ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Осипчука Михайла Михайловича
"Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення",
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю
01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

Дисертаційна робота М. М. Осипчука присвячена дослідженню актуальних проблем, які стосуються симетричних α-стійких випадкових процесів та тісно пов'язаної з ними теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Симетричні α-стійкі випадкові процеси становлять клас процесів Маркова зі стійкими скінченновимірними розподілами. Такі розподіли природно виникають у техніці, фізиці, астрономії та економіці, а також в граничних теоремах для сум незалежних випадкових величин. Нагадаємо, що розвиток теорії ймовірнісних стійких розподілів пов'язаний насамперед з працями таких авторів, як P. Levy, О. Я. Хінчин, Б. В. Гніденко, А. М. Колмогоров, Є. Б. Динкін, А. В. Скороход, І. І. Гіхман, В. С. Королюк, Г. Л. Кулініч, М. І. Портенко, І. А. Ібрагімов, Ю. В. Ліннік, W. Feller, D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, H. P. McKean та ін. При цьому серед можливих значень показника α, $0<\alpha\leq 2$ найбільш вивченим є випадок $\alpha=2$, що відповідає процесу броунівського руху. Що стосується α-стійких випадкових процесів при $1<\alpha<2$, то в теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу вони відіграють таку ж саму роль, яку відіграє вінерів процес чи процес броунівського руху в класичній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку параболічного типу та теорії теплових потенціалів для таких рівнянь. Найбільш важливі результати, присвячені вивченню псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу з використанням методу теорії потенціалу, що відповідають відповідним класам марковських процесів (у тому числі і симетричним α-стійким процесам), були отримані та відображені в працях С. Д. Ейдельмана, Я. М. Дриня, С. Д. Івасишена, А.Н. Кочубея, N. Jacoba. Серед них відзначимо статтю А. Н. Кочубея "Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы", Изв. АН СССР. Сер, матем.,1988, т. 52, выпуск 5, 909 – 934. У ній при деяких умовах щодо символів псевдодиференціальних операторів, які входять до параболічного псевдодиференціального рівняння, побудовано та досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші цього рівняння і доведено, що він є щільністю перехідних ймовірностей деякого необривного неперервного справа строго марковського процесу без розривів другого роду. Отриманий тут результат стосується однієї з основних задач теорії марковських процесів, яка полягає в побудові широких класів таких процесів за заданими твірними інтегродиференціальними і, зокрема, псевдодиференціальними операторами. До аналітичного підходу в дослідженні розглядуваного в дисертації класу марковських процесів ми відносимо також роботи М. І. Портенка, К. Богдана (K. Bogdan) і Т. Якубовського (T. Jakubowski), Й.-У. Льобуса (J.-U. Loebus) і М. І. Портенка, О. М. Кулика, В. П. Кнопової та ін. в яких вивчалися певного типу адитивні збурення інфінітезимального оператора симетричного стійкого випадкового процесу. Аналіз відзначених нами праць показує, що на сьогоднішній день практично відкритими залишаються питання, пов'язані з розвитком загальної теорії потенціалу при дослідженні початково-крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь, яку можна використати для побудови широких класів багатовимірних марковських процесів в середовищах, де на деяких фіксованих гіперповерхнях розташовані мембрани. Власне, дане коло проблем, а також деякі інші питання і є предметом дослідження дисертаційної роботи М. М. Осипчука.

Отже, запропонована тема дисертації є актуальною як з точки зору загальної теорії випадкових процесів, так і її застосування.

Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій автора за темою дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, їх апробацію та публікації.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертаційної роботи, основні поняття та позначення, допоміжні результати, а також стисло викладено зміст роботи та відзначено проблеми, які не були розв'язані раніше, і вивчення яких представлено в даній роботі.

Другий розділ присвячено побудові теорії потенціалу простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими випадковими процесами, та її застосуванню до вивчення вперше сформульованих автором деяких початково-крайових задач (а точніше задач спряження) для даного типу рівнянь і, як наслідок – до побудови за допомогою їх класичних розв'язків відповідних марковських процесів або псевдопроцесів. Поняття потенціалу простого шару з ядром, яке є щільністю ймовірностей переходу багатовимірного α-стійкого випадкового процесу або, що те ж саме, фундаментальним розв'язком задачі Коші для відповідного псевдодиференціального рівняння параболічного типу наведено у підрозділі 2.1. При цьому окремо розглянуто два випадки: перщий, коли носій потенціалу простого шару S є деякою обмеженою замкненою поверхнею в скінченновимірному евклідовому просторі R^d, $d \geq 2$, що належить до класу

Гельдера $H^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$, і другий, коли S - гіперплощина. Тут досліджені також основні властивості даного потенціалу. Серед них центральне місце займають твердження теорем 2.2 (випадок, коли S - обмежена замкнена поверхня з класу $H^{1+\gamma}$) та 2.3 (випадок, коли S - гіперплощина), які в класичній ($\alpha = 2$) ситуації відомі під назвою теорем про стрибок (ко-) нормальної похідної від потенціалу простого шару. Відзначимо, що у згаданих твердженнях використовується оператор диференціювання порядку α-1 (оператор B), який при α=2 перетворюється на градієнт. Сформульовані автором друга і третя початково-крайові задачі для згаданих псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу вивчаються у підрозділі 2.2. Їх класичну розв'язність встановлено тут методом граничних інтегральних рівнянь з використанням побудованого в п. 2.1 потенціалу простого шару. Крім того, для цих задач знайдено фундаментальні розв'язки, які в окремих випадках (а точніше лише у випадку симетричної третьої початково-крайової задачі) можна інтерпретувати як щільності ймовірностей переходу відповідних їм процесів Маркова. В інших випадках ці фундаментальні розв'язки приводять лише до так званих псевдопроцесів. У підрозділі 2.3 за допомогою випадкової заміни часу в симетричному стійкому випадковому процесі з використанням функціоналу типу локального часу на заданій поверхні побудовано марковський процес з властивістю затримки в точках цієї поверхні (процес з липучою мембраною).

Важливі результати отримані автором у третьому розділі дисертації. У ньому вперше розглядаються адитивні збурення інфінітезимального оператора A симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою оператора $(a(\cdot),B)$, де $a(x)$, $x \in R^d$ – деяка вимірна R^d-значна функція, а B – вже згадуваний нами оператор диференціювання порядку α-1. Ставиться задача побудувати напівгрупу операторів, що діють у просторі обмежених вимірних функцій, інфінітезимальний оператор якої має вигляд $A+(a(\cdot),B)$. У даній роботі цю задачу досліджено в припущенні, коли функція $a(x)$є обмеженою (зокрема, сталою), або інтегровною в деякому степені $p > d+\alpha$, а також у випадку, коли вона є узагальненою функцією типу δ-функції, зосередженої на деякій фіксованій гіперповерхні $S \subset R^d$. У кожному з випадків шукану напівгрупу визначено за допомогою представленого в інтегральній формі розв'язку задачі Коші для відповідного псевдодиференціального рівняння параболічного типу. Крім того, встановлено, що знайдений тут фундаментальний розв'язок задачі Коші у всіх випадках приводить лише до псевдопроцесу.

Четвертий розділ дисертації присвячений більш детальному вивченню особливостей одновимірних симетричних α-стійких випадкових процесів. У підрозділі 4.1 наведено основні поняття та допоміжні результати. Зокрема, тут обговорюються питання, пов'язані з локальним часом в нулі симетричного α-стійкого випадкового процесу, а також відзначені деякі загальні його властивості. Основні результати даного розділу представлені у підрозділах 4.2 та 4.3. В них для α-стійкого випадкового процесу $x(t)$ досліджено моменти його першого потрапляння в початок координат τ^0 і першого виходу із стартової півосі σ, а також випадкові процеси $x^0(t)$ та $x^\sigma(t)$, утворені з процесу $x(t)$ в результаті його обриву в моменти часу τ^0 та σ відповідно. Крім того, розглядається випадковий процес $x\ (t)$ із значеннями у фазовому просторі $R_0 = R \setminus \{0\}$, щільність ймовірностей переходу якого $g\ (t,x,y)$ виражається через щільність ймовірностей переходу $g(t,x,y)$ процесу $x(t)$ формулою: $g\ (t,x,y)= g(t,x,y)-g(t,-|x|,|y|)$. Вивчається також пов'язана з випадковим процесом $x\ (t)$ випадкова величина τ – момент зникнення процесу з простору R_0. Здійснений автором порівняльний аналіз властивостей описаних об'єктів вказує на якісну відмінність у поведінці одновимірних симетричних α-стійких випадкових для випадків, коли $1 < \alpha < 2$ та $\alpha = 2$.

Останній, п'ятий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню ще не до кінця вивчених актуальних проблем, пов'язаних з процесами дифузії. Зокрема, тут знайдено граничні розподіли локальних часів та кількостей перетину заданого рівня для послідовності одновимірних дифузійних процесів $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in N$, з коефіцієнтами переносу $na(nx)$ та дифузії $b(nx)$, де $a(x)$ та $b(x)$ – деякі задані достатньо регулярні функції. Доведено, що за певних умов дана послідовність слабо збігається до граничного процесу дифузії, характеристики якого (тобто коефіцієнти переносу і дифузії) не є границями відповідних дифузійних характеристик дограничних процесів. Ще один важливий результат стосується побудови оптимальних стратегій – коефіцієнтів переносу, які у певний спосіб максимізують локальний час в нулі та мінімізують час першого потрапляння в нуль процесу броунівського руху з переносом. Цікавим є також наведений автором в кінці п 5.2.2.2 приклад, який яскраво ілюструє твердження теореми 5.12.

Підсумовуючи наш огляд змісту дисертації, відзначимо, що при встановленні отриманих в ній результатів автор використовує та удосконалює різні достатньо складні методи, ідеї та факти з теорії марковських процесів, теорії мартингалів і напівгруп, теорії функцій та функціонального аналізу, а також теорії інтегральних і диференціальних рівнянь. Їх широке та грамотне застосування забезпечило високий науковий рівень проведених досліджень.

Перейдемо до загальної оцінки дисертаційної роботи.

1. Тема роботи є актуальною. Вона тісно пов'язана як із попередніми, так і теперішніми дослідженнями, які проводилися на кафедрі статистики і вищої математики та ведуться на кафедрі математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.
2. Дисертація є завершеною науково – дослідною працею. У ній отримано

нові строго математично обґрунтовані теоретичні результати з теорії випадкових процесів, які можна кваліфікувати як значне досягнення для розвитку напрямків "Теорія марковських процесів", "Стохастичний аналіз" та "Теорія псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу". Основні результати роботи, які підтверджують цей висновок такі:

- побудовано теорію потенціалів простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими випадковими процесами;
- побудовані фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу пов'язаного із симетричним α-стійким випадковим процесом;
- побудовано адитивні збурення генератора симетричного α-стійкого процесу з допомогою оператора дробового градієнта порядку α-1 з множником, що є векторним полем, яке задається функцією обмеженою чи інтегровною в деякому степені або узагальненою типу дельта-функції на поверхні;
- встановлено деякі особливості моментів першого потрапляння в початок координат одновимірним α-стійким випадковим процесом і зміни ним півосі та продемонстровано суттєву різницю випадків $\alpha=2$ і $1<\alpha<2$;
- доведено граничні теореми для розподілів локальних часів в нулі та кількості перетинів довільного рівня деякої слабко збіжної послідовності дифузійних процесів;
- розв'язані задачі максимізації локального часу в нулі та мінімізації часу потрапляння в нуль вінерового процесу з переносом.

3. Достовірність результатів роботи в цілому не викликає сумніву. Доведення сформульованих теорем, лем і тверджень повні та детальні. При їх обґрунтуванні використано сучасні математичні методи.

До зауважень можна віднести такі:

- У тексті не відзначено, що оцінка 1.43 (с. 64) і та ж сама оцінка 5.4 (с. 247) для щільності ймовірностей переходу дифузійного процесу є правильною лише за умови, коли $2k+j\leq 2$. Проте в роботі дана оцінка використовується автором при виконанні саме такого припущення.
- Твердження, сформульоване як "Наслідок 4.8.1" (с. 24), не є лише наслідком теореми 4.8, як слідує з його нумерації, а випливає з тверджень теорем 4.7 та 4.8.
- В підрозділі 5.1 (див. с. 263, а також теорему 5.3) автор не формалізує всі умови, які повинні задовольняти локальні характеристики дифузійних процесів. Зокрема, мова йде про те, що вони повинні бути такими, щоб виконувалась певна нерівність. Це ускладнює розуміння меж застосування доведеного твердження.

- Сформульовану в другому розділі задачу (i), (ii), (iii) (див. п. 2.2), а також її окремі випадки в теорії диференціальних рівнянь прийнято називати задачами спряження, а не початково-крайовими задачами, як це подано в дисертації.
- З отриманих в роботі результатів випливає, що друга початково-крайова задача, розглянута в п. 2.2.1 2.2.2, є еквівалентною до задачі Коші з п. 3.3. Цей факт бажано було б відзначити також в дисертації.

Вище наведені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

4. Робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх одержання можуть використовуватися в подальших дослідженнях проблем, що стосуються теорії випадкових процесів і теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. а також в задачах моделювання та дослідження явищ у техніці, фізичних науках, економіці. Одержані результати можуть бути використані при читанні курсів з теорії марковських процесів, стохастичного аналізу, теорії ризику. диференціальних рівнянь, фінансової та страхової математики. Їх можна рекомендувати також для застосування в дослідженнях, які ведуться в Інституті математики НАН України, а також у національних університетах: Київському, Львівському, Чернівецькому, “Львівська політехніка” та “Київський політехнічний інститут”.
5. Основні результати дисертації достатньо повно відображені в 21 науковій статті, опублікованій у фахових виданнях, серед яких 12 входять до списків наукометричних баз Scopus чи Web of Science, решта — до списку видань, затвердженого МОН України, таких, де публікуються результати дисертаційних досліджень. Особистий внесок здобувача у спільних публікаціях відображено в дисертації та авторефераті. Матеріали дисертації пройшли достатню апробацію, вони доповідались автором на 21 науковій конференції, серед яких 6 мали статус міжнародних, та на 4 засіданнях наукових семінарів, зокрема у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України та на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Дисертаційна робота та автореферат оформлені у відповідності до "Вимог до оформлення дисертації", затверджених наказом Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017р.

Отже, є підстави зробити такий висновок. Дисертаційна робота Осипчука М. М. “Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення” за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною, теоретичною та практичною цінністю отриманих результатів повністю відповідає вимогам пп. 9, 10, 12 – 14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 року № 567 (зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р. та № 159 від 30.12.2015 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор Осипчук Михайло Михайлович заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
професор інституту математики
Ченстоховського політехнічного університету
(Республіка Польща) Б. І. Копитко

DYREKTOR
Instytutu Matematyki
dr hab. inż. Andrzej Grzybowski, prof. P. Cz.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02
Канцелярія
Секретар ради 20.05.2019 р.
/Сатур О.Р./