^{(k)}, \quad Q^{(2)}|_{z=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z=l} = 0.$$

Якщо покласти, що на класі допустимих функцій виконуються кінематичні умови спряження (2.5), то з (2.8) випливає, що силові умови спряження (2.6) будуть природними граничними умовами для функціоналу  $F_1(w)$ .

Отже, при використанні методу Рітца для розв'язування варіаційного рівняння (2.8) апроксимації для переміщень  $w^{(1)}$  і  $w^{(2)}$  повинні вибиратися таким чином, щоб забезпечити неперервність переміщень і їх перших похідних у суміжній точці  $z = \zeta$  підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , а також виконання граничних умов жорсткого кріплення стержня при  $z = 0$ . У цьому випадку інші граничні умови задачі для розглядуваного функціонала будуть природними граничними умовами. Якщо виконання граничних умов (2.2) не викликає особливих труднощів, то виконання умов спряження (2.5) призводить до досить складного алгоритму розв'язування розглядуваної задачі, базованого на методі Рітца. З огляду на це виникає проблема побудови такого функціонала  $F(w)$ , для якого

всі умови спряження між стержнями були б природними граничними умовами.

Якщо розглядати умови (2.5) як додаткові обмеження на задачу знаходження стаціонарних значень функціонала  $F_1(w)$ , то можна скористатися підходом Лагранжа для побудови нового функціоналу  $F_2(w)$ . Відповідно до цього підходу введемо в розгляд новий функціонал  $F_2(w, \alpha_1, \alpha_2)$ , який будується за правилом

$$\begin{aligned} F_2(w, \alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= F_1(w) + \alpha_1(w^{(2)} - w^{(1)})_{z=\zeta} + \alpha_2 \left( \frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right)_{z=\zeta}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — так звані множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому.

Отже, для знаходження розв'язку такої задачі потрібно знайти стаціонарні значення функціонала (2.9) відносно варіацій за  $w$ ,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  на класі функцій, що задовольняють лише головні граничні умови (2.2).

Щоб уникнути штучного збільшення кількості невідомих задачі за рахунок множників Лагранжа, виразимо  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  через самі розв'язки  $w^{(k)}$  і їх похідні. Це дасть змогу спростити алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі за допомогою методу Рітца.

Обчислимо першу варіацію функціонала (2.9) з урахуванням виразу для варіації функціонала  $F_1(w)$ . При цьому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F_2(w, \alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} L(w^{(k)}) \delta w^{(k)} dG^{(k)} + \\ &+ \left[ M^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - Q^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z=l} + \left\{ \left[ \frac{\alpha_1}{2} + Q^{(2)} \right] \delta w^{(2)} - \right. \\ &- \left[ \frac{\alpha_1}{2} + Q^{(1)} \right] \delta w^{(1)} + \left[ \frac{\alpha_2}{2} - M^{(2)} \right] \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - \left[ \frac{\alpha_2}{2} - M^{(1)} \right] \frac{d\delta w^{(1)}}{dz} + \\ &\left. + \frac{\delta \alpha_1}{2} [w^{(2)} - w^{(1)}] + \frac{\delta \alpha_2}{2} \left[ \frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right] \right\}_{z=\zeta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Якщо  $F_2$  набуває стаціонарного значення, тобто  $\delta F_2 = 0$  для довільних варіацій  $\delta w$ ,  $\delta\alpha_1$ ,  $\delta\alpha_2$ , то з (2.10) випливає, що розв'язки  $w$  і значення множників Лагранжа, повинні задовольняти рівняння (2.1), (2.3), (2.5), і рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{2} &= -Q^{(1)}|_{z=\zeta}, & \frac{\alpha_1}{2} &= -Q^{(2)}|_{z=\zeta}, \\ \frac{\alpha_2}{2} &= M^{(2)}|_{z=\zeta}, & \frac{\alpha_2}{2} &= M^{(1)}|_{z=\zeta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Звідси випливають рівності правих частин у формулах (2.11), які є силовими умовами спряження (2.6). Складаючи вирази (2.11) для  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , одержуємо такі значення:

$$\alpha_1 = -(Q^{(1)} + Q^{(2)})|_{z=\zeta}, \quad \alpha_2 = (M^{(1)} + M^{(2)})|_{z=\zeta}. \quad (2.12)$$

Отримані співвідношення (2.12) дають змогу сформулювати узагальнений функціонал  $F(w)$ , замінивши у функціоналі (2.9) значення  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  тотожно рівними їм величинами. Таким чином, можна шукати стаціонарні значення не функціонала  $F_1(w)$ , а функціонала

$$\begin{aligned} F(w) &= F_1(w) - [(Q^{(1)} + Q^{(2)})(w^{(2)} - w^{(1)})]_{z=\zeta} + \\ &+ \left[ (M^{(1)} + M^{(2)}) \left( \frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right) \right]_{z=\zeta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Застосовуючи стандартні прийоми варіаційного числення, переконуємося, що рівняннями Ейлера для функціонала (2.13) будуть рівняння (2.1). Граничні умови (2.3), (2.5), (2.6) тепер є природними граничними умовами для нього, бо вони автоматично виконуються для функції  $w$ , що надає функціоналу  $F(w)$  стаціонарного значення. Це важливий момент у застосуванні варіаційного методу до розв'язання розглядуваної задачі, який дає можливість фактично виключити з розгляду досить складні граничні умови.

Отримані результати дають змогу перейти до побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі на базі методу Рітца. З огляду на це подамо шукані функції  $w^{(k)}(z)$  у вигляді

таких розкладів у підобластях  $G^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ):

$$w^{(1)}(z) = \sum_{j=1}^N a_j V_j^{(1)}(z), \quad w^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^N b_j V_j^{(2)}(z), \quad (2.14)$$

де

$$V_j^{(1)}(z) = z^2 P_j \left( \frac{2z}{\zeta} - 1 \right), \quad V_j^{(2)}(z) = P_j \left( \frac{2z}{l - \zeta} - \frac{l + \zeta}{l - \zeta} \right).$$

Тут  $P_j$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра з аргументами, перетвореними на інтервали  $[0, \zeta]$  і  $[\zeta, l]$ . Система координатних функцій  $\{V_j^{(1)}(z)\}$  підпорядкована головним граничним умовам задачі (2.2).

Вибрані системи базисних функцій є лінійно-незалежними і повними системами функцій в областях  $G^{(k)}$ . Такі координатні функції забезпечують високу стійкість обчислювального процесу за великої кількості членів  $N$  у розкладах (2.14).

Надалі будемо користуватися безрозмірними величинами (позначені рискою зверху), які пов'язані з відповідними розмірними величинами:

$$\begin{aligned} \bar{m}^{(i)} &= \frac{\rho^{(i)} S^{(i)}}{\rho^{(0)} S^{(0)}}, \quad \bar{E}^{(i)} \bar{J}^{(i)} = \frac{E^{(i)} J^{(i)}}{E^{(0)} J^{(0)}}, \\ w &= R_0 \bar{w}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R_0^4 \rho^{(0)} S^{(0)}}{E^{(0)} J^{(0)}} \omega^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де  $R_0$  — характерний лінійний розмір стержня,  $\rho^{(0)} S^{(0)}$  і  $E^{(0)} J^{(0)}$  — погонні маса і згинальна жорсткість стержня в його характерному перерізі.

Далі для спрощення форми запису риску над безрозмірними величинами будемо опускати.

Підставимо розклади (2.14) у функціонал (2.13). Тоді функціонал  $F(w)$  буде залежати від  $2N$  змінних  $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ . Задача про стаціонарність функціонала (2.13) еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Цю систему рівнянь можна записати так

$$(A - \omega^2 B)\vec{X} = 0, \quad (2.16)$$

де вектор-стовпець  $\vec{X}$  має вигляд

$$\vec{X} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}.$$

Для формування елементів  $\alpha_{ij}$  і  $\beta_{ij}$  симетричних матриць відповідно  $A$  і  $B$  випишемо варіацію функціонала  $F(w)$  у безрозмірних величинах. Зауважимо, що симетричність матриці  $A$  впливає з симетричності оператора вихідної задачі. При цьому  $\delta F(w)$  можна подати так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta F(w) = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[ E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dz^2} \frac{d^2 \delta w^{(k)}}{dz^2} - \right. \\ & \left. - \omega^2 m^{(k)} w^{(k)} \delta w^{(k)} \right] dG^{(k)} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \delta \alpha_1 (w^{(2)} - w^{(1)}) + \delta \alpha_2 \left( \frac{dw^{(2)}}{dz} - \frac{dw^{(1)}}{dz} \right) + \alpha_1 \delta w^{(2)} - \alpha_1 \delta w^{(1)} + \right. \\ & \left. + \alpha_2 \frac{d\delta w^{(2)}}{dz} - \alpha_2 \frac{d\delta w^{(1)}}{dz} \right\}_{z=\zeta}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для спрощення запису формул введемо додаткові позначення:

$$Q_i^{(k)} = \frac{d}{dz} \left( E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 V_i^{(k)}}{dz^2} \right), \quad M_i^{(k)} = E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 V_i^{(k)}}{dz^2} \quad (2.18)$$

$$(k = 1, 2, ; i = 1, 2, \dots, N).$$

Обчислимо  $\frac{\partial F}{\partial a_i}$ . Для цього випадку у формулі (2.17) покладемо

$$\delta w^{(1)} = V_i^{(1)}, \quad \delta w^{(2)} = 0, \quad \delta \alpha_1 = -Q_i^{(1)}, \quad \delta \alpha_2 = M_i^{(1)}.$$



При цьому

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_0^{\zeta} E^{(1)} J^{(1)} \frac{d^2 V_i^{(1)}}{dz^2} \frac{d^2 V_j^{(1)}}{dz^2} dz + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ Q_i^{(1)} V_j^{(1)} + Q_j^{(1)} V_i^{(1)} - M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz} - M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta}, \\ \alpha_{i,j+N} &= \frac{1}{2} \left[ Q_j^{(2)} V_i^{(1)} - Q_i^{(1)} V_j^{(2)} + \right. \\ &\left. + M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz} - M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz} \right]_{z=\zeta}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Обчислимо  $\frac{\partial F}{\partial b_i}$ . У цьому випадку у формулі (2.17) покладаємо

$$\delta w^{(1)} = 0, \quad \delta w^{(2)} = V_i^{(2)}, \quad \delta \alpha_1 = -Q_i^{(2)}, \quad \delta \alpha_2 = M_i^{(2)}.$$

Для елементів  $\alpha_{i+N,j+N}$  отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \alpha_{i+N,j+N} &= \int_{\zeta}^l E^{(2)} J^{(2)} \frac{d^2 V_j^{(2)}}{dz^2} \frac{d^2 V_i^{(2)}}{dz^2} dz + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz} + M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz} - Q_i^{(2)} V_j^{(2)} - Q_j^{(2)} V_i^{(2)} \right]_{z=\zeta} \\ &(i, j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Елементи  $\alpha_{i+N,j}$  симетричні елементам  $\alpha_{i,j+N}$ .

У свою чергу ненульові елементи матриці  $B$  обчислюються за формулами

$$\beta_{ij} = \int_0^{\zeta} m_1 V_i^{(1)} V_j^{(1)} dz, \quad \beta_{i+m_0,j+m_0} = \int_{\zeta}^l m_2 V_i^{(2)} V_j^{(2)} dz. \quad (2.21)$$

Таким чином, вихідну задачу зведено до узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення (2.16). Елементи матриць  $A$  і  $B$  досить просто і з високим ступенем точності обчислюються за допомогою квадратурної формули Гаусса.

### 2.1.2 Деякі числові результати та аналіз алгоритму

Наведемо приклад розрахунку частот, форм коливань, перерізувальних сил і моментів для складеного стержня за запропонованим вище алгоритмом. Розглянемо стержень, який складається з двох ділянок циліндричної форми з кусково-постійними пружно-масовими характеристиками. Для такого складеного стержня можна отримати точний розв'язок розглядуваної спектральної задачі. Діаметри складових стержня позначимо через  $d_1$  і  $d_2$ . Покладемо також, що

$$E^{(1)} = E^{(2)}, \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)}, \quad E^{(0)}J^{(0)} = E^{(1)}J^{(1)}, \quad \rho^{(0)}S^{(0)} = \rho^{(1)}S^{(1)}.$$

Як лінійний розмір вибираємо радіус першого стержня. Тоді безрозмірні величини у формулах (2.15) набудуть таких значень:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2, \quad E^{(1)}J^{(1)} = 1, \quad E^{(2)}J^{(2)} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4. \quad (2.22)$$

У ході проведення розрахунків вважатимемо, що  $l = 20$  і  $\zeta = 10$ .

У табл. 2.1 наведено результати обчислень перших п'яти нижчих частот поперечних коливань розглядуваного стержня залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.14) за різних значень відношення діаметрів  $\frac{d_2}{d_1}$ . Значення частот, які позначено в таблиці зірочкою, відповідають точному розв'язку цієї задачі. Результати наведеної таблиці свідчать про те, що за заданих параметрів стержня для обчислення перших п'яти частот і форм коливань з точністю до семи значущих цифр досить утримати в розкладах (2.14) до 11 членів. Збільшення довжини стержня супроводжується збільшенням кількості членів у розкладах для шуканих функцій в підобластях  $G^{(i)}$ . У разі зменшення довжини стержня збіжність згаданих рядів покращується.

У таблицях 2.2 і 2.3 наведено граничні значення першої і п'ятої форм коливань і їх першої похідної, моменту та перерізувальної сили при підході з різних сторін до суміжної точки  $z = \zeta$  підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  за різної кількості наближень  $N$  у розкладах (2.14). Тут символи  $\zeta - 0$  і  $\zeta + 0$  означають, що всі величини, які йдуть за ними, обчислені як граничні значення відповідно ліворуч і праворуч від точки  $z = \zeta$ . Зірочкою позначені розрахункові

Таблиця 2.1: Залежність перших п'яти частот власних коливань складеної балки від кількості членів  $N$  у розкладі (2.14) за різних значень відношення  $d_2/d_1$

$N$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$d_2/d_1 = 1.0$					
5	0.0087901	0.0551941	0.1549078	0.3155029	0.5921559
6	0.0087900	0.0550870	0.1544961	0.3059954	0.5060671
7	0.0087900	0.0550862	0.1542435	0.3023844	0.5038674
8	0.0087900	0.0550862	0.1542432	0.3022674	0.4996959
9	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022549	0.4996735
10	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996491
11	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996489
*	0.0087900	0.0550862	0.1542430	0.3022548	0.4996488
$d_2/d_1 = 2.0$					
5	0.0045992	0.0499424	0.2230907	0.4350730	0.7040081
6	0.0045992	0.0499030	0.2225490	0.4244556	0.6706942
7	0.0045992	0.0499030	0.2224979	0.4198270	0.6628935
8	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198146	0.6624623
9	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624366
10	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
11	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
*	0.0045992	0.0499030	0.2224977	0.4198105	0.6624354
$d_2/d_1 = 3.0$					
5	0.0030829	0.0382659	0.2317938	0.5907269	0.7887204
6	0.0030829	0.0382503	0.2314184	0.5682713	0.7384920
7	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5651969	0.7196961
8	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650976	0.7194735
9	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650956	0.7194500
10	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490
11	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490
*	0.0030829	0.0382503	0.2314111	0.5650954	0.7194490

величини, отримані на основі точного розв'язання розглядуваної спектральної задачі. При обчисленні форм коливань було прийнято нормування  $w(l) = 1.0$ .

Дані таблиці свідчать про те, що наближення Рітца збігаються досить швидко і мають граничні величини, які збігаються

Таблиця 2.2: Значення функцій  $w_1(\zeta \pm 0)$ ,  $w'_1(\zeta \pm 0)$ ,  $M_1(\zeta \pm 0)$  і  $Q_1(\zeta \pm 0)$  залежно від кількості членів  $N$  у розкладі (2.14) за різних значень відношення  $d_2/d_1$ 

$N$	$w_1(\zeta \pm 0)$	$w'_1(\zeta \pm 0)$	$M_1(\zeta \pm 0)$	$Q_1(\zeta \pm 0)$
$d_2/d_1 = 1.0$				
5	0.3394959	0.5811823E-01	0.2983103E-02	-0.4784634E-03
	0.3395525	0.5818732E-01	0.2985662E-02	-0.5438817E-03
7	0.3395231	0.5815275E-01	0.2984410E-02	-0.5112992E-03
	0.3395231	0.5815270E-01	0.2984432E-02	-0.5110301E-03
9	0.3395231	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111641E-03
	0.3395231	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111652E-03
11	0.3395231	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
	0.3395231	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
*	0.3395231	0.5815272E-01	0.2984421E-02	-0.5111647E-03
$d_2/d_1 = 3.0$				
5	0.3659575	0.6329483E-01	0.3384255E-02	-0.5659157E-03
	0.3659643	0.6329366E-01	0.3360817E-02	-0.6022989E-03
7	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841078E-03
	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372538E-02	-0.5841063E-03
9	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
11	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03
	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841070E-03
*	0.3659609	0.6329424E-01	0.3372537E-02	-0.5841071E-03

з точним розв'язком задачі. Крім того, ці результати показують точність задоволення кінематичних і силових умов спряження ділянок стержня по мірі збільшення кількості наближень у методі Рітца.

Відповідно до загальної теорії варіаційних методів [50] впливає, що послідовні наближення для  $w_N$  і  $w'_N$  збігаються до своїх точних значень рівномірно, а похідні від форм коливань вище другого порядку збігаються лише в середньому. Результати обчислень за запропонованим вище алгоритмом показують, що варіаційний метод має збіжність розв'язків і перших трьох їх похідних у рівномірній метриці як на границях областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , так і всередині

Таблиця 2.3: Значення функцій  $w_5(\zeta \pm 0)$ ,  $w_5'(\zeta \pm 0)$ ,  $M_5(\zeta \pm 0)$  і  $Q_5(\zeta \pm 0)$  залежно від кількості членів  $N$  у розкладі (2.14) при  $d_2/d_1 = 3$

$N$	$w_5(\zeta \pm 0)$	$w_5'(\zeta \pm 0)$	$M_5(\zeta \pm 0)$	$Q_5(\zeta \pm 0)$
5	1.910717	-0.6741793	-3.938804	-4.0655
	0.986099	-0.4919829	0.6326108	4.2152
7	1.055531	-0.4291291	-1.809747	-0.10133
	1.054878	-0.4247421	-2.012769	-1.23910
9	1.054638	-0.4268204	-1.911010	-0.73063
	1.054715	-0.4270997	-1.898053	-0.60000
11	1.054677	-0.4269671	-1.904200	-0.66032
	1.054674	-0.4269543	1.904811	-0.67027
13	1.054675	-0.4269606	-1.904515	-0.66551
	1.054675	-0.4269608	-1.904495	-0.66507
15	1.054675	-0.4269607	-1.904505	-0.66528
	1.054675	-0.4269607	-1.904505	-0.66530
*	1.054675	-0.4269607	-1.904505	-0.66529

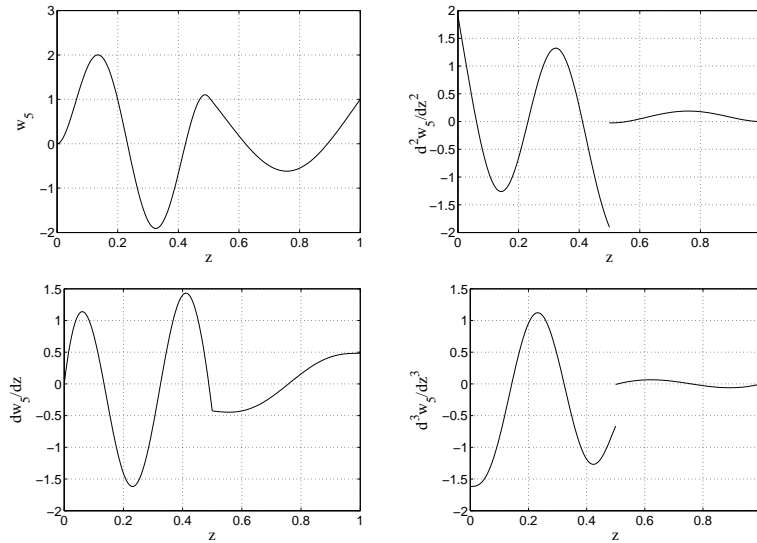


Рис. 2.1: Поведінка п'ятої форми коливань і її перших трьох похідних при  $d_2/d_1 = 3$

їх. Це дає змогу розраховувати моменти та перерізувальні сили в будь-якому перерізі складеного стержня.

Поведінку п'ятої форми коливань складеного стержня і її перших трьох похідних при  $d_2/d_1 = 3$  відображено на рис. 2.1. Тут  $z = z/l$ . З рисунків видно, що шукані розв'язки не володіють достатньою гладкістю. Як і слід було очікувати, похідні від розв'язку другого і більш високого порядку в точці  $z = \zeta$  зазнають розриву першого роду. При цьому, необхідна степінь гладкості розглядуваних розв'язків не приймається заздалегідь, а забезпечується самим варіаційним рівнянням.

Таким чином, побудова наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі з використанням методу декомпозиції області визначення шуканого розв'язку та методу Рітца для функціонала, для якого умови спряження в суміжній точці введених підобластей є природними граничними умовами, дає змогу отримати досить ефективний алгоритм розрахунку власних коливань складених стержнів з кусково-неперервними пружно-масовими характеристиками.

## 2.2 Власні коливання рідини в резервуарах складної геометрії

### 2.2.1 Постановка задачі та варіаційний метод її розв'язування

Задача про лінійні власні коливання ідеальної та нестисливої рідини в нерухомому резервуарі відносно потенціалу зміщень  $\Phi(x, y, z)$  має вигляд [87]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \kappa \Phi \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \int_{\Sigma} \Phi dS = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де  $\Sigma$  — незбурена вільна поверхня рідини;  $S$  — змочувана поверхня резервуара;  $Q$  — область, обмежена поверхнею  $\Sigma \cup S$ ;  $\vec{\nu}$  — орт

зовнішньої нормалі до поверхонь  $\Sigma$  і  $S$ ;  $\varkappa$  — частотний параметр, який підлягає визначенню.

Нехай резервуар має форму тіла обертання. Вісь  $Oz$  декартової системи координат  $Oxyz$  суміσιμο з віссю симетрії ємності та направимо її в бік вільної поверхні  $\Sigma$ . Введемо циліндричну систему координат  $Ox\eta z$ :

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z. \quad (2.24)$$

Надалі будемо розглядати антисиметричні коливання рідини в площині  $Oyz$ . З урахуванням осової симетрії резервуара подамо функцію  $\Phi(x, y, z)$  у вигляді:

$$\Phi(x, y, z) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (2.25)$$

Тоді для складової потенціалу зміщень  $\psi(r, z)$  отримаємо спектральну задачу в області  $G$  меридіонального переріза посудини:

$$\begin{aligned} M(\psi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \psi = 0, \quad (z, r) \in G, \\ \left. \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \varkappa \psi \right) \right|_{L_0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_L = 0, \quad \psi(0, z) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тут  $L_0$  і  $L$  — лінії перетину меридіонального переріза посудини з поверхнями відповідно  $\Sigma$  і  $S$ .

Однорідна крайова задача (2.26) з параметром  $\varkappa$  у граничній умові еквівалентна варіаційній задачі для функціонала [87]:

$$I = \int_G r \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \psi^2 \right] dG - \varkappa \int_{L_0} r \psi^2 ds \quad (2.27)$$

на класі функцій, інтегрованих разом з квадратом та їх першими похідними, і підпорядкованих останній граничній умові з (2.26). Стаціонарні значення функціонала (2.27) досягаються на власних значеннях і функціях задачі (2.26).

На базі варіаційного формулювання задачі (2.26) і методу Трефца раніше було розв'язано широкий клас задач з визначення

частот і форм власних коливань рідини в осесиметричних резервуарах [47], [87]. Однак для видовжених уздовж осі  $Oz$  ємностей, в яких радіус вільної поверхні рідини набагато менший за поздовжній розмір посудини, збіжність методу Трефтца істотно сповільнюється, що призводить до необхідності проведення великого числа обчислень. Для розглядуваного класу резервуарів розв'язок задачі (2.26) може бути ефективно побудовано, якщо виходити при цьому з позицій задач спряження.

Розіб'ємо область  $G$  лінією  $\gamma$  на дві підобласті  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ . При цьому, область  $G^{(1)}$  буде обмежена віссю  $Oz$ , лініями  $L_0$ ,  $L^{(1)}$  і  $\gamma$ , а область  $G^{(2)}$  відповідно віссю  $Oz$  та лініями  $L^{(2)}$  і  $\gamma$ . Тут  $L^{(1)}$  і  $L^{(2)}$  — лінії перетину меридіонального переріза резервуара зі змочуваними границями областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  відповідно. Позначимо розв'язки вихідної задачі (2.26) у підобластях  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  через  $\psi^{(1)}$  і  $\psi^{(2)}$ . Надалі верхній індекс у всіх функціях, що зустрічаються, буде означати номер області, в якій ці функції визначено. При цьому для функцій  $\psi^{(1)}$  і  $\psi^{(2)}$ , а також їх похідних на суміжній лінії  $\gamma$  підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  повинні виконуватися умови спряження

$$(\psi^{(1)} = \psi^{(2)})|_{\gamma}, \quad \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} = - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (2.28)$$

де  $\vec{\nu}^{(1)}$  і  $\vec{\nu}^{(2)}$  — орти зовнішніх нормалей до областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  відповідно. Умови (2.28) фігурують нарівні з граничними умовами вихідної задачі.

Для побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі спряження будемо використовувати варіаційний метод, який для одновимірної задачі застосовувався вище у підрозд. 2.1. Замінивши в функціоналі (2.27) інтеграл по області  $G$  сумою інтегралів по областям  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , подамо його у вигляді

$$I = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} F(\psi^{(i)}) dG^{(i)} - \kappa \int_{L_0} r(\psi^{(1)})^2 ds, \quad (2.29)$$

де

$$F(\psi^{(i)}) = r \left[ \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} (\psi^{(i)})^2.$$



Обчислимо першу варіацію функціонала (2.29), не накладаючи жодних обмежень на варійовані функції, крім умови на осі  $Oz$ .

Нехай ми маємо дві довільні функції  $\psi(r, z)$  і  $\varphi(r, z)$ , які разом з їх першими похідними є неперервними функціями в деякій області  $G$  аж до її границі  $\Gamma$ . Введемо в розгляд такий інтеграл:

$$K(\psi, \varphi) = \int_G r \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dG.$$

Перетворимо його за допомогою формули Гріна:

$$\begin{aligned} K(\psi, \varphi) &= \int_G \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right) \right] dG - \\ &- \int_G \left[ r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \varphi dG = \\ &= - \int_G \left[ M(\psi) + \frac{1}{r} \psi \right] \varphi dG + \int_{\Gamma} r \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \varphi ds. \end{aligned} \quad (2.30)$$

З урахуванням формули (2.30) і прийнятих позначень першу варіацію від функціонала (2.29) можна подати так:

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds + \int_{\gamma^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \right. \\ &- \left. \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + 2 \int_{L_0} \left[ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \varkappa \psi^{(1)} \right] r \delta \psi^{(1)} ds. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Зазначимо, що інтегрування уздовж лінії  $\gamma$  з огляду на прийняте розбиття області  $G$  виконується двічі в протилежних напрямках. Тому тут через  $\gamma^{(k)}$  позначено контури інтегрування вздовж лінії  $\gamma$  з боку областей  $G^{(k)}$ .

Прирівнюючи (2.31) до нуля, отримуємо варіаційне рівняння для визначення функцій  $\psi^{(k)}(r, z)$  і параметра  $\varkappa$ . З цього рівняння і зважаючи на довільне варіювання функцій  $\psi^{(k)}$  в областях  $G^{(k)}$  і на границях  $L_0$  і  $L^{(k)}$ , ( $k = 1, 2$ ) впливає, що в межах кожної

з введених підобластей повинні виконуватися вихідні рівняння та відповідні граничні умови на контурах  $L_0$  і  $L^{(k)}$ .

Якщо припустити, що клас допустимих функцій підпорядковані умові

$$(\psi^{(1)} - \psi^{(2)})|_{\gamma} = 0, \quad (2.32)$$

то друга умова спряження (2.28) буде природною граничною умовою для функціонала  $I$ .

Отже, при використанні методу Рітца для розв'язання варіаційного рівняння  $\delta I = 0$  апроксимації для функцій  $\psi^{(k)}$  повинні вибиратися таким чином, щоб вони забезпечували виконання умови (2.32) на контурі  $\gamma$ . У цьому випадку інші граничні умови задачі для розглядуваного функціонала будуть природними граничними умовами. Побудова координатних функцій, що задовольняють граничну умову (2.32), спричинює певні труднощі. Тому виникає проблема побудови такого функціонала  $F_1$ , для якого всі умови спряження (2.28) були б природними граничними умовами.

Якщо розглядати умову (2.32) як додаткове обмеження на задачу знаходження стаціонарного значення функціоналу  $I(\psi)$ , то можна скористатися методом Лагранжа [43] для побудови такого функціонала. Відповідно до цього введемо в розгляд новий функціонал  $F_1(\psi, \alpha)$ , який має вигляд

$$F_1(\psi, \alpha) = I(\psi) + \int_{\gamma} \alpha(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds, \quad (2.33)$$

де  $\alpha(s)$  — невідома функція, що задана на контурі  $\gamma$  і підлягає визначенню в подальшому. Ця функція називається множником Лагранжа.

Стаціонарне значення функціонала (2.33) потрібно відшукувати за вільного варіювання функцій  $\psi^{(k)}$  і  $\alpha$ . Отже, введення множника Лагранжа зумовлює до збільшення кількості невідомих функцій даної задачі. Щоб уникнути штучного підвищення кількості невідомих функцій вихідної задачі, знайдемо явний вираз для множника Лагранжа. Тоді, на відміну від праці [37], де шукані функції та множник Лагранжа знаходились методом Рітца, після заміни функції  $\alpha(s)$  у функціоналі (2.33) на тотожно

рівний їй вираз, можна отримати узагальнений функціонал відносно функцій  $\psi^{(k)}$ . Це дасть змогу істотно спростити алгоритм знаходження наближеного розв'язку варіаційної задачі за допомогою методу Рітца.

Обчислимо першу варіацію функціонала (2.33) і прирівняємо її до нуля. З урахуванням виразу (2.31) одержимо

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + \\ & + \int_{L_0} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \kappa \psi^{(1)} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \\ & + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(2)} r ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \delta \alpha (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) r ds = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

З вільного варіювання функцій  $\psi^{(k)}$  на границі  $\gamma$  з варіаційного рівняння (2.34) випливають такі співвідношення:

$$\frac{\alpha}{2} = - \left. \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right|_{\gamma}, \quad \frac{\alpha}{2} = \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{\gamma}. \quad (2.35)$$

Складаючи ці дві рівності, отримаємо наступний вираз для множника Лагранжа:

$$\alpha = \left( \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) \right|_{\gamma}. \quad (2.36)$$

З урахуванням цього співвідношення узагальнений функціонал  $F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$  набуде вигляду

$$\begin{aligned} F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = & I(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) + \\ & + \int_{\gamma} (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Проводячи всі міркування в зворотному порядку, переконуємося, що рівняннями Ейлера для функціонала (2.37) будуть рівняння (2.26). При цьому крайові умови задачі та умови спряження

(2.28) для нього є природними граничними умовами, так як вони автоматично виконуються для функцій  $\psi^{(k)}$ , що надають функціоналу  $F$  стаціонарне значення. Це є важливим чинником при розв'язуванні задач спряження варіаційним методом.

Отримані результати дають змогу перейти до побудови наближеного розв'язку вихідної задачі на основі методу Рітца. У зв'язку з цим подамо шукані функції у вигляді таких відрізків узагальнених рядів:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(r, z) &= \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}, \\ \psi^{(2)}(r, z) &= \sum_{j=1}^{n_0} b_j W_j^{(2)},\end{aligned}\tag{2.38}$$

де  $a_j, b_j$  — довільні постійні,  $\{W_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$  і  $\{W_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$  — системи базисних функцій для областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , які задовольняють умову  $M(W_j^{(k)}) = 0$  ( $k = 1, 2$ ).

Вимога того, що системи базисних функцій задовольняють вихідному рівнянню, дозволяє позбавитися від обчислення подвійних інтегралів по області  $G^{(k)}$  при знаходженні коефіцієнтів алгебраїчної системи рівнянь відносно постійних  $a_j$  і  $b_j$ .

Коефіцієнти розкладів (2.38) визначаються з умов стаціонарності функціонала (2.37):

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0.\tag{2.39}$$

В результаті, розв'язування вихідної задачі зводиться до розв'язування узагальненої алгебраїчної проблеми власних значень

$$\begin{aligned}(A - \varkappa B)\vec{X} &= 0, \\ \vec{X}^T &= \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Формування елементів  $\alpha_{ij}$  і  $\beta_{ij}$  матриць  $A$  і  $B$  будемо здійснювати на базі варіаційного рівняння  $\delta F = 0$  з використанням виразу (2.31). При обчисленні  $\partial F / \partial a_i$  у варіації для функціонала

$F$  покладаємо  $\delta\psi^{(1)} = W_i^{(1)}$ ,  $\delta\psi^{(2)} = 0$ . При знаходженні  $\partial F/\partial b_i$  — покладаємо  $\delta\psi^{(1)} = 0$ ,  $\delta\psi^{(2)} = W_i^{(2)}$ . В результаті будемо мати наступні вирази для елементів  $\alpha_{ij}$  і ненульових елементів  $\beta_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= 2 \int_{\Gamma^{(1)}} W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} r ds - \\ &- \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds \\ &(i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\ \alpha_{i,j+m_0} &= \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds \\ &(i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\ \alpha_{i+m_0,j} &= \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds \\ &(i, j = 1, 2, \dots, n_0), \\ \alpha_{i+m_0,j+m_0} &= 2 \int_{\Gamma^{(2)}} W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} r ds - \\ &- \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0), \\ \beta_{i,j} &= 2 \int_{L_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Нагадаємо, що  $\Gamma^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) — границі областей  $G^{(k)}$  ( $\Gamma^{(1)} = L^{(1)} \cup L_0 \cup \gamma$ ;  $\Gamma^{(2)} = L^{(2)} \cup \gamma$ ). Симетричність матриці  $A$  впливає з симетричності оператора вихідної задачі.

Розрахунок власних коливань рідини у конкретному резервуарі за запропонованою вище схемою, свідчить про те, що такий алгоритм забезпечує поточкову збіжність для розв'язків і їх нормальних похідних на суміжній границі областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ .

### 2.2.2 Побудова розв'язків задачі для випадку, коли одна з підобластей є канонічною

Запропонований вище підхід побудови розв'язків розглядуваної спектральної задачі можна суттєво спростити, якщо границі однієї з підобластей збігаються з координатними лініями будь-якої систем координат. У цьому випадку за допомогою методу Фур'є можна побудувати координатні функції, які задовольняють вихідне рівняння і граничні умови на частині границі цієї області.

Як приклад розглянемо складену посудину, яка має форму прямого кругового циліндра одиничного радіуса з довільним осесиметричним днищем. Меридіональний переріз такої посудини наведено на рис. 2.2.

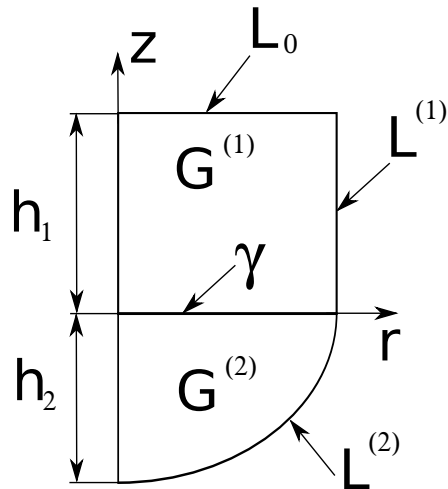


Рис. 2.2: Меридіональний переріз посудини

Розіб'ємо область  $G$  прямою лінією  $\gamma$ , яка перпендикулярна до осі  $Oz$ , на дві підобласті  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ . У цьому випадку область  $G^{(1)}$  матиме форму прямокутника одиничної ширини і висоти  $h_1$ .

Функції  $\psi^{(1)}(z, r)$  і  $\psi^{(2)}(z, r)$ , визначені відповідно в однозв'язних областях  $G_1$  і  $G_2$ , у загальному випадку можна

подати так:

$$\psi^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j(z, r), \quad \psi^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j(z, r). \quad (2.42)$$

Тут  $\{V_j(z, r)\}_{j=1}^{\infty}$  — системи базисних функцій, що задовольняють вихідне рівняння (2.26), умови повноти і лінійної незалежності [87]. В полярній системі координат  $R$  і  $\vartheta$  розв'язки цього рівняння можна подати у вигляді:

$$V_j(z, r) = \frac{2(j-1)!}{(j+1)!} R^j P_j^{(1)}(\cos \vartheta), \quad j \geq 1, \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}, \quad (2.43)$$

де  $P_j^{(1)}(\cos \theta)$  — приєднані функції Лежандра першого роду. Вирази (2.43) мають поліноміальну структуру відносно змінних  $z$  і  $r$ , причому кожний такий поліном містить лише члени порядку  $j$ .

Вирази для коефіцієнтів матриці  $A$  у деяких випадках можуть бути істотно спрощені за рахунок раціонального вибору систем базисних функцій для апроксимації розв'язків  $\psi^{(1)}$  і  $\psi^{(2)}$  в областях відповідно  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ .

Застосовуючи метод розділення змінних, координатні функції для підобласті  $G^{(1)}$  доцільно вибрати у вигляді:

$$W_i^{(1)} = \{\zeta_i \operatorname{ch}[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa \operatorname{sh}[\zeta_i(z - h_1)]\} J_1(\zeta_i r), \quad (2.44)$$

де  $J_1(x)$  — функція Бесселя першого роду і першого порядку;  $\zeta_i$  —  $i$ -й корінь рівняння  $J_1'(x) = 0$ .

Наведена система координатних функцій  $\{W_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$  заздалегідь задовольняє вихідне рівняння в області  $G^{(1)}$  і граничні умови для функції  $\psi^{(1)}$  на контурах  $L_0$  і  $L_1$ . Крім того, ці функції ортогональні одна до одної з вагою  $r$ .

Для підобласті  $G^{(2)}$  в якості координатних функцій виберемо власні функції наступної однорідної граничної задачі з параметром у граничній умові:

$$\begin{aligned} M(W_i^{(2)}) &= 0, \\ \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \Big|_{L^{(2)}} &= 0, \quad \left( \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \omega_i W_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Гранична задача (2.45) визначає вільні коливання рідини в посудині, що має форму днища розглядуваного резервуара. Всі власні значення  $\omega_i$  задачі (2.45) дійсні, додатні і мають єдину граничну точку, розташовану на нескінченності. У свою чергу, сукупність власних функцій має властивість повноти на лінії  $\gamma$  і задовольняє умови ортогональності [87]:

$$\int_{\gamma} W_n^{(2)} W_m^{(2)} r ds = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{\partial W_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial W_m^{(2)}}{\partial z} r ds = 0, \quad (n \neq m). \quad (2.46)$$

Наближений розв'язок задачі (2.45) можна подати так:

$$W_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} V_k(z, r), \quad (2.47)$$

де  $X_k^{(i)}$  — невизначені постійні, а  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  — система лінійно незалежних частинних розв'язків вихідного рівняння у сферичній системі координат (2.43). У змінних  $r$  і  $z$  ці функції мають вигляд [87]

$$V_1 = r, \quad V_2 = zr, \quad V_3 = z^2 r - \frac{1}{4} r^3. \quad (2.48)$$

Подальше обчислення функцій  $V_k$  та їх перших частинних похідних ґрунтується на використанні таких рекурентних формул [87]:

$$V_{k+1} = \frac{[(2k+1)zV_k - (k-1)(z^2 + r^2)V_{k-1}]}{k+2},$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial z} = (k-1)V_{k-1}, \quad r \frac{\partial V_k}{\partial r} = kV_k - (k-1)zV_{k-1}.$$

Сталі  $X_k^{(i)}$  знаходяться з умов стаціонарності функціонала, який має вигляд подібний до функціонала (2.27). В результаті визначення векторів  $\vec{X}^{(i)} = \{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{K_0}^{(i)}\}$  зводиться до розв'язування однорідної алгебраїчної системи

$$(\tilde{A} - \omega_i \tilde{B}) \vec{X}^{(i)} = 0, \quad (2.49)$$



де елементи  $a_{ij}$  і  $b_{ij}$  матриць  $\tilde{A}$  і  $\tilde{B}$  обчислюються за формулами

$$\alpha_{i,j} = \int_{L^{(2)} \cup \gamma} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu^{(2)}} r ds, \quad b_{i,j} = \int_{\gamma} V_i V_j r ds.$$

Система базисних функцій  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  у більшості випадків забезпечує знаходження з досить високою точністю тільки перших трьох чотирьох власних функцій і власних значень задачі (2.45). Визначення довільної скінченної кількості функцій  $W_i^{(2)}(z, r)$  можна досягти за рахунок розширення класу допустимих функцій такими функціями, які враховували б властивість локалізації вищих власних функцій в околі границі  $\gamma$  області  $G^{(2)}$  і їх велику змінність при віддаленні від цієї границі всередину області  $G^{(2)}$ . Тому, слідуючи праці [69], отримаємо нову систему базисних функцій  $\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ , яка має наступну структуру:

$$\begin{aligned} \{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} &= \{V_1, V_2, \dots, V_{K_0}, V_{K_0+1}, V_{K_0+2}, \dots, V_{K_0+i}\}, \\ N_0 &= K_0 + p - p_0 + 1, \end{aligned} \quad (2.50)$$

де перші  $K_0$  координатних функцій обчислювалися за формулами (2.48), тоді як наступні базисні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \{V_{K_0+i}\}_{i=1}^{p-p_0+1} &= \frac{\text{ch}[\zeta_{q_i}(z + h_2)]}{\zeta_{q_i} J_1(\zeta_{q_i}) \text{sh}(\zeta_{q_i} h_2)} J_1(\zeta_{q_i} r), \\ q_i &= p_0 + i - 1, \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Тут  $p$  — кількість обчислюваних власних функцій задачі (2.45);  $h_2$  — висота днища посудини;  $p_0$  — параметр, який характеризує кількість обчислюваних власних функцій за координатними функціями  $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$ . Так, якщо за цим базисом з достатнім ступенем точності знаходяться перші  $m$  власних функцій задачі (2.45), то у формулах (2.50) потрібно покласти  $p_0 = m + 1$ . Таким чином, при  $p = 10$  і  $p_0 = 5$  до системи координатних функцій  $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$  слід додати шість базисних функцій  $\{V_{K_0+i}\}_{i=1}^6$ .

Припускаючи, що функції  $W_i^{(2)}$  знайдено, перейдемо до побудови розв'язків даної задачі, подавши функції  $\psi^{(1)}(z, r)$  і  $\psi^{(2)}(z, r)$

у такому вигляді:

$$\psi^{(1)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}, \quad \psi^{(2)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} b_j W_j^{(2)}. \quad (2.51)$$

За вибраних координатних функцій алгебраїчна система (2.40) розпадається на дві системи відносно вектор-стовпців  $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}\}$  і  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_0}\}$ :

$$C\vec{a} = 0, \quad C^T\vec{b} = 0. \quad (2.52)$$

При цьому коефіцієнти  $c_{i,j}$  несиметричної матриці  $C$  мають вигляд:

$$c_{i,j} = \int_{\gamma} \left( W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0).$$

З урахуванням виразу (2.44) елементи  $c_{i,j}$  можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= (\zeta_j \operatorname{ch} \zeta_j h_1 - \varkappa \operatorname{sh} \zeta_j h_1) \omega_i d_{i,j} - \\ &\quad - (\varkappa \zeta_j \operatorname{ch} \zeta_j h_1 - \zeta_j^2 \operatorname{sh} \zeta_j h_1) d_{i,j}, \\ d_{i,j} &= \int_0^1 (W_i^{(2)} J_1(\zeta_j r))_{z=0} r dr. \end{aligned}$$

З умови існування нетривіальних розв'язків рівнянь (2.52) отримуємо характеристичне рівняння для визначення параметра  $\varkappa$ :

$$\det C = 0. \quad (2.53)$$

Компоненти векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  визначаються з рівнянь (2.52) з точністю до довільних сталих множників. З огляду на це зв'язок між коефіцієнтами  $a_i$  і  $b_i$  буде здійснюватися за такими формулами:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_0} a_j (\zeta_j \operatorname{ch} \zeta_j h_1 - \varkappa \operatorname{sh} \zeta_j h_1) d_{i,j}}{\sum_{j=1}^{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} X_j^{(i)} \beta_{k,j}} \quad (i = 1, 2, \dots, m_0)$$

Таким чином, розв'язування вихідної задачі у цьому випадку звелось до розв'язування однорідної алгебраїчної системи  $C\vec{a} = 0$  порядку  $m_0$ .

### 2.2.3 Результати розрахунків та їх аналіз

Наведемо деякі результати розрахунків частот і форм власних коливань рідини за запропонованим алгоритмом для випадку, коли днищем посудини є півсфера одиничного радіуса.

У табл. 2.4 наведено збіжність перших п'яти власних значень  $\varkappa_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) залежно від кількості членів у розкладі (2.51).

Таблиця 2.4: Збіжність частот  $\varkappa_i$  залежно від порядку  $m_0$  алгебраїчної системи (2.52) при  $h_1 = 0.5$  і  $K_0 = 24$

$m_0$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$	$\varkappa_5$
1	1.7935458	—	—	—	—
2	1.7936587	5.3311629	—	—	—
3	1.7936712	5.3311647	8.5363099	—	—
4	1.7936740	5.3311651	8.5363099	11.706005	—
5	1.7936749	5.3311652	8.5363099	11.706005	14.863589
6	1.7936753	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
7	1.7936755	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
8	1.7936756	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
9	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
10	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589

Дані табл. 2.4 свідчать про те, що для визначення перших п'яти власних частот коливань рідини з високим ступенем точності в розкладах для функцій  $\psi^{(1)}$  і  $\psi^{(2)}$  необхідно утримувати по п'ять членів. Зміна висоти рідини в циліндричній частині посудини несуттєво впливає на швидкість збіжності послідовних наближень задачі.

Зазначимо, що елементи  $c_{i,j}$  при ( $i \neq j$ ) матриці  $C$  алгебраїчної системи (2.52) за абсолютною величиною на два порядки менші від діагональних членів  $c_{i,i}$ . У зв'язку з цим якщо при розв'язуванні трансцендентного рівняння (2.53) знехтувати недіа-

Таблиця 2.5: Виконання умов спряження на границі  $\gamma$  для першої форми коливань при  $h_1 = 0.5$ ,  $K_0 = 24$  залежно від порядку  $m_0$  алгебраїчної системи (2.52)

$r$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$	$\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$
$m_0 = 10$				
0.20	0.13981	0.13979	0.22952	0.22950
0.40	0.26635	0.26634	0.43425	0.43424
0.60	0.36772	0.36772	0.59060	0.59059
0.80	0.43450	0.43451	0.67903	0.67904
1.00	0.45940	0.45958	0.68411	0.68433
$m_0 = 15$				
0.20	0.13981	0.13980	0.22969	0.22968
0.40	0.26634	0.26634	0.43456	0.43456
0.60	0.36772	0.36772	0.59065	0.59065
0.80	0.43451	0.43451	0.67895	0.67895
1.00	0.45944	0.45953	0.68225	0.68234

гональними членами матриці  $C$ , то для  $i$ -ї форми коливань рідини можна встановити наближену формулу для частотного параметра  $\varkappa_i$ :

$$\varkappa_i = \frac{\zeta_i(\omega_i + \zeta_i \operatorname{th} \zeta_i h_1)}{\zeta_i + \omega_i \operatorname{th} \zeta_i h_1}. \quad (2.54)$$

Ця формула збігається з відповідною формулою, наведеною у монографії [87], яка була там отримана з використанням наближених умов спряження на суміжній лінії підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ . Відповідні значення параметрів  $\varkappa_i$ , обчислені за формулою (2.54), збігаються в даному випадку з даними табл. 2.4 аж до чотирьох-п'яти значущих цифр.

У табл. 2.5 для  $h_1 = 0.5$ ,  $K_0 = 24$  наведено значення функцій  $\psi^{(1)}(z, r)$  і  $\psi^{(2)}(z, r)$ , а також їх похідних у напрямку осі  $Oz$ , які обчислені на лінії спряження  $\gamma$  за різних значень координати  $r$  і порядку  $m_0$  алгебраїчної системи (2.52).

Результати розрахунків свідчать, що запропонований метод розв'язування вихідної задачі забезпечує, на відміну від праці [87], поточкову збіжність для розв'язків і їх похідних у напрямку осі

$Oz$  на суміжній границі підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ .

Таким чином, запропонований тут узагальнений функціонал для розв'язування задачі спряження забезпечує виконання з високим ступенем точності умов спряження в кожній точці прямої  $\gamma$ .

Наприкінці наведемо розв'язування вихідної задачі з позицій запропонованого варіаційного методу для випадку, коли посудина має форму прямого кругового циліндра одиничного радіуса. Для цієї посудини однорідна крайова задача (2.26) має точний розв'язок, який можна подати в такій формі:

$$\begin{aligned}\psi_i(z, r) &= c_i \operatorname{ch}[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \\ \varkappa_i &= \zeta_i \operatorname{th}[\zeta_i(h_1 + h_2)],\end{aligned}\quad (2.55)$$

де  $c_i$  — довільні сталі;  $h_2$  — висота прямокутної області  $G^{(2)}$ .

Систему базисних функцій  $W_i^{(1)}(z, r)$  для області  $G^{(1)}$  оберемо у формі (2.44), тоді як для області  $G^{(2)}$  оберемо базисні функції  $W_i^{(2)}(z, r)$  у наступному вигляді

$$W_i^{(2)} = \frac{\zeta_i}{\operatorname{ch}[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \operatorname{ch}[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r) \quad (2.56)$$

Кожна з цих функцій задовольняє вихідне рівняння і граничну умову

$$\left. \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{L^{(2)}} = 0.$$

З огляду на ортогональність базисних функцій  $W_i^{(1)}$  і  $W_i^{(2)}$  і їх похідних у напрямку осі  $Oz$  на лінії  $\gamma$  алгебраїчна система (2.52) в цьому випадку зведеться до алгебраїчної системи відносно коефіцієнтів  $a_i$  з діагональною матрицею коефіцієнтів. З розв'язування цієї алгебраїчної системи власні функції та власні значення спектральної задачі (2.26) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)} &= a_i \{ \zeta_i \operatorname{ch}[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa_i \operatorname{sh}[\zeta_i(z - h_1)] \} J_1(\zeta_i r), \\ \psi_i^{(2)} &= a_i \frac{\zeta_i}{\operatorname{ch}[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \operatorname{ch}[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \\ \varkappa_i &= \zeta_i \operatorname{th}[\zeta_i(h_1 + h_2)] \quad (i = 1, 2, \dots)\end{aligned}\quad (2.57)$$

Порівнюючи вирази (2.57) і (2.55), приходимо до висновку, що в даному випадку узагальнене варіаційне формулювання задачі спряження призводить до розв'язку, який збігається з точним розв'язком вихідної задачі.

Таким чином, з позицій методу декомпозиції запропоновано наближений метод розв'язування двовимірної спектральної задачі про вільні коливання ідеальної рідини в ємностях складної геометрії.

Метод базується на формулюванні узагальненого функціонала, для якого умови спряження на суміжній границі штучно введених підобластей відносяться до числа його природних граничних умов. Це дає змогу незалежно вибирати системи базисних функцій в цих областях, що в багатьох випадках спрощує отримання наближеного розв'язку у вихідній області.

На конкретному прикладі показано ефективність запропонованого підходу розв'язування даної задачі шляхом порівняння отриманих результатів з існуючими наближеними і точними розв'язками вихідної задачі. Чисельна реалізація запропонованого алгоритму вказує на той факт, що в рамках цього підходу послідовні наближення методу Трефтца мають збіжність у рівномірній метриці на суміжній лінії штучно введених підобластей як для самих розв'язків, так і для перших похідних за позовжною координатою.

### **2.3 Метод Рітца в задачі про вільні коливання спряжених оболонок обертання**

Тонкостінні конструкції у вигляді складених оболонок обертання широко використовуються у різних галузях машинобудування та будівництві. Розвиток обчислювальної техніки забезпечив можливість поширення в розрахункову практику чисельних методів розв'язування розглядуваних задач. Для визначення вільних коливань складених оболонок обертання може бути використаний метод чисельного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь [25, 33]. При цьому доводиться багаторазово розв'язувати граничні задачі в поєднанні з ітераційним процесом

для знаходження частот коливань.

При використанні методу скінченних елементів (МСЕ) ширина кільцевих елементів для забезпечення необхідної точності обчислень повинна бути вибрана досить малою [19]. В результаті система рівнянь МСЕ може мати досить високий порядок, що ускладнює побудову розв'язку. Застосування МСЕ до розрахунку коливань складених оболонкових конструкцій викладено в працях [99, 116].

Застосування методу Рітца до вивчення коливань складених оболонок є непростою задачею оскільки підсистеми конструкції описуються різними рівняннями і необхідно виконувати досить складні умови спряження, які виникають на суміжній границі. Модифікований варіаційний метод для аналізу коливань складених оболонок запропоновано в працях [113, 114, 124]. Метод базується на поєднанні варіаційного принципу та методу найменших квадратів з придатним вибором вагових функцій.

Нижче розглядається задача про коливання складених оболонок обертання, поставленої з використанням декомпозиції області визначення шуканих функцій. Основою даного підходу є побудований узагальнений функціонал, для якого умови спряження є природними граничними умовами.

### 2.3.1 Постановка задачі та побудова узагальненого функціонала

Розглядаються неосесиметричні вільні коливання двох співвісно розташованих тонкостінних оболонок обертання різної геометрії, які спряжені між собою уздовж деякої паралелі. Передбачається, що на лінії спряження геометричні характеристики складеної оболонки зазнають розривів першого роду. Це може бути розрив кута між дотичною до меридіана та віссю обертання оболонки або розрив кривини меридіана. Вважається також, що елементи оболонкової системи виконано з ізотропного матеріалу із густиною  $\rho$  і мають постійну товщину  $h$ . Пружні властивості оболонки характеризуються модулем Юнга  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ . Припускаємо, що складена оболонка обмежена двома паралелями  $L_1$  і  $L_2$ . В якості криволінійних координат для довільної точки

серединної поверхні оболонки виберемо довжину дуги меридіана  $s$ , що відраховується від деякої початкової паралелі  $s = s_1$ , та кут  $\varphi$ , що визначає положення точки на відповідній паралелі. Позначимо через  $R_1$  — радіус кривини меридіана, а через  $r = r(s)$  — відстань від точки меридіана до осі обертання. Проекції переміщення точок серединної поверхні на додатні напрямки меридіана та паралелі, а також зовнішню нормаль до поверхні оболонки позначимо через  $u$ ,  $v$  і  $w$ .

Надалі користуватимемося основними положеннями технічної теорії тонких оболонок. При усталених коливаннях оболонки з частотою  $\omega$  для несиметричної форми деформації її серединної поверхні переміщення  $u$ ,  $v$  і  $w$  будемо шукати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= u(s) \cos n\varphi \sin \omega t, \\ v(s, \varphi, t) &= v(s)n \sin \varphi \sin \omega t, \\ w(s, \varphi, t) &= w(s) \cos n\varphi \cos \omega t \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Після переходу до безрозмірних величин та відокремлення кутової і часової змінних зусилля  $T_1$ ,  $S$ ,  $\tilde{Q}_1$ , згинальний  $M_1$  та крутучувальний  $H$  моменти будуть обчислюватися за формулами

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left( \frac{n}{r}v + \frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2} \right), \\ S &= \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}v - \frac{n}{r}u \right), \\ M_1 &= -c^2 \left[ \frac{d^2w}{ds^2} + \nu \left( \frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{n^2}{r^2}w \right) \right], \\ \tilde{Q}_1 &= -c^2 \left[ \frac{d}{ds} \Delta w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left( \frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r}w \right) \right], \\ \Delta w &= \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2}w, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \\ H &= c^2(1-\nu) \left( \frac{n}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{r'n}{r^2}w \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Тут  $R_0$  — деякий характерний розмір оболонки.

Визначення вектор-функцій  $\vec{u}^{(k)} = \{u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}\}^T$  та частот вільних коливань складеної оболонки зводиться до інтегрування



двох однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\mathfrak{L}^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) = \mathcal{A}^{(k)}\vec{u}^{(k)} - \lambda^2\vec{u}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (2.60)$$

де

$$\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} & L_{13}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} & L_{23}^{(k)} \\ L_{31}^{(k)} & L_{32}^{(k)} & L_{33}^{(k)} \end{pmatrix}; \quad \lambda^2 = \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E}.$$

Явні вирази для диференціальних операторів  $L_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ) наведено в розд. 1.

Тут і надалі верхній індекс  $k = 1, 2$  при функціях та операторах позначає відповідні величини, що відносяться до першої чи другої оболонки. Системи рівнянь (2.60) при  $k = 1$  і  $k = 2$  мають однакову структуру та відрізняються одна від одної лише коефіцієнтами. Першій оболонці відповідає область зміни незалежної змінної  $s$   $G^{(1)} = [s_1, s_0]$ , а другій —  $G^{(2)} = [s_0, s_2]$ .

До рівнянь (2.60) слід додати граничні умови, що виражають умови закріплення торців складеної оболонки. Крім цих умов необхідно також виконати умови спряження розв'язків на суміжній границі першої та другої оболонки. При формулюванні цих умов необхідно враховувати, що сили та переміщення для різних частин складеної оболонки розраховуються у локальних системах координат. Найбільш прості умови спряження можна отримати на основі проектування ортів першої оболонки на орти другої оболонки. При цьому умови спряження при  $s = s_0$  для переміщень оболонки набудуть вигляду

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi, \\ w^{(2)} &= u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi, \\ v^{(2)} &= v^{(1)}, \quad \frac{dw^{(2)}}{ds} = \frac{dw^{(1)}}{ds}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

У свою чергу, силові умови спряження при  $s = s_0$  можна записати

так:

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_1^{(1)} \cos \psi - \tilde{Q}_1^{(1)} \sin \psi, \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= T_1^{(1)} \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(1)} \cos \psi, \\ S^{(2)} &= S^{(1)}; \quad M_1^{(2)} = M_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

де  $\psi = \theta^{(2)}(s_0) - \theta^{(1)}(s_0)$ ;  $\theta^{(1)}(s_0)$  та  $\theta^{(2)}(s_0)$  — кути, утворені нормаллю до серединної поверхні та віссю обертання першої та другої оболонки в точці  $s = s_0$  відповідно.

Таким чином, при розв'язуванні задачі про власні коливання складених оболонок крім граничних умов на торцях необхідно виконати ще вісім досить складних умов спряження (2.61) та (2.62).

Для визначеності вважатимемо, що при  $s = s_1$  торець оболонки вільний, а при  $s = s_2$  — жорстко закріплений. Тоді граничні умови набудуть вигляду:

$$\left( u = v = w = \frac{dw}{ds} \right)_{s=s_2} = 0, \quad (2.63)$$

$$(T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1)_{s=s_1} = 0. \quad (2.64)$$

Варіаційне формулювання вихідної спектральної задачі можна отримати з принципу можливих переміщень Лагранжа у поєднанні з принципом Д'Аламбера. В результаті задача зводиться до пошуку стаціонарних значень для функціонала:  $I(\vec{u})$

$$I(\vec{u}) = \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} F^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} \quad (2.65)$$

на класі функцій, підпорядкованих граничним умовам (2.61) — (2.64). Надалі передбачається, що в кожній із введених підобластей поле переміщень, зусиль та моментів має властивість неперервності та диференційовності.

З урахуванням інтегрування частинами варіацію від функціонала (2.65) на класі функцій, що задовольняють граничні умови

(2.63), можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \tilde{J}^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) \delta(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} + \\ & + \left( T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=s_0} - \\ & - \left( T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_0} - \\ & - \left( T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=s_1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Прирівнюючи вираз (2.66) до нуля отримаємо варіаційне рівняння для визначення функцій  $\vec{u}^{(k)}$  в областях  $\vec{G}^{(k)}$ . В силу довільності варіювання функцій  $\vec{u}^{(k)}$  в областях  $\vec{G}^{(k)}$  і на границі при  $s = s_1$  з цього рівняння випливає, що в межах кожної із введених підобластей повинні виконуватися рівняння (2.60) і граничні умови (2.64) при  $s = s_1$ .

Якщо припустити, що клас допустимих функцій підпорядкований кінематичним умовам спряження (2.61) при  $s = s_0$ , можна показати, що умови (2.62) є природними граничними умовами для функціонала (2.65). Таким чином, при застосуванні методу Рітца для розв'язування варіаційного рівняння  $\delta I = 0$  апроксимації для функцій  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$  і  $w^{(k)}$  повинні вибиратися таким чином, щоб вони забезпечували виконання умов (2.61), що являє собою в загальному випадку досить складну самостійну задачу.

Граничні умови (2.61) можна розглядати як додаткові обмеження задачі про знаходження стаціонарних значень функціонала (2.65). Виключити їх із розгляду можна за допомогою множників Лагранжа. Відповідно до цього введемо до розгляду розширений функціонал, який має вигляд

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{u}) = & I(\vec{u}) + \left[ \alpha_1(u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \alpha_3(u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi - w^{(2)}) + \alpha_4 \left( \frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=s_0}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

де  $\alpha_i$  — множники Лагранжа, що підлягають визначенню надалі.

Перетворення функціонала (2.65) на функціонал (2.67) досягнуто ціною збільшення кількості невідомих вихідної задачі, що ускладнює побудову розв'язків. Цю задачу можна суттєво спростити, якщо попередньо знайти явні вирази для множників Лагранжа в термінах вихідних невідомих  $\vec{u}$ . З цією метою випишемо першу варіацію функціонала (2.67) при вільному варіюванні функцій  $\vec{u}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) і сталих  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ). З цієї варіації випишемо лише позаінтегральні члени при  $s = s_0$ . При цьому матимемо

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \delta\alpha_1(u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ & + \delta\alpha_3(u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi - w^{(2)}) + \delta\alpha_4 \left( \frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) + \\ & + (\alpha_1 \cos \psi + T_1^{(1)} + \alpha_3 \sin \psi) \delta u^{(1)} - (\alpha_1 + T_1^{(2)}) \delta u^{(2)} + \\ & + (S^{(1)} + \alpha_2) \delta v^{(1)} - (\alpha_2 + S^{(2)}) \delta v^{(2)} + \\ & + (\alpha_3 \cos \psi - \alpha_1 \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(1)}) \delta w^{(1)} - \\ & - (\alpha_3 + \tilde{Q}_1^{(2)}) \delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)}) \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + \\ & \left. + (M_1^{(2)} - \alpha_4) \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right] \times r \Bigg\}_{s=s_0}. \end{aligned} \right. \quad (2.68)$$

Якщо функціонал (2.67) набуває стаціонарних значень для довільних варіацій  $\delta\vec{u}^{(k)}$ ,  $\frac{d\delta w^{(k)}}{ds}$  ( $k = 1, 2$ ) і  $\delta\alpha_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), то з виразу (2.68) після низки тотожних перетворень можна встановити такі формули для множників Лагранжа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} [T_1^{(1)} \cos \psi - \tilde{Q}_1^{(1)} \sin \psi + T_1^{(2)}]_{s=s_0}, \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2} [S^{(1)} + S^{(2)}]_{s=s_0}, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2} [\tilde{Q}_1^{(1)} \cos \psi + T_1^{(1)} \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(2)}]_{s=s_0}, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2} [M_1^{(1)} + M_1^{(2)}]_{s=s_0}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Отримані співвідношення (2.69) дозволяють тепер сформулювати узагальнений функціонал  $\Pi(\vec{u})$ , замінивши у функціоналі (2.67) множники Лагранжа  $\alpha_i$  відповідно рівними їм величинами (2.69). Граничні умови (2.61), (2.62) та (2.64) є природними граничними умовами для функціонала  $\Pi(\vec{u})$ , оскільки вони автоматично виконуються для функцій, що доставляють йому стаціонарні значення.

### 2.3.2 Побудова координатних функцій та алгебраїчної системи

Сформульований узагальнений функціонал дає змогу проводити незалежне варіювання функцій  $u^{(k)}(s)$ ,  $v^{(k)}(s)$  та  $w^{(k)}(s)$  у підобластях  $G^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ). Відповідно до методу Рітца представимо шукані функції у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^N a_j^{(k)} U_j^{(k)}(s), \\ v^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^N b_j^{(k)} V_j^{(k)}(s), \\ w^{(k)}(s) &= \sum_{j=1}^N c_j^{(k)} W_j^{(k)}(s). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Тут  $a_j^{(k)}$ ,  $b_j^{(k)}$  і  $c_j^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) — довільні сталі, що підлягають визначенню надалі,  $\{U_j^{(k)}(s), V_j^{(k)}(s), W_j^{(k)}(s)\}$  — системи координатних функцій, які визначено в підобластях  $G^{(k)}$ .

Для незамкнутих у меридіональному напрямку складених оболонок коефіцієнти вихідних рівнянь є аналітичними функціями у відповідних областях. Згідно з теорією диференціальних рівнянь регулярні розв'язки таких рівнянь можуть бути представлені у вигляді розкладів у степеневі ряди, які сходяться в цій же області. Отже, систему базисних функцій для методу Рітца можна побудувати на класі степеневих функцій. Така система координатних функцій може бути використана для побудови наближеного розв'язку при невеликій кількості базисних елементів. В іншому

випадку суттєво зростають похибки округлення як при визначенні алгебраїчної системи, так і при її розв'язуванні, що призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. Суттєво уникнути цих проблем можна замінивши степеневі функції поліномами Лежандра  $P_n(y)$  першого роду з невід'ємними цілими індексами, абсолютні значення яких не зростають на відрізку ортогональності  $[-1, 1]$  зі збільшенням їхнього порядку. Для апроксимації функцій на відрізку  $[a, b]$  необхідно ввести перетворення сегмента  $[-1, 1]$  на сегмент  $[a, b]$ .

За прийнятих вище умов закріплення торців складеної оболонки системи координатних функцій, що задовольняють головні граничні умови задачі (2.63), набудуть вигляду

$$\begin{aligned} U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = W_j^{(1)} = P_j(y), & y &= \frac{2s}{s_0 - s_1} - \frac{s_1 + s_0}{s_0 - s_1}, \\ U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = (s_2 - s)P_j(x), & W_j^{(2)} &= (s_2 - s)^2 P_j(x), \\ x &= \frac{2(s - s_2)}{s_2 - s_0} + 1, \end{aligned} \quad (2.71)$$

де  $P_j(z)$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра.

Обчислення многочленів Лежандра та їх похідних можна проводити за допомогою відомих рекурентних співвідношень. Введені системи базисних функцій є лінійно незалежними і повними системами функцій та забезпечують стійкість обчислювального процесу за великої кількості членів  $N$  у розкладах (2.70).

З умов стаціонарності узагальненого функціонала отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X}^T = 0, \quad (2.72)$$

де

$$\vec{X} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)}, c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, \dots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(2)}\}.$$

Представимо матрицю  $A$  у вигляді суми двох матриць:

$$A = A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(2)}, \quad (2.73)$$

де елементи матриці  $A^{(1)}$  утворені з необхідних умов екстремуму функціонала  $I(\vec{u})$  (2.65), а елементи матриці  $A^{(2)}$  обумовлені наявністю в узагальненому функціоналі додаткових членів із множниками Лагранжа.

У зв'язку зі складним виглядом виразів для  $F^{(k)}(\vec{u}^{(k)})$  у функціоналі (2.65), побудова елементів матриці  $A^{(1)}$  не є простою задачею і призводить до їх досить громіздких формул, що робить алгоритм незручним у його реалізації. Щоб уникнути цих труднощів пропонується будувати алгебраїчну систему, виходячи з варіації функціонала  $I$ , яка представляється в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{s_1}^{s_2} & \left[ \Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \right. \\ & + \Psi_{12}(\delta v, u) + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \\ & \left. + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] r ds - \\ & - \lambda^2 \int_{s_1}^{s_2} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Введені тут оператори  $\Psi_{ij}(p, q)$  для довільної оболонки обертання наведено у розд. 1. Ненульові елементи верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці  $A^{(1)}$  матимуть вигляд

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{11}(U_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \quad \alpha_{i+N, j+N}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds,$$

$$\alpha_{i+2N, j+2N}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) r ds \quad (i = \overline{1, N}, j \geq i),$$

$$\alpha_{i, j+N}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \quad \alpha_{i, j+2N}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds,$$

$$\alpha_{i+N,j+2N}^{(1)} = \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds \quad (i, j = \overline{1, N}). \quad (2.75)$$

Формули для коефіцієнтів  $\alpha_{i+3N,j+3N}^{(1)}, \alpha_{i+3N,j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+3N,j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+4N,j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+4N,j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+5N,j+5N}^{(1)}$  можна отримати з формул (2.75) після відповідної заміни в них функцій  $U_k^{(1)}, V_k^{(1)}, W_k^{(1)}$  на функції  $U_k^{(2)}, V_k^{(2)}, W_k^{(2)}$  і меж інтегрування від  $s_0$  до  $s_2$ .

Елементи  $\alpha_{ij}^{(2)}$  верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці  $A^{(2)}$  можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}^{(2)} &= - \left[ T_1(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(1)} + T_1(U_j^{(1)}, 0, 0)U_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i,j+N}^{(2)} &= - \left[ T_1(0, V_j^{(1)}, 0)U_i^{(1)} + S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i,j+2N}^{(2)} &= - \left[ T_1(0, 0, W_j^{(1)})U_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i,j+3N}^{(2)} &= \left[ T_1(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(2)} - T_1(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(1)} \right] \cos \psi \Big|_{s=s_0}, \\ \alpha_{i,j+4N}^{(2)} &= \left[ S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} - T_1(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)} \cos \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i,j+5N}^{(2)} &= - \left[ T_1(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(1)} \cos \psi + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{Q}_1(W_j^{(2)})U_i^{(1)} \sin \psi - T_1(U_i^{(1)}, 0, 0)W_j^{(2)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+N}^{(2)} &= - \left[ S(0, V_i^{(1)})V_j^{(1)} + S(0, V_j^{(1)})V_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+2N}^{(2)} &= 0, \\ \alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} &= - \left[ S(U_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)} - T_1(0, V_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} \cos \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} &= - \left[ S(0, V_j^{(2)})V_i^{(1)} - S(0, V_i^{(1)})V_j^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+5N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, V_i^{(1)}, 0)W_j^{(2)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} &= - \left[ \tilde{Q}_1(W_i^{(1)})W_j^{(1)} + \tilde{Q}_1(W_j^{(1)})W_i^{(1)} - \right. \\
&\quad \left. - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{ds} - M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, 0, W_i^{(1)})U_j^{(2)} \cos \psi - \right. \\
&\quad \left. - (\tilde{Q}_1(W_i^{(1)})U_j^{(2)} - T_1(U_j^{(2)}, 0, 0)W_i^{(1)}) \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+2N,j+4N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, V_j^{(2)}, 0)W_i^{(1)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, 0, W_j^{(2)})W_i^{(1)} + T_1(0, 0, W_i^{(1)})W_j^{(2)} \right] \sin \psi + \\
&\quad + \left[ \tilde{Q}_1(W_i^{(1)})W_j^{(2)} - \tilde{Q}_1(W_j^{(2)})W_i^{(1)} \right] \cos \psi - \\
&\quad - \left[ M_1(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M_1(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+3N,j+3N}^{(2)} &= \left[ T_1(U_i^{(2)}, 0, 0)U_j^{(2)} + T_1(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+3N,j+4N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(2)} + S(U_i^{(2)}, 0)V_j^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+3N,j+5N}^{(2)} &= \left[ T_1(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+4N,j+4N}^{(2)} &= \left[ S(0, V_i^{(2)})V_j^{(2)} + S(0, V_j^{(2)})V_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\
\alpha_{i+4N,j+5N} &= 0, \\
\alpha_{i+5N,j+5N} &= \left[ \tilde{Q}_1(W_i^{(2)})W_j^{(2)} + \tilde{Q}_1(W_j^{(2)})W_i^{(2)} - \right. \\
&\quad \left. - M_1(W_i^{(2)})\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M_1(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(2)}}{ds} \right]_{s=s_0} \quad (i, j = \overline{1, N}). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Введені у виразах (2.76) функції  $T_1(p, q, f)$ ,  $S(p, q)$ ,  $M_1(f)$  і  $\tilde{Q}_1(f)$  визначаються за формулами (2.59). При цьому, якщо у функціях один з аргументів вважається таким, що дорівнює нулю, то

мається на увазі, що і відповідні похідні тотожно дорівнюють нулю.

Елементи  $b_{ij}$  симетричної матриці  $B$  обчислюються за такими формулами

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \int_{s_1}^{s_0} U_i^{(1)} U_j^{(1)} r ds, & b_{i+N, j+N} &= \int_{s_1}^{s_0} V_i^{(1)} V_j^{(1)} r ds, \\
 b_{i+2N, j+2N} &= \int_{s_1}^{s_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds, \\
 b_{i+3N, j+3N} &= \int_{s_0}^{s_2} U_i^{(2)} U_j^{(2)} r ds, & (2.77) \\
 b_{i+4N, j+4N} &= \int_{s_0}^{s_2} V_i^{(2)} V_j^{(2)} r ds, \\
 b_{i+5N, j+5N} &= \int_{s_0}^{s_2} W_i^{(2)} W_j^{(2)} r ds \quad (i, j = \overline{1, N}).
 \end{aligned}$$

Інші коефіцієнти матриці  $B$  дорівнюють нулю.

### 2.3.3 Коливання оболонки, складеної із конічної та циліндричної оболонок

Наведемо результати розрахунків частот, форм власних коливань, зусиль та моментів, що виникають у серединній поверхні конкретної складової оболонки за запропонованим вище алгоритмом.

Розглянемо конструкцію, що складається зі зрізаної конічної оболонки та співвісно пов'язаної з нею циліндричною оболонкою. Нехай  $l_2$  і  $R_0$  — довжина і радіус циліндричної, а  $r_0$  і  $\alpha$  — радіус зрізаного торця і кут піврозтвору конічної оболонки відповідно. Передбачається, що обидві оболонки мають однакову товщину  $h$ . За характерний лінійний розмір виберемо радіус циліндричної оболонки  $R_0$ . Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . Параметр  $\delta = R_0/h$ , що характеризує товщину оболонки, надалі варіюватимемо.

Таблиця 2.6: Значення частот  $\lambda_i$  коливань складеної оболонки залежно від кількості наближень  $N$  у розкладах (2.70)

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\delta = 100$					
10	.2929439	.6359227	.8114753	.9316009	.9529279
12	.2929350	.6358722	.8114745	.9315879	.9522254
14	.2929327	.6358630	.8114744	.9315870	.9522030
16	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522028
18	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522027
20	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522027
$\delta = 1000$					
14	.2645987	.4865509	.8093876	.8788393	.9171672
16	.2623339	.4827320	.8093871	.8781308	.9167650
18	.2620999	.4824745	.8093869	.8778745	.9159623
20	.2620858	.4824363	.8093869	.8778396	.9158720
22	.2620730	.4824134	.8093869	.8778302	.9158106
24	.2620705	.4824114	.8093869	.8778290	.9158035
26	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158028
28	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158026
30	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158026
$\delta = 2000$					
22	.2447481	.4505838	.8092685	.8657267	.8950180
24	.2447288	.4505527	.8092685	.8657001	.8947864
26	.2447140	.4505372	.8092685	.8656993	.8947726
28	.2447106	.4505352	.8092685	.8656983	.8947596
30	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947591
32	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947588
34	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947587
36	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947587

Виберемо такі безрозмірні геометричні параметри конструкції  $l_2 = 1$ ;  $r_0 = 0.4226$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . Передбачається, що край конічної оболонки при  $s = s_1$  вільний, а край циліндричної оболонки при  $s = s_2$  жорстко закріплений. У табл. 2.6 наведено значення перших п'яти власних значень  $\lambda_i$  за числа хвиль у круговому напрямку  $n = 1$  залежно від кількості наближень  $N$  у розкладах (2.70). Порівняння даних цієї таблиці при  $\delta = 100$  з результата-

Таблиця 2.7: Виконання кінематичних умов спряження (2.61) для першої форми коливань складеної оболонки залежно від кількості наближень  $N$  у розкладах (2.70)

$N$	$u(s_0 \pm 0)$	$v(s_0 \pm 0)$	$w(s_0 \pm 0)$	$dw/ds _{s_0 \pm 0}$
$\delta = 100$				
14	.1985777	-.6009961	1.019838	-.4689842
	.1985759	-.6009966	1.019848	-.4701514
18	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695714
	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695689
22	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695701
	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695702
26	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695702
	.1985786	-.6010018	1.019853	-.4695702
$\delta = 1000$				
30	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505039
	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1506676
34	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505833
	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505882
38	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505859
	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505856
42	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505858
	.1588467	-.4277904	1.434573	-.1505858
$\delta = 2000$				
34	.1379560	-.3517346	1.625012	.01917353
	.1379560	-.3517346	1.625012	.01999781
38	.1379561	-.3517348	1.625013	.01967580
	.1379561	-.3517348	1.625013	.01949538
42	.1379561	-.3517348	1.625013	.01958122
	.1379561	-.3517348	1.625013	.01958995
46	.1379561	-.3517348	1.625013	.01958565
	.1379561	-.3517348	1.625013	.01958541

ми попередніх досліджень [102, 107, 113] свідчить про їхню повну відповідність.

Граничні значення кінематичних параметрів та силових факторів для першої форми коливань складеної оболонки при підході праворуч і ліворуч до точки  $s = s_0$  за різної кількості членів  $N$  у розкладах Рітца наведено в табл. 2.7 та 2.8.

Таблиця 2.8: Виконання силових умов спряження (2.62) для першої форми коливань складеної оболонки залежно від кількості наближень  $N$  у розкладах (2.70)

$N$	$S(s_0 \pm 0)$	$T_1(s_0 \pm 0)$	$M_1(s_0 \pm 0)$	$\tilde{Q}_1(s_0 \pm 0)$
$\delta = 100$				
18	.1109303 .1109300	-.07913747 -.07913872	.8796349E-03 .8796362E-03	-.02174749 -.02174758
22	.1109302 .1109302	-.07913813 -.07913806	.8796355E-03 .8796355E-03	-.02174752 -.02174755
26	.1109302 .1109302	-.07913810 -.07913810	.8796355E-03 .8796355E-03	-.02174754 -.02174753
30	.1109302 .1109302	-.07913810 -.07913810	.8796355E-03 .8796355E-03	-.02174753 -.02174754
$\delta = 1000$				
30	.07657760 .07657673	-.07223624 -.07221720	.2522349E-03 .2522293E-03	-.02003667 -.02003679
34	.07657714 .07657719	-.07222730 -.07222615	.2522323E-03 .2522320E-03	-.02003682 -.02003664
38	.07657716 .07657716	-.07222670 -.07222675	.2522321E-03 .2522321E-03	-.02003673 -.02003673
42	.07657716 .07657716	-.07222672 -.07222673	.2522321E-03 .2522321E-03	-.02003673 -.02003673
$\delta = 2000$				
34	.06216084 .06215737	-.06647171 -.06655595	.1638659E-03 .1638898E-03	-.01846498 -.01848398
38	.06215904 .06215924	-.06652370 -.06650405	.1638800E-03 .1638759E-03	-.01847581 -.01847317
42	.06215914 .06215914	-.06651325 -.06651449	.1638779E-03 .1638781E-03	-.01847443 -.01847455
46	.06215914 .06215914	-.06651388 -.06651387	.1638780E-03 .1638780E-03	-.01847449 -.01847450

Так,  $u(s_0 + 0) = [u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi]_{s=s_0}$  — верхній рядок, а  $u(s_0 - 0) = u^{(2)}(s_0)$  — нижній рядок. Відповідно до умов спряження (2.61) та (2.62) вводяться аналогічні позначення і для інших характеристик деформованої оболонки. При обчисленні форм коливань було прийнято нормування  $w^{(1)}(s_1) = 1$ .

Результати табл. 2.7 та 2.8 демонструють точність виконання

кінематичних та силових граничних умов спряження залежно від кількості наближень  $N$  у методі Рітца. Наведені розрахунки показують, що розроблений на основі енергетичного методу алгоритм визначення коливань складеної оболонки забезпечує збіжність у рівномірній метриці для розв'язків, зусиль, моментів і перерізувальних сил у всій області інтегрування вихідних рівнянь, включаючи і її межі.

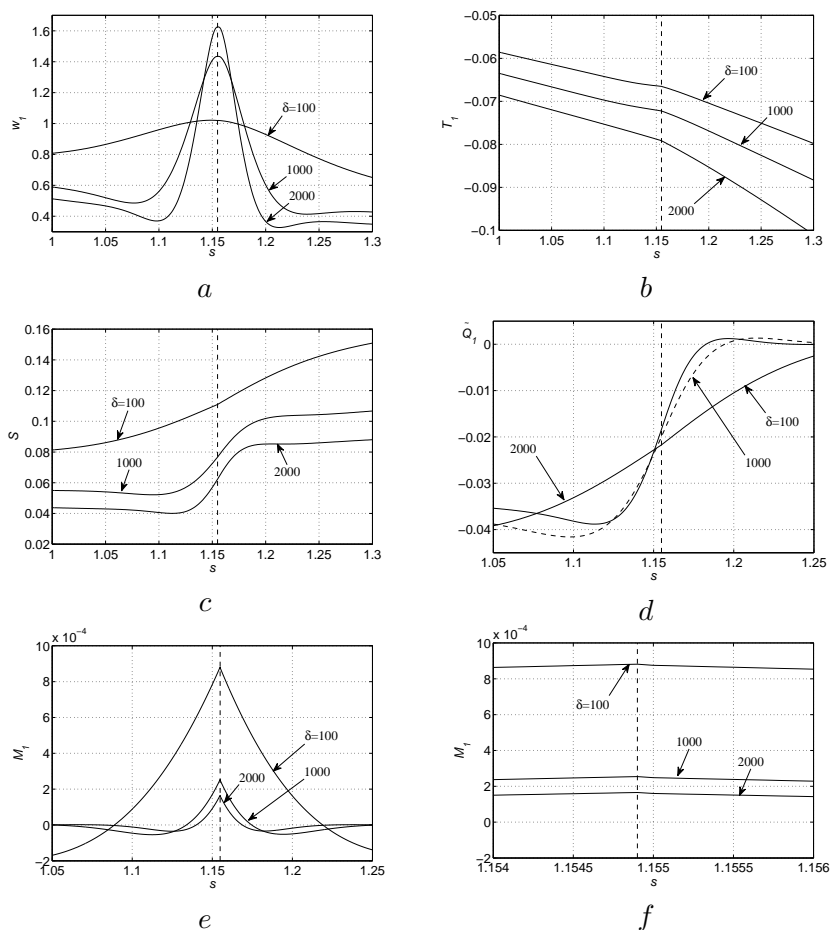


Рис. 2.3: Поведінка функцій  $w_1$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $\tilde{Q}_1$  та  $M_1$  в околі паралелі спряження оболонки

Як і слід було очікувати, зменшення відносної товщини оболонки призводить до необхідності збільшення кількості наближень для отримання розв'язків із заданою точністю.

На рис. 2.3 наведено графіки, що демонструють поведінку функцій  $w_1$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $\tilde{Q}_1$  і  $M_1$  в околі паралелі спряження оболонки.

Тут величини  $w_1$ ,  $\tilde{Q}_1$  і  $T_1$  є проекції переміщень, перерізувальних сил і меридіональних зусиль на напрямки нормалі і твірної циліндричної оболонки відповідно (перша форма коливань,  $n = 1$ ).

З графіків, наведених на рис. 2.3 *a* видно, що всі криві  $w(s)$  для різних відносних товщин оболонки мають явно виражений максимум на лінії спряження конуса та циліндра, що вказує на локалізацію великих згинальних деформацій складеної оболонки. Функції  $T_1(s)$ ,  $S(s)$  і  $\tilde{Q}_1(s)$  рис. 2.3 *b*, *c* і *d* є гладкими неперервними функціями свого аргументу з невеликою змінністю. Найбільш істотних змін в околі паралелі спряження зазнає функція  $M_1(s)$  рис. 2.3 *e*. У дуже вузькій області точки  $s_0$  функція  $M_1(s)$  має велику змінність. Більш детальний розрахунок функції  $M_1(s)$  при  $s \rightarrow s_0$  рис. 2.3 *f* показує, що ця функція також є гладкою та неперервною.

Великі згинальні переміщення, що виникають на з'єднанні оболонок, подібно до крайового ефекту швидко згасають при віддаленні від нього. Величина цих місцевих згинальних переміщень може бути значно суттєвішою в порівнянні з їх значеннями поблизу країв оболонки. Тому при проектуванні складених конструкцій необхідно приділяти особливу увагу розрахунку їхнього напружено-деформованого стану.

## 2.4 Вільні коливання циліндричної оболонки з пружним кільцевим ребром

В різних галузях сучасної техніки та будівництва широке застосування отримали тонкостінні оболонки, підкріплені ребрами жорсткості. Одним з найбільш важливих у прикладному відношенні являється розрахунок таких оболонок на динамічні навантаження. Перший крок у розв'язуванні цієї проблеми полягає у визначенні частот і форм власних коливань розглядуваної конструкції.

Тому цій проблемі присвячена значна кількість наукових робіт. Показовими у цьому відношенні являються огляди літератури у працях [30, 96, 114, 123], що дають певне уявлення про сучасний стан досліджень у даній області теорії оболонок.

В опублікованих працях при використанні методу Рітца для побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі розклади для переміщень оболонки представляють по неперервним базисним функціям на замкнутому відрізку інтегрування вихідних рівнянь. Оскільки зусилля і моменти мають розриви першого роду на лініях кріплення ребер з оболонкою, то такі представлення дозволяють з задовільною точністю визначити лише частоти та форми коливань конструкції. Визначення силових факторів в кожній точці серединної поверхні оболонки є неможливим при такому підході.

Зауважимо, що у праці [88] отримано точний розв'язок задачі про вільні коливання циліндричної оболонки, що підкріплена поперечними кільцевими ребрами. Числові розв'язки цієї роботи можуть бути використані при оцінці точності більш простих наближених розв'язків розглядуваної задачі.

Нижче наведено застосування методу Рітца для розв'язування задачі про вільні коливання циліндричної оболонки, підкріпленої пружним кільцевим ребром, який забезпечує рівномірну збіжність розкладів як для переміщень, так і для силових факторів деформованої оболонки.

#### 2.4.1 Варіаційне формулювання та граничні умови задачі

Розглянемо замкнену кругову циліндричну оболонку малої постійної товщини  $h$  з радіусом серединної поверхні  $R$  і довжиною  $l$ . Введемо до розгляду декартову систему координат  $Oxyz$ , вісь  $Ox$  якої збігається з віссю симетрії оболонки і початком  $O$ , що міститься в площині її торцевого перерізу. Покладемо, що оболонка в перерізі  $x = \zeta$  підкріплена пружним кільцевим ребром жорсткості. Будемо вважати, що товщина ребра мала по відношенню до радіуса серединної поверхні оболонки, а площа контакту ребра з оболонкою така, що його дія на оболонку зосереджена вздовж



лінії.

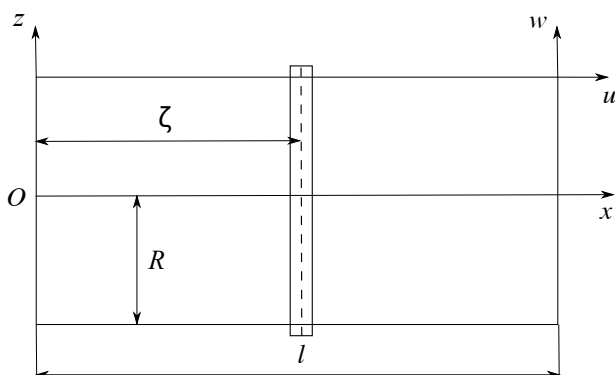


Рис. 2.4: Основні геометричні параметри розглядуваної механічної системи

Надалі будемо користуватися технічною теорією тонких оболонок. Проекції переміщень серединної поверхні оболонки на напрямки її твірної, паралелі та зовнішньої нормалі позначимо через  $u$ ,  $v$  та  $w$ .

Позначимо через  $u_r$ ,  $v_r$ ,  $w_r$  складові вектора повного переміщення центру ваги поперечного перерізу ребра. При його встановленні на зовнішній поверхні оболонки, потенціальна енергія деформації кільцевого ребра може бути представлена в наступному вигляді [96, 108]:

$$\begin{aligned} \Pi_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} & \left[ \frac{E_r I_z}{R_r^2} \left( \frac{\partial w_r}{\partial x} - \frac{1}{R_r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \frac{E_r I_x}{R_r^4} \left( w_r + \frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{E_r S_r}{R_r^2} \left( w_r + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{G_r C}{R_r^2} \left( \frac{\partial^2 w_r}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R_r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)^2 \right] R_r d\varphi. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Тут  $E_r$ ,  $G_r$  – модуль пружності та модуль зсуву матеріалу ребра;  $I_z$ ,  $I_x$  – осеві моменти інерції поперечного перерізу ребра відносно

осей, що проходять через його центр ваги;  $S_r$  – площа поперечного перерізу ребра;  $C$  – геометричний параметр, що залежить від форми поперечного перерізу ребра;  $R_r = R + e$  – радіус центра мас ребра;  $e$  – відстань від серединної поверхні оболонки до центру ваги поперечного перерізу ребра. При встановленні ребра на внутрішній поверхні оболонки потрібно змінити знак при  $e$ .

У першому наближенні величини  $u_r$ ,  $v_r$ ,  $w_r$  можна виразити через переміщення точок серединної поверхні оболонки  $u$ ,  $v$ ,  $w$  у перерізі, де встановлено ребро [96, 108]:

$$u_r = \left[ u - e \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=\zeta}; \quad v_r = \left[ \frac{R_r}{R} v - \frac{e}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right]_{x=\zeta}; \quad w_r = w|_{x=\zeta}. \quad (2.79)$$

Робота сил інерції оболонки на можливих переміщеннях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  має вигляд

$$\delta A_c = -\rho h \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] R dx d\varphi, \quad (2.80)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу оболонки.

Відповідно роботу сил інерції ребра на можливих переміщеннях представимо в формі

$$\begin{aligned} \delta A_r = & -\rho_r S_r \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \delta u_r + \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} \delta v_r + \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} \delta w_r \right] R_r d\varphi - \\ & - \rho_r I_p \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \cdot \delta \left( \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \right] R_r d\varphi, \end{aligned} \quad (2.81)$$

де  $\rho_r$  – густина матеріалу ребра;  $I_p$  – полярний момент інерції поперечного перерізу ребра.

Розділення змінних для усталених коливань розглядуваної системи з частотою  $\omega$  та з  $n$  хвилями вздовж паралелі проводимо за формулами

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) &= u(x) \cos n\varphi \sin \omega t, \\ v(x, \varphi, t) &= v(x) \sin n\varphi \sin \omega t, \\ w(x, \varphi, t) &= w(x) \cos n\varphi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Введемо до розгляду безрозмірні величини (позначені рискою зверху), які пов'язані з відповідними розмірними величинами наступним чином:

$$\begin{aligned}
\{u, v, w\} &= R\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}, \quad E_r = E\bar{E}_r, \quad \rho_r = \rho\bar{\rho}_r, \\
\{I_z, I_x, I_p, C\} &= R^3 h\{\bar{I}_z, \bar{I}_x, \bar{I}_p, \bar{C}\}; \quad S_r = Rh\bar{S}_r, \\
\{T_1, Q_1, S\} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\{\bar{T}_1, \bar{Q}_1, \bar{S}\}, \\
\{M_1, H\} &= \frac{EhR}{(1-\nu^2)}\{\bar{M}_1, \bar{H}\}, \\
\lambda^2 &= \frac{(1-\nu^2)\rho R^2 \omega^2}{E}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad G_r = E\bar{G}_r.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Усі геометричні параметри конструкції віднесено до радіуса оболонки  $R$ . Надалі риску над безрозмірними параметрами будемо пропускати.

Після розділення змінних та інтегрування за кутом  $\varphi$  безрозмірну варіацію потенціальної енергії деформації циліндричної оболонки з точністю до постійного множника представимо в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_c &= \int_0^l [\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta u) + \Psi_{13}(w, \delta u) + \\
&+ \Psi_{12}(\delta v, u) + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta v) + \Psi_{13}(\delta w, u) + \\
&+ \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w)] dx.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Відповідно потенціальна енергія деформації ребра  $\Pi_r$ , робота сил інерції підкріпленого ребра  $\delta A_r$  та оболонки  $\delta A_c$  на їх можливих переміщеннях у безрозмірних величинах набудуть наступного вигляду [96, 108]:

$$\begin{aligned}
\Pi_r &= \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \frac{dw_r}{dx} + \frac{n^2}{R_r} u_r \right)^2 + c_2 w_r^2 + c_3 (w_r + n v_r)^2 + \right. \\
&+ \left. c_4 n^2 \left( \frac{dw_r}{dx} + \frac{1}{R_r} u_r \right)^2 \right], \\
\delta A_r &= \lambda^2 \left[ d_1 (u_r \delta u_r + v_r \delta v_r + w_r \delta w_r) + d_2 \frac{dw_r}{dx} \frac{d\delta w_r}{dx} \right],
\end{aligned}$$

$$\delta A_c = \lambda^2 \int_0^l (u\delta u + v\delta v + w\delta w) dx. \quad (2.85)$$

Тут

$$c_1 = \frac{E_r(1-\nu^2)I_z}{R_r}; \quad c_2 = \frac{E_r(1-\nu^2)(1-n^2)^2 I_x}{R_r^3}; \quad c_3 = \frac{E_r S_r(1-\nu^2)}{R_r};$$

$$c_4 = \frac{G_r(1-\nu^2)C}{R_r}; \quad d_1 = \rho_r R_r S_r; \quad d_2 = \rho_r R_r I_p.$$

Отримані формули для  $\Pi_r$  та  $\delta A_r$  необхідно виразити через переміщення оболонки  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на лінії контакту з ребром. Для цього потрібно скористатися формулами (2.79). Таким чином, визначення частот і форм власних коливань розглядуваної підкріпленої оболонки зведено до розв'язування варіаційного рівняння

$$\delta I_1 = \delta \Pi_c + \delta \Pi_r - \delta A_c - \delta A_r = 0 \quad (2.86)$$

на класі допустимих функцій, що задовольняють головні граничні умови кріплення торців оболонки.

Для встановлення граничних умов на лінії кріплення ребра до оболонки скористаємося варіаційним рівнянням (2.86). Для цього розіб'ємо область  $\Sigma = [0, l]$  точкою  $x = \zeta$  на дві підобласті  $\Sigma^{(1)} = [0, \zeta]$  та  $\Sigma^{(2)} = [\zeta, l]$ . Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях  $\Sigma^{(1)}$  та  $\Sigma^{(2)}$  відповідно через  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ). Надалі верхній індекс в усіх виразах, що зустрічаються, буде означати область, в якій ці вирази визначені. З'єднання ребра з оболонкою припускається таким, що виконуються наступні умови неперервності для переміщень оболонки:

$$u^{(1)}(\zeta) = u^{(2)}(\zeta) = u, \quad v^{(1)}(\zeta) = v^{(2)}(\zeta) = v,$$

$$w^{(1)}(\zeta) = w^{(2)}(\zeta) = w, \quad \left( \frac{dw^{(1)}}{dx} = \frac{dw^{(2)}}{dx} \right)_{x=\zeta} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\zeta}. \quad (2.87)$$

Скористаємося варіаційним рівнянням (2.86), замінивши в ньому інтеграл по всій області  $\Sigma$  на суми інтегралів по підобластях  $\Sigma^{(1)}$  та  $\Sigma^{(2)}$ . З урахуванням інтегрування частинами та умов (2.87) отримаємо відомі системи звичайних диференціальних рівнянь

для циліндричної оболонки в підобластях  $\Sigma^{(1)}$  та  $\Sigma^{(2)}$ , а також силові граничні умови при  $x = \zeta$ :

$$\begin{aligned} T_1^{(1)}(\zeta) - T_1^{(2)}(\zeta) &= R_T, \\ S^{(1)}(\zeta) - S^{(2)}(\zeta) &= R_S, \\ Q_1^{(1)}(\zeta) - Q_1^{(2)}(\zeta) &= R_Q, \\ M_1^{(1)}(\zeta) - M_1^{(2)}(\zeta) &= R_M. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Тут

$$\begin{aligned} T_1^{(k)} &= \frac{du^{(k)}}{dx} + \nu(nv^{(k)} + w^{(k)}); \\ S^{(k)} &= \nu_1 \left( \frac{dv^{(k)}}{dx} - nu^{(k)} \right); \\ Q_1^{(k)} &= -c^2 \left[ \frac{d^3 w^{(k)}}{dx^3} - n^2(2 - \nu) \frac{dw^{(k)}}{dx} \right]; \\ M_1^{(k)} &= -c^2 \left[ \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} - \nu n^2 w^{(k)} \right] \quad (k = 1, 2), \\ R_T &= -F_1 \left( u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right) + \lambda^2 G_1 \left( u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right), \\ R_S &= -F_2(v^{(1)}, w^{(1)}) + \lambda^2 G_2(v^{(1)}, w^{(1)}), \\ R_Q &= -F_3(v^{(1)}, w^{(1)}) + \lambda^2 G_3(v^{(1)}, w^{(1)}), \\ R_M &= -F_4 \left( u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right) + \lambda^2 G_4 \left( u^{(1)}, \frac{dw^{(1)}}{dx} \right). \end{aligned}$$

У свою чергу, функції від двох аргументів  $F_i$  та  $G_i$  визначаю-

ться за формулами

$$\begin{aligned}
F_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= (n^2c_1 + c_4)\left(\frac{n}{R_r}\right)^2 u + \\
&+ [c_1(R_r - n^2e) + c_4]\left(\frac{n}{R_r}\right)^2 \frac{dw}{dx}, \\
F_2(v, w) &= c_3nR_r(nR_rv + e_nw), \\
F_3(v, w) &= c_3nR_re_nv + (c_2 + c_3e_n^2)w, \\
F_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= [c_1(R_r - n^2e) + c_4]\left(\frac{n}{R_r}\right)^2 u + \\
&+ \left[c_1\left(1 - \frac{n^2e}{R_r}\right)^2 + c_4\left(\frac{n}{R_r}\right)^2\right] \frac{dw}{dx}, \\
G_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= d_1\left(u - e\frac{dw}{dx}\right), \\
G_2(v, w) &= d_1R_r(R_rv + enw), \quad e_n = 1 + n^2e, \\
G_3(v, w) &= d_1[neR_rv + (1 + n^2e^2)w], \\
G_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right) &= -d_1eu + (d_1e^2 + d_2)\frac{dw}{dx}.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Слід зауважити, що досить складні силові граничні умови (2.88) є природними граничними умовами для розглядуваного функціонала.

#### 2.4.2 Застосування методу Рітца до розв'язування варіаційного рівняння

При використанні методу Рітца для розглядуваної спектральної задачі, як правило, розклади для переміщень оболонки представляються з використанням неперервних базисних функцій на замкнутому відрізку інтегрування вихідних рівнянь [108, 114, 123]. Із граничних умов (2.88) випливає, що в перерізі, де розміщено кільцеве ребро, силові характеристики деформівної оболонки мають розриви першого роду. Це в свою чергу викликає відповідні розриви в перших похідних для функцій  $u$ ,  $v$  та другій похідній для функції  $w$ .

Для отримання рівномірної збіжності розкладів Рітца необхідно враховувати установлені розриви поля зусиль деформованої оболонки. У зв'язку з цим побудова наближених розв'язків розглядуваної задачі базується на варіаційному методі в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканих функцій на підобласті, в кожній з яких розв'язки неперервні та диференційовні. Ці суміжні підобласті регулярності розв'язків розділені лінією контакту підкріплювального ребра та оболонки.

Варіацію потенціальної енергії ребра і роботу його сил інерції на можливих переміщеннях оболонки в перерізі, де встановлено шпангоут, представимо в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \delta\Pi_r &= F_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right)\delta u + F_2(v, w)\delta v + F_3(v, w)\delta w + F_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right)\frac{d\delta w}{dx}, \\ \delta A_r &= \lambda^2 \left[ G_1\left(u, \frac{dw}{dx}\right)\delta u + G_2(v, w)\delta v + \right. \\ &\quad \left. + G_3(v, w)\delta w + G_4\left(u, \frac{dw}{dx}\right)\frac{d\delta w}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Побудова розв'язків варіаційного рівняння (2.86) повинна відбуватись на класі функцій, що задовольняють кінематичні умови спряження (2.87) та головні граничні умови кріплення торців оболонки. Виконання умов (2.87) є основною проблемою при розв'язуванні задачі методом Рітца. Цю проблему можна вирішити шляхом побудови деякого функціонала  $I$ , для якого кінематичні умови (2.87) були б природними граничними умовами. Якщо розглядати умови (2.87) як допоміжні обмеження на клас допустимих функцій, то скориставшись методом Лагранжа, побудуємо новий функціонал  $I$ . У зв'язку з цим помножимо множники Лагранжа на вказані обмеження та додамо ці добутки у вихідний функціонал. Враховуючи ці доданки, варіація функціонала  $I$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta I_1 + \delta \left[ \alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx}\right) \right]_{x=\zeta} \end{aligned} \quad (2.91)$$

де  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) — множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому.

Для уникнення штучного підвищення кількості невідомих за рахунок множників Лагранжа та спрощення алгоритму побудови розв'язку задачі знайдемо явні вирази для множників  $\alpha_i$  у термінах вихідних розв'язків. Для цього розрахуємо першу варіацію функціонала  $I$  при вільному варіюванні переміщень оболонки та постійних  $\alpha_i$  з рахуванням граничних умов для оболонки. З цієї варіації випишемо тільки позаінтегральні члени при  $x = \zeta$ . При цьому одержимо

$$\begin{aligned} & \left[ \delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ & + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \delta\alpha_4 \left( \frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx} \right) + \\ & + (T_1^{(1)} + \alpha_1)\delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1)\delta u^{(2)} + \\ & + (S^{(1)} + \alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2)\delta v^{(2)} + \\ & + (Q_1^{(1)} + \alpha_3)\delta w^{(1)} - (Q_1^{(2)} + \alpha_3)\delta w^{(2)} + \\ & + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{dx} + (M_1^{(2)} - \alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{dx} + \\ & + (F_1 - \lambda^2 G_1)\delta u + (F_2 - \lambda^2 G_2)\delta v + \\ & \left. + (F_3 - \lambda^2 G_3)\delta w + (F_4 - \lambda^2 G_4)\frac{d\delta w}{dx} \right]_{x=\zeta}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Нагадаємо, що у формулі (2.92) функції  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $dw/dx$  означають переміщення оболонки в місці розташування підкріплюючого ребра. За допомогою формул (2.87) їх можна виразити через переміщення оболонки у введених підобластях. Після перегрупування членів при варіаціях шуканих функцій формули (2.92) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \delta\alpha_4 \left( \frac{dw^{(1)}}{dx} - \frac{dw^{(2)}}{dx} \right) + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + [T_1^{(1)} + \alpha_1 + \frac{1}{2}(F_1^{(1)} - \lambda^2 G_1^{(1)})] \delta u^{(1)} + \\
& + [-T_1^{(2)} - \alpha_1 + \frac{1}{2}(F_1^{(2)} - \lambda^2 G_1^{(2)})] \delta u^{(2)} + \\
& + [S^{(1)} + \alpha_2 + \frac{1}{2}(F_2^{(1)} - \lambda^2 G_2^{(1)})] \delta v^{(1)} + \\
& + [-S^{(2)} - \alpha_2 + \frac{1}{2}(F_2^{(2)} - \lambda^2 G_2^{(2)})] \delta v^{(2)} + \\
& + [Q_1^{(1)} + \alpha_3 + \frac{1}{2}(F_3^{(1)} - \lambda^2 G_3^{(1)})] \delta w^{(1)} + \\
& + [-Q_1^{(2)} - \alpha_3 + \frac{1}{2}(F_3^{(2)} - \lambda^2 G_3^{(2)})] \delta w^{(2)} + \\
& + [-M_1^{(1)} + \alpha_4 + \frac{1}{2}(F_4^{(1)} - \lambda^2 G_4^{(1)})] \frac{d\delta w^{(1)}}{dx} + \\
& + [M_1^{(2)} - \alpha_4 + \frac{1}{2}(F_4^{(2)} - \lambda^2 G_4^{(2)})] \frac{d\delta w^{(2)}}{dx} \Bigg\}_{x=\zeta}.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Якщо функціонал  $I$  набуває стаціонарних значень для довільних варіацій від переміщень оболонки та множників Лагранжа, то із (2.93) випливає, що в точці  $x = \zeta$  будуть виконуватись умови спряження розв'язків (2.87), а також співвідношення

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -T_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_1^{(1)} - \lambda^2 G_1^{(1)}), & \alpha_1 &= -T_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_1^{(2)} - \lambda^2 G_1^{(2)}), \\
\alpha_2 &= -S^{(1)} - \frac{1}{2}(F_2^{(1)} - \lambda^2 G_2^{(1)}), & \alpha_2 &= -S^{(2)} + \frac{1}{2}(F_2^{(2)} - \lambda^2 G_2^{(2)}), \\
\alpha_3 &= -Q_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_3^{(1)} - \lambda^2 G_3^{(1)}), & \alpha_3 &= -Q_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_3^{(2)} - \lambda^2 G_3^{(2)}), \\
\alpha_4 &= M_1^{(1)} - \frac{1}{2}(F_4^{(1)} - \lambda^2 G_4^{(1)}), & \alpha_4 &= M_1^{(2)} + \frac{1}{2}(F_4^{(2)} - \lambda^2 G_4^{(2)}),
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Із рівності правих частин для кожного  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) випливають силові умови спряження (2.88). Окрім цього, для множників

Лагранжа можна отримати такі вирази:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\frac{1}{2}(T_1^{(1)} + T_1^{(2)}) + \frac{1}{4}[-F_1^{(1)} + F_1^{(2)} - \lambda^2(-G_1^{(1)} + G_1^{(2)})], \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{2}(S_1^{(1)} + S_1^{(2)}) + \frac{1}{4}[-F_2^{(1)} + F_2^{(2)} - \lambda^2(-G_2^{(1)} + G_2^{(2)})], \\
 \alpha_3 &= -\frac{1}{2}(Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)}) + \frac{1}{4}[-F_3^{(1)} + F_3^{(2)} - \lambda^2(-G_3^{(1)} + G_3^{(2)})], \\
 \alpha_4 &= \frac{1}{2}(M^{(1)} + M^{(2)}) + \frac{1}{4}[-F_4^{(1)} + F_4^{(2)} - \lambda^2(-G_4^{(1)} + G_4^{(2)})],
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Підставивши вирази (2.95) у (2.91) отримаємо узагальнене варіаційне рівняння в термінах переміщень оболонки, яке вільне від попереднього виконання складних умов спряження. Це досить важливий момент при застосуванні варіаційного методу до розв'язування спектральної задачі з розривними граничними умовами. Отримані результати складають основу для застосування метода Рітца при побудові наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

Представимо функції  $u^{(k)}(x)$ ,  $v^{(k)}(x)$ ,  $w^{(k)}(x)$ , що визначені в підобластях  $\Sigma^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ), у вигляді наступних відрізків узагальнених рядів:

$$\begin{aligned}
 u^{(k)} &= \sum_{j=1}^N a_j^{(k)} U_j^{(k)}(x), \\
 v^{(k)} &= \sum_{j=1}^N b_j^{(k)} V_j^{(k)}(x), \\
 w^{(k)} &= \sum_{j=1}^N c_j^{(k)} W_j^{(k)}(x).
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Тут  $a_j^{(k)}$ ,  $b_j^{(k)}$ ,  $c_j^{(k)}$  — довільні сталі, що підлягають визначенню в подальшому.  $\{U_j^{(k)}\}$ ,  $\{V_j^{(k)}\}$ ,  $\{W_j^{(k)}\}$  — системи координатних функцій, визначених у підобластях  $\Sigma^{(k)}$ .

Надалі вважається, що лівий торець оболонки жорстко закріплений, а правий — вільний. Координатні функції у відповідності з

умовами закріплення торців оболонки виберемо у такому вигляді:

$$U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = xP_j(z), \quad W_j^{(1)} = x^2P_j(z), \quad z = \frac{2x}{\zeta} - 1,$$

$$U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = (x-l)P_j(y), \quad W_j^{(2)} = (x-l)^2P_j(y), \quad y = \frac{2x-l-\zeta}{l-\zeta},$$

де  $P_j(z)$ ,  $P_j(y)$  – зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра з аргументами, які перетворюють інтервали  $[0, \zeta]$  та  $[\zeta, l]$  на інтервал  $[-1, 1]$ .

Введені базисні функції є лінійно незалежними і повними системами функцій у відповідних підобластях, абсолютні значення яких не зростають на відрізку ортогональності функцій Лежандра зі збільшенням їх порядку. Це дозволяє у значній мірі підвищити стійкість обчислювального процесу по відношенню до степеневого базису. Підставивши розклади (2.96) у варіаційне рівняння (2.86), отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0. \quad (2.97)$$

де вектор-стовпець  $\vec{X}$  має координати

$$\vec{X} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)}, c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)},$$

$$a_1^{(2)}, \dots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(2)}\}.$$

Матриці  $A$  та  $B$  зручно подати у вигляді

$$A = A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(2)} + \frac{1}{4}A^{(3)}, \quad B = B^{(1)} + \frac{1}{4}B^{(3)}. \quad (2.98)$$

У відповідності до формул (2.84) ненульові елементи  $\alpha_{ij}^{(1)}$  симетричної матриці  $A^{(1)}$ , що розміщені в ній вище від головної ді-

агонали, розраховуються за формулами

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{11}(U_i^{(1)}, U_j^{(1)}) dx, & \alpha_{i,j+N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) dx, \\
\alpha_{i,j+2N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) dx, \\
\alpha_{i+N,j+N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) dx, & (2.99) \\
\alpha_{i+N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) dx, \\
\alpha_{i+2N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) dx \quad (i, j = \overline{1, N}).
\end{aligned}$$

Формули для коефіцієнтів  $\alpha_{i+3N,j+3N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+3N,j+4N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+3N,j+5N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+4N,j+4N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+4N,j+5N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+5N,j+5N}^{(1)}$  отримуються з формул (2.99) після заміни в них функцій  $U_k^{(1)}$ ,  $V_k^{(1)}$ ,  $W_k^{(1)}$  на  $U_k^{(2)}$ ,  $V_k^{(2)}$ ,  $W_k^{(2)}$ , встановлення границь інтегрування від  $\zeta$  до  $l$  та відповідної заміни в елементах  $\alpha_{pq}^{(1)}$  нижніх індексів на індекси вказаних коефіцієнтів.

Елементи симетричної матриці  $B^{(1)}$  мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} U_i^{(1)} U_j^{(1)} dx, & \beta_{i+N,j+N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} V_i^{(1)} V_j^{(1)} dx, \\
\beta_{i+2N,j+2N}^{(1)} &= \int_0^{\zeta} W_i^{(1)} W_j^{(1)} dx, & \beta_{i+3N,j+3N}^{(1)} &= \int_{\zeta}^l U_i^{(2)} U_j^{(2)} dx, \\
\beta_{i+4N,j+4N}^{(1)} &= \int_{\zeta}^l V_i^{(2)} V_j^{(2)} dx, & \beta_{i+5N,j+5N}^{(1)} &= \int_{\zeta}^l W_i^{(2)} W_j^{(2)} dx & (2.100) \\
&& & & (i, j = \overline{1, N}).
\end{aligned}$$

Усі інші коефіцієнти матриці  $B^{(1)}$  дорівнюють нулю.

Обчислення ненульових елементів матриці  $A^{(2)}$  ( $x = \zeta$ ), які розміщені вище від головної діагоналі здійснюється за формулами

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}^{(2)} &= -T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(1)} - T(U_j^{(1)}, 0, 0)U_i^{(1)}, \\
\alpha_{i+N, j+N}^{(2)} &= -S(0, V_i^{(1)})V_j^{(1)} - S(0, V_j^{(1)})V_i^{(1)}, \\
\alpha_{i+2N, j+2N}^{(2)} &= M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{dx} + M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{dx} - \\
&\quad - Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} - Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)} \quad (i = \overline{1, N}, j = i), \\
\alpha_{i, j+N}^{(2)} &= -T(0, V_j^{(1)}, 0)U_i^{(1)} - S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(1)}, \\
\alpha_{i, j+2N}^{(2)} &= -T(0, 0, W_j^{(1)})U_i^{(1)}, \\
\alpha_{i, j+3N}^{(2)} &= T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(2)} - T(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(1)}, \\
\alpha_{i, j+4N}^{(2)} &= S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} - T(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)}, \\
\alpha_{i, j+5N}^{(2)} &= -T(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(1)}, \\
\alpha_{i+N, j+3N}^{(2)} &= T(0, V_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} - S(U_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)}, \\
\alpha_{i+N, j+4N}^{(2)} &= S(0, V_i^{(1)})V_j^{(2)} - S(0, V_j^{(2)})V_i^{(1)}, \\
\alpha_{i+2N, j+3N}^{(2)} &= T(0, 0, W_i^{(1)})U_j^{(2)}, \\
\alpha_{i+2N, j+5N}^{(2)} &= Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} - Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - \\
&\quad - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{dx} + M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{dx} \quad (i, j = \overline{1, N}).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Інші елементи матриці  $A^{(2)}$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+3N, j+3N}^{(2)} &= -\alpha_{ij}^{(2)}, \quad \alpha_{i+4N, j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i+N, j+N}^{(2)}, \\
\alpha_{i+5N, j+5N}^{(2)} &= -\alpha_{i+2N, j+2N}^{(2)}, \quad \alpha_{i+3N, j+5N}^{(2)} = -\alpha_{i, j+2N}^{(2)} \\
&\quad (i, j = \overline{1, N}),
\end{aligned}$$

де в правих частинах цих формул верхні індекси при функціях слід замінити 1 на 2, а 2 на 1.

Введені у виразах (2.101) функції  $T$ ,  $S$ ,  $M$  та  $Q$  мають вигляд

$$\begin{aligned} T(p, q, r) &= \frac{dp}{dx} + \nu nq + \nu r & S(p, q) &= \nu_1 \frac{dq}{dx} - \nu_1 np, & \nu_1 &= \frac{1 - \nu}{2}, \\ M(r) &= -c^2 \left( \frac{d^2 r}{dx^2} - \nu n^2 r \right), & Q(r) &= -c^2 \left[ \frac{d^3 r}{dx^3} - n^2 (2 - \nu) \frac{dr}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Ненульові елементи матриці  $A^{(3)}$ , які розміщені у верхній половині відносно головної діагоналі, мають вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j+3N}^{(3)} &= F_1(U_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} + F_1(U_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)}, \\ \alpha_{i,j+5N} &= F_1\left(0, \frac{dW_j^{(2)}}{dx}\right)U_i^{(1)} + F_4(U_i^{(1)}, 0)\frac{dW_j^{(2)}}{dx}, \\ \alpha_{i+N,j+4N}^{(3)} &= F_2(V_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} + F_2(V_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)}, \\ \alpha_{i+N,j+5N}^{(3)} &= F_2(0, W_j^{(2)})V_i^{(1)} + F_3(V_i^{(1)}, 0)W_j^{(2)}, \\ \alpha_{i+2N,j+3N} &= F_1\left(0, \frac{dW_i^{(1)}}{dx}\right)U_j^{(2)} + F_4(U_j^{(2)}, 0)\frac{dW_i^{(1)}}{dx}, & (2.102) \\ \alpha_{i+2N,j+4N}^{(3)} &= F_2(0, W_i^{(1)})V_j^{(2)} + F_3(V_j^{(2)}, 0)W_i^{(1)}, \\ \alpha_{i+2N,j+5N}^{(3)} &= F_3(0, W_i^{(1)})W_j^{(2)} + F_3(0, W_j^{(2)})W_i^{(1)} + \\ &+ F_4\left(0, \frac{dW_i^{(1)}}{dx}\right)\frac{dW_j^{(2)}}{dx} + F_4\left(0, \frac{dW_j^{(2)}}{dx}\right)\frac{dW_i^{(1)}}{dx} \\ & & (i, j = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Коефіцієнти матриці  $B^{(3)}$  отримуються з формул (2.102), якщо в них замінити  $\alpha$  на  $\beta$ , а функції  $F_i$  на  $G_i$ .

### 2.4.3 Результати розрахунків

Наведемо результати розрахунків частот, форм власних коливань, зусиль і моментів, що виникають у серединній поверхні циліндричної оболонки за запропонованим алгоритмом.

Згідно з працею [88], в якій на основі технічної теорії оболонок побудовано точний розв'язок розглядуваної задачі, покладемо  $\nu = 0.3$  та виберемо такі безрозмірні характеристики оболонки

і ребра

$$\begin{aligned} \frac{l}{R} = 4, \quad \frac{R}{h} = 600, \quad e = -1.63 \cdot 10^{-2} \quad I_z = 2.824 \cdot 10^{-6}, \\ I_x = 1.004 \cdot 10^{-5}, \quad I_p = 1.2864 \cdot 10^{-5}, \quad C = 5.56 \cdot 10^{-8}, \quad (2.103) \\ S_r = 6.08 \cdot 10^{-2}, \quad \zeta = 2, \quad n = 4. \end{aligned}$$

Ребро закріплене на внутрішній поверхні оболонки.

Оцінимо ефективність розв'язування вихідної задачі спряження на основі запропонованого варіаційного методу.

Нижче наведено дані для випадку, коли при  $x = 0$  торець оболонки жорстко закріплений, а при  $x = l$  — вільний.

Таблиця 2.9: Значення перших п'яти частот  $\lambda_i$  коливань оболонки залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.96)

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
14	.02372	.08528	.17002	.28230	.39256
16	.02340	.08378	.16997	.28155	.39238
18	.02335	.08356	.16996	.28143	.39236
20	.02334	.08352	.16996	.28142	.39235
22	.02334	.08352	.16996	.28141	.39235
24	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235
26	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235
28	.02334	.08351	.16996	.28141	.39235

У табл. 2.9 наведено значення перших п'яти власних частот  $\lambda_i$  в залежності від кількості наближень  $N$  в методі Рітца. Результати цієї таблиці свідчать про монотонну збіжність частот коливань оболонки з ребром при збільшенні числа наближень.

Розглянемо виконання граничних умов (2.87) та (2.88), які відіграють вирішальну роль при розв'язуванні задач спряження розв'язків з використанням варіаційного методу.

Значення функцій  $u^{(i)}(x)$ ,  $v^{(i)}(x)$ ,  $w^{(i)}(x)$  та  $dw^{(i)}(x)/dx$  при  $x = \zeta$  залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.96) ( $i = 1$  — верхній рядок,  $i = 2$  — нижній рядок) наведено у табл. 2.10. Зауважимо, що вектор  $\vec{X}$  однорідної алгебраїчної системи (2.97) вибирався таким чином, щоб  $w^{(1)}(\zeta) = 1$ .

Таблиця 2.10: Значення функцій  $u^{(i)}(x)$ ,  $v^{(i)}(x)$ ,  $w^{(i)}(x)$  та  $dw^{(i)}(x)/dx$  при  $x = \zeta$  залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.96) ( $i = 1$  — верхній рядок,  $i = 2$  — нижній рядок)

$N$	$u^{(i)}(x)$	$v^{(i)}(x)$	$w^{(i)}(x)$	$dw^{(i)}(x)/dx$
14	-.10195E+00	-.28431E+00	.10000E+01	-.67936E+01
	-.10210E+00	-.28565E+00	.13833E+01	.34734E+01
18	-.78802E-01	-.22769E+00	.10000E+01	.10557E+01
	-.78827E-01	-.22772E+00	.10072E+01	.14594E+01
22	-.78338E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12617E+01
	-.78338E-01	-.22656E+00	.99993E+00	.12070E+01
26	-.78334E-01	-.22655E+00	.10000E+01	.12408E+01
	-.78333E-01	-.22655E+00	.99992E+00	.12284E+01
30	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12345E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12351E+01
34	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12349E+01
38	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01
	-.78336E-01	-.22656E+00	.10000E+01	.12348E+01

У табл. 2.11 наведено значення лівих  $L_T$ ,  $L_S$ ,  $L_Q$ ,  $L_M$  (верхній рядок) та правих  $R_T$ ,  $R_S$ ,  $R_Q$ ,  $R_M$  (нижній рядок) частин силових граничних умов (2.88) залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.96). Тут

$$L_T = T_1^{(1)}(\zeta) - T_1^{(2)}(\zeta), \quad L_S = S^{(1)}(\zeta) - S^{(2)}(\zeta),$$

$$L_Q = Q_1^{(1)}(\zeta) - Q_1^{(2)}(\zeta), \quad L_M = M_1^{(1)}(\zeta) - M_1^{(2)}(\zeta).$$

Дані табл. 2.10 та 2.11 свідчать про високу точність виконання кінематичних і силових умов спряження. Окрім цього, були проведені обчислення переміщень, зусиль та моментів у серединній поверхні оболонки в точках підобластей  $\Sigma^{(1)}$  та  $\Sigma^{(2)}$ , а також їх значень у граничній точці  $x = l$ . Ці обчислення показали, що запропонований метод розв'язування вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність для розв'язків та їх похідних, що входять в  $T_1$ ,  $S$ ,  $Q_1$ ,  $M_1$  в усіх внутрішніх точках регулярних підобластей  $\Sigma^{(1)}$  та  $\Sigma^{(2)}$ . При  $x \rightarrow l$  згідно з прийнятими умовами кріплення



Таблиця 2.11: Значення лівих  $L_T, L_S, L_Q, L_M$  (верхній рядок) та правих  $R_T, R_S, R_Q, R_M$  (нижній рядок) частин силових граничних умов (2.88) залежно від кількості членів  $N$  у розкладах (2.96)

$N$	$L_T \setminus R_T$	$L_S \setminus R_S$	$L_Q \setminus R_Q$	$L_M \setminus R_M$
16	.25989E-02	.41157E-01	.30204E-02	.28543E-05
	.37714E-04	.38425E-01	.50942E-02	.30259E-05
20	.52490E-03	.34811E-01	.44820E-02	-.43887E-06
	-.14586E-04	.33842E-01	.42331E-02	-.13588E-05
24	.18711E-04	.33649E-01	.45209E-02	-.17310E-05
	-.15423E-04	.33674E-01	.42015E-02	-.14289E-05
28	-.41461E-04	.33644E-01	.42181E-02	-.14337E-05
	-.14561E-04	.33686E-01	.42037E-02	-.13566E-05
32	-.15649E-04	.33688E-01	.41915E-02	-.13406E-05
	-.14503E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13517E-05
36	-.14006E-04	.33689E-01	.42043E-02	-.13521E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05
40	-.14536E-04	.33688E-01	.42042E-02	-.13529E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05
44	-.14516E-04	.33688E-01	.42040E-02	-.13527E-05
	-.14515E-04	.33688E-01	.42041E-02	-.13527E-05

оболонки  $T_1(l) = S(l) = Q_1(l) = M_1(l) \rightarrow 0$ . Це дозволяє розраховувати напружено-деформівний стан оболонки у будь-якій точці її серединної поверхні. Слід також зауважити, що алгебраїчна система (2.97) добре обумовлена при вибраних базисних функціях.

На рис. 2.5 відображено поведінку функцій  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  та їх похідних в околі кріплення ребра та оболонки. Із графіків видно, що для перших похідних від функцій  $u(x)$  та  $v(x)$ , а також для другої похідної від функції  $w(x)$  у точці  $x = \zeta$  існують розриви першого роду. Така поведінка від шуканих функцій впливає із встановлених граничних умов (2.88). Звертає на увагу та обставина, що у вузькому околі кріплення ребра до оболонки шукані розв'язки мають високі градієнти. Це пов'язано з наявністю малого параметра при старшій похідній у вихідній системі диференціальних рівнянь. Зменшення відносної товщини оболонки приводить до того, що розглядувана гранична задача перехо-

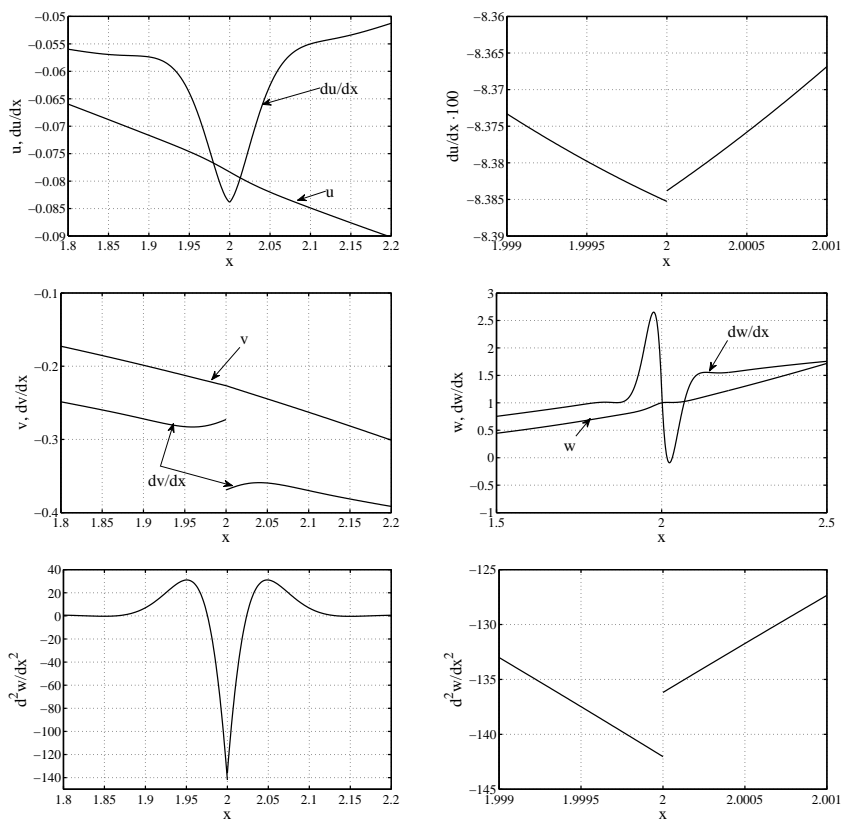


Рис. 2.5: Поведінка функцій  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  та їх похідних в околі кріплення ребра та оболонки

дить до розряду сингулярно збурених спектральних задач, для яких розв'язки мають високі градієнти у вузьких примежових зонах. Ця обставина значно ускладнює апроксимацію шуканих функцій. У зв'язку з цим для зниження порядку алгебраїчної системи (2.97) та для збереження стійкості обчислень при подальшому зменшенні відносної товщини оболонки клас допустимих функцій слід розширити функціями, що мають властивості типу крайового ефекту.

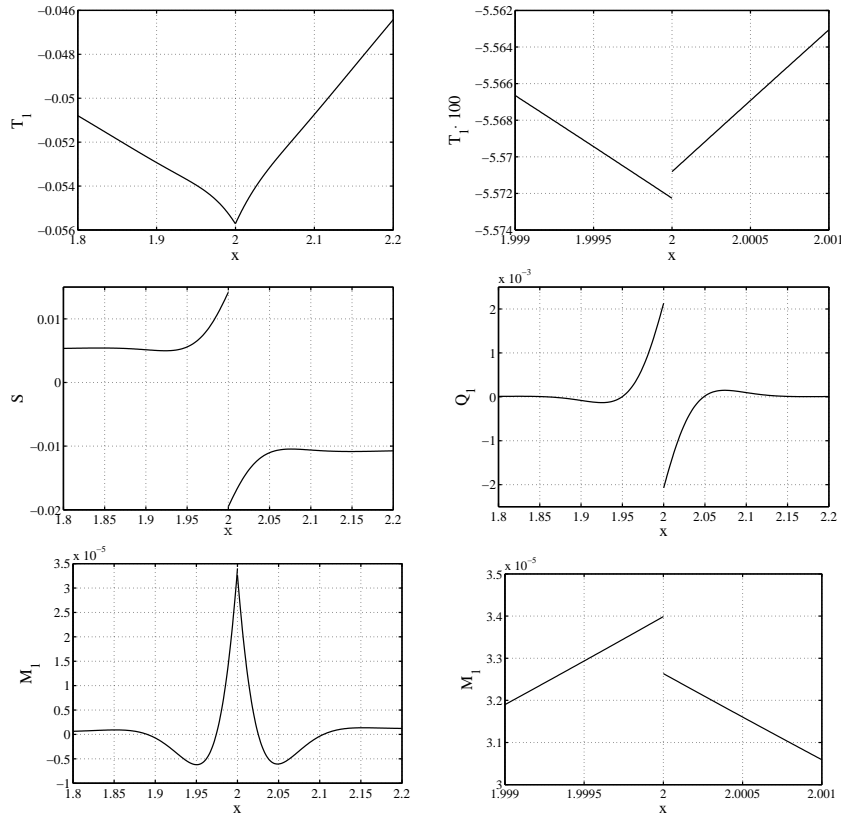


Рис. 2.6: Поведінка функцій  $T_1(x)$ ,  $S(x)$ ,  $M_1(x)$  та  $Q_1(x)$  в околі кріплення ребра та оболонки

На рис. 2.6 зображено поведінку функцій  $T_1(x)$ ,  $S(x)$ ,  $M_1(x)$  та  $Q_1(x)$  в околі кріплення ребра та оболонки. Із графіків видно, що наведені силові характеристики в точці  $x = \zeta$  мають розриви першого роду і володіють високою змінністю в околі цієї точки.

На рис. 2.7 наведено залежність перших п'яти власних частот коливань  $\lambda_i$  від числа хвиль у круговому напрямку оболонки  $n$ . Штрихові лінії тут та далі відповідають розрахункам для оболонки без приєднаного ребра жорсткості. Окремі точки для кожного

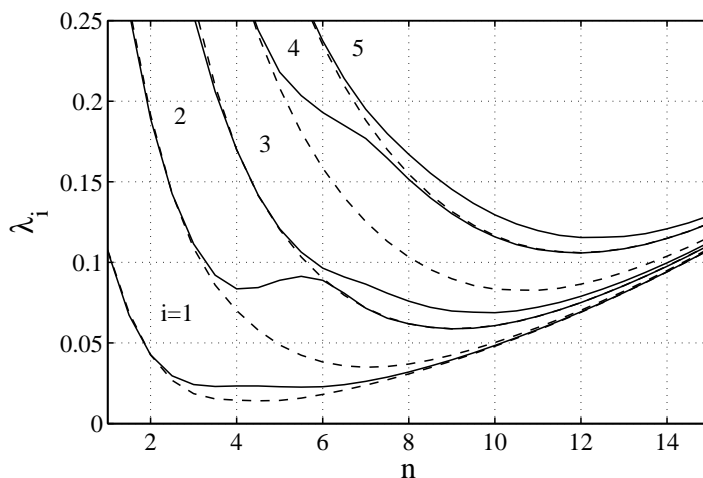


Рис. 2.7: Залежність перших п'яти власних частот коливань  $\lambda_i$  від кількості хвиль у круговому напрямку оболонки  $n$

значення  $n$  умовно з'єднані плавними лініями після проведення інтерполяції. Нумерацію кривих виконано в порядку зростання значень  $\lambda$ .

Поведінку першої частоти  $\lambda_1$  залежно від місця розташування ребра жорсткості та кількості хвиль у круговому напрямку оболонки  $n$  подано на рис. 2.8 (1 — без ребра; 2 —  $\zeta = 2$ ; 3 —  $\zeta = 2.5$ ; 4 —  $\zeta = 3$ ; 5 —  $\zeta = 3.5$ ).

Для порівняння з наявними числовими даними праці [88] проведено розрахунок коливань розглядуваної механічної системи з двома жорстко закріпленими торцями оболонки для випадків внутрішнього ( $e = -0.00163$ ) та зовнішнього ( $e = 0.00163$ ) кріплення ребра жорсткості при  $\zeta = 2$ . Згідно з працею [88] для першого випадку  $\lambda_1 = 0.08218$ , для другого  $\lambda_1 = 0.07614$ . Відповідні частоти, що отримані на основі запропонованого підходу мають значення  $\lambda_1 = 0.08222$  та  $\lambda_1 = 0.07615$ , що свідчить про задовільний збіг результатів. Також слід відзначити повний збіг графічних даних роботи [88] з розрахунками, що отримані на основі запропонова-

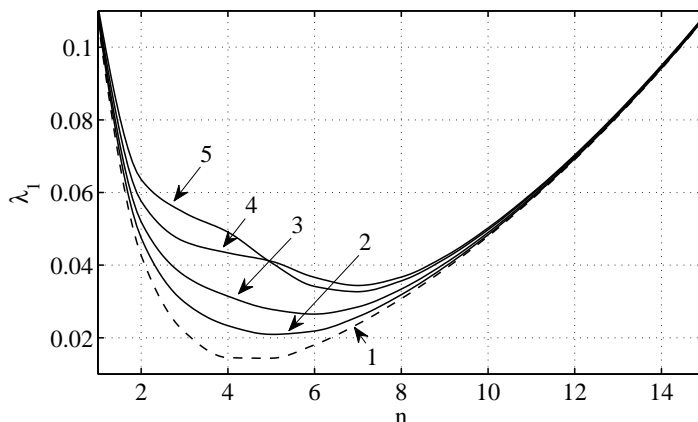


Рис. 2.8: Залежність першої частоти коливань  $\lambda_1$  від місця розташування ребра жорсткості та кількості хвиль у круговому напрямку оболонки  $n$ : (1 — без ребра; 2 —  $\zeta = 2$ ; 3 —  $\zeta = 2.5$ ; 4 —  $\zeta = 3$ ; 5 —  $\zeta = 3.5$ ).

ного алгоритму.

Таким чином, тут запропоновано побудову наближених розв'язків спектральної задачі, що описує вільні коливання циліндричної оболонки з кільцевим ребром малої товщини з урахуванням розривів силових факторів деформованої оболонки в околі розміщення ребра.

Побудова розв'язків розглядуваної задачі базується на застосуванні варіаційного методу в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканих розв'язків на окремі регулярні підобласті, в яких вони неперервні та диференційовні. При цьому, використовуючи метод Лагранжа побудовано узагальнений функціонал, для якого всі умови спряження розв'язків у підобластях є природними граничними умовами.

Результати порівняння отриманих розрахованих частот з наявними точними числовими значеннями свідчать про їх повну відповідність. Окрім того, на відміну від наведених існую-

чих результатів в науковій літературі, запропонований алгоритм розв'язування задачі дозволяє отримувати збіжність методу Рітца в рівномірній метриці, як для самих розв'язків, так і для їх похідних, що входять у силові фактори деформованої оболонки. Це відкриває можливість застосування отриманих результатів при аналізі динамічної міцності розглядуваної конструкції.

Запропонований спосіб побудови розв'язків може бути застосований і для вивчення коливань довільних оболонок обертання, підкріплених кільцевим ребром.

## Розділ 3

# Динаміка пружних конструкцій з резервуарами, які частково заповнені рідиною

### 3.1 Взаємодія тонкостінних оболонок обертання з обмеженим об'ємом рідини

#### 3.1.1 Лінійні рівняння коливань оболонки, що частково заповнена ідеальною рідиною

Розглянемо тонкостінну пружну оболонку обертання, яка на глибину  $H$  заповнена ідеальною і нестисливою рідиною. Надалі передбачається, що поле масових сил, які діють на оболонку та рідину, є потенціальним і прискорення поля масових сил  $\vec{g}$  паралельно осі симетрії оболонки. Будемо вважати, що зміщення, швидкості та прискорення оболонки і частинок рідини малі в тому сенсі, що їх добутками і квадратами можна знехтувати порівняно з самими величинами. Оболонка є ізотропною і володіє всіма властивостями, що забезпечують можливість застосування моментної теорії тонкостінних оболонок Власова [18]. Початковими переміщеннями серединної поверхні оболонки, зумовленими гідростатичним

тиском рідини, а також дисипацією енергії при коливаннях оболонки нехтуємо.

Введені припущення дають змогу максимально спростити постановку задачі, зберігши при цьому її практичне значення. Такого роду припущення характерні для більшості теоретичних праць з динаміки пружних оболонок з рідиною [23, 48, 94].

У оболонок обертання лініями головних кривин є її меридіани і паралелі. В якості ортогональних координат для довільної точки серединної поверхні оболонки виберемо довжину дуги меридіана  $s$ , що відраховується від деякої початкової паралелі ( $s_1 \leq s \leq s_2$ ) або від полюса оболонки ( $s_1 = 0$ ), і кут  $\beta$ , який визначає положення точки на відповідній паралелі. Проекції переміщення точок серединної поверхні оболонки на додатні напрямки її твірної, паралелі та зовнішньої нормалі позначимо відповідно через  $u$ ,  $v$  і  $w$ . Позначимо через  $\nu$ ,  $E$  і  $h$  коефіцієнт Пуассона, модуль пружності матеріалу оболонки і її товщину відповідно. Якщо в рівняння рівноваги елемента оболонки, що знаходиться під впливом поверхневого навантаження  $\vec{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ , підставити сили і моменти, виражені через переміщення оболонки, і помножити отримані рівняння на коефіцієнт  $(1 - \nu^2)/(Eh)$ , то отримаємо таку систему рівнянь у частинних похідних відносно компонентів переміщення  $u$ ,  $v$  і  $w$ :

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_1, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_2, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де  $L_{i,j}$  ( $i, j = \overline{1,3}$ ) — відомі лінійні оператори теорії оболонок [18]. Компоненти поверхневого навантаження  $Q_1$ ,  $Q_2$  і  $Q_3$  у напрямку додатного відліку координат  $s$ ,  $\beta$  і зовнішньої нормалі до поверхні оболонки відповідно до принципу Д'Аламбера можна подати у



наступному вигляді

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tilde{X}_1; \\ Q_2 &= -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \tilde{X}_2; \\ Q_3 &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta P + \tilde{X}_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тут  $\rho$  — густина матеріалу оболонки;  $\Delta P$  — динамічний тиск на оболонку з боку рідини;  $\tilde{X}_i$  — компоненти вектора поверхневого навантаження інших зовнішніх сил. До рівнянь (3.1) необхідно додати граничні умови кріплення торців оболонки при  $s = s_1$  і  $s = s_2$ .

Введемо декартову систему координат  $Oxyz$  і відповідну циліндричну систему координат  $Ozr\beta$ , вісь  $Oz$  якої збігається з віссю симетрії оболонки.

Для описання руху рідини в оболонці введемо в розгляд потенціал зміщень  $\chi(z, r, \beta, t)$ . Позначимо через  $S$  — серединну поверхню оболонки;  $S_1$  — поверхню, змочену рідиною;  $S_2$  — не змочену частину поверхні оболонки;  $\Sigma$  — незбурену вільну поверхню рідини і  $D$  — область, зайняту рідиною.

З прийнятих вище припущень випливає можливість віднесення граничних умов для потенціалу зміщень  $\chi$  до нерухомої серединної поверхні оболонки  $S_1$ , а умови на збуреній вільній поверхні рідини — до її незбуреної вільної поверхні  $\Sigma$ .

Потенціал зміщень частинок рідини за заданого руху оболонки в її нормальному напрямку  $w(s, \beta, t) = w(p, t)$  визначається з розв'язування наступної крайової задачі [94]

$$\begin{aligned} \Delta \chi &= 0, \quad (z, r, \beta) \in D, \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S_1} &= w(p, t), \\ \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \chi}{\partial z} + f(t) \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $g$  — модуль вектора  $\vec{g}$ ;  $n$  — зовнішня нормаль до поверхні  $S_1$ ;  $f(t)$  — довільна функція від часу.

Динамічна умова на поверхні  $\Sigma$  являє собою умову постійності тиску рідини на її вільній поверхні.

На підставі лінеаризованого інтеграла Лагранжа—Копі динамічний тиск з боку рідини на оболонку буде визначатися за формулою [94]:

$$\Delta P = -\rho_0 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right). \quad (3.4)$$

При написанні формули (3.4), нехтувалось несуттєвим гідростатичним тиском, зумовленим деформацією серединної поверхні оболонки і вільної поверхні рідини.

Зауважимо, що потенціал зміщень  $\chi$  повинен також задовольняти наступне співвідношення:

$$\int_{S_1 + \Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = 0, \quad (3.5)$$

що впливає з рівняння нерозривності та закону збереження маси нестисливої рідини.

Таким чином, рівняння (3.1), (3.3) разом зі співвідношеннями (3.2), (3.4), (3.5) і відповідними початковими умовами для оболонки та для хвильових рухів рідини [48] однозначно визначають взаємозв'язані коливання пружної оболонки й ідеальної рідини, що в ній знаходиться.

Надалі зручно перейти до безрозмірних величин. Позначимо через  $R_0$  будь-який характерний розмір оболонки. Введемо в розгляд такі безрозмірні параметри і величини (позначені рискою зверху):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\rho g R_0 (1 - \nu^2)}{E}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12 R_0^2}, \quad a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}, \quad K = \frac{\rho R_0^2 (1 - \nu^2)}{E}, \\ t^2 &= K \bar{t}^2, \quad \{u, v, w\} = R_0 \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}, \quad \chi = R_0^2 \bar{\chi}; \\ \{T_i, S\} &= \frac{E h}{(1 - \nu^2)} \{\bar{T}_i, \bar{S}\}, \quad \{M_i, H\} = \frac{E h R_0}{(1 - \nu^2)} \{\bar{M}_i, \bar{H}\} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Крім того, віднесемо до  $R_0$  також параметри Ламе, кривини та координати точок серединної поверхні оболонки. Надалі риску над безрозмірними величинами будемо опускати. У формулах (3.6)  $T_i$  і  $M_i$  — погонні сили і згинальні моменти;  $S$  і  $H$  — зсувна сила і крутильний момент, віднесені до одиниці довжини нормального перерізу серединної поверхні оболонки.

Безрозмірні рівняння збуреного руху оболонки зручно подати у наступній векторно-матричній формі:

$$L\vec{U} + \vec{f} = \vec{X}. \quad (3.7)$$

Тут  $L$  — матричний оператор, породжений диференціальними рівняннями (3.1) і визначений на множині функцій  $\vec{U}$ , які задовольняють граничні умови закріплення країв оболонки. Трикомпонентні вектори  $\vec{f}$ ,  $\vec{X}$  і  $\vec{U}$  мають вигляд

$$\vec{f} = \left\{ \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w} + a\delta(p) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right) \right\},$$

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad X_i = \frac{1 - \nu^2}{Eh} \tilde{X}_i, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\vec{U} = \{u, v, w\}, \quad \delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in S_1, \\ 0 & \text{при } p \notin S_1. \end{cases}$$

У свою чергу потенціал зміщень частинок рідини визначається з розв'язування такої крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in D,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S_1} = w(p, t), \quad \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \widehat{f(t)} \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (3.8)$$

Характерною особливістю сформульованих крайових задач для переміщень оболонки та для потенціалу зміщень рідини є необхідність сумісного інтегрування рівнянь для вектор-функції  $\vec{U}$ , визначеної в точках серединної поверхні оболонки і рівнянь

для функції  $\chi(x, y, z, t)$ , заданої в тривимірній області  $D$ . Функція  $\chi(x, y, z, t)$  залежить від нормального прогину оболонки  $w(p, t)$ , оскільки він входить у граничну умову на частині границі  $S_1$  області  $D$ . У свою чергу, функція  $w(p, t)$  залежить від функції  $\chi(x, y, z, t)$ , яка входить у вектор  $\vec{f}$  у рівнянні (3.7). У зв'язку з цим безпосереднє розв'язування крайової задачі (3.7), (3.8) в загальному випадку являє собою досить складну задачу. Тому надалі для її розв'язування будемо застосовувати наближені методи, що дають змогу звести розв'язування вихідної задачі для рівнянь у частинних похідних до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, незалежною змінною в яких є час.

### 3.1.2 Зведення рівнянь руху оболонки з рідиною до системи звичайних диференціальних рівнянь

Аналогічно, як і в динаміці твердого тіла з рідким заповненням [47, 54], подамо потенціал зміщень рідини у вигляді суми двох гармонічних функцій:

$$\chi = \Phi(x, y, z, t) + \Psi(x, y, z, t), \quad (3.9)$$

де  $\Phi$  — потенціал зміщень частинок рідини, зумовлений деформацією оболонки, за умови, що вільна поверхня являє собою площину, паралельну поверхні  $\Sigma$  (іншими словами відсутні хвильові рухи);  $\Psi$  — потенціал хвильових рухів рідини.

Функцію  $\Phi$  визначимо як розв'язок такої крайової задачі:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w(p, t), \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = c(t), \quad (3.10)$$

де  $c(t)$  — довільна функція часу  $t$ ,  $p$  — координати будь-якої точки серединної поверхні оболонки.

Функцію  $c(t)$  виберемо таким чином, щоб виконувалася умова розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа (3.10), яка є умовою рівності потоку рідини через замкнуту поверхню  $\Sigma + S_1$ :

$$\int_{\Sigma+S_1} \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = 0.$$

Звідси випливає, що

$$c(t) = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w(p, t) dS. \quad (3.11)$$

Тут  $\Sigma$  — площа незбуреної вільної поверхні рідини.

Зведення рівнянь (3.7) і (3.8) з урахуванням відповідних граничних умов до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь можна здійснити методом Бубнова—Гальоркіна. Для реалізації цього методу необхідно мати у своєму розпорядженні деяку систему лінійно незалежних функцій, що задовольняють граничні умови задачі і умови повноти.

Введемо в розгляд спектральну задачу з параметром в граничній умові:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_k(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in D, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{S_1} &= 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varkappa_k \varphi_k \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Відповідно до рівнянь (3.8) крайова задача (3.12) описує власні коливання рідини в нерухомій посудині. При цьому квадрат частоти  $\sigma_k^2$   $k$ -ї форми власних коливань рідини пов'язаний з частотним параметром  $\varkappa_k$  співвідношенням

$$\sigma_k^2 = \eta \varkappa_k. \quad (3.13)$$

Усі власні значення спектральної задачі (3.12) дійсні, додатні і мають єдину граничну точку розташовану на нескінченності. У свою чергу, сукупність власних функцій володіє властивістю повноти на поверхні  $\Sigma$  і задовольняє наступні умови ортогональності [87]:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma &= \int_{\Sigma} \varphi_k d\Sigma = 0, \quad \int_{\Sigma} \varphi_k \varphi_l d\Sigma = 0, \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial n} d\Sigma &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Складову  $\Psi$  потенціалу зміщень рідини (3.9) подамо у вигляді розкладу в узагальнений ряд Фур'є за функціями  $\varphi_k$ :

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) \varphi_k(x, y, z). \quad (3.15)$$

Коефіцієнти Фур'є  $r_k(t)$  мають сенс узагальнених координат, що характеризують хвильові рухи рідини в оболонці.

Узагальнені координати рідини  $r_k(t)$  будемо визначати з динамічної умови для потенціалу зміщень рідини  $\chi$  (3.8) на її вільній поверхні. Для цього підставимо в граничну умову на  $\Sigma$  (3.8) вирази (3.9) і (3.15). Отримане співвідношення помножимо на  $a \partial \varphi_l / \partial n$  і проінтегруємо його по області  $\Sigma$ . З урахуванням умов ортогональності (3.14) і того, що функція  $\Phi(x, y, z, t)$  є розв'язком крайової задачі (3.10), отримаємо наступне рівняння відносно  $r_k(t)$ :

$$a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) = -a \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.16)$$

де

$$\mu_k = \int_{\Sigma} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma.$$

Далі виберемо базис для апроксимації переміщень оболонки і складової потенціалу зміщень рідини  $\Phi$ . Сформулюємо допоміжну спектральну задачу, що описує вільні коливання оболонки з рідиною за умови, що вільна поверхня рідини являє собою площину, перпендикулярну поздовжній осі оболонки. Цю задачу можна сформулювати, виходячи з рівнянь (3.7). Для цього в них слід покласти  $X_i \equiv 0$ , для потенціалу зміщень рідини (3.7) покласти  $\Psi \equiv 0$  і відокремити часову координату за формулами

$$[u, v, w] = \exp^{i\Omega t} [u, v, w], \quad \Phi = \exp^{i\Omega t} \Phi, \quad c(t) = \exp^{i\Omega t} C.$$

Будемо вважати, що вектор-функція  $\vec{U} = \{u, v, w\}$  належить дійсному простору  $H$  вектор-функцій, що задовольняють граничні умови кріплення країв оболонки. Тоді з урахуванням введених

позначень сформульована спектральна задача матиме такий вигляд:

$$L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0 \quad M\vec{U} = \left\{ u, v, w + a\delta(p) \left( \Phi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma \right) \right\}, \quad (3.17)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\Sigma} = C. \quad (3.18)$$

Визначимо скалярний добуток векторів в  $H$  формулою

$$(U_1, U_2) = \int_S (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) dS.$$

Розглянемо властивості операторів  $L$  і  $M$ . Оператор  $L$  є симетричним. Це означає, що для будь-яких трикомпонентних вектор-функцій  $\vec{U}^{(1)}$  і  $\vec{U}^{(2)}$ , що належать простору  $H$ , справедлива тотожність  $(L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) = (L\vec{U}^{(2)}, \vec{U}^{(1)})$ . Цю тотожність можна перевірити безпосередньо, використовуючи формули інтегрування частинами для поверхневих інтегралів. Це можна зробити значно простіше, якщо скористатися формулою [22]

$$\begin{aligned} (L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) = \int_S \left\{ \varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_2^{(2)} + \nu \left( \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^{(1)} \omega^{(2)} + c^2 \left[ \varkappa_1^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_2^{(1)} \varkappa_2^{(2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \left( \varkappa_2^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_1^{(1)} \varkappa_2^{(2)} \right) + 2(1-\nu) \tau^{(1)} \tau^{(2)} \right] \right\} dS, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де верхні індекси в круглих дужках означають, що у відповідні формули для деформацій оболонки внесено компоненти вектор-функцій  $\vec{U}^{(1)}$  і  $\vec{U}^{(2)}$ . З цієї формули випливає симетрія оператора

$L$ . Якщо покласти  $\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(2)} = \vec{U}$ , то отримаємо

$$(L\vec{U}, \vec{U}) = \int_S \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{(1-\nu)}{2}\omega^2 + c^2 [\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu\varkappa_1\varkappa_2 + 2(1-\nu)\tau^2] \right\} dS. \quad (3.20)$$

Права частина у співвідношенні (3.20) дорівнює подвоєній потенціальній енергії деформації оболонки [56], отже, оператор  $L$  додатний. Можна довести і більш сильне твердження [22], що оператор  $L$  є і додатно визначеним тобто  $(L\vec{U}, \vec{U}) \geq \gamma(\vec{U}, \vec{U})$ ,  $\gamma > 0$ . Надалі будемо припускати параметри оболонки такими, що найменше власне значення оператора  $L$   $\lambda_{\min}(L) > 0$ . У цьому випадку найбільше можливе значення параметра  $\gamma$  і є  $\lambda_{\min}(L)$ . Таким чином, наше припущення рівносильне вимозі додатної визначеності оператора  $L$ .

Для оператора  $M$  матимемо

$$(M\vec{U}_1, \vec{U}_2) = \int_S \left[ u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + a\delta(p) \left( \Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 \right] dS. \quad (3.21)$$

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left( \Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 dS &= \int_{S_1} \left( \Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \\ &= \int_{\Sigma+S_1} \left( \Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \int_{S_1} \left( \Phi_2 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_2 d\Sigma \right) w_1 dS. \end{aligned}$$

Тут було використано формулу Гріна для гармонічних функцій, що перетворює інтеграл по поверхні  $\Sigma + S_1$  на об'ємний інтеграл, а також співвідношення

$$\int_{\Sigma} \left( \Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Sigma = 0,$$



яке впливає з граничних умов для функції  $\Phi_2$  на поверхні  $\Sigma$ .

З формул (3.21) випливає, що оператор  $M$  симетричний і додатний [6]. На підставі загальних теорем теорії спектральних задач [50] з урахуванням встановлених властивостей операторів  $L$  і  $M$  можна сформулювати ряд тверджень для власних значень і власних функцій задачі (3.17), (3.18). Розглядувана задача має дискретний спектр  $0 < \Omega_1^2 \leq \Omega_2^2 \leq \dots \leq \Omega_n^2 \dots$ , причому  $\Omega_n^2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Сукупність відповідних власних функцій  $\vec{U}_i$  повна в просторі вектор-функцій з  $H$  і задовольняє такі умови ортогональності:

$$(L\vec{U}_i, \vec{U}_j) = (M\vec{U}_i, \vec{U}_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (3.22)$$

Внаслідок цього довільна квадратично сумована на поверхні  $S$  вектор-функція може бути розкладена в ряд по системі власних функцій  $\vec{U}_i$ , який буде сходиться покомпонентно в середньо квадратичному сенсі. Таким чином, власні функції спектральної задачі (3.17), (3.18) можуть бути використані для зведення рівнянь у частинних похідних (3.7), (3.8) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Подамо переміщення серединної поверхні оболонки і потенціал зміщень рідини  $\Phi$  у вигляді таких розкладів

$$\vec{U}(p, t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \vec{U}_j(p), \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \Phi_j(x, y, z), \quad (3.23)$$

де  $\Phi_j$  — гармонічні функції, що задовольняють граничні умови

$$\left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \right|_{S_1} = w_j(p); \quad \left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w_j(p) dS.$$

Слід зазначити, що за такого подання розв'язків задачі (3.7) виконуються всі граничні умови для переміщень оболонки, в тому числі і кінематична гранична умова  $\partial\Phi/\partial n|_{S_1} = w$ .

Підставимо розклади (3.23) у рівняння (3.7) і (3.16). Отримане рівняння (3.7) помножимо скалярно на  $\vec{U}_i$  і проінтегруємо отриманий результат по всій поверхні оболонки  $S$ . Тоді з урахуванням умов ортогональності (3.22) і співвідношення

$(L\vec{U}_i, \vec{U}_i) = \Omega_i^2 M(\vec{U}_i, \vec{U}_i)$  отримаємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_i (\ddot{s}_i + \Omega_i^2 s_i) + a \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{r}_k \lambda_{ik} &= \tilde{Q}_i, \\ a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) + a \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{s}_i \gamma_{ki} &= 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_i &= \int_S (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dS + a \int_{S_1} \left( \Phi_i - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_i dS \right) w_i dS, \\ \lambda_{ik} &= \int_{S_1} \varphi_k w_i dS, \quad \gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS, \quad \tilde{Q}_i = \int_S (\vec{X}, \vec{U}_i) dS. \end{aligned}$$

Покажемо симетрію коефіцієнтів  $\lambda_{ik}$  і  $\gamma_{ki}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{ki} &= \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \int_{\Sigma+S_1} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \\ &= \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} dS = \int_{S_1} \varphi_k w_i dS = \lambda_{ik}. \end{aligned}$$

При цьому було використано формулу Гріна для гармонічних функцій  $\varphi$  і  $\psi$ :

$$\int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

де  $S$  замкнена поверхня, що обмежує область  $D$ .

Система рівнянь (3.24) для описання збуреного руху пружної оболонки, частково заповненої рідиною, може бути зведена до аналогічних рівнянь, які отримано в роботах [48] і [94] на основі використання принципу можливих переміщень.

Рівняння (3.24) можуть бути використані для наближеного визначення вільних коливань рідини в пружному резервуарі. Для цього слід покласти

$$s_i = \exp^{i\omega t} S_i, \quad r_k = \exp^{i\omega t} R_k, \quad \tilde{Q}_i \equiv 0. \quad (3.25)$$

З урахуванням цього і обмежуючись скінченною кількістю узгалянених координат для визначення амплітуд  $S_i$ ,  $R_k$  і частот коливань  $\omega$ , отримаємо наступну однорідну скінченну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (G - \lambda^2 F) \vec{y} &= 0, \quad \vec{y} = \{S_1, S_2, \dots, S_{s_0}; R_1, R_2, \dots, R_{r_0}\}, \\ \lambda^2 &= \frac{(1 - \nu^2) \rho R_0^2 \omega^2}{E}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тут елементи  $g_{ij}$  і  $f_{ij}$  верхньої частини відносно головної діагоналі симетричних матриць  $G$  і  $F$  відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \delta_{ij} a_i \Omega_i^2, \quad f_{ij} = \delta_{ij} a_i \quad (i, j = \overline{1, s_0}), \\ g_{i,j+s_0} &= 0, \quad f_{i,j+s_0} = a \lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, s_0}, j = \overline{1, r_0}), \\ g_{i+s_0,j+s_0} &= \delta_{ij} a \mu_i \sigma_i^2, \quad f_{i+s_0,j+s_0} = \delta_{ij} a \mu_i \quad (i, j = \overline{1, r_0}), \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Визначення коефіцієнтів рівнянь (3.24) пов'язане з обчисленням квадратур від розв'язків спектральних задач (3.12) і (3.17), (3.18).

### 3.1.3 Застосування варіаційних методів для побудови розв'язків додатково введених спектральних задач

Для оболонок обертання компоненти переміщень точок середньої поверхні оболонки  $u$ ,  $v$ ,  $w$  і потенціал зміщень частинок рідини  $\Phi$  з урахуванням умов їх періодичності за кутом  $\beta$  можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} u(s, \beta) &= u(s) \cos n\beta, \quad v(s, \beta) = v(s) \sin n\beta, \\ w(s, \beta) &= w(s) \cos n\beta, \quad \Phi(z, r, \beta) = \Phi(z, r) \cos n\beta, \end{aligned} \quad (3.27)$$

де  $n$  — число хвиль пружної поверхні оболонки і рідини в коловому напрямку, що розглядається в подальшому в якості параметра.

Зауважимо, що інтеграли

$$\int_{S_1} w ds, \quad \int_{\Sigma} w d\Sigma, \quad \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma,$$

які зустрічаються в наведених вище формулах, не дорівнюють нулю тільки для випадку осесиметричних коливань при  $n = 0$ . Для інших цілочисельних значень параметра  $n$  ці інтеграли дорівнюють нулю.

Надалі обмежимося розглядом неосесиметричних коливань оболонки з рідиною при  $n > 0$ .

Після відокремлення кутової координати  $\beta$  для складової потенціалу зміщень рідини  $\Phi(z, r)$ , матимемо наступну крайову задачу Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \Phi &= 0, \quad (z, r) \in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_1} = w, \end{aligned} \quad (3.28)$$

де  $Q$ ,  $L_0$  і  $L_1$  — меридіональний переріз області  $D$ , поверхонь  $\Sigma$  і  $S_1$  відповідно.

Введемо в розгляд оператор  $G$  [52], який значенням функції  $w(s)$ , заданої на контурі  $L_1$ , ставить у відповідність функцію  $\Phi$ , визначену в області  $Q$ , і є розв'язком крайової задачі (3.28). Цю відповідність запишемо у вигляді

$$\Phi = Gw. \quad (3.29)$$

Тут  $G$  — інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна другої крайової задачі (3.28). Якщо область має канонічну форму, то цю функцію можна побудувати в явному вигляді.

Будемо вважати, що вектор-функція  $\vec{U} = \{u(s), v(s), w(s)\}$  належить до класу  $H$  функцій, визначених у точках меридіонального перерізу оболонки і які відповідають умовам кріплення її торців. Тоді вихідну спектральну задачу (3.17), (3.18) можна представити в наступному операторному вигляді:

$$\text{Im}(\vec{U}) = L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0; \quad M = \text{diag}\{1, 1, 1 + \delta(p)aG\}, \quad (3.30)$$

де  $L$  — матричний оператор, породжений диференціальними рівняннями (3.1) після відділення в них кутової координати і переходу до безрозмірних величин.

Розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь (3.30), що має восьмий порядок, повинні бути підпорядковані відповідним однорідним граничним умовам. Граничні умови накладаються або на переміщення оболонки, або на відповідні їм сили. Так, для абсолютно жорсткого кріплення краю оболонки при  $s = s_1$  ці умови набудуть вигляду

$$\left[ u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0 \right]_{s=s_1}. \quad (3.31)$$

Для вільного краю оболонки при  $s = s_2$  мають місце такі силові граничні умови:

$$\left[ T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0 \right]_{s=s_2}. \quad (3.32)$$

Тут  $T_1$ ,  $S$ ,  $\tilde{Q}_1$  і  $M_1$  — безрозмірні погонні зусилля, узагальнена перерізувальна сила і момент, які виражаються через переміщення оболонки за формулами:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left( \frac{n}{r} v + \frac{r'}{r} u + \frac{w}{R_2} \right), \\ S &= \frac{1-\nu}{2} \left( -\frac{n}{r} u + \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r} v \right), \\ \tilde{Q}_1 &= -c^2 \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w \right] - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left( \frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right\}, \\ M_1 &= c^2 \left[ -\frac{d^2 w}{ds^2} + \nu \left( \frac{n^2}{r^2} w - \frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} \right) \right]. \end{aligned}$$

В інших випадках кріплення краю оболонки використовуються комбінації граничних умов (3.31) і (3.32). Для оболонок у формі купола будуючи розв'язки, слід враховувати асимптотичну поведінку шуканих функцій при  $s \rightarrow 0$ .

Оскільки на оболонку діє розривне динамічне навантаження, то для ефективної побудови наближеного розв'язку системи (3.30) доцільно розбити область зміни параметра  $s$  на дві підобласті. Нехай  $s = \zeta$  відповідає рівню рідини, на який заповнено оболонку. Розіб'ємо область  $[s_1, s_2]$  точкою  $s = \zeta$  на дві підобласті:  $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$  і  $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$ . Область  $G^{(1)}$  відповідає змоченій частині оболонки, а область  $G^{(2)}$  — не змоченій частині, яка залишилася. Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  відповідно через  $\vec{U}^{(1)}$  і  $\vec{U}^{(2)}$ . Надалі верхній індекс у всіх функціях, що зустрічаються буде позначати область, в якій ці функції визначено. Для визначеності, будемо вважати, що нижній торець оболонки жорстко закріплений, а верхній вільний. Крім граничних умов (3.31), (3.32), у перерізі  $s = \zeta$  повинні виконуватися певні граничні умови спряження розв'язків  $\vec{U}^{(1)}(s)$  і  $\vec{U}^{(2)}(s)$ .

Еквівалентну варіаційну постановку вихідної спектральної задачі можна отримати, виходячи з принципу можливих переміщень, згідно з яким  $\delta\Pi = \delta A$ , де  $\delta\Pi$  — варіація потенціальної енергії деформації оболонки [56]. Роботу зовнішніх сил  $\delta A$  на можливих переміщеннях оболонки можна подати в такому вигляді:

$$\delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{Q}, \delta \vec{U} r ds = \Omega^2 \int_{s_1}^{s_2} [u \delta u + v \delta v + (w + \delta(p) a G(w)) \delta w] r ds. \quad (3.33)$$

Як наслідок, вихідна спектральна задача зводиться до відшукування стаціонарних значень для функціонала  $I(\vec{U})$

$$I(\vec{U}) = \int_{s_1}^{s_2} F(\vec{U}) r ds.$$

Запишемо цей функціонал так:

$$I = \int_{G^{(1)}} F(\vec{U}^{(1)}) dG^{(1)} + \int_{G^{(2)}} F(\vec{U}^{(2)}) dG^{(2)}. \quad (3.34)$$

Будемо припускати, що в кожній з підобластей відповідно до теорії тонких ізотропних оболонок поля зміщень, деформацій і

напружень володіють властивостями неперервності та диференційовності. Обчислимо першу варіацію від функціонала (3.34) без внесення жодних обмежень на варійовані функції, крім граничних умов (3.31). Тоді з урахуванням інтегрування частинами та прийнятих позначень цю варіацію можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \mathfrak{I}(\vec{U}^{(k)}) dG^{(k)} + \\ & + \left( T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=\zeta} - \\ & - \left( T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=\zeta} + \\ & + \left( T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Прирівнюючи  $\delta I$  до нуля, отримуємо варіаційне рівняння для знаходження функцій  $\vec{U}^{(k)}(s)$ . З цього рівняння з огляду на довільність варіювання функцій в областях  $G^{(k)}$  і на границі при  $s = s_2$  випливає, що в межах кожної з введених підобластей повинні виконуватися вихідні рівняння і граничні умови вільного краю оболонки при  $s = s_2$ . Якщо припустити, що клас допустимих функцій при  $s = \zeta$  підпорядкований умовам

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{dw^{(2)}}{ds}, \quad (3.36)$$

то із (3.35) випливають такі силові граничні умови при  $s = \zeta$ :

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)}, \quad S^{(1)} = S^{(2)}, \quad M_1^{(1)} = M_1^{(2)}, \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \quad (3.37)$$

При цьому зауважимо, що умови (3.37) є природними граничними умовами для функціонала (3.34).

Розглядаючи граничні умови (3.36) як додаткові обмеження на клас допустимих функцій для функціонала  $I(\vec{U})$ , введемо до

розгляду новий функціонал  $\Pi_1$ , який має вигляд

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{U}) + \left[ \alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ \left. + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4 \left( \frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=\zeta}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

де  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) — множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому. Вихідна варіаційна задача при цьому переходить в таку:

$$\delta\Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0. \quad (3.39)$$

Таким чином, потрібно відшукувати екстремальні значення функціоналу  $\Pi_1$  не лише за функціями  $u$ ,  $v$  і  $w$ , а і за сталими  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  і  $\alpha_4$ . Згідно з розд. 2 з першої варіації функціонала  $\Pi_1$  при вільному варіюванні функцій  $\vec{U}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) і сталих  $\alpha_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) встановлюються явні вирази для множників Лагранжа в термінах вихідних зусиль та моментів:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \left( T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left( S^{(1)} + S^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \left( \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \left( M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Виключаючи  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) з функціоналу (3.38) за допомогою встановлених для них виразів (3.40), отримаємо узагальнений функціонал  $\Pi_2$ , що залежить тільки від  $\vec{U}(s)$ . Крайові умови (3.32), (3.36) і (3.37) будуть автоматично виконуватися для функцій, що надають функціоналу  $\Pi_2(\vec{U})$  стаціонарне значення. Отриманий функціонал є теоретичною основою для побудови наближених розв'язків даної задачі на основі методу Рітца. Запишемо функції  $u^{(k)}(s)$ ,  $v^{(k)}(s)$  і  $w^{(k)}(s)$  ( $k = 1, 2$ ) у вигляді відрізків



узагальнених рядів:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_j U_j^{(1)}(s), & v^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j^{(1)}(s), \\
 w^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j^{(1)}(s), & u^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+3N} U_j^{(2)}(s), \\
 v^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+4N} V_j^{(2)}(s), & w^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+5N} W_j^{(2)}(s).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Тут  $x_j$  ( $j = \overline{1, 6N}$ ) — довільні сталі, що підлягають визначенню в подальшому;  $U_j^{(k)}(s)$ ,  $V_j^{(k)}(s)$  і  $W_j^{(k)}(s)$  — системи координатних функцій, які визначено відповідно в підобластях  $G^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ).

Координатні функції виберемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = (s - s_1) P_j(x), & W_j^{(1)} &= (s - s_1)^2 P_j(x), \\
 x &= \frac{2(s - \zeta)}{\zeta - s_1} + 1, & U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y), & y &= \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta},
 \end{aligned}$$

де  $P_j(z)$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра з аргументами, які перетворюють інтервали  $[s_1, \zeta]$  і  $[\zeta, s_2]$  на інтервал  $[-1, 1]$ .

Введені системи базисних функцій є лінійно незалежними і повними функціями у відповідних підобластях. Системи координатних функцій з верхнім індексом, що дорівнює одиниці, підпорядковані граничним умовам (3.31).

Підставимо розклади (3.41) у функціонал  $\Pi_2(\vec{U})$ . З необхідних умов стаціонарності узагальненого функціонала отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(A - \Omega^2 B) \vec{X} = 0, \tag{3.42}$$

де  $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{6N}\}$ .

Подамо матрицю  $A$  у вигляді суми двох матриць  $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ , де елементи матриці  $A^{(1)}$  утворені з необхідних умов екстремуму функціонала  $I(\vec{u})$  (3.34), а елементи

матриці  $A^{(2)}$  зумовлені наявністю в узагальненому функціоналі добавками з встановленими множниками Лагранжа.

Ненульові елементи верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці  $A^{(1)}$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{11}(U_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, & \alpha_{i+N, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{22}(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds, \\ \alpha_{i+2N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{33}(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}) r ds \quad (i = 1, 2, \dots, N, j = i), \\ \alpha_{i, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{12}(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, & \alpha_{i, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{13}(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}) r ds, \\ \alpha_{i+N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{\zeta} \Psi_{23}(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}) r ds \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (3.43)\end{aligned}$$

Введені тут оператори  $\Psi_{ij}(p, q)$  визначаються за формулами наведеними в розд. 1.

Формули для коефіцієнтів  $\alpha_{i+3N, j+3N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+3N, j+4N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+3N, j+5N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+4N, j+4N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+4N, j+5N}^{(1)}$ ,  $\alpha_{i+5N, j+5N}^{(1)}$  можна отримати з формул (3.43) після відповідної заміни в них функцій  $U_k^{(1)}$ ,  $V_k^{(1)}$ ,  $W_k^{(1)}$  на функції  $U_k^{(2)}$ ,  $V_k^{(2)}$ ,  $W_k^{(2)}$  і заміни границь інтегрування від  $\zeta$  до  $s_2$ .

Елементи  $\alpha_{ij}^{(2)}$  верхньої частини відносно головної діагоналі симетричної матриці  $A^{(2)}$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ T(U_i^{(1)}, 0, 0) U_j^{(1)} + T(U_j^{(1)}, 0, 0) U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\ \alpha_{i+N, j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ S(0, V_i^{(1)}) V_j^{(1)} + S(0, V_j^{(1)}) V_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\ \alpha_{i+N, j+2N}^{(2)} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ Q(W_i^{(1)})W_j^{(1)} + Q(W_j^{(1)})W_i^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. - M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(1)}}{ds} - M(W_j^{(1)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=\zeta} \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, N, j = i), \\
 \alpha_{i,j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ T(0, V_j^{(1)}, 0)U_i^{(1)} + S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i,j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ T(0, 0, W_j^{(1)})U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ T(U_i^{(1)}, 0, 0)U_j^{(2)} - T(U_j^{(2)}, 0, 0)U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i,j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ S(U_i^{(1)}, 0)V_j^{(2)} - T(0, V_j^{(2)}, 0)U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i,j+5N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ T(0, 0, W_j^{(2)})U_i^{(1)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ S(U_j^{(2)}, 0)V_i^{(1)} - T(0, V_i^{(1)}, 0)U_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ S(0, V_j^{(2)})V_i^{(1)} - S(0, V_i^{(1)})V_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \\
 \alpha_{i+N,j+5N} &= 0, \\
 \alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ T(0, 0, W_i^{(1)})U_j^{(2)} \right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+2N,j+4N} = 0, \\
 \alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ Q(W_j^{(2)})W_i^{(1)} - Q(W_i^{(1)})W_j^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. + M(W_i^{(1)})\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M(W_j^{(2)})\frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=\zeta} \quad (3.44) \\
 &\quad (i, j = 1, 2, \dots, N).
 \end{aligned}$$

Решта коефіцієнтів матриці  $A^{(2)}$  обчислюються за формулами

$$\alpha_{i+3N,j+3N}^{(2)} = -\alpha_{ij}^{(2)}, \quad \alpha_{i+4N,j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i+N,j+N}^{(2)},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+5N,j+5N}^{(2)} &= -\alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots, N, j = i), \\
\alpha_{i+3N,j+4N}^{(2)} &= -\alpha_{i,j+N}^{(2)}, \quad \alpha_{i+3N,j+5N}^{(2)} = -\alpha_{i,j+2N}^{(2)}, \\
\alpha_{i+4N,j+5N}^{(2)} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

де в правих частинах виразів (3.45) верхній індекс 1 при функціях слід замінити на 2.

Введені у виразах (3.44) і (3.45) функції  $T$ ,  $S$ ,  $M$  і  $Q$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
T(p, q, t) &= \frac{dp}{ds} + \nu \frac{r'}{r} p + \nu \frac{n}{r} q + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) t, \quad Q(t) = \tilde{Q}_1(t), \\
S(p, q) &= -\frac{\nu_1 n}{r} p + \nu_1 \left( \frac{dq}{ds} - \frac{r'}{r} q \right), \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}, \\
M(t) &= c^2 \left[ -\frac{d^2 t}{ds^2} + \nu \left( \frac{n^2}{r^2} t - \frac{r'}{r} \frac{dt}{ds} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.46}$$

при цьому, якщо у функціях  $T$  і  $S$  один з аргументів покладається рівним нулю, то мається на увазі, що і відповідні похідні тотожно дорівнюють нулю.

Коефіцієнти  $b_{ij}$  симетричної матриці  $B$  обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= \int_{s_1}^{\zeta} U_i^{(1)} U_j^{(1)} r ds, \quad b_{i+N,j+N} = \int_{s_1}^{\zeta} V_i^{(1)} V_j^{(1)} r ds, \\
b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{\zeta} \left( W_i^{(1)} + a G W_i^{(1)} \Big|_{L_1} \right) W_j^{(1)} r ds, \\
b_{i+3N,j+3N} &= \int_{\zeta}^{s_2} U_i^{(2)} U_j^{(2)} r ds, \quad b_{i+4N,j+4N} = \int_{\zeta}^{s_2} V_i^{(2)} V_j^{(2)} r ds, \\
b_{i+4N,j+4N} &= \int_{\zeta}^{s_2} W_i^{(2)} W_j^{(2)} r ds, \quad (i, j = \overline{1, N}).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Решта коефіцієнтів матриці  $B$  дорівнюють нулю.

Під час обчислення елементів матриці  $b_{i+2N, j+2N}$  ( $i, j = \overline{1, N}$ ) необхідно знати функції  $F_k(z, r)$  на контурі  $L_1$ , які є розв'язками наступних задач Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F_k}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} F_k &= 0 \quad (z, r) \in Q, \\ \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0, \quad \left( \frac{\partial F_k}{\partial n} \right) \Big|_{L_1} = W_k^{(1)} \quad (k = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

На відміну від задачі (3.28) гранична умова на контурі  $L_1$  містить вже відомі функції  $W_k^{(1)}$ , які обрані в якості координатних функцій для апроксимації нормального прогину оболонки  $w^{(1)}(s)$  в області  $G^{(1)}$ .

Розв'язки крайових задач (3.48) для довільної оболонки обертання можуть бути знайдені наближено за допомогою методу Трефца, якщо їх попередньо звести до еквівалентних варіаційних задач для функціоналів

$$\begin{aligned} I_k &= \int_Q \left[ r \left( \frac{\partial F_k}{\partial z} \right)^2 + r \left( \frac{\partial F_k}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} (F_k)^2 \right] dz dr - \\ &- 2 \int_{L_1} r F_k W_k^{(1)} ds, \quad (k = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

В якості координатних функцій виберемо систему частинних розв'язків рівняння (3.48), які лінійно незалежні та повні на будь-якому замкнутому контурі  $Q$  [87]. У цьому випадку розв'язки задач (3.48) подамо у вигляді розкладів:

$$F_k(z, r) = \sum_{j=1}^q d_j^{(k)} \Psi_j(z, r). \quad (3.50)$$

Тут  $d_{ij}$  — довільні сталі

$$\Psi_j = \frac{2^n n! (j-n)!}{(j+n)!} R^j P_j^{(n)}(\cos \theta),$$

де  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ ,  $\cos \theta = z/R$ ,  $P_j^{(n)}$  — приєднані функції Лежандра першого роду.

Координатні функції  $\Psi_j(z, r)$  та їх похідні зручно обчислювати за такими рекурентними співвідношеннями:

$$\Psi_{j+1} = \frac{1}{j+2n} \{ [2(j+n) - 1]z\Psi_j - (j-1)(z^2 + r^2)\Psi_{j-1} \},$$

$$\frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} = j\Psi_j, \quad \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial r} = \frac{(j+n)\Psi_{j+1} - jz\Psi_j}{r}.$$

Наведені співвідношення дають змогу побудувати системи частинних розв'язків вихідних рівнянь і їх похідних для будь-якого значення параметра  $n$  і індексу  $j$ , якщо при цьому покласти

$$\Psi_1 = r^n, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = nr^{(n-1)}.$$

Сталі  $d_j^{(k)}$  у розкладах (3.50) знайдемо з умов, що функції  $F_k(z, r)$  повинні надавати мінімуми квадратичним функціоналам (3.49). Ці умови призводять до таких систем лінійних неоднорідних рівнянь відносно компонент вектор-стовпців  $\vec{d}^{(k)} = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_q^{(k)}\}$ :

$$D\vec{d}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)} \quad (k = \overline{1, N}), \quad (3.51)$$

де коефіцієнти  $d_{ij}$  симетричної матриці  $D$  і елементи  $\gamma_i^{(k)}$  вектор-стовпців  $\vec{\gamma}^{(k)}$  визначаються за формулами

$$d_{i,j} = \int_{L_0+L_1} r\Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} ds; \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_1} rW_k^{(1)} \Psi_i ds \quad (i, j = \overline{1, q}).$$

При виведенні цих виразів було враховано, що координатні функції  $\Psi_i(z, r)$  задовольняють вихідне рівняння (3.48). Це дозволило звести подвійні інтеграли по області  $Q$  до одновимірних інтегралів по її границі, що істотно спростило алгоритм розв'язання крайових задач (3.48). В результаті, побудова розв'язків задач Неймана (3.48) на основі методу Трефтца звелась до розв'язування  $N$  неоднорідних алгебраїчних рівнянь (3.51) з однаковою матрицею  $D$  і  $N$  різними правими частинами.

Таким чином, розв'язування спектральної задачі (3.17), (3.18) зведено до розв'язування однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.42). З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи знаходимо частоти  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) коливань розглядуваної механічної системи. Потім з рівнянь (3.42) знаходяться вектори  $\vec{X}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{6N}^{(i)}\}$ , відповідні кожній знайденій частоті  $\Omega_i$ . Знання векторів  $\vec{X}^{(i)}$  дозволяє визначити форми коливань оболонки за формулами (3.41). У свою чергу потенціал зміщень рідини, відповідний  $i$ -му тону коливань системи, визначається наступним чином:

$$\Phi_i(z, r) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N}^{(i)} F_j(z, r).$$

Для врахування хвильових рухів рідини в оболонці необхідно мати розв'язки спектральної задачі (3.12) з параметром у граничній умові. Власні функції та власні значення цієї задачі для довільної оболонки обертанья можуть бути знайдені наближено методом Трефтца якщо крайову задачу (3.12) після відокремлення кутової координати попередньо звести до варіаційної задачі. Функціонал, що відповідає цій крайовій задачі, має вигляд

$$I(\varphi) = \int_Q \left[ r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} \varphi^2 \right] dz dr - \varkappa \int_{L_0} r \varphi^2 ds. \quad (3.52)$$

Функцію  $\varphi(z, r)$  подамо у вигляді розкладу:

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=1}^q a_k \Psi_k(z, r), \quad (3.53)$$

де  $a_k$  — довільні сталі;  $\Psi_k(z, r)$  — раніше введена система частинних розв'язків рівняння для функції  $\varphi$ .

З умов стаціонарності функціонала (3.52) для визначення коефіцієнтів  $a_k$  і параметрів  $\varkappa$  отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(D - \varkappa B_1) \vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_q\},$$

де коефіцієнти матриці  $D$  збігаються з коефіцієнтами відповідної матриці системи рівнянь (3.51), елементи  $\beta_{ij}^{(1)}$  матриці  $B_1$  обчислюються за формулами

$$\beta_{ij}^{(1)} = \int_{L_0} r \Psi_i \Psi_j ds.$$

Знайдені розв'язки для функцій  $\vec{U}_i(s)$ ,  $\Phi_i(z, r)$  і  $\varphi_i$  дозволяють визначити коефіцієнти рівнянь (3.24) збуреного руху довільної оболонки обертання, частково заповненої рідиною.

### 3.1.4 Результати розрахунку неосесиметричних коливань циліндричної оболонки, частково заповненої рідиною

Наведемо результати розрахунків конкретної оболонки обертання за запропонованим вище алгоритмом. У літературних джерелах відомо точні розв'язки розглядуваної спектральної задачі для оболонки у формі прямого кругового циліндра [41], отримані на основі використання технічної теорії оболонок Власова. Чисельні результати цієї роботи можуть бути основою для оцінки точності різних наближених методів розв'язування даної задачі. У зв'язку з цим нижче будемо розглядати оболонку обертання у формі кругового циліндра одиничного радіуса і довжиною  $l$ . Будемо вважати, що при  $s_1 = 0$  торець оболонки жорстко закріплений, а при  $s_2 = l$  — вільний.

Спочатку оцінимо ефективність варіаційного методу розв'язування задачі, який базується на декомпозиції області інтегрування вихідних рівнянь. У зв'язку з цим розглянемо неосесиметричні коливання циліндричної оболонки без рідини ( $a = 0$ ). Ця задача має також точні розв'язки.

Покладемо  $\nu = 0.3$ ,  $l = 4$ ,  $\zeta = 2$ ,  $a = 0$ ,  $h = 0.01$ ,  $n = 1$ .

У табл. 3.1 наведено збіжність перших чотирьох власних значень  $\lambda_i$  при числі хвиль в круговому напрямку  $n = 1$  в залежності від кількості наближень  $N$  в розкладах (3.41). В останньому рядку таблиці, позначеного зірочкою, наведені розрахункові величини, отримані на основі точного розв'язування даної задачі [89].



Таблиця 3.1: Збіжність перших чотирьох власних значень  $\lambda_i$  ( $n = 1$ ) в залежності від кількості наближень  $N$  у розкладах (3.41)

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
4	.10859	.35024	.63185	.73055
6	.10809	.34972	.62820	.72974
8	.10795	.34965	.62802	.72971
10	.10790	.34964	.62798	.72971
12	.10789	.34964	.62798	.72970
14	.10789	.34964	.62798	.72970
(*)	.10789	.34964	.62798	.72970

Таблиця 3.2: Значення нормального прогину  $w(\pm)$  для першої форми коливань оболонки і його перших трьох похідних при різній кількості наближень  $N$  у розкладах (3.41)

$N$	$w(\pm)$	$w'(\pm)$	$w''(\pm)$	$w'''(\pm)$
10	.47179	.28728	-1.0113	18.080
	.46409	.25086	.95644	20.146
14	.46880	.27533	.06156	-2.1897
	.46885	.27441	-.01540	2.0808
18	.46882	.27503	.02374	-.16744
	.46882	.27502	.02139	.05579
22	.46882	.27502	.02245	-.03317
	.46882	.27502	.02268	-.07860
26	.46882	.27502	.02256	-.05672
	.46882	.27502	.02256	-.05506
30	.46882	.27502	.02256	-.05587
	.46882	.27502	.02256	-.05590

Значення нормального прогину  $w(\pm)$  за першою формою коливань оболонки та їх перших трьох похідних, при різній кількості наближень  $N$  у розкладах (3.41) представлені в табл. 3.2. Тут  $w(+)$  =  $w^{(2)}(\zeta)$  (верхні рядки) і  $w(-)$  =  $w^{(1)}(\zeta)$  (нижні рядки). Аналогічні позначення мають місце і для похідних. Вектор  $\vec{X}$  алгебраїчної системи (3.42) нормувався таким чином, щоб  $w(l) = 1$ .

Наведені обчислення показують, що даний метод розв'язування вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність

для розв'язків і їх перших трьох похідних як всередині областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , так і на їх границях. Крім того, результати табл. 3.2 свідчать про точність виконання кінематичних і силових умов спряження при використанні узагальненого функціонала для розв'язування даної задачі.

Розглянемо задачу в припущенні, що при збуреному русі рідини її вільна поверхня залишається плоскою і перпендикулярною до осі оболонки. Розв'язок цієї задачі можна отримати, поклавши в представленні (3.9)  $\Psi \equiv 0$ . У відповідності з працею [41] виберемо наступні безрозмірні параметри оболонки:

$$\frac{l}{R_0} = 6.06; \quad \nu = 0.29, \quad \frac{R_0}{h} = 150, \quad a = 19.2, \quad \eta = 0.126 \cdot 10^{-7}.$$

Значення параметрів  $n$  і  $\varepsilon = H/l$  варіювались.

Таблиця 3.3: Значення частот  $\lambda_i$  коливань оболонки при  $N = 14$ ,  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , в залежності від числа наближень  $q$  в розкладах (3.50)

$q$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
4	.01710	.05195	.12240	.21516	.28348
6	.01710	.05187	.12044	.20200	.26386
8	.01710	.05187	.12044	.20105	.25673
10	.01710	.05187	.12044	.20103	.25593

У табл. 3.3 наведено розрахункові дані перших п'яти власних значень  $\lambda_i$  при  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , в залежності від кількості наближень  $q$  у розкладах (3.50) і при  $N = 14$  у розкладах (3.41). У табл. 3.4 наведені значення перших п'яти власних значень  $\lambda_i$  при  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , в залежності від кількості наближень  $N$  у розкладах (3.41) і при  $q = 10$  у розкладах (3.50).

Дані табл. 3.3 і 3.4 свідчать про досить швидку збіжність розкладів Треффта (3.50) при розв'язуванні  $N$  неоднорідних допоміжних крайових задач Неймана в області, зайнятою рідиною, а також розкладів Рітца (3.41) для знаходження переміщень оболонки, що знаходиться під дією розривного динамічного навантаження з боку рідини.

Таблиця 3.4: Значення частот  $\lambda_i$  коливань оболонки при  $q = 10$ ,  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , в залежності від числа наближень  $N$  у розкладах (3.4)

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
4	.01731	.05274	.12531	.23262	.28929
6	.01719	.05215	.12142	.20313	.25816
8	.01714	.05196	.12074	.20177	.25682
10	.01712	.05190	.12050	.20124	.25629
12	.01710	.05186	.12036	.20070	.25577
14	.01710	.05187	.12043	.20103	.25593
16	.01710	.05187	.12041	.20092	.25586
18	.01710	.05187	.12041	.20092	.25586

Таблиця 3.5: Значення нижчої власної частоти коливань оболонки отримані на основі запропонованого алгоритму в припущенні плоскої вільної поверхні рідини (верхній рядок) та їх точні значення з урахуванням хвильових рухів рідини [41] (нижній рядок)

$\varepsilon$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.125	.02084	.01907	.03047	.04738
	.02085	.01907	.03047	.04738
0.25	.02062	.01894	.03022	.04322
	.02072	.01899	.03032	.04506
0.50	.01710	.01607	.02198	.02818
	.01796	.01663	.02280	.02880
0.75	.01114	.01102	.01666	.02412
	.01199	.01154	.01702	.02431

Порівняння наближених значень першої частоти коливань оболонки, отриманих без урахування хвильових рухів рідини (верхні рядки) з відповідними точними значеннями праці [41] з урахуванням коливань рідини (нижні рядки) представлено в табл. 3.5. Дані табл. 3.5 свідчать про те, що при прийнятих параметрах розглядуваної механічної системи максимальна розбіжність наближених і точних значень  $\lambda_1$  не перевищує 7%. Наведені тут результати не виключають існування таких параметрів системи, при яких точні та наближені значення частот будуть більш відчутної відмінності. Ця відмінність буде позначатися при збільшенні параметрів

$l/R_0$  і  $R_0/h$ . Це пояснюється зближенням парціальних частот, зумовлених пружними коливаннями оболонки з рідиною при закріпленій її вільній поверхні і хвильовими коливаннями рідини в абсолютно жорсткому резервуарі. Отже, запропоноване наближене розв'язування даної задачі можна використовувати для практичних розрахунків нижньої межі мінімальних частот пружних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

Наведемо деякі результати розрахунків за запропонованим вище алгоритмом коливань оболонки з урахуванням хвильових рухів рідини. При цьому параметри розглядуваної механічної системи будуть збігатися з параметрами з попереднього прикладу.

У даному випадку розв'язок спектральної задачі (3.12) можна отримати методом розділення змінних. При цьому власні функції  $\varphi_k(z, r, \beta)$  матимуть такий вигляд:

$$\varphi_k(z, r, \beta) = \frac{\text{ch}(\xi_k z)}{\xi_k \text{sh}(\xi_k H)} \cdot \frac{J_n(\xi_k r)}{J_n(\xi_k)} \cos n\beta,$$

де  $J_n(x)$  — функції Бесселя першого роду і  $n$ -го порядку;  $\xi_k$  —  $k$ -й корінь рівняння  $J'_n(\xi) = 0$ .

Власні значення  $\varkappa_k$  задачі (3.12) і безрозмірні коефіцієнти  $\mu_k$  рівнянь (3.16) визначаються за формулами

$$\varkappa_k = \xi_k \text{th}(\xi_k H), \quad \mu_k = \frac{\pi(\xi_k^2 - n^2)}{2\xi_k^3 \text{th}(\xi_k H)}.$$

Для визначення вільних коливань розглядуваної механічної системи після знаходження коефіцієнтів рівнянь (3.24)  $a_i$ ,  $\lambda_{ik}$ ,  $\Omega_i^2$ ,  $\mu_k$ ,  $\sigma_k^2$  необхідно розв'язати однорідну алгебраїчну систему рівнянь (3.26).

У табл. 3.6 наведені нижчі частоти  $\lambda$  зв'язаних коливань рідини і пружної оболонки при кількості хвиль в круговому напрямку  $n = 2$  і відносній глибині рідини в оболонці  $\varepsilon = 0.25$  в залежності від кількості членів  $r_0$  і  $s_0$  у розкладах (3.15) і (3.23) для апроксимації хвильових рухів рідини і переміщень оболонки відповідно. З таблиці безпосередньо випливає, що спектр частот коливань розглядуваної механічної системи має дві гілки. Перша гілка  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_0}$  пов'язана переважно з хвильовими рухами вільної

Таблиця 3.6: Значення частот  $\lambda_i$  зв'язаних коливань розглядуваної системи при  $N = 14$ ,  $q = 10$ ,  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.25$ 

$s_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_{r_0}$	$\lambda_{r_0+1}$	$\lambda_{r_0+2}$	$\lambda_{r_0+3}$
$r_0 = 0$						
1				.02062		
2				02062	.07459	
3				02062	.07459	.14864
4				02062	.07459	.14864
5				02062	.07459	.14864
$r_0 = 1$						
1	.00020			.02071		
2	.00020			.02071	.08171	
3	.00020			.02071	.08160	.15176
4	.00020			.02071	.08152	.15157
5	.00020			.02071	.08152	.15156
$r_0 = 2$						
1	.00020	.00029		.02072		
2	.00020	.00029		.02072	.08231	
3	.00020	.00029		.02072	.08219	.15193
4	.00020	.00029		.02072	.08209	.15170
5	.00020	.00029		.02072	.08208	.15169
$r_0 = 3$						
1	.00020	.00029	.00035	.02072		
2	.00020	.00029	.00035	.02072	.08250	
3	.00020	.00029	.00035	.02072	.08237	.15197
4	.00020	.00029	.00035	.02072	.08226	.15173
5	.00020	.00029	.00035	.02072	.08226	.15172

поверхні рідини, а друга гілка спектра  $\lambda_{r_0+1}, \lambda_{r_0+2}, \dots, \lambda_{r_0+s_0}$  переважно пов'язана з деформаціями серединної поверхні оболонки, яка визначається її пружними та інерційними властивостями. Для розглянутих параметрів оболонки нижчі частоти переважно хвильових рухів рідини з точністю до шести значущих цифр збігаються з частотами вільних коливань рідини в абсолютно жорсткому циліндрі. Отже, в цьому випадку пружність оболонки практично не впливає на коливання рідини. У свою чергу, хвильові рухи рідини можуть істотно впливати на частоти другої гілки зв'язаних

коливань рідини і оболонки.

Для переважно пружних частот коливань максимальне переміщення серединної поверхні оболонки завжди більше за максимальне зміщення вільної поверхні рідини.

Запропонований алгоритм розв'язування задачі має досить швидку збіжність. Це пояснюється вдалим вибором парціальних систем, що враховують основні властивості шуканих розв'язків.

При отриманні наведених вище результатів у рядах (3.41) і (3.50) утримувалася відповідно така кількість членів  $N$  і  $q$ , при яких у знайдених значеннях частот  $\lambda$  було б не менше шести вірних значущих цифр. Ці умови виконуються при  $N = 14$  і  $q = 10$ .

Порівняння отриманих розрахункових даних з точними табличними результатами, наведеними в праці [41], свідчить про їх повний збіг.

Характер зміни переважно пружних нижчих частот  $\lambda_{r_0+1}$  в залежності від числа хвиль  $n$  у круговому напрямку та параметра заповнення оболонки рідиною  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) показано на рис. 3.1.

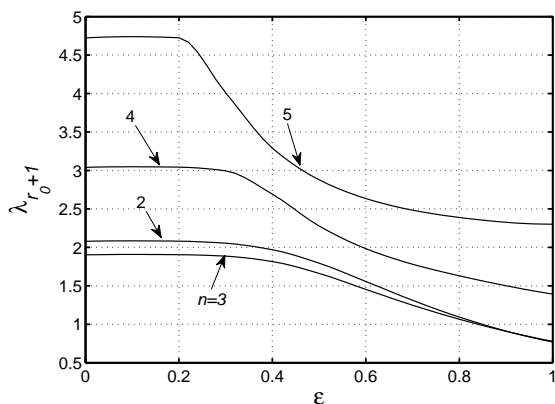


Рис. 3.1: Характер зміни переважно пружних нижчих частот  $\lambda_{r_0+1}$  в залежності від кількості хвиль  $n$  у круговому напрямку і параметра заповнення оболонки рідиною  $\varepsilon$

З наведених залежностей випливає, що для розглянутих параметрів оболонки найбільший вплив має зміна глибини рідини в

діапазоні  $0.125 \leq \varepsilon \leq 0.9$ . Для  $\varepsilon < 0.125$  частоти близькі до частот оболонки без рідини, а при  $\varepsilon > 0.9$  — до частот оболонки, повністю заповненої рідиною.

Таким чином, вище запропоновано алгоритм розрахунку власних коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених рідиною, з урахуванням хвильових рухів на вільній поверхні. Оскільки оболонка знаходиться під дією розривного динамічного навантаження, то при побудові наближеного розв'язку задачі гідропружності область інтегрування рівнянь для оболонки розбивається на дві підобласті. Перша підобласть відповідає змоченій частині оболонки, а друга — не змоченій.

Розв'язок сформульованої задачі базується на побудові узагальненого функціонала, для якого умови спряження на суміжній границі введених підобластей є природними граничними умовами. На основі методу Рітца і наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі, розв'язок задачі гідропружності зведено до розв'язування однорідної алгебраїчної системи рівнянь. Такий підхід дозволяє розділити труднощі побудови розв'язків, які виникають при спільному інтегруванні рівнянь у частинних похідних для потенціалу зміщень рідини і системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують коливання довільної оболонки обертання.

На прикладі задачі про власні неосесиметричні коливання кругової циліндричної оболонки, частково заповненої ідеальною рідиною, показано досить високу точність і ефективність запропонованого алгоритму розв'язування даної задачі гідропружності.

## 3.2 Збурений рух твердих тіл з осесиметричною порожниною, яка частково заповнена рідиною та містить пружні елементи на її вільній поверхні

### 3.2.1 Основні припущення, рівняння та граничні умови для потенціалу зміщень рідини і пружних елементів у вигляді пластини або мембрани

При розв'язуванні практичних задач динаміки конструкцій, наповнених рідиною, важливо вивчити вплив додаткових ступенів вільності, якими володіє рідина, на стійкість руху розглядуваного об'єкта. Наявність таких ступенів вільності може несприятливо позначитися на роботі як окремих елементів конструкцій, так і всієї механічної системи в цілому. Основними елементами розв'язування задачі запобігання динамічної нестійкості рухомих об'єктів є створення відповідної математичної моделі досліджуваного руху та визначення параметрів цієї моделі (частот власних коливань, приєднаних мас і моментів інерції). Розв'язок такої задачі дасть можливість дослідити динамічні властивості розглядуваного об'єкта і відшукати можливості зміни цих властивостей у потрібному напрямку.

Нижче виводяться рівняння руху механічної системи „тіло–рідина“ для випадку, коли вільна поверхня рідини покрита пружною пластинкою або мембраною. Ці рівняння є певним узагальненням відомих рівнянь руху твердого тіла з порожнинами, частково заповненими рідиною. При виведенні цих рівнянь будемо користуватися основними положеннями теорії руху тіл з рідиною викладеної в працях [51, 54].

Розглянемо тверде тіло з порожниною довільної конфігурації, яка частково заповнена ідеальною та нестисливою рідиною. Передбачається, що область  $Q$ , заповнена рідиною, обмежена абсолютно твердими стінками порожнини  $S$  і плоским пружним елементом у вигляді тонкої пластинки або мембрани, розташованим на незбуреній вільній поверхні рідини  $\Sigma$  і жорстко закріпленим



по своєму контуру на стінках порожнини. Рух тіла під впливом прикладених до нього зовнішніх сил і рідини, що перебуває в його порожнині, будемо розглядати в полі сил тяжіння з вектором прискорення  $\vec{g}$ . Введемо нерухому прямокутну систему координат  $O^*x^*y^*z^*$ , вісь  $O^*z^*$  якої спрямована протилежно до вектора  $\vec{g}$ . Зв'язану з тілом систему координат  $Oxyz$  розташуємо так, щоб вона в початковий момент часу  $t$  збігалася із системою координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Орти осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  будемо позначати через  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{i}_2$  і  $\vec{i}_3$ . Відповідні орти нерухомої системи координат  $O^*x^*y^*z^*$  будемо позначати зірочками. Початок системи координат  $O^*x^*y^*z^*$  сумістимо із площиною пружного елемента.

При розгляді руху даної механічної системи будемо припускати, що переміщення, швидкості й прискорення частинок рідини, стінок резервуара і пружних елементів на поверхні  $\Sigma$  настільки малі, що добутками, квадратами і більш високими їхніми степенями можна знехтувати у порівнянні зі значенням кожної із цих величин. Введена гіпотеза малості параметрів руху системи дозволяє істотно спростити постановку розглядуваної задачі і зберегти при цьому її практичне значення. При зазначених умовах, якщо початковий рух рідини є безвихровим, у силу теореми Лагранжа властивість потенціальності руху рідини буде зберігатися під час руху.

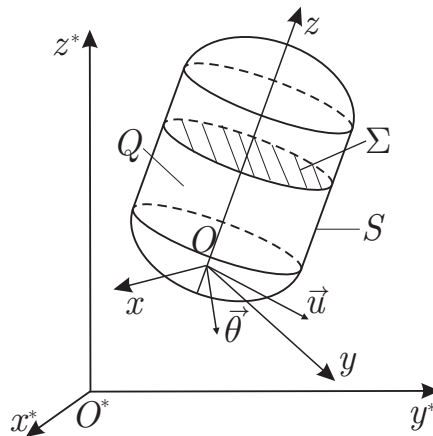


Рис. 3.2: Рух твердого тіла під дією заданих зовнішніх сил

Рух твердого тіла під дією заданих зовнішніх сил будемо характеризувати вектором малого переміщення  $\vec{u}(t)$  точки  $O$  відносно точки  $O^*$  і вектором малого повороту  $\vec{\theta}(t)$  рухомої системи координат  $Oxyz$  відносно  $O^*x^*y^*z^*$  (рис. 3.2). Потенціал сил тяжіння, як відомо, можна подати у вигляді

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r}^*, \quad \vec{r}^* = \vec{u} + \vec{r}, \quad (3.54)$$

де  $\vec{r}^*$  — радіус-вектор точки системи „тіло—рідина“ відносно початку  $O^*$  абсолютної системи координат;  $\vec{r}$  — радіус-вектор довільної точки системи відносно точки  $O$ .

Для опису поведінки рідини в рухомій порожнині скористаємося потенціалом зміщень  $\chi(x, y, z, t)$ , який пов'язаний з потенціалом швидкостей  $\chi'(x, y, z, t)$  співвідношенням

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.55)$$

Для потенціалу малих зміщень частинок рідини справедливі такі самі співвідношення, що й для потенціалу швидкостей:

$$\Delta \chi = 0, \quad \vec{v} = \nabla \chi, \quad (3.56)$$

де  $\vec{v}$  — вектор зміщень частинок рідини;  $\Delta$  і  $\nabla$  — оператори Лапласа й Гамільтона відповідно:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вектор зміщень  $\vec{v}$  відіграє таку саму роль, що й вектор швидкості частинок рідини при описі кінематичної картини руху рідини за допомогою потенціалу швидкостей.

Сформулюємо тепер граничні умови, яким повинна задовольняти гармонічна функція  $\chi(x, y, z, t)$ . На змочуваній поверхні порожнини нормальна складова зміщення рідини дорівнює відповідній складовій зміщень стінки порожнини та визначається векторами  $\vec{u}(t)$  і  $\vec{\theta}(t)$ , які характеризують рух тіла. На вільній поверхні рідини, що покрита пружною пластинкою або мембраною, нормальна її складова ще залежить і від зміщення  $w(x, y, t)$  цих елементів у напрямку осі  $Oz$  за рахунок їхніх пружних деформацій

при взаємодії з рідиною. Внаслідок прийнятої гіпотези малості параметрів руху розглядуваної системи граничні умови можна віднести до поверхонь  $\Sigma$  і  $S$ , які обмежують рідину в її незбуреному стані. Враховуючи зазначене вище, кінематичним граничним умовам для потенціалу рідини  $\chi(x, y, z, t)$  можна надати таку форму:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S &= \vec{u} \cdot \vec{\nu} + (\vec{\theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nu} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}), \\ \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_\Sigma &= \vec{u} \cdot \vec{\nu} + \vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) + w(x, y, t),\end{aligned}\quad (3.57)$$

де  $\vec{\nu}$  — орт зовнішньої нормалі до поверхні  $S$  або  $\Sigma$ .

Граничні умови (3.57) дозволяють представити потенціал зміщень рідини в такому вигляді:

$$\chi(x, y, z, t) = \vec{u} \cdot \vec{F} + \vec{\theta} \cdot \vec{\Omega} + \varphi. \quad (3.58)$$

Тут  $\vec{F}(x, y, z)$  і  $\vec{\Omega}(x, y, z)$  — гармонічні вектор-функції, які повинні задовольняти граничні умови:

$$\left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S} = \vec{\nu}, \quad \left. \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S} = \vec{r} \times \vec{\nu}. \quad (3.59)$$

Гармонічна функція  $\varphi$ , яка входить у вираз (3.58), повинна задовольняти такі умови на границі області  $Q$ :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_\Sigma = w. \quad (3.60)$$

Умови (3.59) вже не залежать від векторів  $\vec{u}(t)$  і  $\vec{\theta}(t)$ , а тому функції  $\vec{F}$  і  $\vec{\Omega}$  будуть визначатися формою області  $Q$  і вибором системи координат  $Oxyz$ . Гармонічна функція  $\varphi$  залежить від часу  $t$  і буде визначатися прогином у напрямку осі  $Oz$  пружних елементів, розташованих на поверхні  $\Sigma$ .

Враховуючи, що  $\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S} = \vec{\nu}$ , вирази для проєкцій  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектор-функції  $\vec{F}$  на осі рухомої системи координат можна записати в явному вигляді:

$$F_1 = x, \quad F_2 = y, \quad F_3 = z. \quad (3.61)$$

На проєкції вектор-функції  $\vec{\Omega}$  і функцію  $\varphi(x, y, z, t)$  повинні бути накладені додаткові обмеження:

$$\int_{\Sigma \cup S} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} dS = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \int_{\Sigma} w dS = 0, \quad (3.62)$$

що випливають із умов розв'язності крайових задач Неймана для рівняння Лапласа. У справедливості виконання першої умови можна переконатися, скориставшись формулами Гауса—Остроградського.

Гармонічні векторні функції  $\vec{F}$  і  $\vec{\Omega}$  пов'язані з описом руху рідини в порожнині при її поступальних і обертальних рухах для випадку, коли поверхня  $\Sigma$  залишається незбуреною. У свою чергу, складова  $\varphi(x, y, z, t)$  потенціалу зміщень  $\chi$  враховує рух рідини за рахунок деформації пружних елементів, розташованих на поверхні  $\Sigma$ .

Тиск  $P(x, y, z, t)$  у довільній точці рідини з точністю до довільної функції часу пов'язаний з потенціалом зміщень рідини  $\chi$  і потенціалом сил тяжіння  $U$  інтегралом Лагранжа—Коші [40]:

$$P(x, y, z, t) = -\rho U - \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}, \quad (3.63)$$

де  $\rho$  — густина рідини.

Тиск на пружний елемент, який обмежує незбурену вільну поверхню рідини, відповідно до формули (3.63) буде визначатися виразом:

$$P|_{\Sigma} = -\rho g \delta z_{\theta} - \rho g w - \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.64)$$

Тут  $g$  — модуль вектора прискорення вільного падіння.

Перші два доданки у цій формулі визначають додаткові гідростатичні тиски на пружний елемент, зумовлені поворотом системи координат  $Oxyz$  відносно  $O^*x^*y^*z^*$  на кут  $\vec{\theta}$  і деформацією поверхні  $\Sigma$  відповідно. При цьому з точністю до малих членів першого порядку малості

$$\delta z_{\theta} = (\vec{\theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{i}_3 = \theta_1 y - \theta_2 x. \quad (3.65)$$

Останній доданок у формулі (3.64) визначає динамічний тиск рідини на пружний елемент.

У випадку розташування на вільній поверхні рідини мембрани її прогин  $w(x, y, t)$  у напрямку зовнішньої нормалі до поверхні  $\Sigma$  з урахуванням формул (3.64) і (3.65) повинен визначатися з розв'язку рівняння

$$L(w) + \rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \Big|_{\Sigma} - \rho g(\theta_1 y - \theta_2 x) \quad (3.66)$$

при граничній умові на закріпленому контурі мембрани  $l$ :

$$w|_l = 0. \quad (3.67)$$

Тут

$$L(w) = -T \Delta_2 w + \rho g w; \quad (3.68)$$

$\Delta_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$  — двовимірний оператор Лапласа;  $\rho_0$  і  $\delta_0$  — густина матеріалу і товщина мембрани відповідно;  $T$  — розтяжне зусилля в серединній поверхні мембрани.

Нормальний прогин  $w(x, y, t)$  пружної пластинки, розташованої на поверхні  $\Sigma$ , повинен визначатися з рівняння вигляду (3.66), у якому

$$L(w) = D \Delta_2 \Delta_2 w + \rho g w, \quad (3.69)$$

при граничних умовах

$$w|_l = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_l = 0. \quad (3.70)$$

У формулах (3.69) і (3.70)  $D = \frac{E \delta_0^3}{12(1 - \nu^2)}$  — циліндрична жорсткість пластинки;  $E$ ,  $\nu$  — модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;  $\vec{n}$  — орт зовнішньої нормалі до жорстко закріпленої границі пластинки  $l$ .

Таким чином, ми отримали рівняння та граничні умови для потенціалу зміщень рідини і прогинів пружних елементів, які покривають незбурену вільну поверхню рідини.

### 3.2.2 Визначення головного вектора та головного моменту системи гідростатичних і гідродинамічних сил, які діють на порожнину

Сили, які діють на стінки порожнини з боку рідини, можна розділити на дві групи. До першої групи віднесемо сили  $\vec{P}^{(s)}$  і моменти  $\vec{M}_o^{(s)}$  відносно точки  $O$ , які зумовлені масовими силами і не пов'язані із прискореннями, що виникають при русі системи координат  $Oxyz$  відносно  $O^*x^*y^*z^*$ . Сили  $\vec{P}^{(d)}$  і моменти  $\vec{M}^{(d)}$  відносно точки  $O$ , які діють на стінки порожнини з боку рідини за рахунок її рухливості в порожнині, віднесемо до другої групи.

Вектори статичних сил і моментів  $\vec{P}^{(s)}$  і  $\vec{M}_o^{(s)}$  можна визначити за формулами [55]

$$\vec{P}^{(s)} = m_w \vec{g}, \quad \vec{M}_o^{(s)} = \vec{L} \times \vec{g}, \quad \vec{L} = \rho \int_{Q'} \vec{r} dQ', \quad (3.71)$$

де  $m_w$  — маса рідини;  $Q'$  — область, зайнята рідиною в її збуреному стані.

Для обчислення вектора  $\vec{L}$  область  $Q'$  можна подати у вигляді суми області  $Q$ , яку займає рідина в її незбуреному стані, і області збуреного шару рідини  $Q^*$ . Елементарний об'єм області  $Q^*$  можна обчислити як об'єм циліндра із площею основи  $d\Sigma$  і висотою  $w(x, y, t)$ . При цьому будемо мати

$$dQ^* = w(x, y, t) d\Sigma.$$

Враховуючи це з точністю до величини першого порядку малості, вектор  $\vec{L}$  можна представити в наступному вигляді:

$$\vec{L} = \rho \int_Q \vec{r} dQ + \rho \int_{Q^*} \vec{r} dQ^* = m_w \vec{r}_{c_w} + \rho \int_{\Sigma} \vec{r} w d\Sigma, \quad (3.72)$$

де  $\vec{r}_{c_w} = \frac{\rho}{m_w} \int_Q \vec{r} dQ$  — радіус-вектор відносно точки  $O$  центру мас

затверділої рідини. Таким чином, вектор  $\vec{M}_o^{(s)}$  буде визначатися

за формулою

$$\vec{M}_o^{(s)} = m_w (\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{g}) w dS. \quad (3.73)$$

Перейдемо тепер до визначення векторів  $\vec{P}^{(d)}$  і  $\vec{M}_o^{(d)}$ . Ці динамічні складові вектора сил і моментів, які діють на тіло з боку рідини, можна визначити на основі теорем про зміну кількості руху та моменту кількості руху рідини в області  $Q$ . Головний вектор  $\vec{P}^{(d)}$  і головний момент  $\vec{M}_o^{(d)}$  з точністю до членів першого порядку малості можна знайти за формулами [47]

$$\vec{P}^{(d)} = -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}, \quad \vec{M}_o^{(d)} = -\frac{\partial \vec{G}_o}{\partial t}. \quad (3.74)$$

Вектори кількості руху  $\vec{K}$  і кінематичного моменту  $\vec{G}_o$  відносно точки  $O$ , які входять в ці вирази, визначаються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \rho \int_Q \vec{v} dQ = \rho \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi dQ, \\ \vec{G}_o &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \vec{v}) dQ = \rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla) \frac{\partial \chi}{\partial t} dQ, \end{aligned} \quad (3.75)$$

де  $\vec{v}$  — вектор швидкості частинок рідини;

$$\vec{r} \times \nabla = \vec{i}_1 \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \vec{i}_2 \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \vec{i}_3 \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Підставляючи у вирази (3.75) потенціал зміщень (3.58), одержуємо:

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \rho \int_Q \nabla \left( \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega} + \ddot{\varphi} \right) dQ, \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \vec{G}_o}{\partial t} = \rho \int_Q \left[ \vec{r} \times \nabla \left( \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r} \right) + \vec{r} \times \nabla \left( \ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega} \right) + \vec{r} \times \nabla \ddot{\varphi} \right] dQ. \quad (3.77)$$

Перетворимо вирази (3.76) і (3.77) до більш зручної форми, використовуючи при цьому гармонічність функцій  $\vec{r}$ ,  $\vec{\Omega}$  і  $\varphi$ , загальну формулу Гауса—Остроградського [47]

$$\int_Q \mathcal{L}(\nabla) dQ = \int_{\Sigma \cup S} \mathcal{L}(\vec{\nu}) dS$$

і формулу Гріна

$$\int_Q (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dQ = \int_{\Sigma \cup S} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS,$$

де  $\mathcal{L}$  — лінійний оператор;  $\varphi$  і  $\psi$  — неперервні разом із частинними похідними до другого порядку скалярні функції.

Обчислимо спочатку складові виразу (3.76):

$$\begin{aligned} \rho \int_Q \nabla (\ddot{u} \cdot \vec{r}) dQ &= \rho \ddot{u} \int_Q dQ = m_w \ddot{u}, \\ \rho \int_Q \nabla (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Omega}) dQ &= \rho \int_{\Sigma \cup S} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\nu} dS = \rho \int_{\Sigma \cup S} (\ddot{\theta} \cdot \vec{\Omega}) \frac{d\vec{r}}{d\nu} dS = \\ &= \rho \int_{\Sigma \cup S} \left( \ddot{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} \right) \vec{r} dS = \rho \int_{\Sigma \cup S} (\ddot{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu})) \vec{r} dS = \\ &= \rho \int_Q (\ddot{\theta} \cdot (\vec{r} \times \nabla)) \vec{r} dQ = \rho \int_Q (\ddot{\theta} \times \vec{r}) dQ = m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \rho \int_Q \nabla \ddot{\varphi} dQ &= \rho \int_{\Sigma \cup S} \ddot{\varphi} \vec{\nu} dS = \rho \int_{\Sigma \cup S} \ddot{\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} dS = \\ &= \rho \int_{\Sigma \cup S} \vec{r} \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \nu} dS = \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \ddot{w} dS. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази у формули (3.76) і (3.74), головний вектор сил, які діють на тіло з боку рідини, буде мати такий вигляд:

$$\vec{P} = \vec{P}^{(d)} + \vec{P}^{(s)} = -m_w \ddot{u} - m_w (\ddot{\theta} \times \vec{r}_{c_w}) - \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \ddot{w} dS + m_w \vec{g}. \quad (3.79)$$



Перейдемо тепер до перетворення складових виразу (3.77):

$$\begin{aligned}
 \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla (\ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r})] dQ &= \rho \int_Q (\vec{r} \times \ddot{\vec{u}}) dQ = m_w (\vec{r}_{c_w} \times \ddot{\vec{u}}), \\
 \rho \int_Q [\vec{r} \times \nabla (\ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega})] dQ &= \\
 &= \rho \int_{\Sigma \cup S} (\vec{r} \times \vec{\nu}) (\ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega}) dS = \rho \int_{\Sigma \cup S} (\ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega}) \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} dS = \\
 &= \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \int_{\Sigma \cup S} \Omega_j \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} dS = \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \sum_{i=1}^3 \vec{i}_i \int_{\Sigma \cup S} \Omega_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} dS = I^{(w)} \cdot \ddot{\vec{\theta}},
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\rho \int_Q (\vec{r} \times \nabla \ddot{\varphi}) dQ = \rho \int_{\Sigma \cup S} (\vec{r} \times \vec{\nu}) \ddot{\varphi} dS = \rho \int_{\Sigma \cup S} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \nu} \ddot{\varphi} dS = \rho \int_{\Sigma} \vec{\Omega} \ddot{w} dS,$$

де  $I^{(w)}$  — тензор інерції рідини з компонентами

$$I_{ij}^{(w)} = \rho \int_{\Sigma \cup S} \Omega_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} dS. \tag{3.81}$$

Зазначимо, що симетрія тензора  $I^{(w)}$  випливає з формули Гріна для гармонічних функцій.

З огляду на формули (3.73), (3.74), (3.77) і (3.80), головний момент  $\vec{M}_o^{(w)}$  відносно точки  $O$  сил тисків, які діють із боку рідини на тверде тіло, набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_o^{(w)} &= \vec{M}_o^{(d)} + \vec{M}_o^{(s)} = -m_w (\vec{r}_{c_w} \times \ddot{\vec{u}}) - I^{(w)} \cdot \ddot{\vec{\theta}} - \\
 &- \rho \int_{\Sigma} \vec{\Omega} \ddot{w} dS + m_w (\vec{r}_{c_w} \times \vec{g}) + \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{g}) w dS.
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Отримані результати будуть використані далі для одержання системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує спільні рухи твердого тіла й рідини, вільна поверхня якої покрита пружним елементом, під впливом прикладених до тіла зовнішніх сил.

### 3.2.3 Рівняння збуреного руху системи «тіло — рідина — пружний елемент»

Введемо до розгляду оператор Неймана  $B$ , який значенням функції  $w$ , заданої на поверхні  $\Sigma$ , ставить у відповідність функцію  $\varphi$ , яка визначена в області  $Q$ , і є розв'язком граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\Sigma} &= w, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_S = 0, \quad \int_{\Sigma} w dS = 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Цю відповідність запишемо у вигляді

$$\varphi = Bw, \quad (3.84)$$

де  $B$  — інтегральний оператор зі слабкою особливістю, ядром якого є функція Гріна задачі Неймана (3.83) для рівняння Лапласа.

Будемо вважати, що при кожному значенні часу  $t$  функція  $w$  буде належати класу  $H$  функцій, якщо вона квадратично сумовна на поверхні  $\Sigma$ , задовольняє граничні умови (3.67) або (3.70) жорсткого закріплення відповідного пружного елемента по його контуру  $l$  і умову збереження об'єму рідини в порожнині твердого тіла. Тоді з урахуванням виразів (3.58), (3.66), (3.68), (3.69) і (3.84) збурений рух пружних елементів можна подати в такому операторному вигляді:

$$L(w) + \rho_0\delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left\{ -\rho g(\theta_1 y - \theta_2 x) - \rho \left( \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \ddot{\vec{\theta}} \cdot \vec{\Omega} + B\ddot{w} \right) \right\} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.85)$$

Тут  $L$  — оператор, породжений диференціальним виразом (3.68) або (3.69) і визначений на множині функцій із класу  $H$ .

Розглянемо власні коливання системи «рідина — пружний елемент» у нерухомому резервуарі. Розв'язки в цьому випадку будуть залежати від часу за законом  $\exp(i\omega t)$ . Щоб одержати рівняння для них, покладемо в (3.85)

$$\vec{u} = \vec{\theta} \equiv 0, \quad w = W \exp(i\omega t). \quad (3.86)$$

Тоді частоти  $\omega_i$  і форми  $W_i$  таких коливань будуть задовольняти рівняння

$$LW_i - \omega_i^2 MW_i = 0, \quad M = \rho_0 \delta_0 + \rho B. \quad (3.87)$$

Скориставшись процедурою інтегрування частинами і виразами (3.68) та (3.69), можна показати, що оператор  $L$  симетричний, тобто якщо  $w^{(1)}$  і  $w^{(2)}$  входять в область визначення оператора  $L$ , то виконується рівність

$$\int_{\Sigma} Lw^{(1)} \cdot w^{(2)} d\Sigma = \int_{\Sigma} Lw^{(2)} \cdot w^{(1)} d\Sigma. \quad (3.88)$$

Далі будемо вважати, крім того, що оператор  $L$  також і додатно визначений.

У свою чергу, оператор  $M$  є симетричним і додатним оператором [6]. Ці властивості операторів  $L$  і  $M$  дають можливість сформулювати твердження загального характеру, які стосуються розв'язків спектральної задачі (3.87). Так, згідно з працею [50], можна зробити висновок, що задача на власні значення (3.87) має дискретний спектр і всі її власні значення додатні та мають єдину граничну точку, яка розташована на нескінченності. Сукупність відповідних власних функцій має властивість повноти в  $H$  і задовольняє такі співвідношення ортогональності:

$$\int_{\Sigma} LW_i \cdot W_j d\Sigma = \int_{\Sigma} MW_i \cdot W_j d\Sigma = 0 \quad (i \neq j). \quad (3.89)$$

Далі, враховуючи ці властивості власних функцій і власних значень спектральної задачі (3.87), перейдемо до розв'язування задачі про побудову математичної моделі руху механічної системи «тіло — рідина — пружний елемент» під впливом зовнішніх сил і моментів, прикладених до тіла.

Представимо переміщення пружних елементів, розташованих на незбуреній вільній поверхні рідини, у вигляді узагальненого ряду за системою власних функцій задачі (3.87):

$$W(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) W_j(x, y). \quad (3.90)$$

Будемо вважати, що ряд (3.90) збігається рівномірно і його можна диференціювати необхідну кількість разів. Підставимо розклад (3.90) у рівняння (3.85), яке потім помножимо на  $W_i d\Sigma$  і проінтегруємо по поверхні  $\Sigma$ . Зважаючи на ортогональність функцій  $W_i$  і враховуючи рівняння (3.87), одержуємо нескінченну систему диференціальних рівнянь:

$$M_i (\ddot{r}_i + \omega_i^2 r_i) + \ddot{u} \cdot \vec{L}_i + \ddot{\theta} \cdot \vec{L}_{oi} + g\theta_1 L_{i2} - g\theta_2 L_{i1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.91)$$

де коефіцієнти цих рівнянь визначаються за формулами

$$\begin{aligned} M_i &= \rho_0 \delta_0 \int_{\Sigma} W_i^2 d\Sigma + \rho \int_{\Sigma} B W_i \cdot W_i d\Sigma; \\ \vec{L}_i &= \rho \int_{\Sigma} \vec{r} W_i d\Sigma, \quad \vec{L}_{oi} = \rho \int_{\Sigma} \vec{\Omega} W_i d\Sigma, \quad \vec{L}_i = \{L_{i1}, L_{i2}, 0\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Рівняння (3.91) встановлюють диференціальний зв'язок між векторами  $\vec{u}(t)$ ,  $\vec{\theta}(t)$  і коефіцієнтами  $r_i(t)$  розкладу (3.90), які характеризують збурений рух пружних елементів, розташованих на вільній поверхні рідини.

Два інші рівняння можна одержати за допомогою рівнянь руху твердого тіла, в яких враховується силовий і моментний впливи рухомої рідини на тіло. Ці рівняння можна записати, використовуючи відомі теореми про зміну кількості руху твердого тіла  $K^{(o)}$  і його кінетичного моменту  $G_o^{(o)}$  відносно точки  $O$ :

$$\frac{d\vec{K}^{(o)}}{dt} = \vec{P} + \vec{P}', \quad \frac{d\vec{G}_o^{(o)}}{dt} = \vec{M}_o + \vec{M}'_o, \quad (3.93)$$

де  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}'$  і  $\vec{M}_o$ ,  $\vec{M}'_o$  — відповідно головні вектори і головні моменти відносно точки  $O$  системи сил, які діють на тіло з боку рідини та інших зовнішніх сил.

Вирази для векторів  $\vec{K}^{(o)}$  і  $\vec{G}_o^{(o)}$  мають вигляд [47]:

$$\vec{K}^{(o)} = m_o \dot{\vec{u}} + m_o (\dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_{c_o}), \quad \vec{G}_o^{(o)} = m_o (\vec{r}_{c_o} \times \dot{\vec{u}}) + I^{(o)} \cdot \dot{\vec{\theta}}. \quad (3.94)$$

Тут  $m_o$ ,  $I^{(o)}$ ,  $\vec{r}_{c_o}$  — маса, тензор інерції відносно точки  $O$  і радіус-вектор центру мас твердого тіла.

Скориставшись співвідношеннями (3.79), (3.82), (3.91) і (3.93), попередньо виділивши з інших зовнішніх сил статичні сили і моменти твердого тіла, одержуємо наступні рівняння руху розглядуваної механічної системи:

$$\begin{aligned}
(m_o + m_w)\ddot{\vec{a}} + (m_o + m_w)(\ddot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c) + \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{r}_j \vec{L}_j &= \vec{P}', \\
(m_o + m_w)(\vec{r}_c \times \ddot{\vec{a}}) + (I^{(o)} + I^{(w)})\ddot{\vec{\theta}} + \\
+ \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{r}_j \vec{L}_{oj} - \sum_{j=1}^{\infty} r_j (\vec{L}_j \times \vec{g}) &= \vec{M}'_o, \\
M_i(\ddot{r}_i + \omega_i^2 r_i) + \ddot{\vec{a}} L_i + \ddot{\vec{\theta}} L_{oi} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{3.95}$$

де  $\vec{r}_c$  і  $\ddot{\vec{a}}$  — радіус-вектор центру мас відносно точки  $O$  системи «тіло — затверділа рідина» і вектор уявного прискорення, які визначаються за формулами

$$\vec{r}_c = \frac{m_o \vec{r}_{c_o} + m_w \vec{r}_{c_w}}{m_o + m_w}, \quad \ddot{\vec{a}} = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} - \vec{g}. \tag{3.96}$$

Зауважимо, що рівняння (3.95) записані в пов'язаній з тілом системі координат  $Oxyz$ .

Розглянемо скалярні форми рівнянь (3.95) для деяких окремих випадків тіл з розглядуваними порожнинами, які найбільш часто зустрічаються на практиці.

Рівняння руху системи «тіло — рідина» можна значно спростити, якщо початок рухомої системи координат зв'язати із центром мас  $C$  тіла і затверділої в незбуреному стані рідини. Подальше спрощення рівнянь (3.95) пов'язане з орієнтацією осей рухомої системи координат. Розглянемо конкретні випадки рівнянь (3.95) для твердого тіла і порожнини, які мають певну масову і геометричну симетрію.

Нехай порожнина і тіло мають дві спільні площини масової і геометричної симетрії. У цьому випадку координатні площини  $Oxz$  і  $Oyz$  сумістимо із площинами симетрії механічної системи.

Лінією перетину цих площин є вісь  $Oz$ . Внаслідок зазначеної симетрії порожнини система функцій  $\varphi_i$  розпадається на три підсистеми функцій  $\varphi_{i1}$ ,  $\varphi_{i2}$ ,  $\varphi_{i3}$ , взаємно ортогональних на поверхні  $\Sigma$ . При цьому функції  $\varphi_{i1}$  — симетричні відносно площини  $Oxz$  і несиметричні відносно площини  $Oyz$ ;  $\varphi_{i2}$  — симетричні відносно площини  $Oyz$  і несиметричні відносно площини  $Oxz$ ;  $\varphi_{i3}$  — несиметричні відносно обох площин  $Oxz$  і  $Oyz$ . Відповідні їм частоти коливань позначимо через  $\omega_{i1}$ ,  $\omega_{i2}$ ,  $\omega_{i3}$ . У свою чергу, функція  $\Omega_1$  симетрична відносно площини  $Oyz$  і несиметрична відносно площини  $Oxz$ . Функція  $\Omega_2$  симетрична відносно площини  $Oxz$  і несиметрична відносно площини  $Oyz$ . Функція  $\Omega_3$  несиметрична відносно обох площин  $Oxz$  і  $Oyz$ . Узагальнені координати  $r_i$ , які відповідають функціям  $\varphi_{i1}$ ,  $\varphi_{i2}$ ,  $\varphi_{i3}$ , позначимо через  $p_i$ ,  $s_i$  і  $q_i$ .

Наслідком розглядуваної симетрії є те, що сумарний тензор інерції твердого тіла і рідини стає діагональним. При цьому рівняння руху (3.95) набудуть вигляду:

$$(m_o + m_w) \frac{d^2 a_3}{dt^2} = P'_3, \quad (3.97)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_o + m_w) \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{i1} \frac{d^2 p_i}{dt^2} = P'_1, \\ \left( I_{22}^{(o)} + I_{22}^{(w)} \right) \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{oi2} \frac{d^2 p_i}{dt^2} - g \sum_{i=1}^{\infty} L_{i1} p_i = M_2^{(c)}, \\ M_{i1} \left( \frac{d^2 p_i}{dt^2} + \omega_{i1}^2 p_i \right) + L_{i1} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + L_{oi2} \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \end{array} \right. \quad (3.98)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_o + m_w) \frac{d^2 a_2}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{i2} \frac{d^2 s_i}{dt^2} = P'_2, \\ \left( I_{11}^{(o)} + I_{11}^{(w)} \right) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{oi1} \frac{d^2 s_i}{dt^2} + g \sum_{i=1}^{\infty} L_{i2} s_i = M_1^{(c)}, \\ M_{i2} \left( \frac{d^2 s_i}{dt^2} + \omega_{i2}^2 s_i \right) + L_{i2} \frac{d^2 a_2}{dt^2} + L_{oi1} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \end{array} \right. \quad (3.99)$$

$$\begin{cases} \left( I_{33}^{(o)} + I_{33}^{(w)} \right) \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{oi3} \frac{d^2 q_i}{dt^2} = M_3^{(c)}, \\ M_{i3} \left( \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \omega_{i3}^2 q_i \right) + L_{oi3} \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (3.100)$$

Таким чином, у розглядуваному випадку відбувається повне розщеплення рівнянь (3.95) на рівняння руху (3.98) і (3.99) у двох головних площинах  $Cxz$  і  $Cyz$ , на рівняння обертання навколо осі  $Oz$  (3.100) і на рівняння руху (3.97) системи як твердого тіла в напрямку осі  $Oz$ .

У випадку осесиметричного тіла та осесиметричної порожнини, крім рівнянь (3.97), використовується система рівнянь (3.98) або (3.99), оскільки хвильові рухи ідеальної рідини не збуджуються рухом тіла відносно осі  $Oz$ . Розглядаючи рухи системи в площині  $Cyz$  і опустивши несуттєві вже індекси при компонентах векторів, будемо мати:

$$\begin{cases} (m_o + m_w) \frac{d^2 a}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_i \frac{d^2 s_i}{dt^2} = P, \\ \left( I^{(o)} + I^{(w)} \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{oi} \frac{d^2 s_i}{dt^2} + g \sum_{i=1}^{\infty} L_i s_i = M^{(c)}, \\ M_i \left( \frac{d^2 s_i}{dt^2} + \omega_i^2 s_i \right) + L_i \frac{d^2 a}{dt^2} + L_{oi} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (3.101)$$

Таким чином, лінійна математична модель руху розглядуваної механічної системи формалізована у вигляді певних нескінченних систем звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують рух тіла, рідини і пружного елемента, розташованого на вільній поверхні рідини. Праві частини цих рівнянь вважаються відомими функціями часу.

Інтегрування рівнянь (3.98) – (3.100) з урахуванням задання положення та швидкості твердого тіла і форми мембрани або пластинки з розподілом поля швидкостей на них у початковий момент часу дає змогу визначити рух тіла і рідини в його порожнині під

впливом системи зовнішніх сил, прикладених до тіла. Вказані рівняння дозволяють також розв'язувати задачу про визначення гідродинамічних сил і моментів, які діють на тіло з боку рідини, при заданому русі тіла.

При розв'язуванні інженерних задач динаміки розглядуваної системи рідина з пружним елементом на її незбуреній вільній поверхні ототожнюється скінченною кількістю ступенів вільності (як правило, одним ступенем вільності). Отже, практичний інтерес представляє визначення скінченної кількості коефіцієнтів рівнянь руху, що відповідають першим формам коливань рідини. Визначення гідродинамічних коефіцієнтів рівнянь (3.98) і (3.99) пов'язане з розв'язуванням однорідної крайової задачі (3.87) і неоднорідних крайових задач (3.59) для потенціалів Стокса—Жуковського з наступними обчисленнями квадратур (3.81) і (3.92). Задача про визначення потенціалів Стокса—Жуковського детально вивчена [47, 87], а задача гідропружності (3.87) розв'язана лише для випадку, коли область зайнята рідиною є канонічною (має форму циліндра). Проблема розв'язування задачі гідропружності для випадків резервуарів у формі довільних тіл обертання є невивченою.

### 3.2.4 Вільні коливання рідини в осесиметричному резервуарі з пружним елементом на незбуреній поверхні

Розглянемо резервуар, який має форму тіла обертання і заповнений ідеальною та нестисливою рідиною на глибину  $h$ . Вважатимемо, що поле гравітаційних сил паралельне осі симетрії резервуара, а незбурена вільна поверхня рідини покрита круговою пружною мембраною (пластинкою) радіуса  $r_0$ , жорстко закріпленою по своєму контуру на стінках резервуара. Введемо до розгляду циліндричну систему координат  $Ozr\eta$  з початком, зв'язаним з центром мембрани (пластинки), та з віссю  $Oz$ , що збігається з віссю симетрії резервуара і спрямована протилежно напрямку вектора прискорення вільного падіння.

Потенціал зміщень рідини  $\chi(r, z, \eta, t)$  в області  $V$ , зайнятій рі-



диною, повинен задовольняти рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.102)$$

а на границі області  $V$  повинні виконуватися умови

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} = w, \quad \int_{\Sigma} w dS = 0, \quad (3.103)$$

де  $\Sigma$  і  $S$  — незбурена поверхня пружного елемента і змочувана поверхня резервуара відповідно;  $w$  — нормальний прогин пружного елемента в напрямку осі  $Oz$ ;  $\vec{\nu}$  — орт зовнішньої нормалі до границі області  $V$ .

Згідно з лінійною теорією рівняння коливань кругової мембрани, яка взаємодіє з обмеженим об'ємом рідини, буде мати вигляд:

$$\rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \Delta_{r,\eta} w = P(r, \eta, t), \quad (3.104)$$

де  $T$  — натяг мембрани,  $t$  — час,  $\rho_0$  і  $\delta_0$  — масова густина матеріалу і товщина мембрани, а оператор  $\Delta_{r,\eta}$  має вигляд

$$\Delta_{r,\eta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Тиск  $P(r, \eta, t)$  на мембрану з боку рідини, що входить у формулу (3.104), може бути визначений з точністю до довільної функції часу за допомогою лінеаризованого інтеграла Лагранжа—Коші:

$$P(r, \eta, t) = -\rho \left[ \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + gw \right]. \quad (3.105)$$

Тут  $g$  — модуль вектора прискорення вільного падіння;  $\rho$  — масова густина рідини.

У випадку жорсткого закріплення контуру мембрани нормальний прогин її повинен задовольняти граничну умову

$$w(r_0, \eta, t) = 0. \quad (3.106)$$

Рівняння (3.102), (3.104) і (3.105) разом із граничними умовами (3.103) і (3.106) та початковими умовами на прогин мембрани однозначно визначають коливання розглядуваної механічної системи.

Для випадку пружної пластинки на вільній поверхні рідини нормальний прогин  $w(r, \eta, t)$  повинен задовольняти такі умови:

$$\begin{aligned} D\Delta_{r,\eta}\Delta_{r,\eta}w + \rho_0\delta_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P(r, \eta, t), \\ w(r, \eta, t)|_{r=r_0} &= 0, \quad \left.\frac{\partial w(r, \eta, t)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \end{aligned} \quad (3.107)$$

де  $D$  — циліндрична жорсткість пластинки.

Далі будемо вивчати власні неосесиметричні взаємопов'язані коливання пружного елемента і рідини в площині  $Ozr\frac{\pi}{2}$ , для яких головний вектор гідродинамічних сил, прикладених до резервуара, відмінний від нуля. Коливанням такого класу відповідають наступні представлення для потенціалу зміщень рідини і прогину пружного елемента:

$$\chi = \Phi(r, z) \sin \eta \exp(i\omega t), \quad w = W(r) \sin \eta \exp(i\omega t), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (3.108)$$

Далі, при проведенні розрахунків зручно перейти до безрозмірних величин. Позначимо через  $R$  деякий характерний лінійний розмір ємності. Введемо до розгляду безрозмірні величини, позначені рискою зверху, які пов'язані з відповідними розмірними величинами наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} (r, z) &= (\bar{r}, \bar{z})R, \quad W = \bar{W}R, \quad \Phi = \bar{\Phi}R^2, \\ \bar{\lambda}^2 &= \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \bar{a} = \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\rho g R^2}, \quad \bar{D} = \frac{D}{\rho g R^4}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Після застосування формул (3.108) і переходу потім до безрозмірних величин за формулами (3.109) (риски над безрозмірними величинами далі опускаємо) одержимо таку задачу на власні зна-

чення відносно функцій  $\Phi(r, z)$  і  $W(r)$ :

$$\begin{aligned} L[W] - \frac{1}{T}W + \lambda^2 \left( \frac{a}{T}W + \frac{1}{T}\Phi(r, 0) \right) &= 0, \quad r \in [0; r_0], \\ W(0) = W(r_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= W, \quad \Phi(r, z)|_{r=0} < \infty, \end{aligned} \quad (3.110)$$

де  $Q$  — область меридіонального перерізу резервуара,  $L_0$  і  $L$  — лінії перетину меридіонального перерізу з поверхнею мембрани  $\Sigma$  і змочуваною поверхнею  $S$  ємності відповідно, а оператор  $L$  (таке позначення будемо використовувати далі) має вигляд

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Якщо на вільній поверхні рідини розташована пружна пластинка, то відповідна задача гідропружності матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} L^2[W] + \frac{1}{D}W - \lambda^2 \left( \frac{a}{D}W + \frac{1}{D}\Phi(r, 0) \right) &= 0, \quad r \in [0; r_0], \\ W(0) = W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= W, \quad \Phi(r, z)|_{r=0} < \infty. \end{aligned} \quad (3.111)$$

При формулюванні задач (3.110) та (3.111) було враховано, що збереження об'єму нестисливої рідини при її русі для розглядуваних коливань системи виконується автоматично.

### 3.2.5 Побудова наближених розв'язків введених у розгляд спектральних задач

Припустимо, що функцію  $\Phi(r, 0)$ , яка входить в рівняння для мембрани, знайдено. Явний вираз для цієї функції можна одержати,

якщо відома функція Гріна для задачі Неймана в області  $Q$ . Таку функцію Гріна можна побудувати для випадку, коли область  $Q$  має канонічну форму. В результаті вихідна задача зведеться до однорідної граничної задачі для інтегро-диференціального рівняння відносно функції  $W(r)$ . Для розв'язку цієї задачі можна застосувати в загальному випадку метод Бубнова—Гальоркіна, підпорядковуючи координатні функції граничним умовам

$$W(0) = W(r_0) = 0. \quad (3.112)$$

Оскільки функція  $\Phi(r, 0)$ , як відомо, не дорівнює нулю в точці  $r = r_0$ , то такі розклади будуть мати повільну збіжність, що приведе до розв'язування алгебраїчної задачі великої розмірності відносно коефіцієнтів розкладів. Тому далі для знаходження функції  $W(r)$  застосуємо узагальнений метод Бубнова—Гальоркіна [94], у якому базисні функції вибираються на класі функцій, що не задовольняють граничні умови задачі. Такий підхід, подібно відомому методу покращення збіжності рядів, одержуваних при розв'язуванні граничних задач [32], дозволяє прискорити збіжність розкладів для шуканої функції.

Введемо до розгляду задачу на власні значення:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f + k^2 f = 0, \quad r \in [0; r_0], \quad |f(0)| < \infty, \quad \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (3.113)$$

Власні функції  $f_i(r)$  спектральної задачі (3.113) будуть мати вигляд

$$f_i(r) = J_1 \left( k_i \frac{r}{r_0} \right) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.114)$$

де  $k_i$  — відповідні їм власні значення, які задовольняють рівняння  $J_1'(k_i) = 0$ ;  $J_1(r)$  — функція Бесселя першого роду першого порядку.

Відомо, що така система функцій є повною системою в просторі функцій з інтегрованим квадратом на інтервалі  $[0; r_0]$  і задовольняє такі умови ортогональності:

$$\int_0^{r_0} r f_i(r) f_j(r) dr = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ n_i^2 & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (3.115)$$

де

$$n_i^2 = \int_0^{r_0} r f_i^2(r) dr = \int_0^{r_0} r J_1^2 \left( k_i \frac{r}{r_0} \right) dr = \frac{r_0^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{k_i^2} \right) J_1^2(k_i).$$

Функцію  $W(r)$  будемо шукати у вигляді

$$W(r) = C_1 f_0(r) + \sum_{m=1}^q X_m f_m(r), \quad (3.116)$$

де  $X_m$  і  $C_1$  — невизначені сталі, а функцію  $f_0(r)$  зручно вибрати у такому вигляді:

$$f_0(r) = r.$$

Функцію  $\Phi(r, z)$ , визначену в області  $Q$ , подамо у формі

$$\Phi(r, z) = C_1 \Psi_0(r, z) + \sum_{m=1}^q X_m \Psi_m(r, z). \quad (3.117)$$

Тут функції  $\Psi_0(r, z)$  і  $\Psi_m(r, z)$  є розв'язками таких неоднорідних крайових задач Неймана в області  $Q$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Psi_i + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= f_i(r), \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \Psi_i(0, z) < \infty \quad (i = 0, 1, \dots, q). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Враховуючи вираз (3.116), подання (3.117) для функції  $\Phi(r, z)$  задовольняє рівняння (3.110) в області  $Q$  і всі граничні умови при будь-яких значеннях сталих  $C_1$  і  $X_m$ .

Нехай розв'язки  $q + 1$  крайових задач (3.118) відомі. Підставляючи вираз (3.117) у перше рівняння (3.110), одержуємо для визначення функції  $W(r)$  спектральну задачу:

$$\begin{aligned} L[W] - \frac{1}{T} W + \lambda^2 \left[ \frac{a}{T} W + \frac{1}{T} \left( C_1 \Psi_0 + \sum_{m=1}^q X_m \Psi_m \right) \Big|_{z=0} \right] &= 0, \\ W(0) = W(r_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Сталу  $C_1$  виберемо таким чином, щоб вираз (3.116) задовольняв граничну умову для функції  $W(r)$  у точці  $r = r_0$  (гранична умова в точці  $r = 0$  виконується автоматично). В результаті встановлено зв'язок між коефіцієнтами  $X_m$  і  $C_1$ :

$$C_1 = -\frac{1}{f_0(r_0)} \sum_{m=1}^q X_m f_m(r_0). \quad (3.120)$$

Сталі  $X_m$  визначимо з вимоги ортогональності лівої частини рівняння (3.119) (після підстановки в неї розкладу (3.116)) до всіх функцій  $f_i(r)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Отримані в такий спосіб  $q$  алгебраїчних рівнянь разом з рівнянням (3.120) утворюють замкнуту систему рівнянь відносно сталих  $C_1$  і  $X_m$ . Виключаючи з цих рівнянь константу  $C_1$ , одержимо кінцеву однорідну алгебраїчну систему лінійних рівнянь відносно сталих  $X_m$ , яку можна представити в такому матричному вигляді:

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0, \quad (3.121)$$

де  $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_q\}^T$ .

Елементи  $a_{nm}$  матриці  $A$  і елементи  $b_{nm}$  матриці  $B$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \delta_{nm} - \frac{\beta_n J_1(k_m) t_n}{r_0 n_n^2}, \\ b_{nm} &= t_n \left[ a \delta_{nm} + \frac{1}{n_n^2} \left( \lambda_{mn} - \frac{J_1(k_m)}{r_0} (a \beta_n + \lambda_{0n}) \right) \right] \quad (n, m = 1, 2, \dots, q), \end{aligned} \quad (3.122)$$

де

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \\ \beta_n &= \int_{L_0} r f_0(r) f_n(r) ds = \int_0^{r_0} r^2 J_1\left(k_n \frac{r}{r_0}\right) dr = \frac{r_0^3}{k_n^2} J_1(k_n), \\ t_n &= \frac{1}{1 + k_n^2 T}, \quad \lambda_{0n} = \int_0^{r_0} r \Psi_0(r, 0) f_n(r) dr, \quad \lambda_{mn} = \int_0^{r_0} r \Psi_m(r, 0) f_n(r) dr. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язування спектральної задачі (3.110) зведено до розв'язання узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення (3.121) з несиметричними матрицями  $A$  і  $B$ . Коефіцієнти  $\lambda_{0n}$  і  $\lambda_{mn}$ , які входять у матрицю  $B$ , виражаються через інтегральні характеристики від розв'язків крайових задач (3.118). Внаслідок неканонічності області  $Q$  наближені розв'язки цих задач будемо знаходити за допомогою варіаційного методу, який знайшов широке застосування при дослідженні коливань рідини в осесиметричних порожнинах з вільною поверхнею [87].

Розглянемо задачу про стаціонарні значення наступних квадратичних функціоналів:

$$I_k = \int_Q \left[ \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \Psi_k^2 \right] r dz dr - 2 \int_{L_0} r \Psi_k f_k ds \quad (k = 0, 1, \dots, q), \quad (3.123)$$

де  $\Psi_k(r, z)$  — довільні функції, неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в області  $Q$ , які задовольняють граничну умову  $\Psi_k(0, z) < \infty$ ;  $f_k(r)$  — функції, що входять у розклад (3.116);  $ds$  — елемент дуги контуру  $L_0$ .

Використовуючи засоби варіаційного числення [32], можна показати, що мінімуми цих функціоналів досягаються на функціях, які є розв'язками введених вище крайових задач для функцій  $\Psi_k(r, z)$ .

Сформульовані варіаційні задачі розв'язуємо методом Трефца, відповідно до якого розв'язки  $\Psi_k(r, z)$  представляються у вигляді сім'ї функцій, що залежать від декількох параметрів:

$$\Psi_k(r, z) = \Psi_k(r, z, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_N^{(k)}), \quad (3.124)$$

таких, що при всіх значеннях параметрів задовольняється вихідне рівняння в області  $Q$ . Клас допустимих функцій обмежується тепер функціями із сім'ї (3.124) і серед них знаходиться та, яка надає мінімум функціоналу (3.123) при фіксованому значенні індексу  $k$ .

Для функцій  $\Psi_k(r, z)$  розв'язок подамо у вигляді

$$\Psi_k(r, z) = \sum_{i=1}^N a_i^{(k)} V_i(r, z), \quad (3.125)$$

де  $a_i^{(k)}$  — довільні константи;  $\{V_i(r, z)\}_{i=1}^N$  — система лінійно незалежних розв'язків рівнянь (3.118), що характеризуються повнотою в області  $Q$ .

Підставимо вираз (3.125) у функціонал (3.123) і прирівнюємо нулю частинні похідні від  $I_k$  по  $a_i^{(k)}$ . При цьому одержуємо

$$\int_Q \left[ r \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} \frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \Psi_k V_i \right] dz dr - \int_{L_0} r f_k V_i ds = 0. \quad (3.126)$$

Перетворимо інтеграл по області  $Q$  за допомогою формули Гріна:

$$\begin{aligned} \int_Q r \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} \frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) dz dr &= \int_{L_0 \cup L} r \frac{\partial \Psi_k}{\partial \nu} V_i ds - \\ &- \int_Q \left( r \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial r^2} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial z^2} \right) V_i dz dr. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Тоді алгебраїчні системи (3.126) відносно сталих  $a_i^{(k)}$ , які утворюють вектор-стовпці  $\vec{a}^{(k)} = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_N^{(k)}\}$ , можна подати так:

$$\mathfrak{A} \vec{a}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, q), \quad (3.128)$$

де елементи  $\alpha_{ij}$  симетричної матриці  $\mathfrak{A}$  і елементи  $\gamma_i^{(k)}$  вектор-стовпців  $\vec{\gamma}^{(k)}$  визначаються за формулами

$$\alpha_{ij} = \int_{L_0 \cup L} r V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu} ds, \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_0} r f_k V_i ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.129)$$

При виведенні виразів (3.129) було враховано, що координатні функції в області  $Q$  задовольняють гармонічне рівняння, яке записане в циліндричних координатах. Це дозволило перейти від подвійних інтегралів по області до одновимірних інтегралів по її границі, що істотно спростило алгоритм розв'язування розглядуваної задачі.

В результаті визначення розв'язків введених крайових задач (3.118) після обчислення елементів матриці  $\mathfrak{A}$  і векторів  $\vec{\gamma}^{(k)}$



( $k = 0, \dots, q$ ), було зведено до розв'язання  $q + 1$  неоднорідних алгебраїчних систем (3.128). Підставляючи знайдені розв'язки у вирази для коефіцієнтів  $\lambda_{0n}$  і  $\lambda_{mn}$ , одержуємо

$$\begin{aligned}\lambda_{0n} &= \sum_{i=1}^N a_i^{(0)} \int_0^{r_0} V_i(r, 0) f_n(r) r dr = \sum_{i=1}^N a_i^{(0)} \gamma_i^{(n)}, \\ \lambda_{mn} &= \sum_{i=1}^N a_i^{(m)} \int_0^{r_0} V_i(r, 0) f_n(r) r dr = \sum_{i=1}^N a_i^{(m)} \gamma_i^{(n)}.\end{aligned}\tag{3.130}$$

За систему координатних функцій  $\{V_i(r, z)\}_{i=1}^N$  вибираємо систему, яку було побудовано в праці [87] на класі лінійно незалежних розв'язків рівняння Лапласа у сферичній системі координат. Обчислення цих функцій і частинних похідних від них за змінними  $r$  і  $z$  можна здійснювати за такими рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}V_1 &= r, \quad V_2 = rz, \quad V_{i+1} = ((2i+1)zV_i - (i-1)(r^2 + z^2)V_{i-1}) \frac{1}{i+2}, \\ \frac{\partial V_i}{\partial r} &= \frac{i}{r} V_i - \frac{i-1}{r} z V_{i-1}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial z} = (i-1) V_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, N).\end{aligned}\tag{3.131}$$

Як буде показано нижче, базисні системи такого вигляду дозволяють при невеликій розмірності алгебраїчних систем (3.128) визначати з необхідною для практичних застосувань точністю коефіцієнти (3.130).

Застосуємо запропонований вище спосіб розв'язування крайової задачі гідропружності для випадку, коли вільну поверхню рідини покриває пружна пластинка.

Подамо розв'язки однорідної задачі (3.111) у вигляді розкладів (3.116) і (3.117), де  $f_0(r) = r^3 - 3r_0^2 r$ ;  $f_m(r)$  ( $m = 1, 2, \dots, q$ ) — власні функції задачі (3.113);  $\Psi_m(r, z)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, q$ ) — розв'язки неоднорідних крайових задач (3.118) при вибраній функції  $f_0(r)$ .

Функція  $f_0(r)$  вибиралася на класі непарних розв'язків рівнян-

ня  $L^2[f_0(r)] = 0$ , які задовольняють граничну умову

$$\left. \frac{df_0(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0.$$

Запропоновані розклади у формі (3.116) і (3.117) задовольняють вихідне для функції  $\Phi(r, z)$  рівняння в області  $Q$  і забезпечують виконання для неї граничних умов

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{L_0} = W, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_L = 0.$$

Крім того, для функції  $W(r)$  виконується гранична умова

$$\left. \frac{dW}{dr} \right|_{r=r_0} = 0.$$

Остання гранична умова для  $W(r)$  виконується на основі знайденого співвідношення між коефіцієнтами  $C_1$  і  $X_m$ :

$$C_1 = -\frac{1}{f_0(r_0)} \sum_{m=1}^q X_m f_m(r_0), \quad (3.132)$$

де  $f_0(r_0) = -2r_0^3$ .

Після застосування описаної вище процедури для розв'язування рівняння відносно функції  $W(r)$ , одержимо систему алгебраїчних рівнянь вигляду (3.121) відносно сталих  $X_m$ . Елементи  $a_{nm}$  і  $b_{nm}$  матриць  $A$  і  $B$  для випадку пластинки, яка розташована на вільній поверхні рідини, мають вигляд

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \delta_{nm} + \frac{\beta_n J_1(k_m) d_n}{2r_0^3 n_n^2}, \\ b_{nm} &= d_n \left[ a\delta_{nm} + \frac{1}{n_n^2} \left( \lambda_{mn} + \frac{J_1(k_m)}{2r_0^3} (a\beta_n + \lambda_{0n}) \right) \right] \\ &(n, m = 1, 2, \dots, q), \end{aligned} \quad (3.133)$$

де

$$\beta_n = \int_0^{r_0} r(r^3 - 3r_0^2 r) J_1 \left( k_n \frac{r}{r_0} \right) dr = -\frac{8r_0^5}{k_n^4} J_1(k_n); \quad d_n = \frac{1}{1 + k_n^4 D};$$

$$\lambda_{0n} = \int_0^{r_0} r \Psi_0(r, 0) f_n(r) dr.$$

Матриця коефіцієнтів  $\lambda_{mn}$  збігається з відповідною матрицею для випадку, коли на вільній поверхні рідини розташована мембрана.

Таким чином, запропонований вище алгоритм розв'язування задач гідропружності (3.110) і (3.111) дозволяє розділити труднощі, що виникають при спільному інтегруванні рівняння з частинними похідними в області  $Q$ , пов'язаного з визначенням потенціалу зміщень рідини, та звичайного диференціального рівняння, що описує коливання пружної мембрани (пластинки), розташованої на вільній поверхні рідини в розглядуваному резервуарі.

Розглянемо другий підхід до знаходження розв'язків розглянутих задач, який базується на застосуванні методу розкладу за власними функціями крайової задачі з параметром у граничній умові. Граничну задачу (3.110), в яку входять невідомі функції  $\Phi(r, z)$  і  $W(r)$ , можна звести до однорідної задачі відносно функції  $W(r)$  за допомогою введення допоміжної спектральної задачі:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \varphi &= 0, \quad (r, z) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_L &= 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varkappa \varphi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \varphi(0, z) < \infty, \end{aligned} \quad (3.134)$$

де  $\varkappa$  — невідомий параметр.

За своїм фізичним змістом задача (3.134) пов'язана з визначенням несиметричних коливань рідини в довільному резервуарі, що має форму тіла обертання. При цьому квадрат власної частоти коливань рідини  $\sigma^2$  пов'язаний з безрозмірним параметром  $\varkappa$  співвідношенням

$$\varkappa = \frac{\sigma^2 R}{g}. \quad (3.135)$$

Припустимо, що власні функції задачі (3.134) відомі, і позначимо їх через  $\varphi_n(r, z)$ , а відповідні їм власні значення, розташовані в порядку їхнього зростання, позначимо через  $\varkappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Можна довести [87], що спектр цієї задачі є дискретним з єдиною

точкою згущення на нескінченності, а система власних функцій  $\varphi_n(r, z)$  є повною на частині границі  $L_0$  області  $Q$ . Крім того, для функцій  $\varphi_n(r, z)$  і їхніх похідних у напрямку осі  $Oz$  мають місце такі умови ортогональності:

$$\int_{L_0} r \varphi_n \varphi_m ds = 0, \quad \int_{L_0} r \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} ds = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (3.136)$$

Враховуючи це, функцію  $\Phi(r, z)$  можна подати у вигляді розкладу в узагальнений ряд Фур'є за функціями  $\varphi_i$ :

$$\Phi(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(r, z). \quad (3.137)$$

Для визначення коефіцієнтів  $b_i$  розкладу (3.137) використаємо граничну умову для  $\Phi(r, z)$  на контурі  $L_0$ . Підставимо вираз (3.137) в умову рівності зміщень рідини і мембрани(пластинки) на поверхні їхнього контакту:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{\partial \varphi_i(r, z)}{\partial z} \Big|_{L_0} = W(r). \quad (3.138)$$

Враховуючи умови ортогональності (3.136), знаходимо коефіцієнти  $b_i$  розкладу (3.137):

$$b_i = \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r W(r) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds, \quad N_i^2 = \int_{L_0} r \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 ds. \quad (3.139)$$

В результаті розклад (3.137) функції  $\Phi(r, z)$  набуде такого вигляду:

$$\Phi(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r W(r) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \varphi_i(r, z). \quad (3.140)$$

Обмежуючись скінченною кількістю членів  $M$  у розкладі (3.140), вихідна задача (3.110) зводиться до розв'язування

інтегро-диференціального рівняння:

$$L[W(r)] - \frac{1}{T}W + \lambda^2 \left[ \frac{a}{T}W + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r W \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \right) \varphi_i(r, 0) \right] = 0 \quad (3.141)$$

з граничними умовами

$$W(0) = W(r_0) = 0. \quad (3.142)$$

Як і вище, для розв'язування цієї задачі застосовуємо узагальнений метод Бубнова—Гальоркіна, вибравши функцію  $W(r)$  у вигляді

$$W(r) = C_1 f_0(r) + \sum_{m=1}^q X_m f_m(r), \quad (3.143)$$

де  $C_1$  і  $X_m$  — невизначені сталі;  $\{f_m(r)\}_{m=1}^q$  — система функцій (3.114).

Сталу  $C_1$  визначимо з умови, щоб вираз (3.143) задовольняв граничні умови (3.142). У свою чергу, рівняння відносно сталих  $X_m$  знайдемо з вимоги, щоб вираз (3.143) для функції  $W(r)$  задовольняв рівняння (3.141), застосовуючи при цьому процедуру Бубнова—Гальоркіна. В результаті отримуємо однорідну алгебраїчну систему (3.121).

У розглядуваному випадку коефіцієнти  $\lambda_{0n}$  і  $\lambda_{mn}$ , які входять в елементи матриці  $B$ , будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_{0n} &= \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r f_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \int_{L_0} r \varphi_i f_n ds \right); \\ \lambda_{mn} &= \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r f_m \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \int_{L_0} r \varphi_i f_n ds \right); \\ N_i^2 &= \varkappa_i^2 \int_{L_0} r (\varphi_i)^2 ds \quad (n, m = 1, 2, \dots, q). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Інші коефіцієнти в рівняннях (3.121) залишаються незмінними.

Таким чином, розрахунок власних коливань розглядуваної гідропружної системи за запропонованим вище алгоритмом в основному пов'язаний зі знаходженням достатньої кількості власних функцій крайової задачі (3.134), що забезпечуватиме необхідну точність кінцевих обчислень. Для випадку, коли область  $Q$  є канонічною, розв'язок цієї задачі може бути побудований в явному вигляді за допомогою методу відокремлення змінних. Якщо границя області  $Q$  має довільний кусково-гладкий контур, то для побудови наближеного розв'язку задачі (3.134), який має аналітичну форму, можна з успіхом використовувати варіаційний метод.

Розглянемо далі задачу про стаціонарні значення квадратичного функціонала

$$I = \int_Q \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \varphi^2 \right] r \, dzdr - \kappa \int_{L_0} r \varphi^2 ds. \quad (3.145)$$

Обчислимо варіацію цього функціонала, не накладаючи жодних граничних умов на функцію  $\varphi(r, z)$ , крім умови її обмеженості на осі  $Oz$  (тобто при природних умовах). Вважаючи, що функція  $\varphi(r, z)$  неперервна в області  $Q$  разом зі своїми частинними похідними першого порядку, варіацію функціонала (3.145) можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta I = -2 \int_Q \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \varphi \right] \delta \varphi \, dzdr + \\ + 2 \int_{L_0} r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \kappa \varphi \right) \delta \varphi \, ds + 2 \int_L r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \delta \varphi \, ds. \end{aligned} \quad (3.146)$$

При виведенні останньої формули було використано формулу Гріна. Прирівнюючи вираз (3.146) до нуля з урахуванням вільного варіювання функції  $\varphi(r, z)$  як в області  $Q$ , так і на її границі, одержимо, що розв'язок задачі про екстремум функціонала (3.145) при природних граничних умовах є розв'язком спектральної задачі (3.134).

Розв'язок варіаційної задачі для функціонала (3.145), як і вище, будемо шукати методом Трефтца, подавши функцію  $\varphi(r, z)$  у вигляді відрізка узагальненого ряду:

$$\varphi(r, z) = \sum_{i=1}^{N_0} b_i \tilde{V}_i(r, z), \quad (3.147)$$

де  $b_i$  — довільні сталі;  $\{\tilde{V}_i(r, z)\}_{i=1}^{N_0}$  — система базисних функцій, кожний елемент якої задовольняє рівняння (3.134) в області  $Q$ .

Сталі  $b_i$  знайдемо з умови, що функція (3.147) повинна надавати екстремум квадратичному функціоналу (3.145). У результаті визначення вектора-стовця  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_0}\}$  зводиться до розв'язування однорідної алгебраїчної системи

$$(\mathfrak{A} - \varkappa \mathfrak{B})\vec{b} = 0, \quad (3.148)$$

де елементи  $\alpha_{ij}$  і  $\beta_{ij}$  симетричних матриць  $\mathfrak{A}$  і  $\mathfrak{B}$  відповідно обчислюються за формулами

$$\alpha_{ij} = \int_{L_0 \cup L} r \tilde{V}_i \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial \nu} ds, \quad \beta_{ij} = \int_{L_0} r \tilde{V}_i \tilde{V}_j ds.$$

З умови розв'язності системи (3.148) випливає рівняння для визначення власних значень  $\varkappa$ :

$$D(\varkappa) = \det |\alpha_{ij} - \varkappa \beta_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N_0). \quad (3.149)$$

Власні значення алгебраїчної задачі (3.148) розмістимо в порядку їхнього зростання та позначимо їх через  $\varkappa_n$ . Відповідні їм власні вектори позначимо через  $\vec{b}^{(n)}$ .

Підставивши знайдені таким чином розв'язки для функцій  $\varphi_i(r, z)$  у формули (3.144) для коефіцієнтів  $\lambda_{0n}$  і  $\lambda_{mn}$ , що входять у вирази для елементів матриці  $B$ , одержимо

$$\lambda_{0n} = \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_i \sigma_{in}}{N_i^2}, \quad \lambda_{mn} = \sum_{i=1}^M \frac{\varkappa_i \sigma_{im} \sigma_{in}}{N_i^2}, \quad (3.150)$$

де

$$\sigma_i = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \beta_{1k}, \sigma_{in} = \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \int_{L_0} r \tilde{V}_k f_n ds, N_i^2 = \varkappa_i^2 \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{l=1}^{N_0} b_k^{(i)} b_l^{(i)} \beta_{kl}.$$

Побудова необхідної кількості власних функцій граничної задачі (3.134) на основі варіаційного методу тісно пов'язана з вибором системи координатних функцій  $\{\tilde{V}_i(r, z)\}_{i=1}^{N_0}$ . Відомо, що для забезпечення збіжності методу Трефгца система лінійно-незалежних координатних функцій повинна мати властивість повноти в області  $Q$  [50]. Проте виконання цієї умови є необхідною, але не достатньою умовою для ефективної побудови розв'язку задачі. У несприятливих випадках збіжність процесу Рітца може виявитися настільки повільною, що накопичення похибок, зростаючих у міру підвищення номера наближення, тобто порядку алгебраїчної системи (3.148), призведе до втрати стійкості обчислень ще до досягнення граничних значень розраховуваних величин. Тому вибір послідовності координатних функцій є не такий вже тривіальний.

Як правило, найкращих результатів при розв'язанні крайової задачі (3.134) в однозв'язній області  $Q$  можна досягти з використанням введених вище координатних функцій (3.131). Проте ця система базисних функцій забезпечує знаходження тільки перших трьох-чотирьох власних значень і функцій розглядуваної спектральної задачі. Але такої кількості функцій  $\varphi_i(r, z)$  може бути недостатньою для апроксимації функції  $\Phi(r, z)$ . Тому виникає необхідність побудови таких систем базисних функцій, які дозволяють б знаходити із заданою точністю і вищі власні функції задачі (3.134). Цього результату можна досягти за рахунок розширення класу допустимих функцій такими функціями, які відображали б основні властивості шуканих розв'язків, що породжують повільну збіжність процесу Рітца. Однією з таких властивостей є властивість локалізації вищих власних функцій задачі (3.134) в околі границі  $L_0$  і їхня велика змінюваність при віддаленні від цієї границі в середину області  $Q$  [44]. При цьому, чим вище номер власної функції, тим більший градієнт вона має в напрямку осі



Оз. Апроксимація таких функцій з використанням поліноміального базису не приводить до бажаного результату.

Розробці наближених методів розв'язування задачі про власні коливання рідини в резервуарах, які дають можливість розширити в певній мірі діапазон розраховуваних форм коливань, присвячено праці [45, 90, 93].

Згідно з працею [90], розв'язки однорідної крайової задачі (3.134) подамо у вигляді

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(r, z) + \sum_{i=1}^p c_i \psi_i(r, z), \quad (3.151)$$

де  $\{V_k(r, z)\}_{k=1}^N$  — введена вище система двовимірних поліномів (3.131);  $\{\psi_i(r, z)\}_{i=1}^p$  — система власних функцій базової задачі.

За базову задачу виберемо спектральну задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi_i + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in \widehat{Q}, \\ \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z} - \beta_i \psi_i \right) \Big|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0, \quad \psi_i(0, z) = 0, \end{aligned} \quad (3.152)$$

де  $\widehat{Q} : \{0 \leq r \leq r_0; -h \leq z \leq 0\}$ .

Однорідна крайова задача (3.152) описує несиметричні коливання рідини в прямому круговому циліндрі із плоским дном у площині  $Orz$ , меридіональний переріз якого є прямокутник висотою  $h$  і шириною  $r_0$ . Точний розв'язок цієї задачі можна представити в наступній формі

$$\psi_i(r, z) = \frac{\text{ch}[k_i(z+h)]}{k_i J_1(k_i) \text{sh}(k_i h)} f_i(r), \quad \beta_i = k_i \text{th}(k_i h). \quad (3.153)$$

Тут функції  $f_i(r)$  визначаються за формулою (3.114). Таким чином, друга сума у виразі (3.151) відображає поверхневий характер хвильових рухів рідини.

Алгебраїчну систему відносно сталих  $a_k$  і  $c_i$  було отримано в праці [93] шляхом застосування проекційного методу при виконанні граничних умов для функції  $\varphi$  на змочуваній поверхні резервуара і на вільній поверхні рідини. При цьому число  $p$  у другій

сумі виразу (3.151) покладалося рівним кількості розраховуваних форм коливань рідини, а число  $N$  в першій сумі вибиралося з умови одержання розв'язку крайової задачі із заданою точністю.

Проведені за даним алгоритмом розрахунки [90] показали, що включення в число координатних функцій розв'язків базової задачі (3.152) дозволяє істотно вплинути на швидкість збіжності процесу Рітца. Так при  $N = 8$  і  $p = 3$  у загальному випадку вдається знайти перші три частоти коливань рідини з точністю до трьох-чотирьох вірних знаків після коми. Проте, як показали наступні чисельні експерименти, подальше збільшення кількості  $N$  у виразі (3.151) не дає можливості підвищувати точність наближеного розв'язку спектральної задачі (3.134). Причина цього полягає в тому, що перші функції  $\psi_i(r, z)$ , які мають невеликий градієнт у напрямку осі  $Oz$ , можуть бути з певною точністю лінійно виражені через функції  $V_k(r, z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . У цьому випадку однорідна система алгебраїчних рівнянь (3.148) буде мати матриці, близькі до вироджених матриць, що й призведе до втрати стійкості розрахунку ще до досягнення необхідної точності обчислень.

Для забезпечення знаходження з необхідною точністю достатньої кількості власних функцій задачі (3.134) нижче пропонується її наближений розв'язок шукати у такому вигляді

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(r, z) + \sum_{i=p_0}^p c_i \psi_i(r, z). \quad (3.154)$$

Зауважимо, що на відміну від подання (3.151) у запропонованій другій сумі (3.154) сумування відбувається з деякого числа  $p_0$ . Числа  $N$  і  $p$  обираються за описаним вище правилом, а число  $p_0$  покладається таким, щоб при ньому вдавалось забезпечити невиродженість матриць алгебраїчної системи (3.148) і потрібну точність обчислення нижньої частини спектра задачі (3.134) для  $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{p_0}$ .

Сталі  $a_k$  і  $c_i$  будемо далі визначати з умов стаціонарності функціонала (3.145). При цьому одержуємо однорідну алгебраїчну систему вигляду (3.148), у якій вектор-стовпець  $\vec{b}$  і система коорди-

натних функцій  $\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0}$  мають таку структуру:

$$\begin{aligned} \{b_k\}_{k=1}^{N_0} &= \{a_1, a_2, \dots, a_N, c_{p_0}, c_{p_0+1}, \dots, c_p\}, \\ \{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} &= \{V_1, V_2, \dots, V_N, \psi_{p_0}, \psi_{p_0+1}, \dots, \psi_p\}, \quad N_0 = N + p - p_0 + 1. \end{aligned}$$

Як буде показано нижче, подання власних функцій спектральної задачі (3.134) з параметром у граничній умові у формі (3.154) забезпечує знаходження їх скінченної кількості на основі варіаційного методу та з необхідною точністю. Це дозволяє провести часткове обернення оператора розглядуваної задачі гідропружності з використанням власних функцій допоміжної спектральної задачі.

Для випадку, коли на вільній поверхні рідини розташована пластинка, визначення функції  $W(r)$  з урахуванням розкладу (3.140) для функції  $\Phi(r, z)$  зводиться до розв'язування однорідної крайової задачі

$$\begin{aligned} L^2[W(r)] + \frac{1}{D}W - \\ - \lambda^2 \left[ \frac{a}{D}W + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} r W \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \right) \varphi_i(r, 0) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$W(0) = W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) = 0.$$

Як і вище, для розв'язування задачі (3.155) застосуємо узагальнений метод Бубнова–Гальоркіна, подавши функцію  $W(r)$  у вигляді розкладу (3.116), в якому  $f_0(r) = r^3 - 3r_0^2r$ ;  $f_m(r)$  — власні функції спектральної задачі (3.113).

Для сталих  $X_m$  і  $C_1$  отримаємо рівняння

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X} = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2r_0^3} \sum_{m=1}^q X_m f_m(r_0). \quad (3.156)$$

При цьому елементи матриць  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами (3.133), а коефіцієнти  $\lambda_{0n}$  та  $\lambda_{mn}$  мають вигляд (3.150), в яких

$$\sigma_i = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \int_{L_0} r f_0(r) \tilde{V}_k(r, z) ds = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} (-4\beta_{3k} - 3r_0^2 \beta_{1k}).$$

### 3.2.6 Аналіз числових результатів

Наведемо деякі результати розрахунків частот і форм власних коливань рідини за запропонованими алгоритмами в абсолютно жорсткому напівсферичному резервуарі, який повністю заповнений рідиною і незбурена поверхня якої покрита розглядуваними пружними елементами. За характерний лінійний розмір оберемо радіус сфери. В подальшому будемо користуватися безрозмірними величинами, які було введено за формулами (3.109).

Спочатку розглянемо випадок, коли вільна поверхня рідини покрита пружною мембраною. Наведемо аналіз наближеного розв'язку однорідної задачі (3.110), отриманого на основі використання розв'язків послідовності неоднорідних граничних задач Неймана в області меридіонального перерізу ємності, зайнятій рідиною. Всі наведені нижче в таблицях дані для випадку з мембраною було отримано для значень параметрів  $a = 0,01$ ,  $T = 0,1$ .

Таблиця 3.7: Значення нижчих частот системи «мембрана—рідина» в залежності від кількості  $q$  координатних функцій в узагальненому методі Бубнова—Гальоркіна ( $N = 30$ )

$q$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	2,2010	5,4802	9,4451	14,052	19,260
8	2,2014	5,4794	9,4353	14,008	19,099
10	2,2016	5,4792	9,4326	13,997	19,060
12	2,2017	5,4792	9,4317	13,993	19,048
14	2,2017	5,4792	9,4312	13,991	19,044
16	2,2017	5,4792	9,4310	13,990	19,042
18	2,2018	5,4792	9,4309	13,990	19,041
20	2,2018	5,4792	9,4309	13,989	19,040
22	2,2018	5,4792	9,4309	13,989	19,040
24	2,2018	5,4792	9,4308	13,989	19,039
26	2,2018	5,4792	9,4308	13,989	19,039

Залежність перших п'яти власних значень спектральної задачі (3.110) від кількості членів  $q$  у розкладі (3.117) відображено у табл. 3.7. При цьому в розкладах (3.125) для знаходження розв'язків неоднорідних крайових задач Неймана для фун-

Таблиця 3.8: Значення нижчих частот системи «мембрана—рідина» в залежності від кількості  $N$  координатних функцій у методі Рітца при знаходженні функцій  $\Psi_k(r, z)$  ( $q = 24$ )

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	2,2046	6,7872	27,485	39,154	49,819
10	2,2019	5,4874	11,289	32,575	46,673
14	2,2018	5,4796	9,4517	16,007	37,465
18	2,2018	5,4793	9,4313	14,038	21,048
22	2,2018	5,4793	9,4309	13,989	19,129
26	2,2018	5,4792	9,4309	13,989	19,043
30	2,2018	5,4792	9,4308	13,989	19,039

кцій  $\Psi_k(r, z)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, q$ ) з використанням варіаційного методу утримувалося 30 членів. Дані цієї таблиці показують, що для обчислення перших двох власних частот коливань розглянутої механічної системи з точністю до п'яти значущих цифр досить покласти  $q = 18$ . Для обчислення п'ятої частоти із прийнятною точністю необхідно покласти  $q = 24$ . Швидка збіжність власних значень крайової задачі (3.110) зумовлена застосуванням узагальненого методу Бубнова—Гальоркіна для апроксимації прогинів мембрани. Варто зауважити, що на відміну від традиційного методу Бубнова—Гальоркіна застосовуваний в даному випадку метод дає для першої форми коливань послідовність власних значень, яка прямує до своєї границі знизу, в той час як характер збіжності для вищих власних значень в обох методах збігається.

Вплив кількості членів  $N$  у розкладах (3.125) для функції  $\Psi_k(r, z)$  на точність обчислення перших п'яти власних значень крайової задачі (3.110) показано в табл. 3.8. При цьому в розкладах (3.116) і (3.117) покладалося  $q = 24$ .

Дані табл. 3.8 показують, що обчислення вищих власних значень даної задачі гідропружності повинне супроводжуватися збільшенням кількості координатних функцій при розв'язуванні варіаційним методом двовимірних неоднорідних крайових задач для функцій  $\Psi_k(r, z)$ .

Перейдемо до аналізу наближеного розв'язку крайової зада-

Таблиця 3.9: Залежність перших власних значень задачі (3.134) від кількості членів  $N$  у розкладі (3.154) при  $p_0 = 5$ ,  $p = 10$  (верхні рядки) і при  $p_0 = p = 0$  (нижні рядки)

$N$	18	20	22	24
$\varkappa_1$	1,56016	1,56016	1,56016	1,56016
	1,56016	1,56016	1,56016	1,56016
$\varkappa_2$	5,27555	5,27555	5,27555	5,27555
	5,27555	5,27555	5,27555	5,27555
$\varkappa_3$	8,50444	8,50444	8,50444	8,50444
	8,50444	8,50444	8,50444	8,50444
$\varkappa_4$	11,6834	11,6834	11,6834	11,6834
	11,6944	11,6840	11,6835	11,6834
$\varkappa_5$	14,8461	14,8461	14,8461	14,8461
	15,5409	14,9843	14,8646	14,8478
$\varkappa_6$	18,0012	18,0012	18,0012	18,0012
	26,7908	20,5196	18,7251	18,1748
$\varkappa_7$	21,1523	21,1522	21,1522	21,1522
	235,849	46,8608	27,8394	23,4962
$\varkappa_8$	24,3008	24,3008	24,3008	24,3008
	48557,6	1043,14	104,136	40,3440
$\varkappa_9$	27,4478	27,4478	27,4478	27,4478
	—	416376	5693,15	308,924
$\varkappa_{10}$	30,5936	30,5936	30,5936	30,5936
	—	—	—	35822,6

чі (3.110), отриманого з використанням власних функцій спектральної задачі з параметром у граничній умові.

Спочатку оцінимо наближені розв'язки спектральної задачі (3.134), отримані за допомогою розкладу (3.154), що якісно відображає поверхневий характер хвильових рухів рідини, і за допомогою тільки координатних функцій (3.131). У табл. 3.9 наведено результати обчислення перших 10 власних значень  $\varkappa_n$  в залежності від кількості членів  $N$  у розкладі (3.154) при  $p_0 = 5$ ,  $p = 10$  (верхні рядки) і в розкладі (3.147), де в якості координатних функцій було вибрано функції (3.131) (нижні рядки).

Дані табл. 3.9 свідчать про те, що подання розв'язків однорі-

дної задачі (3.134) у вигляді розкладу за поліноміальним базисом дозволяє при  $N = 24$  обчислити з точністю до шести значущих цифр тільки перші чотири власні значення  $\varkappa_n$ . Наступне збільшення порядку алгебраїчної системи в цьому випадку не супроводжується збільшенням кількості знайдених власних значень, оскільки при цьому спостерігається втрата стійкості обчислювального процесу. Якщо до координатних функцій включено функції базової задачі, що відображають поверхневий характер хвильових рухів рідини, то це дозволяє обчислити перші десять власних значень задачі (3.134). Подальші чисельні експерименти показали, що число  $p$  у розкладі (3.154) повинно дорівнювати числу розраховуваних власних значень вихідної задачі. Кількість перших функцій базової задачі  $p_0 - 1$ , які при цьому необхідно відкинути, повинна збігатися з кількістю власних значень  $\varkappa_n$ , які можна розрахувати із заданою точністю лише за поліноміальним базисом.

Таким чином, запропонована вище модифікація методу Шмакова дозволяє з досить високою точністю розраховувати скінченну кількість власних функцій і власних значень введеної допоміжної спектральної задачі, що описує вільні коливання рідини у резервуарі. Це дозволяє використовувати метод розкладу за власними функціями однорідної задачі з параметром у граничній умові для побудови наближеного розв'язку розглядуваної задачі гідропружності.

У табл. 3.10 відображено вплив кількості  $M$  власних функцій  $\varphi_n$  у розкладі (3.137) на точність обчислення перших п'яти частот коливань рідини в даному резервуарі із пружною мембраною на її вільній поверхні.

При одержанні даних табл. 3.10 у розкладі (3.154) для власних функцій  $\varphi_n$  покладалося  $N = 26$ ,  $p_0 = 5$ ,  $p = 20$ , а кількість  $q$  координатних функцій  $f_m(r)$  при розв'язуванні інтегродиференціального рівняння із застосуванням узагальненого методу Бубнова—Гальоркіна вибиралася рівною 24. При цьому використовувалися ті ж вихідні дані задачі, що й при одержанні табл. 3.7 і 3.8. З порівняння результатів табл. 3.10 з результатами табл. 3.7 і 3.8 випливає, що для визначення перших п'яти власних значень крайової задачі (3.110) з точністю до п'яти значущих цифр необхідно використовувати при обчисленнях 20 власних функцій спе-

Таблиця 3.10: Залежність перших п'яти частот системи мембрана-рідина від кількості  $M$  власних функцій  $\varphi_n$  у розкладі (3.137) для функції  $\Phi(r, z)$  ( $N = 26$ ,  $p_0 = 5$ ,  $p = 20$ ,  $q = 24$ )

$M$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
2	2,2107	5,7911	31,946	42,059	52,059
4	2,2026	5,4919	9,5173	14,862	50,942
6	2,2020	5,4819	9,4457	14,047	19,242
8	2,2018	5,4801	9,4355	14,006	19,087
10	2,2018	5,4796	9,4327	13,996	19,058
12	2,2018	5,4794	9,4317	13,992	19,049
16	2,2018	5,4793	9,4311	13,990	19,043
18	2,2018	5,4793	9,4310	13,990	19,042
20	2,2018	5,4792	9,4309	13,989	19,042

ктральної задачі (3.134).

Таким чином, розв'язки крайової задачі гідропружності (3.110), отримані за допомогою введеної послідовності неоднорідних крайових задач Неймана та з використанням власних функцій однорідної крайової задачі з параметром у граничній умові, підтверджують достовірність отриманих чисельних результатів. При реалізації обох підходів на ПЕОМ децю кращим є перший підхід, оскільки другий підхід пов'язаний з побудовою власних функцій спектральної задачі (3.134) і з розв'язанням виникаючих при цьому проблем обчислювального характеру (невиродженість матриці  $\mathfrak{A}$ ).

Залежність значень параметра  $\sqrt{\lambda}$  від натягу мембрани при  $a = 0,01$  показана на рис. 3.3 для трьох нижчих власних частот коливань системи. Суцільні криві побудовані для зв'язаних коливань мембрани та рідини, штрихові — для випадку коливань рідини в розглянутому резервуарі без пружного елемента. З рисунка видно, що збільшення натягу мембрани супроводжується монотонним збільшенням зв'язаних частот системи.

На рис. 3.4 подано перші три форми коливань пружної мембрани при  $a = 0,01$  і двох значеннях параметра натягу мембрани  $T = 0,1$  (а) і  $T = 0,0004$  (б). Нормування форм коливань мембра-



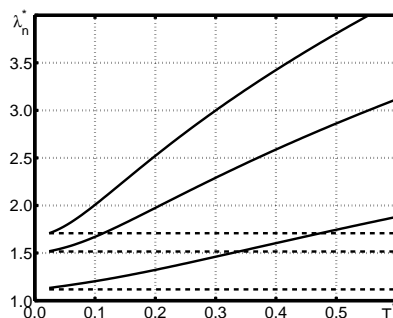


Рис. 3.3: Залежність перших трьох власних частот системи від натягу мембрани при  $a = 0,01$  ( $T^* = \sqrt{T}$ ,  $\lambda_n^* = \sqrt{\lambda_n}$ )

ни  $W_n^*$  здійснювалося таким чином, щоб їхні максимальні значення дорівнювали одиниці при  $r \in [0; 1]$ .

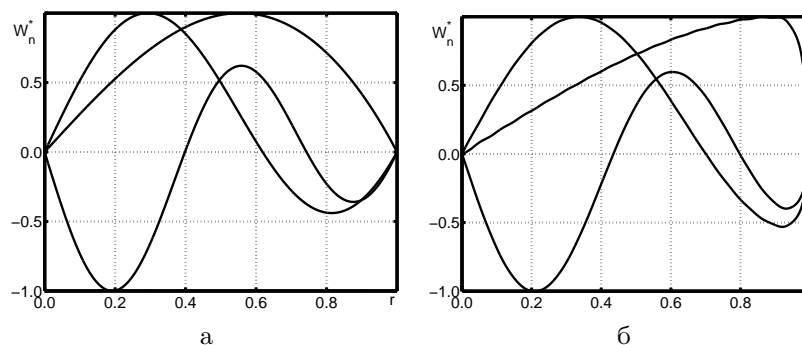


Рис. 3.4: Перші три форми коливань мембрани при  $a = 0,01$  і а)  $T = 0,1$ , б)  $T = 0,0004$

Як видно із цього рисунка, при малих значеннях параметра  $T$  форми коливань мембрани мають більшу змінюваність у вузькій області, що прилягає до її закріпленого краю. Це пояснюється тим, що в розглянутому випадку рівняння для прогинів мембрани

буде мати малий параметр при старшій похідній, і отже, розв'язки цих рівнянь можуть мати більші градієнти у вузьких примежових шарах. Варто зауважити, що при апроксимації таких розв'язків відрізками скінченних рядів необхідно брати для забезпечення заданої точності обчислень досить велику кількість членів у цих рядах.

Таблиця 3.11: Частоти системи, отримані за загальною схемою розрахунку (верхні рядки) і за схемою без урахування статичної складової тиску рідини на мембрану (нижні рядки)

$\tilde{a}$	100	300	500	700	900
$T = 0,1$					
$\lambda_1$	2,2018 1,7119	2,2158 1,7231	2,2186 1,7254	2,2199 1,7264	2,2205 1,7269
$\lambda_2$	5,4792 4,9729	5,5787 5,0629	5,5993 5,0815	5,6082 5,0895	5,6131 5,0940
$\lambda_3$	9,4308 8,9909	9,6966 9,2440	9,7526 9,2973	9,7768 9,3204	9,7904 9,3333
$T = 0,4$					
$\lambda_1$	3,6958 3,4239	3,7198 3,4463	3,7247 3,4508	3,7268 3,4528	3,7279 3,4538
$\lambda_2$	10,208 9,9459	10,393 10,126	10,431 10,163	10,448 10,179	10,457 10,188
$\lambda_3$	18,206 17,982	18,718 18,488	18,826 18,595	18,873 18,641	18,899 18,667

У деяких працях з гідропружності нехтують статичною складовою тиску рідини на пружну поверхню. В розглянутому випадку ця складова зумовлена наявністю в рівнянні для прогинів мембрани (3.110) члена  $\frac{1}{T}W$ . Для з'ясування впливу цього члена на розрахунок власних коливань розглядуваної системи в табл. 3.11 наведені частоти системи, отримані за загальною схемою розрахунку (верхні рядки) і за схемою без урахування члена  $\frac{1}{T}W$  (нижні рядки) для різних значень параметрів  $T$  та  $\tilde{a} = \frac{1}{a}$ .

Дані табл. 3.11 свідчать про те, що нехтування статичною складовою тиску рідини на поверхні мембрани в розглядуваному випадку може призвести до істотних похибок в обчисленнях значень частот зв'язаних коливань рідини та мембрани. При цьому ці похибки практично не залежать від відносної товщини мембрани, а істотно залежать від її натягу. Так, максимальна відмінність від „точних“ значень не перевищує 23% при  $T = 0,1$  і 8% при  $T = 0,4$ . Зі збільшенням номера власної частоти системи похибка обчислення зменшується.

Перейдемо далі до аналізу розв'язків крайової задачі (3.111), яка описує зв'язані коливання рідини і пружної пластинки на її вільній поверхні. Як і вище, будемо розглядати резервуар у вигляді сфери з радіусом  $R$ , глибина рідини в якому збігається з його характерним лінійним розміром  $R$ . При цьому результати розрахунків було отримано при значенні безрозмірного параметра жорсткості пластинки  $D = 0,02$ .

Таблиця 3.12: Значення нижчих частот системи «пластинка—рідина» в залежності від кількості  $q$  координатних функцій в узагальненому методі Бубнова—Гальоркіна ( $N = 30$ )

$q$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
6	4,94441	19,6886	47,7200	91,1614
8	4,94441	19,6882	47,7082	91,0078
10	4,94441	19,6882	47,7069	90,9930
12	4,94441	19,6882	47,7067	90,9905
14	4,94441	19,6882	47,7067	90,9899
16	4,94441	19,6882	47,7067	90,9897
18	4,94441	19,6882	47,7067	90,9896
26	4,94441	19,6882	47,7067	90,9896

Вплив кількості членів  $q$  у розкладі (3.117) на точність обчислення перших чотирьох власних значень крайової задачі (3.111) відображено у табл. 3.12. При цьому в розкладах (3.125) утримувалося 30 членів. Дані цієї таблиці показують, що для обчислення перших трьох власних частот коливань розглянутої механічної системи з точністю до шести значущих цифр досить покласти

$q = 12$ . Для обчислення четвертої частоти із прийнятою точністю необхідно покласти  $q = 18$ .

У табл. 3.13 відображено залежність перших чотирьох власних значень спектральної задачі (3.111) від кількості членів  $N$  у розкладах (3.125) для функції  $\Psi_k(r, z)$ . При цьому в розкладах (3.116) і (3.117) покладалося  $q = 20$ .

Таблиця 3.13: Значення нижчих частот системи «пластинка—рідина» в залежності від кількості  $N$  координатних функцій у методі Рітца при знаходженні функцій  $\Psi_k(r, z)$  ( $q = 20$ )

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
6	5,00408	29,5154	134,344	245,046
10	4,94442	19,9664	68,4904	222,957
14	4,94441	19,6885	48,3579	121,653
18	4,94441	19,6882	47,7102	92,2395
22	4,94441	19,6882	47,7067	91,0027
26	4,94441	19,6882	47,7067	90,9899
30	4,94441	19,6882	47,7067	90,9896

Дані табл. 3.13 свідчать, що обчислення вищих власних значень даної задачі гідропружності необхідно супроводжувати збільшенням кількості координатних функцій при розв'язуванні варіаційним методом двовимірних неоднорідних крайових задач для функцій  $\Psi_k(r, z)$ .

Значення перших чотирьох частот коливань даної системи в залежності від кількості  $M$  власних функцій  $\varphi_n$  у розкладі (3.137) для складової потенціалу зміщень рідини  $\Phi(r, z)$  наведено у табл. 3.14. При одержанні даних табл. 3.14 у розкладі (3.154) для власних функцій  $\varphi_n$  покладалося  $N = 26$ ,  $p_0 = 5$ ,  $p = 20$ , а кількість  $q$  координатних функцій  $f_m(r)$  при розв'язанні інтегродиференціального рівняння із застосуванням узагальненого методу Бубнова—Гальоркіна вибиралася рівною 20. При цьому використовувалися ті ж вихідні дані задачі, що й при одержанні табл. 3.12 і 3.13. Із порівняння результатів табл. 3.14 з результатами табл. 3.12 і 3.13 випливає, що для визначення перших трьох власних значень крайової задачі (3.111) з точністю до шести зна-

Таблиця 3.14: Залежність нижчих частот системи «пластинка—рідина» від кількості  $M$  власних функцій  $\varphi_n$  у розкладі (3.137) для функції  $\Phi(r, z)$  ( $N = 26$ ,  $p_0 = 5$ ,  $p = 20$ ,  $q = 20$ )

$M$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
2	4,94876	23,7167	148,626	262,745
4	4,94443	19,6958	47,9794	113,879
6	4,94441	19,6885	47,7175	91,1306
8	4,94441	19,6882	47,7078	91,0039
10	4,94441	19,6882	47,7069	90,9922
12	4,94441	19,6882	47,7067	90,9904
14	4,94441	19,6882	47,7067	90,9899
16	4,94441	19,6882	47,7067	90,9898
18	4,94441	19,6882	47,7067	90,9898
20	4,94441	19,6882	47,7067	90,9898

чущих цифр необхідно використовувати 12 власних функцій спектральної задачі (3.134).

Дані табл. 3.12, 3.13 і 3.14 свідчать про більш швидку збіжність послідовності частот в порівнянні з випадком наявності мембрани на вільній поверхні рідини. Пояснення цього факту пов'язано з більш високим порядком рівняння для прогинів пружної пластинки.

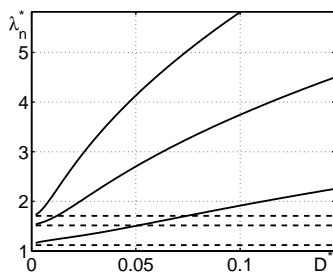


Рис. 3.5: Залежність перших трьох власних частот системи від жорсткості при  $a = 0,01$  ( $D^* = \sqrt{D}$ ,  $\lambda_n^* = \sqrt{\lambda_n}$ )

На рис. 3.5 показано залежність значень параметра  $\sqrt{\lambda}$  для трьох нижчих власних частот коливань системи від жорсткості пластинки при  $a = 0,01$ . Суцільними кривими зображається випадок для зв'язаних коливань пластинки і рідини, штриховими — випадок коливань рідини в розглядуваному резервуарі з вільною поверхнею. З рисунка видно, що збільшення жорсткості пластинки супроводжується монотонним збільшенням зв'язаних частот системи.

На рис. 3.6 показано перші три форми коливань пружної пластинки при  $a = 0,01$  і двох значеннях жорсткості пластинки  $D = 0,02$  (а) і  $D = 10^{-6}$  (б). Нормування форм коливань пластинки здійснювалося таким чином, щоб їхні максимальні значення дорівнювали одиниці при  $r \in [0; 1]$ . При малих значеннях параметра  $D$  форми коливань пластинки мають більшу змінюваність у вузькій області, що прилягає до її закріпленого краю.

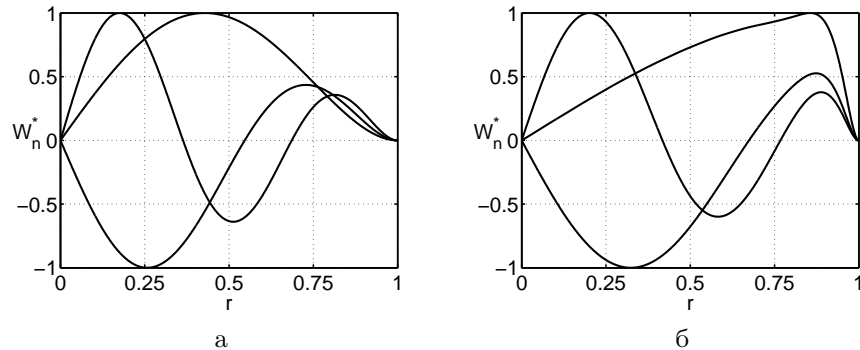


Рис. 3.6: Перші три форми коливань пластинки при  $a = 0,01$  і а)  $D = 0,02$ , б)  $D = 10^{-6}$

Результати розрахунків нижчих частот системи з урахуванням (наявний член  $\frac{1}{D}W$  у рівнянні) і без урахування (відсутній член  $\frac{1}{D}W$  у рівнянні) статичної складової тиску рідини на пружну поверхню при різних значеннях параметрів  $a$  і  $D$  наведено у табл. 3.15.

Таблиця 3.15: Частоти системи, отримані за загальною схемою розрахунку (верхні рядки) і за схемою без урахування статичної складової тиску рідини на пластинку (нижні рядки)

$\tilde{a}$	100	300	500	700	900
$D = 0,02$					
$\lambda_1$	4,94441	4,98443	4,99255	4,99604	4,99799
	4,69511	4,73323	4,74096	4,74428	4,74613
$\lambda_2$	19,6882	20,0662	20,1446	20,1785	20,1974
	19,5457	19,9207	19,9984	20,0320	20,0508
$\lambda_3$	47,7067	49,1012	49,3954	49,5232	49,5946
	47,6187	49,0104	49,3041	49,4316	49,5029
$D = 0,06$					
$\lambda_1$	8,27874	8,34588	8,35950	8,36536	8,36862
	8,13218	8,19819	8,21158	8,21734	8,22054
$\lambda_2$	33,9366	34,5879	34,7228	34,7812	34,8137
	33,8542	34,5036	34,6383	34,6964	34,7289
$\lambda_3$	82,5288	84,9410	85,4499	85,6709	85,7945
	82,4779	84,8885	85,3972	85,6180	85,7415

Нехтування статичною складовою може призвести до істотних похибок при обчисленні частот зв'язаних коливань рідини і пластинки. Так, максимальна відмінність від точних значень не перевищує 5,1% при  $D = 0,02$  і 1,8% при  $D = 0,06$ . Зі збільшенням номера власної частоти системи похибка обчислення зменшується.

### 3.2.7 Вимушені коливання рідини в рухомому резервуарі з пружним елементом на її вільній поверхні

Усі можливі задачі, пов'язані з вивченням малих рухів твердого тіла з розглядуваною порожниною, частково заповненою рідиною, можуть бути поділені на дві групи.

До першої групи будемо відносити задачі, в яких рух тіла вважається відомим. Потрібно визначити характеристики руху рідини, яка перебуває в порожнині рухомого тіла, і силові впливи, які

чинить рідина на тіло.

Формулювання задач, які належать до другої групи, є більш загальне. Система сил, які діють на тіло, вважається заданою. Шуканими є параметри руху тіла і рідини. В другій групі задачі є значно складнішими в порівнянні з задачами першої групи.

Нижче розглянемо розв'язування задачі першої групи. Нехай розглядуваний резервуар здійснює поступальні коливання вздовж осі  $Oy$ , які описуються функцією  $u(t)$ . Компоненти уявного прискорення у зв'язаній системі координат  $Oxyz$  у цьому випадку будуть мати вигляд:

$$\ddot{a}_1 = 0, \quad \ddot{a}_2 = \ddot{u}(t), \quad \ddot{a}_3 = g. \quad (3.157)$$

Масою твердого тіла далі будемо нехтувати, тобто покладемо  $m_0 = 0$ . У цьому випадку перше і третє рівняння системи рівнянь (3.99) можна переписати в такій формі:

$$\begin{aligned} m_w \ddot{u} &= P'_2 + \Delta P_2, \\ M_i (\ddot{s}_i + \omega_i^2 s_i) &= -L_i \ddot{u} \quad (i = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.158)$$

де

$$M_i = \rho_0 \delta_0 \int_{\Sigma} W_i^2 d\Sigma + \rho \int_{\Sigma} B W_i \cdot W_i d\Sigma; \quad L_i = \rho \int_{\Sigma} y W_i d\Sigma.$$

Додаткова сила  $\Delta P_2$ , яка діє на резервуар з боку рідини внаслідок її відносного руху, визначається за формулою

$$\Delta P_2 = - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{s}_i L_i. \quad (3.159)$$

Оскільки визначенням гідродинамічного моменту за рахунок деформації пружного елемента на вільній поверхні рідини надалі не будемо займатися, то друге рівняння з формул (3.99) тут не виписано.

Розв'язування цієї задачі та визначення додаткових силових впливів, які виникають з боку рухомої рідини, будемо здійснювати за припущення, що рухи тіла задано у вигляді гармонічних



коливань. Доцільність такого припущення впливає з того, що, по-перше, будь-який рух твердого тіла на скінченному інтервалі часу може бути представлено у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, оскільки будь-яка неперервна функція  $u(t)$  може бути замінена відповідним рядом Фур'є. Випадок гармонічних коливань тіла цікавий ще й тому, що вплив рідини в цьому випадку можна звести, як і при повному заповненні резервуара, до впливу деякого еквівалентного твердого тіла, якому притаманні певні інерційні характеристики.

Отже, нехай поступальне гармонічне коливання резервуара уздовж осі  $Oy$  задається формулою

$$u(t) = H \sin pt. \quad (3.160)$$

Далі будемо розглядати усталені вимушені коливання розглядуваної механічної системи. Тоді частинні розв'язки неоднорідних рівнянь (3.158) будуть мати вигляд:

$$s_i = \frac{L_i}{M_i(\omega_i^2 - p^2)} H p^2 \sin pt = -\frac{\ddot{u} L_i}{M_i(\omega_i^2 - p^2)}. \quad (3.161)$$

Звідси одержуємо вираз для  $\ddot{s}_i$ :

$$\ddot{s}_i = -\frac{L_i p^4}{M_i(\omega_i^2 - p^2)} H \sin pt = \frac{L_i p^2 \ddot{u}}{M_i(\omega_i^2 - p^2)}. \quad (3.162)$$

На підставі формул (3.159) і (3.162) маємо

$$\Delta P_2 = -\ddot{u} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i^2 p^2}{M_i(\omega_i^2 - p^2)}. \quad (3.163)$$

Коефіцієнти  $L_i$  і  $M_i$  рівнянь (3.158) залежать від довільних множників  $a_i$ , пов'язаних з розв'язуванням однорідної граничної задачі гідропружності відносно функцій  $\varphi_i$  і  $W_i$ . Проте коефіцієнти  $\frac{L_i^2}{M_i}$ , які входять у вираз (3.163), є інваріантними коефіцієнтами відносно вибору нормування власних функцій цієї спектральної задачі.

Зведену масу системи  $m^*$  можна представити як відношення величини  $m_w \ddot{u} - \Delta P_2$  до  $\ddot{u}$ :

$$m^* = m_w - \frac{\Delta P_2}{\ddot{u}}. \quad (3.164)$$

Звідси випливає, що зведена маса системи визначається за формулою

$$m^* = m_w + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i^2}{M_i} \cdot \frac{p^2}{\omega_i^2 - p^2}. \quad (3.165)$$

Перше рівняння з формул (3.158) набуває при цьому такого вигляду:

$$m^* \ddot{u} = P'_2. \quad (3.166)$$

Воно дозволяє знайти силовий вплив на резервуар, який визначає той або інший коливальний режим руху розглядуваного резервуара з рідиною.

Прогин пружного елемента, розташованого на вільній незбуреній поверхні рідини, при поступальних гармонічних коливаннях резервуара уздовж осі  $Oy$  за законом (3.160) буде визначатися виразом

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} s_i W_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H p^2 L_i}{M_i (\omega_i^2 - p^2)} W_i \sin pt. \quad (3.167)$$

Із цієї формули випливає, що при прямуванні  $p$  до  $\omega_i$  як завгодно малі коливання тіла будуть викликати виникнення скінченних коливань пружного елемента. Зазначене явище (значне зростання амплітуди) суперечить основній передумові лінійної теорії про малість параметрів руху системи. Звідси випливає, що вивчення явищ резонансного збудження коливань рідини, яка перебуває в рухомій порожнині, вимагає врахування впливу невеличкості коливань рідини.

При проведенні розрахунків зручно перейти до безрозмірних коефіцієнтів рівнянь (3.158). Позначимо через  $R$  деякий характерний лінійний розмір резервуара. Тоді зв'язок розмірних коефіцієнтів рівнянь (3.158) з безрозмірними (позначеними рискою зверху)

буде здійснюватися за формулами

$$L_i = \rho R^4 \bar{L}_i, \quad L_{oi} = \rho R^5 \bar{L}_{oi}, \quad m_w = \rho R^3 \bar{m}_w, \quad M_i = \rho R^5 \bar{M}_i, \\ \bar{M}_i = \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R} \int_{\Sigma} \bar{W}_i^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \bar{\varphi}_i \bar{W}_i d\Sigma \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.168)$$

Надалі риси над безрозмірними величинами будемо опускати. Будемо розглядати резервуар, який має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном:  $R$  — радіус основи циліндра,  $h$  — висота рідини в циліндричній частині порожнини. На вільній поверхні рідини знаходиться мембрана радіусом  $R$ . За характерний розмір резервуара виберемо радіус циліндра  $R$ . Усі наведені нижче результати були обчислені при наступних безрозмірних параметрах системи:

$$h = 0,5, \quad a = 0,01. \quad (3.169)$$

Для проведення розрахунків виберемо скінченну кількість членів  $n$  в нескінченній сумі формули (3.165). Тоді відносні величини приведеної маси рідини, поділеної на масу рідини, обчислюються за формулою

$$\frac{m^*}{m_w} = 1 + \frac{1}{m_w} \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{M_i} \cdot \frac{p^2}{\omega_i^2 - p^2}. \quad (3.170)$$

Графік залежності відносної величини приведеної маси рідини, визначеної за формулою (3.170), від частоти  $p$  кінематичного збудження резервуара побудовано на рис. 3.7. Побудову виконано в діапазоні трьох нижчих частот системи для двох значень параметрів  $T_1 = 0,1$  (суцільні лінії) і  $T_2 = 0,5$  (штрихові лінії). Відповідні вертикальні асимптоти  $p = \omega_i^{(1)}$  при  $T_1 = 0,1$  і  $p = \omega_i^{(2)}$  при  $T_2 = 0,5$  ( $i = 1, 2, 3$ ) також зображено на графіку. З рисунка видно, що наявність пружного елемента на вільній поверхні рідини приводить до істотної залежності її наведеної інерційної характеристики від частоти коливань резервуара. При наближенні частоти коливань тіла до однієї із власних частот коливань рідини в розглядуваному резервуарі ( $p \rightarrow \omega_i$ ) спостерігається значне зростання абсолютної величини приведеної маси рідини. Це обумовлює необхідність врахування впливу рідини при оцінці силових

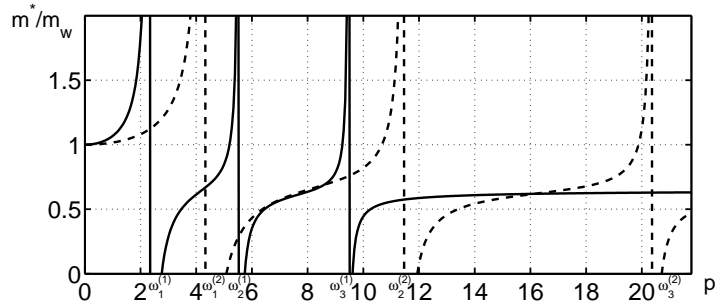


Рис. 3.7: Залежність відносної величини зведеної маси від частоти  $p$  кінематичного збудження резервуара при  $T = 0,1$  (суцільні лінії) та  $T = 0,5$  (штрихові лінії)

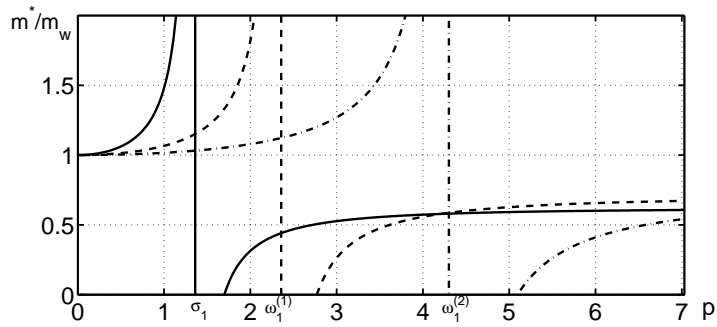


Рис. 3.8: Поведінка зведеної маси в області першої резонансної частоти для випадку резервуара з рідиною та мембраною і без мембрани

впливів (3.166) на резервуар. Чим ближче частота коливань тіла до власної частоти коливань системи «рідина—пружний елемент», тим істотніший вплив рідинного наповнення в загальному балансі сил. Як бачимо з рис. 3.7, при збільшенні параметра натягу  $T$  резонансні частоти  $p$  кінематичного збудження резервуара збільшуються до відповідних значень, а відносна величина приведеної маси при цьому має більш широкі відрізки помірної зміни.

На рис. 3.8 зображено відносні величини приведеної маси ріди-

ни в резервуарі з відкритою вільною поверхнею (суцільні лінії) і в резервуарі з пружним елементом на вільній поверхні рідини при значеннях  $T_1 = 0,1$  (штрихові лінії) та  $T_2 = 0,5$  (штрих-пунктирні лінії) в околі перших резонансних частот  $\sigma_1$  і  $\omega_1$  відповідно.

Рис. 3.8 показує, що при малих значеннях  $p$  зведена маса рідини в резервуарі з пружним елементом близька до маси нерухомої рідини (тобто рідина у своїй поведінці близька до твердого тіла маси  $m_w$ , рухливість рідини мінімальна).

### 3.3 Коливання пружних конструкцій, що несуть резервуари з рідиною

#### 3.3.1 Основні припущення та постановка задачі

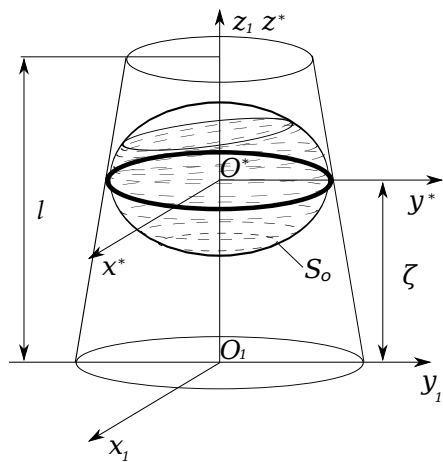


Рис. 3.9: Загальний вигляд розглядуваної механічної системи

Розглядається осесиметрична конструкція, що складається з вертикально розташованої тонкостінної оболонки обертання, до однієї з паралелей якої за допомогою жорсткого шпангоута прикріплено осесиметричний резервуар, частково заповнений ідеальною і нестисливою рідиною рис. 3.9.

Вважається, що стінки резервуара є абсолютно жорсткими. Типовими конструкціями такого роду є корпус рідинної ракети, а

також деякі промислові резервуари [48]. Динаміку таких споруд будемо розглядати в рамках лінійної теорії пружності та гідродинаміки. В силу цього припущення і осьової симетрії конструкції можна розглядати незалежно поперечні, поздовжні і крутильні коливання такої механічної системи.

При певних геометричних параметрах даної споруди тонкостінну оболонку в певному сенсі можна ототожнити з пружним стержнем [48].

В якості розрахункової схеми нижче використовується пружний стержень з підвішеним в деякому його перерізі жорстким резервуаром з рідиною. Далі розглядаються поперечні коливання конструкції на основі рівнянь згину стержнів без урахування поперечних зсувів та інерції повороту перерізів.

Для визначеності будемо вважати, що нижній край стержня жорстко закріплений, а верхній — вільний. Рух резервуара і рідини в ньому будемо розглядати в полі сил ваги з вектором прискорення  $\vec{g}$  ( $g = |\vec{g}|$ ). Введемо нерухому прямокутну систему координат  $O^*x^*y^*z^*$ , вісь  $O^*z^*$  якої збігається з віссю симетрії конструкції, паралельна вектору  $\vec{g}$  і має протилежний йому напрямок. Початок  $O^*$  цієї системи координат помістимо в площині кріплення резервуара до стержня. Зв'язану з резервуаром систему координат  $Oxyz$  розташуємо так, щоб в початковий момент часу  $t$  вона збігалася з системою координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Для описання коливань стержня введемо в розгляд ще одну систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  з початком, зв'язаним із закріпленим краєм стержня. Вісь  $O_1z_1$  сумістимо з віссю симетрії системи, а осі  $O_1x_1$  і  $O_1y_1$  розташовані паралельно до осей  $O^*x^*$  і  $O^*y^*$  відповідно.

Припустимо, що до резервуара прикладена зовнішня сумарна сила  $P_{O^*y^*}$ , що діє в напрямку осі  $O^*y^*$ , і сумарний момент  $M_{Ox}$  відносно осі  $Ox$ , системи зовнішніх сил. Будемо також вважати, що на стержень діє розподілене поперечне навантаження  $q(z_1, t)$  в напрямку осі  $O_1y_1$ . Крім того, стержень піддається дії стискальної сили, обумовленої вагою резервуара з рідиною і своєю власною вагою. Складемо рівняння зв'язаних коливань стержня і прикріпленого до нього резервуара з рідиною в перерізі стержня  $z_1 = \zeta$ .

Позначимо через  $w(z_1, t)$  прогин нейтральної лінії стержня в напрямку осі  $O_1y_1$  під впливом прикладених до нього зовнішніх

сил, а через  $l$  — довжину стержня. При виведенні рівнянь руху стержня в площині  $O_1y_1z_1$ , будемо користуватися принципом можливих переміщень, який в поєднанні з принципом Д'Аламбера може бути використаний і в динамічних задачах.

Надалі будемо розглядати стержень зі змінними (в загальному випадку) його площею поперечного перерізу  $S$ , екваторіальним моментом інерції  $J$  і модулем пружності при згині  $E$ . Густина матеріалу стержня  $\rho_1$  також може бути змінною по його довжині.

Розіб'ємо область  $G = [0, l]$  зміни координати  $z_1$  на дві підобласті  $G^{(1)} = [0, \zeta]$  і  $G^{(2)} = [\zeta, l]$  і позначимо прогини стержня в цих підобластях через  $w^{(1)}(z_1, t)$  і  $w^{(2)}(z_1, t)$  відповідно. Надалі верхній індекс при всіх функціях, які можна зустріти буде позначати область в якій ці функції визначені.

Для забезпечення гладкого спряження переміщень стержня в суміжній точці  $z = \zeta$  підобластей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$  повинні виконуватися кінематичні граничні умови:

$$\left[ w^{(1)} = w^{(2)} = w \right]_{z_1=\zeta}; \quad \left[ \frac{dw^{(1)}}{dz_1} = \frac{dw^{(2)}}{dz_1} = \frac{dw}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (3.171)$$

Введемо наступні позначення для перерізувальних сил і згинальних моментів стержня в перерізі  $z_1$ :

$$Q^{(i)} = \frac{d}{dz_1} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz_1^2} \right); \quad M^{(i)} = E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 w^{(i)}}{dz_1^2}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.172)$$

На краях стержня, в силу прийнятих умов їх кріплення, повинні виконуватися граничні умови

$$w_1|_{z_1=0} = 0, \quad \left. \frac{dw_1}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0, \quad (3.173)$$

$$Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = 0. \quad (3.174)$$

Якщо вихідна форма стержня є рівноважною, то згідно з принципом можливих переміщень має виконуватися рівність

$$\delta W = \delta A, \quad (3.175)$$

де

$$\delta W = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} dz_1$$

варіація потенціальної енергії деформації згину стержня,  $\delta A$  – робота всіх зовнішніх сил, прикладених до стержня і резервуара на їх можливих переміщеннях.

Згідно з працею [76] запишемо проєкції головного вектора сил і моментів на осі  $O^*y^*$  і  $Ox$  відповідно, які діють з боку рідини на резервуар при його збуреному русі. Якщо стержень здійснює поперечні коливання в площині  $O_1y_1z_1$ , то резервуар буде здійснювати поступальні переміщення  $u$  у напрямку осі  $O_1y_1$  і кутові повороти  $\vartheta$  відносно осі  $Ox$ . При цьому будемо мати

$$u = w(\zeta, t), \quad \vartheta = - \left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=\zeta}. \quad (3.176)$$

Відповідно до цього, потенціал зміщень рідини в зв'язаній з резервуаром системі координат  $Oxyz$  подамо в наступному вигляді [76]

$$\chi(x, y, z, t) = yw(\zeta, t) - \left. \frac{\partial w}{\partial z_1} \right|_{z_1=\zeta} \cdot \Psi(x, y, z) + \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n(t) \varphi_n(x, y, z). \quad (3.177)$$

Тут потенціал Стокса–Жуковського  $\Psi$  визначається з розв'язування неоднорідної крайової задачі Неймана виду:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma \cup S_0} &= y \cos(\nu, z) - z \cos(\nu, y), \end{aligned} \quad (3.178)$$

де  $Q$  – фіксована область, яка обмежена змочуваною поверхнею резервуара  $S_0$  і вільною поверхнею рідини  $\Sigma$  в її незбуреному стані;  $\vec{\nu}$  – орт зовнішньої нормалі до поверхні  $S_0$  або  $\Sigma$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

У поданні (3.177) узагальнені координати  $\beta_n(t)$  характеризують хвильові рухи рідини в резервуарі, а функції  $\varphi_n$  – власні



функції спектральної задачі з параметром  $\varkappa_n$  в граничній умові:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q, \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu}\Big|_{S_0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} - \varkappa_n\varphi_n\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} dS = 0. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Крайова задача (3.179) описує вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі. При цьому, квадрат частоти  $\sigma_n^2$  –  $n$ -ої форми власних коливань рідини зв'язаний з частотним параметром  $\varkappa_n$  співвідношенням

$$\sigma_n^2 = g\varkappa_n. \quad (3.180)$$

Гідродинамічні складові  $P_{O^*y^*}$  і  $M_{Ox}$  головних векторів сил і моментів, діючих на резервуар з боку рідини, при його збуреному русі, можна визначити на основі теорем про зміну кількості руху і моменту кількості руху рідини в області  $Q$ . Після ряду перетворень матимемо [76]:

$$\begin{aligned} P_{O^*y^*} &= -m_w \left( \ddot{w} + z_{c_w} \frac{\partial\ddot{w}}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n, \\ M_{Ox} &= \left( m_w z_{c_w} \ddot{w} + I^{(w)} \frac{\partial\ddot{w}}{\partial z_1} - g m_w z_{c_w} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} - \\ &- \sum_{n=1}^{n_0} (\ddot{\beta}_n \lambda_{0n} + g \beta_n \lambda_n), \end{aligned} \quad (3.181)$$

де  $z_{c_w}$ ,  $m_w$  – координата центру мас відносно точки  $O$  на осі  $Oz$  і маса затверділої рідини.

Гідродинамічні коефіцієнти у формулах (3.181) мають вигляд

$$\lambda_n = \rho \int_{\Sigma} y \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} dS, \quad \lambda_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \Psi \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} dS, \quad I^{(w)} = \rho \int_{\Sigma \cup S_0} \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial\nu} dS.$$

Тут  $\rho$  – густина рідини.

Обчислимо роботу інерційних, масових, зовнішніх і гідродинамічних сил, що діють на корпус резервуара на його можливих

переміщеннях, а також роботу сил інерції, розподіленого навантаження  $q^{(i)}(z_1, t)$  і стискальної сили  $N^{(i)}(z_1)$  ( $i = 1, 2$ ) на можливих переміщеннях стержня з урахуванням граничних умов (3.171). Тоді варіаційне рівняння (3.175) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - N^{(i)}(z_1) \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \right. \\ & \left. + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \ddot{w}^{(i)} \delta w^{(i)} - q^{(i)}(z_1, t) \delta w^{(i)} \right] dz_1 + \left[ I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \right. \\ & \left. + m \ddot{w} \delta w + m z_c \left( \ddot{w} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} \delta w \right) + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \left( \lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - \right. \\ & \left. - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - P_{O^* y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Тут  $I = I^{(0)} + I^{(w)}$  – момент інерції корпусу резервуара і рухомої рідини відносно осі  $Ox$ ;  $m = m^{(0)} + m_w$  – загальна маса резервуара і рідини;  $z_c = (m^{(0)} z_{c_0} + m_w z_{c_w}) / (m^{(0)} + m_w)$  – координата центру мас на осі  $Oz$  системи «резервуар–рідина».

За допомогою інтегрування частинами перетворимо інтеграли, що входять в рівняння (3.182) і містять похідні від варіації прогину стержня. При цьому варіаційне рівняння (3.182) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} [\mathcal{J}^{(i)}(w^{(i)}) - q^{(i)}(z_1, t)] \delta w^{(i)} dz_1 + \\ & + \left[ M^{(2)} \frac{\partial \delta w^{(2)}}{\partial z_1} - Q_*^{(2)} \delta w^{(2)} \right]_{z_1=l} + \\ & + \left[ (M^{(1)} - M^{(2)}) \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + (Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}) \delta w + \right. \\ & \left. + \left( m \ddot{w} + m z_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^* y^*} \right) \delta w + \right. \\ & \left. + \left( I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + m z_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \left. \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0, \quad (3.183)$$

де

$$\mathfrak{J}^{(i)}(w^{(i)}) = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \right) + \rho_1^{(i)} S^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2};$$

$$Q_*^{(i)} = Q^{(i)} + N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}.$$

Враховуючи довільність варіацій  $\delta w^{(i)}$  в областях  $G^{(i)}$ , а також довільність варіацій  $\delta w$  і  $\frac{\partial \delta w}{\partial z_1}$  при  $z_1 = l$  і  $z_1 = \zeta$ , отримаємо наступну крайову задачу відносно прогину стержня

$$\mathfrak{J}^{(i)}(w^{(i)}) = q^{(i)}(z_1, t) \quad \text{при} \quad z_1 \in G^{(i)},$$

$$M^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \quad Q^{(2)}|_{z_1=l} = 0,$$

$$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} = - \left[ m\ddot{w} + m z_c \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_n - P_{O^*y^*} \right]_{z_1=\zeta},$$

$$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} = - \left[ I \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} + m z_c \ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0} \ddot{\beta}_n \lambda_{0n} - g m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} - g \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n + M_{Ox} \right]_{z_1=\zeta}, \quad [w^{(1)} = w^{(2)} = w]_{z_1=\zeta},$$

$$\left[ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta}, \quad w^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0. \quad (3.184)$$

Рівняння (3.184) в областях  $G^{(i)}$  відносно функцій  $w^{(i)}(z_1, t)$  є відомими рівняннями згинальних коливань стисненого осью силою  $N^{(i)}(z_1)$  стержня, до якого прикладене розподілене навантаження  $q^{(i)}(z_1, t)$ .

Система рівнянь (3.184) не є замкнутою, оскільки вона включає в себе заздалегідь невідомі узагальнені координати  $\beta_n(t)$ . Для потенціалу зміщень рідини  $\chi(x, y, z, t)$  залишилася невиконаною динамічна гранична умова на вільній поверхні рідини [76].

Підставивши вираз (3.177) в умову на вільній поверхні рідини, застосуємо до отриманого рівняння процедуру Бубнова—Гальоркіна. При цьому будемо мати наступну систему диференціальних рівнянь, що зв'язує узагальнені координати  $\beta_n(t)$  з прогином стержня і його кутом повороту в перерізі  $z_1 = \zeta$ :

$$\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \left[ \lambda_n \ddot{w} - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - g \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0 \quad (3.185)$$

$(n = 1, 2, \dots, n_0),$

де

$$\mu_n = \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS.$$

Рівняння (3.184) і (3.185) разом з додатково заданими початковими умовами, що полягають в розподілі переміщень і швидкостей рідини на її вільній поверхні і по довжині стержня при  $t = 0$ , повністю визначають взаємозв'язані коливання системи «стержень—резервуар—рідина» під дією прикладених до неї зовнішніх сил.

Введемо наступні безрозмірні величини, які позначено рискою зверху:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= R_0 \bar{\varphi}_n, \quad \Psi = R_0^2 \bar{\Psi}, \quad t^2 = \frac{R_0}{g} \bar{t}^2, \quad \lambda_n = \rho R_0^3 \bar{\lambda}_n, \quad \lambda_{0n} = \rho R_0^4 \bar{\lambda}_{0n}, \\ \sigma_n^2 &= \frac{g}{R_0} \bar{\sigma}_n^2, \quad \mu_n = \rho R_0^3 \bar{\mu}_n, \quad I = \rho R_0^5 \bar{I}, \quad w = R_0 \bar{w}, \quad \beta_n = R_0 \bar{\beta}_n, \\ E^{(i)} J^{(i)} &= E_0 J_0 \bar{E}^{(i)} \bar{J}^{(i)}, \quad \bar{D} = \frac{\rho R_0^5 g}{E_0 J_0}, \quad m = \rho R_0^3 \bar{m}, \quad N = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{N}, \\ q &= \frac{E_0 J_0}{R_0^3} \bar{q}, \quad P_{O^*y^*} = \frac{E_0 J_0}{R_0^2} \bar{P}_{O^*y^*}, \quad M_{Ox} = \frac{E_0 J_0}{R_0} \bar{M}_{Ox}, \end{aligned} \quad (3.186)$$

де  $E_0 J_0$  — згинальна жорсткість стержня в його характерному перерізі;  $R_0$  — характерний лінійний розмір розглядуваної механічної системи.

Тоді безрозмірне варіаційне рівняння (3.182) і система рівнянь (3.185) набудуть вигляду (риски над безрозмірними величинами

надалі опускаємо):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2} \frac{\partial^2 \delta w^{(i)}}{\partial z_1^2} - N^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w^{(i)}}{\partial z_1} + \right. \\
& \left. + \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \delta w^{(i)} - q^{(i)} \delta w^{(i)} \right] dz_1 + \\
& + \left\{ D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + m z_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} + \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} \delta w \right) + \right. \right. \\
& + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} \left( \lambda_n \delta w - \lambda_{0n} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right) - m z_c \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} - \\
& \left. \left. - \sum_{n=1}^{n_0} \beta_n \lambda_n \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right] - P_{O^* y^*} \delta w + M_{Ox} \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0,
\end{aligned} \tag{3.187}$$

$$\mu_n \left( \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} + \sigma_n^2 \beta_n \right) + \left( \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \lambda_{0n} \frac{\partial^3 w}{\partial z_1 \partial t^2} - \lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1} \right)_{z_1=\zeta} = 0. \tag{3.188}$$

Коефіцієнти цих рівнянь визначаються за допомогою квадратур, якщо відомо розв'язок однорідної спектральної задачі з параметром у граничній умові (3.179) і неоднорідної крайової задачі Неймана (3.178) для потенціалу Стокса—Жуковського  $\Psi$ . Розробці методів побудови розглядуваних задач для різних форм резервуарів, у тому числі резервуарів, що містять конструктивні пристрої у вигляді ребер перегородок, присвячено монографії [47, 68, 87].

### 3.3.2 Варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання системи

Отримані рівняння дають змогу сформулювати математичну постановку задачі, яка описує вільні коливання розглядуваної механічної системи з частотою  $\omega$ . Для цього покладемо

$$\begin{aligned}
q^{(k)}(z_1, t) &= P_{O^* y^*} = M_{Ox} = 0, \\
w^{(k)}(z_1, t) &= \exp^{i\omega t} \eta^{(k)}(z_1), \quad \beta_n(t) = \exp^{i\omega t} c_n \quad (i = \sqrt{-1}).
\end{aligned} \tag{3.189}$$

Перейшовши до безрозмірних величин, отримаємо наступну крайову задачу відносно функцій  $\eta^{(i)}(z_1)$ :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_1^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \frac{d^2}{dz_1^2} \left( E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \right) + \frac{d}{dz_1} \left( N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \right) - \\
&- \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} = 0, \quad z_1 \in G^{(i)}, \quad M^{(2)}|_{z_1=l} = Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \\
[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} &= \omega^2 D \left[ m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}, \\
[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} &= \omega^2 D \left[ I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right]_{z_1=\zeta} + \\
&+ Dmz_c \frac{d\eta}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} + D \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n, \quad [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \\
\left[ \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}, & \quad \eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=0} = 0.
\end{aligned} \tag{3.190}$$

Еквівалентне варіаційне формулювання задачі (3.190) можна одержати з варіаційного рівняння (3.182). Після відділення координати часу і переходу до безрозмірних величин варіаційне рівняння для задачі (3.190) можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta F_1 &= \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \right. \\
&\left. - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} D S^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + p(\eta) \delta \eta + q(\eta) \frac{d\delta \eta}{dz_1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.191}$$

Тут

$$\begin{aligned}
p(\eta) &= -\omega^2 D \left[ m\eta + mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right]_{z_1=\zeta}; \\
q(\eta) &= \left[ -\omega^2 D \left( I \frac{d\eta}{dz_1} + mz_c \eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_{0n} \right) - \right. \\
&\left. - D \left( mz_c \frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n \lambda_n \right) \right]_{z_1=\zeta}.
\end{aligned} \tag{3.192}$$

Варіаційне рівняння (3.191) має розв'язуватися на класі функцій, що задовольняють граничні умови

$$\eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} = 0, \quad (3.193)$$

$$[\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta}, \quad \left[ \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}. \quad (3.194)$$

Решта граничних умов у формулах (3.190) є природними умовами для функціонала  $F_1$ .

До рівнянь (3.190) і (3.191) слід додати ще рівняння, що випливають з динамічної граничної умови на вільній поверхні рідини (3.185):

$$\mu_n(\sigma_n^2 - \omega^2)c_n + \left[ \omega^2 \left( \lambda_{0n} \frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n \eta \right) - \lambda_n \frac{d\eta}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0, \quad (3.195)$$

$(n = 1, 2, \dots, n_0)$ .

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань пружної конструкції, що несе резервуар з рідиною, зведено до розв'язування спектральної задачі (3.190), (3.195), де частотний параметр  $\omega$  входить як у рівняння, так і в граничні умови. Для випадку, коли масові та жорсткісні характеристики стержня є кусково постійними функціями, для розв'язування такої спектральної задачі широке застосування отримав чисельний метод початкових параметрів [48, 61]. Відповідно до цього методу розв'язки рівняння (3.191) для кожної з ділянок з постійними пружно-масовими характеристиками представляються у вигляді функцій Крилова. При використанні цього методу послідовно виражають сталі розв'язку для кожної ділянки через сталі розв'язку для попередньої ділянки. При цьому вдається побудувати матрицю переходу, яка пов'язує вектор розв'язків, що відповідає перерізу стержня  $z_1 = l$ , з вектором розв'язків, що відповідає перерізу  $z_1 = 0$ . Рівняння для частот отримують, задовольнивши крайові умови на останній ділянці. Оскільки це рівняння являє собою досить складне трансцендентне рівняння відносно параметра  $\omega$ , то знаходження його розв'язку можливе лише в разі використання чисельних методів типу методу послідовних наближень.

В силу того, що перерізуювальні сили і згинальні моменти стержня в точці  $z = \zeta$  мають розриви першого роду, то для побудови наближеного розв'язку сформульованої спектральної задачі зі змінними коефіцієнтами будемо використовувати її еквівалентне варіаційне формулювання в поєднанні з декомпозицією області визначення шуканих функцій на дві регулярні підобласті, в яких розв'язки неперервні і диференційовні. Такий підхід дозволить отримати поточкову збіжність для силових факторів стержня у введених підобластях і на їх границях.

З алгебраїчних рівнянь (3.195) можна знайти явні вирази для коефіцієнтів  $c_n$ , що залежать від прогину стержня і його кута повороту в перерізі  $z_1 = \zeta$ . Після підстановки цих виразів в варіаційне рівняння (3.191) параметр  $\omega$  буде нелінійно входити в це рівняння, що в подальшому ускладнює алгоритм знаходження власних частот системи. Тому рівняння (3.195) будемо розглядати як додаткові співвідношення для знаходження розв'язку варіаційного рівняння (3.191).

Отже, розв'язування задачі про власні коливання розглядуваної механічної системи зведено до розв'язування варіаційного рівняння (3.191) на класі функцій, що задовольняють головні граничні умови (3.193) і (3.194). У цьому випадку інші граничні умови для варіаційної задачі (3.191) будуть природними граничними умовами. При використанні методу Рітца основні труднощі цієї задачі пов'язані з таким вибором апроксимувальних виразів для переміщень стержня, які забезпечували б неперервність не тільки самих переміщень  $\eta^{(i)}$ , але і їх перших похідних. У зв'язку з цим виникає проблема про побудову такого варіаційного рівняння, для якого умови спряження (3.194) були б природними умовами.

Згідно з розд. 2, якщо розглядати граничні умови (3.194) як додаткові обмеження на клас допустимих функцій для варіаційної задачі (3.191), то можна скористатися підходом Лагранжа для побудови нового функціонала  $F$ , для якого умови (3.194) будуть природними граничними умовами. У зв'язку з цим подамо варіа-



ційне рівняння для функціонала  $F$  в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \right. \\ & \left. - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \frac{1}{2} \left[ p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \left[ \alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \alpha_2 \left( \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Тут  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  так звані множники Лагранжа, що підлягають визначенню в подальшому.

Знаходження розв'язку варіаційної задачі (3.196) відносно функцій  $\eta^{(i)}$ ,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  повинно здійснюватися на класі функцій, що задовольняють лише головні граничні умови (3.193).

Покажемо, що множники  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  можна виразити через розв'язки  $\eta^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) та їх похідні в точці  $z_1 = \zeta$ . Це дає можливість отримати узагальнене варіаційне рівняння, коли  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  у рівнянні (3.196) замінюються тотожно рівними їм виразами, що дозволить істотно спростити алгоритм розв'язування вихідної спектральної задачі.

Застосовуючи процедуру інтегрування частинами, вираз для  $\delta F$  можна подати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta F = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \mathfrak{I}_1^{(i)}(\eta^{(i)}) \delta \eta^{(i)} dz_1 + \delta \alpha_1 [\eta^{(2)} - \eta^{(1)}]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \alpha_2 \left[ \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \left[ M^{(2)}(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=l} + \\ & + \left[ \left( \frac{1}{2} p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_1 \right) \delta \eta^{(1)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2} p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) + \alpha_1 \right) \delta \eta^{(2)} + \\
& + \left( \frac{1}{2} q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) - \alpha_2 \right) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + \\
& + \left. \left( \frac{1}{2} q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) + \alpha_2 \right) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.197)
\end{aligned}$$

Варіаційне рівняння (3.197) має виконуватися для будь-яких варіацій  $\delta \eta^{(i)}$ ,  $\delta \alpha_1$  і  $\delta \alpha_2$ . Звідси випливає, що рівняннями Ейлера і природними граничними умовами для функціонала  $F$  є рівняння і граничні умови спектральної задачі (3.190). Крім того, з рівняння (3.197) випливають співвідношення:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left[ \frac{1}{2} p(\eta^{(1)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
\alpha_1 &= - \left[ \frac{1}{2} p(\eta^{(2)}) + Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
\alpha_2 &= \left[ \frac{1}{2} q(\eta^{(1)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
\alpha_2 &= - \left[ \frac{1}{2} q(\eta^{(2)}) - M^{(2)}(\eta^{(2)}) \right]_{z_1=\zeta}.
\end{aligned} \quad (3.198)$$

Співвідношення (3.198) дозволяють визначити відповідні вирази для множників Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{p(\eta^{(1)}) - p(\eta^{(2)})}{2} - Q_*^{(2)}(\eta^{(2)}) - Q_*^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{q(\eta^{(1)}) - q(\eta^{(2)})}{2} + M^{(2)}(\eta^{(2)}) + M^{(1)}(\eta^{(1)}) \right]_{z_1=\zeta}.
\end{aligned} \quad (3.199)$$

Підставивши вирази (3.199) у варіаційне рівняння (3.197), ми уникнемо штучного підвищення кількості невідомих задачі за рахунок введених множників Лагранжа.

Отримані результати дозволяють перейти тепер до побудови наближеного розв'язку розглядуваної спектральної задачі, використовуючи при цьому метод Рітца. У зв'язку з цим подамо шукані функції  $\eta^{(i)}(z_1)$  у вигляді наступних відрізків узагальнених

рядів:

$$\eta^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \quad \eta^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1), \quad (3.200)$$

де

$$V_j^{(1)}(z_1) = z_1^2 P_j \left( \frac{2z}{\zeta} - 1 \right); \quad V_j^{(2)}(z_1) = P_j \left( \frac{2z}{l-\zeta} - \frac{l+\zeta}{l-\zeta} \right).$$

Тут  $P_j$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра з аргументами, які перетворюють інтервали  $[0, \zeta]$  і  $[\zeta, l]$  на інтервал  $[-1, 1]$ .

Система базисних функцій  $\{V_j^{(1)}(z_1)\}$  підпорядкована кінематичним граничним умовам задачі (3.193).

Підставимо розклади (3.200) у варіаційне рівняння (3.196). Тоді функціонал  $F(\eta)$  залежатиме від  $2m_0 + n_0$  змінних  $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$ . З умов (3.195) і (3.196) можна отримати систему алгебраїчних рівнянь такого вигляду

$$(A - \omega^2 B)\vec{X} = 0, \quad (3.201)$$

де вектор-стовпець  $\vec{X}$  має компоненти  $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$ .

При цьому елементи  $\alpha_{ij}$  матриці  $A$  визначаються за такими формулами:

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\zeta} \left[ E^{(1)} J^{(1)} \frac{d^2 V_j^{(1)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(1)}}{dz_1^2} - N^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right] dz_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ Q_i^{(1)} V_j^{(1)} + Q_j^{(1)} V_i^{(1)} - M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} - M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i,j+m_0} & = \frac{1}{2} \left[ Q_j^{(2)} V_i^{(1)} - Q_i^{(1)} V_j^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + M_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} - M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i,j+2m_0} & = -\frac{1}{2} D\lambda_j \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\alpha_{i+m_0,j} & = \frac{1}{2} \left[ Q_i^{(2)} V_j^{(1)} - Q_j^{(1)} V_i^{(2)} - Dmz_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + M_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+m_0,j+m_0} & = \int_{\zeta}^l E^{(2)} J^{(2)} \frac{d^2 V_j^{(2)}}{dz_1^2} \frac{d^2 V_i^{(2)}}{dz_1^2} - N^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big] dz_1 + \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} \left[ M_i^{(2)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + M_j^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} - Q_i^{(2)} V_j^{(2)} - Q_j^{(2)} V_i^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} \\
& \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+m_0,j+2m_0} & = -\frac{1}{2} D\lambda_j \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0), \\
\alpha_{i+2m_0,j} & = -\frac{1}{2} D\lambda_i \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \quad (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+2m_0,j+m_0} & = -\frac{1}{2} D\lambda_i \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \Big|_{z_1=\zeta} \\
& \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0), \\
\alpha_{i+2m_0,j+2m_0} & = \delta_{ij} D\mu_i \sigma_i^2, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0). \quad (3.202)
\end{aligned}$$

У свою чергу, ненульові елементи  $\beta_{ij}$  матриці  $B$  обчислюються за формулами

$$\beta_{i,j} = D \int_0^{\zeta} \frac{\rho_1^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} V_j^{(1)} dz \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i,j+m_0} = \frac{1}{4} \left[ P_i^{(1)} V_j^{(2)} + P_j^{(2)} V_i^{(1)} + R_i^{(1)} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} + R_j^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i,j+2m_0} = \frac{1}{2} D \left[ \lambda_j V_i^{(1)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j} = \frac{1}{4} \left[ P_i^{(2)} V_j^{(1)} + P_j^{(1)} V_i^{(2)} + R_i^{(2)} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} + R_j^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j+m_0} = D \int_{\zeta}^l \frac{\rho_1^{(2)}}{\rho} S^{(2)} V_i^{(2)} V_j^{(2)} dz \quad (i, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+m_0,j+2m_0} = \frac{1}{2} D \left[ \lambda_j V_i^{(2)} - \lambda_{0j} \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m_0, j = 1, 2, \dots, n_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j} = \frac{1}{2} D \left[ \lambda_i V_j^{(1)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(1)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j+m_0} = \frac{1}{2} D \left[ \lambda_i V_j^{(2)} - \lambda_{0i} \frac{dV_j^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_0, j = 1, 2, \dots, m_0),$$

$$\beta_{i+2m_0,j+2m_0} = \delta_{ij} D \mu_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0). \quad (3.203)$$

У формулах (3.202) і (3.203)  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, а решта позначень мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} Q_i^{(k)} &= Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}), \quad M_i^{(k)} = M^{(k)}(V_i^{(k)}), \\ P_i^{(k)} &= Dm \left( V_i^{(k)} + z_c \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right), \quad R_i^{(k)} = D \left( mz_c V_i^{(k)} + I \frac{dV_i^{(k)}}{dz_1} \right) \\ &\quad (k = 1, 2, i = 1, 2, \dots, m_0). \end{aligned}$$

Перші  $2m_0$  рівнянь алгебраїчної системи (3.201) були отримані з варіаційного рівняння (3.196), а останні  $n_0$  рівнянь — з рівнянь (3.195). Попередньо помноживши їх на коефіцієнт  $D$  і поклавши в них  $\eta = (\eta^{(1)} + \eta^{(2)})/2$  при  $z_1 = \zeta$ . З наведених виразів для  $\alpha_{ij}$  і  $\beta_{ij}$  можна легко побачити, що матриці  $A$  і  $B$  є симетричними.

Таким чином, визначення частот і форм власних коливань розглядуваної механічної системи звелось до розв'язування узагальненої алгебраїчної задачі (3.201).

### 3.3.3 Вимушені коливання конструкції при дії на неї довільного навантаження

Нагадаємо, що вище були отримані рівняння (3.184) і (3.185), які разом з додатково заданими початковими умовами, що полягають у розподілі переміщень і швидкостей рідини на її вільній поверхні і по довжині стержня при  $t = 0$ , повністю визначають взаємопов'язані коливання системи «стержень—резервуар—рідина» під дією прикладених до неї зовнішніх сил.

Для ефективного розрахунку коливань розглядуваної механічної системи під дією прикладених до неї зосереджених і розподілених навантажень, граничну задачу для рівнянь у частинних похідних (3.184) і (3.185) доцільно звести до системи звичайних диференціальних рівнянь, незалежною змінною в яких є час  $t$ .

Зведення рівнянь (3.184) і (3.185), з урахуванням відповідних граничних умов, до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь можна здійснити за допомогою методу Бубнова—Гальоркіна. Для реалізації цього методу необхідно мати у своєму розпорядженні систему лінійно-незалежних функцій, що задовольняє граничні умови задачі і умову повноти. Ця процеду-

ра не є однозначною і в істотній мірі залежить від вибору узагальнених координат, що характеризують в сукупності збурений рух конструкції. У працях [48, 61] в якості базисних функцій для прогинів стержня вибиралися власні функції спектральної задачі, яка описує вільні коливання стержня з рухомим резервуаром із затверділою рідиною. У свою чергу, для опису хвильових рухів рідини в рухомому резервуарі були використані власні функції спектральної задачі про вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі. В результаті, вихідна задача була зведена до системи взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат, що характеризують збурений рух стержня та хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі.

З практичної точки зору необхідно прагнути до такої системи звичайних диференціальних рівнянь, яка мала б найбільш простий вигляд і невелику розмірність. Як буде показано нижче, цим вимогам відповідає система, де для апроксимації шуканих розв'язків в якості базисних функцій обрані власні функції спектральної задачі, яка описує вільні взаємозв'язані коливання стержня та рідини в прикріпленому до нього резервуарі.

Встановимо умови ортогональності власних функцій однорідної крайової задачі (3.190). Для цього підставимо в ці рівняння  $\eta = \eta_i(z_1)$ ,  $\omega = \omega_i$  і помножимо їх на  $\eta_j(z_1)$ , де  $i$  і  $j$  приймають довільні, нерівні між собою, цілочисельні значення, і проінтегруємо отриманий результат від нуля до  $l$ . Після застосування процедури інтегрування частинами з урахуванням граничних умов (3.190), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta_i}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j}{dz_1^2} - N \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \omega_i^2 \frac{\rho_1}{\rho} DS \eta_i \eta_j \right] dz_1 - \\ & - D \left\{ \omega_i^2 \left[ m \eta_i \eta_j + m z_c \left( \frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} + \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left( \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right] + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.204) \end{aligned}$$

Поміняємо місцями в цьому рівнянні індекси  $i$  і  $j$ , потім відніmemo одержане рівняння від рівняння (3.204). При цьому будемо мати

$$\begin{aligned}
& (\omega_j^2 - \omega_i^2) \left\{ \int_0^l \frac{\rho_1}{\rho} S \eta_i \eta_j dz_1 + \left[ m \eta_i \eta_j + \right. \right. \\
& \left. \left. + m z_c \left( \frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \left[ \omega_j^2 \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left[ \omega_i^2 \left( \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.205)
\end{aligned}$$

Для подальшого перетворення рівняння (3.205) скористаємося зв'язком між  $c_n^{(i)}$  і  $\eta_i$  отриманим з рівняння (3.195):

$$\begin{aligned}
\mu_n (\sigma_n^2 - \omega_i^2) c_n^{(i)} &= - \left[ \omega_i^2 \left( \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} - \lambda_n \eta_i \right) - \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} \quad (3.206) \\
(n &= 1, 2, \dots, n_0).
\end{aligned}$$

Беручи до уваги рівняння (3.206), після нескладних перетворень можна показати, що

$$\begin{aligned}
& \left[ \omega_j^2 \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = \\
& = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right)_{z_1=\zeta} + c_n^{(i)} (\mu_n \sigma_n^2 - \mu_n \omega_i^2). \quad (3.207)
\end{aligned}$$

Помінявши в цьому рівнянні місцями індекси  $i$  і  $j$ , отримаємо ще одне співвідношення, яке необхідне для подальших перетворень виразу (3.205). З урахуванням цих співвідношень і того, що  $\omega_j \neq \omega_i$  при  $i \neq j$ , з рівняння (3.205) отримуємо першу умову



ортогональності для власних функцій задачі (3.190), (3.195):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} S^{(k)} \eta_i^{(k)} \eta_j^{(k)} dz_1 + \\
& + \left[ m \eta_i \eta_j + m z_c \left( \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i + \frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j \right) + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + c_n^{(j)} \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) + \right. \\
& \left. + c_n^{(i)} \left( \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.208)
\end{aligned}$$

Другу умову ортогональності отримаємо з рівняння (3.190) при  $\eta = \eta_i$ ,  $\omega = \omega_i$ . Помножимо отримане рівняння на  $\omega_j^2 \eta_j$  та інтегруємо його в межах від нуля до  $l$  з використанням формули інтегрування частинами та граничних умов крайової задачі (3.190). При цьому отримуємо

$$\begin{aligned}
& \omega_j^2 \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[ E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - \right. \\
& - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} - \omega_i^2 \omega_j^2 D \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} S^{(k)} \eta_i^{(k)} \eta_j^{(k)} \left. \right] dz_1 - \\
& - \omega_j^2 D \left\{ \omega_i^2 \left[ m \eta_i \eta_j + m z_c \left( \frac{d\eta_i}{dz_1} \eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1} \eta_i \right) + \right. \right. \\
& + I \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \left. \right] + \omega_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left[ \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right] + \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.209)
\end{aligned}$$

Поміняємо місцями в цьому рівнянні індекси  $i$  і  $j$ , потім віднімемо одержане рівняння від рівняння (3.209). При цьому будемо

мати

$$\begin{aligned}
& (\omega_j^2 - \omega_i^2) \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[ E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right] dz_1 - \\
& - D \left\{ z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} (\omega_j^2 - \omega_i^2) + \right. \\
& + \omega_i^2 \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \left( \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) + \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} - \\
& \left. - \omega_i^2 \omega_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) - \omega_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} \right\}_{z_1=\zeta} = 0.
\end{aligned} \tag{3.210}$$

Перетворимо рівняння (3.210) з урахуванням співвідношень (3.206). Тоді беручи до уваги, що  $\omega_j \neq \omega_i$  при  $i \neq j$ , другу умову ортогональності можна подати в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left[ E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right] dz_1 - \\
& - D \left\{ z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left( c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} + c_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right\}_{z_1=\zeta} = 0, \quad (i \neq j). \tag{3.211}
\end{aligned}$$

Нехай до розглядуваної механічної системи прикладені описані вище зовнішні навантаження. Виникаючі при цьому поперечні переміщення стержня  $w(z_1, t)$  в площині  $O_1 y_1 z_1$  і відповідні їм узагальнені координати  $\beta_n(t)$ , що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі, подамо у вигляді наступних розкладів:

$$w(z_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \eta_i(z_1), \quad \beta_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) c_n^{(i)}, \tag{3.212}$$

де  $q_i(t)$  — узагальнені координати системи, що характеризують її вимушені коливання.

Підставимо розклади (3.212) у систему диференціальних рівнянь (3.195). В результаті отримаємо наступні рівняння:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \ddot{q}_i \left( \mu_n c_n^{(i)} + \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) - q_i \left( \lambda_n \frac{d\eta_i}{dz_1} - \mu_n \sigma_n^2 c_n^{(i)} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0. \quad (3.213)$$

Решту диференціальних рівнянь отримаємо з безрозмірного варіаційного рівняння (3.187), підставивши в нього розклади (3.212) і поклавши  $\delta w = \eta_j(z_1)$ . З урахуванням першої умови ортогональності (3.208) отримані рівняння можна перетворити до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} q_i \psi_{ij} + \ddot{q}_j a_j - \sum_{i=1}^{\infty} D \ddot{q}_i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + \right. \\ & \quad \left. + c_n^{(j)} \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} - \\ & - D \sum_{i=1}^{\infty} q_i \left[ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \lambda_n \frac{d\eta_j}{dz_1} + m z_c \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} = Q_j(t) \quad (3.214) \\ & \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} &= \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \left( E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2 \eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right) dz_1; \\ a_j &= D \left\{ \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} (\eta_j^{(k)})^2 S^{(k)} dz_1 + \right. \\ & \quad \left. + \left[ m \eta_j^2 + 2m z_c \eta_j \frac{d\eta_j}{dz_1} + I \left( \frac{d\eta_j}{dz_1} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (c_n^{(j)})^2 \mu_n + 2c_n^{(j)} \left( \lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right) \Big|_{z_1=\zeta} \Big\}; \\
Q_j(t) = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} q^{(k)} \eta_j^{(k)} dz_1 + \left[ P_{O^*y^*} \eta_j - M_{Ox} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}.
\end{aligned}$$

Якщо скористаємося другою умовою ортогональності, формулою (3.204) при  $i = j$ , співвідношенням (3.205) для власних форм коливань системи, то для першої суми в лівій частині рівнянь (3.214) після ряду перетворень можна встановити наступний вираз:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} q_i \psi_{ij} = & q_j a_j \omega_j^2 + \sum_{i=1}^{\infty} D q_i \left[ z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - \lambda_n c_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} \quad (3.215)
\end{aligned}$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (3.214) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 \right) \right]_{z_1=\zeta} - \\
- \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + c_n^{(j)} \left( \lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right) \right]_{z_1=\zeta} = Q_j(t). \quad (3.216)
\end{aligned}$$

Скориставшись рівняннями (3.213), рівняння (3.216) приймають наступну форму:

$$a_j (\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) = Q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.217)$$

Таким чином, отримані рівняння руху розглядуваної механічної системи під впливом прикладених до неї зосереджених і розподілених навантажень з використанням розкладу за власними функціями спектральної задачі, яка описує спільні вільні коливання стержня і рідини в підвішеному до нього резервуарі, дозволило звести вихідну задачу (3.190), (3.195) до інтегрування нескінченної системи не зв'язаних між собою диференціальних рівнянь

найбільш простого виду (3.217). Коефіцієнти цієї системи рівнянь виражаються через частоти і форми власних коливань даної конструкції, а також через гідродинамічні коефіцієнти  $\mu_n$ ,  $\sigma_n^2$ ,  $I^{(w)}$ ,  $\lambda_n$  і  $\lambda_{0n}$ . Отже, перед розв'язуванням задачі про збурений рух конструкції необхідно попередньо розв'язати спектральну задачу про власні коливання системи та визначити вищевказані гідродинамічні коефіцієнти.

### 3.3.4 Вимушені коливання системи при гармонічному збуренні основи стержня

Вище передбачалося, що вимушені коливання розглядуваної механічної системи були викликані прикладеними до неї заданими силами і моментами, що змінюються в часі. На практиці також зустрічаються випадки, коли коливання виникають унаслідок заданого руху деяких точок осі або обертання певних поперечних перерізів стержня. Розглянемо випадок, коли основа стержня, жорстко закріплена на деякій рухомій опорі, яка в свою чергу здійснює задані гармонічні коливання в площині  $O_1 y_1 z_1$  за наступним законом

$$w(0, t) = H \sin pt, \quad H \ll 1. \quad (3.218)$$

Потрібно визначити рух стержня і рідини в резервуарі, викликані горизонтальними переміщеннями основи стержня з амплітудою  $H$  і частотою  $p$ . Доцільність подання руху основи стержня у вигляді гармонічних коливань (3.218) впливає з того, що будь-який рух основи може бути подано у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, оскільки будь-яка неперервна функція  $w(0, t)$  на кінцевому інтервалі часу може бути замінена відповідним рядом Фур'є.

Далі будемо розглядати усталені вимушені коливання механічної системи під дією кінематичного збурення (3.218), масових і відновлюючих сил. У цьому випадку переміщення стержня  $w(z_1, t)$  у площині  $O_1 y_1 z_1$  та узагальнені координати  $\beta_n(t)$ , що характеризують хвильові рухи рідини в рухомому резервуарі, можна представити в наступному вигляді:

$$w(z_1, t) = \eta(z_1) \sin pt, \quad \beta_n(t) = c_n \sin pt. \quad (3.219)$$

Математичне формулювання задачі для визначення функції  $\eta(z_1)$  і чисел  $c_n$  можна отримати з рівнянь (3.184) і (3.185). При цьому її можна подати у вигляді (3.190) і (3.195), де  $\omega^2$  слід замінити на  $p^2$ . Крім того, граничні умови жорсткого кріплення торця стержня в (3.190) слід замінити на умови

$$\eta(0) = H, \quad \left. \frac{d\eta}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0.$$

Для побудови наближеного аналітичного розв'язку сформульованої неоднорідної крайової задачі використовуємо її варіаційне формулювання та метод Рітца.

Розв'язок варіаційного рівняння

$$\begin{aligned} \delta F(\eta^{(i)}, \alpha_1, \alpha_2) = & \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} \left[ E^{(i)} J^{(i)} \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dz_1^2} \frac{d^2 \delta \eta^{(i)}}{dz_1^2} - \right. \\ & \left. - N^{(i)} \frac{d\eta^{(i)}}{dz_1} \frac{d\delta \eta^{(i)}}{dz_1} - \omega^2 \frac{\rho_1^{(i)}}{\rho} DS^{(i)} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] dz_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left[ p(\eta^{(1)}) \delta \eta^{(1)} + p(\eta^{(2)}) \delta \eta^{(2)} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ q(\eta^{(1)}) \frac{d\delta \eta^{(1)}}{dz_1} + q(\eta^{(2)}) \frac{d\delta \eta^{(2)}}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta} + \\ & + \delta \left[ \alpha_1 (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) + \alpha_2 \left( \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} - \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta} = 0 \quad (3.220) \end{aligned}$$

після підстановки в нього явних виразів для множників Лагранжа  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  і заміни  $\omega^2$  на  $p^2$  слід розшукувати на класі функцій, підпорядкованих лише головним граничним умовами задачі:

$$\eta^{(1)}(0) = H, \quad \left. \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} \right|_{z_1=0} = 0.$$

У зв'язку з цим подамо шукані функції  $\eta^{(1)}(z_1)$  і  $\eta^{(2)}(z_1)$  в на-

ступному вигляді:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(z_1) &= H + \sum_{j=1}^{m_0} a_j V_j^{(1)}(z_1), \\ \eta^{(2)}(z_1) &= \sum_{j=1}^{m_0} b_j V_j^{(2)}(z_1),\end{aligned}\quad (3.221)$$

де  $a_j$  и  $b_j$  — сталі, що підлягають визначенню;

$$V_j^{(1)}(z_1) = z_1^2 P_j\left(\frac{2z}{\zeta} - 1\right), \quad V_j^{(2)}(z_1) = P_j\left(\frac{2z}{l-\zeta} - \frac{l+\zeta}{l-\zeta}\right).$$

Тут  $P_j$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра.

Перші  $2m_0$  рівнянь відносно сталих  $\{a_j\}_{j=1}^{m_0}$ ,  $\{b_j\}_{j=1}^{m_0}$  і  $\{c_j\}_{j=1}^{n_0}$  отримаємо з варіаційного рівняння (3.220) після підстановки в нього виразів (3.221). Останні  $n_0$  рівнянь отримаємо з рівнянь (3.195), попередньо помноживши їх на  $D$  для симетрії загальної системи рівнянь, і поклавши в них

$$\left[ \eta = \frac{\eta^{(1)} + \eta^{(2)}}{2} \right]_{z_1=\zeta} \quad (3.222)$$

з урахуванням виразів (3.221) при  $z_1 = \zeta$ .

При цьому отримаємо наступну неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$(A - p^2 B)\vec{X} = \vec{\Gamma}, \quad (3.223)$$

де вектор-стовпець  $\vec{X}$  має компоненти  $a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{m_0}, c_1, c_2, \dots, c_{n_0}$ .

Елементи матриць  $A$  і  $B$  визначаються за формулами (3.202), (3.203). Коефіцієнти  $\gamma_i$  вектора-стовпця  $\vec{\Gamma}$  правої частини рівнянь

(3.223) будуть визначатися за формулами

$$\begin{aligned}\gamma_i &= p^2 HD \int_{G^{(1)}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho} S^{(1)} V_i^{(1)} dz_1 - \frac{H}{2} Q_i^{(1)} \Big|_{z_1=\zeta}, \\ \gamma_{i+m_0} &= \left\{ \frac{p^2 HD m}{2} \left( V_i^{(2)} + z_c \frac{dV_i^{(2)}}{dz_1} \right) - \frac{H}{2} Q_i^{(2)} \right\} \Big|_{z_1=\zeta} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, m_0), \\ \gamma_{i+2m_0} &= p^2 HD \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_0),\end{aligned}\quad (3.224)$$

де

$$Q_i^{(k)} = Q_*^{(k)}(V_i^{(k)}) \quad (k = 1, 2).$$

Таким чином, задача про визначення вимушених коливань розглядуваної механічної системи при заданому горизонтальному гармонічному збуренні основи стержня звелася до розв'язання неоднорідної алгебраїчної системи (3.223).

Аналогічно може бути розв'язана задача для випадку, коли усталені вимушені коливання системи викликаються заданим гармонічним обертанням певних поперечних перерізів стержня.

### 3.3.5 Результати розрахунків

Розглянемо власні коливання тонкостінного стержня з підвісним резервуаром, який частково заповнений рідиною. Нехай стержень є однорідним і має форму циліндра. Для визначеності будемо вважати, що резервуар є прямим круговим циліндром, який прикріплений до стержня за допомогою шпангоута в основі резервуара і заповнений рідиною на висоту  $h$ .

Спочатку визначимо гідродинамічні коефіцієнти  $\sigma_i^2$ ,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{0i}$ ,  $\mu_i$  та  $I^{(w)}$ . Надалі займемося вивченням неосесиметричних коливань рідини в площині  $Oxyz$ , для яких головний вектор гідродинамічних сил, прикладених до резервуару відмінний від нуля, тобто коефіцієнти  $\lambda_i$  та  $\lambda_{0i}$  не обертаються тотожно в нуль. Використовуючи метод Фур'є, безрозмірні функції  $\varphi_n(r, z, \eta)$  при цьому можна представити в наступному вигляді (в якості характерного



розміру системи вибираємо радіус циліндра):

$$\varphi_n(r, z, \eta) = \frac{\operatorname{ch}(K_n z)}{K_n \operatorname{sh}(K_n h)} \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta \quad (3.225)$$

де  $J_1(x)$  – функції Бесселя першого роду першого порядку;  $K_n$  –  $n$ -й корінь рівняння  $J_1'(K_n) = 0$ . Розв'язки (3.225) нормовані таким чином, що

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right|_{z=h, r=1, \eta=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Прийняте нормування дозволяє розглядати узагальнені координати  $\beta_n(t)$  як зміщення точки незбуреної вільної поверхні рідини з координатами  $r = 1$ ,  $\eta = \pi/2$  у напрямку осі  $Oz$  при  $n$ -й формі власних коливань рідини.

У свою чергу потенціал Стокса–Жуковського може бути подані в наступній формі:

$$\Psi(r, z, \eta) = -zr \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(K_n^2 - 1)} Z_n(z) \frac{J_1(K_n r)}{J_1(K_n)} \sin \eta, \quad (3.226)$$

де

$$Z_n(z) = \frac{\operatorname{sh}\left[K_n\left(z - \frac{h}{2}\right)\right]}{K_n \operatorname{ch}\left(K_n \frac{h}{2}\right)}.$$

Отримані розв'язки дозволяють визначити безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= K_n \operatorname{th}(K_n h), \quad \lambda_n = \frac{\pi}{K_n^2}, \quad \mu_n = \frac{\pi(K_n^2 - 1)}{2K_n^3 \operatorname{th}(K_n h)}, \\ \lambda_{0n} &= \frac{\pi}{K_n^2} \left[ h - \frac{2}{K_n} \operatorname{th}\left(\frac{K_n h}{2}\right) \right], \\ I^{(w)} &= \pi \left[ \frac{1}{3} h^3 - \frac{3}{4} h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{K_n^3 (K_n^2 - 1)} \operatorname{th}\left(\frac{K_n h}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.227)$$

Введемо наступні позначення:

$r_0$ ,  $\delta$  – радіус і товщина стержня відповідно;

$a = r_0/R_0$  – радіус стержня, віднесений до радіуса резервуара;

$l_1 = l/r_0$ ,  $\delta_1 = \delta/r_0$  – довжина і товщина стержня, віднесені до його радіуса.

$\zeta_1 = \zeta/r_0$  – точка кріплення резервуара до стержня.

Безрозмірні площу поперечного перерізу, його екваторіальний момент інерції та коефіцієнт  $D$  можна подати в наступному вигляді:

$$S = 2\pi a^2 \delta_1, \quad J = \pi a^4 \delta_1,$$

$$D = D_1 \frac{1}{\pi a^4 \delta_1}, \quad D_1 = \frac{\rho g R_0}{E_0}.$$

Наведемо деякі результати розрахунків власних коливань розглядуваної механічної системи, що ілюструють ефективність запропонованого методу розв'язування спектральної задачі та вплив коливань рідини в резервуарі на частоти і форми коливань системи в цілому.

При розрахунках масою резервуара будемо нехтувати і були використані наступні безрозмірні величини:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 7.8; \quad D_1 = 0.476 \cdot 10^{-7};$$

$$a = 1.25; \quad \delta_1 = 0.001; \quad h = 1.0.$$

У табл. 3.16 подано значення частот  $\omega_i$  зв'язаних коливань рідини і пружного стержня при  $l_1 = 28$  і  $\zeta_1 = 14$  в залежності від кількості членів  $m_0$  і  $n_0$  у розкладах (3.200) і (3.177) відповідно.

Далі введемо в розгляд два типи частот:  $\{\sigma_i\}$  і  $\{\omega_i^*\}$ . Перший з них збігається з частотами коливань рідини в нерухомому резервуарі, а другий представляє частоти коливань пружного стержня з підвішеним до нього резервуаром, вільна поверхня рідини в якому закрита жорсткою кришкою. Такі частоти можна отримати з алгебраїчної системи рівнянь (3.201), поклавши в ній  $n_0 = 0$ . Введення частот  $\{\sigma_i\}$  і  $\{\omega_i^*\}$  відповідає розбиттю вихідної механічної системи на дві підсистеми, які називаються парціальними системами.

Поведінку перших трьох парціальних частот в залежності від безрозмірної глибини рідини в резервуарі наведено в табл. 3.17.

Зіставлення даних табл. 3.16 і 3.17 при  $h = 1$  свідчить про те, що для прийнятих в рамках вихідних даних перші три частоти

Таблиця 3.16: Значення частот  $\omega_i$  зв'язаних коливань розглядуваної системи при  $l_1 = 28$  і  $\zeta_1 = 14$  в залежності від кількості членів  $m_0$  і  $n_0$  у розкладах (3.200) і (3.177) відповідно.

$m_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_{n_0+1}$	$\omega_{n_0+2}$	$\omega_{n_0+3}$
$n_0 = 1$							
4	1.3023				3.58888	18.6539	75.6249
6	1.3023				3.58700	18.6321	73.3952
8	1.3023				3.58700	18.6320	73.2925
10	1.3023				3.58700	18.6320	73.2925
12	1.3023				3.58700	18.6320	73.2925
$n_0 = 2$							
4	1.3023	2.3047			3.60426	18.7504	75.6459
6	1.3023	2.3047			3.60235	18.7286	73.4908
8	1.3023	2.3047			3.60235	18.7286	73.3882
10	1.3023	2.3047			3.60235	18.7286	73.3882
12	1.3023	2.3047			3.60235	18.7286	73.3882
$n_0 = 3$							
4	1.3023	2.3047	2.9184		3.61036	18.7743	75.6544
6	1.3023	2.3047	2.9184		3.60845	18.7525	73.5192
8	1.3023	2.3047	2.9184		3.60845	18.7525	73.4167
10	1.3023	2.3046	2.9184		3.60844	18.7525	73.4166
12	1.3023	2.3046	2.9184		3.60844	18.7525	73.4166
$n_0 = 4$							
4	1.3023	2.3046	2.9184	3.4149	3.61793	18.7837	75.6583
6	1.3023	2.3046	2.9184	3.4149	3.61606	18.7619	73.5312
8	1.3023	2.3046	2.9184	3.4149	3.61606	18.7618	73.4287
10	1.3023	2.3046	2.9184	3.4149	3.61606	18.7618	73.4286
12	1.3023	2.3046	2.9184	3.4149	3.61606	18.7618	73.4286

системи близькі до парціальних частот  $\{\sigma_i\}$ , тоді як  $\omega_{n_0+i}$  близькі до парціальних частот  $\{\omega_i^*\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Надалі будемо розрізняти два типи частот системи «стержень—рідина». Перший тип частот, це частоти, які обумовлені в основному коливаннями рідини в резервуарі. В цьому випадку будемо говорити про частоти «переважно хвильових коливань». До другого типу відносяться частоти, які зумовлені в основному пружними і інерційними властивостями стержня з підвішеною до нього в певному перетині

Таблиця 3.17: Залежність парціальних частот від безрозмірної глибини рідини в резервуарі.

$h$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\omega_1^*$	$\omega_2^*$	$\omega_3^*$
.20	.806	2.050	2.827	3.942	21.791	72.829
.40	1.074	2.277	2.919	3.747	19.537	72.656
.60	1.215	2.305	2.922	3.570	18.156	72.523
.80	1.287	2.309	2.922	3.409	17.233	72.425
1.00	1.323	2.309	2.922	3.263	16.583	72.344
1.20	1.341	2.309	2.922	3.129	16.107	72.249
1.40	1.349	2.309	2.922	3.006	15.751	72.106
1.60	1.353	2.309	2.922	2.892	15.479	71.878
1.80	1.355	2.309	2.922	2.787	15.268	71.531
2.00	1.356	2.309	2.922	2.690	15.104	71.037
2.20	1.356	2.309	2.922	2.599	14.976	70.370
2.40	1.357	2.309	2.922	2.514	14.876	69.511
2.60	1.357	2.309	2.922	2.435	14.797	68.445
2.80	1.357	2.309	2.922	2.361	14.736	67.167
3.00	1.357	2.309	2.922	2.290	14.689	65.678

масою рідини. На значення цих частот в меншій мірі позначаються коливання вільної поверхні рідини. Надалі ці частоти будемо називати частотами «переважно пружних коливань» системи.

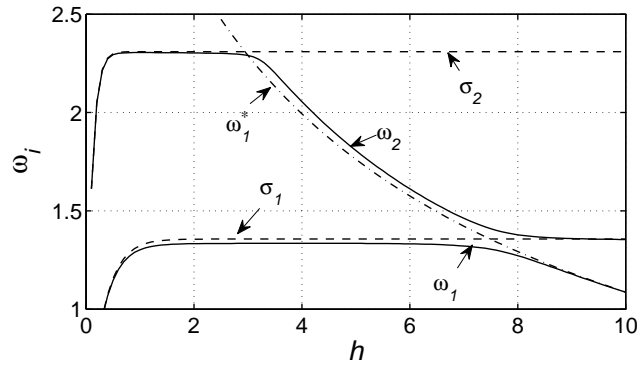
В даному прикладі при  $n_0 \leq 5$  частоти другого типу починаються з  $\omega_{n_0+1}$ . Зі збільшенням числа  $n_0$  частоти першого і другого типу змішуються.

Результати обчислень форм власних коливань розглядуваної механічної системи показують, що запропонований алгоритм розв'язування вихідної задачі забезпечує поточкову збіжність для розв'язків та їх перших трьох похідних для прогинів стержня як всередині областей  $G^{(1)}$  і  $G^{(2)}$ , так і на їх границі. Це дозволяє розраховувати моменти і перерізувальні сили в будь-якому перерізі стержня.

У табл. 3.18 подано результати перевірки виконання граничних умов (3.190) у точці  $z_1 = \zeta_1$  кріплення резервуара до стержня, отримані у результаті підстановки побудованих наближених розв'язків для п'ятої форми коливань у зазначені граничні умови.

Таблиця 3.18: Значення функцій  $\eta_{5\mp}(\zeta_1)$ ,  $\eta'_{5\mp}(\zeta_1)$ , а також лівих і правих частин граничних умов (3.190) при  $l_1 = 28$ ,  $\zeta_1 = 14$ 

$\eta_{5-}(\zeta_1)$	-.369381062E+00
$\eta_{5+}(\zeta_1)$	-.369381062E+00
$\eta'_{5-}(\zeta_1)$	-.352173074E-01
$\eta'_{5+}(\zeta_1)$	-.352173074E-01
$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta_1}$	-.487448281E-04
$R_Q$	-.487448349E-04
$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta_1}$	-.589616197E-04
$R_M$	-.589616147E-04

Рис. 3.10: Залежність зв'язаних і парціальних частот системи від глибини  $h$  заповнення резервуара рідиною

Тут через  $R_Q$  і  $R_M$  позначено вирази для правих частин відповідних силових граничних умов, що входять у (3.190). Символами  $\mp$  позначені відповідні граничні величини, обчислені при підході до точки  $z_1 = \zeta_1$  зліва і праворуч від неї.

З наведеної таблиці випливає, що запропонований узагальнений функціонал забезпечує виконання з високою точністю кінематичних і силових граничних умов спряження в точці  $z_1 = \zeta_1$ . Отримані вище результати свідчать про достатню ефективність розробленого способу розв'язування даної спектральної задачі.

На рис. 3.10 показано залежність зв'язаних і парціальних ча-

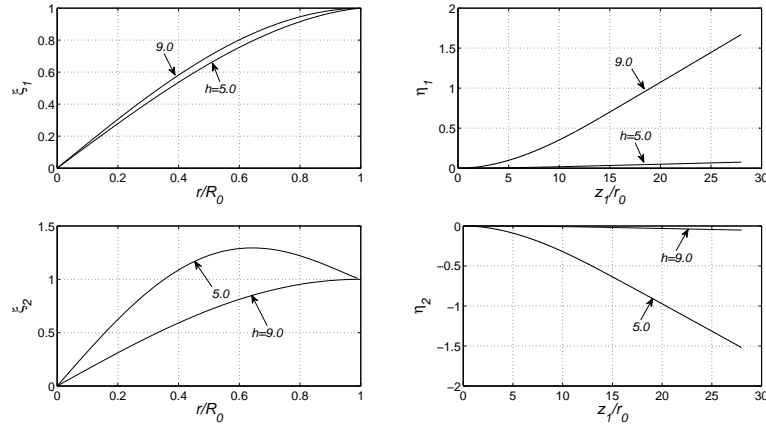


Рис. 3.11: Форми коливань стержня і рідини при різних глибинах  $h$  заповнення резервуара рідиною

стот від відносної глибини  $h$  заповнення рідиною резервуара. Результати розрахунків отримано при  $l_1 = 28$  і  $\zeta_1 = 14$ . Суцільні лінії на рисунку відповідають двом нижчим частотам  $\omega_1$  і  $\omega_2$  зв'язаних коливань стержня і рідини; штрихові – парціальним частотам  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  і штрих-пунктирна – парціальній частоті  $\omega_1^*$ . Поблизу збігу парціальних частот частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  найбільш суттєво відрізняються від парціальних. Якщо парціальні частоти рознесені, то в деякому наближенні кожна підсистема коливається сама по собі. Якщо частоти парціальних систем збігаються, то силовий вплив рідини на стержень найбільш сприятливий для передачі енергії від рідини до стержня. У цьому випадку спостерігається сильна взаємодія парціальних систем.

На рис. 3.11 показано форми коливань рідини і стержня для перших двох нижчих частот коливань розглядуваної механічної системи при деяких значеннях глибини  $h$  заповнення резервуара рідиною, при  $l_1 = 28$  і  $\zeta_1 = 14$ . Із цих рисунків випливає, що коли система здійснює коливання з частотою  $\omega_1$ , то рідина і пружний стержень рухаються в одній фазі. Якщо система робить коливання з частотою  $\omega_2$ , то рідина і стержень рухаються зі зсувом фаз на  $180^\circ$ .

Зазначимо, що запропонований алгоритм дозволяє також розраховувати і конструкцію коли резервуар з рідиною жорстко прикріплений до верхнього торця стержня. У праці [76] розроблено дещо інший алгоритм розрахунку коливань системи в цьому випадку. З метою здійснення незалежного контролю обчислень, було проведено порівняння розрахункових даних, отриманих вище і за алгоритмом праці [76]. При цьому було отримано їх повний збіг.

Розглянемо вимушені коливання системи «стержень—резервуар—рідина» при гармонічному збуренні основи стержня.

У праці [106] наведені експериментальні дані дослідження вимушених коливань стержня, до верхнього торця якого прикріплений резервуар з рідиною, при гармонічному збуренні основи стержня. В якості резервуара був обраний круговий циліндр з співвісною центральною вставкою малого радіуса  $R$ . Зазначимо, що гідродинамічні коефіцієнти  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{0i}$ ,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  і  $I^{(w)}$  для такого резервуара при  $R/R_0 \leq 0.1$  ( $R_0$  – радіус циліндра) відрізняються від гідродинамічних коефіцієнтів для першої форми вільних коливань рідини в круговому циліндрі на 1 – 4 процента. Тому в розрахунках за запропонованим алгоритмом будемо користатися значеннями  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{0i}$ ,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  і  $I^{(w)}$  для резервуара в формі кругового циліндра без центральної вставки.

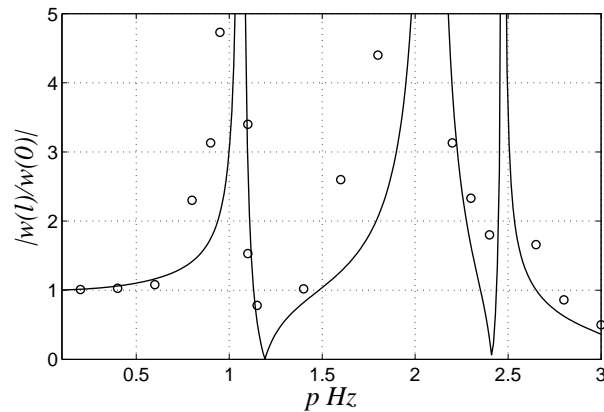


Рис. 3.12: Залежність відносної амплітуди коливань стержня від частоти збурення його основи (о — експеримент, лінія — теорія).

Геометричні та фізичні параметри механічної системи для якої проведено експеримент мають наступні значення: радіус бака  $R_0 = 0.225$  м; відстань до центру мас бака  $z_{c_0} = 0.19$  м; маса бака  $m_0 = 19$  кг; момент інерції бака  $I^{(0)} = 0.5$  кгм<sup>2</sup>; площа поперечного перерізу балки  $F = 3.14 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>; довжина балки  $L = 1.2$  м; коефіцієнт жорсткості балки  $C_1 = 1/E_0 I_0 = 3.3 \cdot 10^{-4}$  1/Нм<sup>2</sup>; глибина заповнення рідиною бака  $\frac{h}{R_0} = 0.5$  густина матеріалу бака (оргскло)  $\rho_0 = 1190$ кг/м<sup>3</sup>; густина матеріалу балки (сталь)  $\rho_1 = 7800$ кг/м<sup>3</sup>; густина рідини  $\rho = 1000$ кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 3.12 наведено залежність відносної амплітуди  $|w(l)/w(0)|$  коливань стержня від частоти збурення  $p$  його основи в області перших трьох резонансних частот розглядуваної механічної системи. Кружечками позначено експериментальні дані праці [106].

Наведений рисунок свідчить про задовільний збіг експериментальних і теоретичних даних в області невеликих амплітуд зв'язаних коливань стержня і рідини в резервуарі.



## Розділ 4

# Коливання довільної оболонки обертання з приєднаним абсолютно твердим тілом

Цей розділ присвячений розробці варіаційного методу побудови наближеного розв'язку задачі про вільні коливання тонкостінної пружної довільної оболонки обертання з жорстко приєднаним до одного з її торців абсолютно твердим тілом скінченних розмірів.

Використовуючи принцип можливих переміщень отримано інтегро-диференціальну постановку крайової задачі про визначення рівноважного стану системи «оболонка—тверде тіло» при дії на неї малого навантаження загального вигляду.

На основі отриманого еквівалентного варіаційного формулювання задачі з використанням методу Рітца запропоновано алгоритм побудови розв'язку задачі про вільні коливання системи «оболонка—тверде тіло». Ефективність підходу проілюстрована на прикладі конічної оболонки із приєднаним твердим тілом. Проаналізовано вплив маси тіла й кута піврозтвору конуса на власні коливання даної механічної системи.

Розглянута спрощена постановка задачі в припущенні, що оболонка замінюється балкою Тимошенка [64]. На основі побудова-

них точних розв'язків отримана досить проста розрахункова схема розв'язування задачі про власні згинні коливання оболонки з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Розв'язки представлені для жорсткого кріплення і незакріпленого торця балки. За рахунок подання точного розв'язку у запропонованому вигляді, можна без особливих труднощів реалізувати і інші, що найбільш часто зустрічаються на практиці типи граничних умов.

На основі порівняння чисельних даних, отриманих за різними розрахунковими схемами зроблено висновки про межі застосування спрощених схем розрахунку системи «оболонка—тверде тіло».

## 4.1 Постановка задачі

Розглянемо механічну систему, що складається з тонкостінної пружної оболонки обертання і абсолютно твердого тіла, яке жорстко прикріплено до одного з її торців. Для визначеності будемо вважати, що нижній торець оболонки жорстко закріплений рис. 4.1.

Нехай тіло володіє двома взаємно ортогональними площинами симетрії, лінією перетину яких є вісь  $Oz$ , що збігається з поздовжньою віссю оболонки. Координатну площину  $Oxz$  сумістимо з однією з площин симетрії твердого тіла, а початок системи координат  $Oxyz$  помістимо в площині торцевого перерізу оболонки, вільного від твердого тіла. Для описання руху твердого тіла введемо прямокутну систему координат  $Cx_c y_c z_c$  з початком в центрі інерції твердого тіла і осями  $Cx_c$  і  $Cy_c$ , паралельними до осей  $Ox$  і  $Oy$  відповідно. Орти системи координат  $Cx_c y_c z_c$  позначимо через  $\vec{i}_c, \vec{j}_c$  і  $\vec{k}_c$ . Серединну поверхню оболонки віднесемо до ортогональної системи криволінійних координат  $s$  і  $\varphi$ , де  $\varphi$  — полярний кут, відлічуваний від осі  $Ox$  за годинниковою стрілкою якщо дивитися в бік зростання координати  $z$ .  $s$  — довжина дуги меридіана, яка відраховується від торцевого перерізу оболонки, до якого прикріплено тверде тіло. З цими координатами зв'яжемо локальний ортогональний базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  і  $\vec{e}_3$ , в якому  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$  — одиничні вектори, дотичні до ліній головних кривин серединної поверхні оболонки і спрямовані в бік зростання координат  $s$  і  $\varphi$ , а  $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]$ .

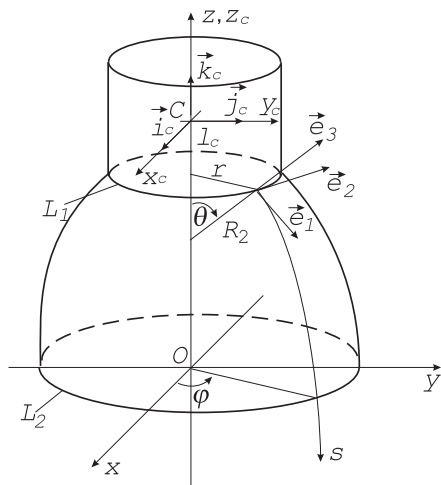


Рис. 4.1: Загальний вигляд розглядуваної механічної системи

Припустимо, що до даної конструкції прикладено мале навантаження загального вигляду: зосереджена в точці  $C$  сила

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \vec{i}_c + \Delta F_2 \vec{j}_c + \Delta F_3 \vec{k}_c,$$

момент відносно точки  $C$

$$\Delta \vec{M} = \Delta M_1 \vec{i}_c + \Delta M_2 \vec{j}_c + \Delta M_3 \vec{k}_c,$$

що діють на тверде тіло і розподілене навантаження

$$\Delta \vec{Q} = \Delta Q_1 \vec{e}_1 + \Delta Q_2 \vec{e}_2 + \Delta Q_3 \vec{e}_3,$$

що діє на оболонку. В результаті, механічна система «оболонка—тіло» прийде в рівноважний збурений стан, підпорядковуючись при цьому деформаціям і переміщенням. Рівноважний стан системи будемо характеризувати вектором переміщення точок середньої поверхні оболонки

$$\vec{U} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3,$$

вектором поступального переміщення центру мас твердого тіла

$$\vec{u}_0 = u_{01}\vec{i}_c + u_{02}\vec{j}_c + u_{03}\vec{k}_c$$

і вектором кута повороту навколо цього центру

$$\vec{\vartheta}_0 = \vartheta_{01}\vec{i}_c + \vartheta_{02}\vec{j}_c + \vartheta_{03}\vec{k}_c.$$

При цьому припустимо, що переміщення твердого тіла і оболонки настільки малі, що можна знехтувати членами другого і більш високого порядку малості в порівнянні з лінійними. Будемо також вважати, що для оболонки справедливі гіпотези Кірхгофа—Лява.

Рівняння рівноважного стану даної системи, що знаходиться під дією зовнішніх сил, можна отримати з використанням будь-якого варіаційного принципу механіки. Такий підхід дозволить сформулювати варіаційну постановку задачі, яка буде використана в подальшому при побудові її наближеного розв'язку.

Скористаємося принципом можливих переміщень, згідно з яким

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (4.1)$$

де  $\delta\Pi$  — варіація потенціальної енергії пружної деформації оболонки;  $\delta A$  — робота зовнішніх сил, прикладених до системи на можливих переміщеннях, які можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\delta A = \iint_{\Sigma} \Delta\vec{Q} \cdot \delta\vec{U} d\Sigma + \Delta\vec{F} \cdot \delta\vec{u}_0 + \Delta\vec{M} \cdot \delta\vec{\vartheta}_0, \quad (4.2)$$

$$\delta\Pi = \iint_{\Sigma} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\omega + M_1\delta\kappa_1 + M_2\delta\kappa_2 + 2H\delta\tau) d\Sigma. \quad (4.3)$$

Тут

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2); & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_2 + \nu\kappa_1); \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega; & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$E$ ,  $\nu$  и  $h$  — модуль пружності, коефіцієнт Пуассона и товщина оболонки відповідно;  $\Sigma$  — серединна поверхня оболонки. При цьому компоненти тензора деформацій серединної поверхні оболонки  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varkappa_1$ ,  $\varkappa_2$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  зв'язані с компонентами вектора переміщень наступними співвідношеннями [56]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} u + \frac{\sin \theta}{r} w, \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{r} v, & \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{R_1} \right); \\ \varkappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{u}{R_1}; \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} + \frac{1}{r R_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} v + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial s},\end{aligned}\tag{4.5}$$

де  $R_1(s)$  — радіус кривизни меридіана оболонки;  $\theta(s)$  — кут, утворений нормаллю до серединної поверхні та віссю обертання оболонки  $Oz$ ;  $r(s)$  — радіус кола, утвореного паралелями оболонки.

З урахуванням співвідношень (4.2)–(4.5), скориставшись формулами інтегрування по частинам для подвійних інтегралів, а також після ряду перетворень, варіаційне рівняння (4.1) можна подати в наступній формі

$$\begin{aligned}& \iint_{\Sigma} \left[ \left( -\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{r R_1} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + \right. \right. \\ & + M_2 \frac{\cos \theta}{r R_1} - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \Big) \delta u + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \theta}{r} S - \right. \\ & \left. - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - 2H \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \theta) \right) \delta v + \\ & \left. + \left( \frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \theta) - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w \right] d\Sigma +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \oint_{L_2} \left[ \left( T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_2 - \\
& - \oint_{L_1} \left[ \left( T_1 + \frac{M_1}{R_1} \right) \delta u + \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \delta v + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) - M_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right] dL_1 = \\
& = \iint_{\Sigma} \Delta \vec{Q} \cdot \delta \vec{U} d\Sigma + \Delta \vec{F} \cdot \delta \vec{u}_0 + \Delta \vec{M} \cdot \delta \vec{\vartheta}_0, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

де  $L_1$  і  $L_2$  — контури, що обмежують оболонку рис. 4.1.

Враховуючи незалежність варіацій  $\delta u$ ,  $\delta v$  і  $\delta w$  в області  $\Sigma$ , з варіаційного рівняння (4.6) отримаємо три рівняння, які описують рівноважний стан оболонки під дією прикладеного розподіленого навантаження  $\Delta \vec{Q}$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r} (T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial s} + \\
& + \frac{\cos \theta}{r R_1} (M_2 - M_1) - \frac{2}{r R_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \Delta Q_1, \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{2 \cos \theta}{r} S - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - \\
& - 2H \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} (H \sin \theta) = \Delta Q_2, \\
& \frac{T_1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (M_1 r) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \cos \theta) - \\
& - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \Delta Q_3.
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Якщо в цих рівняннях перейти від зусиль до переміщень відповідно до формул (4.4) і (4.5), то отримаємо відомі рівняння відносно переміщень  $u$ ,  $v$  і  $w$ . З рівняння (4.6) впливають також граничні умови задачі. Так, у разі жорсткого кріплення контуру

оболонки  $L_2$  матимемо

$$u = v = w = \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{L_2} = 0. \quad (4.8)$$

Варіації  $\delta u$ ,  $\delta v$  і  $\delta w$  на контурі  $L_1$  не є незалежними оскільки пов'язані геометричними граничними умовами, які виражаються в рівності відповідних переміщень і кутів повороту твердого тіла і оболонки, що приводить до наступного співвідношення

$$\vec{U} = \vec{u}_0 + [\vec{\vartheta}_0 \times \vec{r}_0], \quad (4.9)$$

де  $\vec{r}_0 = (r \cos \varphi) \vec{i}_c + (r \sin \varphi) \vec{j}_c - l_c \vec{k}_c$  — радіус-вектор точок контуру оболонки  $L_1$  у системі координат  $Cx_c y_c z_c$ ;  $l_c$  — відстань від центру мас твердого тіла вздовж осі  $Oz$  до торцевого перерізу оболонки, в якому прикріплено тверде тіло. Зв'язок одиничних векторів  $\vec{i}_c$ ,  $\vec{j}_c$ ,  $\vec{k}_c$  і  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \vec{i}_c &= (\cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_1 - (\sin \varphi) \vec{e}_2 + (\sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_3, \\ \vec{j}_c &= (\cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_1 + (\cos \varphi) \vec{e}_2 + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_3, \\ \vec{k}_c &= (-\sin \theta) \vec{e}_1 + (\cos \theta) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Беручи до уваги співвідношення (4.10), в результаті прирівнювання відповідних компонентів векторів у формулі (4.9) отримаємо:

$$\begin{aligned} u|_{L_1} &= (u_{01} \cos \theta + \vartheta_{02} r \sin \theta - \vartheta_{02} l_c \cos \theta) \cos \varphi + \\ &+ (\vartheta_{01} l_c \cos \theta + u_{02} \cos \theta - \vartheta_{01} r \sin \theta) \sin \varphi - u_{03} \sin \theta; \\ v|_{L_1} &= (l_c \vartheta_{01} + u_{02}) \cos \varphi + (\vartheta_{02} l_c - u_{01}) \sin \varphi + \vartheta_{03} r; \\ w|_{L_1} &= (-\vartheta_{02} l_c \sin \theta + u_{01} \sin \theta - \vartheta_{02} r \cos \theta) \cos \varphi + \\ &+ (\vartheta_{01} l_c \sin \theta + u_{02} \sin \theta + \vartheta_{01} r \cos \theta) \sin \varphi + u_{03} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Граничні умови накладаються також і на кут повороту

$$\theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_1}$$

вектора  $\vec{e}_1$  навколо вектора  $\vec{e}_2$  в результаті деформування середньої поверхні оболонки. Переходячи в  $\vec{\vartheta}_0$  до базису  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  за

допомогою співвідношень (4.10), отримаємо четверту геометричну граничну умову:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{L_1} = \frac{u}{R_1} + \vartheta_{01} \sin \varphi - \vartheta_{02} \cos \varphi. \quad (4.12)$$

Із формул (4.11) і (4.12) неважко отримати вирази для варіацій  $\left[ \delta u, \delta v, \delta w, \frac{\partial \delta w}{\partial s} \right]_{L_1}$ . Підставляючи ці вирази в відповідний контурний інтеграл з рівняння (4.6) і з огляду на незалежність варіацій від відповідних компонент вектора переміщень оболонки, отримаємо шість інтегральних співвідношень, які представляють собою силові граничні умови спряження оболонки і твердого тіла на контурі  $L_1$ :

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} \left[ \left( T_1 \cos \theta - Q_1^* \sin \theta \right) \cos \varphi - \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \varphi \right] dL_1 &= -\Delta F_1, \\ \oint_{L_1} \left[ \left( T_1 \cos \theta - Q_1^* \sin \theta \right) \sin \varphi + \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \varphi \right] dL_1 &= -\Delta F_2, \\ \oint_{L_1} \left( T_1 \sin \theta + Q_1^* \cos \theta \right) dL_1 &= \Delta F_3, \\ \oint_{L_1} \left\{ \left[ T_1 \left( l_c \cos \theta - R \sin \theta \right) - Q_1^* \left( R \cos \theta + l_c \sin \theta \right) - M_1 \right] \sin \varphi + \right. \\ &+ \left. \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) l_c \cos \varphi \right\} dL_1 = -\Delta M_1, \\ \oint_{L_1} \left\{ \left[ T_1 \left( R \sin \theta - l_c \cos \theta \right) + Q_1^* \left( R \cos \theta + l_c \sin \theta \right) + M_1 \right] \cos \varphi + \right. \\ &+ \left. \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) l_c \sin \varphi \right\} dL_1 = -\Delta M_2, \\ \oint_{L_1} \left( S + 2H \frac{\sin \theta}{r} \right) R dL_1 &= -\Delta M_3, \end{aligned} \quad (4.13)$$



$$\text{де} \quad Q_1^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (M_1 r) + M_2 \frac{\cos \theta}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Таким чином, задача про визначення рівноважного збуреного стану системи «оболонка обертання—тверде тіло», що знаходиться під дією малого навантаження загального вигляду, звелася до інтегрування системи з трьох диференціальних рівнянь (4.7) при граничних умовах (4.8), (4.11)—(4.13). Щоб перейти від задачі статичної до задачі про власні коливання розглядуваної механічної системи необхідно скористатися принципом Даламбера, замінивши навантаження, що діє на систему, відповідними силами інерції за такими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \Delta Q_2 &= -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & \Delta Q_3 &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \Delta F_1 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2}, & \Delta F_2 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2}, & \Delta F_3 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{03}}{\partial t^2}, \\ \Delta M_1 &= -J_{x_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{01}}{\partial t^2}, & \Delta M_2 &= -J_{y_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{02}}{\partial t^2}, & \Delta M_3 &= -J_{z_c} \frac{\partial^2 \vartheta_{03}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

де  $\rho$  і  $m_0$  — густина матеріалу оболонки і маса твердого тіла відповідно;  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$ ,  $J_{z_c}$  — моменти інерції твердого тіла відносно осей  $Cx_c$ ,  $Cy_c$ ,  $Cz_c$  відповідно.

Слід зазначити, що досить складні силові та моментні граничні умови (4.13) є природними для відповідного функціонала, отриманого з принципу можливих переміщень, і його мінімізацію досить проводити на класі функцій, що задовольняють лише граничні умови (4.8), (4.11) і (4.12).

## 4.2 Застосування методу Рітца до побудови наближених розв'язків задачі про поперечні коливання системи

Малість параметрів руху та осьова симетрія при усталених вільних коливаннях системи «оболонка—тіло» з частотою  $\omega$  дозволяє загальний її рух розкласти на незалежні складові в напрямку і навколо поздовжньої осі, а також у двох взаємно ортогональних площинах симетрії, лінією перетину яких є вісь  $Oz$ . Надалі будемо

розглядати поперечні коливання системи в площині  $Oxz$ . У цьому випадку переміщення точок серединної поверхні оболонки можна подати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega t} U_n(s) \cos n\varphi, \\ v &= e^{i\omega t} V_n(s) \sin n\varphi, \\ w &= e^{i\omega t} W_n(s) \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

де  $n$  — кількість хвиль у круговому напрямку оболонки.

Перейдемо до безрозмірних величин, які пов'язані з відповідними розмірними величинами наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \{U_n, V_n, W_n\} &= R\{\bar{U}_n, \bar{V}_n, \bar{W}_n\}, \quad \{r, s, R_1, l_c, h\} = R\{\bar{r}, \bar{s}, \bar{R}_1, \bar{l}_c, \bar{h}\}, \\ c^2 &= \frac{h^2}{12R^2}, \quad \bar{m}_0 = \frac{m_0}{\pi\rho hR^2}, \quad \bar{J}_{yc} = \frac{J_{yc}}{\pi\rho hR^4}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{R^2\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

де  $R$  — радіус, що обмежує оболонку, контуру  $L_1$ . Далі, для скорочення запису, риску над безрозмірними величинами будемо опускати.

Тоді варіаційне рівняння задачі про усталені вільні коливання оболонки обертання з приєднаним на торці твердим тілом можна подати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^{l_s} \left[ \Psi_{11}(U_n, \delta U_n) + \Psi_{12}(V_n, \delta U_n) + \Psi_{13}(W_n, \delta U_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{12}(\delta V_n, U_n) + \Psi_{22}(V_n, \delta V_n) + \Psi_{23}(W_n, \delta V_n) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{13}(\delta W_n, U_n) + \Psi_{23}(\delta W_n, V_n) + \Psi_{33}(W_n, \delta W_n) \right] r ds - \\ &\quad - \omega^2 \int_0^{l_s} (U_n \delta U_n + V_n \delta V_n + W_n \delta W_n) r ds - \\ &\quad - \omega^2 (m_0 u_{01} \delta u_{01} + J_{yc} \vartheta_{02} \delta \vartheta_{02}) = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

де  $l_s$  — довжина оболонки за координатою  $s$ .

Диференціальні оператори  $\Psi_{ij}(p, q)$  збігаються з операторами, введеними у розд. 1.

В силу ортогональності тригонометричних функцій на відрізку  $[0, 2\pi]$  із співвідношень (4.11) і (4.12) випливає, що в разі, коли кількість хвиль у круговому напрямку оболонки  $n$  дорівнює одиниці, при знаходженні мінімуму функціонала, відповідного варіаційного рівняння (4.17), підлягають задоволенню наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} U_1(0) &= u_{01}k_1 - \vartheta_{02}k_2, & V_1(0) &= -(u_{01} - \vartheta_{02}k_3), \\ W_1(0) &= u_{01}k_4 - \vartheta_{02}k_5, & \left. \frac{dW_1}{ds} \right|_{s=0} &= u_{01}k_6 - \vartheta_{02}k_7, \\ U_1(l_s) &= V_1(l_s) = W_1(l_s) = \left. \frac{dW_1}{ds} \right|_{s=l_s} = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos \theta; & k_2 &= l_c \cos \theta - \sin \theta; & k_3 &= l_c; & k_4 &= \sin \theta; \\ k_5 &= l_c \sin \theta + \cos \theta; & k_6 &= \frac{k_1}{R_1}; & k_7 &= 1 + \frac{k_2}{R_1}. \end{aligned}$$

У випадку ж коли  $n > 1$ , підлягають задоволенню умови жорсткого кріплення обох торців оболонки

$$\begin{aligned} U_n(0) &= V_n(0) = W_n(0) = \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=0} = 0, \\ U_n(l_s) &= V_n(l_s) = W_n(l_s) = \left. \frac{dW_n}{ds} \right|_{s=l_s} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Неважко бачити, що при  $n = 1$  мають місце сумісні коливання тіла і оболонки. У разі ж коли  $n > 1$ , тіло залишається нерухомим, а оболонка здійснює просторові рухи.

Пошук мінімуму функціонала, варіацію якого подано у формі (4.17), на класі функцій, що задовольняють граничні умови (4.18), (4.19), будемо здійснювати за допомогою методу Рітца, згідно з яким компоненти переміщень оболонки подамо у вигляді

скінченних рядів такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 U_n(s) &= \sum_{j=1}^N a_j u_j(s) + \delta_{1n}(u_{01}k_1 - \vartheta_{02}k_2)u_0(s), \\
 V_n(s) &= \sum_{j=1}^N b_j v_j(s) + \delta_{1n}(u_{01} - \vartheta_{02}k_3)v_0(s), \\
 W_n(s) &= \sum_{j=1}^N c_j w_j(s) + \delta_{1n}(u_{01}w_0(s) + \vartheta_{02}\psi_0(s)),
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\delta_{1n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Тут  $a_j, b_j, c_j, u_{01}, \vartheta_{02}$  — сталі, що підлягають визначенню.

Координатні функції  $u_j(s), v_j(s)$  і  $w_j(s)$  виберемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_j(s) &= v_j(s) = s(l_s - s)P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right), \\
 w_j(s) &= s^2(l_s - s)^2P_j\left(\frac{2s}{l_s} - 1\right) \\
 (j &= 1, 2, \dots, N),
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

де  $P_j(s)$  — зміщені на одиницю за індексом  $j$  многочлени Лежандра, обчислення яких та їх перших двох похідних можна проводити за допомогою відомих рекурентних співвідношень.

Функції  $u_0(s), v_0(s), w_0(s)$  і  $\psi_0(s)$  виберемо в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 u_0(s) &= \frac{l_s - s}{l_s}, \quad v_0(s) = -u_0(s), \\
 w_0(s) &= \frac{3k_4 + k_6 l_s}{l_s^2}(s - l_s)^2 + \frac{k_6 l_s + 2k_4}{l_s^3}(s - l_s)^3, \\
 \psi_0(s) &= -\frac{3k_5 + k_7 l_s}{l_s^2}(s - l_s)^2 - \frac{k_7 l_s + 2k_5}{l_s^3}(s - l_s)^3.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

За такого подання розклади (4.20) повністю задовольняють головні граничні умови (4.18) і (4.19) за будь-яких значень вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N, u_{01}, \vartheta_{02}].$$

При цьому забезпечується повнота і лінійна незалежність функцій, що входять у розклади (4.20).

Компоненти вектора  $\vec{X}$  надалі визначаються з умови стаціонарності відповідного функціонала  $I$ . При цьому вихідна задача зводиться до розв'язування однорідної алгебраїчної системи

$$(A - \omega^2 B)\vec{X}^T = 0, \quad (4.23)$$

де  $\vec{X}^T$  — транспонований вектор  $\vec{X}$ ;  $A$  і  $B$  — симетричні матриці порядку  $3N + 2$  при  $n = 1$  і  $3N$  для випадку  $n > 1$ .

Елементи матриць  $A$  і  $B$ , які розташовані на головній діагоналі і вище, будуть обчислюватися за такими формулами:

$$a_{i,j} = \int_0^{l_s} \Psi_{11}(u_j, u_i) r ds, \quad a_{i,j+N} = \int_0^{l_s} \Psi_{12}(v_j, u_i) r ds,$$

$$a_{i,j+2N} = \int_0^{l_s} \Psi_{13}(w_j, u_i) r ds, \quad a_{i+N,j+N} = \int_0^{l_s} \Psi_{22}(v_j, v_i) r ds,$$

$$a_{i+N,j+2N} = \int_0^{l_s} \Psi_{23}(w_j, v_i) r ds, \quad a_{i+2N,j+2N} = \int_0^{l_s} \Psi_{33}(w_j, w_i) r ds,$$

$$a_{i,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1 \Psi_{11}(u_0, u_i) + \Psi_{12}(v_0, u_i) + \Psi_{13}(w_0, u_i)] r ds,$$

$$a_{i,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_2 \Psi_{11}(u_0, u_i) - k_3 \Psi_{12}(v_0, u_i) + \Psi_{13}(w_0, u_i)] r ds,$$

$$a_{i+N,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1 \Psi_{12}(v_i, u_0) + \Psi_{22}(v_0, v_i) + \Psi_{23}(w_0, v_i)] r ds,$$

$$a_{i+N,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_2 \Psi_{12}(v_i, u_0) - k_3 \Psi_{22}(v_0, v_i) + \Psi_{23}(\psi_0, v_i)] r ds,$$

$$a_{i+2N,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1 \Psi_{13}(w_i, u_0) + \Psi_{23}(w_i, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_i)] r ds,$$

$$a_{i+2N,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_2 \Psi_{13}(w_i, u_0) - k_3 \Psi_{23}(w_i, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, w_i)] r ds,$$

$$a_{3N+1,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1^2 \Psi_{11}(u_0, u_0) + 2k_1 \Psi_{12}(v_0, u_0) + 2k_1 \Psi_{13}(w_0, u_0) + \Psi_{22}(v_0, v_0) + 2\Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_0)] r ds,$$

$$a_{3N+1,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_1 k_2 \Psi_{11}(u_0, u_0) - k_1 k_3 \Psi_{12}(v_0, u_0) + k_1 \Psi_{13}(\psi_0, u_0) - k_2 \Psi_{12}(v_0, u_0) - k_3 \Psi_{22}(v_0, v_0) + \Psi_{23}(\psi_0, v_0) - k_2 \Psi_{13}(w_0, u_0) - k_3 \Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, w_0)] r ds,$$

$$a_{3N+2,3N+2} = \int_0^{l_s} [k_2^2 \Psi_{11}(u_0, u_0) + 2k_2 k_3 \Psi_{12}(v_0, u_0) - 2k_2 \Psi_{13}(\psi_0, u_0) + k_3^2 \Psi_{22}(v_0, v_0) - 2k_3 \Psi_{23}(\psi_0, v_0) + \Psi_{33}(\psi_0, \psi_0)] r ds,$$

$$b_{i,j} = \int_0^{l_s} u_j u_i r ds, \quad b_{i,j+N} = b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0,$$

$$b_{i+N,j+N} = \int_0^{l_s} v_j v_i r ds, \quad b_{i+2N,j+2N} = \int_0^{l_s} w_j w_i r ds,$$

$$b_{i,3N+1} = \int_0^{l_s} k_1 u_0 u_i r ds, \quad b_{i,3N+2} = \int_0^{l_s} -k_2 u_0 u_i r ds,$$

$$b_{i+N,3N+1} = \int_0^{l_s} v_0 v_i r ds, \quad b_{i+N,3N+2} = \int_0^{l_s} -k_3 v_0 v_i r ds,$$

$$b_{i+2N,3N+1} = \int_0^{l_s} w_0 w_i r ds, \quad b_{i+2N,3N+2} = \int_0^{l_s} \psi_0 w_i r ds,$$

$$b_{3N+1,3N+1} = \int_0^{l_s} [k_1^2 u_0^2 + v_0^2 + w_0^2] r ds + m_0,$$

$$b_{3N+1,3N+2} = \int_0^{l_s} [-k_1 k_2 u_0^2 - k_3 v_0^2 + \psi_0 w_0] r ds,$$

$$b_{3N+2,3N+2} = \int_0^{l_s} [k_2^2 u_0^2 + k_3^2 v_0^2 + \psi_0^2] r ds + J_{y_c}.$$

Нагадаємо, що в разі, коли  $n > 1$ , матриці  $A$  і  $B$  мають порядок  $3N$  і отримуються з наведених шляхом відкидання останніх двох стовпців і рядків. При виведенні цих виразів було використано подання для варіації функціонала  $\delta I$  у формі (4.17), що забезпечило простоту їх отримання і значні зручності при програмуванні запропонованого алгоритму розв'язування даної задачі.

### 4.3 Спрощена постановка задачі про поперечні коливання механічної системи «оболонка—тверде тіло»

Як видно з підрозд. 4.1, задача про коливання складної механічної конструкції, «оболонка - тверде тіло» відноситься до розряду неklasичних задач математичної фізики, оскільки мова йде про з'єднання елементів, поведінка яких, описується рівняннями різної розмірності. Це викликає певні труднощі при їх розв'язуванні. У зв'язку з цим, на практиці використовують різного роду спрощені моделі реальної конструкції за рахунок введення в розгляд додаткових гіпотез і припущень.

Для спрощеної схеми як правило використовується класична балкова теорія Ейлера—Бернуллі. Природним чином виникає питання про можливість розширення меж застосування спрощеної моделі шляхом урахування деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу балки [64].

У зв'язку з цим, нижче наведемо на цій основі спрощену постановку розглядуваної задачі та побудуємо її точний розв'язок.

Розглянемо механічну систему, що складається з балки Тимошенка і абсолютно твердого тіла, яке жорстко прикріплено до одного з її торців. Передбачається, що другий торець балки деяким чином закріплений. Вважається, що тіло володіє двома взаємно ортогональними площинами симетрії, лінією перетину яких є вісь  $Oz$ , що збігається з нейтральною лінією балки. Координатну площину  $Oxz$  сумістимо з однією з площин симетрії твердого тіла, а початок системи координат  $Oxyz$  розмістимо в площині торцевого перерізу балки, вільного від твердого тіла. Для описання переміщень твердого тіла введемо прямокутну систему координат  $Sx_c y_c z_c$  з початком у центрі інерції твердого тіла і осями  $Sx_c$   $Sy_c$ , паралельними осям  $Ox$  і  $Oy$  відповідно. Крім того, зручно також ввести в розгляд систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  з одиничними ортами  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ , осі якої паралельні осям  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , а початок зв'язано з точкою кріплення твердого тіла до балки.

Оскільки механічна система має дві площини симетрії, то її коливання в площинах  $Oxz$  і  $Oyz$  можна розглядати незалежно.



Тому далі розглядатимемо рух системи тільки в площині  $Oxz$ .

Позначимо переміщення точок нейтральної лінії пружної балки в напрямку осі  $Ox$  через  $w(z, t)$ . Тоді кут нахилу дотичної можна подати у вигляді [64]

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \psi + \tau, \quad (4.24)$$

де  $\psi$  – кут нахилу дотичної до пружної лінії балки від дії тільки згинальних моментів;  $\tau$  – кут нахилу від зміни перерізувальних сил.

У точці кріплення твердого тіла при  $z = l$  повинні виконуватися кінематичні умови спряження, тобто рівність відповідних переміщень і кутів повороту балки і тіла.

$$w(l, t) = w_0, \quad \psi(l, t) = \vartheta_{02}.$$

Тут  $w_0$  і  $\vartheta_{02}$  – переміщення точки  $O_1$  і кут повороту твердого тіла відносно осі  $O_1y_1$ .

Вектор переміщення точок твердого тіла  $\vec{U}^*$  можна подати у вигляді

$$\vec{U}^* = \vec{U}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}], \quad (4.25)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точок твердого тіла;  $\vec{U}_0 = \{w_0, 0, 0\}$  і  $\vec{\theta}_0 = \{0, \vartheta_{02}, 0\}$  – вектори малого переміщення і повороту системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ . У розгорнутому вигляді для вектора (4.25) будемо мати такий вираз

$$\vec{U}^* = (w_0 + z_1\vartheta_{02})\vec{i}_1 + (-\vartheta_{02}x_1)\vec{k}_1. \quad (4.26)$$

Для виведення рівнянь руху системи скористаємося принципом можливих переміщень. Потенціальна енергія деформації для балки Тимошенка має вигляд [16]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l \varkappa GF \tau^2 dz, \quad (4.27)$$

де  $l$  – довжина балки;  $\varkappa$  – коефіцієнт, що залежить від характеру розподілу зсувів по перерізу і способу визначення середнього значення для кута зсуву  $\tau$ ;  $EJ$  і  $GF$  – згинальна і зсувна жорсткості відповідно.

Робота сил інерції на можливих переміщеннях матиме вигляд:

$$\delta A = -\gamma \iiint_V \ddot{\vec{U}}^* \delta \vec{U}^* dV - \rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz, \quad (4.28)$$

де  $\gamma$  і  $\rho$  густина матеріалів твердого тіла і балки відповідно. Двокрапка над величинами в рівнянні (4.28) означає дворазове диференціювання за часом  $t$ .

Прирівнявши варіацію від потенціальної енергії деформації балки до роботи зовнішніх сил на можливих переміщеннях, отримуємо наступне варіаційне рівняння:

$$\begin{aligned} EJ \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial \delta \psi}{\partial z} \right) dz + \varkappa GF \int_0^l \tau \frac{\partial \delta w}{\partial z} dz - \varkappa GF \int_0^l \tau \delta \psi dz = \\ = -\rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz - (m_0 \ddot{w}_0 + L_{03} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta w_0 - \\ - (L_{03} \ddot{w}_0 + J_{y_1} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta \vartheta_{02}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тут

$$L_{03} = \gamma \iiint_V z_1 dV \quad -$$

статичний момент інерції твердого тіла відносно площини  $O_1 y_1 z_1$ ;

$$J_{y_1} = \gamma \iiint_V (x_1^2 + z_1^2) dV \quad -$$

момент інерції твердого тіла відносно осі  $O_1 y_1$ ,  $m_0$  — маса твердого тіла.

Позначимо через  $l_c$  координату центру мас твердого тіла в системі координат  $O_1 y_1 z_1$ . Тоді матимемо:  $L_{03} = m_0 l_c$ ;  $J_{y_1} = m_0 l_c^2 + J_{y_c}$ , де  $J_{y_c}$  — момент інерції твердого тіла відносно осі  $C y_c$ .

Виконавши в лівій частині рівняння (4.29) інтегрування частинами і взявши до уваги кінематичні умови спряження, а також незалежність варіацій  $\delta w$  і  $\delta\psi$ , отримуємо наступну початково-крайову задачу:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varkappa G F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \\ \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \varkappa G F \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \left[ \varkappa G F \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_{03} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0, \\ \left[ EJ \frac{\partial \psi}{\partial z} + L_{03} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{y_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Для жорстко закріпленого торця балки матимемо наступні граничні умови:

$$w(0, t) = 0, \quad \psi = 0. \quad (4.32)$$

У випадку вільного торця отримаємо:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.33)$$

До співвідношень (4.30)–(4.33) необхідно додати відповідні початкові умови на шукані функції.

Систему рівнянь (4.30), шляхом нескладних перетворень, можна звести до наступного вигляду:

$$\begin{cases} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{\varkappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\varkappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ EJ \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{\varkappa G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\varkappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Для випадку вільних гармонічних коливань системи з частотою  $\omega$ , подамо функції  $w(z, t)$  і  $\Psi(z, t)$  у вигляді

$$w(z, t) = W(z)e^{i\omega t}, \quad \psi(z, t) = \Psi(z)e^{i\omega t}. \quad (4.35)$$

Введемо в розгляд наступні безрозмірні величини, які пов'язані з відповідними розмірними за формулами

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\omega^2 L^4 \rho F}{EJ}, \quad r^2 = \frac{J}{FL^2}, \quad s^2 = \frac{EJ}{\kappa GFL^2}, \\ \bar{m}_0 &= \frac{m_0}{\rho FL}, \quad \bar{J}_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{\rho FL^3}, \quad \bar{l}_c = \frac{l_c}{L}, \\ \bar{W} &= \frac{W}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}; \quad \bar{J}_{y_1} = \bar{m}_0 \bar{l}_c^2 + \bar{J}_{y_c}, \\ &\quad \bar{L}_{03} = \bar{m}_0 \bar{l}_c. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Тут  $\beta$ — безрозмірна власна частота коливань системи;  $r^2$ — квадрат радіуса інерції балки (коефіцієнт, що враховує інерцію повороту поперечного перерізу балки);  $s^2$ — коефіцієнт, що враховує вплив деформацій зсуву;  $L$ — деякий (поки довільний) лінійний розмір. Риски над безрозмірними величинами надалі для простоти запису будемо опускати.

З урахуванням формул (4.35) і (4.36), співвідношення (4.30)—(4.34) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \frac{d^4 W}{dz^4} + \beta^2(r^2 + s^2) \frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2(\beta^2 r^2 s^2 - 1)W = 0, \\ \frac{d^4 \Psi}{dz^4} + \beta^2(r^2 + s^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \beta^2(\beta^2 r^2 s^2 - 1)\Psi = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{d\Psi}{dz} + \beta^2 s^2 W = 0, \\ s^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{dW}{dz} + (\beta^2 r^2 s^2 - 1)\Psi = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dW}{dz} - \Psi - \beta^2 s^2 m_0 W - \beta^2 s^2 m_0 l_c \Psi \right)_{z=l} &= 0, \\ \left( \frac{d\Psi}{dz} - \beta^2 L_{03} W - \beta^2 J_{y_1} \Psi \right)_{z=l} &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Граничні умови для вільного торця:

$$\left(\frac{dW}{dz} - \Psi\right)_{z=0} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dz}\Big|_{z=0} = 0. \quad (4.40)$$

При закріпленому торці повинні виконуватися умови

$$W(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0. \quad (4.41)$$

Співвідношення (4.38) дають можливість виразити  $\Psi$  і  $d\Psi/dz$  через функцію  $W$  та її похідні:

$$\begin{cases} \Psi = \frac{s^2}{b_0} \frac{d^3W}{dz^3} + \frac{(\beta^2 s^4 + 1)}{b_0} \frac{dW}{dz}, \\ \frac{d\Psi}{dz} = \frac{d^2W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W. \end{cases} \quad (4.42)$$

Підставляючи вирази (4.42) у рівняння (4.39)–(4.41), остаточно будемо мати наступну крайову задачу на власні значення відносно функції  $W$  при жорсткому закріпленні торця оболонки при  $z = 0$ :

$$\frac{d^4W}{dz^4} + b_2 \frac{d^2W}{dz^2} - \beta^2 b_0 W = 0, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \left(f_1 \frac{d^3W}{dz^3} + f_2 \frac{dW}{dz} + f_3 W\right)_{z=l} &= 0, \\ \left(f_4 \frac{d^3W}{dz^3} + f_5 \frac{d^2W}{dz^2} + f_6 \frac{dW}{dz} + f_7 W\right)_{z=l} &= 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$W(0) = 0; \quad \left(b_1 \frac{dW}{dz} + s^2 \frac{d^3W}{dz^3}\right)_{(z=0)} = 0. \quad (4.45)$$

У випадку вільного торця балки при  $z = 0$  граничні умови (4.45) слід замінити на умови

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W\right)_{z=0} &= 0, \\ \left(\frac{d^3W}{dz^3} + b_2 \frac{dW}{dz}\right)_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 - \beta^2 r^2 s^2; & b_1 &= \beta^2 s^4 + 1; \\
 b_2 &= \beta^2 (r^2 + s^2); & f_1 &= 1 + \beta^2 s^2 L_{03}; \\
 f_2 &= \beta^2 b_1 L_{03} + b_2; & f_3 &= \beta^2 m_0 b_0; \\
 f_4 &= \beta^2 s^2 J_{y_1}; & f_5 &= -b_0; \\
 f_6 &= \beta^2 b_1 J_{y_1}; & f_7 &= b_0 \beta^2 (L_{03} - s^2).
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Таким чином, розв'язування задачі про власні згинальні коливання балки Тимошенка з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом звелось до інтегрування звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (4.43) при відповідних граничних умовах. При необхідності визначення величин  $\Psi$  і  $d\Psi/dz$  необхідно скористатися виразами (4.42).

Зауважимо, що якщо в рівняннях (4.42)–(4.47) покласти  $r^2 = s^2 = 0$ , то отримаємо, як частинний випадок, задачі про власні коливання балки Ейлера–Бернуллі з приєднаним твердим тілом. Відповідно, якщо знехтувати тільки членами, які враховують деформації зсуву ( $s^2 = 0$ ), матимемо балку Релея.

#### 4.4 Побудова точних розв'язків для спрощеної постановки задачі

Перейдемо до побудови точного розв'язку сформульованої крайової задачі. Загальним розв'язком рівняння (4.43) при  $\mu \geq b_2/2$  буде

$$\begin{aligned}
 W(\beta, z) &= A \operatorname{sh} \gamma_1 z + B \operatorname{ch} \gamma_1 z + C \sin \gamma_2 z + D \cos \gamma_2 z, \\
 \text{де } \gamma_1 &= \sqrt{\mu - b_2/2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2},
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Для випадку, коли  $\mu < b_2/2$  матимемо

$$\begin{aligned}
 W(\beta, z) &= A' \sin \gamma_1 z + B' \cos \gamma_1 z + C' \sin \gamma_2 z + D' \cos \gamma_2 z, \\
 \text{де } \gamma_1 &= \sqrt{b_2/2 - \mu}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Тут  $\mu = \sqrt{(b_2/2)^2 + b_0 \beta^2}$ .

Розв'язки (4.48), (4.49) зручно подати в наступному вигляді:

$$W_i(\beta, z) = C_{1i}S_i(\beta, z) + C_{2i}T_i(\beta, z) + C_{3i}U_i(\beta, z) + C_{4i}V_i(\beta, z). \quad (4.50)$$

$$\text{Тут і далі } i = \begin{cases} 1 & \forall \mu \geq \frac{b_2}{2}, \\ 2 & \forall \mu < \frac{b_2}{2}. \end{cases}$$

Лінійно незалежні функції  $S_i, T_i, U_i$  і  $V_i$  є лінійними комбінаціями функцій, що входять у (4.48), (4.49) і володіють тією властивістю, що матриця Коші для них при  $z = 0$  є одиничною.

Зазначені функції можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned} S_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_1 z + \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), \\ T_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 z + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ U_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \operatorname{ch} \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), \\ V_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} S_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_2^2 \cos \gamma_1 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), \\ T_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ U_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \cos \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), \\ V_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \frac{1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Слід зауважити, що наведені функції дещо відрізняються від відомих балкових функцій Крилова, в тому сенсі, що не вдається

виразити перші три похідні від них за змінною  $z$  через ці ж функції, що має місце в елементарній балковій теорії. У зв'язку з цим, введемо додатково в розгляд наступні функції:

$$\begin{aligned}
Q_{11}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 z + \gamma_2 \sin \gamma_2 z \right), \\
Q_{21}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_1^2 \operatorname{ch} \gamma_1 z + \gamma_2^2 \cos \gamma_2 z \right), \\
Q_{31}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right), \\
Q_{12}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_2 \sin \gamma_2 z - \gamma_1 \sin \gamma_1 z \right), \\
Q_{22}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_2^2 \cos \gamma_2 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 z \right), \\
Q_{32}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left( \gamma_1^3 \sin \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Тут другий індекс відповідає значенню індексу  $i$ .

Тоді перші три похідні від  $W_i(\beta, z)$  за змінною  $z$  можна обчислити за такими формулами:

$$\begin{aligned}
W_1'(\beta, z) &= C_{11}\zeta V_1(\beta, z) + C_{21}S_1(\beta, z) + \\
&+ C_{31}Q_{11}(\beta, z) + C_{41}U_1(\beta, z), \\
W_1''(\beta, z) &= C_{11}\zeta U_1(\beta, z) + C_{21}\zeta V_1(\beta, z) + \\
&+ C_{31}Q_{21}(\beta, z) + C_{41}Q_{11}(\beta, z), \\
W_1'''(\beta, z) &= C_{11}\zeta Q_{11}(\beta, z) + C_{21}\zeta U_1(\beta, z) + \\
&+ C_{31}Q_{31}(\beta, z) + C_{41}Q_{21}(\beta, z), \\
W_2'(\beta, z) &= -C_{12}\zeta V_2(\beta, z) + C_{22}S_2(\beta, z) + \\
&+ C_{32}Q_{12}(\beta, z) + C_{42}U_2(\beta, z), \\
W_2''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta U_2(\beta, z) - C_{22}\zeta V_2(\beta, z) + \\
&+ C_{32}Q_{22}(\beta, z) + C_{42}Q_{12}(\beta, z), \\
W_2'''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta Q_{12}(\beta, z) - C_{22}\zeta U_2(\beta, z) + \\
&+ C_{32}Q_{32}(\beta, z) + C_{42}Q_{22}(\beta, z).
\end{aligned} \tag{4.54}$$



Тут і далі  $\zeta = \gamma_1^2 \gamma_2^2$ . Нагадаємо, що величини  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  визначаються формулами з (4.48) і (4.49). При поданні розв'язків у формі (4.50), довільні сталі можна виразити через значення функцій  $W_i$  і їх похідних у точці  $z = 0$

$$\begin{aligned} W_i(\beta, 0) &= C_{1i}, & W_i'(\beta, 0) &= C_{2i}, \\ W_i''(\beta, 0) &= C_{3i}, & W_i'''(\beta, 0) &= C_{4i}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Розглянемо випадок, коли вільний від твердого тіла торець балки жорстко закріплений. Підставляючи розв'язок (4.50) у граничні умови (4.44) і (4.45), отримаємо однорідну алгебраїчну систему відносно сталих інтегрування  $C_{3i}$  і  $C_{4i}$ , яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} C_{3i}a_{11}^{(i)} + C_{4i}a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{3i}a_{21}^{(i)} + C_{4i}a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

При цьому  $C_{1i} = 0$ ,  $C_{2i} = -K_1 C_{4i}$ , де  $K_1 = s^2/b_1$ . Величини  $a_{kj}^{(i)}$ , що входять у систему рівнянь (4.56), будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= f_1 Q_{31}(\beta, l) + f_2 Q_{11}(\beta, l) + f_3 U_1(\beta, l), \\ a_{12}^{(1)} &= f_1 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_2 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + \\ &+ f_3 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)), \\ a_{21}^{(1)} &= f_4 Q_{31}(\beta, l) + f_5 Q_{21}(\beta, l) + f_6 Q_{11}(\beta, l) + f_7 U_1(\beta, l), \\ a_{22}^{(1)} &= f_4 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + f_5 (Q_{11}(\beta, l) - K_1 \zeta V_1(\beta, l)) + \\ &+ f_6 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + f_7 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)), \\ a_{11}^{(2)} &= f_1 Q_{32}(\beta, l) + f_2 Q_{12}(\beta, l) + f_3 U_2(\beta, l), \\ a_{12}^{(2)} &= f_1 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + f_2 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + \\ &+ f_3 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21}^{(2)} &= f_4 Q_{32}(\beta, l) + f_5 Q_{22}(\beta, l) + f_6 Q_{12}(\beta, l) + f_7 U_2(\beta, l), \\
a_{22}^{(2)} &= f_4 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + f_5 (Q_{12}(\beta, l) + K_1 \zeta V_2(\beta, l)) + \\
&+ f_6 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + f_7 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

З умови існування розв'язку алгебраїчної системи (4.56) отримаємо характеристичне рівняння для визначення параметра  $\beta$ :

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.58}$$

Якщо параметр  $\beta$  визначено, то з розв'язку системи (4.56) знайдемо  $C_{3i} = -C_{4i}(a_{12}^{(i)}/a_{11}^{(i)})$ .

Аналогічним чином, задовольняючи умови (4.44) і (4.46), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно сталих  $C_{1i}$  і  $C_{2i}$  для випадку, коли лівий торець балки вільний від навантажень

$$\begin{cases} C_{1i} a_{11}^{(i)} + C_{2i} a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{1i} a_{21}^{(i)} + C_{2i} a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{4.59}$$

При цьому  $C_{3i} = -K_2 C_{1i}$ ,  $C_{4i} = -b_2 C_{2i}$ , де  $K_2 = s^2 \beta^2$ . Відповідно, величини  $a_{kj}^{(i)}$ , що входять у систему рівнянь (4.59), будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} &= f_1 (\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2 Q_{31}(\beta, l)) + f_2 (\zeta V_1(\beta, l) - K_2 Q_{11}(\beta, l)) + \\
&+ f_3 (S_1(\beta, l) - K_2 U_1(\beta, l)), \\
a_{12}^{(1)} &= f_1 (\zeta U_1(\beta, l) - b_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_2 (S_1(\beta, l) - b_2 U_1(\beta, l)) + \\
&+ f_3 (T_1(\beta, l) - b_2 V_1(\beta, l)), \\
a_{21}^{(1)} &= f_4 (\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2 Q_{31}(\beta, l)) + f_5 (\zeta U_1(\beta, l) - K_2 Q_{21}(\beta, l)) + \\
&+ f_6 (\zeta V_1(\beta, l) - K_2 Q_{11}(\beta, l)) + f_7 (S_1(\beta, l) - K_2 U_1(\beta, l)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22}^{(1)} &= f_4(\zeta U_1(\beta, l) - b_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_5(\zeta V_1(\beta, l) - b_2 Q_{11}(\beta, l)) + \\
&+ f_6(S_1(\beta, l) - b_2 U_1(\beta, l)) + f_7(T_1(\beta, l) - b_2 V_1(\beta, l)), \\
a_{11}^{(2)} &= -f_1(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_2(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + \\
&+ f_3(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)), \\
a_{12}^{(2)} &= -f_1(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) + f_2(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + \\
&+ f_3(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)), \\
a_{21}^{(2)} &= -f_4(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_5(\zeta U_2(\beta, l) + K_2 Q_{22}(\beta, l)) - \\
&- f_6(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + f_7(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)); \\
a_{22}^{(2)} &= -f_4(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) - f_5(\zeta V_2(\beta, l) + b_2 Q_{12}(\beta, l)) + \\
&+ f_6(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + f_7(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)).
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

Частотне рівняння матиме вигляд (4.58). Після визначення  $\beta$  з розв'язку системи (4.59) знайдемо  $C_{2i} = -C_{1i}(a_{11}^{(i)}/a_{12}^{(i)})$ .

Таким чином, отримана досить проста розрахункова схема розв'язування задачі про власні згинальні коливання балки Тимошенка з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Розв'язки представлені для жорсткого кріплення і незакріпленого торця балки. За рахунок подання розв'язку у вигляді (4.50) можна без особливих труднощів реалізувати і інші, що найбільш часто зустрічаються на практиці типи граничних умов. Запропонована формульна схема розв'язування даної задачі зручна і для реалізації її на ПК.

## 4.5 Аналіз алгоритмів та результати розрахунків власних коливань системи

### 4.5.1 Вільні коливання системи «оболонка—тверде тіло»

Як приклад використання запропонованого підходу до розв'язування задачі про визначення власних коливань розглядуваної системи, нижче наведено деякі результати розрахунків для зрізаної конічної оболонки з приєднаним на торці абсолютно

твердим тілом. У цьому випадку слід покласти

$$s = \frac{l-z}{\cos \alpha}, \quad r(s) = 1 + s \sin \alpha; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad (4.61)$$

де  $l$  і  $\alpha$  — висота і кут піврозтвору зрізаного конуса відповідно. Якщо у формулах (4.61) прийняти  $\alpha = 0$ , то отримаємо циліндричну оболонку одиничного радіуса. У розрахунках були використано вирази для  $\Psi_{ij}(p, q)$ , отримані на основі технічної теорії оболонок. Крім того, для визначеності вважалося, що до оболонки прикріплено тверде тіло, яке має форму кругового циліндра радіусом  $R$  і висотою  $H$ . У цьому випадку момент інерції  $J_{yc}$  визначатиметься за формулою

$$J_{yc} = \frac{m_0}{12}(3 + H^2), \quad \text{де } H = 2l_c.$$

Таблиця 4.1: Нижчі частоти коливань системи «тіло—оболонка» в залежності від кількості членів  $N$  у розкладах (4.20) при  $l = 4$ ,  $m_0 = 100$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $h = 0.01$ ,  $l_c = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$

$N$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
1	0.02460	0.13472	0.36141	0.99067	1.44920
2	0.01632	0.13185	0.35650	0.61950	0.93549
3	0.01574	0.12695	0.32523	0.61877	0.81494
4	0.01500	0.12681	0.32491	0.57754	0.81054
5	0.01495	0.12637	0.32272	0.57739	0.76240
6	0.01480	0.12636	0.32271	0.57617	0.76237
7	0.01479	0.12631	0.32201	0.57616	0.76122
8	0.01474	0.12630	0.32200	0.57588	0.76121
9	0.01474	0.12630	0.32175	0.57588	0.76106
10	0.01474	0.12630	0.32175	0.57582	0.76105

У табл. 4.1 подано результати розрахунку перших п'яти безрозмірних частот коливань оболонки з жорстко закріпленим торцем, що вільний від твердого тіла в залежності від кількості членів  $N$  в розкладах (4.20) при  $l = 4$ ,  $m_0 = 100$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $h = 0.01$ ,  $l_c = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$ .

Таблиця 4.2: Нижчі частоти коливань системи «тіло—оболонка» в залежності від маси твердого тіла  $m_0$  при  $l = 4$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $h = 0.01$ ,  $l_c = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$

$m_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
0	0.10799	0.34989	0.62869	0.73160	0.81765
$10^2$	0.01474	0.12629	0.32175	0.57582	0.76106
$10^3$	0.00469	0.04226	0.30743	0.57360	0.76019
$10^4$	0.00149	0.01344	0.30614	0.57339	0.76010
$10^5$	0.00047	0.00425	0.30602	0.57337	0.76010
(*)	—	—	0.30600	0.57336	0.76010

Наведені в табл. 4.1 результати розрахунків свідчать про швидку збіжність запропонованого варіанта побудови розв'язків задачі з використанням многочленів Лагранжа. Аналогічна збіжність спостерігається і при інших кутах піврозтвору  $\alpha$  зрізаного конуса. Стійкість обчислювального процесу забезпечує проведення розрахунків у широкому діапазоні параметрів задачі. При зменшенні відносної товщини оболонки, швидкість збіжності обчислювального процесу уповільнюється.

Поведінка частот коливань системи в залежності від величини безрозмірної маси тіла  $m_0$  наведено у табл. 4.2 при  $l = 4$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $h = 0.01$ ,  $l_c = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$ . Із таблиці видно, що збільшення маси твердого тіла приводить до зменшення частот системи. При цьому перші дві частоти прямують до нуля, а інші до своїх граничних значень, які відповідають частотам коливань оболонки з жорстко закріпленими торцями для кругової моди з  $n = 1$  (позначені в таблиці зірочкою). Таким чином, наявність твердого тіла на одному з торців оболонки може привести до появи в системі двох достатньо низьких перших частот, які зумовлені рухомістю твердого тіла.

На рис. 4.2 показано поведінку перших трьох власних частот системи «конічна оболонка—тверде тіло» в залежності від кута піврозтвору конуса  $\alpha^\circ$  і маси твердого тіла  $m_0$  при  $l_c = 0.5$ ,  $l = 4$ ,  $h = 0.01$  і  $\nu = 0.3$ . Зі збільшенням маси твердого тіла  $m_0$  спостерігається монотонне зниження власних частот даної системи. Зі збільшенням же кута піврозтвору конуса  $\alpha$  спостерігається зро-

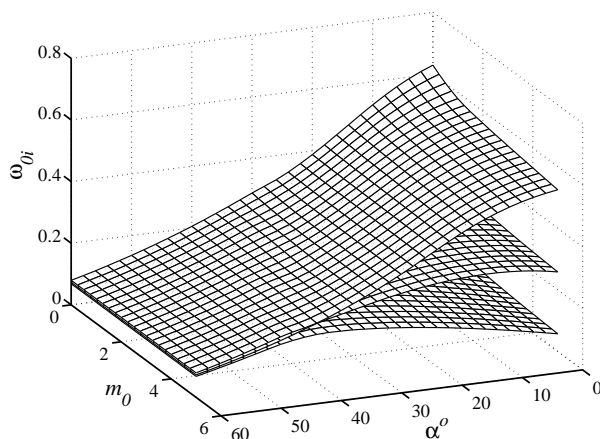


Рис. 4.2: Поведінка перших трьох власних частот системи «конічна оболонка—тверде тіло» в залежності від кута піврозтвору конуса  $\alpha^\circ$  і маси твердого тіла  $m_0$  при  $l_c = 0.5$ ,  $l = 4$ ,  $h = 0.01$  і  $\nu = 0.3$

стання а потім зниження частот. При цьому має місце суттєве згущення всього спектра власних частот. Так, вже при  $\alpha = 40^\circ$  відмінність між сусідніми частотами спостерігається лише в третій значущій цифрі.

На рис. 4.3 показано поведінку перших трьох форм власних коливань системи «конічна оболонка—тверде тіло» в залежності від маси твердого тіла  $m_0$ . Результати отримані при наступних вихідних даних  $l_c = 0.5$ ,  $l = 4$ ,  $h = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$  і  $\alpha = 15^\circ$ . Тут було введено позначення  $z^* = z/l$ . Як бачимо, зміна маси тіла веде до зміни форм коливань розглянутої системи. Слід зазначити, що в граничному випадку, коли  $m_0 \rightarrow \infty$ , перші дві частоти наближаються до нуля, а третя до першої частоти зрізаної конічної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями. При цьому перші дві форми коливань розглядуваної системи вироджуються, оскільки нульовим частотам відповідають тривіальні розв'язки задачі (4.17)—(4.19), а третя форма наближається відповідно до виду першої форми коливань зрізаної конічної оболонки з двома

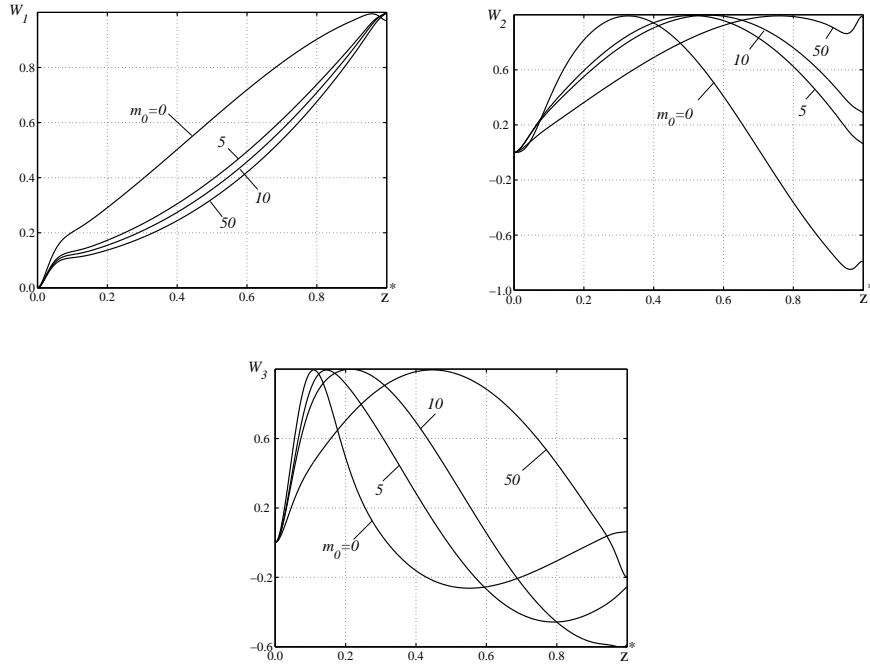


Рис. 4.3: Поведінка перших трьох форм власних коливань системи «конічна оболонка—тверде тіло» в залежності від маси твердого тіла  $m_0$  при  $l_c = 0.5$ ,  $l = 4$ ,  $h = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $n = 1$  і  $\alpha = 15^\circ$ .

жорстко закріпленими торцями.

#### 4.5.2 Вільні коливання системи «балка Тимошенка — тверде тіло»

Нижче наведені деякі результати розрахунків для випадку жорсткого кріплення торця оболонки при  $z = 0$ .

На рис. 4.4 показані перші чотири власні форми і відповідні їм частоти коливань жорстко закріпленої балки Тимошенка, що несе на вільному торці тверде тіло.

В якості вхідних даних були прийняті дані праці [111]:  $e = 0.2$ ;  $\eta = 0.01$ ;  $\mu = 1$ ;  $j = 0.2$ ;  $\kappa = 1/1.2$ ;  $\nu = 0.3$ . Зв'язок безрозмірних

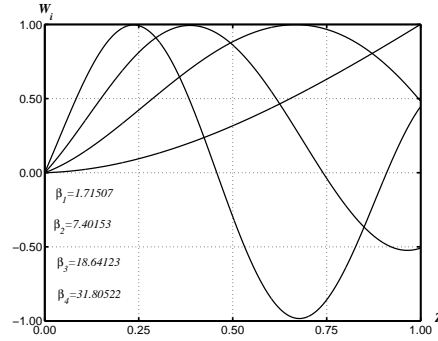


Рис. 4.4: Перші чотири власні форми коливань і відповідні їм частоти жорстко закріпленої балки Тимошенка з приєднаним на торці твердим тілом

величин, введених в зазначеній праці, з величинами представленими формулами (4.36), здійснюється за формулами:

$$\eta = r^2, \quad \lambda = \frac{2(1 + \nu)}{\varkappa}, \quad e = l_c, \quad \mu = m_0,$$

$$s^2 = \lambda\eta, \quad J_{y_1} = \mu(e^2 + j^2), \quad j = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{\mu l^2}}.$$

При цьому всі лінійні розміри віднесено до довжини балки ( $L = l$ ).

Порівняння отриманих результатів з частотами і формами, наведеними в праці [111], свідчить про їх повний збіг.

Звернемося до питання про можливість застосування наведеної розрахункової схеми для визначення власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним на торці абсолютно твердим тілом. Для можливості проведення порівняння отриманих результатів, перейдемо до безрозмірних величин, які далі позначено (\*). Будемо вважати, що до оболонки приєднано тверде тіло, що має форму кругового циліндра радіусом  $R$  і довжиною  $H = 2l_c$ . Якщо у формулах (4.36) покласти  $L = R$ , а також врахувати, що  $F = 2\pi Rh$ ,



$J = \pi R^3 h$ , де  $h$  – товщина оболонки, тоді будемо мати

$$\beta^{*2} = \frac{(1 - \nu^2)}{2} \beta^2, \quad m_0 = \frac{1}{2} m_0^*, \quad r^2 = \frac{1}{2},$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{2} \left[ m_0^* r_c^2 + \frac{m_0^*}{12} (H^2 + 3) \right].$$

Таблиця 4.3: Частоти коливань системи, отримані за різними розрахунковими схемами (*I* – оболонкова схема, *II* – балкова схема Тимошенка, *III* і *IV* – схема з урахуванням тільки деформацій зсуву або лише інерції повороту, *V* – схема Ейлера–Бернуллі)

$l$	2	4	6	8	10
$\beta_1^*$					
<i>I</i>	0.04104	0.02062	0.01266	0.00868	0.00640
<i>II</i>	0.04152	0.02073	0.01269	0.00868	0.00640
<i>III</i>	0.04156	0.02076	0.01271	0.00869	0.00640
<i>IV</i>	0.05582	0.02372	0.01367	0.00909	0.00660
<i>V</i>	0.05600	0.02376	0.01369	0.00910	0.00660
$\beta_2^*$					
<i>I</i>	0.21491	0.16684	0.12665	0.09380	0.07040
<i>II</i>	0.21560	0.16707	0.12666	0.09380	0.07040
<i>III</i>	0.21856	0.16971	0.12842	0.09490	0.07110
<i>IV</i>	0.45942	0.24775	0.16542	0.11600	0.08380
<i>V</i>	0.46749	0.25257	0.16903	0.11840	0.08530
$\beta_3^*$					
<i>I</i>	0.59670	0.34020	0.25126	0.20393	0.16650
<i>II</i>	0.68582	0.35616	0.25673	0.20530	0.16650
<i>III</i>	0.68635	0.35722	0.25836	0.20749	0.16890
<i>IV</i>	2.39765	0.86431	0.46155	0.30342	0.22220
<i>V</i>	3.86339	1.02308	0.501883	0.32016	0.23180

Усі інші співвідношення для введених за формулами (4.36) безрозмірних величин залишаються без змін. У всіх розрахунках коефіцієнт зсуву  $\varkappa$  визначався за такою формулою [105]:

$$\varkappa = \frac{2(1 + \nu)}{(4 + 3\nu)}. \quad (4.62)$$

У табл. 4.3 наведено результати обчислень перших трьох частот згинних коливань системи. При цьому були прийняті наступні вхідні дані:  $m_0^* = 50$ ;  $l_c = 0.5$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $h = 0.01$ . Довжина оболонки  $l$  варіювалася. Розрахунки були проведені на основі технічної теорії оболонок — (I), з використанням балкової теорії Тимошенка — (II), за балковою теорією з урахуванням тільки деформацій зсуву ( $r^2 = 0$ ) — (III), з урахуванням лише інерції повороту поперечного перерізу балки ( $s^2 = 0$ ) — (IV) і за балковою схемою Ейлера—Бернуллі ( $r^2 = s^2 = 0$ ) — (V).

Результати таблиці показують, що при вибраній масі тіла елементарна теорія балок дає хороші результати при обчисленні першої частоти тільки для довгих оболонок ( $l \geq 10$ ). Урахування деформацій зсуву та інерції повороту в рівняннях балки значно покращують точність балкового наближення розглядуваної конструкції. Так, при  $l > 6$  перші дві частоти, обчислені з теорії оболонок і по теорії балок Тимошенка практично збігаються, а для третьої частоти розбіжність становить не більше 3%. При цьому визначальну роль відіграє врахування деформацій зсуву. Інерція повороту може мати істотний вплив при розрахунку вищих частот системи.

Просторове зображення поверхні відносної похибки  $\delta_i$  (вираженої у відсотках) визначення перших трьох частот коливань системи за балковою теорією Тимошенка як функції від маси приєданого тіла і довжини оболонки показано на рис. 4.5. З наведених рисунків видно, що похибки  $\delta_i$  істотно залежать від маси приєданого тіла і довжини оболонки.

Збільшення довжини оболонки при фіксованій масі тіла і збільшення маси тіла при фіксованій довжині оболонки призводить до зменшення похибок  $\delta_i$ . Так, вже при  $m_0 > 1$  і  $l > 1$  похибка визначення першої частоти системи не перевищує 5%. Похибки визначення перших трьох частот системи не перевищують 1% при  $m_0 > 1$  і  $l > 6$ .

Амплітудні значення  $W_i$  перших чотирьох форм коливань оболонки, віднесені до їх максимальних значень, показано на рис. 4.6 ( $z^* = z/l$ ). Суцільними лініями показані форми коливань, визначені за теорією оболонок, штриховими лініями — за теорією балок Тимошенка і штрих-пунктирними лініями — з елементар-

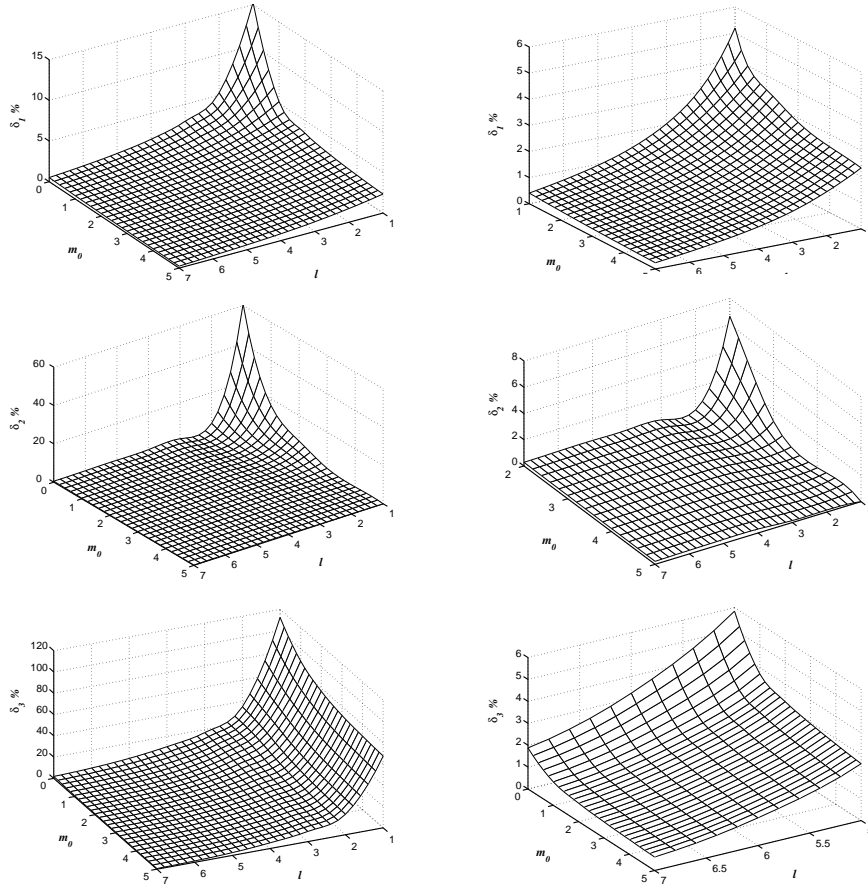


Рис. 4.5: Відносна похибка  $\delta_i\%$  обчислення перших трьох частот системи за балковою теорією Тимошенка в залежності від маси твердого тіла  $m_0$  і довжини оболонки  $l$

ної теорії балок. В якості вихідних даних вибиралися дані, при яких було отримано результати таблиці для  $l = 4$ . З наведених рисунків випливає, що балкова модель Тимошенка дозволяє визначати не тільки нижчі частоти розглянутої механічної конструкції, а й відповідні їм форми коливань. Максимальні відмінності у формах коливань при їх розрахунку за розглянутими схемами спостерігаються в околі торцевих перерізів оболонки. Ці відмін-

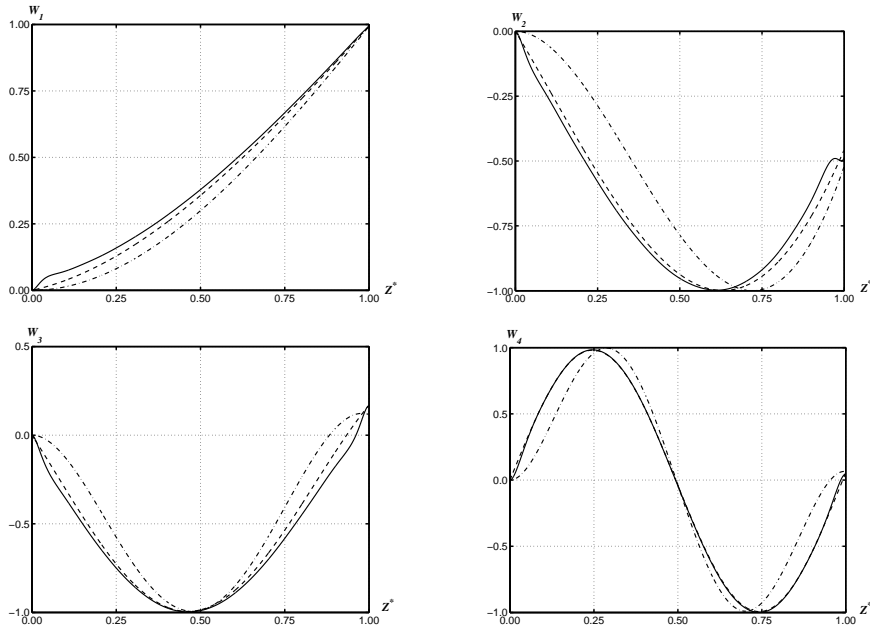


Рис. 4.6: Порівняння амплітудних значень перших чотирьох форм коливань системи, визначених з теорії оболонок (суцільні лінії), за балковою теорією Тимошенка (штрихові лінії) і за балковою теорією Ейлера—Бернуллі (штрих-пунктирні лінії)

ності мають локальний характер і зумовлені проявом крайових ефектів деформування оболонки, які посилюються при зменшенні її відносної товщини. У свою чергу, елементарна теорія балок при вибраних параметрах системи дає задовільні результати лише при розрахунку першої форми коливань.

З наведеного аналізу результатів розрахунку частот і форм власних коливань циліндричної оболонки з приєднаним до її торця абсолютно твердим тілом випливає, що балкова теорія, побудована на урахуванні деформацій зсуву та інерції повороту поперечного перерізу, має істотно більшу область застосування по відношенню до класичної теорії балок Ейлера—Бернуллі. Вона дає прийнятні для практичного використання результати при визначенні не тільки нижчих, а й вищих форм коливань розглядуваної механічної системи.

## Список літератури

- [1] Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
- [2] Александрович Л.И., Лампер Р.Е. Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин Баку, 1966. М.: Наука, 1967. С. 27–29.
- [3] Алумяэ Н.А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. *Изв АН Эст.ССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук.* 1960. Т. 10, № 1. С. 3–15.
- [4] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
- [5] Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156 с.
- [6] Бабский В.Г. Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1976. 504 с.
- [7] Балакирев Ю.Г., Шмаков В.П. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с полусферическим днищем. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: Изд. НЭТИ, 1984. С. 28–32.

- [8] Балакирев Ю.Г. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью. *Инж. журнал: Механика твердого тела*. 1967. № 5. С. 116—123.
- [9] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
- [10] Бреславский В.Е. Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким заполнителем и сосредоточенными массами. *Проблемы машиностроения* 1981. № 14. С. 27—32.
- [11] Бреславский В.Е. Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем. Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21 — 28 мая, 1973 г. М.: Наука, 1973. С. 271—276.
- [12] Брусиловский А.Д., Мельникова Л.М. К определению собственных частот и форм колебаний оболочек вращения. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1971. № 6. С. 34—37.
- [13] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
- [14] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
- [15] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- [16] Вибрации в технике. Справочник в 6 т; под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 352 с.
- [17] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук*. 1957. Т. 12, вып. 5(77). С. 3—122.

- [18] Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Ленинград: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [19] Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур. Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989. 247 с.
- [20] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений. *Успехи математических наук*. 1961. Т. 16, вып. 3(99). С. 171–174.
- [21] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
- [22] Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
- [23] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэроупругость конструкций. М.: Физико-математическая литература, 2000. 592 с.
- [24] Григоренко Я.М., Кокошкін С.С. Про один підхід до розв'язання задачі теорії оболонок методом скінченних елементів. *Доповіді АН УРСР, серія А*. 1980. № 3. С. 46–51.
- [25] Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 122 с.
- [26] Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость. Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (труды III семинара). — Томск, Томский ун-т. 1978. С. 55–60.
- [27] Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вища школа, 1984. 208 с.
- [28] Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.

- [29] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 200 с.
- [30] Заруцкий В.А. Теория и методы определения напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек. *Прикладная механика*. 2000. Т. 36, № 10. С. 3–24.
- [31] Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
- [32] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Ленинград: Физматгиз, 1962. 708 с.
- [33] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
- [34] Кладиного В.С. Собственные колебания полого деформированной мембраны с жесткой вставкой. Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН Украины. 1991. С. 18–29.
- [35] Кладиного В.С., Троценко В.А. Об уравнениях возмущенного состояния предварительно деформированной гибкой оболочки с присоединенным твердым телом. *Доклады АН Украины*. 1992. № 5. С. 61–65.
- [36] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
- [37] Комаренко О.Н., Троценко В.А. Варіаційний метод розв'язування задач трансмісії з головною умовою спряження. *Український математичний журнал*. 1999. Т. 51, № 2. С. 762–775.
- [38] Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях. *Теоретическая и прикладная механика*. 2001. Вып. 32. С. 158–163.



- [39] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989. 416 с.
- [40] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1948. Т. 1. — 535 с.
- [41] Кулешов В.Б., Швейко Ю.Ю. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. *Изв. АН СССР, Механика твердого тела*. 1971 № 3. С. 126—136.
- [42] Кулешов В.Б., Швейко Ю.Ю. Неосесимметричные колебания круглых и кольцевых пластин, взаимодействующих с жидкостью. *Исследования по теории сооружений*. 1972. № 19. С. 28—40.
- [43] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 1. 467 с.
- [44] Ламб Г. Гидродинамика. М.: Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
- [45] Луковский И.А. Определение частот и форм колебаний жидкости в сосуде на основе вариационного принципа Бейтмена. *Аналитические методы исследования динамики сложных систем*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. С. 3—11.
- [46] Медведев В.И., Соков Л.М. О собственных колебаниях сферических оболочек. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1975. Вып. 2. С. 36—43.
- [47] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
- [48] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
- [49] Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. — 148 с.

- [50] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
- [51] Моисеев Н.Н. К теории колебаний упругих тел, имеющих полости с жидкостью. *Прикладная математика и механика*. 1959. Т. 23, Вып. 5. С. 862—878.
- [52] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
- [53] Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов. *Изв. РАН: Механика твердого тела*. 1998. № 6. С. 166—174.
- [54] Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. *Прикладная математика и механика*. 1956. Т. 20, № 1. С. 21—38.
- [55] Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
- [56] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Судостроение, 1962. 431 с.
- [57] Паймушин В.Н. Нелинейные задачи сопряжения составных пространственных тел, тонких оболочек и вариационные методы их решения. *Прикладная механика и математика*. Т. 49, Вып. 2. 1985. С. 340—344.
- [58] Прагер В. Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях. Механика, М.: 1969. Т.5. С. 139—144.
- [59] Пшеничников Г.И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения. *Инженерный журнал*. 1965. Т. 5, вып. 4. С. 685—690.
- [60] Пшеничников Г.И. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения. *Инженерный журнал. Механика твердого тела*. 1967. № 4. С. 124—135.

- [61] Рабинович Б.И., Шмаков В.П., Кобычкин В.С. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью. *Исследования по теории сооружений*. 1970. С. 68–84.
- [62] Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. 223 с.
- [63] Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наукова думка, 1991. 432 с.
- [64] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
- [65] Товстик П.Е. Низкочастотные колебания выпуклой оболочки вращения. *Изв. АН СССР, Механика твердого тела*. 1975. № 6. С. 110–116.
- [66] Троценко В.А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала. *Изв. АН СССР: Механика твердого тела*. 1980. № 6. С. 166–177.
- [67] Троценко В.А. Применение вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран. *Изв. РАН: Механика твердого тела*. 1996. № 4. С. 168–180.
- [68] Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных полостях с перегородками. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. 320 с.
- [69] Троценко В.А., Богун Р.И. Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности. *Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2008. Т. 5, № 2. С. 304–333.
- [70] Троценко В.А., Кладинога В.С. Неосесимметричные колебания предварительно напряженной оболочки вращения с присоединенным жестким диском. *Прикладная механика*. 1994 Т. 30, № 7. С. 17–24.

- [71] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Методы расчета собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом. *Нелелінійні коливання*. 2004, Т. 7, № 2. С. 263—285.
- [72] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения. *Нелелінійні коливання*. 2005. Т. 8, № 3. С. 415—432.
- [73] Троценко Ю.В. Свободные колебания оболочки вращения с присоединенным на торце абсолютно твердым телом. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Комплексний аналіз і течії з вільними границями»*. 2006, Т. 3, № 4, С. 474—495.
- [74] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Равномерно сходящийся метод Ритца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола. *Акустичний вісник*. 2008, Т. 11, № 2. С. 45—57.
- [75] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Математическая модель поперечных движений резервуара с жидкостью, закрепленного на упругой опоре. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем»*. 2009. Т. 6, № 3. С. 215—231.
- [76] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью. *Акустичний вісник*. 2010. Т. 13, № 3, С. 51—67.
- [77] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем»*. 2011. Т. 8, № 2. С. 244—257.
- [78] Троценко Ю.В. Свободные колебания тонкостенного стержня с подвесным резервуаром частично заполненным жидкостью. *Акустичний вісник*. 2012. Т. 15, № 3. С. 53—66.

- [79] Троценко В.А. Троценко Ю.В. К расчету вынужденных колебаний стержня с подвесным резервуаром. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Аналітична механіка та її застосування»*. 2012. Т. 9, № 1. С. 352–364.
- [80] Троценко В.А. Троценко Ю.В. Определение свободных колебаний жидкости в резервуарах сложной геометрии. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем»*. 2013. Т. 10, № 2. С. 222–234.
- [81] Троценко Ю.В. Об определении собственных колебаний тонкостенных незамкнутых в меридиональном направлении оболочек вращения. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем»*. 2014. Т. 11, № 4, С. 330–354.
- [82] Троценко В.А. Троценко Ю.В. Применение метода Рунге в сочетании с методом декомпозиции области для решения задачи о свободных колебаниях оболочек вращения. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України «Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем»*. 2014. Т. 11, № 4, С. 355–375.
- [83] Троценко Ю.В. Вынужденные колебания стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью. *Доповіді НАН України*. 2014. № 4, С. 56–63.
- [84] Троценко Ю.В. Определение частот и форм собственных колебаний жидкости в составных резервуарах. *Нелінійні коливання*. 2015. Т. 18, № 1, С. 120–132.
- [85] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Неосесимметричные колебания оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. *Нелінійні коливання*. 2015. Т. 18, № 3. С. 394–412.
- [86] Троценко В.А., Троценко Ю.В. Вільні коливання циліндричної оболонки, що підкріплена пружним кільцевим ребром. *Нелінійні коливання*. 2022. Т. 25, № 1. С. 89–107.

- [87] Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка. — 1969. — 250 с.
- [88] Швейко Ю.Ю., Брусиловский А.Д. О собственных колебаниях цилиндрических оболочек, подкрепленных поперечными ребрами жесткости. *Расчеты на прочность*. 1971. Вып. 15. С. 312—327.
- [89] Швейко Ю.Ю., Гаврилов Ю.В., Брусиловский А.Д. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрической оболочки. *Доклады науч.-техн. конф. Моск. энерг. ин-та*. 1965. С. 131—148.
- [90] Шетухин В.Л., Шмаков В.П. Приближенный метод решения задачи о колебаниях жидкости в полостях вращения. *Прикладная механика*. 1983. Т. 19, № 9. С. 91—95.
- [91] Шмаков В.П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением. *Изв. АН СССР: Механика и машиностроение*. 1964. № 1. С. 170—173.
- [92] Шмаков В.П. Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова—Галеркина к решению краевых задач. *Инж. журнал: Механика твердого тела*. 1967. № 5. С. 129—136.
- [93] Шмаков В.П. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах. *Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. С. 157—162.
- [94] Шмаков В.П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2011. 287 с.
- [95] Aalami B. Atzori B. Flexural Vibrations and Timoshenko's Beam Theory. *AIAA J.* 1974. Vol. 12, N 5. P. 679—685.
- [96] Al-Najafi A.M.J., Warburton G.B. Free vibration of ring stiffened cylindrical shells. *J. Sound and Vibration*. 1970. Vol. 13. P. 9—25.

- [97] Alphonse Z. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics. *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 87 P. 102–114.
- [98] Bauer H.F. Hydroelastische Schwingungen einer Oberflächenspannungs-structur in einem Satellitenbehälter. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 1981. Vol. 5 (5). P. 303–313.
- [99] Benjeddon A. Vibrations of complex shells of revolution using B-spline finite elements. *Comput. Struct.* 2000. Vol. 74. P. 429–440.
- [100] Bauer H.F. Frequencies of a hydroelastic rectangular system. *Forsch. Ingenieur.* 1993. Vol. 59 (1, 2). P. 18–22.
- [101] Capodanno P. Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids. *Eur. j. Mech. B.* 1990. Vol. 9 (3). P. 289–306.
- [102] Caresta M., Kessissoglou N.J. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical - conical shells. *J. Sound and Vibr.* 2010. Vol. 329. P. 733–751.
- [103] Chilton L.K., Seshaiyer P. The hp mortar domain decomposition method for problems in fluid mechanics. *Int. j. Numer. Methods Fluids.* 2002. Vol. 40 (12). P. 1561–1570.
- [104] Collino F., Ghanemi S., Joly P. Domain decomposition method for Harmonic wave propagation: a general presentation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2000. Vol. 184. P. 171–211.
- [105] Cowper G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theorie. *Appl. Mech. J.* 1966. Vol. 33, N 2. P. 335–340.
- [106] Dieterman H.A. An analytically derived lumped-impedance model for the dynamic behaviour of a watertower. *Ingénieur-Archiv.* 1986. Vol. 56, P. 265–280.
- [107] Etraim E., Eisenberger M. Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells. *Thin - Walled Struct.* 2006. Vol. 44. P. 281–289.

- [108] Galletly G.D. On the in vacuo vibrations of simply supported ring-stiffened cylindrical shells. *U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Am. Soc. Mech. Eng., New York*. 1965. P. 225–231.
- [109] Kang J.H., Leissa A.W. Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells. *Transaction of the ASME*. 2004. Vol. 71. P. 502–507.
- [110] Kang J.H. Vibration analysis of complete conical shells with variable thickness. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2014. Vol. 14, 4. P. 1–24.
- [111] Laura P.A.A., Rossi R.E. Vibrations of a Timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other. *Appl. Acoust.* 1990. Vol. 30, N 4 P. 293–301.
- [112] Olson L.G., Bathe K.J. A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid – structure systems. *Nuclear Engineering a Design*. 1983. Vol. 76. P. 137–151.
- [113] Qu Y.G., Chen Y., Long X.H., Hua H.X., Meng G. A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical - conical shells. *Journal of Vibration and Control*. 2013. Vol. 19(16). P. 2319–2334.
- [114] Qu X., Chen X., Long X., Hua H., Meng G. A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations. *Eur. J. Mech., A/Solids*. 2013. Vol. 37. P. 200–215.
- [115] Siekman J., Chang S.C. On the change of natural frequencies of a sloshing liquid by movable divides. *Acta Mechanica*. 1971. Vol. 11. P. 73–86.
- [116] Sivadas K.R., Ganesan N. Free vibration analysis of combined and stiffened shells of revolution. *Comput. Struct.* 1993. Vol. 46. P. 537–546.



- [117] Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution partially filled with liquid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220, N 3. P. 341–358.
- [118] Trotsenko Yu.V. On the construction of coordinate functions for the Ritz method in the numerical analysis of non axially symmetric eigenoscillations of a dome-shaped shell of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220, N 4. P. 514–532.
- [119] Trotsenko Y.V. Vibrations of elastic shells of revolution partially filled with ideal liquid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 229 (4). P. 470–486.
- [120] Trotsenko Yu.V. Application of the Ritz method to the analysis of free vibrations of the conjugate shells of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. N 2. P. 306–322.
- [121] Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V. Structure of the integrals of equations of vibration for a conic shell closed at the vertex. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 73, N 10. P. 1633–1642.
- [122] Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V. Axially symmetric vibration of a complete conic shell. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 261, N 2. P. 319–336.
- [123] Wang C.M., Swaddiwudhipong S., Tian J. Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners. *J. Eng. Mech., ASCE*. 1997. Vol. 123. P. 134–142.
- [124] Wu S., Qu Y., Hua H. Vibration characteristics of a spherical - cylindrical - spherical shell a domain decomposition method. *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 49. P. 17–26.
- [125] Zarghamee M.S., Robinson H.R. A numerical method for analysis of free vibration of spherical shell. *AIAA J*. 1967. Vol. 5 (7). P. 1256–1261.

Наукове видання  
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**ТРОЦЕНКО Володимир Антонович,  
ТРОЦЕНКО Юрій Володимирович**

**ЗАСТОСУВАННЯ  
ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ  
У СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ  
ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК  
І ГІДРОПРУЖНОСТІ**

Київ, Науково-виробниче підприємство  
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2023

Художній редактор *Я. Ю. Савицька*

Підп. до друку 24.11.2023. Формат 60 × 90/16. Папір офс. № 1.  
Гарн. Computer Modern. Друк. офс. Ум. друк. арк. 25,5.  
Обл.-вид. арк. 18,5. Наклад 100 прим. Зам. № 10–405

НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»  
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного  
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої  
продукції

серія ДК № 2440 від 15.03.2006 р.  
01601, Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво “Фенікс”»  
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13<sup>б</sup>