

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Осипчука Михайла Михайловича  
«Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення»,  
поданої у формі рукопису на здобуття вченого ступеня  
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю  
01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню випадкових процесів із симетричними стійкими скінченновимірними розподілами, їх зв'язку з теорією псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Зв'язок теорії дифузійних процесів з теорією диференціальних рівнянь в частинних похідних є докладно дослідженим. З певних властивостей випадкових процесів випливають важливі твердження щодо відповідних розв'язків нестохастичних рівнянь. і навпаки. Тому природним є докладне дослідження процесів, пов'язаних з різними класами не випадкових рівнянь. В даній роботі з цієї точки зору досліджуються симетричні  $\alpha$ -стійкі процеси. Це важливий і достатньо широкий клас випадкових функцій, що включає і гаусові процеси як частинний випадок.

Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У вступі обґрунтована актуальність теми роботи, визначені мета, задачі дослідження, відзначено наукову новизну отриманих результатів.

В першому розділі роботи дано огляд літератури за тематикою дисертації, наведено допоміжні відомості, використані нижче. Також проведено огляд основних отриманих результатів роботи.

В другому розділі докладно вивчається потенціал простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними стійкими процесами в  $\mathbb{R}^d$ . Наводиться означення вказаного потенціалу, граничні рівності для нього, представлення розв'язків рівнянь з його використанням.

В третьому розділі вивчаються псевдодиференціальні рівняння з адитивними збуреннями вигляду  $(a(\cdot), \mathbf{B})$  в правій частині для спеціального векторного оператора  $\mathbf{B}$  та різних класів функції  $a$ . Досліджено фундаментальний розв'язок та узагальнений розв'язок задачі Коші зі збуреним рівнянням.

Четвертий розділ присвячено дослідженню одновимірного  $\alpha$ -стійкого процесу. Розглядаються характеристики моментів першого потрапляння в множину, локальний час в нулі, асимптотичні властивості щільності ймовірності переходу. Досліджується ситуація, коли процес поглинається в нулі.

В п'ятому розділі отримано ряд результатів щодо збіжності певного класу послідовностей дифузійних процесів, розглянуто деякі екстремальні задачі для вінерівського процесу. Оскільки вінерівський процес є одновимірним  $\alpha$ -стійким процесом при  $\alpha=2$ , ці результати підпадають під напрямок дисертаційного дослідження.

Можна відмітити наступні нові результати, отримані в дисертаційній роботі:

1. Визначено потенціал простого шару на двосторонній вимірній поверхні. Для аналога конормальної похідної порядку  $\alpha-1$  отримано теорему про стрибок в точках даної поверхні. Окремо розглядаються випадки замкненої обмеженої поверхні та гіперплощини.

2. З використанням теореми про стрибок знайдено розв'язки двох початково-крайових задач. Ці розв'язки побудовано як суми рядів, доданки яких визначаються методом послідовних наближень. Також визначено фундаментальні розв'язки вказаних задач.

3. Для задачі Коші з адитивним збуренням інфінітезимального оператора визначено фундаментальний розв'язок та побудовано узагальнений розв'язок. Для збурення зі сталим коефіцієнтом отримано явний вигляд узагальненого розв'язку. Докладно вивчено випадок коефіцієнту типу дельта-функції на поверхні.

4. Для певних перетворень одновимірного  $\alpha$ -стійкого процесу, пов'язаних з виходом з півосі, отримано рівності для ймовірностей переходу, для моменту першого потрапляння в початок координат, доведено мартингальність деяких породжених процесів.

5. Для певного класу послідовностей одновимірних дифузійних процесів отримано теорему про граничний розподіл послідовності локальних часів в нулі.

6. Побудовано розв'язки деяких екстремальних задач для одновимірного винерівського процесу.

В цілому, в роботі розв'язано проблему побудови теорії, що пов'язує нестохастичні рівняння з  $\alpha$ -стійкими процесами. При цьому отримано низку складних, нетривіальних результатів.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для дослідження поведінки систем, що описуються псевдодиференціальними рівняннями або що мають стохастичний вплив, заданий процесами зі стійкими розподілами. Отримані результати дозволяють знаходити точно або наближено розв'язки рівнянь, що описують поведінку вказаних систем.

Крім цього, результати роботи можуть застосовуватись для досліджень в наукових установах та вищих навчальних закладах України, а саме в Інституті математики НАН України, Інституті кібернетики НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича.

Усі основні результати дисертаційної роботи є новими. Твердження наведені з повними та строгими доведеннями. Раніше відомі факти, що використовувались у доведеннях та прикладах, наведені з відповідними посиланнями. Таким чином, наукові здобутки дисертаційної роботи є достовірними та достатньою мірою обґрунтованими.

Дисертація є достатньо апробованою. За основними результатами досліджень дисертаційної роботи було зроблено доповіді на значній кількості наукових семінарів та міжнародних конференцій. За результатами досліджень, проведених в дисертації, опубліковано 17 статей у фахових виданнях України (з яких 8 входять до наукометричних баз Web of Sciences або Scopus), 4 статті у провідних закордонних журналах, 21 тези доповідей на наукових конференціях та семінарах. Їх зміст охоплює основні положення та результати роботи. Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертаційної роботи.

Разом з тим, можна висловити такі зауваження щодо даної дисертаційної роботи.

1) В розділах 2 та 3 для певних функцій показано, що вони є розв'язками відповідних псевдодиференціальних рівнянь. Проте не роз'яснене питання щодо єдиності розв'язків цих рівнянь.

2) До списку посилань, на мою думку, варто було б додати відому монографію G. Samorodnitskiy, M. Taqqu "Stable non-Gaussian random processes" (1994), що відома багатьом фахівцям з теорії випадкових процесів і присвячена вивченню стійких процесів — одному з предметів дослідження в дисертації.

3) Робота не містить окремого списку позначень, що створює певні незручності при читанні тексту. Зокрема, я не знайшов пояснення позначення процесу  $x^0$ , що розглядається на стор. 229 (для з'ясування питання звернувся до журнальної публікації автора).

4) Стор. 32 — вживається термін «абсолютно інтегровна на  $\mathbb{R}^d$ », де простіше було сказати «інтегровна на  $\mathbb{R}^d$ », що є еквівалентним для інтеграла Лебега. В інтегралі Лебега поняття абсолютної інтегровності не використовується.

5) Стор. 37 — в (1.12) і вище для одного і того ж оператора вживаються різні символи  $D$  і  $\mathbf{D}$ . Для вказаної формули дається посилання на джерела [17, 29], але це великі за обсягом тексти, і варто було б уточнювати номер сторінки або формули в посиланнях.

6) Стор. 96 — в формулюванні теореми 2.3 вжито термін «скінченний конус», хоча правильним є «обмежений конус».

7) Стор. 225 — в наведеному доведенні рівності (4.8) з отриманої в рядку 6 знизу формули лише впливає, що  $\eta_t = 0$  з нульовою ймовірністю для елементів  $t > 0$  м. с. відносно міри Лебега (тобто це твердження може порушуватися на множині  $t$  нульової міри). В (4.8) стверджується, що це виконується для всіх  $t > 0$ . Треба або навести додаткові міркування або уточнити (4.8).

8) Стор 254 — перша формула пункту 5.1.1.2 містить зайвий символ  $G$ .

9) Стор. 258 — не пояснено існування границі  $\eta_t$  в середньому квадратичному за кожною мірою  $P_x$ .

10) Стор. 264 — при оцінці останнього інтеграла в (5.22) не пояснено, чому константа  $K$  може бути взята спільною для всіх  $g_n$ . З посилання на


формулу (5.4) лише впливає існування окремої константи для кожного окремого  $g_n$ .

Зроблені зауваження не применшують значення роботи в цілому і не впливають на загальну позитивну її оцінку. Дисертація написана на високому математичному рівні, в ній розв'язано проблему знаходження розв'язків класу задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, їх зв'язку з теорією  $\alpha$ -стійких процесів.

Дисертація Осипчука М.М. відповідає вимогам про загальну кількість публікацій за темою дисертації в фахових виданнях, а також вимогам щодо об'єму та оформленню дисертаційних робіт.

Підсумовуючи висловлене вище, можна зробити висновок про те, що за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота Осипчука Михайла Михайловича «Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення» задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 р. (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.06.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор — Осипчук Михайло Михайлович — заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика.

Офіційний опонент  
професор кафедри математичного аналізу  
Київського національного  
університету імені Тараса Шевченка,  
доктор фізико-математичних наук, професор



Радченко В. М.



Надійшло до спеціалізованої  
вченої ради  
Секретар  
Інституту математики Академії наук України  
Канцелярія

05.02

16.05.2019 р.

O.S.F.

/Сатурн О.Р./