ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА
на дисертацію Дмитришина Романа Івановича "Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми. Вивченням ланцюгових дробів математики займаються вже багато століть. Результати в цій галузі залишили найвидатніші математики К.Ф. Гаус, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, К. Якобі, А. Пуанкаре. Значний внесок у теорію зробив Т. Стілтьєс. Теорія ланцюгових дробів посідає особливе місце в аналізі. Програвши конкуренцію рядам за популярністю, в основному через нелінійність об'єктів, що вивчаються, і як наслідок, відносно бідний апарат досліджень, ланцюгові дроби мають важливі переваги над рядами. Це — краща швидкість збіжності і, зазвичай, ширша область збіжності. Тому неперервні дроби залишаються незамінним апаратом у теорії апроксимації. Окрім аналізу, ланцюгові дроби мають застосування в теорії чисел і обчислювальній математиці.

Серед проблем, які розглядає аналітична теорія ланцюгових дробів, можна виокремити раціональне наближення аналітичних функцій, встановлення ознак збіжності, побудова алгоритмів розвинення аналітичних (мероморфних) функцій у ланцюговий дріб. Класичні результати для однієї змінної у згаданих напрямках отримані переважно понад 100 років тому.

Якщо проаналізувати сучасні тенденції розвитку теорії функцій комплексної змінної, наприклад за сайтом arxiv.org, то принаймні половина праць присвячена функціям декількох комплексних змінних. Багатовимірні узагальнення ланцюгових дробів — гіллясті ланцюгові дроби — введені В.Я. Скоробагатьком відносно недавно, у 60-их роках минулого століття. Вивченням цих дробів займалися Д.І. Боднар, І.Я. Олексів, Х.Й. Кучмінська, В.С Сємашко, Т.М. Антонова, О.Є. Баран, дисертант та інші вітчизняні та зарубіжні математики. Однією з проблем, притаманних гіллястим ланцюговим дробам, є неоднозначна відповідність формальним кратним степеневим рядам.

Беручи це до уваги, дослідження гіллястих ланцюгових дробів є актуальним. Зокрема це стосується класу багатовимірних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, який є основним об'єктом розгляду дисертанта.

Опис та новизна результатів дисертації. Основний зміст роботи становлять шість розділів. Перший розділ присвячено огляду літератури, яка переважно стосується функцій однієї змінної, і основних результатів дисертації. З цього розділу видно, що дисертант поставив собі амбіційну мету — перенести класичні теореми для неперервних дробів однієї змінної на багатовимірні гіллясті ланцюгові дроби. Значною мірою йому це вдалося. Запорукою успіху став, зокрема, вдалий вибір об'єкту дослідження, а саме клас багатовимірних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, введений 1976 року науковим консультантом.

Нехай N — фіксоване натуральне число, $i(0)=0$, $\mathcal{I}_0=\{0\}$,

$$\mathcal{I}_k=\{i(k):\ i(k)=(i_1,i_2,\ldots,i_k),\ 1\le i_p\le i_{p-1},\ 1\le p\le k,\ i_0=N\},\ k\ge 1,$$

— множини мультиіндексів. Довільний гіллістий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними еквівалентними перетвореннями можна звести до вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{1}+\underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}. \tag{1}$$

У другому розділі класична ознака збіжності Ворпіцького перенесена на N-вимірні g-дроби (теорема 2.1). *Якщо коефіцієнти дробу* (1) *задовольняють нерівність*

$$|a_{i(k)}|\le q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})\ \text{для всіх}\ \ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1, \tag{2}$$

де $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\,k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних сталих таких, що* $0\le q_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 0$, *або* $0<q_{i(k)}\le 1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 0$, *тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу* $|z|\le 1-q_0^N$; *а у випадку* $q_{i(k)}=1/2$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 0$, *радіус круга збіжності є непокращуваним.*

При $N=1$, маємо $i(k)=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k\text{разів}})$, $i_k=1$, $k\in\mathbb{N}$, отримуємо класичний результат. На жаль питання, чи не випливає цей результат з теореми 1.17, яка належить О.Є.Баран, в дисертації не з'ясоване. Застосована методика дозволяє також одержати споріднені теореми для дробів, пов'язаних зі згаданими дробово-лінійним відображенням (теореми 2.2, 2.4, 2.5), а також ознаки рівномірної збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів. При цьому встановлена непокращуваність у певному сенсі множини збіжності. Також у цьому розділі отримано аналоги класичних теорем Ван Флека (теорема 2.10) і Волла (теорема 2.11).

Одні з найсильніших результатів дисертації доведено в розділі 5. До цього переліку я відношу теореми 5.7 і 5.8 з підрозділу 5.2. Відносно прості припущення теореми 5.7 ($\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}c_{i(k)}l_{i_k}\le 1$ для всіх $i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1}$, $k\ge 2$, де $l_k>0$, $1\le k\le N$) забезпечують збіжність багатовимірного S-дробу

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{i(1)}z_{i_1}}{1}+\underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{1} \tag{3}$$

де $c_{i(k)}>0$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, на декартовому добутку площин з розрізами по променю від $(-\infty,-l_k/4]$.

Слід однак віддати належне скромності дисертанта, який приховав цей чудовий результат за знаком об'єднання і параметрами α і M.

Накладання умов в стилі теореми 2.1 дозволяє оцінити швидкість збіжності дробу (3) в певній підобласті (теорема 5.15). Її будова досить складна, проте непорожність не викликає сумніву.

Хочу також відзначити результати підрозділів 5.3 і 5.4, де досліджуються багатовимірні g-дроби, J-дроби і приєднані дроби. Для встановлення ознаки збіжності (теорема 5.18) для g-дробів автору дисертації довелося спочатку встановити зв'язок між парною частиною π-дробу і g-дробом (теорема 5.17). У теоремі 5.21 також доведено оцінку швидкості збіжності g-дробів. Хоча область, в якій встановлена така оцінка, має складну структуру, у часткових випадках вона зводиться до перетину об'єднань параболічних областей з еліпосїдом, який залежить лише від вимірності простору. У теоремі 5.24 встановлено ознаки збіжності і рівномірної збіжності приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1}, i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{4}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. При цьому область збіжності є полікругом $(x_k - 1/l_k)^2 + y_k^2 < 1/l_k^2$. Дисертант не вказує на цей факт, але про це можна здогадатися з наслідку 5.3, оскільки образом даної області при перетворенні $\xi_k = 1/z_k$ є декартів добуток півплощин $\mathrm{Re}\,\xi_k > l_k/2$. Іншою особливістю цієї теореми та теореми 5.26 є те, що коефіцієнти $q_{i(k)}$ можуть набувати довільних комплексних значень з правої півплощини, тоді як у попередніх результатах розділу 5, коефіцієнти розташовані на одному промені.

Результати дисертанта тісно пов'язані з попередніми дослідженнями вчених у тематиці гіллястих ланцюгових дробів, особливо з працями Д.І. Боднара та його учнів, Т.М. Антонової та О.Є. Баран. Так при встановленні областей збіжності для приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних J-дробів з нерівнозначними змінними (теореми 5.27–5.32) істотно використовується теорема 1.18, яка належить Т.М. Антоновій і Д.І. Боднару. В основі результатів про відповідність багатовимірних дробів з нерівнозначнимии змінними формальному кратному степеневому ряду Лорана з розділу 3 лежить формула для різниці підхідних дробів, вперше встановлена Д.І. Боднаром. Проте цей розділ має допоміжний характер — його результати використовуються в розіділі 4.

Четвертий розділ посідає окреме місце в дисертації. Він стосується алгоритмів розвинення формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. У підрозділі 4.1 побудовано один з таких алгоритмів і знайдено явні формули для коефіцієнтів дробу. Теорема 4.1 встановлює необхідні і достатні умови відповідності побудованого C-дробу до заданого кратного степеневого ряду в точці $\mathbf{z} = 0$ в термінах визначників Ганкеля. Загальним недоліком результатів такого типу є складність застосування для обчислень, оскільки вимірність визначника зростає зі зростанням індексу коефіцієнта. Обчислення ж визначників вимірності кількох десятків є надскладною задачою навіть для сучасної комп'ютерної техніки. Цього недоліку позбавлені алгоритми з підрозділів 4.2, 4.3, у яких обчислення коефіцієнтів спирається на рекурентні формули. У підрозділі 4.2 узагально на випадок багатьох змінних qd-алгоритм Рутісгаузера, а у підрозділі 4.3 одержано багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера для C-дробів і для g-дробів відповідно. Теореми 4.3 і 4.6 встановлють необхідні і достатні умови існування для заданого формального кратного степеневого ряду відповідного гіллястого ланцюгового дробу, побудованого за цими алгоритмами.

Шостий розділ ілюструє застосування результатів четвертого розділу.

Обгрунтованість і достовірність наукових результатів. Наукове дослідження дисертанта проведено на високому науковому рівні. Усі математичні твердження, які містяться в теоремах і лемах дисертації є строго обгрунтованими і їхня достовірність не викликає сумніву.

Публікації та апробація результатів. Результати дисертації опубліковано у 44 працях, серед яких: 22 статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях, 8 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати доповідалися та обговорювалися на численних міжнародних конференціях як на Україні так і за кордоном, та наукових семінарах.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати можуть застосовуватися в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, а також в теорії апроксимації та обчислювальній математиці.

Критичні зауваження.

1. Кінець доведення теореми 2.6 занадто лаконічний, зокрема не видно, де саме автор використав припущення (2.43) теореми.

2. На с.106, 6-ий рядок знизу, неправильна нерівність.

3. Насправді з припущень теорем 3.2, 3.4, 3.6 і 3.8 випливає збіжність ряду Лорана не лише в точці $z = 0$, а й у довільному полікрузі з цетром в $z = 0$, який міститься в області D.

4. Зауваження 3.1 про те, що область збіжності гіллястого ланцюгового дробу може бути більшою ніж область збіжності ряду не підкріплена ні прикладами ні посиланнями.

5. Опечатка на с.111, 4-ий рядок зверху.

6. На с.114 перевіряються властивості метрики, яка визначена як норма різниці елементів. Цей факт добре відомий з курсу функціонального аналізу.

7. У формулюванні теорем 5.1, 5.2, 5.7, 5.8, 5.11, 5.20 та наслідку 5.1 можна опустити параметр M, фактично об'єднавши за ним множини збіжності.

8. Автор вживає нестандартні позначення, позначаючи однозначні вітки многозначних функцій Arg, Ln, Arctg. Однозначні вітки прийнято писати з маленькою літери, а самі многозначні функції — з великої.

9. Правильно писати *експонеційна* і *біномна* функція, а не *експонеціальна* і *біноміальна.*

10. Ряд (6.1) на с.287 не формальний, а збіжний у всьому просторі.

Наведені зауваження не впливають на високу оцінку дисертації. Взагалі ж дисертація добре оформлена і вичитана.

Висновки. Дисертація Дмитришина Р. І. "Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди" є завершеним науковим дослідженням. Отримані в ній результати є вагомим внеском в теорію гіллястих ланцюгових дробів. Вони пройшли належну апробацію та опубліковані у виданнях відповідного рівня. Результати, встановлені дисертантом, напевно знайдуть своє застосування. Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертація Дмитришина Р. І. "Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди," подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, відповідає вимогам щодо змісту докторських дисертацій "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013, результати дослідження відповідають вимогам до наукового рівня результатів докторської дисертації, а її автор Дмитришин Роман Іванович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій
і теорії ймовірностей
Львівського національного університету
ім. І. Франка

І. Е. Чижиков

22.05.2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА
ЗКПО 02070987

Підпис Чижикова І. Є.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.01 27. 05. 2019 р.
Секретар ради /Сатур О. Р./

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія