

Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Дмитришина Романа Івановича

“Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди”

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. У 60-х роках минулого століття у теорії раціональних наближень функцій багатьох змінних почали застосовуватися гіллясті ланцюгові дробі — один із багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Основоположником цього наукового напрямку вважається В. Я. Скоробогатько. Свій подальший розвиток теорія гіллястих ланцюгових дробів отримала у дослідженнях В. Я. Скоробогатька, П. І. Боднарчука, Д. І. Боднара, М. О. Недашковського, Х. Й. Кучмінської, М. О’Донoghе, А. Кайт та інших. Поряд із гіллястими ланцюговими дробами загального вигляду виокремилися двовимірні неперервні дробі, дослідженню яких присвячені роботи Х. Й. Кучмінської, М. О’Донoghе, Дж. Мерфі, Б. Вердонк, А. Кайт, В. Семашка, О. М. Сусь, Т. М. Антонова та інших. Гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними вперше з’явилися у 1976 році в роботі Д. І. Боднара. З тих пір вони стали об’єктом досліджень Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, В. Семашка, Т. М. Антонової, О. Е. Баран, М. М. Бубняк та інших.

З’ясувалося, що, на відміну від загальних гіллястих ланцюгових дробів, гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними за своєю структурою є аналогами кратних степеневих рядів і, як наслідок, виявилися ефективним інструментом наближення аналітичних функцій багатьох змінних. Так, у перших роботах ці гіллясті ланцюгові дробі застосовано до задач інтерполяції функцій багатьох змінних. Для них також отримано ряд багатовимірних аналогів ознак збіжності неперервних дробів.

Проте значна кількість задач, пов’язаних із даною тематикою, залишаються відкритими. Це стосується, зокрема, встановлення простих і необхідних та/або достатніх ознак збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, побудови і дослідження ефективних алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у відповідні гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними, дослідження найширших областей збіжності різних класів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та отримання оцінок похибок наближень їхніми підхідними дробами.

З огляду на викладене вище, вважаю тему дисертаційного дослідження обґрунтованою та актуальною.

2. Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (повний її обсяг 340 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку літератури, що містить 226 найменувань, та додатків, що містять список публікацій за темою дисертації і відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

У першому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал про неперервні дробі та одне з їх багатовимірних узагальнень — гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними. Викладено історичні відомості наукових здобутків щодо неперервних дробів,

пов'язаних з досліджуваною тематикою. Зокрема, для деяких класів відповідних неперервних дробів розглянуто алгоритми їх побудови, ознаки збіжності та зображення ними деяких аналітичних функцій, заданих формальними степеневими рядами. Зроблено огляд результатів досліджень гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню збіжності (абсолютної збіжності, рівномірної збіжності) гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці. У теоремі 2.1 встановлено нове багатовимірне узагальнення класичної ознаки збіжності Ворішського про найширший замкнений круг збіжності з центром у початку координат для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними. У підрозділах 2.2 і 2.3 встановлено ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких відповідно мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ (теореми 2.3–2.8) і $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_{k-1}} (1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ (теореми 2.9–2.13). Усі ці ознаки збіжності є багатовимірними аналогами відповідних класичних результатів О. Перрона, А. Прінгсхайма, Е. Б. Ван Флека, Г. С. Волла і Дж. Ф. Пейдона. При доведенні результатів другого розділу застосовуються метод мажорант на основі формули різниці двох підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними і багатовимірні узагальнення деяких методів доведення із вказаних вище ознак збіжності для неперервних дробів. Окремо заслуговує на увагу оригінальне і нетривіальне доведення теореми 2.9.

Третій розділ присвячений зображенню аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. У підрозділі 3.1, за аналогією із одновимірним випадком, описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрізі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для кожного $n \geq 0$. У наступному підрозділі вперше проведено класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які, як з'ясувалося, є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів. У цьому ж розділі досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних C -дробів з нерівнозначними змінними (теореми 3.1 і 3.2), для багатовимірних g -дробів з нерівнозначними змінними (теореми 3.3 і 3.4), для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними (теореми 3.5 і 3.6) і для багатовимірних J -дробів з нерівнозначними змінними (теореми 3.7 і 3.8).

Четвертий розділ дисертаційного дослідження присвячено методам побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Тут особливу увагу заслуговує розроблений підхід, у якому алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дробу з нерівнозначними змінними отримано із використанням відповідних класичних алгоритмів. На основі цього підходу побудовано і досліджено алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневих ряду у багатовимірний регулярний C -дріб з нерівнозначними змінними (теорема 4.1) і багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (теорема 4.7), а також побудовано і досліджено багатовимірний qd -алгоритм Рутісхаузера (теорема 4.2 і

4.3) і багатовимірний g -алгоритм Бауера (теореми 4.5 і 4.6). Цілком природними є встановлені у теоремі 4.4 необхідні і достатні умови існування багатовимірного S -дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневому ряду. У кожному із побудованих алгоритмів знайдено явні формули обчислення коефіцієнтів функціональних гідлястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними за коефіцієнтами заданих формальних кратних степеневих рядів.

У *п'ятому розділі*, присвяченому дослідженню збіжності функціональних гідлястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, заслуговують на увагу розроблені методи, що використовують теорему про продовження збіжності із уже відомої малої області до більшої, парну частину іншого гідлястого ланцюгового дробу, формулу різниці між двома підхідними дробами гідлястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними та техніку множин значень для цих гідлястих ланцюгових дробів. Застосовуючи ці методи і результати другого розділу, у підрозділах 5.1 і 5.2 встановлено ознаки збіжності для багатовимірних регулярних C -дробів з нерівнозначними змінними (теореми 5.1–5.6) і багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними (теореми 5.7–5.13). Зокрема, доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових областей є областю збіжності багатовимірного S -дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей областю збіжності оберненого до нього гідлястого ланцюгового дробу. Окремо заслуговують на увагу наслідки 5.1 і 5.2 — нові ознаки збіжності для S -дробів (неперервних дробів). У підрозділі 5.2 також отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$ (теореми 5.15 і 5.16) на основі оригінального застосування ознаки збіжності періодичних неперервних дробів. У наступному підрозділі у теоремі 5.17 показано, що багатовимірний g -дріб з нерівнозначними змінними є парною частиною багатовимірного π -дробу з нерівнозначними змінними. На основі цього доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності як багатовимірного g -дробу з нерівнозначними змінними (теорема 5.18) так і різних його модифікацій (теореми 5.19 і 5.20). Отримано також оцінки похибок наближень для цих гідлястих ланцюгових дробів в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$ (теореми 5.21–5.23). В останньому підрозділі п'ятого розділу досліджується збіжність тісно пов'язаних між собою багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J -дробів з нерівнозначними змінними. По суті із встановлених ознак збіжності для одних гідлястих ланцюгових дробів цілком природно отримано ознаки збіжності для інших. Тут доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними (теорема 5.24–5.26) і відповідно отримано аналогічні результати для багатовимірних J -дробів з нерівнозначними змінними (наслідки 5.3–5.5). У теоремах 5.27–5.29 доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєданого дробу з нерівнозначними змінними, де коефіцієнти частинних знаменників дорівнюють нулю, в деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$, їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$, які є внутрішністями цих підмножин. Також доведено, що умовою збіжності для багатовимірного приєданого дробу з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цього гідлястого ланцюгового дробу. Аналогічні результати для відповідного багатови-

мірного J -дробу з нерівнозначними змінними наведено у наслідках 5.6–5.8. Крім цього, у теоремах 5.30–5.32 отримано ознаки збіжності для багатовимірного J -дробу з нерівнозначними змінними, де дійсні частини коефіцієнтів частинних знаменників дорівнюють нулю і уявні частини — невід’ємні. У наслідках 5.9–5.11 аналогічні ознаки наведено для відповідного багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними.

Останній шостий розділ присвячений застосуванню досліджених у попередніх розділах функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до наближення аналітичних функцій багатьох змінних. Тут за допомогою алгоритмів, розроблених у четвертому розділі, побудовано розвипення деяких аналітичних функцій багатьох змінних, зображених формальними кратним степеневими рядами, у відповідні функціональні гіллясті ланцюгові дробі з нерівнозначними змінними. Зокрема, побудовано зображення експоненціальної і степеневі функції багатьох змінних багатовимірними регулярними C -дробами з нерівнозначними змінними. Для побудованих розвипень на числових прикладах показано їх ефективність.

3. Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі одержані у дисертаційній роботі результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень для усіх наведених у цій роботі тверджень.

4. Апробація результатів і публікації. Результати дисертації досить повно опубліковані у провідних наукових журналах України та інших країн і є добре відомими спеціалістам. 22 статті із списку публікацій повністю відповідають вимогам щодо публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, 8 із них опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на численних вітчизняних і закордонних конференціях та фахових семінарах в Україні.

Автореферат повністю відображає зміст дисертації.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати і розроблені методи можуть мати перспективи подальшого застосування в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, а також можуть бути корисними для побудови і дослідження раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних.

6. Зауваження. До дисертаційної роботи є такі зауваження і побажання:

1. Для покращення сприйняття тексту дисертації доцільно перед вступом скласти перелік умовних позначень.

2. Зважаючи на обмеження (2.3) на с. 80, у формулюванні теореми 2.1 (с. 79) бажано уточнити вигляд нерівності (2.2) у випадку коли $i_k = 1$. Те саме стосується нерівності (5.22) на с. 211.

3. Доведення теорем 3.1 (с. 119), 3.3 (с. 123) і 3.5 (с. 126) подібні. Тому досить довести першу теорему, а доведення двох інших навести фрагментарно.

4. У подальших дослідженнях доцільно отримати оцінки швидкості збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J -дробів з нерівнозначними змінними.

5. У роботі допущена незначна кількість друкарських помилок.

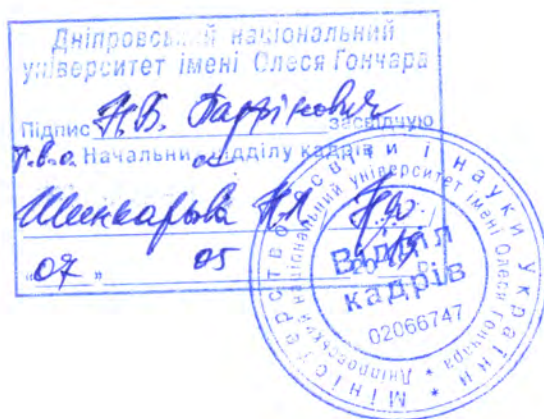
Вказані вище зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

7. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота "Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди" є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати, і задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та Наказом МОН № 40 від 12.01.2017 р.), щодо докторських дисертацій, а її автор, Дмитринин Роман Іванович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри
математичного аналізу і теорії функцій
Дніпровського національного
університету імені Олеся Гончара



Н. В. Парфінович



Надійшов
вчена рада
Секретар



співгодуваної

Канцелярія

13.05.2019 р.

/сатур О.Р./