

ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу **Осипчука Михайла Михайловича**

Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

зі спеціальності 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

Актуальність теми. Через нелокальність псевдодиференціальних операторів (ПДО) багато динамічних систем описуються більш точно завдяки використанню диференціальних рівнянь дробового порядку чи псевдодиференціальних рівнянь (ПДР). Різноманітні природні системи в таких областях, як в'язкопружність, електричні схеми, нелінійні коливання землетрусу чи дифузійні процеси в фрактальних середовищах мають проміжну поведінку, яку можна моделювати тільки з використанням ПДР. Саме тому такі рівняння є важливою альтернативою диференціальним рівнянням з цілим порядком; вони викликають значний інтерес у сучасних дослідників і є предметом жвавих дискусій та обговорень на наукових симпозиумах і конференціях.

Особливої уваги сьогодні заслуговує теорія ПДР з негладкими символами, зародження якої пов'язують з дослідженням простіших рівнянь, що містять дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, оператора Лапласа Δ . Такий ПДО, після виходу відомої роботи О.Фростмана (Frostman O., 1935 p.), пов'язаної з дослідженням потенціалу Рісса, одержав назву оператора Рісса дробового диференціювання.

Випадок ПДО з однорідними символами має важливі застосування в теорії випадкових процесів. ПДО Рісса з символом $-|\xi|^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 2$, є твірним оператором симетричного стійкого випадкового процесу. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних ПДР із такими ПДО, можна трактувати як щільність розподілу ймовірностей деяких випадкових величин. При $0 < \alpha < 1$ такі розподіли досліджував Д.Пойа (Polya G., 1923 p.), при $\alpha = 1$ – О.Коші (Cauchy A., 1900 p.), при $\alpha = 3/2$ – Ж.Хольцмарк (Holtzmark J., 1919 p.), а при $\alpha = 2$ – К.Гаус (Gauss C., 1795 p.). Те, що ці функції є щільностями ймовірнісних розподілів лише при $\alpha \in (0; 2]$ було доведено в повному обсязі П.Леві (Levy P., 1925 p.), який і назвав їх "стійкими розподілами".

Завдяки працям Мандельброта Б. (Mandelbrot B.) та його послідовників намітилися використання стійких законів розподілу й у деяких економічних моделях. Теорія ПДО з негладкими символами має своє застосування і в сучасній теорії фракталів. У відомих працях Р.Р. Нігматуліна, М.М. Джрбашяна й А.Б. Нерсесяна досліджуються дифузійні процеси у фрактальних середовищах завдяки еволюційним рівнянням дробового порядку з негладкими символами.

Теорія задачі Коші для параболічних ПДР із однорідними точково негладкими символами станом на сьогодні є достатньо сформованою. У її розвитку взяло участь багато дослідників, серед яких першими були С.Д. Ейдельман і Я.М. Дрінь, відтак М.В. Федорук, W.R. Schneider, А.Н. Кочубей, згодом, В.В. Городецький і В.А. Літовченко та ін. Основним здобутком цієї теорії є різні методи побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші як у випадку сталих символів псевдодиференціювання, так і залежних від просторової змінної, його асимптотична поведінка на нескінченності, твердження про коректну розв'язність у різних функціональних класах, можливі форми зображення розв'язку, шаудеровські оцінки, властивості локалізації та стабілізації розв'язку, його невід'ємність тощо.

Наступним, виживим ще не розпочатим етапом розвитку теорії параболічних ПДР з точково негладкими символами, очікується етап побудови теорії крайових задач для таких рівнянь і систем.

Достатньо розвинена теорія крайових задач для параболічних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку дозволила Н.Вінеру, В.Феллеру, А.Д.Вентцелю, Т.Уено та їх послідовникам розглянути ряд важливих задач, пов'язаних із перетворенням та дослідженням дифузійних процесів в областях з краями, на яких задані умови. Питання розвинення теорії симетричних стійких випадкових процесів у цьому напрямку досі залишається відкритим.

Розв'язуванню цих проблем і ряду інших, суміжних з ними, покликана ця дисертаційна робота.

Основні результати роботи. Перший розділ дисертаційної роботи має допоміжне значення. У ньому проведено огляд відомих результатів, які мають відношення до тематики дисертаційних досліджень. Наводиться термінологія, формулюються попередні відомості та результати, доводяться деякі, необхідні для подальшого, допоміжні твердження; робиться короткий огляд дисертації.

Основна частина другого розділу, найбільшого за обсягом, присвячена побудові теорії потенціалу простого шару для параболічних ПДР з оператором Рісса A_α дробового диференціювання порядку $\alpha \in (1; 2)$, які пов'язані із симетричними α -стійкими випадковими процесами. Носієм потенціалу тут слугують обмежені поверхні класу $H^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0; 1)$, та гіперплощини, а його густиною – обмежені неперервні стосовно просторової змінної дійснозначні функції, які за часовою змінною в нулі можуть мати інтегровну степеневу особливість. Вдало означений псевдоградієнт, що відповідає оператору A_α рівняння, який в класичному випадку $\alpha = 2$ збігається з градієнтом, дозволив для зазначених параболічних ПДР із сталими однорідними точково негладкими символами побудувати певний аналог відомої теорії А.Фрідмана [20] потенціалу простого шару для параболічних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку. У порівнянні з класичним випадком, обґрунтування базових фактів цієї теорії таких, як твердження про існування прямого значення псевдоградієнта потенціалу простого шару та стрибок цього значення на поверхні-носії і т.і., вимагає чималих специфічних розрахунків та тонких і точних оцінок у зв'язку із нелокальністю ПДО.

Одержані тут відомості про потенціал простого шару дозволили в класичний спосіб розв'язати ряд спеціальних крайових задач типу задачі Неймана та третьої крайової задачі як в обмежених областях з гладкими краями, так і в необмеженій області з умовами на гіперплощині, для параболічних ПДР, оператор яких стосовно просторової змінної є твірним оператором симетричного α -стійкого випадкового процесу дробового порядку. Вхідні дані таких задач характеризуються неперервними обмеженими дійснозначними функціями. Також, у стилі теорії випадкових процесів, побудовано фундаментальні розв'язки цих задач методом збурення на граничній поверхні W -функціоналу типу локального часу, що відповідає вихідному симетричному стійкому випадковому процесу, з використанням формули Фейнмана-Каца. Досліджено їх ймовірнісні властивості, при цьому з'ясовано, що лише у випадку симетричної мішаної крайової задачі її фундаментальний розв'язок є щільністю ймовірності переходу деякого процесу Маркова, що утворюється шляхом інтенсивного убивання на межі області вихідного симетричного α -стійкого випадкового процесу.

Крім цього, тут вивчено питання існування перетворення Лапласа стосовно часової змінної потенціалу простого шару та досліджено його основні властивості. Це дало змогу побудувати випадковий процес, що моделює липучість поверхні – носія потенціалу. Зазначений процес побудовано з допомогою деякої випадкової заміни часу в симетричному α -стійкому випадковому процесі завдяки функціоналу типу локального часу на поверхні.

У третьому розділі розвивається теорія адитивного збурення симетричних α -стійких випадкових процесів. Тут будуються та досліджуються властивості адитивних збурень

таких процесів відповідним псевдоградієнтом із змінним векторним коефіцієнтом $\vec{a}(\cdot)$, що має ті чи інші функціональні властивості. При цьому, розглянуто окремо випадки, коли такі зміни пов'язані фактично з кожною просторовою точкою вихідного випадкового процесу, та коли ці зміни стосуються лише певної множини точок, що становлять собою поверхню класу $H^{1+\gamma}$ чи гіперплощину. З точки зору теорії диференціальних рівнянь, таке збурення моделюється шляхом додавання до рівняння вихідної задачі Коші, що відповідає симетричному α -стійкому випадковому процесу, що розглядається, групи молодших членів із змінними коефіцієнтами, структура якої визначається дією відповідного псевдоградієнта з множителем $\vec{a}(\cdot)$ на невідому функцію. Для з'ясування ймовірнісного сенсу такого перетворення, необхідно спочатку знайти фундаментальний розв'язок одержаної задачі Коші, а відтак, дослідити його на предмет невід'ємності. Якщо фундаментальний розв'язок цієї задачі невід'ємний, то таке збурення вихідного випадкового процесу породжує Марковський процес, інакше – випадковий "псевдопроцес".

Тут розв'язуються ці дві задачі у випадку, коли коефіцієнт збурення $\vec{a}(\cdot)$ є елементом векторного аналога простору Лебега $L_p(\mathbb{R}^d)$ при $p > d + \alpha$, та коли $\vec{a}(\cdot) = q(\cdot)\delta_S \vec{\nu}(\cdot)$, де S – поверхня класу $H^{1+\gamma}$ або гіперплощина із зовнішнім нормальним вектором $\vec{\nu}(\cdot)$, $q(\cdot)$ – обмежена неперервна дійснозначна функція на $\mathbb{R}^d$, а δ_S – дельта-функція з носієм S .

Побудова фундаментального розв'язку здійснюється традиційно, методом послідовного наближення, при цьому, у випадку із задіяванням δ_S істотно використовуються результати розділу 2.

Для з'ясування питання невід'ємності фундаментального розв'язку таких задач розглянуто окремо збурення із сталим коефіцієнтом $\vec{a}(\cdot) \equiv a \in \mathbb{R}^d$, для якого знайдено в явній формі фундаментальний розв'язок відповідної задачі Коші. Це дало змогу засобами комп'ютерної техніки побудувати його графік при пробних значеннях α із $(1; 2)$. І, в такий спосіб, переконатися, що розглянуті тут збурення симетричних α -стійких випадкових процесів дробового порядку відповідають лише випадковим "псевдопроцесам".

Крім цього, для кожного з таких типів збурення доведено існування відповідної напівгрупи лінійних обмежених операторів на просторі $C_b(\mathbb{R}^d)$ неперервних обмежених функцій.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженням деяких моментів зупинки одновимірних симетричних α -стійких випадкових процесів $x(t)$ при $\alpha \in (1; 2]$ з щільністю ймовірності переходу $g(t, x, y)$, а саме, моментів першого потрапляння в початок координат τ^0 та першого виходу з півосі σ . На початку формулюються основні об'єкти досліджень, пов'язані з процесами $x(t)$, що розглядаються, обговорюються питання стосовно локального часу в нулі таких процесів та наводяться загальні властивості одновимірних симетричних процесів, зокрема, асимптотична формула для $g(t, x, y)$ та формула Рогозіна-Спіцера. Розглядаються також випадкові процеси $x^0(t)$ і x^σ , що утворюються шляхом обривання $x(t)$ відповідно в моменти часу τ^0 та σ і, процес Маркова $x^*(t)$ в $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ з щільністю ймовірності переходу $g^*(t, x, y) = g(t, x, y) - g(t, -|x|, |y|)$, з яким пов'язана випадкова величина τ^* – час існування цього процесу та $f^*(\cdot, x)$ – щільність розподілу τ^* за умови $\{x^*(0) = x\}$, $x \in \mathbb{R}_0$.

З'ясувалося, що описані об'єкти мають суттєво різні властивості при $\alpha \in (1; 2)$ і $\alpha = 2$. У випадку $\alpha = 2$ випадкові величини τ^0 і σ однакові, тому процеси $x^0(t)$ та x^σ збігаються і кожен із них стохастично еквівалентний процесу Маркова $x^*(t)$. Щільності ймовірностей переходу $g(t, x, y)$ та $g^*(t, x, y)$ пов'язані між собою рівностями типу Фейнмана-Каца з відповідною узагальненою функцією $v(y)$.

Натомість при $\alpha \in (1; 2)$ процеси $x^0(t)$, x^σ різні та жоден з них стохастично не еквівалентний процесу $x^*(t)$; моменти обриву τ^0 , σ і τ^* пов'язані нерівностями $\tau^0 << \sigma < \tau^*$. Функції $g(t, x, y)$ та $g^*(t, x, y)$ не пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца, а

зв'язок між ними набагато складніший і описується вже за допомогою звичайної функції $v(y) = \frac{2c}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} |y|^{-\alpha}$, $y \in \mathbb{R}_0$. Крім цього, момент зупинки τ^* непередбачуваний і процес $\int_0^t v(x^*(s)) ds$, $t \geq 0$, – компенсатор процесу $\mathbb{I}_{\tau^* \leq t}$, $t \geq 0$.

При $\alpha \in (1; 2]$ функція $F_t^*(x) = \int_0^t f^*(s, x) ds$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_0$, є W -функцією для процесу $x^*(t)$, однак лише у випадку $\alpha \in (1; 2)$ існує W -функціонал ζ_t , $t \geq 0$, від цього процесу такий, що $\mathbb{E}_x^* \zeta_t = F_t^*(x)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$.

У завершальному п'ятому розділі дисертаційної роботи розв'язуються актуальні задачі, пов'язані із одновимірними дифузійними процесами. Тут встановлено ряд нових фактів стосовно таких процесів, зокрема, вінерового процесу, що є симетричним α -стійким процесом порядку $\alpha = 2$ з параметром $c = \frac{1}{2}$. А саме, сформульовано та доведено твердження достатнього характеру про граничні розподіли локальних часів у нулі та кількості перетинів фіксованого рівня послідовністю дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x) := na(nx)$ та дифузії $b_n(x) := b(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, із достатньо гладкими обмеженими на $\mathbb{R}$ дійснозначними функціями $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$, причому $b(\cdot)$ – додатна функція. Знайдено ці розподіли локальних часів і з'ясовано, що вони, взагалі кажучи, відрізняються від розподілів відповідних функціоналів від граничного процесу. Крім цього, розглянуто задачі про максимізацію локального часу в нулі та мінімізацію моменту першого потрапляння в нуль шляхом додавання переносу. У першому випадку побудовані, так звана, оптимальна стратегія, яка виявилася немарківською, та деякі близькі до оптимальної марківські стратегії. При розв'язуванні другої задачі побудована на деякому класі допустимих стратегій локальна оптимальна стратегія та визначена однопараметрична сім'я стратегій, які як завгодно точно спроможні оптимізувати цільову функцію.

Наукова новизна, оцінка обґрунтованості наукових положень дисертації та їх достовірність. Дослідження, виконані автором у цій дисертаційній роботі, спрямовані на розв'язання ряду нових, актуальних і важливих задач як теорії випадкових процесів, так і теорії параболічних ПДР. Тут вперше для параболічних ПДР дробового порядку $\alpha \in (1; 2)$ зі сталими однорідними точково негладкими символами побудовано теорію потенціалу простого шару та розв'язано крайові задачі типу задачі Неймана та мішаної третьої крайової задачі як в обмежених областях з гладкими краями, так і в необмеженій області з умовами на гіперплощині. Ці результати природним способом розвивають і доповнюють класичну теорію потенціалу простого шару А.Фрідмана для параболічних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку, а також, теорію задачі Коші для параболічних ПДР і систем з точково негладкими символами, у розвитку якої взяло участь багато дослідників, зокрема, С.Д.Ейдельман, М.В.Федорюк, А.Н.Кочубей, Я.М.Дрінь, В.В.Городецький та ін. Розвинена тут теорія потенціалу для ПДР відіграє таку ж важливу роль в теорії симетричних α -стійких випадкових процесів та їх перетворень, що і класична теорія потенціалу для параболічних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку в теорії дифузійних процесів. Її наявність дозволяє вже поширити ряд класичних задач про перетворення дифузійних процесів в областях із спеціальними умовами на краях, дослідженням яких займалися Н.Вінер, В.Феллер, А.Д.Вентцель, Т.Уено та їх послідовники, на випадок симетричних α -стійких випадкових процесів, зокрема, розв'язати задачі про протікання симетричних α -стійких процесів в області із убиванням на її межі чи в області з липучою мембраною, що успішно реалізовано в цій роботі.

Вдало означений в дисертаційній роботі псевдоградієнт для ПДО, що узагальнює поняття градієнта в класичному випадку, дозволив для симетричних α -стійких випадкових процесів розглядати адитивні збурення в новій постановці – із задіюванням відповідного

псевдоградієнта розглядуваному випадковому процесу (раніше такі збурення в основному будувалися з використанням градієнта). Тому, одержані тут результати про адитивні збурення твірного оператора симетричних стійких випадкових процесів та їх застосування в теорії задачі Коші для параболічних ПДР також є новими, вони гармонічно доповнюють відомі результати досліджень К. Bogdan, Т. Jakubowski, А.М. Kulik, V. Knopova, М.І. Портенка, А.Н. Кочубея та ін., пороведених у цьому напрямку.

Новими є з'ясовані тут факти про моменти зупинки симетричних α -стійких випадкових процесів та їх характеристики, твердження про граничні розподіли локальних часів у нулі та кількості перетинів фіксованого рівня послідовністю одновимірних дифузійних процесів, а також, розв'язки розглянутих тут екстремальних задач для вінерового процесу, які певною мірою узагальнюють і доповнюють відомі результати А.М. Kulik, А.В. Скорохода, Г.Л. Кулініча, Х.Аль Фараха, М.І. Портенко, М.Т. Barlow, J. Bertoin, Н.Р. McKean, J. Letemplier та ін.

Достовірність отриманих результатів підтверджується строгістю та повнотою наведених доведень. Тому є всі підстави стверджувати, що дисертаційна робота Осипчука Михайла Михайловича є завершеним науковим дослідженням, у якому отримано нові наукові результати в теорії симетричних стійких випадкових процесів та їх перетворень, а також, у теорії параболічних ПДР із точково негладкими символами.

Повнота викладу положень дисертації в опублікованих працях. Основні положення та висновки дисертаційної роботи достатньо детально висвітлені в 21 статті у фахових виданнях України, з них 12 публікацій у виданнях, внесених до наукометричних баз Scopus і Web of Science. Результати роботи апробовані на 21 українській математичній конференції та наукових семінарах Інституту математики НАН України, Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Автореферат цілком відображає основні положення дисертації. Основні результати дисертації повністю викладені в опублікованих працях.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Робота в основному має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії випадкових процесів, класичній теорії параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем; при дослідженні стохастичних моделей природничих і соціально-економічних явищ та в педагогічній практиці при підготовці фахівців за спеціальностями галузі знань математика та статистика.

Зауваження та побажання.

I. У роботі зустрічаються незначні граматичні й технічні огріхи. У деяких місцях "двокрапка" замінена "крапкою" (див., наприклад, 1-ше речення на с. 39, 3-є речення на с. 78), на с. 85 у 4-му рядку зверху в підінтегральному виразі пропущено співмножник $\psi(\tau, y)$, в останньому абзаці на с. 177 виконується посилання на нерівність (3.10), яка раніше не була визначеною, у наслідку 3.3.1 потрібно писати "... в Теоремі 3.3 ..." замість "... в Теоремі 3.1 ...", на с. 199 у рівності, що в п'ятому рядку, замість " $< \delta_S, \varphi >$ ", потрібно " $< \delta_S, \psi >$ "; на с. 213 у 6-му рядку зверху вживається з опискою слово "невід'ємних", там же, в наступному рядку в скалярному добуту пропущена "кома", на сс. 227 – 228 відповідно в останньому і першому рядках " dy " необхідно замінити на " dz ", і т.і.

II. Надто лаконічний, як для тематики дисертації, огляд літератури обсягом у неповних 2,5 сторінки. У ньому дещо поверхнево охарактеризовано, зокрема, сучасний стан теорії параболічних ПДР з точково негладкими символами. Автор обмежився лише цитуванням першоджерел [17] і [25] датованих 2004 та 2005 роками, залишивши поза увагою результати, одержані протягом останніх 10 – 15 років (наприклад, не враховано публікацію

Літовченка В.А. "Задача Коши для одного класу параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами" Сиб. мат. журн. – 2008. – Т.49, №2. – С.375-394, у якій розвивається методика дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для загального класу параболических рівнянь з псевдодифференціальними операторами типу Рісса дробового диференціювання порядку $\alpha > 0$, яка має пряме відношення до цієї дисертаційної роботи).

III. У підрозділі 1.2.2 наводяться основні поняття, позначення та формулюються допоміжні факти, пов'язані із симетричними α -стійкими випадковими процесами. Тут на самому початку вказується про множини можливих значень параметрів c, d , зокрема, зазначена належність $\alpha \in (0; 2]$. Відтак, формулюються означення та певні результати з елементами доведення, серед яких є такі, що справджуються не для всіх α з проміжку $(0; 2]$ і при цьому не уточнюється значення α . Наприклад:

1) на с. 27 наводиться граничне співвідношення

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{d+\alpha} h_d^{c,\alpha}(x) = \alpha c 2^{\alpha-1} \pi^{-d/2-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (1.3)$$

відтак стверджується, що його права частина є невід'ємною. Однак при $\alpha = 2$ ця частина перетворюється в нуль за рахунок співмножника $\sin \frac{\pi\alpha}{2}$;

2) у п. 1.2.2.5 зазначається про можливість для псевдодифференціального оператора A із символом $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ іншого зображення на обмежених з ліпшицевим градієнтом функціях $\varphi(\cdot)$ (див. формулу (1.16)):

$$A\varphi(x) = cq_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x+z) - \varphi(x) - (z, \nabla\varphi(x))) \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.16)$$

Проте такий інтеграл, взагалі кажучи, розбігається при $\alpha \in (0; 1] \cup \{2\}$.

Відсутність подібної інформації ускладнює читабельність роботи та зароджує сумніви щодо достовірності деяких результатів. Аби уникнути таких непорозумінь, варто було із самого початку зазначити, що $\alpha \in (1; 2)$, або у кожному з таких випадків додатково уточнювати про можливі значення α .

IV. У підрозділі 3.2 обґрунтовується порушення умови невід'ємності фундаментального розв'язку задачі Коші, що відповідає адитивному збуренню із змінним коефіцієнтом симетричного α -стійкого випадкового процесу. Для цього розглядається допоміжна задача Коші для відповідного рівняння зі сталим коефіцієнтом і методом послідовного наближення будується її фундаментальний розв'язок. Цей метод дуже громіздкий і складний у порівнянні з класичним методом зведення до відповідної двоїстої за Фур'є задачі. Більше того, зазначене рівняння відноситься до класу рівнянь, розглянутих у процитованій у зауваженні II статті, в якій побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості при довільному $\alpha > 0$.

Слід зазначити, що вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Висновок. Дисертаційна робота Осипчука Михайла Михайловича "Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення" є завершеною науковою роботою, в якій отримано нові, вагомі результати як у теорії випадкових процесів, так і в теорії параболических псевдодифференціальних рівнянь. Робота виконана на належному науковому рівні та написана сучасною українською науковою мовою.

Вважаю, що подана до захисту дисертаційна робота за науковою новизною, структурою та оформленням повністю відповідає вимогам пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження

наукових ступенів”, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. №567 щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор – Осипчук Михайло Михайлович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор
кафедри диференціальних рівнянь
Чернівецького національного універси-
тету імені Юрія Федьковича, професор

 — Літовченко В.А.

15 травня 2019 року



Надійшло до спеціалізованої
вченої ради № 01.01.05.02 20.05.2019р.
Секретар ради О.С.С. /Самур О.Р./