Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Почекета Олександр Анатолійович

УДК 517.958

Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Попович Роман Омелянович
доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2016

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathcal{L}_\theta$	диференціальне рівняння з набором параметр-функцій $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ в якості довільного елемента
L_θ	диференціальна функція, що є лівою частиною рівняння $\mathcal{L}_\theta$
$J^{(k)}$	простір струменів порядку k
$\mathcal{L}_{(p)}$	многовид, визначений рівнянням $\mathcal{L}$ у просторі $J^{(p)}$
$\mathcal{G}^\sim$	групоїд еквівалентності класу
$G^\sim$	звичайна група еквівалентності класу
$\hat{G}^\sim$	узагальнена (узагальнена розширена) група еквівалентності класу
∂_t, ∂_x, ∂_u	оператори диференціювання за змінними t, x, u
D_t, D_x	оператори повної похідної за змінними t, x
$\mathfrak{g}_f$	максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$
$Q_{(2)}$	друге продовження векторного поля Q
$\mathcal{E}\big\|_{\{F\neq0\}}$	надклас узагальнених рівнянь Бюргерса вигляду $\mathcal{E}_{F,H^1,H^0}\colon\ u_t + F(t,x,u)u_{xx} + H^1(t,x,u)u_x + H^0(t,x,u) = 0$, $F \neq 0$
$\mathcal{A}\big\|_{\{a\neq0\}}$	клас лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса вигляду $\mathcal{A}_{a,b,f}\colon\ u_t + au_{xx} + (au + a_x + b)u_x + \frac{1}{2}a_xu^2 + b_xu + f = 0$, $a \neq 0$
$\mathcal{L}\big\|_{\mathcal{S}}$	клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній вигляду $\mathcal{L}_f\colon\ u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$, $f \neq 0$

$\mathcal{C}\big\|_{\mathcal{S}}$	клас узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі вигляду $\mathcal{C}_f\colon\ u_t + uu_x + \big(f(t,x)u_x\big)_x = 0,\ \ f \neq 0$
$\mathcal{P}\big\|_{\mathcal{S}}$	клас узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса вигляду $\mathcal{P}_f\colon\ v_t + v_x^2 + f(t,x)v_{xx} = 0,\ \ f \neq 0$
$\mathcal{D}\big\|_{\{ng\neq 0\}}$	клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, вигляду $\mathcal{D}_{n,h,g}\colon\ u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx},\ \ ng \neq 0$
$\overset{\mathrm{g}}{\sim}$	відношення калібрувальної еквівалентності

Вступ

Актуальність теми. Класичне рівняння Бюргерса і низка його узагальнень важливі у теорії нелінійних коливань як найпростіші рівняння, що відображають одночасно й ефекти нелінійного поширення хвиль, і дифузію. Узагальнені рівняння Бюргерса не менш інтенсивно використовують для моделювання широкого спектру явищ у фізиці, хімії, математичній біології тощо, див., наприклад, [16, розділ 4].

Дослідження цих простих класів рівнянь, які, тим не менше, мають нетривіальні властивості, з точки зору групового аналізу розпочалося з робіт Форсайта (Forsyth) [50]. Згодом рівняння Бюргерса стало одним з класичних рівнянь математичної фізики, що використовується як стандартний тестовий приклад для розробки та відпрацювання нових методів групового аналізу диференціальних рівнянь.

Симетрійний підхід надає, можливо, єдиний універсальний конструктивний метод знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, знання перетворень між рівняннями з деякого класу дозволяє використовувати відомі розв'язки рівнянь з цього класу для побудови точних розв'язків перетворених рівнянь [7, 8, 18].

Метод ліївської редукції вже тривалий час застосовують для знаходження точних розв'язків рівнянь математичної фізики і він значною мірою вичерпав свої можливості. Тому необхідні розвиток і застосування потужніших методів — наприклад, методу некласичної редукції [18, 33, 81].

Крім ліївських та некласичних редукцій важливу роль у груповому аналізі відіграють закони збереження диференціальних рівнянь [7,8,132], потенціальні перетворення еквівалентності в класах диференціальних рівнянь [100], а також потенціальні симетрії рівнянь з цих класів [34,102].

Закони збереження, як відомо, використовують як показник можливої інтегровності рівняння, для контролю чисельних похибок при наближених обчисленнях, а також у теорії асимптотичної інтегровності для опису нелокальних перетворень симетрії чи еквівалентності.

Незважаючи на те, що окремі задачі симетрійного аналізу узагальнених рівнянь Бюргерса розглядалися раніше у низці робіт, переважна більшість опублікованих результатів не є вичерпними чи навіть безпомилковими (див., наприклад, [47, 111, 123–127, 133], а також обговорення в [65]). Задача розширеного групового аналізу таких класів залишалася до цього часу не розв'язаною, натомість накопичився певний обсяг часткових і не зовсім коректних результатів.

На сьогодні відомо лише декілька вичерпних описів некласичних симетрій для важливих класів нелінійних диференціальних рівнянь, параметризованих довільними функціями. Це, зокрема, роботи [25, 44] для рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом, [64] для узагальненого рівняння Хакслі (Huxley), а також [77] для систем узагальнених рівнянь Бюргерса. Класифікація операторів редукції рівнянь з класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, наведена у цій дисертаційній роботі, є ще одним прикладом такого вичерпного опису.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем «Симетрія та інтегровність нелінійних моделей» (номер держреєстрації 0106U000436) та «Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики» (номер держреєстрації 0116U003059).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вдосконалення і розвиток методів розширеного групового аналізу диференціальних рівнянь та дослідження з їх допомогою симетрійних властивостей класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

Об'єктом дослідження є клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класи лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, клас узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, клас узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, а також клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу.

Предметом дослідження є групоїди еквівалентності та групи еквівалентності цих класів; групи та алгебри ліївських симетрій, ліївські редукції, приховані симетрії, оператори редукції, некласичні редукції, закони збереження та потенціальні симетрії рівнянь з цих класів, потенціальні допустимі перетворення між ними, а також точні розв'язки цих рівнянь.

Методи дослідження. Основою постановки і розв'язання задач групової класифікації у класах диференціальних рівнянь є класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова. Задачі групової класифікації розв'язано з застосуванням як алгебраїчного методу групової класифікації, так і прямого методу інтегрування визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів ліївських симетрій. Застосовано також сучасні модифікації цих методів, такі як калібрування довільного елемента класу перетвореннями еквівалентності, відображення між класами за допомогою сімей точкових перетворень та розбиття класу на нормалізовані підкласи. Групоїди еквівалентності знайдено з використанням прямого методу в термінах скінченних точкових перетворень.

Для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь використано методи ліївської та некласичної редукції. Ліївські редукції прокласифіковано за допомогою оригінального методу класифікації редукцій у нормалізованому класі диференціальних рівнянь відносно групи еквівалентності цього класу. Техніка підбору оптимальних анзаців для ліївської редукції дозволила отримати простий та уніфікований вигляд редукованих рівнянь. При дослідженні некласичних редукцій застосовано техніку класифікації операторів редукції диференціальних рівнянь з деякого класу з точністю до еквівалентності, що існує на множині операторів редукції, а також еквівалентності, породженої групою еквівалентності цього класу.

Для знаходження законів збереження використано прямий метод у термінах характеристик.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертації та виносяться на захист, такі:

1. Вичерпно описано групоїди еквівалентності та знайдено групи еквівалентності класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класів лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, класу узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, класу узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, а також класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та низки його підкласів.

2. З використанням алгебраїчного методу виконано групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. При цьому виправлено низку неточностей у попередніх дослідженнях ліївських симетрій рівнянь з цього класу.

3. Запропоновано метод класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Цей метод у поєднанні з оптимізованим вибором анзаців дозволив вичерпно описати приховані симетрії узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

4. Прокласифіковано оператори редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній відносно групи еквівалентності класу цих рівнянь. За допомогою знайдених операторів редукції встановлено зв'язок між такими рівняннями та потенціальним рівнянням швидкої дифузії з нелінійністю степеня -1, що також дало змогу побудувати нові точні розв'язки.

5. Вичерпно описано потенціальні допустимі перетворення між узагальненими рівняннями Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та потенціальні симетрії таких рівнянь. Для цього запропоновано поняття потенціального групоїда еквівалентності класу диференціальних рівнянь.

6. Розв'язано задачу групової класифікації для класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, та побудовано точні розв'язки таких рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими, їх можна використати для розв'язання низки конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичної фізики, а також у математичній біології, хімії та теоретичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Загальний план досліджень і постановка задач належать науковому керівнику — Р.О. Поповичу. У роботах, опублікованих разом із іншими авторами, внесок співавторів дисертанта є наступним.

У роботах [14, 85, 86] Р.О. Поповичу належить постановка задачі та оцінка отриманих результатів. Крім цього, в [85] Р.О. Поповичу належить побудова відображення типу годографа для рівняння (7), отриманого з системи визначальних рівнянь, у [14] — вихідна ідея доведення теореми 2 (в [86] — теореми 1).

У статті [90] О.О. Ванєєвій належить початковий вибір класу диференціальних рівнянь для дослідження. Р.О. Поповичу належить постановка задачі та оцінка отриманих результатів. Усі обчислення проводилися дисертантом і О.О. Ванєєвою незалежно з метою їх подальшого порівняння та перевірки. Графіки розв'язків побудовано О.О. Ванєєвою.

Усі результати отримано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (2011–2016, керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), а також на науковому семінарі «Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики» кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2014); на об'єднаному семінарі з математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, професор Є.Д. Білоколос, 2016).

Результати дисертації були предметом доповідей на Міжнародному семінарі до 75-річчя від дня народження В.І. Фущича «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2011); на Міжнародній науковій міждисциплінарній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2013» (Київ, 2013); на XVI Міжнародній конференції «Dynamical System Modeling та Stability Investigation» (Київ, 2013); на Міжнародному семінарі на честь професора В.І. Фущича «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2013); на Міжнародному семінарі з нагоди 70-річчя Анатолія Нікітіна «Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики» (Київ, 2015).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 13 роботах [12–14, 84–93]. З них шість — у міжнародних наукових виданнях та у виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України, затвердженого МОН України [12, 14, 85, 86, 90, 91], причому [12, 91] — без співавторів. Ще дві статті опубліковано в працях міжнародних конференцій [13, 87], чотири — тези міжнародних конференцій [84, 88, 89, 92], одна — препринт [93].

Сім опублікованих робіт проіндексовано в наукометричних базах даних, а саме: [85, 86] — Web of Science, Scopus, ZbMath та MathSciNet;

[12, 14] — ZbMath; [90] — Web of Science, Scopus та MathSciNet; [91] — Web of Science та Scopus; [87] — ZbMath та MathSciNet.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 137 найменувань. Дисертація містить 8 таблиць та 1 рисунок. Повний обсяг дисертації становить 159 сторінок, з них список використаних джерел займає 17 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина дисертаційної роботи складається з п'яти розділів. На початку кожного розділу подано короткий зміст цього розділу за підрозділами.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації.

У *другому розділі* дисертації обґрунтовано вибір класів рівнянь для дослідження та наведено основні теоретичні відомості щодо точкових перетворень у класах диференціальних рівнянь, групоїда еквівалентності, групи еквівалентності та алгебри еквівалентності класу, операторів редукції та інших понять групового аналізу диференціальних рівнянь.

У *третьому розділі* знайдено групоїди еквівалентності всіх класів узагальнених рівнянь Бюргерса, що вивчаються в дисертаційній роботі (крім класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, результати щодо якого повністю винесено у розділ 5, а також класу потенціальних рівнянь, який природно виникає у розділі 4). Розгляд розпочинається з надкласу еволюційних рівнянь другого порядку, лінійних за похідними, який містить усі класи узагальнених рівнянь Бюргерса. Далі вивчено найширший клас $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса, лінеаризовних перетворенням Коула–Хопфа, що мають вигляд

$$\mathcal{A}_{a,b,f}\colon\quad u_t+au_{xx}+(au+a_x+b)u_x+\frac{1}{2}a_xu^2+b_xu+f=0,\quad a\neq0,$$

де a, b та f пробігають множину гладких функцій від (t,x), причому $a\neq0$. В межах локального підходу, прийнятого всюди в дисертації, нерівність нулю функції розуміємо в локальному сенсі, розглядаючи її в певному околі. Показано, як спрощується групоїд еквівалентності класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ внаслідок калібрування довільного елемента і як він пов'язаний з групоїдом еквівалентності класу лінійних еволюційних рівнянь другого порядку через перетворення Коула–Хопфа. Описано групоїди еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, а також класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, які відповідно мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_f\colon \quad u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0, \qquad f\neq 0,\\
&\mathcal{C}_f\colon \quad u_t + uu_x + \big(f(t,x)u_x\big)_x = 0, \qquad f\neq 0,\\
&\mathcal{P}_f\colon \quad v_t + v_x^2 + f(t,x)v_{xx} = 0, \qquad f\neq 0.
\end{aligned}
$$

Для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ достатньо перевірити його нормалізованість. Для опису групоїдів еквівалентності класів $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, які не є нормалізованими, застосовано техніку розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи. Для кожного з цих підкласів побудовано групу еквівалентності того самого типу, що й тип нормалізованості підкласу (звичайну, узагальнену або узагальнену розширену). Наприкінці розділу проведено порівняння групоїдів еквівалентності класів $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ та їхніх підкласів.

Четвертий розділ є основним розділом дисертаційної роботи. У ньому представлено розширений груповий аналіз класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, що покращує, доповнює і узагальнює всі попередні дослідження групоїда еквівалентності, групи еквівалентності та алгебри еквівалентності цього класу, операторів ліївських симетрій, операторів редукції, ліївських та некласичних редукцій, а також законів збереження і потенціальних симетрій рівнянь з цього класу. При розв'язанні задачі групової класифікації для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ є принциповим встановлений у третьому розділі факт, що цей клас нормалізований, а його алгебра еквівалентності — скінченновимірна. Для виконання ліївських редукцій для рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ запропоновано оригінальний метод класифікації ліївських редукцій рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Разом з технікою оптимального вибору анзаців для редукцій він дозволив вичерпно описати приховані симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ та знайти точні розв'язки деяких рівнянь з цього класу.

Повністю прокласифіковано оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Зокрема, оптимізовано доведення твердження про зведення системи визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів редукції класичного рівняння Бюргерса до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності, яке ґрунтується на перетворенні Коула–Хопфа та властивостях операторів редукції, та побудовано відповідні некласичні редукції (з використанням саме цих операторів редукції, а не еквівалентних їм узагальнених умовних симетрій). За допомогою знайдених операторів редукції встановлено зв'язок узагальнених рівнянь Бюргерса з цього класу з потенціальними рівняннями швидкої дифузії степеня нелінійності -1. Використовуючи відомі розв'язки останніх, вдалося побудувати параметричні сім'ї точних розв'язків для деяких узагальнених рівнянь Бюргерса. Слід зазначити, що це один з небагатьох існуючих у літературі прикладів вичерпного опису операторів редукції для деякого класу диференціальних рівнянь у випадку, коли ці оператори редукції є нетривіальними і дають змогу побудувати низку нових точних розв'язків.

Досліджено закони збереження рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ та допустимі перетворення між відповідними рівняннями для потенціалів. Такі перетворення доцільно назвати *потенціальними допустимими перетвореннями* між рівняннями вихідного класу, що обґрунтовує введення поняття потенціального групоїда еквівалентності на прикладі класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Показано, що вивчення потенціальних симетрій рівнянь з класу доцільно розпочати з побудови потенціального групоїда еквівалентності цього класу.

У *п'ятому розділі* виконано груповий аналіз класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, вигляду $\mathcal{D}_{n,h,g}\colon\ u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx},\ ng \neq 0$. До цього класу застосовано калібрування довільного елемента, що дозволило спростити процес класифікації. Знайдено групи еквівалентності як усього класу, так і кількох його підкласів залежно від значень n, а також описано групоїд еквівалентності всього класу шляхом його розбиття на неперетинні нормалізовані підкласи. Як результат групової класифікації представлено три списки розширень ліївських симетрій для цього класу: перший — з точністю до загальної точкової еквівалентності, другий і третій — без використання перетворень еквівалентності у каліброваному класі та у вихідному класі відповідно. Отримано нові точні розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, деякі з них розширено перетвореннями еквівалентності.

Наприкінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність науковому керівнику Роману Омеляновичу Поповичу та співавтору Олені Олександрівні Ванєєвій за плідну співпрацю, всім учасникам наукового семінару відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, зокрема Анатолію Глібовичу Нікітіну та В'ячеславу Миколайовичу Бойку, за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів та підготовки дисертаційної роботи.

Розділ 1

Огляд літератури

Цей розділ присвячено огляду літератури, що стосується симетрійного аналізу класичного рівняння Бюргерса та його узагальнень, які досліджено в дисертаційній роботі.

Огляд доцільно почати з класичного рівняння Бюргерса

$$\mathcal{L}_{-c}\colon\quad u_t + uu_x - cu_{xx} = 0, \qquad c = \text{const}, \quad c > 0.$$

Вважається, що це еволюційне рівняння другого порядку запропонував Дж.М. Бюргерс (Burgers) [40] як одновимірну модель явища турбулентності, проте воно виникало і раніше в роботах Форсайта (Forsyth) [50] і Бейтмана (Bateman) [28]. Це стандартна модель турбулентності, яка використовується для вивчення поширення нелінійних хвиль та утворення ударних хвиль [29]. Серед його розв'язків досить відомими є так звані «біжучі хвилі». У [74] показано, що за відповідної інтерпретації це саме рівняння описує поширення слабких плоских хвиль, а в [71] модель поширено на слабкі циліндричні та сферичні хвилі.

Як важливу і водночас досить просту модель, рівняння Бюргерса інтенсивно вивчали і використовували в якості тестового прикладу для розробки і відпрацювання різноманітних математичних понять і методів, зокрема й у галузі групового аналізу диференціальних рівнянь [8, 22].

Рівняння $\mathcal{L}_{-c}$ також описує процеси дифузії. Функція u зазвичай відповідає полю швидкостей, t — час, $x \in \mathbb{R}$ — просторова змінна, c — стала в'язкості або коефіцієнт дифузії. Це ж рівняння застосовують і для моделювання різноманітних явищ у фізиці, хімії, математичній біології тощо. Його також використовують для опису процесів газової динаміки [45,62], нелінійної акустики [74], теплопровідності та у фізиці плазми. У космології рівняння Бюргерса є гарною апроксимацією процесів утворення і поширення матерії у великих масштабах [135]. Досить повний огляд властивостей цього рівняння зроблено в [16, розділ 4].

Різноманітні узагальнення рівняння Бюргерса використовують як моделі нелінійної акустики. Деякі з цих моделей обговорено в [116]. У [38] перераховано ще кілька узагальнених рівнянь Бюргерса та наведено посилання на їх дослідження.

Рівняння Бюргерса з зовнішньою силою $u_t + uu_x - \frac{1}{2}u_{xx} + \omega_0^2 x = 0$ розглянуто в [49, 119]. Рівняння

$$u_t + uu_x + \frac{j}{2t}u = \frac{\delta}{2}u_{xx}, \qquad \delta = \mathrm{const},$$

що описує ефекти циліндричного і сферичного поширення коливань та нерівноважної релаксації, запропоновано в [4, розділ 4] і вивчено пізніше в [46, 117]. Тут ціле число j — це кількість вимірів, у яких поширюється хвиля ($j = 1$ для циліндричного поширення і $j = 2$ для сферичного).

1.1. Груповий аналіз рівняння Бюргерса

Оскільки лiївські симетрії є потужним інструментом для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними [7, 8, 34], такі модельні рівняння як рівняння Бюргерса та його узагальнення інтенсивно вивчалися з точки зору ліївських симетрій починаючи з 1960-х років. Максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_{-1}$ рівняння $\mathcal{L}_{-1}$: $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$ в процесі групової класифікації диференціальних рівнянь загального вигляду $u_t + uu_x = (f(u)u_x)_x$ вперше обчислив В.Л. Катков [3]. Вона є лінійною оболонкою векторних полів

$$\begin{aligned} &P_t = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \\ &K = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - ut)\partial_u, \quad P_x = \partial_x, \quad \Gamma = t\partial_x + \partial_u. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Повну групу G_{-1} точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}_{-1}$ складають перетворення

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},\\
&\tilde{u} = \frac{\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

де α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — набір довільних сталих, визначений з точністю до ненульового множника, причому $\alpha\delta - \beta\gamma = \kappa^2 > 0$. З точністю до композиції з неперервними точковими симетріями група G_{-1} містить лише одну дискретну симетрію $(t, x, u) \to (t, -x, -u)$.

Добре відомо, що рівняння $\mathcal{L}_{-1}$ лінеаризується до рівняння теплопровідності $v_t = v_{xx}$ перетворенням Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$ [50, с. 102].

1.2. Узагальнені рівняння Бюргерса і точкові перетворення між ними

Рівняння Бюргерса дало початок дослідженням класів більш загальних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Деякі з них вивчали з точки зору симетрійного аналізу [3, 35, 47, 65, 85, 87, 122, 130, 133]. Це, перш за все, клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній,

$$u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0, \qquad f \neq 0,$$

розширеному груповому аналізу якого присвячено розділ 4, а також клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу,

$$u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}, \qquad ng \neq 0,$$

розглянутий у розділі 5. Тут $f(t,x)$, $h(t)$ та $g(t)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $f \neq 0$ та $g \neq 0$, а n — довільна ненульова стала.

Дослідження класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ розпочали з рівнянь, у яких параметр-функція залежить тільки від часу. Зокрема, узагальнене рівняння Бюргерса, що описує розповсюдження слабких нелінійних хвиль в акустиці під впливом геометричного розсіювання і термов'язкої дифузії, розглянуто в [60]. У безрозмірних змінних воно має вигляд $u_t - uu_x = f(t)u_{xx}$, $f \neq 0$.

У [41] знайдено конформне точкове перетворення між рівняннями з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, для яких довільний елемент залежить лише від t. Ліївські симетрії та інваріантні розв'язки таких рівнянь розглянуто у [47,122,133], але автори некоректно скористалися перетвореннями еквівалентності при виконанні групової класифікації.

Відзначимо, що $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ — це перший клас диференціальних рівнянь, для якого було описано (неявно) групоїд еквівалентності [65], хоча термін «групоїд еквівалентності» введено пізніше [30, 97]. Множина допустимих перетворень у [65] виявилася штучно розбитою на дві підмножини, одну з яких можна було б параметризувати значно простіше. Також не було вказано зв'язок цих перетворень з групою еквівалентності і те, що відповідні інфінітезимальні перетворення породжують алгебру еквівалентності. Проте у [65] відмічено, що певні класифікаційні випадки [47] еквівалентні.

Підалгебри афінної алгебри $\mathrm{aff}(2,\mathbb{R})$, якій ізоморфна алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, вперше прокласифіковано в [59] у зв'язку з груповою класифікацією класу рівнянь $u_t + g(t,x)uu_x + f(t,x)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. Проте дискретні перетворення еквівалентності при цьому не було застосовано. Параметризовані сім'ї нееквівалентних підалгебр подрібнено залежно від їхньої алгебраїчної структури, що не є необхідним для групової класифікації класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. В результаті побудовано список підалгебр, що складається з 44 сімей. Більшість підалгебр з цього списку не є максимальними алгебрами ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Оскільки цю класифікацію подано у статті [59] без доведення, її коректність не є очевидною. Тому в дисертаційній роботі підалгебри проекції $\mathfrak{g}$ алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір змінних (t,x,u), що є максимальними алгебрами ліївської інваріантності для рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, прокласифіковано без використання результатів [59], і ця задача є менш громіздкою, ніж класифікація всіх підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$.

Спроба поширити результати [59] на клас узагальнених рівнянь Бюргерса з двома змінними коефіцієнтами $u_t + f(t,x)uu_x + g(t,x)u_{xx} = 0$, $fg \neq 0$, зроблена в [111], була невдалою, оскільки автор використав власний перелік нееквівалентних підалгебр афінної алгебри $\mathrm{aff}(2,\mathbb{R})$, який має багато недоліків. Повну групову класифікацію класу

$$u_t + a(u^m)_x = g(t)u_{xx}, \qquad ag \neq 0, \qquad m \neq 0, 1,$$

виконано в [130]. Задачі групової класифікації певних підкласів класу

$$u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx} \qquad ng \neq 0,$$

з $h = 0$ розглянуто в [47, 125, 127, 133]. Інваріантні розв'язки рівняння

$$u_t + u^n u_x + \frac{j}{2t}u = \frac{\delta}{2}u_{xx}, \qquad n > 0, \qquad j \geq 0, \qquad \delta > 0,$$

досліджено в [112]. У роботі [125] розглянуто ліївські симетрії та ліївські редукції узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, вигляду

$$u_t + u^n u_x + \alpha u = g(t)u_{xx}, \qquad g \neq 0, \qquad n \in \mathbb{R}, \qquad \alpha \geq 0.$$

Роботи [115, 123–126] не містять суттєвих результатів, але ілюструють великий інтерес до узагальнених рівнянь Бюргерса.

1.3. Оператори редукції узагальнених рівнянь Бюргерса

Метод некласичної редукції диференціальних рівнянь запропоновано Дж.В. Блуманом і Ю.Д. Коулом [32, 33] як узагальнення класичного методу ліївської редукції для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь. Спробу формалізації цього методу зроблено у [54]. Його природно інтерпретувати як спеціальний випадок [68, 69, 78, 79, 108] загального методу диференціальних зв'язків [15, 20]. Цей метод застосовували до математичних моделей багатьох фізичних явищ [18, 81].

Векторні поля, пов'язані з некласичними редукціями, отримали назву некласичних (умовних, Q-умовних) симетрій [53, 81]. Більш точний термін для таких векторних полів — *оператори редукції* [68] — вказує на їхній зв'язок із зменшенням кількості незалежних змінних (редукцією) диференціальних рівнянь з частинними похідними за допомогою анзаців, побудованих за цими векторними полями [137].

Рівняння Бюргерса стало першим рівнянням, розглянутим з точки зору некласичних симетрій після піонерської роботи [33]. А саме, в [134] виведено визначальні рівняння для регулярних операторів редукції рівняння $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$, що мають вигляд $Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$, де без обмеження загальності можна вважати $\tau = 1$. Також знайдено декілька часткових розв'язків цих визначальних рівнянь, що задовольняють обмеження $\xi_u = 0$ (див. підрозділи 4.4.3–4.4.4). Ці результати наведено в [22].

Пізніше некласичним симетріям рівняння Бюргерса було присвячено низку публікацій [19, 23, 24, 42, 43, 76, 77, 81, 107].

Зокрема, в [107] вперше розв'язано визначальні рівняння на коефіцієнти регулярних операторів редукції з $\tau = 1$ і описано три підмножини, на які розпадається множина цих операторів редукції залежно від умови на коефіцієнт ξ: $\xi_u = 1$, $\xi_u = 0$ або $\xi_u = -\frac{1}{2}$ (див. підрозділи 4.4.1–4.4.4). У цій статті також доведено, що всі некласичні симетрії з $\xi_u = 0$ насправді еквівалентні ліївським симетріям. Цей самий результат отримано в [42] з використанням прямого методу, тобто в термінах відповідних анзаців і редукцій.

Також у [107] знайдено і застосовано єдиний оператор редукції $\partial_t + u\partial_x$ з $\xi_u = 1$, а для випадку $\xi_u = -\frac{1}{2}$ побудовано деякі часткові розв'язки визначальних рівнянь разом з відповідними анзацами та інваріантними розв'язками рівняння Бюргерса. Розгляд регулярних операторів редукції, розпочатий у [107], було доповнено в [23] іншими частковими розв'язками з $\xi_u = -\frac{1}{2}$.

Система (4.19) визначальних рівнянь для випадку $\xi_u = -\frac{1}{2}$ довго не була вичерпно досліджена, в той час як аналогічну систему для регулярних операторів редукції лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, вигляд якої подібний до визначальних рівнянь для випадку $\xi_u = -\frac{1}{2}$, розв'язано в [18, 52]. Вперше систему (4.19) лінеаризовано в [76] способом, подібним до застосованого в [52]. А саме, диференціальною підстановкою її зведено до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності. Як показано в [24], систему (4.19), як і підстановку, що її лінеаризує, можна інтерпретувати в термінах матричного рівняння Бюргерса і матричного перетворення Коула–Хопфа. П. Олвер і Є.М. Воробйов дослідили некласичні симетрії системи диференціальних рівнянь першого порядку, що еквівалентна рівнянню Бюргерса [81].

В [43] запропоновано алгоритм виведення визначальних рівнянь для операторів редукції (у цій роботі, як і в попередніх, вживається термін «некласичні симетрії»). Рівняння Бюргерса стало одним з показових прикладів застосування цього алгоритму.

Принципове твердження про умовні симетрії еволюційних рівнянь доведено в [136], де «no-go»-результати роботи [52] щодо операторів редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t для лінійного рівняння теплопровідності було узагальнено на еволюційні рівняння порядку більше 1. Ці результати викладено в [67] у термінах сингулярних операторів редукції. Подібні оператори редукції еволюційних рівнянь з довільною кількістю просторових змінних вперше розглянуто в [10].

Спроби описати некласичні симетрії узагальнених рівнянь Бюргерса $\mathcal{L}_f\colon\ u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$, $f \neq 0$, з коефіцієнтами при другій похідній, відмінними від сталої, розпочато в [133], де розглянуто рівняння з $f = f(t)$. Показано, що оператори редукції, які не еквівалентні операторам ліївських симетрій, існують тільки для рівнянь з $f = \mathrm{const}$.

Зауважимо, що всі згадані джерела містять лише окремі фрагменти повністю розв'язаної у дисертаційній роботі задачі дослідження операторів редукції узагальнених рівнянь Бюргерса з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

1.4. Потенціальні симетрії, закони збереження

Рівняння Бюргерса — не тільки гарний об'єкт для демонстрації нових технік дослідження ліївських та некласичних симетрій. Воно також було першим ілюстративним прикладом застосування методу знаходження законів збереження в термінах характеристик [132, підрозділ 4.5], потенціальних симетрій [8] та некласичних потенціальних симетрій [57].

Потенціальні симетрії і закони збереження узагальнених рівнянь Бюргерса досліджено значно менше. Зокрема, у роботі [133] вказано, що нетривіальних потенціальних симетрій у рівнянь з підкласу класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з $f_x = 0$ (крім класичного рівняння Бюргерса) немає.

Розділ 2

Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь

У цьому розділі дисертації наведено основні означення і теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач розширеного групового аналізу диференціальних рівнянь, включаючи означення класу диференціальних рівнянь, допустимого перетворення, групоїда еквівалентності, нормалізованого класу диференціальних рівнянь, групи еквівалентності, алгебри еквівалентності, задачі групової класифікації, оператора ліївської симетрії, оператора редукції, локальних законів збереження і потенціальних симетрій. Ці поняття допомагають обґрунтовано вибрати класи диференціальних рівнянь для вивчення та чітко формулювати класифікаційні задачі. Виклад теоретичних відомостей базується на таких поняттях як група Лі, алгебра Лі, групоїд, а також на загальній теорії групового аналізу диференціальних рівнянь (див. [7, 8]).

Вибір класів узагальнених рівнянь Бюргерса як об'єкту для дисертаційного дослідження ґрунтується на таких фактах. По-перше, незважаючи на значну кількість публікацій, присвячених окремим рівнянням або підкласам вказаних класів (див. розділ 1), до цього часу недостатньо і не повністю вивченими залишаються навіть їхні ліївські симетрії, не кажучи вже про такі більш складні об'єкти як некласичні редукції та допустимі перетворення. По-друге, такі класи узагальнених рівнянь Бюргерса, а особливо клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, є зручними об'єктами для відпрацювання нових технік та методів розширеного групового аналізу. Більшість цих класів виявилися нормалізованими, хоча мають довільний елемент, залежний від двох аргументів (часової і просторової змінної), а їхні алгебри еквівалентності скінченновимірні. Це дозволило застосувати алгебраїчний метод групової класифікації до цих класів, посиливши його спеціальною технікою класифікації придатних підалгебр [30, 70].

Поняття класу диференціальних рівнянь запропоновано Л.В. Овсянніковим [7]. Необхідність врахування калібрувальної еквівалентності в класах диференціальних рівнянь вперше відмічено в [75], див. також [101]. Означення допустимих перетворень, групоїда еквівалентності, нормалізованих і напівнормалізованих класів диференціальних рівнянь, різноманітних видів груп еквівалентності та інші поняття і методи, пов'язані з дослідженням задач групової класифікації, наведено в [11, 30, 63, 95, 101, 128] і посиланнях у цих джерелах.

Всі означення наведено для окремих диференціальних рівнянь з однією невідомою функцією та для класів таких рівнянь.

2.1. Точкові перетворення в класах диференціальних рівнянь

Нехай $\mathcal{L}_\theta\colon L_\theta[u] = L(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) = 0$ — диференціальне рівняння з частинними похідними p-го порядку, де $x = (x_1, \dots, x_n)$ — незалежні змінні, u — залежна змінна, $u_{(p)} = (u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots)$ — похідні залежної змінної до порядку p включно, $\theta_{(q)}(x, u_{(p)})$ — набір параметр-функцій $\theta^1(x, u_{(p)}), \dots, \theta^k(x, u_{(p)})$ разом з їхніми похідними до порядку q включно.

Рівняння $\mathcal{L}_\theta$ визначає многовид $\mathcal{L}_{(p)}$ у просторі $J^p(x|u)$ струменів порядку p, який зручно інтерпретувати як звичайний простір з координатами $(x, u_{(p)})$.

Означення 2.1. *Класом диференціальних рівнянь* називається множина $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{L}_\theta \mid \theta \in \mathcal{S}/_{\underset{\sim}{\mathrm{g}}}\}$, параметризована набором функцій $\theta(x, u_{(p)})$, що пробігають множину $\mathcal{S}$ розв'язків системи рівнянь (і, можливо, нерівностей)

$$S = S(x, u_{(p)}, \theta_{(q')}(x, u_{(p)})) = 0 \qquad (\neq 0,\ > 0,\ < 0),$$

де x і $u_{(p)}$ слід вважати незалежними змінними, факторизовану за відношенням калібрувальної еквівалентності $\overset{\mathrm{g}}{\sim}$. Символом $\theta_{(q')}$ позначено всі похідні довільного елемента θ до порядку r включно [11].

Набір параметр-функцій $\theta(x, u_{(p)})$ називається *довільним елементом* класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Значення довільного елемента θ та $\tilde{\theta}$ називають *калібрувально еквівалентними* ($\theta \overset{\mathrm{g}}{\sim} \tilde{\theta}$), якщо $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ визначають один і той самий многовид у просторі $(x, u_{(p)})$.

Наприклад, для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній маємо $n = 2$, $p = 2$, $k = 1$, тобто довільний елемент складається з однієї параметр-функції f. Відповідний простір струменів $J^2(t, x|u)$, де $t = x_1$ і $x = x_2$, інтерпретуємо як простір з координатами $(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx})$. $L_f = u_t + uu_x + fu_{xx}$, а множина $\mathcal{S}$, яку пробігає f, є множиною розв'язків системи рівнянь і нерівностей

$$f_u = f_{u_t} = f_{u_x} = f_{u_{tt}} = f_{u_{tx}} = f_{u_{xx}} = 0, \quad f \neq 0.$$

Ця система відображає той факт, що функція не дорівнює нулю і фактично залежить лише від (t, x). Калібрувальна еквівалентність у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ тривіальна: рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з різними значеннями довільного елемента f визначають різні многовиди в $J^2(t, x|u)$. В розділах 3–5 класи диференціальних рівнянь описано менш формально — через явне вказування аргументів довільних елементів і нерівностей, яким вони задовольняють.

Якщо задано два фіксовані рівняння $\mathcal{L}_\theta$ та $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з довільними елементами θ та $\tilde{\theta}$ відповідно, множину $T(\theta, \tilde{\theta})$ точкових перетворень у просторі (x, u), які відображають рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$, називають *множиною допустимих перетворень з* $\mathcal{L}_\theta$ *в* $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$.

Означення 2.2. *Допустиме перетворення* у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ — це трійка $(\theta, \varphi, \tilde{\theta})$, що складається з довільних елементів початкового рівняння $\mathcal{L}_\theta$, кінцевого рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ і точкового перетворення $\varphi \in \mathrm{T}(\theta, \tilde{\theta})$, яке відображає $\mathcal{L}_\theta$ в $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ [95, 101].

Як правило, першочергове вивчення допустимих перетворень у класі диференціальних рівнянь є оптимальним способом проведення його повної групової класифікації. Багато задач групової класифікації розв'язано саме у цей спосіб [30, 101, 105, 128, 129] (див. також посилання на теоретичні відомості, методи та результати у цих джерелах).

Означення допустимого перетворення є формалізацією понять формозберігаючих (form-preserving) [65, 66] та дозволених (allowed) [59] перетворень, що використовувалися раніше.

Розгляд багатьох задач групової класифікації для класів диференціальних рівнянь показує, що важливо знайти не тільки групу еквівалентності класу диференціальних рівнянь $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, але і всю множину допустимих перетворень у цьому класі, яка має структуру групоїда, а тому називається *групоїдом еквівалентності* класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Означення 2.3. *Групоїдом еквівалентності* $\mathcal{G}^{\sim} = \mathcal{G}^{\sim}(\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ називають множину $\{(\theta, \varphi, \tilde{\theta}) \mid \theta \in \mathcal{S},\ \tilde{\theta} \in \mathcal{S},\ \varphi \in T(\theta, \tilde{\theta})\}$ допустимих перетворень у цьому класі з операцією "$\circ$" композиції допустимих перетворень [30, 97].

Композиція "$\circ$" допустимих перетворень $(\theta_1, \varphi_1, \tilde{\theta}_1)$ та $(\theta_2, \varphi_2, \tilde{\theta}_2)$ є визначеною тільки якщо $\tilde{\theta}_1 = \theta_2$, і її результатом є $(\theta_1, \varphi_2\varphi_1, \tilde{\theta}_2)$. Аксіоми групоїда виконуються:

1. Асоціативність композиції: $((\theta_1, \varphi_1, \theta_2) \circ (\theta_2, \varphi_2, \theta_3)) \circ (\theta_3, \varphi_3, \theta_4) = (\theta_1, \varphi_1, \theta_2) \circ ((\theta_2, \varphi_2, \theta_3) \circ (\theta_3, \varphi_3, \theta_4))$.
2. Для кожного θ роль нейтрального елемента відіграє трійка $(\theta, \mathrm{id}, \theta)$, де id — тотожне перетворення: $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$.
3. Будь-яке допустиме перетворення $(\theta, \varphi, \tilde{\theta})$ має обернене $(\tilde{\theta}, \varphi^{-1}, \theta)$.

Відношення між двома значеннями довільного елемента, яке встановлює наявність допустимого перетворення з цими значеннями у якості початкового і кінцевого, є відношенням еквівалентності, причому його транзитивність, рефлексивність та симетричність випливають з властивостей операції "$\circ$". Це відношення $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентності співпадає з відношенням подібності диференціальних рівнянь, обмеженим на клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Серед допустимих перетворень можуть існувати такі, що не є нейтральними елементами групоїда еквівалентності і відображають деяке рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в себе.

Означення 2.4. Множина $\mathrm{T}(\theta,\theta)$ з операцією композиції перетворень є (псевдо)групою, яку називають *(максимальною) групою точкових симетрій* рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і позначають G_θ [7].

Елементи групи симетрій G_θ діють на просторі залежної і незалежних змінних і відображають розв'язки рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в інші розв'язки цього ж рівняння.

Означення 2.5. Алгебру Лі, що складається з інфінітезимальних генераторів однопараметричних груп точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}_\theta$, називають *алгеброю ліївських симетрій* рівняння $\mathcal{L}_\theta$ і позначають $\mathfrak{g}_\theta$ [7,8].

Інфінітезимальний генератор однопараметричної групи точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}_\theta$ — це векторне поле в просторі змінних (x,u) вигляду $Q=\xi^1\partial_{x_1}+\dots+\xi^n\partial_{x_n}+\eta\partial_u$, де компоненти $\xi^1, \dots, \xi^n$, η — гладкі функції від (x,u), які є лінійними складовими розкладу перетворення за малим параметром в околі тотожного перетворення.

Однопараметричну групу точкових перетворень можна відновити за її інфінітезимальним генератором як розв'язок задачі Коші для *рівняння Лі* з тотожним перетворенням в якості початкового значення:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}_i}{\mathrm{d}\varepsilon}=\xi^i(\tilde{x},\tilde{u}),\quad \tilde{x}_i\Big|_{\varepsilon=0}=x_i,\quad i=1,\dots,n,$$
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}=\eta(\tilde{x},\tilde{u}),\quad \tilde{u}\Big|_{\varepsilon=0}=u.$$

Означення 2.6. *(Звичайна) група еквівалентності* $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ — це (псевдо)група точкових перетворень у просторі $(x, u_{(p)}, \theta)$, які проектовні на простір $(x, u_{(\tilde p)})$ для будь-якого $\tilde p$, $0 \leqslant \tilde p \leqslant p$, причому проекції узгоджені з контактною структурою цих просторів, і які відображають кожне рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ у рівняння з цього ж класу [7].

Кожне перетворення $\mathcal{T}$ з групи еквівалентності $G^{\sim}$ породжує сім'ю допустимих перетворень $\{(f, \mathcal{T}|_{(t,x,u)}, \mathcal{T}f) \mid f \in S\} \subset \mathcal{G}^{\sim}$. Перетворення з групи $G^{\sim}$ встановлюють на класі диференціальних рівнянь відношення $G^{\sim}$-еквівалентності. Існують різні узагальнення поняття групи еквівалентності [101], які базуються на послабленні умов означення 2.6 — узагальнені, розширені та узагальнені розширені групи еквівалентності.

Означення 2.7. Алгебру Лі, що складається з інфінітезимальних генераторів однопараметричних груп перетворень еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, називають *алгеброю еквівалентності* класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ і позначають $\mathfrak{g}^{\sim}$ [7].

Якщо від загального випадку n незалежних змінних перейти до випадку двох незалежних змінних t і x, у просторі незалежних і залежної змінних (t, x, u) будь-яке точкове перетворення матиме вигляд

$$\varphi\colon \quad \tilde t = T(t,x,u), \quad \tilde x = X(t,x,u), \quad \tilde u = U(t,x,u), \tag{2.1}$$

причому якобіан $|\partial(T,X,U)/\partial(t,x,u)| \neq 0$.

Інфінітезимальний критерій інваріантності [8, теорема 2.31] для випадку оператора ліївської симетрії Q рівняння $\mathcal{L}\colon\ L[u]=0$ другого порядку з незалежними змінними (t,x) має вигляд

$$Q_{(2)} L\big|_{\mathcal{L}_{(2)}} = 0. \tag{2.2}$$

Тут $Q_{(2)} = Q + \eta^t\partial_{u_t} + \eta^x\partial_{u_x} + \eta^{tt}\partial_{u_{tt}} + \eta^{tx}\partial_{u_{tx}} + \eta^{xx}\partial_{u_{tx}}$ — друге продовження векторного поля $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$ з компонентами

$$\begin{aligned}
&\eta^t = \mathrm{D}_t Q[u] + \tau u_{tt} + \xi u_{tx}, \quad \eta^x = \mathrm{D}_x Q[u] + \tau u_{tx} + \xi u_{xx},\\
&\eta^{tt} = \mathrm{D}_t^2 Q[u] + \tau u_{ttt} + \xi u_{ttx}, \quad \eta^{tx} = \mathrm{D}_t\,\mathrm{D}_x Q[u] + \tau u_{ttx} + \xi u_{txx},\\
&\eta^{xx} = \mathrm{D}_x^2 Q[u] + \tau u_{txx} + \xi u_{xxx},
\end{aligned}$$

де $Q[u] = \eta - \tau u_{tt} - \xi u_{tx}$ — характеристика векторного поля Q, $\mathcal{L}_{(2)}$ — многовид у просторі струменів другого порядку, що відповідає рівнянню $L = 0$, а диференціальні оператори

$$\mathrm{D}_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \cdots ,$$
$$\mathrm{D}_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots$$

є операторами повної похідної за t і за x відповідно.

2.2. Нормалізовані класи диференціальних рівнянь

Означення 2.8. Клас диференціальних рівнянь $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ називають *нормалізованим* (відносно точкових перетворень), якщо його групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ породжено його групою еквівалентності $G^{\sim}$, тобто для кожної трійки $(\theta, \varphi, \tilde{\theta}) \in \mathcal{G}^{\sim}$ існує перетворення $\mathcal{T}$ з групи еквівалентності $G^{\sim}$ таке, що $\tilde{\theta} = \mathcal{T}\theta$ та $\varphi = \mathcal{T}|_{(x,u)}$ [11, 101].

Іншими словами, кожне допустиме перетворення у нормалізованому класі породжено перетворенням з групи еквівалентності. У нормалізованих класах $G^{\sim}$-еквівалентність рівносильна $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентності.

Поняття нормалізованого класу диференціальних рівнянь природне і корисне для застосувань. Ієрархії нормалізованих підкласів часто виникають у процесі розв'язання задач групової класифікації. Так, кожне окреме диференціальне рівняння утворює нормалізований клас; будь-який клас усіх можливих рівнянь фіксованого порядку з наперед визначеною кількістю незалежних змінних також є нормалізованим.

Основні переваги при роботі з нормалізованими класами такі:

1) розв'язання задачі повної групової класифікації для такого класу зводиться до його попередньої групової класифікації [30];

2) між $G^{\sim}$-еквівалентними випадками класифікаційного списку немає ніяких додаткових перетворень еквівалентності.

Існують послаблення поняття нормалізованості. Наприклад, слабко нормалізовані класи мають першу з названих властивостей, але не обов'язково мають другу; напівнормалізовані — навпаки (строгі означення див. у [97,101]). Дослідження складних класів диференціальних рівнянь може вимагати введення нових типів нормалізованості. Так, нещодавно запропоновано поняття рівномірно напівнормалізованих класів, які є проміжними між нормалізованими і напівнормалізованими класами.

У залежності від типу групи еквівалентності, що породжує групоїд еквівалентності, розрізняють нормалізованість у звичайному, узагальнененому, розширеному та узагальненому розширеному сенсі. Якщо не вказано, в якому сенсі клас нормалізований, вважається, що він нормалізований у звичайному сенсі.

Щоб довести нормалізованість класу диференціальних рівнянь, потрібно порівняти його групу еквівалентності з його групоїдом еквівалентності. На практиці висновок про те, що певний клас є нормалізованим, можна зробити вже тоді, коли в процесі розв'язання визначальних рівнянь для знаходження допустимих перетворень у цьому класі не виникає ніяких класифікуючих умов. Класифікуючою умовою називаємо визначальне рівняння, яке містить одночасно довільні елементи класу й параметри допустимих перетворень і призводить до розгалуження процесу розв'язання визначальних рівнянь.

2.3. Задача групової класифікації

Означення 2.9. Розв'язати *задачу групової класифікації* класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ означає описати всі $G^{\sim}$-нееквівалентні значення $\theta \in \mathcal{S}$ разом з відповідними максимальними алгебрами ліївських симетрій $\mathfrak{g}_\theta$, для яких $\mathfrak{g}_\theta$ не співпадає з *ядром* $\mathfrak{g}^{\cap}$ *максимальних алгебр ліївських симетрій* (спільною частиною всіх таких алгебр) [7] (див. також [98]).

Основні етапи розв'язання задачі групової класифікації такі:

1. Знайти групу еквівалентності класу $G^{\sim}$ та/або його групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$.

2. Користуючись інфінітезимальним критерієм інваріантності, виписати визначальні рівняння на коефіцієнти операторів ліївської симетрії рівнянь з класу.
3. Розв'язати визначальні рівняння, незалежні від довільного елемента, щоб знайти загальний вигляд цих коефіцієнтів.
4. Визначити ядро максимальних алгебр ліївських інваріантності $\mathfrak{g}^{\cap}$.
5. Скласти список нееквівалентних значень довільного елемента θ та відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ для яких $\mathfrak{g}_\theta \neq \mathfrak{g}^{\cap}$.
6. Перевірити, чи не пов'язані випадки списку додатковими перетвореннями еквівалентності (необхідно для *ненормалізованих* класів).

Знайдені ліївські симетрії можна використати для ліївських редукцій відповідних рівнянь. Якщо клас нормалізований, такі редукції можна класифікувати відносно групи еквівалентності класу (див. підрозділ 4.3).

2.4. Оператори редукції

Виконуючи редукцію диференціального рівняння з частинними похідними з використанням його ліївських симетрій, взагалі кажучи неможливо отримати достатньо широку множину точних розв'язків цього рівняння. У [32, 33] запропоновано так званий метод некласичної редукції, який використовує набагато ширший клас векторних полів, ніж оператори ліївських симетрій. Відповідні векторні поля отримали назву некласичних симетрій [72], або умовних симетрій [18, 51, 137], а пізніше — операторів редукції [96]. Коректність і доцільність застосування до згаданих об'єктів назви «оператор редукції» обґрунтовано в [68, 137].

Оскільки кожне рівняння з розглянутих у дисертації є рівнянням відносно однієї невідомої функції від двох незалежних змінних (t, x), доцільно навести наступні означення саме для цього випадку. Розглянемо деяке рівняння $\mathcal{L}\colon\ L[u] = 0$.

Означення 2.10. *Оператором редукції* диференціального рівняння з незалежними змінними t, x та залежною змінною u називається векторне поле (диференціальний оператор) вигляду

$$Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \quad (\tau,\xi) \neq (0,0), \tag{2.3}$$

за допомогою якого можна побудувати анзац, який зменшує (редукує) кількість незалежних змінних на одиницю [11, 67, 96, 137].

Досить відомим є метод ліївської редукції [80]. Якщо деяке (1+1)-вимірне диференціальне рівняння допускає оператор ліївської симетрії вигляду $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$, то анзац, який редукує це диференціальне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння, можна побудувати як розв'язок умови інваріантності поверхні $Q[u] := \tau u_t + \xi u_x - \eta = 0$. Інакше кажучи, потрібно знайти два незалежні перші інтеграли відповідної характеристичної системи

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}u}{\eta}.$$

Кожний оператор ліївської симетрії є оператором редукції. Процедура відшукання операторів редукції відрізняється від процедури отримання ліївських симетрій додатковим обмеженням у критерії інваріантності.

Критерій умовної інваріантності [51, 81, 96, 137] для оператора редукції Q рівняння $\mathcal{L}\colon L = 0$ другого порядку з незалежними змінними (t, x) має вигляд

$$Q_{(2)} L\Big|_{\mathcal{L}_{(2)} \cap \mathcal{Q}_{(2)}} = 0. \tag{2.4}$$

Тут $\mathcal{Q}_{(2)}$ — многовид у просторі струменів $J^{(2)}(t, x|u)$, визначений умовою інваріантності поверхні $Q[u] = 0$ спільно з її диференціальними наслідками $\mathrm{D}_t Q[u] = 0$ і $\mathrm{D}_x Q[u] = 0$, де $Q[u] = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ — характеристика векторного поля Q.

З умовного критерію інваріантності отримують визначальні рівняння на коефіцієнти (компоненти) операторів редукції.

Множення на довільну ненульову функцію від (t, x, u) породжує на множині операторів редукції (1+1)-вимірного диференціального рівняння $\mathcal{L}$ відношення еквівалентності [67, 110]: оператори редукції Q і Q' рівняння $\mathcal{L}$ еквівалентні, якщо існує функція $q = q(t, x, u) \neq 0$ така, що $Q' = qQ$. Практична цінність цієї еквівалентності полягає в тому, що еквівалентні оператори редукції приводять до тих самих анзаців і редукованих рівнянь і в результаті дають ті ж самі точні розв'язки вихідного диференціального рівняння. Тому доцільно відразу обирати для розрахунків найпростіший представник з кожного класу еквівалентних операторів редукції.

Наприклад, множина операторів редукції будь-якого еволюційного рівняння природним чином розбивається на дві підмножини — *сингулярних* та *регулярних* операторів редукції — залежно від того, чи дорівнює нулю коефіцієнт τ [67]. З точністю до еквівалентності операторів редукції можна вважати, що $\tau = 1$ для регулярних операторів редукції та $\tau = 0$, $\xi = 1$ — для сингулярних. Зауважимо, що для еволюційних рівнянь відшукання сингулярних операторів редукції є «no-go» задачею [67,110,136]: розв'язок визначальних рівнянь для таких операторів неможливо знайти в явному вигляді, а задача його побудови зводиться до розв'язання початкового рівняння.

Взагалі кажучи, «no-go» випадком при відшуканні операторів редукції у сім'ї векторних полів називають таку ситуацію, коли відповідна система визначальних рівнянь для коефіцієнтів операторів редукції зводиться до добре визначеної системи, загальний розв'язок якої знайти неможливо (принаймні його не можна представити у явному вигляді) і, більш того, розв'язання цієї системи еквівалентно (в певному сенсі) розв'язанню початкового рівняння. У нескладних випадках (зокрема, коли така добре визначена система складається з єдиного рівняння), можна вгадати вигляд її часткових розв'язків і потім використати відповідні оператори редукції для побудови точних розв'язків вихідного рівняння (див., наприклад, [58]), проте алгоритмічної процедури для цього не існує.

У дисертаційній роботі найбільш суттєвими є результати, отримані для регулярних операторів редукції [67].

Означення операторів редукції, а також інволютивних сімей операторів редукції (модулів редукції) для диференціальних рівнянь з багатьма незалежними змінними можна знайти, наприклад, у [11, 137].

Зауваження 2.11. Для окремого диференціального рівняння його оператори редукції можна класифікувати відносно групи точкових симетрій цього рівняння. Класифікацію операторів редукції для рівнянь з деякого класу доцільно проводити відносно групи еквівалентності або групоїда еквівалентності цього класу.

Існують методи редукції, в яких уникають використання операторів редукції, натомість базовим є поняття анзацу [18, 42]. Однією з конструктивних є техніка побудови неліївських анзаців за допомогою узагальнення ліївських [26].

Узагальнення понять «анзац» і «редукція», пов'язані зі слабкими симетріями, наведено, наприклад, у [39, 80, 109, 114], див. також посилання в цих джерелах.

2.5. Локальні закони збереження

Збережним вектором рівняння $\mathcal{L}$: $L=0$ називають набір з n диференціальних функцій $F=\big(F^1(x,u_{(q')}),\dots,F^n(x,u_{(q')})\big)$ від u, для яких повна дивергенція $\operatorname{Div} F:=\sum_{i=1}^n \mathrm{D}_iF^i$ дорівнює нулю для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{L}$:

$$\operatorname{Div} F\,\Big|_{\mathcal{L}}=0.$$

Збережний вектор F *тривіальний*, якщо $F^i=\hat F^i+\check F^i$, $i=1,\dots,n$, де $\hat F^i$ та $\check F^i$ — диференціальні функції від u, $\hat F^i\big|_{\mathcal{L}}=0$, а набір $\check F=(\check F^1,\dots,\check F^n)$ є нульовою дивергенцією: $\operatorname{Div}\check F\equiv 0$

Збережні вектори F та F' вважають еквівалентними, якщо вектор-функція $F'-F$ є тривіальним збережним вектором [11, 132].

Для будь-якого рівняння $\mathcal{L}$ множина $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ його збережних векторів є лінійним простором, а множина $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ його тривіальних збережних векторів є лінійним підпростором у $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{CV}(\mathcal{L}) = \mathrm{CV}(\mathcal{L})/\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ співпадає з множиною класів еквівалентності $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ за відношенням еквівалентності збережних векторів. Елементи цього фактор-простору, тобто класи еквівалентності збережних векторів, називають *законами збереження* рівняння $\mathcal{L}$.

Означення *характеристики* (генеруючої функції) закону збереження наведено, наприклад, у [8, 102, 132]. Будь-яка характеристика закону збереження деякого диференціального рівняння є косиметрією цього рівняння. На цьому факті ґрунтується, мабуть, найефективніший метод побудови законів збереження диференціальних рівнянь.

Детальніше теоретичні відомості щодо потенціальних симетрій, збережних векторів та законів збереження викладено в [102]. Дослідження потенціальних симетрій доцільно розпочинати з потенціальних допустимих перетворень класу диференціальних рівнянь.

2.6. Методи дослідження

Для опису групоїдів еквівалентності розглянутих у дисертації класів узагальнених рівнянь Бюргерса використано поняття нормалізованого класу. А саме, якщо клас є нормалізованим, задача знаходження його групоїда еквівалентності рівносильна задачі побудови його групи еквівалентності. У випадках, коли клас не є нормалізованим, застосовано техніку розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані (у звичайному, узагальненому або узагальненому розширеному сенсі) підкласи [95, 101]. Обчислення групоїдів реалізовано на основі прямого методу. Для їх оптимізації розгляд розпочато з нормалізованого надкласу еволюційних рівнянь другого порядку, лінійних за похідними, який містить всі ці класи. Отримані обмеження на перетворення використано для спрощення знаходження допустимих перетворень у кожному з розглянутих класів.

Симетрійний аналіз класів узагальнених рівнянь Бюргерса ґрунтується на класичному інфінітезимальному методі Лі–Овсяннікова [7, 8]. При розв'язанні задач групової класифікації у цих класах застосовано як метод безпосереднього інтегрування визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів ліївських симетрій [7], так і алгебраїчний метод [27,30,59,101], що використовує техніки класифікації підалгебр в деякій алгебрі Лі. (Такі елементарні техніки представлено в [8, розділ 3.3], [7, розділ 14.7] та у [30, 31]. Див. також більш складні методи в [83].) Раніше алгебраїчний метод групової класифікації безпосередньо чи неявно використовували в основному для нормалізованих класів, алгебри еквівалентності яких нескінченновимірні (див. [27, 30, 101] і посилання в цих джерелах).

Для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь використано методи ліївської та некласичної редукції. Ліївські редукції проведено за допомогою методу класифікації редукцій у нормалізованому класі диференціальних рівнянь відносно групи еквівалентності цього класу. Техніка підбору оптимальних анзаців для ліївської редукції дозволила отримати уніфікований вигляд редукованих рівнянь. Для проведення некласичної редукції використано техніку класифікації операторів редукції для диференціальних рівнянь з деякого класу з точністю до відношення еквівалентності на множині операторів редукції, породженого групою еквівалентності цього класу.

Для вивчення локальних законів збереження диференціального рівняння використовується відома техніка, що базується на понятті характеристики [8], розроблена О.М. Виноградовим [132]. Для квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку достатньо розглядати характеристики законів збереження, що залежать тільки від t, x та u: $\lambda = \lambda(t, x, u)$ (див. [103, наслідок 2]).

Розділ 3

Групоїди еквівалентності класів узагальнених рівнянь Бюргерса

У цьому розділі знайдено групоїди еквівалентності низки класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

У підрозділі 3.1 розглянуто нормалізовані надкласи, з яких зручно починати дослідження допустимих перетворень у класах узагальнених рівнянь Бюргерса.

Підрозділ 3.2 присвячено вивченню допустимих перетворень у класі $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса та двох його підкласів з відкаліброваним довільним елементом. Також встановлено відповідність між групоїдами еквівалентності цих класів та відповідних їм класів лінійних рівнянь.

У підрозділі 3.3 показано, як знання допустимих перетворень надкласу узагальнених рівнянь Бюргерса допомагає описати допустимі перетворення у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. Знайдено групоїд еквівалентності та групу еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Класичне рівняння Бюргерса з довільним сталим коефіцієнтом як окремий нормалізований клас розглянуто в підрозділі 3.4.

Підрозділ 3.5 присвячено не менш важливому з точки зору фізичних застосувань класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі. Його групоїд еквівалентності описано через зображення його як об'єднання групоїдів еквівалентності двох його неперетинних нормалізованих підкласів, які не пов'язано точковими перетвореннями.

Аналогічним чином — через розбиття на три нормалізовані у різних сенсах підкласи, які не пов'язано точковими перетвореннями — у підрозділі 3.6 досліджено групоїд еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса.

3.1. Нормалізовані надкласи

Відомо, що t-компонента кожного точкового (і навіть контактного) перетворення між будь-якими двома фіксованими (1+1)-вимірними еволюційними рівняннями залежить тільки від t [5,66]. Більш того, як доведено в [63, лема 2], будь-яке точкове перетворення між двома рівняннями з класу

$$u_t = F(t,x,u)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \tag{3.1}$$

де F і G —довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $F \neq 0$, має вигляд

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t,x), \quad \tilde{u} = U(t,x,u), \quad T_tX_xU_u \neq 0. \tag{3.2}$$

Клас (3.1) є нормалізованим [63] і будь-яке контактне перетворення між рівняннями з нього породжується деяким точковим перетворенням [104], але він занадто широкий для узагальнених рівнянь Бюргерса.

Доцільно розглянути дещо вужчий клас $\mathcal{E}\big|_{\{F\neq 0\}}$ рівнянь

$$\mathcal{E}_{F,H^1,H^0}\colon\ u_t + F(t,x,u)u_{xx} + H^1(t,x,u)u_x + H^0(t,x,u) = 0, \tag{3.3}$$

де коефіцієнти F, H^1 і H^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $F \neq 0$. Клас (3.3) є підкласом класу (3.1) і надкласом для усіх класів узагальнених рівнянь Бюргерса, розглянутих у дисертаційній роботі. Таким чином, будь-яке перетворення між двома фіксованими рівняннями як з класу (3.3), так і з кожного його підкласу задовольняє обмеження (3.2).

Щоб знайти загальний вигляд допустимих перетворень для класу (3.3), запишемо довільне рівняння з цього класу в змінних з хвильками: $\tilde u_{\tilde t}+\tilde F\tilde u_{\tilde x\tilde x}+\tilde H^1\tilde u_{\tilde x}+\tilde H^0=0$. У цьому рівнянні замінимо $\tilde u_{\tilde t}$, $\tilde u_{\tilde x}$ та $\tilde u_{\tilde x\tilde x}$ їхніми виразами в термінах змінних без хвильок:

$$\begin{aligned}&\tilde u_{\tilde t}=\frac{1}{\mathrm{D}_tT}\left(\mathrm{D}_tU-\frac{\mathrm{D}_xU\,\mathrm{D}_tX}{\mathrm{D}_xX}\right),\quad \tilde u_{\tilde x}=\frac{\mathrm{D}_xU}{\mathrm{D}_xX},\\ &\tilde u_{\tilde x\tilde x}=\mathrm{D}_x\left(\frac{\mathrm{D}_xU}{\mathrm{D}_xX}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Використавши підстановку $u_t=-Fu_{xx}-H^1u_x-H^0$, переходимо на многовид, визначений початковим рівнянням. Результат розщеплюємо за u_{xx} та u_x. Тут і далі «розщепленням рівняння» називаємо такий прийом: якщо система функцій від змінних, за якими проводиться розщеплення, включаючи сталу функцію 1, є системою лінійно незалежних функцій, розщеплюване рівняння еквівалентне системі рівнянь, що утворюється шляхом прирівнювання кожного з коефіцієнтів розкладу цього рівняння за вказаною системою функцій до нуля. Розв'язавши визначальні рівняння, виведені таким способом, маємо

$$\begin{aligned}&\tilde t=T(t),\qquad \tilde x=X(t,x),\\ &\tilde u=U(t,x,u)=U^1(t,x)u+U^0(t,x),\\ &\tilde F=\frac{X_x^2}{T_t}F,\qquad \tilde H^1=\frac{1}{T_t}\left(X_xH^1+X_{xx}F-2X_x\frac{U^1_x}{U^1}F+X_t\right),\\ &\tilde H^0=U^1H^0+\frac{2U_xU^1_x}{T_tU^1}F-\frac{1}{T_t}\big(U_t+FU_{xx}+H^1U_x\big),\end{aligned}\tag{3.5}$$

де $T=T(t)$, $X=X(t,x)$, $U^1=U^1(t,x)$ та $U^0=U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_tX_xU^1\neq0$. Ніяких додаткових рівнянь (класифікуючих умов) на довільні елементи при цьому не виникає. Це означає, що всі допустимі перетворення в класі (3.3) породжено перетвореннями з відповідної групи еквівалентності. Таким чином, клас (3.3) нормалізований. Щоб знайти загальний вигляд допустимих перетворень у будь-якому підкласі класу (3.3), достатньо надати відповідних значень довільним елементам F, H^1, H^0 та $\tilde F$, $\tilde H^1$, $\tilde H^0$.

3.2. Лінеаризовні узагальнені рівняння Бюргерса

Розглянемо найширший клас узагальнених рівнянь Бюргерса, які за допомогою перетворення Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$ можна лінеаризувати до лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, що мають вигляд

$$v_t + a(t,x)v_{xx} + b(t,x)v_x + c(t,x)v = 0, \tag{3.6}$$

де коефіцієнти a, b, c пробігають множину гладких функцій від (t,x), причому $a \neq 0$. Позначимо цей клас $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$. Він складається з рівнянь вигляду

$$\mathcal{A}_{a,b,f}\colon \quad u_t + au_{xx} + (au + a_x + b)u_x + \frac{1}{2}a_x u^2 + b_x u + f = 0,$$

де $f = 2c_x$. Вищезгадану лінеаризацію неявно представлено в [50, с. 102, вправа 3]. Клас $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ є підкласом класу (3.3), де довільні елементи визначено як $F = a$, $H^1 = au + a_x + b$ та $H^0 = a_x u^2/2 + b_x u + f$. Підставивши ці та відповідні вирази з хвильками у рівняння (3.5) і розщепивши результат за u, отримаємо загальний вигляд допустимих перетворень між двома рівняннями з класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ та зв'язок між початковим і перетвореним довільними елементами:

$$\begin{aligned}
&\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = X(t,x), \qquad \tilde u = \frac{1}{X_x}u + U^0(t,x),\\
&\tilde a = \frac{X_x^2}{T_t}a, \qquad \tilde b = \frac{1}{T_t}\big(X_x b + X_{xx}a - X_x^2 U^0 a + X_t\big),\\
&\tilde f = \frac{f}{T_t} - \frac{\big(X_x U^0 b\big)_x}{T_t} + \frac{\big(X_x U^0\big)^2 - 2\big(X_x U^0\big)_x}{2T_t}a_x + \\
&\qquad + \frac{X_x U^0\big(X_x U^0\big)_x - \big(X_x U^0\big)_{xx}}{T_t}a - \frac{\big(X_x U^0\big)_t}{T_t},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

де $T = T(t)$, $X = X(t,x)$ та $U^0 = U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів і $T_t X_x \neq 0$. При цьому не виникає ніяких класифікуючих умов, а зв'язок між довільними елементами пов'язаний з точковим перетворенням на всій множині довільних елементів. Отже, перетворення (3.7) утворюють звичайну групу еквівалентності класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ і цей клас нормалізований.

3.2.1. Перший калібрований підклас

Підібравши перетворення вигляду (3.7), довільні елементи класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ можна відкалібрувати до простих фіксованих значень. Спочатку відкалібруємо a до значення $a=1$, виконавши перетворення

$$\tilde t = t\,\mathrm{sign}\,a(t,x), \qquad \tilde x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|a(t,x)|}}, \qquad \tilde u = u.$$

Таким чином, отримаємо клас рівнянь вигляду

$$u_t + u_{xx} + (u+b)u_x + b_x u + f = 0, \tag{3.8}$$

де $b=b(t,x)$ та $f=f(t,x)$ — довільні гладкі функції. Кожне рівняння (3.8) пов'язане перетворенням Коула–Хопфа з лінійним рівнянням

$$v_t + v_{xx} + bv_x + \left(\frac{1}{2}\int f\,\mathrm{d}x\right)v = 0.$$

Групоїд еквівалентності класу (3.8) можна обчислити безпосередньо або за допомогою підстановки $a=\tilde a=1$ у співвідношення (3.7). Він породжується перетвореннями

$$\begin{gathered}\tilde t = T(t), \quad \tilde x = \varepsilon\big(\sqrt{T_t}x + X^0(t)\big), \quad \tilde u = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{T_t}}u + U^0(t,x)\right),\\ \tilde b = \varepsilon\left(\frac{b}{\sqrt{T_t}} + \frac{T_{tt}}{T_t^{3/2}}x + \frac{X^0_t}{\sqrt{T_t}} - U^0\right),\\ \tilde f = \varepsilon\left(\frac{f}{T_t^{3/2}} - \frac{\big(U^0 b\big)_x}{T_t} + \frac{U^0U^0_x}{\sqrt{T_t}} - \frac{U^0_t}{T_t} - \frac{U^0_{xx}}{T_t} - \frac{T_{tt}U^0}{2T_t^2}\right),\end{gathered} \tag{3.9}$$

де $T=T(t)$, $X^0=X^0(t)$ та $U^0=U^0(t,x)$ — довільні гладкі функції, причому $T_t>0$, $\varepsilon=\pm1$. Ці перетворення складають звичайну групу еквівалентності класу (3.8), а тому цей клас нормалізований.

3.2.2. Другий калібрований підклас

Далі відкалібруємо довільний елемент $b=b(t,x)$ до нуля за допомогою перетворення

$$\tilde t = t, \qquad \tilde x = x, \qquad \tilde u = u + b, \qquad \tilde f = f - b_t - bb_x - b_{xx},$$

що призведе до найпростішої форми лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, що містить лише одну довільну гладку функцію $f = f(t,x)$:

$$u_t + u_{xx} + uu_x + f = 0. \tag{3.10}$$

Підставивши $b = \tilde b = 0$ у співвідношення (3.9), знайдемо загальний вигляд допустимих перетворень між рівняннями вигляду (3.10). Всі їх породжують перетворення з звичайної групи еквівалентності класу (3.10):

$$\begin{gathered}
\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = \varepsilon\big(\sqrt{T_t}x + X^0(t)\big),\\
\tilde u = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{T_t}}u + \frac{T_{tt}}{2T_t^{3/2}}x + \frac{X^0_t}{T_t}\right),\\
\tilde f = \varepsilon\left(\frac{1}{T_t^{3/2}}f + \frac{3T_{tt}^2 - 2T_tT_{ttt}}{4T_t^{7/2}}x + \frac{X^0_tT_{tt} - X^0_{tt}T_t}{T_t^3}\right),
\end{gathered} \tag{3.11}$$

де $T(t)$ та $X^0(t)$ — довільні гладкі функції, причому $T_t > 0$, і $\varepsilon = \pm 1$. Тому клас (3.10) нормалізований. Кожне рівняння з цього класу пов'язане перетворенням Коула–Хопфа з лінійним рівнянням

$$v_t + v_{xx} + \left(\frac{1}{2}\int f\,\mathrm{d}x\right)v = 0.$$

3.2.3. Зв'язок між групоїдами еквівалентності класів лінеаризовних та відповідних їм лінійних рівнянь

Покажемо, що цим самим перетворенням Коула–Хопфа пов'язані й елементи групоїдів еквівалентності лінеаризовних та відповідних їм лінійних класів. Групоїд еквівалентності класу лінійних рівнянь (3.6) породжено перетвореннями

$$\begin{gathered}
\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = X(t,x), \qquad \tilde v = V^1(t,x)v + V^0(t,x),\\
\tilde a = \frac{X_x^2}{T_t}a, \qquad \tilde b = \frac{1}{T_t}\left(X_xb + X_{xx}a - \frac{2X_xV^1_x}{V^1}a + X_t\right),\\
\tilde c = \frac{1}{T_t}\left(c - \frac{V^1_x}{V^1}b + \frac{2\big(V^1_x\big)^2 - V^1V^1_{xx}}{\big(V^1\big)^2}a - \frac{V^1_t}{V^1}\right),
\end{gathered} \tag{3.12}$$

де $T=T(t)$, $X=X(t,x)$, $V^1=V^1(t,x)$ та $V^0=V^0(t,x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, що задовольняють умову невиродженості $T_tX_xV^1\neq 0$ і класифікуючу умову

$$\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_t+a\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_{xx}+b\left(\frac{V^0}{V^1}\right)_x+c\frac{V^0}{V^1}=0$$

(див. [102]). Це означає, що $v=V^0/V^1$ є розв'язком початкового рівняння (3.6). Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (3.6) складається з перетворень вигляду (3.12) з $V^0=0$. Клас (3.6) не нормалізований, але він напівнормалізований, тому що кожне перетворення вигляду (3.12) можна інтерпретувати як композицію перетворення ліївської симетрії

$$\bar v=v+\frac{V^0}{V^1}$$

початкового рівняння і деякого елемента з $G^{\sim}$, тобто перетворення вигляду (3.12) з $V^0=0$.

Відповідність між групоїдами (і групами) еквівалентності класів (3.6) і $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ встановлюється таким чином:

$$\tilde t=t,\qquad \tilde x=x,$$

$$\tilde u=2\frac{\tilde v_{\tilde x}}{\tilde v}=\frac{2}{X_x}\frac{V^1v_x+V^1_xv+V^0_x}{V^1v+V^0}=\frac{1}{X_x}\frac{\big(V^1u+2V^1_x\big)v+2V^0_x}{V^1v+V^0}.$$

Перетворення компоненти u записується в термінах (t,x,u) тільки при $V^0=0$. У цьому випадку воно має вигляд

$$\tilde u=\frac{1}{X_x}u+\frac{2V^1_x}{X_xV^1},\qquad \text{тобто}\qquad U^0=\frac{2V^1_x}{X_xV^1}.$$

Обмеження на V^0 пов'язане із загальним виглядом перетворень з групи еквівалентності класу (3.6). Допустимі перетворення з $V^0\neq 0$ у класі (3.6) не мають відповідників у групоїді еквівалентності класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$. Таким чином, напівнормалізованість класу (3.6) лінійних рівнянь індукує нормалізованість класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq 0\}}$ лінеаризовних рівнянь.

3.3. Рівняння Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній

Поклавши в (3.3) $F = f(t,x)$, $H^1 = u$ та $H^0 = 0$, отримаємо клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса $\mathcal{L}_f\colon\ u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$ з довільним ненульовим гладким змінним коефіцієнтом $f = f(t,x)$ при другій похідній u_{xx} Вигляд допустимих перетворень для цього класу можна вивести безпосередньо або за допомогою підстановки $F = f$, $\tilde F = \tilde f$, $H^1 = u$, $\tilde H^1 = \tilde u$ та $H^0 = \tilde H^0 = 0$ у співвідношення (3.5). Оскільки всі точкові перетворення між будь-якими двома фіксованими рівняннями з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ породжено перетвореннями з його звичайної групи еквівалентності, цей клас нормалізований.

Теорема 3.1. *Клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\quad \tilde x = \frac{\kappa x+\mu_1 t+\mu_0}{\gamma t+\delta},\\ &\tilde u = \frac{\kappa(\gamma t+\delta)u-\kappa\gamma x+\mu_1\delta-\mu_0\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma},\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\tilde f = \frac{\kappa^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}f,\tag{3.14}$$

де α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ та $\kappa\neq 0$.

Доведення. Зафіксуємо два довільні рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$:

$$\mathcal{L}_f\colon\ u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0\quad\text{та}\quad \mathcal{L}_{\tilde f}\colon\ \tilde u_{\tilde t} + \tilde u\tilde u_{\tilde x} + \tilde f(\tilde t,\tilde x)\tilde u_{\tilde x\tilde x} = 0$$

і знайдемо всі точкові перетворення між ними, які мають вигляд (2.1). Для цього підставимо в $\mathcal{L}_{\tilde f}$ замість змінних з хвильками та похідних їхні вирази через змінні без хвильок, у тому числі (3.4). Отримана рівність виконується для всіх розв'язків $\mathcal{L}_f$. Тому, замінивши u_t на $-uu_x - fu_{xx}$ (умова $L_f[u] = 0$), отримуємо рівність, яку можна розщепити за u_x та

u_{xx}. Це дає систему визначальних рівнянь для компонент перетворення T, X та U.

Обчислення можна спростити, врахувавши специфічну структуру узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, які є квазілінійними еволюційними рівняннями другого порядку, тобто лінійними за похідною u_{xx}. З огляду на [63, лема 1], кожне точкове перетворення між рівняннями $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde f}$ є проектовним як на простір змінної t, так і на простір змінних (t,x), тобто для його компонент виконуються умови (3.2). Вигляд шуканих перетворень можна обмежити ще сильніше — до (3.5), якщо розглянути вужчий надклас $\mathcal{E}\big|_{\{F\neq 0\}}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$; проте саме завдяки умовам (3.2) досягається помітне спрощення обчислень.

Визначальні рівняння після спрощення мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&U_{uu}=0, \qquad \text{звідки} \qquad U=U^1(t,x)u+U^0(t,x),\\
&\tilde f=\frac{X_x^2}{T_t}f, \quad U^1=\frac{X_x}{T_t}, \quad U^0=\frac{X_t}{T_t},\\
&X_{xx}=0, \quad U^1_t+U^0_x=0, \quad U^0_t+fU^0_{xx}=0.
\end{aligned}
$$

Розв'язавши їх, знайдемо групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Елементи $\mathcal{G}^{\sim}$ визначаються рівностями (3.13), де значення довільного елемента початкового та кінцевого рівняння пов'язані співвідношенням (3.14) для $\tilde f$ і f. Кожне перетворення змінних (t,x,u) вигляду (3.13) відображає будь-яке рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ у рівняння з цього ж класу, а його продовження на простір (t,x,u,f), задане співвідношенням для $\tilde f$ і f, є точковим перетворенням у просторі (t,x,u,f). Отже, такі продовження перетворень з групоїда еквівалентності, утворені за допомогою співвідношення (3.14), складають групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Оскільки будь-який елемент групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ породжується перетворенням з групи еквівалентності, цей клас нормалізований. $\square$

Зв'язна компонента тотожного перетворення у групі $G^{\sim}$ визначається системою нерівностей $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ та $\kappa>0$. З точністю до композицій з неперервними перетвореннями еквівалентності та між собою, ця група містить два незалежних дискретних перетворення еквівалентності:

$$(t,x,u,f)\to(t,-x,-u,f)\quad\text{та}\quad(t,x,u,f)\to(-t,x,-u,-f).$$

3.4. Класичні рівняння Бюргерса

Як закономірну останню ланку в ієрархії класів узагальнених рівнянь Бюргерсарозглянемо клас $\{\mathcal{L}_f\mid f_x=f_t=0,\ f\neq0\}$, що складається з класичних рівнянь Бюргерса $\mathcal{L}_c$: $u_t+uu_x+cu_{xx}=0$, параметризованих ненульовою сталою c. Для будь-якого значення c максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_c$ є лінійною оболонкою векторних полів (1.1) [3], а його повну групу точкових симетрій складають перетворення (1.2). Добре відомо [45,62], що перетворення Коула–Хопфа $u=2v_x/v$ лінеаризує рівняння $\mathcal{L}_c$ до рівняння теплопровідності $v_t+cv_{xx}=0$.

Цей клас є нормалізованим у звичайному сенсі відносно групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ і є орбітою будь-якого свого елемента (наприклад, $\mathcal{L}_{-1}$) під дією підгрупи масштабних перетворень еквівалентності

$$\{\tilde t=\alpha t,\ \tilde x=x,\ \tilde u=\alpha^{-1}u,\ \tilde f=\alpha^{-1}f\mid\alpha\neq0\}.$$

3.5. Узагальнені рівняння Бюргерса у збережній формі

Клас $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі вигляду

$$\mathcal{C}_f\colon\quad u_t+uu_x+\big(f(t,x)u_x\big)_x=0,$$

де f пробігає множину ненульових гладких функцій від (t,x), допускає перетворення

$$\begin{aligned}&\tilde t=T(t),\qquad \tilde x=\varkappa\left(\sqrt{|T_t|}x+X^0(t)\right),\\&\tilde u=\varkappa\left(\frac{\sqrt{|T_t|}}{T_t}u+\frac{T_{tt}\sqrt{|T_t|}}{2T_t^2}x+\frac{X^0}{T_t}\right),\qquad\tilde f=\varkappa^2 f,\end{aligned}\tag{3.15}$$

де $\varkappa$ — довільна ненульова стала, а гладкі функції T та X^0 від t з $T_t \neq 0$ задовольняють рівняння

$$\sqrt{|T_t|}\,T_{tt}f_x + 2T_t(\sqrt{|T_t|}x + X^0)_{tt} - 2T_{tt}(\sqrt{|T_t|}x + X^0)_t = 0. \qquad (3.16)$$

(Для допустимих перетворень остання рівність у (3.15) дає зв'язок між вихідним і перетвореним довільними елементами.) Рівняння (3.16), розщеплене за f_x, призводить до обмежень $T_{tt} = 0$ і $X^0_{tt} = 0$, які разом з (3.15) дають звичайні точкові перетворення у просторі (t, x, u, f). Отже, ці перетворення утворюють звичайну групу еквівалентності класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, але вони не породжують усі допустимі перетворення класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$. Тому на відміну від попередніх класів, клас $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим. Для опису його групоїда еквівалентності використаємо техніку знаходження усіх максимальних умовних груп еквівалентності через розбиття класу на максимальні нормалізовані підкласи, причому рівняння з різних підкласів не пов'язані точковими перетвореннями [95, 101].

Твердження 3.2. *Звичайна група еквівалентності класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень*

$$\tilde t = \alpha t + \beta, \qquad \tilde x = \kappa(x + \mu_1 t + \mu_0), \qquad \tilde u = \frac{\kappa}{\alpha}(u + \mu_1),$$
$$\tilde f = \frac{\kappa^2}{\alpha} f, \qquad (3.17)$$

де α, β, κ, μ_1, μ_0 — довільні сталі, причому $\alpha \neq 0$ та $\kappa \neq 0$.

Це ж розщеплення за f_x у рівнянні (3.16) можна виконати для будь-якого допустимого перетворення з $f_{xxx} \neq 0$, що дозволяє стверджувати нормалізованість підкласу $\mathcal{C}^1$, виокремленого з класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ нерівністю $f_{xxx} \neq 0$.

Твердження 3.3. *Підклас $\mathcal{C}^1 = \{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx} \neq 0\}$ класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^1$ співпадає зі звичайною групою еквівалентності всього класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$.*

Розглянемо підклас $\mathcal{C}^2$ класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, визначений умовою квадратичності довільного елемента f за змінною x, тобто

$$\mathcal{C}^2 = \{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx} = 0,\ f \neq 0\}.$$

Його можна репараметризувати через зображення довільного елемента f у вигляді $f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)$, де f^0, f^1 та f^2 — довільні гладкі функції змінної t, не рівні одночасно нулю. Групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^2$ ширший за обмеження групоїда еквівалентності класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ на цей підклас (що і призводить до ненормалізованості класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$): всі допустимі перетворення в цьому підкласі мають вигляд (3.15), де функції $T = T(t)$ та $X^0 = X^0(t)$ задовольняють систему

$$4T_tT_{tt}f^2 + 2T_tT_{ttt} - 3T_{tt}^2 = 0,$$
$$\sqrt{|T_t|}\,T_{tt}f^1 + 2T_tX^0_{tt} - 2T_{tt}X^0_t = 0,$$

де $\varkappa$ — довільна ненульова стала. Хоча загальний розв'язок цієї системи параметризований довільними елементами f^1 і f^2 нелокально, його структура однакова для всіх значень параметрів. Іншими словами, підклас $\mathcal{C}^2$ допускає нетривіальну узагальнену розширену групу еквівалентності і нормалізований відносно цієї групи. Означення та приклади узагальнених розширених груп еквівалентності див., наприклад, у [48, 63, 101, 128, 129].

Твердження 3.4. *Підклас $\mathcal{C}^2 = \{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx} = 0,\ f \neq 0\}$ класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований в узагальненому розширеному сенсі. Узагальнена розширена група еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^2$ складається з перетворень*

$$\tilde t = \frac{1}{c_0}\int \left(X^1\right)^2 \mathrm{d}t + c_3, \quad \tilde x = X^1x + \int \left(X^1\right)^2 X^2\,\mathrm{d}t + c_5,$$
$$\tilde u = c_0\left(\frac{1}{X^1}u - \frac{c_1}{\lambda}x + X^2\right), \quad \tilde f = c_0 f,$$

де $\lambda(t) = e^{2\int f^2\,\mathrm{d}t}$, $\quad X^1(t) = \left(c_1\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\lambda} + c_2\right)^{-1}$, $\quad X^2(t) = c_1\displaystyle\int \frac{f^1}{\lambda}\,\mathrm{d}t + c_4$,

$c_0, \dots, c_5$ — довільні сталі, причому $c_0 \neq 0$ та $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, а довільний елемент f має вигляд $f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)$.

Твердження 3.5. *Між рівняннями з підкласів $\mathcal{C}^1$ та $\mathcal{C}^2$ не існує точкових перетворень.*

Таким чином, твердження 3.2–3.5 вичерпно описують групоїд еквівалентності класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ через його розбиття на нормалізовані підкласи $\mathcal{C}^1$ та $\mathcal{C}^2$. З огляду на [101, розділ 3.4] з цих тверджень також випливає, що клас $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ має в точності дві максимальні умовні групи еквівалентності: це група еквівалентності всього класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ і узагальнена розширена група еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^2$.

Зауважимо, що перетин класів $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ — це їхній підклас, що складається з рівнянь з $f = f(t)$. Як правило, таким рівнянням приділяють більше уваги завдяки їх виникненню у низці фізичних моделей (див. [46,60,61,117,120,121], а також [4, розділ 4]). Клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований відносно групи еквівалентності (3.13) усього класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Спробу виконати груповий аналіз класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ зроблено в [47,133].

3.6. Узагальнені потенціальні рівняння Бюргерса

Знайдемо групоїд еквівалентності та групу еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку

$$\mathcal{P}_f\colon\quad v_t + v_x^2 + f(t,x)v_{xx} = 0, \qquad f \neq 0,$$

які назвемо узагальненими потенціальними рівняннями Бюргерса. Використання цієї назви обумовлено тим, що цей клас пов'язаний через потенціювання з двома класами узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. По-перше, $\mathcal{P}_f$ є рівнянням для потенціалів рівняння

$$u_t + 2uu_x + \big(f(t,x)u_x\big)_x = 0$$

з тією ж функцією $f \neq 0$. Фактично, це рівняння $\mathcal{C}_f$, перемасштабоване перетворенням $\tilde u = 2u$.

Для будь-якого значення довільного елемента f простір законів збереження відповідного рівняння $\mathcal{C}_f$ вигляду $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ є одновимірним і породжується очевидним законом збереження з характеристикою 1. Отже, відповідна система для потенціалів має вигляд $v_x = u$, $v_t = -u^2 - fu_x$, що дає рівняння $\mathcal{P}_f$ для потенціалу v.

Друга причина полягає в тому, що рівняння $\mathcal{P}_{\hat f}$ (перепишемо його у змінних з дашком: $\hat v_{\hat t} + \hat v_{\hat x}^2 + \hat f(\hat t, \hat x)\hat v_{\hat x\hat x} = 0$, де $\hat f_{\hat x\hat x\hat x} = 0$) пов'язане з рівнянням для потенціалів рівняння $\mathcal{L}_f$, $f_{xxx} = 0$, з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ точковим перетворенням, оберненим до перетворення $\hat t = \frac{1}{2}\int \lambda\,\mathrm{d}t$, $\hat x = \lambda x + \int f^1\lambda\,\mathrm{d}t$, $\hat v = v$, де $\hat f(\hat t, \hat x) = 2\lambda f(t,x)$ та $f^1 = f_x - xf_{xx}$ є функцією лише від t; див. рівняння (4.51).

Взагалі кажучи, подальша потенціалізація рівнянь з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ неможлива, оскільки будь-яке рівняння $\mathcal{P}_f$ з $f \neq \mathrm{const}$ не має жодних ненульових законів збереження. Водночас рівняння зі сталими значеннями довільного елемента f є сингулярними в класі $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ з точки зору законів збереження і симетрійних (трансформаційних) властивостей, і вони утворюють орбіту потенціального рівняння Бюргерса $\mathcal{P}_{-1}$.

Добре відомо, що для кожного рівняння $\mathcal{P}_f$ з $f = \mathrm{const}$ його максимальна алгебра ліївської інваріантності нескінченновимірна [8, приклад 2.42]. Його простір законів збереження також нескінченновимірний і породжується законами збереження з характеристиками $\mu = \psi\exp(\frac{v}{2f})$, де параметр-функція $\psi = \psi(t,x)$ пробігає множину розв'язків лінійного рівняння теплопровідності $\psi_t = f\psi_{xx}$ [99]. Це пояснюється тим, що рівняння $\mathcal{P}_f$ з $f = \mathrm{const}$ можна лінеаризувати заміною $\tilde v = e^{v/f}$ до оберненого рівняння теплопровідності $\tilde v_t + f\tilde v_{xx} = 0$. Більш того, це суттєво ускладнює структуру групоїда еквівалентності цілого класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, див. твердження 3.7 нижче, та робить розгляд цікавим.

Групоїд еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ має досить складну структуру. Опишемо його шляхом розбиття всього класу на три такі неперетинні нормалізовані підкласи, для яких не існує точкових перетворень, що пов'язували б рівняння з різних підкласів. Відповідні результати вичерпно описано наступною низкою тверджень, які зручно спочатку сформулювати, а потім довести, оскільки значна частина громіздких обчислень, необхідних для цих доведень, є спільною для них. Порівняння групоїдів еквівалентності класів $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ та $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, що пов'язані між собою, проведено у висновках до розділу.

Твердження 3.6. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}_{\rm pot}$ *класу* $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ *складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t=\alpha t+\beta, \qquad \tilde x=\kappa(x+\mu_1 t+\mu_0),\\ &\tilde v=\frac{\kappa^2}{\alpha}\left(v+\frac{\mu_1}{2}x+\frac{\mu_1^2}{4}t+\nu\right), \qquad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\alpha}f,\end{aligned}\tag{3.18}$$

де α, β, κ, μ_1, μ_0, ν *— довільні сталі, причому* $\alpha\neq 0$ *та* $\kappa\neq 0$.

Узагальнена розширена група еквівалентності цього класу співпадає з його звичайною групою еквівалентності.

Твердження 3.7. *Підклас* $\mathcal{P}^3=\{\mathcal{P}_f\mid f=\mathrm{const}\}$ *класу* $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ *нормалізований в узагальненому сенсі. Узагальнена група еквівалентності підкласу* $\mathcal{P}^3$ *складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \qquad \tilde x=\kappa\frac{x+\mu_1 t+\mu_0}{\gamma t+\delta},\\ &\tilde v=\frac{\kappa^2 f}{\alpha\delta-\beta\gamma}\ln\left|F^1\big(e^{v/f}+F^0\big)\right|, \qquad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}f,\end{aligned}\tag{3.19}$$

де α, β, γ, δ, κ, μ_1, μ_0 *— довільні сталі, причому* $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ *та* $\kappa\neq 0$, *набір* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa)$ *визначений з точністю до ненульового множника,*

$$F^1=\begin{cases}k\sqrt{|\gamma t+\delta|}\exp\left(-\dfrac{(\gamma x-\mu_1\delta+\mu_0\gamma)^2}{4f\gamma(\gamma t+\delta)}\right), & \gamma\neq 0,\\ k\exp\dfrac{2\mu_1 x+\mu_1^2 t}{4f}, & \gamma=0,\end{cases}\tag{3.20}$$

k *— ненульова стала,* F^0 *є розв'язком лінійного рівняння* $F^0_t+fF^0_{xx}=0$.

Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^3$ співпадає з $G^{\sim}_{\rm pot}$, але його узагальнена група еквівалентності є дещо ширшою. Таким чином, підклас $\mathcal{P}^3$ не є нормалізованим у звичайному сенсі. Більш того, з цього також випливає, що в підкласі $\mathcal{P}^3$ існують допустимі перетворення, які не породжуються групою $G^{\sim}_{\rm pot}$, що є узагальненою розширеною групою еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$. Це означає, що клас $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим в жодному сенсі.

Твердження 3.7 показує, що для будь-якої сталої $f\neq 0$ у рівняння $\mathcal{P}_f$ існують досить складні точкові перетворення симетрії, що не пов'язані з перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$; підставивши $\kappa^2=\alpha\delta-\beta\gamma$ у (3.19), можна вивести вигляд перетворень симетрії $\mathcal{P}_f$ і перевірити цей факт. Також неважко перевірити, що будь-яке допустиме перетворення в підкласі $\mathcal{P}^3$ породжується композицією перетворення симетрії відповідного початкового рівняння і перетворення з групи $G^{\sim}_{\rm pot}$. Інакше кажучи, підклас $\mathcal{P}^3$ є напівнормалізованим у звичайному сенсі. Це наслідок того факту, що підклас $\mathcal{P}^3$ складається з єдиної орбіти будь-якого рівняння з $\mathcal{P}^3$ за його звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{\rm pot}$, див. доведення [37, твердження 2].

Твердження 3.8. *Підклас $\mathcal{P}^1=\{\mathcal{P}_f\mid f_{xxx}\neq 0\}$ класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^1$ співпадає зі звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{\rm pot}$ всього класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ і, таким чином, визначається рівностями* (3.18).

Хоча клас $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим, його можна розбити на три підкласи, що є нормалізованими (у певному сенсі), а саме — $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^3$ та доповнення їхнього об'єднання $\mathcal{P}^2=\overline{\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^3}$. Підклас $\overline{\mathcal{P}^1}$, виокремлений з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ обмеженням $f_{xxx}=0$, має складні трансформаційні властивості і не є нормалізованим. Однак, виключивши з $\overline{\mathcal{P}^1}$ невеликий підклас $\mathcal{P}^3$, отримаємо нормалізований підклас $\mathcal{P}^2$.

Твердження 3.9. *Підклас $\mathcal{P}^2=\{\mathcal{P}_f\mid f_{xxx}=0,\ f\neq \mathrm{const}\}$ класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований в узагальненому розширеному сенсі. Його узагальнена розширена група еквівалентності складається з перетворень вигляду*

$$\begin{aligned}
&\tilde t=\frac{1}{c_0}\int\left(X^1\right)^2{\rm d}t+c_3,\\
&\tilde x=X^1x+\int\left(X^1\right)^2X^2\,{\rm d}t+c_5,\\
&\tilde v=c_0\left(v-\frac{c_1}{4}\frac{X^1}{\lambda}x^2+\frac{X^1X^2}{2}x+\int\left(\frac{(X^1X^2)^2}{4}+\frac{c_1}{2}\frac{f^0}{\lambda}X^1\right){\rm d}t\right)+c_6,\\
&\tilde f=c_0f,
\end{aligned}\tag{3.21}$$

де $\lambda(t) = e^{2\int f^2\,\mathrm{d}t}$, $X^1(t) = \left(c_1\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\lambda} + c_2\right)^{-1}$, $X^2(t) = c_1\displaystyle\int \frac{f^1}{\lambda}\,\mathrm{d}t + c_4$, $c_0, \dots, c_6$ *— довільні сталі, причому* $c_0 \neq 0$ *та* $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, *а довільний елемент* f *має вигляд* $f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)$.

Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^2$ також співпадає з $G^{\sim}_{\rm pot}$, але вона не породжує всіх допустимих перетворень в цьому підкласі.

Зауваження 3.10. Щоб представити узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^2$, можна використати два підходи. З одного боку, якщо розглядати функцію f як єдиний довільний елемент підкласу $\mathcal{P}^1$, потрібно в явному вигляді виразити коефіцієнти f^2, f^1 та f^0 многочлена $f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)$ у термінах функції f та її похідних, тобто

$$f^2 = \frac{1}{2}f_{xx}, \qquad f^1 = f_x - xf_{xx}, \qquad f^0 = f + \frac{x^2}{2}f_{xx} - xf_x,$$

і підставити ці вирази у (3.21). З іншого боку, можна припустити, що три функції f^2, f^1 і f^0 (або, наприклад, λ, f^1 та f^0) є довільними елементами класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ і виконати репараметризацію цього класу. Зокрема, рівняння $\tilde f = c_0 f$ потрібно було б переписати у вигляді $\tilde f^2(\tilde t)\tilde x^2 + \tilde f^1(\tilde t)\tilde x + \tilde f^0(\tilde t) = c_0\big(f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t)\big)$, і тоді його можна було б розщепити за x, щоб вивести явні вирази для $\tilde f^2$, $\tilde f^1$ і $\tilde f^0$ в термінах f^2, f^1 і f^0. Але тут репараметризацію не використано, а λ слугує тільки позначенням.

Зауваження 3.11. Зауважимо, що в випадку, коли $f^2 = 0$ (тобто $f = f^1(t)x + f^0(t)$), маємо $\lambda = 1$. Отже, вирази (3.21) після перепозначення сталих набувають вигляду

$$\tilde t = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \tilde x = \frac{\kappa(x + \nu\Delta^{-1}(\alpha t + \beta))}{\gamma t + \delta} + \gamma\kappa\int \frac{I\,\mathrm{d}t}{(\gamma t + \delta)^2} + c_4,$$

$$\tilde v = \frac{\kappa^2}{\Delta}\left(v - \frac{\gamma x^2 + 2(\gamma I + \nu)x}{4(\gamma t + \delta)} + \frac{1}{4}\int\left(\frac{\gamma I + \nu}{\gamma t + \delta}\right)^2\mathrm{d}t + \frac{\gamma}{2}\int\frac{f^0\,\mathrm{d}t}{\gamma t + \delta}\right) + c_5,$$

$$\tilde f = \frac{\kappa^2}{\Delta}f,$$

де $I := \int f^1\,\mathrm{d}t$, $\Delta := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ і набір $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa)$ визначений з точністю до ненульового множника. Подальші спрощення можливі, якщо $f^1 = 0$.

Твердження 3.12. *Між будь-якими двома рівняннями з різних підкласів $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ або $\mathcal{P}^3$ класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ не існує точкових перетворень.*

Твердження 3.12 завершує опис групоїда еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, див. [101, розділ 3.4].

Доведемо сформульовані твердження. Розглянемо два довільних рівняння з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$:

$$\mathcal{P}_f\colon \quad v_t + v_x^2 + f v_{xx} = 0,$$
$$\mathcal{P}_{\tilde f}\colon \quad \tilde v_{\tilde t} + \tilde v_{\tilde x}^2 + \tilde f \tilde v_{\tilde x\tilde x} = 0$$

і запишемо точкове перетворення між цими рівняннями. З огляду на [63, лема 1] ці перетворення мають вигляд

$$\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = X(t,x), \qquad \tilde v = V(t,x,v),$$

де $T_t X_x V_v \neq 0$. Виразивши в рівнянні з хвильками всі змінні та їхні похідні, тобто

$$\tilde v_{\tilde t} = \frac{1}{T_t}\left(V_t + V_v v_t - \frac{V_x + V_v v_x X_t}{X_x}\right),$$
$$\tilde v_{\tilde x} = \frac{V_x + V_v v_x}{X_x},$$
$$\tilde v_{\tilde x\tilde x} = \frac{V_{xx} + 2V_{vx} v_x + V_{vv} v_x^2 + V_v v_{xx}}{(X_x)^2} - \frac{X_{xx} V_x + X_{xx} V_v v_x}{(X_x)^3},$$

в термінах змінних без хвильок і перейшовши на многовид, визначений рівнянням $\mathcal{P}_f$ шляхом підстановки $v_t = -v_x^2 - f v_{xx}$, розщепимо результат за похідними функції v. Це дасть вираз для перетворення довільного елемента

$$\tilde f = \frac{(X_x)^2}{T_t} f \tag{3.22}$$

і класифікуючі умови

$$(V_v)^2 - \frac{(X_x)^2}{T_t}V_v + f\frac{(X_x)^2}{T_t}V_{vv} = 0, \tag{3.23}$$

$$2V_xV_v - \frac{X_tX_x}{T_t}V_v + 2f\frac{(X_x)^2}{T_t}V_{xv} - f\frac{X_xX_{xx}}{T_t}V_v = 0, \tag{3.24}$$

$$V_t\frac{(X_x)^2}{T_t} - \frac{X_tX_x}{T_t}V_x + (V_x)^2 + f\frac{(X_x)^2}{T_t}V_{xx} - f\frac{X_xX_{xx}}{T_t}V_x = 0. \tag{3.25}$$

Щоб знайти звичайну групу еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, потрібно варіювати f і розщепити рівняння (3.23)–(3.25) відносно цієї функції. Розв'язання отриманої системи визначальних рівнянь доводить твердження 3.6.

Продовжимо аналізувати рівняння (3.23)–(3.25) з метою подальшого дослідження трансформаційних властивостей класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$. Інтегруючи (3.23) отримаємо, $V = \tilde{f}\ln\big|F^1(t,x)(e^{v/f} + F^0(t,x))\big|$, де F^1 та F^0 — гладкі функції своїх аргументів та $F^1(t,x) \neq 0$, оскільки $V_v \neq 0$. Існує два суттєво різні випадки для допустимих перетворень класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ залежно від того, чи $F^0(t,x) = 0$.

В припущенні $F^0 \neq 0$ функції 1, $e^{v/f}$, $ve^{v/f}$, $\ln|F^1(e^{v/f} + F^0)|$ та $\ln|F^1(e^{v/f} + F^0)|e^{v/f}$ є лінійно незалежними як функції від v над кільцем гладких функцій від (t,x). Підставивши отримані вирази для V у рівняння (3.24) і розщепивши його за згаданими вище функціями, отримаємо $f_x = 0$ та $X_{xx} = 0$, таким чином можна виразити x у вигляді $X = X^1(t)x + X^0(t)$, $X^1 \neq 0$. В цей самий спосіб з визначальних рівнянь (3.25) маємо

$$f_t = 0, \qquad 2X^1_t = \frac{T_{tt}}{T_t}X^1, \qquad 2fX^1F^1_x = (X^1_tx + X^0_t)F^1,$$
$$X^1(F^1_t + fF^1_{xx}) = (X^1_tx + X^0_t)F^1_x,$$
$$X^1\big((F^1F^0)_t + f(F^1F^0)_{xx}\big) = (X^1_tx + X^0_t)(F^1F^0)_x,$$

де останні три рівняння вже спрощено з огляду на умову $f = \mathrm{const}$.

Інтегруючи друге і третє рівняння, отримаємо

$$T_t = c_0\big(X^1\big)^2, \qquad F^1 = K(t)\exp\left(\frac{X_t^1 x^2 + 2X_t^0 x}{4fX^1}\right),$$

де c_0 — ненульова стала, K — ненульова гладка функція від t, яку потрібно визначити. Таким чином, четверте рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{K_t}{K} = &-\frac{X^1}{4f}\left(\frac{X_t^1}{(X^1)^2}\right)_t x^2 - \frac{X^1}{2f}\left(\frac{X_t^0}{(X^1)^2}\right)_t x + \\ &+\frac{1}{4f}\left(\frac{X_t^0}{X^1}\right)^2 - \frac{X_t^1}{2X^1}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Оскільки відношення K_t/K в лівій частині є функцією від t, можна зробити висновок, що коефіцієнти перед x та x^2 в правій частині цього рівняння дорівнюють нулю. В результаті X^1, X^0 та T мають вигляд

$$X^1(t) = \frac{\kappa}{\gamma t + \delta}, \qquad X^0(t) = \kappa\frac{\mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \qquad T(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

де α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — довільні сталі, що задовольняють умови твердження 3.7. Тоді рівняння (3.26) можна переписати у вигляді

$$\frac{K_t}{K} = \frac{(\mu_1\delta - \mu_0\gamma)^2}{4f(\gamma t + \delta)^2} + \frac{\gamma}{2(\gamma t + \delta)}$$

і проінтегрувати. Його загальний розв'язок

$$K = \begin{cases} k\sqrt{|\gamma t + \delta|}\exp\left(-\dfrac{(\mu_1\delta - \mu_0\gamma)^2}{4f\gamma(\gamma t + \delta)}\right), & \gamma \neq 0, \\ k\exp\left(\dfrac{\mu_1^2}{4f}t\right), & \gamma = 0, \end{cases}$$

де стала $k \neq 0$. Таким чином, F^1 має вигляд (3.20), F^0 є розв'язком рівняння $F_t^0 + fF_{xx}^0 = 0$, а тому твердження 3.7 доведено.

Якщо $F^0 = 0$, функцію V можна записати у вигляді

$$V = \frac{(X_x)^2}{T_t}v + V^0,$$

де V^0 є гладкою функцією від (t,x), яку можна виразити в термінах F^1 (точний вираз тут не суттєвий). Рівняння (3.23) стає тотожністю. Розщепивши рівняння (3.24)–(3.25) за v, отримаємо рівняння, які послідовно інтегруємо і відразу враховуємо в наступних рівняннях:

$$
\begin{aligned}
&X_{xx}=0, \qquad \text{а тому} \qquad X=X^1(t)x+X^0(t),\\
&2X^1_tT_t-X^1T_{tt}=0, \qquad \text{звідки} \qquad \left(X^1\right)^2=c_0T_t, \qquad (3.27)\\
&V^0_x=\frac{X^1}{2T_t}(X^1_tx+X^0_t), \quad \text{тобто} \quad V^0=c_0\left(\frac{X^1_t}{4X^1}x^2+\frac{X^0_t}{2X^1}x+V^{00}(t)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\big(X^1X^1_{tt}-2(X^1_t)^2\big)x^2+2\big(X^1X^0_{tt}-2X^1_tX^0_t\big)x+\\
&\qquad+2X^1X^1_tf+4c_0T_tV^{00}_t-(X^0_t)^2=0.
\end{aligned}
\qquad (3.28)
$$

Тут X^0, X^1 і V^{00} — гладкі функції змінної t, а c_0 — ненульова стала.

Якщо $f_{xxx}\neq 0$, то функції 1, x, x^2 та f є лінійно незалежними як функції від x над кільцем гладких функцій від t. Отже, останнє рівняння системи (3.28) можна розщепити за цими функціями. Інтегруючи повну систему його наслідків, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&X^1=\kappa, \quad X^0=\kappa(\mu_1t+\mu_0), \quad T(t)=\alpha t+\beta,\\
&V=\frac{\kappa^2}{\alpha}\left(v+\frac{\mu_1}{2}x+\frac{\mu_1^2}{4}t+\nu\right), \quad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\alpha}f,
\end{aligned}
$$

де $\alpha:=\kappa^2/c_0$, β, μ_1, μ_0, ν та κ — довільні сталі, причому $\alpha\kappa\neq 0$. Таким чином, твердження 3.8 доведено.

У випадку $f_{xxx}=0$ подамо f у вигляді $f=f^2(t)x^2+f^1(t)x+f^0(t)$, де f^2, f^1 та f^0 — гладкі функції від t, а останнє рівняння (3.28) після розщеплення за x дасть

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{X^1_t}{X^1}\right)_t=\left(\frac{X^1_t}{X^1}\right)^2-2f^2\frac{X^1_t}{X^1}, \qquad \left(\frac{X^0_t}{(X^1)^2}\right)_t=-f^1\frac{X^1_t}{(X^1)^2},\\
&V^{00}_t=\frac14\left(\left(\frac{X^1_t}{X^1}\right)^2-2f^0\frac{X^1_t}{X^1}\right).
\end{aligned}
$$

Ці рівняння можна проінтегрувати в квадратурах, а вигляд функції T знаходиться з другого рядка (3.28), що доводить твердження 3.9.

Як випливає з (3.22) і другого рядка (3.28), при кожному перетворенні з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ довільний елемент f перетворюється за законом $\tilde f = c_0 f$, де c_0 — ненульова стала. Результат перетворення змінної t залежить тільки від t, а результат перетворення x є лінійним за x. Отже, ті обмеження, які виокремлюють підкласи $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ та $\mathcal{P}^3$ (тобто $f_{xxx} \neq 0$; $f_{xxx} = 0$ та $f \neq \mathrm{const}$; $f = \mathrm{const}$ відповідно), не порушуються при виконанні будь-якого допустимого перетворення у класі $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$. Цим самим доведено твердження 3.12.

Зауваження 3.13. Групу еквівалентності підкласу деякого класу диференціальних рівнянь називають *умовною групою еквівалентності* всього класу [95, 101]. Тільки максимальні умовні групи еквівалентності є суттєвими [101, означення 7]. Таким чином, твердження 3.7 і 3.9 означають, що клас $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ допускає нетривіальні умовні групи еквівалентності (в узагальненому або узагальненому розширеному сенсі), пов'язані з підкласами $\mathcal{P}^2$ та $\mathcal{P}^3$. Додатково беручи до уваги результати [101, розділ 3.4] і твердження 3.12, можна також стверджувати, що максимальні умовні групи еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ вичерпуються згаданими вище умовними групами еквівалентності і групою еквівалентності всього класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$.

Зауваження 3.14. Будь-яке контактне допустиме перетворення між двома рівняннями з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ є першим продовженням певного точкового перетворення між цими рівняннями [103, твердження 2], [131, розділ 2]. Це і є причиною того, що задача опису контактних перетворень у класі $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ зводиться до задачі опису його точкових перетворень. Таким чином, знання (точкового) групоїда еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ дає вичерпний опис його контактного групоїда еквівалентності.

Зауваження 3.15. Підклас $\mathcal{P}^3$ є насправді орбітою рівняння $\mathcal{P}_{-1}$ з цього підкласу, яке є рівнянням для потенціалів рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_{-1}$. Нетривіальність групи еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^3$ є відображенням складності групи точкових симетрій потенціального рівняння Бюргерса з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ з довільною сталою f. Разом з тим, група еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, яка співпадає зі звичайною групою еквівалентності підкласу $\mathcal{P}^1$, є досить простою.

3.7. Висновки

У цьому розділі знайдено групоїди еквівалентності низки нормалізованих класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

Разом з найбільш загальним класом $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса, які лінеаризуються перетворенням Коула–Хопфа, розглянуто два його підкласи, отримані шляхом калібрування довільного елемента. При цьому калібрування вибрано таким чином, щоб обидва ці підкласи були нормалізованими. Встановлено зв'язок між групоїдами еквівалентності класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$ лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса і класу лінійних однорідних рівнянь (3.6) через перетворення Коула–Хопфа. З огляду на принцип лінійної суперпозиції, який справедливий для розв'язків лінійних рівнянь, клас (3.6) має ширшу множину допустимих перетворень, ніж клас $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$. Перетворення, пов'язані з лінійною суперпозицією, залежать від довільного елемента відповідного початкового рівняння. Ця обставина порушує нормалізованість класу (3.6), проте цей клас напівнормалізований у звичайному сенсі (див. означення напівнормалізованих класів у [102]). Разом з тим принцип лінійної суперпозиції не має відповідника серед точкових перетворень лінеаризовних рівнянь (для лінеаризовних рівнянь не існує точкових перетворень, пов'язаних з лінійною суперпозицією). Тому нормалізованість класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$ нічим не порушено.

У підрозділі 3.3 показано, як з вигляду допустимих перетворень класу $\mathcal{E}\big|_{\{F\neq0\}}$ можна отримати допустимі перетворення у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній. Знайдені у теоремі 3.1 групоїд еквівалентності та (звичайна) група еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу будуть використані при його розширеному груповому аналізі у розділі 4. Оскільки клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі, він не допускає жодних нетривіальних узагальнень групи еквівалентності і його єдиною максимальною умовною групою еквівалентності є сама група $G^{\sim}$.

Групоїд еквівалентності ненормалізованого класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі описано як об'єднання групоїдів еквівалентності двох його неперетинних нормалізованих підкласів: $\mathcal{C}^1 = \{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx} \neq 0\}$, що нормалізований у звичайному сенсі відносно групи еквівалентності всього класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, та $\mathcal{C}^2 = \{\mathcal{C}_f \mid f_{xxx} = 0\}$, що нормалізований в узагальненому розширеному сенсі; причому рівняння з різних підкласів не пов'язані між собою точковими перетвореннями.

Щоб описати групоїд еквівалентності класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, також застосовано техніку, яка ґрунтується на розбитті класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ на нормалізовані підкласи:

- $\mathcal{P}^1 = \{\mathcal{P}_f \mid f_{xxx} \neq 0\}$, що є нормалізованим у звичайному сенсі відносно групи еквівалентності всього класу;
- $\mathcal{P}^2 = \{\mathcal{P}_f \mid f_{xxx} = 0,\ f \neq \mathrm{const}\}$, що нормалізований в узагальненому розширеному сенсі;
- $\mathcal{P}^3 = \{\mathcal{P}_f \mid f = \mathrm{const}\}$, що нормалізований в узагальненому сенсі.

Рівняння з цих трьох підкласів також не пов'язані між собою точковими перетвореннями.

Групоїди еквівалентності класів $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ та $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ мають подібну структуру. Твердження 3.6, 3.8, 3.9 та 3.12 є аналогами тверджень 3.2, 3.3, 3.4 та 3.5 відповідно. Це частково встановлює відповідність між максимальними умовними групами еквівалентності цих класів, або, що те саме, групами еквівалентності (підходящого типу) їхніх підкласів, за винятком підкласу $\mathcal{P}^3$ класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$, який не має аналога в класі $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$.

Перетин класів $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, який є їхнім підкласом і складається з рівнянь вигляду $u_t+uu_x+f(t)u_{xx}=0$, де $f\neq 0$, успадковує трансформаційні властивості класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, але не класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$. Цей підклас також нормалізований у звичайному сенсі і має ту ж саму групу еквівалентності $G^{\sim}$, що і весь клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Звуження узагальненої розширеної групи еквівалентності підкласу $\mathcal{C}^2$, наведеної в твердженні 3.4, на підмножину значень довільного елемента f, що не залежать від x, також співпадає з $G^{\sim}$.

Звичайна група еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ більш складна, ніж звичайні групи еквівалентності класів $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, оскільки вона додатково містить конформні перетворення. З точки зору допустимих перетворень ситуація зовсім інша. Групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ має найпростішу структуру з усіх можливих, оскільки цей клас є нормалізованим відносно його скінченновимірної звичайної групи еквівалентності, що, очевидно, не так у випадку класів $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$. Підкласи рівнянь з $f_{xxx} = 0$ є спеціальними у цих двох класах, але при цьому аналогічний підклас ніяк не виокремлюються з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ своїми допустимими перетвореннями. Водночас, саме рівняння з $f_{xxx} = 0$ є особливими з точки зору законів збереження у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Результати розділу 3 опубліковано в роботах [12, 87, 91–93].

Розділ 4

Клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній

У цьому розділі проведено розширений симетрійний аналіз класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній

$$\mathcal{L}_f\colon\quad u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0 \tag{4.1}$$

з довільним елементом f, що є ненульовою гладкою функцією від t та x, групоїд еквівалентності якого описано в теоремі 3.1. Цей клас нормалізований, а його група еквівалентності $G^{\sim}$, знайдена в тій же теоремі, є скінченновимірною. Обидва ці факти мають неабияке значення для спрощення всього процесу групової класифікації класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, а також для проведення редукцій рівнянь з цього класу — як ліївських, так і некласичних.

Підрозділ 4.1 цього розділу присвячено опису структури алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ та алгебри $\mathfrak{g}$, що є проекцією алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір змінних (t,x,u). У підрозділі 4.2 алгебраїчним методом розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Процедура класифікації ґрунтується на складенні списку $G^{\sim}$-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, придатних як максимальні алгебри ліївської інваріантності деяких рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Побудові інваріантних розв'язків рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ присвячено підрозділ 4.3, де також прокласифіковано приховані симетрії таких рівнянь, що виникають з ліївських редукцій до звичайних диференціальних рівнянь. У підрозділі 4.4 вичерпно описано оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Нагадаємо, що оскільки ці рівняння є еволюційними, множина їхніх операторів редукції природним чином розбивається на дві підмножини — сингулярних та регулярних операторів редукції — залежно від того, чи дорівнює нулю компонента, що відповідає часовій змінній [67]. Більш цікавими для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ є регулярні оператори редукції, вивченню яких і присвячено основну частину підрозділу 4.4. Предметом дослідження у підрозділі 4.5 є закони збереження, потенціальні допустимі перетворення, потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

4.1. Аналіз структури алгебри еквівалентності

Клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, тобто будь-яке допустиме перетворення цього класу породжується перетворенням з його групи еквівалентності $G^{\sim}$, наведеної у теоремі 3.1.

В якості базисних елементів алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ виберемо векторні поля

$$\begin{gathered}\tilde{P}^t=\partial_t,\quad \tilde{P}^x=\partial_x,\quad \tilde{D}^t=t\partial_t-u\partial_u-f\partial_f,\quad \tilde{D}^x=x\partial_x+u\partial_u+2f\partial_f,\\ \tilde{\Gamma}=t\partial_x+\partial_u,\quad \tilde{\Pi}=t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u.\end{gathered}$$

Їм відповідають наступні однопараметричні перетворення з групи еквівалентності $G^{\sim}$:

$$\begin{array}{lllll}
\hat{P}^t(\beta)\colon & \tilde{t}=t+\beta, & \tilde{x}=x, & \tilde{u}=u, & \tilde{f}=f,\\
\hat{P}^x(\mu_0)\colon & \tilde{t}=t, & \tilde{x}=x+\mu_0, & \tilde{u}=u, & \tilde{f}=f,\\
\hat{D}^t(\alpha)\colon & \tilde{t}=\alpha t, & \tilde{x}=x, & \tilde{u}=\dfrac{1}{\alpha}u, & \tilde{f}=\dfrac{1}{\alpha}f,\\
\hat{D}^x(\kappa)\colon & \tilde{t}=t, & \tilde{x}=\kappa x, & \tilde{u}=\kappa u, & \tilde{f}=\kappa^2 f,\\
\hat{\Gamma}(\mu_1)\colon & \tilde{t}=t, & \tilde{x}=x+\mu_1 t, & \tilde{u}=u+\mu_1, & \tilde{f}=f,\\
\hat{\Pi}(\gamma)\colon & \tilde{t}=\dfrac{t}{1+\gamma t}, & \tilde{x}=\dfrac{x}{1+\gamma t}, & \tilde{u}=(1+\gamma t)u-\gamma x, & \tilde{f}=f.
\end{array}$$

Ці перетворення неважко вивести з теореми 3.1, надаючи усім сталим (крім однієї, яка присутня у перетворенні) значень, що відповідають тотожному перетворенню:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad \kappa = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_0 = 0.$$

Алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ можна знайти безпосередньо інфінітезимальним методом Лі — у такий же спосіб, що й оператори ліївської симетрії окремого диференціального рівняння [1,7]. Але насправді в цьому немає потреби, оскільки, знаючи повну групу еквівалентності $G^\sim$, алгебру $\mathfrak{g}^\sim$ можна побудувати як множину інфінітезимальних генераторів однопараметричних підгруп групи еквівалентності $G^\sim$, див. [70].

Проекція $\mathfrak{g}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір (t, x, u) є лінійною оболонкою базисних елементів

$$\begin{aligned} &P^t = \partial_t, \qquad P^x = \partial_x, \qquad D^t = t\partial_t - u\partial_u, \qquad D^x = x\partial_x + u\partial_u, \\ &\Gamma = t\partial_x + \partial_u, \qquad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u. \end{aligned}$$

Кожна з алгебр $\mathfrak{g}^\sim$ і $\mathfrak{g}$ є реалізацією так званої редукованої повної алгебри Галілея з нульовим центром [17] у просторі розмірності 1, яка ізоморфна афінній алгебрі Лі $\mathrm{aff}(2, \mathbb{R})$ [59], тобто $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^\sim$. Ненульові комутаційні співвідношення в $\mathfrak{g}$ такі:

$$\begin{aligned} &[P^t, D^t] = P^t, \qquad [D^t, \Pi] = \Pi, \qquad [P^t, \Pi] = 2D^t + D^x, \\ &[P^x, D^x] = P^x, \qquad [D^t, \Gamma] = \Gamma, \qquad [\Gamma, D^x] = \Gamma, \\ &[P^t, \Gamma] = P^x, \qquad [P^x, \Pi] = \Gamma. \end{aligned}$$

Розклад Леві алгебри $\mathfrak{g}$ є очевидним:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \Subset \mathfrak{r}, \qquad \text{де} \qquad \mathfrak{f} = \langle P^t, D^t + \tfrac{1}{2}D^x, \Pi \rangle, \qquad \mathfrak{r} = \langle D^x, P^x, \Gamma \rangle.$$

Підалгебра $\mathfrak{f}$ є фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$; з іншого боку, $\mathfrak{f}$ є реалізацією добре відомої алгебри $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$. Радикал $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$ є реалізацією алгебри $A_{3,3}$ за класифікацією Мубаракзянова низьковимірних дійсних алгебр [6] (див. також [113]). Це майже абелева алгебра, пов'язана з одиничною матрицею розмірності 2×2. Більш точно, $\mathfrak{r} = \mathfrak{c} \Subset \mathfrak{n}$, де $\mathfrak{n} = \langle P^x, \Gamma \rangle$, є нільрадикалом (а також максимальним абелевим ідеалом) обох алгебр $\mathfrak{r}$ та $\mathfrak{g}$, а лінійна оболонка $\mathfrak{c} = \langle D^x \rangle$ є підалгеброю Картана алгебри $\mathfrak{r}$. Символами $\mathrm{pr}_\mathfrak{f}$ та $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}$ позначатимемо проектори, визначені розкладом $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \Subset (\mathfrak{c} \Subset \mathfrak{n})$.

Оскільки клас $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$ нормалізований, алгебра $\mathfrak{g}$ містить об'єднання алгебр ліївської інваріантності всіх рівнянь $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$. Більш того, алгебра $\mathfrak{g}$ співпадає з цим об'єднанням, що показано в наступному підрозділі. Це є ознакою сильної нормалізованості класу $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$ в інфінітезимальному сенсі [101].

4.2. Ліївські симетрії

Для знаходження максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$ після розв'язання визначальних рівнянь та отримання класифікуючої умови застосуємо алгебраїчний метод.

4.2.1. Визначальні рівняння для ліївських симетрій

Векторне поле, що породжує (нетривіальну) однопараметричну групу ліївських симетрій рівняння

$$\mathcal{L}_f\colon \quad L_f[u] \equiv u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$$

з класу $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$, має вигляд

$$Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \qquad (\tau,\xi,\eta) \neq (0,0,0),$$

і задовольняє інфінітезимальний критерій інваріантності (2.2):

$$Q_{(2)}L_f\Big|_{\mathcal{L}_{(2)}} \equiv \left(\eta^t + \eta u_x + \eta^x u + \xi f_x u_{xx} + \tau f_t u_{xx} + \eta^{xx} f\right)\Big|_{L_f[u]=0} = 0. \quad (4.2)$$

З рівняння $\mathcal{L}_f$ отримуємо вираз $u_t = -uu_x - fu_{xx}$ для u_t, який підставляємо в (4.2), після чого розщеплюємо результат за u_{tx}, u_{xx}, u_x та u.

Спрощена система визначальних рівнянь на коефіцієнти τ, ξ та η має вигляд

$$\tau_x = 0, \quad \tau_u = 0, \quad \xi_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \eta^1_x = 0, \tag{4.3}$$

$$\eta^0 - \xi_t = 0, \quad \eta^1 + \tau_t - \xi_x = 0, \quad \eta^1_t = -\eta^0_x, \quad \eta^0_t = 0, \tag{4.4}$$

$$\tau f_t + \xi f_x + (\tau_t - 2\xi_x) f = 0. \tag{4.5}$$

З рівнянь (4.3) випливає, що $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t,x)$ та $\eta = \eta^1(t)u + \eta^0(t,x)$. Використовуючи рівняння (4.4), уточнюємо вигляд коефіцієнтів оператора Q:

$$\begin{aligned} &\tau = c_2t^2 + c_1t + c_0, \qquad \xi = (c_2t + c_3)x + c_4t + c_5, \\ &\eta = (-c_2t + c_3 - c_1)u + c_2x + c_4, \end{aligned} \tag{4.6}$$

де $c_0, \dots, c_5$ — довільні сталі.

З огляду на теорему 3.1 можна було стверджувати з самого початку, що коефіцієнти операторів ліївських симетрій рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ мають вигляд (4.6). Справді, з нормалізованості класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, доведеної в теоремі 3.1, випливає, що максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_f$ будь-якого рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ міститься в алгебрі $\mathfrak{g}$, причому коефіцієнти будь-якого векторного поля з алгебри $\mathfrak{g}$ мають вигляд (4.6). Більш того, для будь-якого набору сталих $(c_0, \dots, c_5)$ рівняння (4.5) має ненульовий розв'язок для f. Це означає, що кожний елемент алгебри $\mathfrak{g}$ є оператором ліївської симетрії для деякого рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, тобто $\mathfrak{g} = \bigcup_{f\in\mathcal{S}} \mathfrak{g}_f$.

Рівняння (4.5) є єдиною *класифікуючою умовою* для ліївських симетрій рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. В залежності від значення довільного елемента f класифікуюча умова накладає додаткові обмеження на сталі $c_0, \dots, c_5$.

Варіюючи довільний елемент f, розщепимо рівняння (4.5) за f, f_t та f_x, звідки $c_0 = \dots = c_5 = 0$. Таким чином, *ядро алгебр інваріантності* класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, тобто перетин максимальних алгебр інваріантності всіх рівнянь з цього класу, нульове: $\mathfrak{g}^\cap = \{0\}$.

4.2.2. Придатні підалгебри

Оскільки клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований (див. теорему 3.1) і його алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ є скінченновимірною, групову класифікацію цього класу зручно провести алгебраїчним методом. Нагадаємо, що нормалізованість класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ має два наслідки:

- максимальна алгебра ліївської інваріантності кожного рівняння з цього класу міститься у проекції $\mathfrak{g}$ його алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір (t, x, u);
- рівняння $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ подібні відносно точкових перетворень тоді і тільки тоді, якщо вони $G^{\sim}$-еквівалентні.

Отже, для того щоб виконати вичерпну групову класифікацію класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, достатньо скласти перелік таких нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, кожна з яких є максимальною алгеброю ліївської інваріантності деякого рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, а потім знайти відповідні значення довільного елемента f для кожної підалгебри з цього списку. Такі підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ будемо називати *придатними* (для групової класифікації).

Означення 4.1. Підалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ називається *придатною*, якщо $\mathfrak{s}$ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності для деякого рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Таким чином, підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ увійде до класифікаційного списку лише тоді, якщо існує значення f^0 довільного елемента f, таке що:

1) компоненти кожного $Q \in \mathfrak{s}$ задовольняють класифікуючу умову (4.5) з $f = f^0$, тобто f^0 є інваріантом підалгебри $\tilde{\mathfrak{s}} \subset \mathfrak{g}^{\sim}$, проекція якої на простір змінних (t, x, u) співпадає з $\mathfrak{s}$;
2) алгебра $\mathfrak{s}$ є максимальною серед усіх алгебр ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_{f^0}$.

Придатні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ класифікуємо з точністю до відношення еквівалентності, породженого індукованою приєднаною дією групи еквівалентності $G^{\sim}$ на $\mathfrak{g}$. Результат приєднаної дії елементарних перетворень еквівалентності на базисні векторні поля алгебри $\mathfrak{g}$ наступний:

Ad	P^t	P^x	D^t	D^x	Γ	Π
$\hat{P}^t(\beta)$	P^t	P^x	$D^t-\beta P^t$	D^x	$\Gamma-\beta P^x$	$\Pi-\beta(2D^t+D^x)+\beta^2 P^t$
$\hat{P}^x(\mu_0)$	P^t	P^x	D^t	$D^x-\mu_0 P^x$	Γ	$\Pi-\mu_0\Gamma$
$\hat{D}^t(\alpha)$	αP^t	P^x	D^t	D^x	$\alpha^{-1}\Gamma$	$\alpha^{-1}\Pi$
$\hat{D}^x(\kappa)$	P^t	κP^x	D^t	D^x	$\kappa\Gamma$	Π
$\hat{\Gamma}(\mu_1)$	$P^t+\mu_1 P^x$	P^x	$D^t+\mu_1\Gamma$	$D^x-\mu_1\Gamma$	Γ	Π
$\hat{\Pi}(\gamma)$	$P^t-\gamma(2D^t+D^x)+\gamma^2\Pi$	$P^x-\gamma\Gamma$	$D^t-\gamma\Pi$	D^x	Γ	Π

Радикал $\mathfrak{r}$ та нільрадикал $\mathfrak{n}$ є мегаідеалами (тобто повністю характеристичними ідеалами) алгебри $\mathfrak{g}$, а отже вони $G^{\sim}$-інваріантні. Для будь-якої підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ розглянемо $G^{\sim}$-інваріантні величини $\dim\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}$, $\dim\mathfrak{s}\cap\mathfrak{n}$, $\dim\mathrm{pr}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{s}$ та $\dim\mathrm{pr}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{s}$, які використаємо для характеризації класифікаційних випадків.

Для класифікації придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ розглянемо їхні проекції на фактор Леві $\mathfrak{f}$. Ці проекції, очевидно, є підалгебрами алгебри $\mathfrak{f}$. Крім того, проекції еквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ еквівалентні як підалгебри алгебри $\mathfrak{f}$. Повний список нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ добре відомий (див., наприклад, [82]). В термінах реалізації $\mathfrak{f}$, він вичерпується підалгебрами

$$\{0\},\quad \langle P^t\rangle,\quad \langle D^t+\tfrac12 D^x\rangle,\quad \langle P^t+\Pi\rangle,\quad \langle P^t, D^t+\tfrac12 D^x\rangle\quad \text{та власне}\quad \mathfrak{f}.$$

Розглядаючи кожну з перерахованих підалгебр алгебри $\mathfrak{f}$ як проекцію придатної підалгебри, будемо додавати до базисних елементів цієї підалгебри всі можливі елементи радикала $\mathfrak{r}$, а також доповнювати її базис елементами з радикала.

Нехай $\mathfrak{s}$ — придатна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$. Доведемо властивості придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, що безпосередньо випливають з класифікуючої умови (4.5) і корисні для їх класифікації.

Лема 4.2. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{n}\neq\{0\}$*, то* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{n}$.

Доведення. З умови $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{n}\neq\{0\}$ випливає, що алгебра $\mathfrak{s}$ містить хоча б одне векторне поле $a\Gamma+bP^x$, для якого $(a,b)\neq(0,0)$. Підставивши значення $\tau=0$ та $\xi=at+b$, що відповідають векторному полю $a\Gamma+bP^x$, у рівняння (4.5), маємо $f_x=0$. Для таких f обидві пари

$$(\tau,\xi)=(0,1)\quad\text{та}\quad(\tau,\xi)=(0,t)$$

є розв'язками класифікуючої умови (4.5), а пара $(\tau,\xi)=(0,x)$ не є розв'язком, оскільки $f\neq0$. Отже, алгебра $\mathfrak{s}$ містить одночасно P^x та Γ, але не містить D^x. □

Наслідок 4.3. $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}\in\big\{\{0\},\,\mathfrak{c},\,\mathfrak{n}\big\}$.

Лема 4.4. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{c}$*, то* $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{c}$ *та* $\dim\mathfrak{s}\leqslant2$.

Доведення. Припустимо, що $\mathfrak{s}\not\subseteq\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{c}$. Тоді $\mathfrak{s}\setminus(\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{c})\neq\varnothing$. Кожен елемент з різниці цих множин має вигляд

$$Q=a_0P^t+a_1D^t+a_2\Pi+a_3D^x+a_4\Gamma+a_5P^x,\quad\text{де}\quad(a_4,a_5)\neq(0,0).$$

Оскільки $D^x,Q\in\mathfrak{s}$, маємо $[Q,D^x]=a_4\Gamma+a_5P^x\in\mathfrak{s}$. Тоді з леми 4.2 випливає, що $D^x\notin\mathfrak{s}$, що суперечить припущенню. Отже, $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{c}$.

Якщо $\dim\mathfrak{s}>2$, то $\dim\mathfrak{s}\cap\mathfrak{f}\geqslant2$, а отже, з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, $\mathfrak{s}\supseteq\langle P^t,D^t+\frac12D^x,D^x\rangle$. Тому $\mathfrak{s}\supseteq\langle P^t,D^t\rangle$. Підставивши у (4.5) значення $(\tau,\xi)=(1,0)$ та $(\tau,\xi)=(t,0)$, які відповідають векторним полям P^t та D^t відповідно, матимемо систему рівнянь на f, несумісну з умовою $f\neq0$ для довільних f. Отримана суперечність означає, що $\dim\mathfrak{s}\leqslant2$, а отже $\dim\mathfrak{s}\cap\mathfrak{f}\leqslant1$. □

Наслідок 4.5. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{c}$*, то*

$$\mathfrak{s}\in\big\{\langle D^x\rangle,\langle D^x,P^t\rangle,\langle D^x,D^t+\tfrac12D^x\rangle,\langle D^x,P^t+\Pi\rangle\big\}\bmod G^{\sim}.$$

Тут перераховано відповідно підалгебри $\mathfrak{g}^{1.1}$, $\mathfrak{g}^{2.2}$–$\mathfrak{g}^{2.4}$ з таблиці 4.1.

Лема 4.6. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{n}$*, то або* $\dim\mathfrak{s}\leqslant3$ *та* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{f}=\{0\}$*, або* $\mathfrak{s}=\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{n}$.

Доведення. Припустимо, що $\dim\mathfrak{s}>3$. Тоді $\dim\mathrm{pr}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{s}\geqslant 2$, тобто з точністю до відношення $G^{\sim}$-еквівалентності, алгебра $\mathfrak{s}$ містить векторні поля $Q^1=P^t+aD^x$ та $Q^2=D^t+bD^x$ з деякими сталими a та b. Отже, комутатор $[Q^1,Q^2]=P^t$ також належить підалгебрі $\mathfrak{s}$, і з класифікуючої умови (4.5), якщо підставити у неї компоненти векторних полів P^x та P^t, випливає, що $f=\mathrm{const}$.

Аналогічно отримуємо умову $f=\mathrm{const}$ у випадку $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{f}\neq\{0\}$, оскільки підстановка коефіцієнтів векторного поля P^x та будь-якого ненульового елемента алгебри $\mathfrak{f}$ у (4.5) дає рівняння $f_x=0$ та $f_t=0$.

Залишається зауважити, що максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ з $f=\mathrm{const}$ (тобто класичного рівняння Бюргерса) є п'ятивимірна алгебра $\mathfrak{s}=\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{n}$. □

Наслідок 4.7. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\mathfrak{n}$, *то* $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}\Subset\mathfrak{n}$, *де*

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}}\in\big\{\{0\},\,\langle P^t+\tfrac12D^x\rangle,\,\langle D^t+aD^x\rangle,\,\langle P^t+\Pi+aD^x\rangle,\,\mathfrak{f}\big\}\bmod G^{\sim},$$

$a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *до того ж* $a>0\bmod G^{\sim}$.

З переліку, представленого у наслідку 4.7, отримаємо підалгебри $\mathfrak{g}^{2.1}$, $\mathfrak{g}^{3.1}$, $\mathfrak{g}^{3.2}_a$ $\mathfrak{g}^{3.3}_a$ та $\mathfrak{g}^5$ з таблиці 4.1.

Наслідок 4.8. *Будь-яка придатна підалгебра алгебри* $\mathfrak{g}$ *не більш ніж п'ятивимірна.*

Розглянемо тепер останню можливість для $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}$, де $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\{0\}$. Тоді очевидно $\dim\mathfrak{s}\leqslant 3$. Але насправді верхню границю $\dim\mathfrak{s}$ у цьому випадку можна обмежити ще сильніше.

Лема 4.9. *Якщо* $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\{0\}$, *то* $\dim\mathfrak{s}\leqslant 2$. *Більш того, якщо* $\dim\mathfrak{s}=2$, *то* $\mathrm{pr}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{s}=\mathfrak{c}$ *та* $\mathfrak{s}\neq\langle P^t,D^t\rangle\bmod G^{\sim}$.

Доведення. Припустимо, що $\dim\mathfrak{s}\geqslant 2$ та $\mathrm{pr}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{s}=\{0\}$. З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності можна вважати, що $\mathrm{pr}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{s}\supseteq\langle P^t,D^t+\frac12D^x\rangle$. З огляду на класифікуючу умову (4.5), з інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ відносно алгебри $\mathfrak{s}$ випливає, що $f=\mathrm{const}$. Нагадаємо, що максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ для будь-якої сталої $f \neq 0$ містить $\mathfrak{n}$, що суперечить умові $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \{0\}$. Отже, $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, якщо $\dim \mathfrak{s} \geqslant 2$.

Припустимо, що $\dim \mathfrak{s} = 3$. Отже, $\mathrm{pr}_\mathfrak{f}\mathfrak{s} = \mathfrak{f}$, а тому $\mathfrak{s} \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$, тобто $\mathfrak{s}$ є фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді за теоремою Леві–Мальцева (хоча це можна довести і безпосереднім обчисленням комутаційних співвідношень алгебри $\mathfrak{s}$) $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}\mathfrak{s} = \{0\}$. Це суперечить попередньому висновку про те, що $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, якщо $\dim \mathfrak{s} \geqslant 2$.

Аналогічно до леми 4.4 з умови $\mathfrak{s} \supseteq \langle P^t, D^t \rangle$ випливає, що $f = 0$, а це суперечить обмеженню $\mathcal{S}$ для класу $\mathcal{L}\big|_\mathcal{S}$. □

Якщо $\dim \mathfrak{s} = 1$, то $\mathfrak{s} = \langle Q_\mathfrak{f} + a_3 D^x + a_4 \Gamma + a_5 P^x \rangle$ з деякими сталими a_3, a_4 та a_5, де невизначене поки що векторне поле $Q_\mathfrak{f}$ з точністю до $G^\sim$-еквівалентності належить множині $\big\{P^t, D^t, P^t + \Pi\big\}$.

Розглянемо випадок, коли $Q_\mathfrak{f} = P^t$. Спочатку припустимо, що $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}\mathfrak{s} = \{0\}$, а тому $a_3 = 0$. Приєднаною дією $\hat\Gamma(-a_5)$ коефіцієнт a_5 приводиться до нуля. Можна також вважати, що $a_4 \in \{0, 1\}$, оскільки при $a_4 \neq 0$ цей сталий параметр можна відмасштабувати приєднаною дією $\hat D^t(a_4^{-1})$. Якщо $\mathrm{pr}_\mathfrak{c}\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, тобто $a_3 \neq 0$, відмасштабуємо a_3 до 1 приєднаною дією $\hat D^t(a_3)$ та наступним масштабуванням всього базисного векторного поля. Тоді приєднаними діями $\hat\Gamma(a_4)$ та $\hat P^x(a_4 + a_5)$ досягаємо $a_4 = a_5 = 0$.

Інші два $G^\sim$-нееквівалентні значення $Q_\mathfrak{f}$ розглядаються аналогічно. Для коефіцієнта a_3 можна лише змінювати знак сталої $a_3 - \frac{1}{2}$ (для $Q_\mathfrak{f} = D^t$) чи a_3 (якщо $Q_\mathfrak{f} = P^t + \Pi$). Коефіцієнти a_4 та a_5 можна зробити нульовими за допомогою приєднаних дій $\hat\Gamma(\mu_1)$ та $\hat P^x(\mu_0)$ з деякими сталими μ^1 та μ^0, крім випадку $Q_\mathfrak{f} = D^t$ та $a_3 \in \{0, 1\}$, коли ненульові значення a_5 (відповідно a_4) можна лише відмасштабувати до одиниці при умові $a_3 = 0$ (відповідно $a_3 = 1$).

В результаті маємо підалгебри $\mathfrak{g}^{1.2}$–$\mathfrak{g}^{1.8}_a$.

У випадку $\dim \mathfrak{s} = 2$ з точністю до $G^\sim$-еквівалентності маємо, що підалгебра $\mathfrak{s}$ породжується двома векторними полями вигляду

$$Q^1 = P^t + b_3 D^x + b_4 \Gamma + b_5 P^x \quad \text{та} \quad Q^2 = D^t + a_3 D^x + a_4 \Gamma + a_5 P^x$$

з деякими сталими a_3, a_4, a_5, b_3, b_4 та b_5. Комутаційне співвідношення для базисних елементів алгебри $\mathfrak{s}$ має вигляд $[Q^1, Q^2] = Q^1$. Підставивши у нього вирази для Q^1 і Q^2 та зібравши коефіцієнти при D^x, виведемо умову $b^3 = 0$, а тому $a_3 \neq \frac{1}{2}$, оскільки $\mathrm{pr}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$. Збираючи коефіцієнти при Γ та P^x, отримаємо рівняння $(a_3 - 2)b_4 = 0$ та $(a_3 - 1)b_5 + a_4 = 0$ відповідно. За допомогою приєднаної дії $\hat{\Gamma}(-b_5)$ можна досягти $b_5 = 0$, з чого випливає $a_4 = 0$. Коефіцієнт b_4 нульовий при $a_3 \neq 2$; якщо ж він ненульовий, його можна масштабувати до одиниці. У випадку $a_3 \neq 0$ можна покласти $a_5 = 0$ приєднаною дією $\hat{P}^x(-a_5/a_3)$, а при $a_3 = 0$ ненульове значення a_5 можна масштабувати до одиниці. Одночасна рівність $a_3 = a_5 = 0$ неможлива з огляду на лему 4.9. Отже, в цьому випадку отримаємо підалгебри $\mathfrak{g}^{2.5}$–$\mathfrak{g}^{2.7}$.

Таким чином, повний список $G^{\sim}$-нееквівалентних придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ побудовано.

4.2.3. Результат класифікації

Для того, щоб обчислити вигляд довільного елемента f, що відповідає кожній підалгебрі $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ з отриманого списку, підставляємо коефіцієнти τ та ξ базисних векторних полів відповідної алгебри $\mathfrak{s}$ у класифікуючу умову (4.5) і розв'язуємо отриману систему диференціальних рівнянь на f. Ця система обов'язково має розв'язки; більш того, принаймні для деякої підмножини її розв'язків $\mathfrak{s}$ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності для відповідних рівнянь $\mathcal{L}_f$. Це означає, що набір властивостей придатних підалгебр, наведений у підрозділі 4.2.2 у вигляді лем, є необхідною і достатньою умовою того, що $\mathfrak{s}$ придатна.

Повний список нееквівалентний придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ та відповідних значень довільного елемента f наведено у таблиці 4.1. Оскільки клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, ця групову класифікація є вичерпною.

У кожному випадку таблиці 4.1, де виникають сталі параметри a та $\varkappa$ і (ненульова) параметр-функція h, ці параметри повинні задовольняти зазначені в останньому стовпчику умови для того, щоб відповідна алгеб-

Таблиця 4.1. Групова класифікація класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$

$\mathfrak{s}$	Базис	$f(t,x)$	ω	Умови максимальності
$\mathfrak{g}^{1.1}$	D^x	$x^2h(\omega)$	t	$\big((\alpha\omega^2{+}\beta\omega{+}\gamma)h\big)_\omega{\ne}0\quad\forall(\alpha,\beta,\gamma){\ne}\bar 0$
$\mathfrak{g}^{1.2}$	P^t	$h(\omega)$	x	$(\alpha\omega+\beta)h_\omega\ne\gamma h\quad\forall(\alpha,\beta,\gamma){\ne}\bar 0$
$\mathfrak{g}^{1.3}$	$P^t+\Gamma$	$h(\omega)$	$x-\dfrac{t^2}{2}$	$(\alpha\omega+\beta)h_\omega\ne\gamma h\quad\forall(\alpha,\beta,\gamma){\ne}\bar 0$
$\mathfrak{g}^{1.4}$	P^t+D^x	$e^{2t}h(\omega)$	$e^{-t}x$	$h_\omega\ne0,\quad \omega h_\omega\ne 2h$
$\mathfrak{g}^{1.5}$	D^t+P^x	$\dfrac{1}{t}h(\omega)$	$x-\ln\|t\|$	$h_\omega\ne0,\quad h_\omega\ne -h$
$\mathfrak{g}^{1.6}_a$	D^t+aD^x	$\dfrac{\|t\|^{2a}}{t}\,h(\omega)$	$\|t\|^{-a}x$	$h_\omega\ne0,\quad h\colon\Xi,\quad a\geqslant\frac12 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{1.7}$	$D^t+D^x+\Gamma$	$t\,h(\omega)$	$\dfrac{x}{t}-\ln\|t\|$	$h_\omega\ne0,\quad h_\omega\ne -h$
$\mathfrak{g}^{1.8}_a$	$P^t+\Pi+aD^x$	$e^{2a\,\mathrm{arctg}\,t}h(\omega)$	$\dfrac{e^{-a\,\mathrm{arctg}\,t}}{\sqrt{t^2+1}}\,x$	$\omega h_\omega\ne 2h,\quad a\ge0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.1}$	$P^x,\quad\Gamma$	$h(\omega)$	t	$(\alpha\omega^2{+}\beta\omega{+}\gamma)h_\omega{\ne}\delta h\quad\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta){\ne}\bar 0$
$\mathfrak{g}^{2.2}$	$D^x,\quad P^t$	x^2		
$\mathfrak{g}^{2.3}$	$D^x,\quad D^t$	$\varkappa\dfrac{x^2}{t}$		$\varkappa\ne0,\quad\varkappa>0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.4}$	$D^x,\quad P^t+\Pi$	$\dfrac{\varkappa x^2}{t^2+1}$		$\varkappa\ne0,\quad\varkappa>0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.5}$	$P^t,\quad D^t+P^x$	e^{-x}		
$\mathfrak{g}^{2.6}_a$	$P^t,\quad D^t+aD^x$	$\|x\|^{2-1/a}$		$a\ne0,\quad a\ne\frac12$
$\mathfrak{g}^{2.7}$	$P^t+\Gamma,\quad D^t+2D^x$	$\varkappa\left\|x-\dfrac{t^2}{2}\right\|^{3/2}$		$\varkappa\ne0,\quad\varkappa>0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{3.1}$	$P^x,\quad\Gamma,\quad P^t+\frac12D^x$	εe^t		
$\mathfrak{g}^{3.2}_a$	$P^x,\quad\Gamma,\quad D^t+aD^x$	$\varepsilon\|t\|^{2a-1}$		$a\ne\frac12,\quad a>\frac12 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{3.3}_a$	$P^x,\quad\Gamma,\quad P^t+\Pi+aD^x$	$\varepsilon e^{2a\,\mathrm{arctg}\,t}$		$a\ne0,\quad a>0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{5}$	$P^x,\ \Gamma,\ P^t,\ D^t+\frac12D^x,\ \Pi$	1		

ра $\mathfrak{s}$ була максимальною алгеброю ліївської інваріантності для наведеного значення f, тобто $\mathfrak{s}=\mathfrak{g}_f$. $\varepsilon=\pm1 \bmod G^\sim$. Умова Ξ для $\mathfrak{g}^{1.6}_a$ означає

$$
\begin{aligned}
&a(\omega+\alpha)h_\omega\ne(2a-1)h,\quad \text{якщо}\quad (a-2)(a-1)\alpha=0,\\
&(\omega+\beta)h_\omega\ne 2h,\quad \text{якщо}\quad (a-1)a\beta=0,\\
&(a-1)(\omega+\gamma)h_\omega\ne(2a-1)h,\quad \text{якщо}\quad a(a+1)\gamma=0.
\end{aligned}
$$

4.3. Класичні інваріантні розв'язки

З метою оптимізації процесу проведення редукцій для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ застосуємо дві спеціальні техніки.

Першу з них можна використати завдяки тому, що клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований. А саме — замість того, щоб класифікувати ліївські редукції відносно груп ліївських симетрій окремих рівнянь, прокласифікуємо їх відносно групи еквівалентності $G^{\sim}$ всього класу. Ця техніка пов'язана з алгебраїчним методом групової класифікації. Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, проекція групи еквівалентності $G^{\sim}$ на простір залежної і незалежних змінних містить групи точкових симетрій усіх рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а отже максимальними алгебрами ліївської інваріантності цих рівнянь є підалгебри проекції $\mathfrak{g}$ алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$.

Нагадаємо, що рівняння $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ подібні відносно точкового перетворення тоді і тільки тоді, якщо вони $G^{\sim}$-еквівалентні. З подібності рівнянь $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ випливає еквівалентність їхніх максимальних алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_f$ та $\mathfrak{g}_{\tilde{f}}$. Підалгебри алгебр $\mathfrak{g}_f$ та $\mathfrak{g}_{\tilde{f}}$ є, очевидно, підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$. Таким чином, достатньо прокласифікувати нееквівалентні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ (див. підрозділ 4.2.2), що є придатними для ліївської редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Цей підхід дозволяє уникнути окремого застосування процедури ліївської редукції для кожного з 19 класифікаційних випадків, наведених у таблиці 4.2.

Друга техніка, яку систематично застосовано в [55, 56] й обговорено в [94], полягає в тому, щоб будувати анзаци у такий спосіб, щоб редуковані рівняння мали найпростіший та одноманітний вигляд. Алгебри $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$ дають тривіальні звичайні диференціальні рівняння першого порядку; редуковані рівняння, побудовані за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.2}$–$\mathfrak{g}^{1.8}_a$, є диференціальними рівняннями другого порядку. Для всіх цих алгебр незалежну інваріантну змінну ω обрано лінійною за x зі сталими або залежними лише від t коефіцієнтами, а анзаци мають загальний вигляд $u = F(t)\varphi(\omega) + G(t,x)$, де $G_{xx} = 0$. Тим самим редуковані рівняння при-

Таблиця 4.2. Ліївські редукції за одновимірними підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$, $\varphi=\varphi(\omega)$

$\subset\mathfrak{g}$	Basis	Анзац	ω	Редуковане рівняння
$\mathfrak{g}^{1.0}$	P^x	$u=\varphi$	t	$\varphi_\omega=0$
$\mathfrak{g}^{1.1}$	D^x	$u=x\varphi$	t	$\varphi_\omega+\varphi^2=0$
$\mathfrak{g}^{1.2}$	P^t	$u=\varphi$	x	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega=0$
$\mathfrak{g}^{1.3}$	$P^t+\Gamma$	$u=\varphi+t$	$x-\dfrac{t^2}{2}$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega+1=0$
$\mathfrak{g}^{1.4}$	P^t+D^x	$u=e^t\varphi$	$e^{-t}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega-\omega\varphi_\omega+\varphi=0$
$\mathfrak{g}^{1.5}$	D^t+P^x	$u=t^{-1}\varphi$	$x-\ln\lvert t\rvert$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega-\varphi_\omega-\varphi=0$
$\mathfrak{g}^{1.6}_a$	D^t+aD^x	$u=\lvert t\rvert^a t^{-1}\varphi$	$\lvert t\rvert^{-a}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega-\omega\varphi_\omega+(a-1)\varphi=0$
$\mathfrak{g}^{1.7}$	$D^t+D^x+\Gamma$	$u=\varphi+\ln\lvert t\rvert$	$\dfrac{x}{t}-\ln\lvert t\rvert$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega-(\omega+1)\varphi_\omega+1=0$
$\mathfrak{g}^{1.8}_a$	$P^t+\Pi+aD^x$	$u=\dfrac{e^{a\,\mathrm{arctg}\,t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi+ +\dfrac{t+a}{t^2+1}x$	$\dfrac{e^{-a\,\mathrm{arctg}\,t}}{\sqrt{t^2+1}}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega}+\varphi\varphi_\omega+2a\varphi+(a^2+1)\omega=0$

ведено до спільного загального вигляду (4.7). У деяких випадках знадобилася додаткова заміна залежної інваріантної змінної φ.

З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, розширення ліївських симетрій у цьому підкласі вичерпуються алгебрами $\mathfrak{g}^{2.1}$, $\mathfrak{g}^{3.1}$, $\mathfrak{g}^{3.2}_a$, $\mathfrak{g}^{3.3}_a$ та $\mathfrak{g}^5$ з таблиці 4.1. Редуковані рівняння для всіх можливих $G^{\sim}$-нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ наведено у таблиці 4.2. Випадок $\mathfrak{g}^{1.0}$ у цій таблиці відповідає випадку $\mathfrak{g}^{2.1}$ у таблиці 4.1 (див. лему 4.2).

Зауваження 4.10. У [47, 133] класичні ліївські редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ проведено тільки для його підкласу з $f_x=0$. При цьому допущено низку неточностей, які виправлено у цій дисертаційній роботі. А саме, у [47] оптимальні системи підалгебр побудовано для відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності. Ці підалгебри використано для знаходження анзаців для u та редукованих рівнянь. Цей розгляд штучно ускладнено, оскільки випадки розширень ліївської симетрії не було спрощено точковими перетвореннями еквівалентності, і два класи виявилися еквівалентними двом іншим відносно точкових перетворень.

Деякі з оптимальних систем одновимірних підалгебр для максимальних алгебр ліївської інваріантності узагальнених рівнянь Бюргерса з підкласу (5.11), знайдених у [47], а саме — максимальні алгебри ліївської інваріантності у випадку 6 з $\rho = 1$ та $\rho = -1$, некоректні. Більш того, жодні з редукованих рівнянь не проінтегровано. У [133] ліївські редукції проведено тільки за одновимірними підалгебрами, у класифікаційному списку присутні еквівалентні випадки та зайві параметри. Редуковане рівняння (95) у [133] містить дві помилки і насправді повинне виглядати так: $F_0 f'' + ff' + mz_2\lambda f' - mz_2 f + z_2^2\lambda = 0$. Редуковане рівняння, пов'язане з підалгеброю $\mathfrak{g}_8$, наведено в [133] з помилками в знаках. Насправді подальше інтегрування коректного редукованого рівняння неможливе, а функції (99)–(101), наведені в [133] в якості розв'язків, насправді не задовольняють відповідне узагальнене рівняння Бюргерса.

Щоб розв'язати редуковані рівняння другого порядку з таблиці 4.2, розглянемо надклас звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$h(\omega)\phi_{\omega\omega} + \phi\phi_\omega + \alpha\phi + \beta\omega + \gamma = 0, \qquad \text{де} \qquad h(\omega) \neq 0, \tag{4.7}$$

який містить усі редуковані рівняння (крім звичайних диференціальних рівнянь, що відповідають алгебрам $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$). Значення сталих α, β та γ і заміна змінної φ (якщо потрібна) для них наступні:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{g}^{1.2}: & \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 0, & \varphi = \phi; & \\
\mathfrak{g}^{1.3}: & \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 1, & \varphi = \phi; & \\
\mathfrak{g}^{1.4}: & \alpha = 2, & \beta = 1, & \gamma = 0, & \text{заміна} & \varphi = \phi + \omega; \\
\mathfrak{g}^{1.5}: & \alpha = -1, & \beta = 0, & \gamma = -1, & \text{заміна} & \varphi = \phi + 1; \\
\mathfrak{g}^{1.6}_a: & \alpha = a, & \beta = a - 1, & \gamma = 0, & \text{заміна} & \varphi = \phi + \omega; \\
\mathfrak{g}^{1.7}: & \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = 1, & \text{заміна} & \varphi = \phi + \omega + 1; \\
\mathfrak{g}^{1.8}_a: & \alpha = 2a, & \beta = a^2 + 1, & \gamma = 0, & \varphi = \phi. &
\end{array}$$

Лінійні розв'язки редукованих рівняння (4.7), так само як і всі розв'язки редукованих рівнянь для $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$, дають розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, що є лінійними за x. Розв'язки, лінійні за x — спільні для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ і вичерпуються двома сім'ями: $u = c_0$ та $u = (x + c_1)/(t + c_2)$, де c_0, c_1 та c_2 — довільні сталі. Їх наведено у підрозділі 4.4.1, при описі операторів редукції.

Знайдемо ліївські симетрії звичайних диференціальних рівнянь з класу (4.7) та використаємо їх для розв'язання редукованих рівнянь, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{g}^{1.2}$–$\mathfrak{g}^{1.8}_a$ (таблиця 4.2). Щоб знайдені симетрії були дійсно симетріями редукованих рівнянь, перетворення еквівалентності між рівняннями з класу (4.7) не використовуються.

Твердження 4.11. *Значення довільного елемента $(h(\omega), \alpha, \beta, \gamma)$, що відповідають рівнянням з класу (4.7) з ненульовими максимальними алгебрами ліївської інваріантності $\mathfrak{h}$, вичерпуються наступними:*

1. $h = h_0\big(\omega + \frac{\gamma}{\beta}\big)^2$, $\beta \neq 0$: $\mathfrak{h} = \langle\big(\omega + \frac{\gamma}{\beta}\big)\partial_\omega + \phi\partial_\phi\rangle$;
2. $h = h_0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$: $\mathfrak{h} = \langle\partial_\omega\rangle$;
3. $h = h_0|\omega + \mu|^{3/2}$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$: $\mathfrak{h} = \langle 2(\omega + \mu)\partial_\omega + \phi\partial_\phi\rangle$;
4. $h = -\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu$, $\beta = \gamma = 0$:
   $\mathfrak{h} = \langle h\partial_\omega - \alpha h\partial_\phi, -\big(h\int\frac{\mathrm{d}\omega}{h}\big)\partial_\omega + \big(\phi + \alpha h\int\frac{\mathrm{d}\omega}{h} + \alpha\omega - \mu\big)\partial_\phi\rangle$;
5. $h_{\omega\omega} = \frac{\kappa}{h} - \alpha$, $\beta = \gamma = 0$: $\mathfrak{h} = \langle h\partial_\omega + (\kappa - \alpha h)\partial_\phi\rangle$;
6. $\dfrac{h_{\omega\omega} + \alpha}{(h_\omega + \alpha\omega + \mu)^2} = \dfrac{\kappa}{h}$, $\beta = \gamma = 0$: $\mathfrak{h} = \langle\xi\partial_\omega + (\phi - \alpha\xi + \alpha\omega + \mu)\partial_\phi\rangle$.

Тут $h_0 \neq 0$, μ, ν та $\kappa \neq 0$ — довільні сталі, функція $h(\omega)$ є розв'язком наведеного диференціального рівняння, а функцію ξ визначено формулою

$$\xi = \frac{h_\omega + \alpha\omega + \mu}{h_{\omega\omega} + \alpha}.$$

Доведення. Будь-який оператор ліївської симетрії довільного рівняння з класу (4.7) має загальний вигляд

$$\xi(\omega)\partial_\omega + [c_1\phi - \alpha\xi(\omega) + \alpha c_1\omega + c_0]\partial_\phi,$$

де c_1 та c_0 — довільні сталі, а коефіцієнт $\xi = \xi(\omega)$ задовольняє класифікуючі умови

$$(\xi_\omega - 2c_1)(\beta\omega + \gamma) + \beta\xi = 0, \tag{4.8}$$

$$\xi_\omega - \frac{h_\omega}{h}\xi = -c_1. \tag{4.9}$$

З рівняння

$$h\xi_{\omega\omega} = -\alpha\xi + c_1\alpha\omega + c_0 \tag{4.10}$$

за умови (4.9) безпосередньо випливає

$$(h_{\omega\omega} + \alpha)\xi = c_1 h_\omega + c_1\alpha\omega + c_0. \tag{4.11}$$

Щоб розв'язати систему рівнянь (4.8), (4.9), (4.11) спочатку проінтегруємо рівняння (4.8), розглядаючи випадки $\beta = 0$ та $\beta \neq 0$ окремо.

При $\beta \neq 0$ з рівняння (4.8) маємо

$$\xi = \frac{c_1(\beta\omega + \gamma)}{\beta} + \frac{b}{\beta\omega + \gamma}.$$

Тут і нижче b є сталою інтегрування. Припущення $b \neq 0$ веде до суперечності. Отже, $b = 0$, тобто $\xi = c_1(\omega + \frac{\gamma}{\beta})$, звідки $\xi_{\omega\omega} = 0$. З рівняння (4.10) отримуємо $c_0 = c_1\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Оскільки алгебра $\mathfrak{h}$ повинна бути ненульовою, вона обов'язково містить векторне поля з ненульовим значенням c_1. Отже, з (4.9) отримуємо $(\omega + \frac{\gamma}{\beta})h_\omega = 2h$, що дає пункт 1 твердження.

Якщо $\beta = 0$ та $\gamma \neq 0$, то з (4.8) отримуємо $\xi = 2c_1\omega + b$ і розщеплюємо (4.10) за ω. Маємо $\alpha c_1 = 0$ та $c_0 = \alpha b$. Тоді використаємо (4.9), щоб отримати пункт 2 (якщо $c_1 = 0$ для всіх елементів алгебри $\mathfrak{h}$) та пункт 3 (інакше).

Рівняння (4.8) з $\beta = \gamma = 0$ є тотожністю. Розглянемо окремо підвипадки $h_{\omega\omega} + \alpha = 0$ та $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$.

Якщо $h_{\omega\omega} + \alpha = 0$, проінтегрувавши (4.9) маємо $\xi = bh - c_1 h \int \frac{\mathrm{d}\omega}{h}$. Це дає пункт 4.

При $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$ з рівняння (4.11) маємо

$$\xi = \frac{h_\omega + \alpha\omega}{h_{\omega\omega} + \alpha}c_1 + \frac{1}{h_{\omega\omega} + \alpha}c_0.$$

Тоді рівняння (4.9) можна подати у вигляді $K^1c_1 + K^0c_0 = 0$, де

$$K^0 = \left[\frac{1}{h(h_{\omega\omega}+\alpha)}\right]_\omega h \qquad \text{та} \qquad K^1 = 2 + (h_\omega + \alpha\omega)K^0.$$

Якщо $K^0 = 0$, то $K^1 = 2$, $c_1 = 0$ та $\kappa := h(h_{\omega\omega}+\alpha) = \mathrm{const}$. Звідси отримуємо пункт 5. Тепер припустимо, що $K^0 \neq 0$. K^1 та K^0 — лінійно залежні, інакше $c_1 = c_0 = 0$, що відповідає тривіальній алгебрі. Отже, $\mu := -K^1/K^0 = \mathrm{const}$, звідки $c_0 = \mu c_1$. Після першого інтегрування рівняння (4.9) маємо

$$\frac{h}{h_\omega + \alpha\omega + \mu}\left[\frac{(h_\omega + \alpha\omega + \mu)^2}{h(h_{\omega\omega}+\alpha)}\right]_\omega = 0,$$

або, що те саме,

$$\frac{h_{\omega\omega}+\alpha}{(h_\omega + \alpha\omega + \mu)^2} = \frac{\kappa}{h},$$

де κ — стала інтегрування. Таким чином отримуємо пункт 6.

Для двох останніх пунктів $\kappa \neq 0$, оскільки $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$. □

Рівняння (4.7) з $h = -\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu$ та $\beta = \gamma = 0$ (пункт 4 доведеного твердження) допускає найширшу (двовимірну) алгебру симетрій. У цьому випадку рівняння (4.7) у змінних

$$\tilde\omega = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{-\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu}, \qquad \tilde\phi = \phi + \alpha\omega - \mu$$

можна один раз проінтегрувати й отримати $2\tilde\phi_{\tilde\omega} = c_0 - \tilde\phi^2$. Розв'язок проінтегрованого рівняння залежить від знаку сталої інтегрування c_0:

$$\begin{aligned}
&\tilde\phi = -\varkappa \operatorname{tg}\left(\tfrac{\varkappa}{2}\tilde\omega + c_1\right), && \text{якщо} \quad c_0 < 0,\ \varkappa := \sqrt{-c_0},\\
&\tilde\phi = \frac{2}{\tilde\omega + c_1} \quad \text{або} \quad \tilde\phi = 0, && \text{якщо} \quad c_0 = 0,\\
&\tilde\phi = \varkappa\frac{c_1e^{\varkappa\tilde\omega}-1}{c_1e^{\varkappa\tilde\omega}+1} \quad \text{або} \quad \tilde\phi = \varkappa, && \text{якщо} \quad c_0 > 0,\ \varkappa := \sqrt{c_0},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

де c_1 — ще одна стала інтегрування. Вигляд $\tilde{\omega}$ залежить від знаку $D = \mu^2 + 2\alpha\nu$ та від сталих α, μ і ν, а саме:

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\nu}, & \alpha = 0,\ \mu = 0,\ \nu \neq 0, \\ \dfrac{1}{\mu}\ln\left|\omega + \dfrac{\nu}{\mu}\right|, & \alpha = 0,\ \mu \neq 0, \\ -\dfrac{2}{\sqrt{-D}}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha\omega - \mu}{\sqrt{-D}}, & \alpha \neq 0,\ D < 0, \\ \dfrac{2}{\alpha\omega - \mu}, & \alpha \neq 0,\ D = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{D}}\ln\left|\dfrac{\alpha\omega - \mu + \sqrt{D}}{\alpha\omega - \mu - \sqrt{D}}\right|, & \alpha \neq 0,\ D > 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Отже, підставляючи вирази для $\tilde{\phi}$ та $\tilde{\omega}$ у рівняння $\phi = \tilde{\phi}(\tilde{\omega}) - \alpha\omega + \mu$, отримуємо 15 різних виразів для розв'язків рівняння (4.7) з функцією h, квадратичною за ω, та $\beta = \gamma = 0$. Цей результат можна застосувати до редукованих рівнянь, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{g}^{1.2}$ та $\mathfrak{g}_1^{1.6}$ (таблиця 4.2), де $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ відповідно.

Якщо диференціальне рівняння для h у пункті 5 твердження 4.11 домножити на $2h_\omega$ та один раз проінтегрувати, отримаємо $h_\omega^2 = 2\nu\ln|h| - 2\alpha h + c_1$, де c_1 — довільна стала. Після другого інтегрування отримаємо неявний вигляд загального розв'язку

$$\pm\int\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2\nu\ln|h| - 2\alpha h + c_1}} = \omega + c_2.$$

Для деяких пунктів твердження 4.11 можна побудувати принаймні часткові розв'язки відповідних рівнянь вигляду (4.7) з окремими значеннями параметрів. Використаємо, наприклад, ліївські редукції рівнянь з класу (4.7) до алгебраїчних рівнянь.

Алгебра симетрій у пункті 3 дає анзац $\phi = c\sqrt{|\omega + \mu|}$. Тут стала c є розв'язком редукованого алгебраїчного рівняння $2\varepsilon c^2 - h_0 c + 4\gamma = 0$, де $\varepsilon = \operatorname{sign}(\omega + \mu)$, що дає

$$c = \frac{1}{4\varepsilon}\Big(h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - 32\varepsilon\gamma}\Big).$$

Таким чином, при $\gamma = 1$ можна використати цей розв'язок ϕ редукованого рівняння, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{g}^{1.3}$ з таблиці 4.2, і отримати розв'язок

$$u(t,x) = c\sqrt{\left|x - \frac{t^2}{2} + \mu\right|} + t \tag{4.14}$$

узагальнених рівнянь Бюргерса $\mathcal{L}_{f^0}$, де $f^0 = h_0\left|x - \frac{t^2}{2} + \mu\right|^{3/2}$, а $\mu = 0$ з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності.

Якщо покласти $\alpha = \mu = 0$ у пункті 6, то рівняння $h_{\omega\omega}/h_\omega = \kappa h_\omega/h$ для h можна проінтегрувати:

$$h = h_0|\omega + \lambda|^{\frac{1}{1-\kappa}} \qquad \text{якщо} \qquad \kappa \neq 1,$$
$$h = h_0 e^{\lambda\omega}, \qquad \text{якщо} \qquad \kappa = 1.$$

Відповідна алгебра ліївських симетрій дасть анзац $\phi = c(h/h_0)^\kappa$. Тут h_0 та λ — сталі інтегрування. Побудований анзац зводить рівняння (4.7) до квадратного рівняння на c, яке має два розв'язки: $c = 0$ та

$$c = \operatorname{sign}(\omega + \lambda)\frac{1 - 2\kappa}{1 - \kappa}h_0^{1-\kappa}, \qquad \text{якщо} \qquad \kappa \neq 1,$$
$$c = -\lambda, \qquad \text{якщо} \qquad \kappa = 1,$$

Використавши цей результат для редукованого рівняння, що відповідає алгебрі $\mathfrak{g}^{1.2}$ з таблиці 4.2, отримаємо стаціонарні розв'язки вигляду $u(t,x) = ch_0^\kappa|x + \lambda|^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$ та $u(t,x) = -\lambda h_0 e^{\lambda x}$ для узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t + uu_x + h_0|x + \lambda|^{\frac{1}{1-\kappa}}u_{xx} = 0$ та $u_t + uu_x + h_0 e^{\lambda x}u_{xx} = 0$ відповідно.

Зауваження 4.12. Якщо редуковане рівняння допускає ліївські симетрії що не індукуються ліївськими симетріями вихідного рівняння, то кажуть, що вихідне рівняння має *приховані* [21] (або *додаткові* [8]) симетрії відносно відповідної редукції. Перший приклад таких симетрій представлено в [2], див. також обговорення цього прикладу у [8, приклад 3.5].

Всестороннє дослідження таких симетрій для рівнянь Нав'є–Стокса проведено в [55, 56]. Ліївські редукції відповідних рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$ призводять до редукованих рівнянь першого порядку. Отже, відповідні вихідні рівняння допускають нескінченновимірні сім'ї прихованих симетрій відносно вищезгаданих редукцій, але ці симетрії несуттєві для розгляду, оскільки вони не дають нових розв'язків. Інші алгебри з таблиці 4.2 приводять до редукованих рівнянь другого порядку загального вигляду (4.7). Серед ліївських симетрій таких редукованих рівнянь є як індуковані, так і приховані симетрії. А саме, у пунктах 1–3 твердження 4.11 всі симетрії відповідних редукованих рівнянь, (які побудовано за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.4}$, $\mathfrak{g}^{1.6}_a$, де $a \neq 1$, $\mathfrak{g}^{1.8}_a$; $\mathfrak{g}^{1.3}$, $\mathfrak{g}^{1.5}$, $\mathfrak{g}^{1.7}$; $\mathfrak{g}^{1.3}$ відповідно) індукуються ліївськими симетріями відповідних вихідних рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Умова $\beta = \gamma = 0$ у пунктах 4–6 виконується тільки для редукованих рівнянь, отриманих з використанням алгебр $\mathfrak{g}^{1.2}$ та $\mathfrak{g}^{1.6}_1$. У пункті 4 перший базисний оператор є індукованим тільки якщо $f = x$ для редукції за $\mathfrak{g}^{1.2}$, а другий — тільки якщо $f = t(\omega + \bar{\nu})^2$, де $\omega = x/t$ для редукції за $\mathfrak{g}^{1.6}_1$. Усі інші ліївські симетрії редукованих рівнянь, представлених у пунктах 4–6, є прихованими симетріями відповідних вихідних рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Розглянемо можливі редукції за двовимірними нееквівалентними підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$. Для цього для кожного базисного векторного поля підалгебри запишемо характеристику рівняння і отримаємо систему з двох диференціальних рівнянь. Якщо система сумісна, то її розв'язок дає анзац, що зводить відповідні рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ до алгебраїчних рівнянь.

Система, отримана для $\mathfrak{g}^{2.1}$, є несумісною, отже ця підалгебра не дозволяє побудувати анзац. За підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.4}$ можна побудувати анзац $u = (t + c)x/(t^2 + 1)$, але відповідне редуковане рівняння $c^2 + 1 = 0$, де c — стала, не має розв'язків.

Наступні підалгебри дозволяють побудувати деякі прості розв'язки: $u = 0$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.2}$, $u = 0$ та $u = \frac{x}{t}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.3}$, $u = 0$

та $u = e^{-x}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.5}$, $u = a^{-1}x|x|^{-1/a}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.6}_a$, а за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.7}$ переотримуємо розв'язок (4.14) з $\mu = 0$ та $h_0 = \kappa$.

Усі інші двовимірні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ містять (з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності) векторне поле P^x, а тому можуть дати щонайбільше сталі розв'язки рівнянь з класу (4.1).

Зауважимо, що будь-який ліївський розв'язок рівняння Бюргерса можна отримати з ліївського розв'язку лінійного рівняння теплопровідності через перетворення Коула–Хопфа. Перед тим, як подати відповідне твердження, згадаємо, що максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\mathrm{h}}$ лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$ породжується векторними полями

$$\hat{P}_t = \partial_t, \qquad \hat{D} = 2t\partial_t + x\partial_x, \qquad \hat{K} = t^2\partial_t + tx\partial_x + \left(\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}t\right)v\partial_v,$$
$$\hat{P}_x = \partial_x, \qquad \hat{G} = t\partial_x + \frac{1}{2}xv\partial_v, \qquad \hat{I} = v\partial_v, \qquad h(t,x)\partial_v,$$

де $h(t,x)$ пробігає множину розв'язків цього рівняння. Будь-якому векторному полю $Q = c_0P_t + c_1D + c_2K + c_3P_x + c_4\Gamma$ з максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_1$ рівняння L_1 поставимо у відповідність векторне поле $\hat{Q} = c_0\hat{P}_t + c_1\hat{D} + c_2\hat{K} + c_3\hat{P}_x + c_4\hat{G}$ з алгебри $\mathfrak{g}^{\mathrm{h}}$.

Твердження 4.13. *Розв'язок u рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ є інваріантним за векторним полем Q з алгебри $\mathfrak{g}_{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $u = 2v_x/v$ для деякого $\hat{Q}_\mu$-інваріантного розв'язку v лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, де $\mu = \mathrm{const}$ та $\hat{Q}_\mu = \hat{Q} - \mu\hat{I} \in \mathfrak{g}^{\mathrm{h}}$.*

Доведення. Якщо гладкі функції u та v, що залежать від t та x, пов'язані між собою перетворенням Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$, то

$$Q[u] = Q[2v_x/v] = 2(\hat{Q}[v]/v)_x.$$

Нехай u є Q-інваріантним розв'язком рівняння $\mathcal{L}_1$. Тоді функцію v можна розглядати як деякий розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, тому $(\hat{Q}[v]/v)_x = Q[u]/2 = 0$, тобто $\hat{Q}[v] = \mu v$ для деякої гладкої функції $\mu(t)$. Подіємо оператором $\mathcal{T} = \mathrm{D}_t + \mathrm{D}_{xx}$ на обидві частини отриманого рівняння:

$$\mathcal{T}\hat{Q}[v] = \hat{Q}[\mathcal{T}v] - 2(c_2t + c_1)\mathcal{T}v = \mu_t v + \mu\mathcal{T}v.$$

З огляду на те, що $\mathcal{T}v = 0$ та $\mathcal{T}\hat{Q}[v] = 0$, звідси випливає, що $\mu_t = 0$, тобто μ є сталою. А оскільки $\hat{Q}[v] - \mu v = \hat{Q}_\mu[v] = 0$, функція v є $\hat{Q}_\mu$-інваріантною.

Навпаки, якщо для деякої сталої μ функція v є $\hat{Q}_\mu$-інваріантним розв'язком лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, то функція $u = 2v_x/v$ є розв'язком рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ і

$$Q[u] = Q[2v_x/v] = 2(\hat{Q}[v]/v)_x = 2(\hat{Q}_\mu[v]/v)_x = 0,$$

тобто, функція u є Q-інваріантним. □

4.4. Оператори редукції

Задача знаходження сингулярних операторів редукції рівнянь $\mathcal{L}_f$ є «no-go» задачею. Справді, поклавши $\xi = 1$ і застосувавши критерій умовної інваріантності (2.4), легко переконатися, що для рівняння $\mathcal{L}_f$ визначальне рівняння на єдиний невідомий коефіцієнт $\eta = \eta(t, x, u)$ має вигляд

$$\eta_t + u\eta_x + \eta^2 + f_x(\eta_x + \eta\eta_u) + f(\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu}) = 0.$$

Це рівняння можна звести до рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_f$ [67, 136] суперпозицією диференціальної підстановки $\eta = -\Phi_x/\Phi_u$, де Φ — деяка гладка функція від (t, x, u), $\Phi_u \neq 0$, та перетворення годографа, де новими незалежними змінними будуть $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$ та $\varkappa = \Phi$, а новими залежними — $\tilde{u} = u$ ($\varkappa$ відіграватиме роль параметра).

Більш того, з точністю до відношень еквівалентності операторів редукції і сімей розв'язків, існує взаємно однозначна відповідність між операторами редукції рівняння $\mathcal{L}_f$ з нульовим коефіцієнтом при ∂_t та однопараметричними сім'ями розв'язків цього рівняння, які інваріантні відносно цього оператора. Задача побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$ повністю еквівалентна задачі вичерпного опису його операторів редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t.

Якщо дано сім'ю $\mathcal{F} = \{u = F(t,x,\varkappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$, параметризовану одним суттєвим параметром $\varkappa$, то відповідний сингулярний оператор редукції має вигляд $Q = \partial_x - (\Phi_x/\Phi_u)\partial_u$, де функція Φ є розв'язком рівняння $u = F(t,x,\varkappa)$ відносно $\varkappa$, тобто $\varkappa = \Phi(t,x,u)$. Побудований за допомогою оператора Q анзац $u = F(t,x,\varphi(\omega))$, де $\omega = t$, редукує рівняння $\mathcal{L}_f$ до $\varphi_\omega = 0$. Таке спрощення редукованого рівняння пояснюється тим, що знаючи однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ розв'язків, можна вибрати конкретний анзац.

Регулярні оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ мають (з точністю до відношення еквівалентності, що існує на множині операторів редукції) загальний вигляд $Q = \partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$ і задовольняють умовний критерій інваріантності

$$Q_{(2)}L_f\big|_{\mathcal{L}_{(2)}\cap\mathcal{Q}_{(2)}} = 0. \qquad (4.15)$$

Тут многовид $\mathcal{Q}_{(2)}$ у просторі струменів другого порядку визначено умовою інваріантності поверхні $Q[u] := \eta - u_t - \xi u_x = 0$ та її диференціальними наслідками $\mathrm{D}_tQ[u] = 0$ та $\mathrm{D}_xQ[u] = 0$ (останні не використовуються у розрахунках, оскільки внаслідок нормування коефіцієнт τ оператора Q до одиниці вираз $Q_{(2)}L_f[u]$ не містить похідних u_{tt} та u_{tx}). Отже, рівність (4.15) має вигляд

$$\eta^t + \eta u_x + \eta^x u + (f_t + \xi f_x)u_{xx} + \eta^{xx} f\Big|_{\{u_t+uu_x+fu_{xx}=0,\ u_t+\xi u_x=\eta\}} = 0.$$

Підставивши $u_t = \eta - \xi u_x$ та $u_{xx} = (\xi u_x - uu_x - \eta)/f$ і розщепивши результат за u_x, отримуємо систему визначальних рівнянь

$$\begin{gathered}
\xi_{uu} = 0, \qquad \eta_{uu} = \frac{2}{f}\xi_u(\xi - u) + 2\xi_{xu},\\
(2\xi_u + 1)\eta + \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi\right)(\xi - u) + 2f\eta_{xu} - \xi_t - 2\xi_x\xi + u\xi_x - f\xi_{xx} = 0,\\
\eta_t + u\eta_x + f\eta_{xx} - \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi\right)\eta + 2\xi_x\eta = 0. \qquad (4.16)
\end{gathered}$$

Інтегруючи два перших рівняння, отримуємо вирази для ξ та η:

$$\xi = \xi^1(t,x)u + \xi^0(t,x),$$
$$\eta = \frac{\xi^1\left(\xi^1-1\right)}{3f}u^3 + \left(\xi^1_x + \frac{\xi^1\xi^0}{f}\right)u^2 + \eta^1(t,x)u + \eta^0(t,x),$$

де коефіцієнти ξ^1, ξ^0, η^1 та η^0 — нові невідомі функції. Підставляємо їх у всі визначальні рівняння, крім (4.16):

$$\begin{aligned}
&\xi^1(\xi^1-1)(2\xi^1+1)=0,\\
&\xi^1(2\xi^1+1)\xi^0 - \xi^1(\xi^1-1)f_x = 0,\\
&(\xi^1-1)f_t + (2\xi^1+1)(f\eta^1 + f\xi^0_x - f_x\xi^0) = 0,\\
&(2\xi^1+1)\eta^0 + \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi^0\right)\xi^0 + 2f\eta^1_x - \xi^0_t - 2\xi^0\xi^0_x - f\xi^0_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Подальше розв'язання системи визначальних рівнянь проведено в окремих пунктах цього підрозділу. Воно залежить від вибору одного з трьох можливих розв'язків першого рівняння: $\xi^1 = 1$, $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ або $\xi^1 = 0$ (решту рівнянь системи (4.17) наведено вже з врахуванням того факту, що ξ^1 — стала). Розгляд випадку $\xi^1 = 0$, в свою чергу, розділено на два підвипадки: $\xi^0_{xx} = 0$ та $\xi^0_{xx} \neq 0$. Наголосимо, що визначальне рівняння (4.16) буде переписано в термінах ξ^1, ξ^0, η^1 і η^0 та розщеплено за u для кожного значення ξ^1.

Слід зауважити, що розбиття операторів редукції рівнянь з класу (4.1) (а точніше — пар «рівняння, його оператор редукції») на сингулярні та регулярні, а також подальше розбиття регулярних операторів редукції на пераховані підвипадки, є інваріантним відносно перетворень з групи $G^{\sim}$, див., наприклад, [96, розділ 3] або [67, означення 3].

Таким чином, оператори редукції прокласифіковано з точністю до відношення еквівалентності на множині операторів редукції (домноження на ненульову функцію), а також з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності (або, що те саме, $\mathcal{G}^{\sim}$-еквівалентності внаслідок нормалізованості класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$). Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.14. *З точністю до відношення еквівалентності операторів редукції всі регулярні оператори редукції рівнянь $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ вичерпуються чотирма підмножинами:*

1) *$Q^1 = \partial_t + u\partial_x$ для кожного рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$;*
2) *оператори ліївської симетрії з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t;*
3) *$Q^\theta = \partial_t - (\theta_t/\theta_x)\partial_x$ для рівнянь $\mathcal{L}_{f^\theta}$, де $f^\theta = -1/\theta_x$, де $\theta = \theta(t,x)$ — довільний (несталий) розв'язок рівняння*
$$\theta_t = \frac{\theta_{xx}}{\theta_x} + h(\theta)\theta_x,$$
h — довільна гладка функція від θ;
4) *$Q^{\xi^0\eta^1\eta^0} = \partial_t + \bigl(-\frac12 u + \xi^0\bigr)\partial_x + \bigl(\frac14 u^3 - \frac12\xi^0 u^2 + \eta^1 u + \eta^0\bigr)\partial_u$ для класичного рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ (а завдяки перетворенням з $G^\sim$ — і для всіх рівнянь $\mathcal{L}_c$, $c = \mathrm{const}$), де*
$$\xi^0 = \frac12\frac{\begin{vmatrix}1 & u^1 & z^1\\ 1 & u^2 & z^2\\ 1 & u^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}},\quad \eta^1 = \frac14\frac{\begin{vmatrix}1 & y^1 & z^1\\ 1 & y^2 & z^2\\ 1 & y^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}},\quad \eta^0 = -\frac14\frac{\begin{vmatrix}u^1 & y^1 & z^1\\ u^2 & y^2 & z^2\\ u^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & u^1 & y^1\\ 1 & u^2 & y^2\\ 1 & u^3 & y^3\end{vmatrix}},$$
u^i — розв'язки рівняння $\mathcal{L}_1$, для яких визначник у знаменниках не дорівнює нулю, $y^i = 2u^i_x + (u^i)^2$, $z^i = 4u^i_{xx} + 6u^iu^i_x + (u^i)^3$, $i = 1,2,3$.

Два наступних пункти присвячено доведенню теореми для випадків $\xi^1 = 1$ та $\xi^1 = -\frac12$, а випадок $\xi^1 = 0$ буде розбито на два підвипадки залежно від того, чи дорівнює нулю коефіцієнт ξ^0_{xx}, кожний з яких розглянуто в окремих пунктах.

4.4.1. Тривіальний випадок $\xi^1 = 1$

Випадок $\xi^1 = 1$ описано в [23, 107]. З визначальних рівнянь маємо
$$\xi^0 = 0,\qquad \eta^1 = 0,\qquad \eta^0 = 0,$$

що доводить *пункт 1* теореми 4.14. Векторне поле $Q^1 = \partial_t + u\partial_x$ є єдиним спільним оператором редукції для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Він дозволяє отримати двопараметричну сім'ю нетривіальних Q^1-інваріантних розв'язків $u(t,x) = (x + c_1)/(t + c_2)$, де c_1 і c_2 — довільні сталі, а також сім'ю сталих розв'язків $u = \mathrm{const}$.

Всі ці розв'язки є ліївськи інваріантними (отримані за допомогою ліївських редукцій), див. підрозділ 4.3. До того ж, це єдині спільні розв'язки для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Зауваження 4.15. Найкращий спосіб побудови Q^1-інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1\colon\ L_1[u] \equiv u_t + uu_x + u_{xx} = 0$ — проінтегрувати спочатку рівняння $L_1[u] + Q^1[u] = u_{xx} = 0$, звідки отримаємо вираз $u = \alpha(t)x + \beta(t)$, де α і β — деякі гладкі функції від t. Узагальнене векторне поле $\hat{Q} = (L_1[u] + Q^1[u])\partial_u = u_{xx}\partial_u$ еквівалентне еволюційному представнику [8, с. 374] $Q^1[u]\partial_u$ оператора Q^1 на множині розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, отже це — узагальнена умовна симетрія рівняння $\mathcal{L}_1$, див. [69, твердження 4]. Тому відповідний анзац $u = \alpha(t)x + \beta(t)$ зводить рівняння $\mathcal{L}_1$ до системи з двох звичайних диференціальних рівнянь на функції α і β:

$$\alpha_t + \alpha^2 = 0, \qquad \beta_t + \alpha\beta = 0.$$

Повний набір функціонально незалежних інтегралів рівняння $Q^1[u] = 0$ складають $x - ut$ та u. Отже, безпосередньо за допомогою Q^1 будуємо неявний анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x - ut$ (відповідно $x - ut = \varphi(\omega)$, де $\omega = u$) для Q^1-інваріантних розв'язків $x - ut \neq \mathrm{const}$ (відповідно $u \neq \mathrm{const}$). Для обох анзаців пов'язані з ними редуковані рівняння мають вигляд $\varphi_{\omega\omega} = 0$.

4.4.2. «No-go» випадок $\boldsymbol{\xi^1 = -\frac{1}{2}}$

Випадок $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ можливий тільки якщо $f = \mathrm{const}$, тобто приходимо до задачі відшукання операторів редукції для класичного рівняння Бюргерса. Оскільки група еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ містить перетворення масштабування довільного елемента, $f = 1 \bmod G^{\sim}$, тому достатньо розглянути класичне рівняння Бюргерса $L_1 \equiv u_t + uu_x + u_{xx} = 0$.

У [24, 76] встановлено, що задача опису операторів редукції в цьому випадку зводиться до розв'язання системи з трьох диференціальних рівнянь на три невідомі функції ξ^0, η^0 і η^1, яка еквівалентна системі з трьох екземплярів лінійного рівняння теплопровідності (а це «no-go» задача). Такі оператори редукції мають вигляд

$$Q = \partial_t + \left(-\frac{1}{2}u + \xi^0\right)\partial_x + \left(\frac{1}{4}u^3 - \frac{\xi^0}{2}u^2 + \eta^1 u + \eta^0\right)\partial_u, \tag{4.18}$$

де коефіцієнти $\xi^0 = \xi^0(t,x)$, $\eta^1 = \eta^1(t,x)$ та $\eta^0 = \eta^0(t,x)$ — гладкі функції від t та x, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\xi^0_t + 2\xi^0\xi^0_x + \xi^0_{xx} - 2\eta^1_x = 0,\\ &\eta^1_t + 2\xi^0_x\eta^1 + \eta^1_{xx} + \eta^0_x = 0,\\ &\eta^0_t + 2\xi^0_x\eta^0 + \eta^0_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Оскільки певною диференціальною підстановкою систему (4.19) можна звести до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності [24,76], загальний розв'язок рівняння (4.19) не можна зобразити у явному вигляді. Отже, випадок $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ є «no-go» випадком.

Використовуючи техніку, розвинуту в [96], можна показати, що цей факт безпосередньо випливає з того, що Q є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}_1$. Більш того, покажемо, що розв'язки системи (4.19) можна представити через розв'язки системи з трьох незачеплених копій рівняння Бюргерса. Зауважимо, що в доведеннях, поданих у [24, 76], не використано зв'язок системи рівнянь (4.19) з операторами редукції.

Лема 4.16. *Будь-який розв'язок системи визначальних рівнянь* (4.19) *на коефіцієнти операторів редукції вигляду* (4.18) *можна записати у вигляді*

$$\xi^0 = \frac{(W(\bar v))_x}{W(\bar v)}, \qquad \eta^1 = \frac{|\bar v, \bar v_{xx}, \bar v_{xxx}|}{W(\bar v)}, \qquad \eta^0 = -2\frac{W(\bar v_x)}{W(\bar v)}, \tag{4.20}$$

де $\bar v = (v^1, v^2, v^3)$ *— трійка лінійно незалежних розв'язків рівняння теплопровідності* $v_t + v_{xx} = 0$, $|\bar p, \bar q, \bar r|$ *— визначник матриці, побудованої з вектор-стовпчиків* $\bar p$, $\bar q$ *та* $\bar r$, *а* $W(\bar v) = |\bar v, \bar v_x, \bar v_{xx}|$ *та* $W(\bar v_x) = |\bar v_x, \bar v_{xx}, \bar v_{xxx}|$ *— визначники Вронського цієї трійки розв'язків та трійки похідних цих розв'язків за* x *відповідно.*

Навпаки, будь-яка трійка функцій (ξ^0, η^1, η^0), *що допускає представлення* (4.20), *задовольняє систему* (4.19).

Доведення. Доведення леми базується на властивостях операторів редукції. Зафіксуємо деякий оператор Q вигляду (4.18). Множина Q-інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1\colon L_1[u] = 0$, що відповідають оператору Q, співпадає з множиною розв'язків системи рівнянь $L_1[u] = 0$, $Q[u] = 0$, до того ж вона параметризована двома довільними сталими, оскільки Q — регулярний оператор редукції рівняння Бюргерса [67].

Для зручності перейдемо до розгляду саме системи рівнянь $L_1[u] = 0$, $L_1[u] + Q[u] = 0$. Перетворення Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$, застосоване до цієї системи, дасть систему лінійних рівнянь

$$v_t + v_{xx} = 0, \qquad v_{xxx} - \xi^0 v_{xx} + \eta^1 v_x + \frac{1}{2}\eta^0 v = 0. \tag{4.21}$$

Нехай тепер для деякого цілого n функції $v^1, \dots, v^n$ від t та x — лінійно незалежні розв'язки системи (4.21). Тоді рівняння

$$u = 2\frac{c_1 v^1_x + \dots + c_n v^n_x}{c_1 v^1 + \dots + c_n v^n} \tag{4.22}$$

де $c_1, \dots, c_n$ — довільні сталі, одночасно не рівні нулю, визначає сім'ю Q-інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса, параметризовану n сталими, серед яких лише $n-1$ суттєвих. Отже, $n \leqslant 3$ (як кількість таких параметрів) не може перевищувати 2. Інакше кажучи, розмірність простору V розв'язків системи (4.21) не перевищує 3. Ця розмірність не може також бути менше, ніж 3. Справді, розглянемо тепер деякі функції $v^1 \dots v^n$ від t та x, що утворюють базис простору V, де $n = \dim V$. Тоді вираз (4.22) є загальним розв'язком системи рівнянь $L_1[u] = 0$ та $Q[u] = 0$, і цей загальний розв'язок містить $n-1$ суттєвих сталих параметрів. Таким чином, $n-1=2$, тобто $n=3$.

Розглянемо базис $\{v^1, v^2, v^3\}$ простору V. За означенням елементи V — це розв'язки рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, яке є лінійним і еволюційним. Отже, із звичайної лінійної незалежності цих розв'язків випливає їхня лінійна незалежність над кільцем гладких функцій від t, тобто визначник Вронського $W(\bar v)$ функцій v^1, v^2 та v^3 за x не дорівнює нулю — див., наприклад, [96, зауваження 5]. Підставляючи елементи базису у друге рівняння (4.21), отримаємо добре (коректно) визначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$v^i_{xxx} - \xi^0 v^i_{xx} + \eta^1 v^i_x + \tfrac{1}{2}\eta^0 v^i = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

на коефіцієнти ξ^0, η^1, η^0, або, що те саме, але у матричній формі:

$$M\bar q = \bar v_{xxx}, \qquad \text{де}$$
$$\bar v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} v^1 & v^1_x & v^1_{xx} \\ v^2 & v^2_x & v^2_{xx} \\ v^3 & v^3_x & v^3_{xx} \end{pmatrix}, \qquad \bar q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\eta^0 \\ -\eta^1 \\ \xi^0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши цю систему відносно ξ^0, η^1 та η^0, отримаємо вирази (4.20).

Оскільки всі міркування можна провести у зворотному порядку, обернене твердження також має місце. □

Наслідок 4.17. *Коефіцієнти оператора редукції* (4.18) *рівняння Бюргерса можна записати у вигляді*

$$\xi^0 = \frac{1}{2}\frac{|\bar e, \bar u, \bar z|}{|\bar e, \bar u, \bar y|}, \qquad \eta^1 = \frac{1}{4}\frac{|\bar e, \bar y, \bar z|}{|\bar e, \bar u, \bar y|}, \qquad \eta^0 = -\frac{1}{4}\frac{|\bar u, \bar y, \bar z|}{|\bar e, \bar u, \bar y|}, \tag{4.23}$$

де вектор-стовпчики $\bar e$, $\bar y$ та $\bar z$ складаються з трьох одиниць, виразів $y^i = 2u^i_x + (u^i)^2$ та $z^i = 4u^i_{xx} + 6u^i u^i_x + (u^i)^3$ відповідно ($i = 1, 2, 3$), а $\bar u$ є вектором з трьох розв'язків рівняння Бюргерса, причому $|\bar e, \bar u, \bar y| \neq 0$.

Доведення. Зв'язок між розв'язками рівняння теплопровідності та рівняння Бюргерса за допомогою перетворення Коула–Хопфа $2v^i_x/v^i = u^i$ дає рівності

$$\frac{v^i_{xx}}{v^i} = \frac{1}{2}u^i_x + \frac{1}{4}(u^i)^2, \quad \frac{v^i_{xxx}}{v^i} = \frac{3}{4}u^iu^i_x + \frac{1}{8}(u^i)^3 + \frac{1}{2}u^i_{xx}, \quad i = 1, 2, 3,$$

підстановка яких у (4.20) доводить наслідок. Зауважимо, що визначник $|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}| \neq 0$, так само як і визначник Вронського $W(\bar{v})$. □

Наслідок 4.18. *Представлення* (4.20) *та* (4.22)*, де* $n = 3$*, явним чином встановлюють взаємно однозначну відповідність між операторами редукції вигляду* (4.18) *та сім'ями розв'язків рівняння Бюргерса, що є інваріантними за цими операторами.*

Побудова явного вигляду анзацу для u шляхом безпосереднього інтегрування умови інваріантності поверхні, що відповідає оператору вигляду (4.18), у випадку довільного розв'язку системи (4.19), виглядає досить складною задачею. Навіть для простого розв'язку системи (4.19), проведення відповідної редукції рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ є нетривіальним. Тут доречно згадати роботи [23, 107], де проведено деякі такі редукції.

Дещо кращий спосіб використання оператора вигляду (4.18) для редукції рівняння Бюргерса — це розглянути замість Q узагальнене векторне поле

$$\hat{Q} = (L_1[u] + Q[u])\partial_u,$$

яке еквівалентне еволюційному представнику $Q[u]\partial_u$ оператора Q і є узагальненою умовною симетрією рівняння $\mathcal{L}_1$, див. [69, твердження 4]. Насправді редукція рівняння $\mathcal{L}_1$ за узагальненим векторним полем $\hat{Q}$ у певному сенсі представлена в доведенні леми 4.16, а наслідок 4.18 вичерпно описує сім'ю Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$.

Разом з тим, використавши представлення (4.22) для Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, де $n = 3$, можна побудувати анзац для u, що відповідає оператору Q, і провести редукцію рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ за допомогою цього анзацу. Поклавши $c_1 = 1$ та $c_2 = 0$ (відповідно $c_1 = 0$ та $c_2 = 1$) і вважаючи c_3 довільною сталою, ми отримаємо два інтеграли рівняння $Q[u] = 0$:

$$\zeta = \frac{v^1 u - 2v^1_x}{v^3 u - 2v^3_x}, \qquad \omega = \frac{v^2 u - 2v^2_x}{v^3 u - 2v^3_x}.$$

Вони коректно визначені для $u \neq 2v^3_x/v^3$ (завжди можна вважати, що ця умова виконана для конкретного розв'язку u з точністю до перейменування функцій v^1, v^2 та v^3). Таким чином, загальний розв'язок рівняння $Q[u] = 0$ можна представити неявним чином у вигляді $F(\zeta, \omega) = 0$, де F є довільною несталою функцією своїх аргументів. З точністю до перейменування ζ і ω похідну F_ζ можна вважати ненульовою. Отже, з рівності $F(\zeta, \omega) = 0$ випливає неявний анзац $\zeta = \varphi(\omega)$ для невідомої функції $u = u(t, x)$, де ζ та ω — нові залежна та незалежна змінні відповідно. Стандартний спосіб виведення відповідного редукованого рівняння шляхом обчислення виразів для похідних u_t, u_x та u_{xx}, що можуть бути отримані з анзацу, і наступною їх підстановкою у рівняння $\mathcal{L}_1$, є занадто громіздким. Замість цього подіємо на анзац $\zeta = \varphi(\omega)$ оператором $\mathrm{D}_t + \mathrm{D}_{xx}$ і після цього зробимо підстановку $u_t + u_{xx} = -uu_x$ та $v^i_t + v^i_{xx} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). В результаті отримуємо рівняння $\varphi_{\omega\omega}\,\mathrm{D}_x\omega = 0$.

Для розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, які неявно задані виразом $\zeta = \varphi(\omega)$ для деяких гладких функцій φ від ω, диференціальна функція $\mathrm{D}_x\omega$ ненульова. Справді, припустимо, що $\mathrm{D}_x\omega = 0$ (тобто $\omega = \omega^0(t)$) для деякого розв'язку $u = u^0(t, x)$. Тоді $u^0 = 2(v^2_x - \omega^0 v^3_x)/(v^2 - \omega^0 v^3)$, звідки випливає, що для деякої ненульової гладкої функції χ від t вираз $(v^2 + \omega^0 v^3)\chi$ дасть розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$. Оскільки функції v^2 та v^3 — лінійно незалежні розв'язки одного і того ж рівняння, це можливо тільки тоді, коли ω^0 є сталою. Таким чином, підстановка $u = u^0(t, x)$ у ζ дає стале значення $\zeta^0 = \varphi(\omega^0)$, а отже $u^0 = 2(v^1_x - \zeta^0 v^3_x)/(v^1 - \zeta^0 v^3)$. Порівнюючи два вирази для розв'язку $u = u^0(t, x)$, робимо висновок, що функції v^1, v^2 та v^3 лінійно залежні, цим самим приходимо до суперечності.

Оскільки $\mathrm{D}_x\omega \neq 0$, редуковане рівняння набуває вигляду $\varphi_{\omega\omega} = 0$. Його загальний розв'язок $\varphi = \tilde{c}_1\omega + \tilde{c}_2$, що повністю узгоджується з представленням (4.22) і анзацу $\zeta = \varphi(\omega)$.

Це редуковане рівняння отримано для довільного оператора Q вигляду (4.18), і воно простіше, ніж ті окремі випадки редукованих рівнянь, що виведені в [23, 107]. Цей факт пояснюється тим, що анзац $\zeta = \varphi(\omega)$, побудова якого базується на представленні (4.22) для Q-інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$, краще узгоджується зі структурою цього рівняння, ніж часткові випадки анзаців, які наведено в [23, 107].

4.4.3. Випадок $\boldsymbol{\xi^1 = 0}$, $\boldsymbol{\xi^0_{xx} = 0}$, що пов'язаний з ліївськими симетріями

Підставивши $\xi^1 = 0$ у систему рівнянь (4.16)–(4.17), де $\xi = \xi^0(t,x)$ та $\eta = \eta^1(t,x)u + \eta^0(t,x)$, і розщепивши (4.16) за u, отримуємо визначальні рівняння $\eta^1_x = 0$, звідки $\eta^1 = \eta^1(t)$, а також

$$\eta^0_x + \eta^1\xi^0_x = (\eta^1)^2 - \eta^1_t, \tag{4.24}$$

$$f_t + f_x\xi^0 - f(\eta^1 + \xi^0_x) = 0, \tag{4.25}$$

$$\xi^0_t + \xi^0\xi^0_x + f\xi^0_{xx} = \eta^0 + \eta^1\xi^0, \tag{4.26}$$

$$\eta^0_t + \eta^0\xi^0_x + f\eta^0_{xx} = \eta^1\eta^0. \tag{4.27}$$

Доведемо, що всі оператори редукції з нульовими значеннями ξ^1 та ξ^0_{xx} еквівалентні операторам ліївської симетрії. За умови $\xi^0_{xx} = 0$ з рівняння (4.24) отримуємо $\eta^0_{xx} = 0$. Отже,

$$\xi(t,x) = \xi^0(t,x) = \xi^{01}(t)x + \xi^{00}(t),$$
$$\eta(t,x) = \eta^1(t)u + \eta^{01}(t)x + \eta^{00}(t).$$

Тоді в термінах невідомих функцій ξ^{01}, ξ^{00}, η^1, η^{01} та η^{00} визначальні рівняння набувають вигляду

$$\xi^{01}_t = (\eta^1 - \xi^{01})\xi^{01} + \eta^{01}, \tag{4.28}$$

$$\xi^{00}_t = (\eta^1 - \xi^{01})\xi^{00} + \eta^{00}, \tag{4.29}$$

$$\eta^1_t \ = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^1 - \eta^{01}, \tag{4.30}$$

$$\eta^{01}_t = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^{01}, \tag{4.31}$$

$$\eta^{00}_t = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^{00}, \tag{4.32}$$

$$\eta^1 = \frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\left(\xi^{01}x + \xi^{00}\right) - \xi^{01}. \tag{4.33}$$

Для розв'язання цієї системи визначальних рівнянь використаємо підстановку $\xi^{01} = \varphi_t/\varphi$ та $\eta^1 = -\psi_t/\psi$, де φ та ψ є гладкими функціями від t, причому $\varphi\psi \neq 0$. Зокрема, з (4.31) маємо рівняння

$$\frac{\eta^{01}_t}{\eta^{01}} + \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{\psi_t}{\psi} = 0,$$

яке можна проінтегрувати за умови $\eta^{01}\varphi\psi = a_0 = \mathrm{const}$, що дає

$$\eta^{01} = \frac{a_0}{\varphi\psi}. \tag{4.34}$$

Підставивши вираз (4.34) для η^{01} у модифіковані рівняння (4.28) та (4.30), отримуємо $\varphi_{tt}\psi + \varphi_t\psi_t = a_0$ та $\varphi\psi_{tt} + \varphi_t\psi_t = a_0$, або, після інтегрування,

$$\varphi_t\psi = a_0t + a_1, \qquad \varphi\psi_t = a_0t + a_2, \tag{4.35}$$

відповідно. Інтегруючи суму рівнянь (4.35), маємо

$$\varphi\psi = a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3, \tag{4.36}$$

де a_1, a_2 та a_3 — довільні сталі, причому $(a_0, a_1{+}a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ оскільки $\varphi\psi \neq 0$. Тоді з рівняння (4.34) маємо

$$\eta^{01} = \frac{a_0}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}.$$

Поділивши кожне з рівнянь (4.35) на (4.36), отримуємо

$$\xi^{01} = \frac{\varphi_t}{\varphi} = \frac{a_0t + a_1}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3},$$

$$\eta^1 = -\frac{\psi_t}{\psi} = -\frac{a_0t + a_2}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}.$$

Послідовно інтегруючи ще не використані рівняння (4.32) та (4.29), маємо

$$\eta^{00} = \frac{a_4}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}, \qquad \xi^{00} = \frac{a_4t + a_5}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3},$$

де a_4 та a_5 — також сталі інтегрування.

З огляду на отримані вирази для ξ та η, маємо сім'ю векторних полів

$$Q^a = \partial_t + \frac{(a_0t + a_1)x + a_4t + a_5}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}\partial_x + \frac{-(a_0t + a_2)u + a_0x + a_4}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}\partial_u,$$

де $a = (a_0 \dots a_5)$ — вектор з довільних сталих, визначених з точністю до спільного ненульового множника, і $(a_0, a_1 + a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Кожен з операторів редукції Q^a еквівалентний (з точністю до множення на ненульову функцію) оператору ліївської симетрії

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^a = \big(a_0t^2 + (a_1{+}a_2)t + a_3\big)\partial_t + \big((a_0t{+}a_1)x + a_4t + a_5\big)\partial_x + \\ +\big(-(a_0t{+}a_2)u + a_0x + a_4\big)\partial_u.\end{aligned}$$

Щоб Q^a був оператором редукції рівняння $\mathcal{L}_f$ з певним f, його коефіцієнти повинні додатково задовольняти рівняння (4.33). Це рівносильно тому факту, що коефіцієнти $\tilde{Q}^a$ задовольняють класифікуючу умову (4.5) з цим самим f. Інакше кажучи, векторне поле Q^a є оператором редукції деякого рівняння $\mathcal{L}_f$ тоді і тільки тоді, якщо еквівалентне векторне поле $\tilde{Q}^a$ — генератор ліївської симетрії цього ж рівняння, що дає *пункт 2* теореми 4.14. Ліївські редукції та ліївські розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ розглянуто у підрозділі 4.3.

4.4.4. Випадок $\boldsymbol{\xi^1 = 0,\ \xi^0_{xx} \neq 0}$

Для цього підвипадку справедлива система визначальних рівнянь (4.24)–(4.27) та $\eta^1_x = 0$, звідки $\eta^1 = \eta^1(t)$, а також наступна лема.

Лема 4.19. *При* $\xi^1 = 0$, $\xi^0_{xx} \neq 0$ *з точністю до* $G^{\sim}$*-еквівалентності коефіцієнт* η *дорівнює нулю.*

Доведення. Для зручності введемо позначення $\alpha := (\eta^1)^2 - \eta^1_t$. Рівняння (4.24) проінтегруємо за x:

$$\eta^0 + \eta^1\xi^0 = \alpha x + \beta, \tag{4.37}$$

де $\beta = \beta(t)$ — довільна функція. Виразивши змінну η^0 з рівняння (4.37), виключаємо її разом з її похідними з визначальних рівнянь. Після спрощень рівняння (4.26) та (4.27) набувають вигляду

$$\xi^0_t + \xi^0\xi^0_x + f\xi^0_{xx} = \alpha x + \beta, \tag{4.38}$$

$$\big((\alpha x + \beta)\xi^0\big)_x = 2\eta^1(\alpha x + \beta) - (\alpha_t x + \beta_t). \tag{4.39}$$

Доведемо, що для будь-якого розв'язку системи рівнянь (4.24)–(4.27) з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності $\alpha = 0$ та $\beta = 0$. Справді, припустимо, що $\alpha \neq 0$. Інтегруючи (4.39) за x, отримуємо

$$\xi^0 = \frac{\left(\alpha\eta^1 - \frac{1}{2}\alpha_t\right)x^2 + (2\eta^1\beta - \beta_t)x + \delta}{\alpha x + \beta} = \gamma^1 x + \gamma^0 + \frac{\mu}{\alpha x + \beta},$$

де δ — довільна функція від t що виникає в процесі інтегрування,

$$\gamma^1 = \eta^1 - \frac{\alpha_t}{2\alpha}, \quad \gamma^0 = \frac{\eta^1\beta - \beta_t}{\alpha} + \frac{\alpha_t\beta}{2\alpha^2},$$
$$\mu = \delta + \frac{\beta}{\alpha}(\beta_t - \eta^1\beta) - \frac{\alpha_t\beta^2}{2\alpha^2}.$$

Тоді з рівняння (4.38) маємо вираз для f:

$$f = \frac{1}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^4 - \frac{\gamma^1(\gamma^1 x + \gamma^0) + \gamma^1_t x + \gamma^0_t}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^3 -$$
$$- \frac{\mu_t + \mu\gamma^1}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^2 + \frac{\alpha_t x + \beta_t + (\gamma^1 x + \gamma^0)\alpha}{2\alpha^2}(\alpha x + \beta) + \frac{\mu}{2\alpha},$$

який є многочленом від $(\alpha x + \beta)$ з коефіцієнтом $\mu/(2\alpha)$ при нульовому степені.

Підставивши ξ^0 та f у рівняння (4.25), отримаємо деякий многочлен вже від $(\alpha x + \beta)$ та $(\alpha x + \beta)^{-1}$ з коефіцієнтами, також залежними від t, який тотожно дорівнює нулю. Це означає, що всі коефіцієнти цього многочлена дорівнюють нулю, зокрема коефіцієнт $\mu^2/2$ при $(\alpha x+\beta)^{-2}$. Отже, $\mu = 0$ і $\xi^0 = \gamma^1 x + \gamma^0$, а це суперечить припущенню $\xi^0_{xx} \neq 0$.

Використовуючи щойно доведений факт, що $\alpha = 0$, диференціюємо рівняння (4.39) за x і отримуємо $\beta\xi^0_{xx} = 0$. Отже, $\beta = 0$ з огляду на припущення $\xi^0_{xx} \neq 0$.

З огляду на означення α та рівняння (4.37) з умови $\alpha = \beta = 0$ випливає, що $\eta^1_t = (\eta^1)^2$, $\eta^0 = -\eta^1\xi^0$. Розв'язками рівняння $\eta^1_t = (\eta^1)^2$ є $\eta^1 = 0$ та $\eta^1 = -(t+c)^{-1}$, де c — стала інтегрування. Друге значення η^1 можна зробити нульовим, використавши перетворення еквівалентності $\tilde{t} = -(t+c)^{-1}$, $\tilde{x} = x(t+c)^{-1}$, $\tilde{u} = (t+c)u - x$, $\tilde{f} = f$. □

За умови $\eta = 0$ система визначальних рівнянь (4.24)–(4.27) зводиться до добре визначеної системи

$$f_t + \xi f_x - \xi_x f = 0, \tag{4.40}$$

$$\xi_t + \xi\xi_x + f\xi_{xx} = 0 \tag{4.41}$$

на функції $f(t,x)$ і $\xi(t,x)$. Крім того, ця система записана у формі Ковалевської, отже вона не має нетривіальних диференціальних наслідків. Її загальний розв'язок знайти неможливо, тому не вдасться і вичерпно описати оператори редукції класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, для яких $\xi_u = 0$. Але можна знайти деякі часткові розв'язки цієї системи, які дадуть змогу отримати нові точні розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з відповідними значеннями довільного елемента f.

4.4.5. Точні розв'язки, отримані через зв'язок з потенціальним рівнянням швидкої дифузії

Запишемо рівняння (4.40) у збережній формі: $(1/f)_t + (\xi/f)_x = 0$. Введемо потенціал $\theta = \theta(t,x)$, визначений умовами $\theta_t = \xi/f$ і $\theta_x = -1/f$, звідки

$$f = -\frac{1}{\theta_x}, \qquad \xi = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \tag{4.42}$$

Використовуючи ці вирази, рівняння (4.41) можна записати у вигляді

$$(\theta_x\partial_t - \theta_t\partial_x)\left(\frac{\theta_t}{\theta_x} - \frac{\theta_{xx}}{(\theta_x)^2}\right) = 0. \tag{4.43}$$

Проінтегрувавши його і домноживши результат на θ_x, дістанемо

$$\theta_t = \frac{\theta_{xx}}{\theta_x} + h(\theta)\theta_x, \tag{4.44}$$

де h — довільна гладка функція. Для кожного розв'язку θ рівняння (4.44) існує оператор редукції $Q^\theta = \partial_t - (\theta_t/\theta_x)\partial_x$, для узагальнених рівнянь Бюргерса рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$.

Анзац $u = \varphi(\omega)$, $\omega = \theta(t,x)$, побудований за оператором редукції Q^θ, редукує рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$ до звичайного диференціального рівняння $\varphi_{\omega\omega} - \varphi\varphi_\omega - h(\omega)\varphi_\omega = 0$, яке вдається проінтегрувати у частковому випадку $h = \mu = \mathrm{const}$. Маємо рівняння Ріккаті $\varphi_\omega = \frac{1}{2}\varphi^2 + \mu\varphi + 2\nu$, де ν — стала інтегрування.

Але насправді $\mu = 0 \bmod G^\sim$. Перетворення $\tilde t = t$, $\tilde x = x + \mu t$, $\tilde u = u + \mu$, $\tilde f = f$ з групи еквівалентності $G^\sim$ відображає рівняння (4.44) з $h = \mu = \mathrm{const}$ у потенціальне рівняння швидкої дифузії

$$\theta_{\tilde t} = \frac{\theta_{\tilde x\tilde x}}{\theta_{\tilde x}}, \tag{4.45}$$

а відповідне рівняння Ріккаті набуває вигляду $\varphi_\omega = \frac{1}{2}\varphi^2 + 2\nu$ та інтегрується з використанням підстановки $\varphi = -2\psi_\omega/\psi$. Результат інтегрування залежить від знаку ν. Знаючи низку точних розв'язків $\theta(t,x)$ рівняння (4.45) [106], використаємо їх для обчислення відповідних значень довільного елемента f і коефіцієнта ξ оператора редукції Q^θ (таблиця 4.3). Таким чином, для кожної функції f з таблиці узагальнене рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_f\colon u_t + uu_x + f(t,x)u_{xx} = 0$ має розв'язки

$$u(t,x) = \begin{cases} 2k\dfrac{c_1\sin k\theta - c_2\cos k\theta}{c_1\cos k\theta + c_2\sin k\theta}, & \nu > 0, \\ -\dfrac{2c_2}{c_1 + c_2\theta}, & \nu = 0, \\ -2\varkappa\dfrac{c_1e^{\varkappa\theta} - c_2e^{-\varkappa\theta}}{c_1e^{\varkappa\theta} + c_2e^{-\varkappa\theta}}, & \nu < 0. \end{cases} \tag{4.46}$$

Тут $k = \sqrt{\nu}$, $\varkappa = \sqrt{-\nu}$; для довільних сталих c_1, c_2 суттєве лише їх відношення.

Таблиця 4.3. Значення f, ξ і θ, пов'язані формулами (4.42)

№	$f(t,x)$	$\xi(t,x)$	$\theta(t,x)$
1	$1+e^{-t-x}$	e^{t+x}	$-\ln(e^t+e^{-x})$
2	-1	0	x
3	$1-e^{-t-x}$	$-e^{t+x}$	$-\ln\lvert e^t-e^{-x}\rvert$
4	$-e^{-x}$	$-e^{-x}$	e^x+t
5	$t-x-\lambda te^{-x/t}$	$1-\lambda e^{-x/t}$	$\ln\lvert t\rvert+\int\dfrac{dw}{w-1+\lambda e^{-w}}\Big\rvert_{w=x/t}$, $\lambda=\mathrm{const}$
6	$-\dfrac{t^2-x^2}{2t}$	$\dfrac{x}{t}$	$\ln\left\lvert\dfrac{x-t}{x+t}\right\rvert$
7	$-\dfrac{x^2}{2t}$	$\dfrac{x}{t}$	$-\dfrac{2t}{x}$
8	$-\dfrac{t^2+x^2}{2t}$	$\dfrac{x}{t}$	$2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{t}$
9	$-\dfrac{\cos^2 x}{2t}$	$-\dfrac{\sin 2x}{2t}$	$2t\,\mathrm{tg}\,x$
10	$\dfrac{\cosh^2 x}{2t}$	$-\dfrac{\sinh 2x}{2t}$	$-2t\,\mathrm{th}\,x$
11	$-\dfrac{\sinh^2 x}{2t}$	$\dfrac{\sinh 2x}{2t}$	$-2t\,\mathrm{cth}\,x$
12	$\dfrac{\cos 2x-\cos 2t}{2\sin 2t}$	$\dfrac{\sin 2x}{\sin 2t}$	$\ln\left\lvert\dfrac{\sin(x-t)}{\sin(x+t)}\right\rvert$
13	$\dfrac{\cosh 2t-\cosh 2x}{2\sinh 2t}$	$\dfrac{\sinh 2x}{\sinh 2t}$	$\ln\left\lvert\dfrac{\sinh(x-t)}{\sinh(x+t)}\right\rvert$
14	$\dfrac{\sinh 2t-\sinh 2x}{2\cosh 2t}$	$\dfrac{\cosh 2x}{\cosh 2t}$	$\ln\left\lvert\dfrac{\sinh(x-t)}{\cosh(x+t)}\right\rvert$
15	$\dfrac{\cosh 2t+\cosh 2x}{2\sinh 2t}$	$-\dfrac{\sinh 2x}{\sinh 2t}$	$\ln\left\lvert\dfrac{\cosh(x-t)}{\cosh(x+t)}\right\rvert$
16	$\dfrac{\cos 2t-\cosh 2x}{2\sin 2t}$	$\dfrac{\sinh 2x}{\sin 2t}$	$2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\,t\,\mathrm{th}\,x)$
17	$\dfrac{\cosh 2t-\cos 2x}{2\sinh 2t}$	$\dfrac{\sin 2x}{\sinh 2t}$	$2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{cth}\,t\,\mathrm{tg}\,x)$

Зауваження 4.20. З огляду на рівняння (4.41) функція $\xi=-\theta_t/\theta_x$ є також розв'язком узагальненого рівняння Бюргерса $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з відповідним f. Більш того, сім'ї розв'язків, побудовані таким чином, можна розширити до розв'язків інших рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ перетвореннями з групи еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу.

4.5. Закони збереження і потенціальні допустимі перетворення

Оскільки рівняння $\mathcal{L}_f$ є квазілінійним еволюційним рівнянням другого порядку, шукаємо характеристики його (локальних) законів збереження у вигляді $\lambda = \lambda(t, x, u)$ (див. [103, наслідок 2]).

З того, що характеристика λ закону збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ є його косиметрією, випливає рівність

$$-\,\mathrm{D}_t\lambda + \mathrm{D}_x^2(f\lambda) + u_x\lambda - \mathrm{D}_x(u\lambda) = 0,$$

що виконується для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$. Підставивши у цю рівність $u_t = -uu_x - fu_{xx}$ і розщепивши результат за u_{xx}, дістанемо визначальні рівняння $\lambda_u = 0$ та $-\lambda_t + (f\lambda)_{xx} - u\lambda_x = 0$. Подальше розщеплення за u дасть $\lambda_x = 0$ та $f_{xx}\lambda = \lambda_t$. Отже, $f_{xxx}\lambda = 0$.

Це означає, що рівняння $\mathcal{L}_f$ має нетривіальні закони збереження тоді і тільки тоді, коли $f_{xxx} = 0$, тобто

$$f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t), \tag{4.47}$$

де коефіцієнти f^2, f^1 та f^0 є гладкими функціями від t, що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді

$$\lambda = \lambda(t) = e^{\int f_{xx}\,\mathrm{d}t}$$

є єдиною лінійно незалежною характеристикою рівняння $\mathcal{L}_f$. Тут і далі інтеграл за t означає деяку фіксовану первісну. Інакше кажучи, простір законів збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ одновимірний. Домноживши рівняння $\mathcal{L}_f$ на λ, запишемо його у збережній формі:

$$\mathrm{D}_t\,(\lambda u) + \lambda\,\mathrm{D}_x\left(\frac{1}{2}u^2 + fu_x - f_xu\right) = 0.$$

Використовуючи цю форму рівняння $\mathcal{L}_f$, введемо потенціал $v = v(t, x)$ рівняння $\mathcal{L}_f$, визначений рівностями

$$\mathcal{R}_{f,\lambda}\colon\quad v_x = \lambda u, \qquad v_t = -\lambda\left(\frac{1}{2}u^2 + fu_x - f_xu\right).$$

Система $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ називається *системою для потенціалів* рівняння $\mathcal{L}_f$. Виключивши з неї залежну змінну u, отримуємо *рівняння для потенціалу*, що відповідає рівнянню $\mathcal{L}_f$:

$$\mathcal{P}_{f,\lambda}\colon\quad v_t+\frac{1}{2\lambda}v_x^2+fv_{xx}-f_xv_x=0.$$

Зауваження 4.21. Існує ізоморфізм між просторами законів збереження рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ та системи рівнянь $\mathcal{R}_{f,\lambda}$.

Опишемо тепер *потенціальні закони збереження* рівняння $\mathcal{L}_f$, які є локальними законами збереження відповідної системи $\mathcal{R}_{f,\lambda}$, або, що те саме, рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$. Нехай μ — найпростіша характеристика локального закону збереження для рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$. Тоді $\mu=\mu(t,x,v)$. Записуємо визначальне рівняння

$$-\,\mathrm{D}_t\mu+\,\mathrm{D}_x^2(f\mu)-\,\mathrm{D}_x\left(\left(\frac{1}{\lambda}v_x-f_x\right)\mu\right)=0,$$

що виконується для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$, і розв'язуємо його відносно μ, що дає лише нульові розв'язки. В результаті отримуємо, що рівняння $\mathcal{L}_f$, де $f\neq\mathrm{const}$, не має ненульових потенціальних законів збереження, отже, $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ — єдина канонічна система для потенціалів для $\mathcal{L}_f$. Класичне рівняння Бюргерса (з $f=\mathrm{const}$) має потенціальні закони збереження, які є локальними законами збереження відповідного рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з редукованими характеристиками вигляду $\mu=\psi(t,x)e^{\frac{v}{2f}}$, де $\psi(t,x)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\psi_t=f\psi_{xx}$. Оскільки рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з $f=\mathrm{const}$ подібне до лінійного рівняння теплопровідності, класичне рівняння Бюргерса не допускає потенціальних законів збереження вищого порядку [102, теорема 5].

Отже, підклас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S},\,f_{xxx}=0}$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ з квадратичною за x функцією f можна природним чином розбити на підкласи:

$$\mathcal{L}^1=\{\mathcal{L}_f\mid f=\mathrm{const}\}\quad\text{та}\quad\mathcal{L}^2=\{\mathcal{L}_f\mid f_{xxx}=0,\ f\neq\mathrm{const}\}.$$

Обидва ці підкласи замкнені відносно групи еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, а отже, з огляду на [101, твердження 4], є нормалізованими, як і клас $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$.

Оскільки неможливо вибрати канонічного представника з (одновимірного) простору характеристик законів збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ з підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S},\, f_{xxx}=0}$, при розгляді класу систем для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ та класу рівнянь для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ необхідно розширити довільний елемент класу, включивши в нього параметр-функцію λ. Відповідно, множину $\breve{\mathcal{S}}$, яку пробігає розширений довільний елемент (f,λ), задано допоміжною системою

$$\breve{\mathcal{S}}\colon\quad f_{xxx}=0,\quad \lambda_t=f_{xx}\lambda,\quad f\lambda\neq 0.$$

Системи для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f,\lambda^2}$ (або рівняння для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f,\lambda^2}$) з лінійно залежними λ^1 і λ^2, які асоційовані з лінійно залежними законами збереження рівняння $\mathcal{L}_f$, вважаємо калібрувально еквівалентними в сенсі потенціальних систем (потенціальних рівнянь). Позначимо клас систем для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ та клас рівнянь для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ відповідно через $\breve{\mathcal{R}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$ та $\breve{\mathcal{P}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$.

Допустимі перетворення та групоїд еквівалентності класу $\breve{\mathcal{R}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$ можна назвати *потенціальними допустимими перетвореннями* і *потенціальним групоїдом еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S},\, f_{xxx}=0}$ відповідно.

Лема 4.22. *Групоїди еквівалентності класів $\breve{\mathcal{R}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$ та $\breve{\mathcal{P}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$ ізоморфні.*

Доведення. Зафіксуємо будь-які два значення (f^1,λ^1) та (f^2,λ^2) довільного елемента (f,λ) з множини $\breve{\mathcal{S}}$. Кожне точкове перетворення між рівняннями $\mathcal{P}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2,\lambda^2}$ продовжується на u згідно рівності $u=v_x/\lambda$, що дає точкове перетворення між системами $\mathcal{R}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f^2,\lambda^2}$. Навпаки, нехай φ — точкове перетворення між системами $\mathcal{R}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f^2,\lambda^2}$:

$$\varphi\colon\ \tilde t=T(t,x,u,v),\ \tilde x=X(t,x,u,v),\ \tilde u=U(t,x,u,v),\ \tilde v=V(t,x,u,v).$$

Підставивши $u=v_x/\lambda$ у T, X та V і відкидаючи компонент перетворення φ для u, отримуємо контактне перетворення між $\mathcal{P}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2,\lambda^2}$, яке індуковане точковим перетворенням, оскільки обидва рівняння $\mathcal{P}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2,\lambda^2}$ є еволюційними рівняннями другого порядку, лінійними за похідною u_{xx} [103, твердження 2]. □

З огляду на лему 4.22 можна працювати з класом $\breve{\mathcal{P}}\big|_{\breve{\mathcal{S}}}$ замість класу $\breve{\mathcal{R}}\big|_{\breve{\mathcal{S}}}$, вивчаючи потенціальні допустимі перетворення класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S},\,f_{xxx}=0}$.

Наслідок 4.23. *Для кожного значення довільного елемента* (f,λ) *з множини* $\breve{\mathcal{S}}$ *існує ізоморфізм між максимальними алгебрами ліївської інваріантності рівняння* $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ *та системи* $\mathcal{R}_{f,\lambda}$.

Цей ізоморфізм встановлюється проектуванням алгебри ліївської інваріантності системи $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ на простір змінних (t,x,v) (щоб отримати алгебру ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$) і продовженням, яке відповідає рівності $u=v_x/\lambda$ (навпаки).

Для того, щоб знайти групоїд еквівалентності класу $\breve{\mathcal{P}}\big|_{\breve{\mathcal{S}}}$, зручно репараметризувати цей клас, вважаючи коефіцієнти f^2, f^1 та f^0 параметр-функції f у (4.47) компонентами довільного елемента замість f. Використовуватимемо обидві параметризації.

Згадане вище розбиття класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S},\,f_{xxx}=0}$ на підкласи $\mathcal{L}^1$ та $\mathcal{L}^2$ пов'язане з розбиттям класу $\breve{\mathcal{P}}\big|_{\breve{\mathcal{S}}}$ на підкласи

$$\hat{\mathcal{P}}^1=\{\mathcal{P}_{f,\lambda}\mid f=\mathrm{const}\}\quad\text{та}\quad\hat{\mathcal{P}}^2=\{\mathcal{P}_{f,\lambda}\mid f\neq\mathrm{const}\}$$

відповідно, але їхні трансформаційні властивості суттєво відрізняються.

Твердження 4.24. *Підклас* $\hat{\mathcal{P}}^2$ *нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його розширена узагальнена група еквівалентності складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\qquad \tilde x=\frac{\kappa x+\mu_1 t+\mu_0}{\gamma t+\delta},\\&\tilde v=c_0\left(v-\frac{\gamma\lambda(t)}{2(\gamma t+\delta)}x^2+\frac{(\delta\mu_1-\gamma\mu_0)\lambda(t)}{\kappa(\gamma t+\delta)}x+V^0(t)\right),\end{aligned}\tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}&\tilde f^2=\frac{(\gamma t+\delta)^2}{\Delta}f^2,\qquad \tilde f^1=\frac{(\gamma t+\delta)}{\Delta}\big(\kappa f^1-2(\mu_1 t+\mu_0)f^2\big),\\&\tilde f^0=\frac{1}{\Delta}\big((\mu_1 t+\mu_0)^2f^2-\kappa(\mu_1 t+\mu_0)f^1+\kappa^2f^0\big),\end{aligned}\tag{4.49}$$

$$\textit{тобто}\qquad \tilde f=\frac{\kappa^2}{\Delta}f,\qquad \tilde\lambda=c_0\frac{\Delta}{\kappa^2}\lambda,\tag{4.50}$$

де $V^0 = \int \left(\frac{(\delta\mu_1 - \gamma\mu_0)^2}{2\kappa^2(\gamma t + \delta)^2} + \frac{\delta\mu_1 - \gamma\mu_0}{\kappa(\gamma t + \delta)} f^1(t) + \frac{\gamma}{\gamma t + \delta} f^0(t) \right) \lambda(t)\,\mathrm{d}t + \sigma,$

α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 та κ — довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника, причому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та $\kappa \neq 0$, а σ і c_0 — повністю довільні сталі.

Доведення. Кожне рівняння для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ можна відобразити точковим перетворенням

$$\psi_{f,\lambda}\colon \quad \check t = \frac{1}{2}\int \lambda\,\mathrm{d}t, \qquad \check x = \lambda x + \int f^1 \lambda\,\mathrm{d}t, \qquad \check v = v, \tag{4.51}$$

параметризованим функціями f (точніше, функціями f^2 та f^1) та λ, у рівняння $\check{\mathcal{P}}_{\check f}\colon\ \check v_{\check t} + \check v_{\check x}^2 + \check f \check v_{\check x\check x} = 0$, де $\check f_{\check x\check x\check x} = 0$, $\check f \neq 0$, з класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$. Образ функції f при цьому відображенні обчислюємо за формулою $\check f(\check t, \check x) = 2\lambda(t) f(t,x)$. Аналогічно можна обчислити образи коефіцієнтів функції f. Підкласи $\hat{\mathcal{P}}^1$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ класу $\check{\mathcal{P}}\big|_{\check{\mathcal{S}}}$ рівнянь для потенціалів можна відобразити у підкласи

$$\check{\mathcal{P}}^1 = \{\check{\mathcal{P}}_{\check f} \mid \check f = \mathrm{const}\} \quad \text{та} \quad \check{\mathcal{P}}^2 = \{\check{\mathcal{P}}_{\check f} \mid \check f_{\check x\check x\check x} = 0,\ \check f \neq \mathrm{const}\}$$

класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ відповідно. Трансформаційні властивості підкласу $\check{\mathcal{P}}^2$ суттєво відрізняються від відповідних властивостей підкласу $\check{\mathcal{P}}^1$, причому між рівняннями з різних підкласів немає точкових перетворень, див. підрозділ 3.6 (зауважимо, що позначення підкласів в цьому підрозділі дещо відрізняються). Кожне допустиме перетворення у підкласі $\check{\mathcal{P}}^2$ має такі властивості:

- компонента перетворення для $\check t$ залежить тільки від $\check t$,
- компонента перетворення для $\check x$ залежить тільки від $(\check t, \check x)$ та лінійна за $\check x$,
- компонента перетворення для $\check v$ лінійна за $\check v$ (більш того, зі сталим коефіцієнтом при $\check v$) і квадратична за $\check x$.

Розглянемо довільне допустиме перетворення $(f, \varphi, \tilde f)$ у підкласі $\hat{\mathcal{P}}^2$. Позначимо $\check f := \psi_{f,\lambda} f$, $\check{\tilde f} := \psi_{f,\lambda}\tilde f$ та $\check\varphi := \psi_{\tilde f,\tilde\lambda}\varphi\psi_{\tilde f,\tilde\lambda}^{-1}$. Тоді $\varphi = \psi_{\tilde f,\tilde\lambda}^{-1}\check\varphi\psi_{f,\lambda}$, а трійка $(\check f,\check\varphi,\check{\check f})$ є допустимим перетворенням для підкласу $\check{\mathcal P}^2$, і його компонента $\check\varphi$ має зазначені властивості. З огляду на (4.51) та взаємозв'язок між φ та $\check\varphi$ точкове перетворення φ має ті ж самі властивості, тобто

$$\varphi\colon\quad \begin{aligned}&\tilde t=T(t),\quad \tilde x=X^1(t)x+X^0(t),\\ &\tilde v=c_0\big(v+V^2(t)x^2+V^1(t)x+V^0(t)\big),\end{aligned}$$

де $T_tX^1c_0\neq0$. Підставляємо вирази для змінних та функцій з хвильками через вирази без хвильок, враховуючи похідні

$$\tilde v_{\tilde t}=\frac{c_0}{T_t}\left(v_t+V^2_tx^2+V^1_tx+V^0_t-\frac{X^1_tx+X^0_t}{X^1}(v_x+2V^2x+V^1)\right),$$
$$\tilde v_{\tilde x}=c_0\frac{v_x+2V^2x+V^1}{X^1},\quad \tilde v_{\tilde x\tilde x}=c_0\frac{v_{xx}+2V^2}{(X^1)^2},$$

а також $v_t=-\frac{1}{2\lambda}v_x^2-fv_{xx}+f_xv_x$ у $\mathcal P_{\tilde f}$, після чого розщеплюємо отримане рівняння за v_{xx}, v_x та x. Після спрощень отримаємо

$$\tilde f=\frac{(X^1)^2}{T_t}f,\quad \tilde\lambda=\frac{c_0T_t}{(X^1)^2}\lambda,\quad V^2=\frac{c_0}{2}\frac{X^1_t}{X^1}\lambda,\quad V^1=c_0\frac{X^0_t}{X^1}\lambda,\tag{4.52}$$

$$\left(\frac{X^1_t}{(X^1)^2}\right)_t=0,\quad \left(\frac{X^0_t}{(X^1)^2}\right)_t=0,\tag{4.53}$$

$$V^0_t=c_0\lambda\left(\frac12\left(\frac{X^0_t}{X^1}\right)^2+\frac{X^0_t}{X^1}f^1-\frac{X^1_t}{X^1}f^0\right).\tag{4.54}$$

З першого рівняння (4.52) маємо вирази для перетворень f^2, f^1 та f^0:

$$\begin{aligned}&\tilde f^2=\frac{1}{T_t}f^2,\quad \tilde f^1=\frac{X^1}{T_t}f^1-2\frac{X^0}{T_t}f^2,\\ &\tilde f^0=\frac{(X^1)^2}{T_t}f^0-\frac{X^0X^1}{T_t}f^1+\frac{(X^0)^2}{T_t}f^2.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Оскільки $\lambda=e^{2\int f^2\,\mathrm dt}$, $\tilde\lambda=e^{2\int\tilde f^2\,\mathrm d\tilde t}$ та $T_t\tilde f^2=f^2$, отримаємо

$$\left(\frac{\tilde\lambda}{\lambda}\right)_t=2\left(T_t\tilde f^2-f^2\right)\frac{\tilde\lambda}{\lambda}=0,\qquad\text{тобто}\qquad \frac{\tilde\lambda}{\lambda}=\mathrm{const}\,.$$

Отже, друге рівняння (4.52) дає $T_t/(X^1)^2 = \tilde{\lambda}/(c_0\lambda) = \mathrm{const}$. Перше рівняння (4.53) можна записати як $(1/X^1)_{tt} = 0$, звідки $1/X^1$ — лінійна функція від t. Тоді із співвідношення $T_t = \mathrm{const}\cdot(X^1)^2$ випливає, що T є дробово-лінійною функцією від t. В результаті

$$T = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad X^1 = \frac{\kappa}{\gamma t + \delta}, \qquad X^0 = \frac{\mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},$$

де вираз для X^0 отримано з другого рівняння (4.53). Інтегрування рівняння (4.54) за t дає вираз для V^0. Нарешті, з (4.55) отримуємо перетворення для f^2, f^1 та f^0. □

Наслідок 4.25. *Між рівняннями, одне з яких належить класу $\hat{\mathcal{P}}^1$, а інше — класу $\hat{\mathcal{P}}^2$, точкових перетворень не існує.*

Порівнюючи компоненти перетворення у теоремі 3.1 та твердженні 4.24, а також беручи до уваги співвідношення $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ між u та v, робимо висновок, що групоїди еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ ізоморфні з точністю до зсувів та масштабних перетворень потенціалу v. Те ж саме справедливо і для груп еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$, хоча ці групи еквівалентності мають різні типи. З цього також випливає, що для кожної функції f такої, що $f_{xxx} \neq 0$, групи ліївських симетрій рівнянь $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ ізоморфні з точністю до зсувів v (які належать перетину груп симетрій усіх рівнянь з класу $\hat{\mathcal{P}}^2$), а тому групові класифікації класів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ еквівалентні. Оскільки клас $\mathcal{L}^2$ замкнений відносно дії $G^{\sim}$, його групову класифікацію можна легко виділити з групової класифікації всього класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$, яку наведено у таблиці 4.1.

Твердження 4.26. *Потенціальні допустимі перетворення підкласу $\mathcal{L}^2$ індуковано його звичайними допустимими перетвореннями. Рівняння з цього класу не мають нетривіальних потенціальних симетрій.*

Розглянемо «потенціальний відповідник» $\hat{\mathcal{P}}^1$ класу $\mathcal{L}^1$. Для сталих значень f перетворення (4.51) вироджується у масштабування t. Отже, підклас $\hat{\mathcal{P}}^1$ насправді співпадає (з точністю до масштабного перетворення $\check{t} = \frac{1}{2}t$) з підкласом $\check{\mathcal{P}}^1$ класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$.

Наступне твердження є переформулюванням твердження 3.7 про групоїд еквівалентності класу $\check{\mathcal{P}}^1$ з точністю до множника $\frac{1}{2}$ перед v_x^2 та множника κ у перетворенні для X^0.

Твердження 4.27. *Підклас $\hat{\mathcal{P}}^1 = \{\mathcal{P}_{f,\lambda} \mid f = \mathrm{const}\}$ класу $\check{\mathcal{P}}\big|_{\check{\mathcal{S}}}$ рівнянь для потенціалів нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнена група еквівалентності складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},$$
$$\tilde{v} = \frac{2\kappa^2 f}{\Delta} \ln \left| F^1\Big(e^{\frac{v}{2f}} + F^0\Big) \right|, \quad \tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\Delta} f,$$

де α, β, γ, δ, κ, μ_1, μ_0 — довільні сталі, $\Delta := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\kappa \neq 0$, набір $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa)$ визначений з точністю до ненульового множника,

$$F^1 = \begin{cases} k\sqrt{|\gamma t + \delta|}\exp\left(-\dfrac{(\gamma\kappa x - \mu_1\delta + \mu_0\gamma)^2}{4f\kappa^2\gamma(\gamma t + \delta)}\right), & \gamma \neq 0, \\ k\exp\dfrac{2\kappa\mu_1 x + \mu_1^2 t}{4\kappa^2 f}, & \gamma = 0, \end{cases}$$

стала $k\neq 0$, а функція F^0 є розв'язком лінійного рівняння $F^0_t + fF^0_{xx} = 0$.

Твердження 4.27 досить очевидне, оскільки клас $\hat{\mathcal{P}}^1$ є орбітою будь-якого рівняння з нього під дією групи масштабних перетворень. Складний вигляд допустимих перетворень у класі $\hat{\mathcal{P}}^1$ є наслідком того факту, що будь-яке рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з $f = \mathrm{const}$ можна лінеаризувати до рівняння теплопровідності $w_t + fw_{xx} = 0$ заміною $w = e^{v/(2f)}$, а тому загальні перетворення симетрії рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ мають складну структуру і включають довільний розв'язок рівняння теплопровідності. Потенціальні симетрії класичного рівняння Бюргерса добре відомі, див., наприклад, [8, приклад 2.42] та [100]. З точністю до лінійних комбінацій нетривіальні потенціальні симетрії рівняння $\mathcal{L}_f$, пов'язані з локальними законами збереження, вичерпуються образами симетрій лінійної суперпозиції відповідних рівнянь теплопровідності $w_t + fw_{xx} = 0$ під дією відображення $v = 2f\ln w$ та продовження на u за законом $u = v_x$.

Твердження 4.24 та 4.27 разом з наслідком 4.25 повністю описують групоїд еквівалентності класу $\breve{\mathcal{P}}|_{\breve{\mathcal{S}}}$.

4.6. Висновки

У цьому розділі повністю розв'язано задачу групової класифікації класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Завдяки властивості нормалізованості (у звичайному сенсі) групову класифікацію цього класу було зручно провести за допомогою алгебраїчного методу. Ліївські редукції виконано з використанням двох спеціальних технік. По-перше, замість класифікації одно- та двовимірних підалгебр у кожному з нееквівалентних випадків розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності (19 випадків) прокласифіковано нееквівалентні підалгебри такої ж розмірності алгебри $\mathfrak{g}$. По-друге, вигляд анзаців підібрано таким чином, щоб усі редуковані рівняння (крім двох, які відповідають сингулярним ліївським редукціям і дають лише тривіальні розв'язки) належали певному класу рівнянь простого вигляду. Виконана оптимізація дозволила повністю вивчити приховані симетрії рівнянь з цього класу та побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

Також вичерпно описано оператори редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та проведено всі можливі некласичні редукції цих рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

Множина операторів редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній природним чином ділиться на дві підмножини, а саме — множини сингулярних та регулярних операторів редукції. Цей поділ є інваріантним відносно групи еквівалентності.

Основні властивості сингулярних операторів редукції (у тому числі й та, що коефіцієнт при ∂_t такого оператора дорівнює нулю) подібні для всіх $(1{+}1)$-вимірних еволюційних рівнянь. Основна з цих властивостей — існування взаємно однозначної відповідності між класами еквівалентності сингулярних операторів редукції та однопараметричними сім'ями розв'язків, що відрізняються з точністю до репараметризації. Таким чином, при розгляді сингулярних операторів редукції класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ виникає перший тип «no-go» випадків: він пов'язаний з пониженням в процесі редукції порядку диференціального рівняння до 1. Аналогічні «no-go» результати можна отримати для будь-якого (1+1)-вимірного диференціального рівняння з частинними похідними, що допускає сім'ю сингулярних векторних полів копорядку сингулярності 1, параметризованих довільною гладкою функцією всіх незалежних і залежної змінних [67]. Система визначальних рівнянь на оператори редукції з кожної такої сім'ї складається з одного диференціального рівняння з частинними похідними на функцію, що є параметром цієї сім'ї, і це рівняння нелокальною заміною зводиться до початкового рівняння. Ці результати можна поширити також і на багатовимірні диференціальні рівняння з частинними похідними, див. [36].

Підмножина регулярних операторів редукції класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ має специфічну структуру. Її вичерпно описано в теоремі 4.14.

При розгляді регулярних операторів редукції з $\tau = 1$ та $\xi_u = -\frac{1}{2}$ (а такі оператори редукції існують тільки для класичного рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_c$, $c = \mathrm{const}$) виникає другий тип «no-go» випадків. Він, безумовно, пов'язаний з тим фактом, що рівняння Бюргерса лінеаризується перетворенням Коула–Хопфа до лінійного рівняння теплопровідності. Відповідна система визначальних рівнянь — це система з трьох (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь, яка редукується диференціальними підстановками до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності, більш того — до системи з трьох незачеплених копій рівняння Бюргерса. У дисертаційній роботі запропоновано нове доведення лінеаризовності системи (4.19) визначальних рівнянь для випадку $\xi_u = -\frac{1}{2}$ (див. підрозділ 4.4) і вперше показано, що розв'язки цієї системи виражаються через трійки розв'язків рівняння Бюргерса. Крім рівняння Бюргерса, подібні «no-go» результати щодо регулярних операторів редукції відомі тільки для лінійних (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку [9,52,55,96]. Зауважимо, що регулярні оператори редукції з коефіцієнтом $\tau = 1$ дають істинно некласичну редукцію рівняння Бюргерса тільки при $\xi_u \in \{1, -\frac{1}{2}\}$, причому всі відповіді анзаци неявні, тобто їх не можна було б побудувати методом Кларксона і Крускала [42].

У випадку, коли відповідна система визначальних рівнянь на невідомі функціональні параметри коефіцієнтів операторів редукції і довільного елемента класу не перевизначена, знайти всі значення довільного елемента, для яких рівняння з цього класу мають нетривіальні оператори редукції, неможливо. В той же час, як тільки значення довільного елемента зафіксовано, відповідну множину операторів редукції можна виписати в явному вигляді. Подібна ситуація, яку теж можна назвати окремим типом «no-go» випадків, виникла і для узагальнених рівнянь Бюргерса з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Векторне поле вигляду (2.3) з $\tau = 1$, $\xi_u = 0$ і $\eta = 0$ є оператором редукції рівняння з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт ξ і довільний елемент f задовольняють добре визначену систему (4.40)–(4.41). Загальний розв'язок цієї системи знайти неможливо. Але цю обставину вдалося частково подолати за допомогою знайденого зв'язку між системою (4.40)–(4.41) і потенціальним рівнянням швидкої дифузії (4.45): для кожного відомого розв'язку θ рівняння (4.45) можна побудувати принаймні три сім'ї розв'язків рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$.

Ненульові локальні закони збереження існують лише для рівнянь $\mathcal{L}_f$ з значеннями довільного елемента f, що є квадратичними за x з коефіцієнтами, залежними від t, а нетривіальні потенціальні закони збереження — тільки для класичного рівняння Бюргерса.

На прикладі класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ запропоновано новий підхід до опису потенціальних симетрій у класах диференціальних рівнянь, який ґрунтується на дослідженні потенціальних допустимих перетворень. Тому виявилося доцільним ввести поняття *потенціального групоїда еквівалентності* класу диференціальних рівнянь.

Результати розділу 4 опубліковано в роботах [13, 14, 85, 86, 88, 89, 93].

Розділ 5

Клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу

У цьому розділі побудовано групоїд еквівалентності та розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, вигляду

$$\mathcal{D}_{n,h,g}\colon\quad u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}, \qquad ng \neq 0.$$

Тут $h(t)$ та $g(t)$ — довільні гладкі функції, де $g \neq 0$, а n — довільна ненульова стала.

Зауважимо, що ширший клас узагальнених рівнянь Бюргерса вигляду

$$u_t + f(t)u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}, \qquad nfg \neq 0, \tag{5.1}$$

з трьома коефіцієнтами, залежними від часу, можна звести до класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ шляхом заміни змінної t. Саме тому достатньо вивчити клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, і всі результати стосовно симетрій, точних розв'язків, законів збереження тощо для класу (5.1) можна отримати з відповідних результатів для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$.

Лінійний випадок (у якому $n = 0$) виключено з розгляду як повністю вивчений з точки зору ліївських симетрій [73]. Більш того, будь-яке лінійне рівняння цього вигляду зводиться точковим перетворенням до класичного рівняння теплопровідності. Зауважимо, що в цьому розділі описано ті рівняння з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, які лінеаризуються до рівняння теплопровідності за допомогою композицій перетворень еквівалентності та перетворення Коула–Хопфа.

Вивчення ліївських симетрій класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ розпочато у підрозділі 5.1 з опису його групоїда еквівалентності в термінах нормалізованих підкласів та умовних груп еквівалентності різних типів.

Використовуючи параметричні сім'ї перетворень з групи еквівалентності всього класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, можна відкалібрувати довільні елементи класу, тобто відобразити весь клас на певні його підкласи. У підрозділі 5.2 розглянуто калібрування $h=0$.

Ліївські симетрії класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ прокласифіковано у підрозділі 5.3. Ця задача зводиться до групової класифікації підкласу, виокремленого умовою $h=0$.

У пункті 5.4.1 знайдено оптимальні системи одно- та двовимірних підалгебр для всіх нееквівалентних випадків розширення алгебри ліївської інваріантності у класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$. Ліївські редукції за підалгебрами з оптимальних систем проведено у пунктах 5.4.2–5.4.3, де також знайдено нові точні розв'язки деяких рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з $h=0$. Пункт 5.4.4 присвячено породженню точних розв'язків рівнянь з цього ж класу, але вже з $h\neq0$ за допомогою перетворень еквівалентності.

Лінеаризацію рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ до рівняння теплопровідності обговорено у підрозділі 5.5.

5.1. Групоїд еквівалентності

Для того, щоб дослідити допустимі перетворення в класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, разом з рівнянням $\mathcal{D}_{n,h,g}$ розглянемо рівняння з цього ж класу, записане у змінних з хвильками, тобто

$$\mathcal{D}_{\tilde n,\tilde h,\tilde g}\colon\quad \tilde u_{\tilde t}+\tilde u^{\tilde n}\tilde u_{\tilde x}+\tilde h(\tilde t)\tilde u=\tilde g(\tilde t)\tilde u_{\tilde x\tilde x},\tag{5.2}$$

і знайдемо загальний вигляд точкового перетворення

$$\tilde t=T(t,x,u),\qquad \tilde x=X(t,x,u),\qquad \tilde u=U(t,x,u),$$

де $|\partial(T,X,U)/\partial(t,x,u)|\neq 0$, яке відображає рівняння $\mathcal{D}_{n,h,g}$ у рівняння $\mathcal{D}_{\tilde n,\tilde h,\tilde g}$.

Відомо, що допустимі перетворення еволюційних рівнянь задовольняють умови $T_x=T_u=0$ [66]. Більш того, кожне допустиме перетворення між рівняннями загального вигляду $u_t=F(t,x,u)u_{xx}+G(t,x,u,u_x)$ задовольняє також умову $X_u=0$ [98]. Таким чином, для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ достатньо розглянути перетворення вигляду

$$\tilde t=T(t),\qquad \tilde x=X(t,x),\qquad \tilde u=U(t,x,u),$$

де $T_tX_xU_u\neq 0$. Перепишемо рівняння (5.2), виразивши всі змінні з хвильками та їхні похідні в термінах величин без хвильок, і підставимо $u_t=-u^nu_x-h(t)u+g(t)u_{xx}$ у переписане рівняння, щоб перейти на многовид у просторі струменів другого порядку, визначений рівнянням $\mathcal{D}_{n,h,g}$. Розщеплення отриманої рівності за похідними u_{xx} та u_x дає визначальні рівняння для компонент перетворення:

$$\begin{aligned}
&U_{uu}=0,\qquad \tilde gT_t=gX_x^2,\\
&u^n-\frac{T_t}{X_x}U^{\tilde n}+2\tilde g\frac{T_t}{X_x^2}\frac{U_{xu}}{U_u}-\tilde gT_t\frac{X_{xx}}{X_x^3}+\frac{X_t}{X_x}=0,\\
&X_tU_x-X_xU_t+\tilde gT_t\left(\frac{U_x}{X_x}\right)_x-T_tU^{\tilde n}U_x+hX_xU_uu-\tilde hT_tX_xU=0.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

З першого рівняння випливає, що U є лінійною функцією від u, тобто $U=U^1(t,x)u+U^0(t,x)$. З другого — що X_x є функцією тільки від t, а тому $X=X^1(t)x+X^0(t)$. Отже,

$$\tilde g=\frac{(X^1)^2}{T_t}\,g.$$

Диференціюючи третє рівняння за u, доводимо, що параметр n є інваріантом при дії на рівняння допустимих точкових перетворень, тобто $\tilde n=n$ і, більш того, при всіх $n\neq 1$ маємо $U^0=0$. Подальший розгляд залежить від того, чи дорівнює n одиниці. Підставивши вирази для U, X та $\tilde g$ у третє і четверте визначальні рівняння, розщеплюємо їх за u та x.

Випадок $n \neq 1$. Внаслідок розщеплення отримаємо $U^1_x = 0$, $X^1_t = 0$, $X^0_t = 0$. Розв'язуючи решту визначальних рівнянь, а саме $\left(U^1\right)^n T_t = X^1$ та $\tilde{h} X^1 \left(U^1\right)^{1-n} = hU^1 - U^1_t$, отримаємо вигляд компоненти перетворення для u та зв'язок між h і $\tilde{h}$. Знайдені перетворення параметризовані сталою n. Їх можна застосувати до всіх рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, включаючи рівняння з $n = 1$. При цьому перетворений довільний елемент $(\tilde{n}, \tilde{h}, \tilde{g})$ пов'язаний з вихідним довільним елементом (n, h, g) точково. Таким чином, продовження цих перетворень на довільний елемент складають узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$.

Теорема 5.1. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = T(t), \qquad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_0, \qquad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{T_t}\right)^{\frac{1}{n}} u,$$
$$\tilde{h} = \frac{1}{T_t} h + \frac{T_{tt}}{n T_t^{\,2}}, \qquad \tilde{g} = \frac{{\delta_1}^2}{T_t}\, g, \qquad \tilde{n} = n,$$

де δ_1 та δ_0 — довільні сталі, $T = T(t)$ — довільна гладка функція, причому $\delta_1 T_t > 0$. Підклас класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, виокремлений умовою $n \neq 1$, нормалізований в узагальненому сенсі відносно $\hat{G}^{\sim}$.

Зауваження 5.2. Якщо вважати степінь n компонентою довільного елемента у класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, то група еквівалентності в теоремі 5.1 є узагальненою, оскільки параметр n присутній у перетворенні залежної змінної u. (Поняття звичайної групи еквівалентності передбачає, що компоненти перетворення для незалежних і залежної змінних не залежать від довільного елемента.) З іншого боку, n є інваріантом групи еквівалентності, тому клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ можна вважати об'єднанням нескінченної кількості підкласів з фіксованими значеннями n. При кожному фіксованому n група $\hat{G}^{\sim}$ породжує звичайну групу еквівалентності для відповідного підкласу.

Зауваження 5.3. Якщо степінь n не є раціональним числом з непарним знаменником, розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ повинні бути додатними функціями. Таким чином, умову $u > 0$ природно накласти на весь клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з довільним n. Більш того, зазвичай додатність функції u узгоджена з її фізичною інтерпретацією. Для того, щоб уникнути таких обмежень на u, можна було б формально замінити u^n у рівнянні $\mathcal{D}_{n,h,g}$ на $|u|^n$. Вивчаючи підкласи класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з фіксованим n, яке є раціональним числом з непарним чисельником і непарним знаменником, умову додатності u можна опустити. Також у цьому випадку виникають перетворення еквівалентності, що задовольняють умову $\delta_1 T_t < 0$, тобто можна змінювати знаки пар $(t,u)\to(-t,-u)$ та $(x,u)\to(-x,-u)$. Оскільки ці перетворення не відіграють суттєвої ролі в класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, їх зручніше не використовувати.

Теорема 5.1 дозволяє знайти групу еквівалентності підкласу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0,\,h=\mathrm{const}\}}$ класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, виокремленого умовою $h=\mathrm{const}$, який розглянуто в [125]. Компоненту перетворення для h

$$\tilde h=\frac{1}{T_t}h+\frac{T_{tt}}{nT_t^{\,2}}$$

можна розглядати як рівняння для визначення функціонального параметра T. Наведемо загальний розв'язок цього рівняння у вигляді, що ілюструє його неперервну залежність від параметрів h та $\tilde h$.

Наслідок 5.4. *Узагальнена група еквівалентності $\hat G^{\sim}_{h=\mathrm{const}}$ класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0,\,h=\mathrm{const}\}}$ складається з перетворень*

$$\tilde t=T(t),\qquad \tilde x=\delta_1x+\delta_0,\qquad \tilde u=\left(\frac{\delta_1}{\alpha}\right)^{\frac1n}e^{ht-\tilde hT}u,$$

$$\tilde g=\frac{{\delta_1}^2}{\alpha}e^{nht-n\tilde hT}g,\qquad \tilde n=n,$$

де функція $T=T(t)$ залежить від h та $\tilde h$ і визначається рівностями

$$h\tilde h\neq0\colon\ \frac{e^{-n\tilde hT}-1}{-n\tilde h}=\alpha\frac{e^{-nht}-1}{-nh}+\beta;\qquad \begin{matrix}h\neq0\\ \tilde h=0\end{matrix}\ :\ T=\alpha\frac{e^{-nht}-1}{-nh}+\beta;$$

$$\begin{matrix}h=0\\ \tilde h\neq0\end{matrix}\ :\ \frac{e^{-n\tilde hT}-1}{-n\tilde h}=\alpha t+\beta;\qquad\qquad h=\tilde h=0\colon\ T=\alpha t+\beta.$$

Тут α, β, δ_0 та δ_1 — довільні сталі, причому $\alpha\delta_1>0$.

Випадок $n = 1$. Розщеплення третього та четвертого рівнянь з системи (5.3) приводить до рівнянь

$$\begin{aligned}
&U^1_x = 0, \qquad U^1 = \frac{X^1}{T_t}, \qquad U^0 = \frac{X^1_t x + X^0_t}{T_t},\\
&\tilde h = \frac{1}{T_t}\left(h + \frac{T_{tt}}{T_t} - 2\frac{X^1_t}{X^1}\right),\\
&X^1_{tt} - \frac{2\left(X^1_t\right)^2}{X^1} + hX^1_t = 0, \qquad X^0_{tt} - \frac{2X^0_t X^1_t}{X^1} + hX^0_t = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

З двох останніх рівнянь отримаємо $X^0 = \delta_1 X^1 + \delta_0$ та

$$X^1 = \left(\gamma \int H(t)\,\mathrm{d}t + \delta\right)^{-1}, \quad H(t) := e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}, \tag{5.5}$$

де δ_0, δ_1, δ та γ — довільні сталі, причому $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$. Тут і далі інтеграл за t потрібно розуміти як деяку фіксовану первісну.

Теорема 5.5. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat G^{\sim}_{n=1}$ класу*

$$u_t + uu_x + h(t)u = g(t)u_{xx} \tag{5.6}$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned}
&\tilde t = T(t), \qquad \tilde x = X^1(x + \delta_1) + \delta_0, \qquad \tilde u = \frac{X^1}{T_t}\left(u + (x + \delta_1)\frac{X^1_t}{X^1}\right),\\
&\tilde h = \frac{1}{T_t}\left(h + \frac{T_{tt}}{T_t} - 2\frac{X^1_t}{X^1}\right), \qquad \tilde g = \frac{\left(X^1\right)^2}{T_t} g.
\end{aligned}$$

Тут функція $X^1 = X^1(t)$ визначається формулою (5.5), $T = T(t)$ — довільна гладка функція, причому $T_t \neq 0$, а δ_0, δ_1, δ і γ — довільні сталі з $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$. Клас (5.6) нормалізований в узагальненому розширеному сенсі.

Для того, щоб завершити вивчення перетворень еквівалентності між рівняннями зі сталими значеннями довільного елемента h, розглянемо підклас класу (5.6), виокремлений умовою $h = \text{const}$. У цьому випадку параметр $T=T(t)$ є не довільною функцією, а розв'язком рівняння (5.4), в якому X^1 визначається формулою

$$X^1=\begin{cases}\left(\gamma\dfrac{e^{-ht}-1}{-h}+\delta\right)^{-1} & \text{якщо}\qquad h\neq 0,\\ (\gamma t+\delta)^{-1} & \text{якщо}\qquad h=0,\end{cases}\tag{5.7}$$

де γ, δ — довільні сталі, для яких $(\gamma,\delta)\neq(0,0)$.

Інтегрування рівняння (5.4) відносно компоненти перетворення T доводить наступне твердження.

Наслідок 5.6. *Узагальнена група еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{n=1,\,h=\mathrm{const}}$ *класу* (5.6) *з* $h=\mathrm{const}$ *складається з перетворень*

$$\tilde t=T(t),\qquad \tilde x=X^1(x+\delta_1)+\delta_0,\qquad \tilde u=\frac{e^{ht-\tilde hT}}{\Delta X^1}\left(u+\frac{X^1_t}{X^1}(x+\delta_1)\right),$$
$$\tilde g=\frac{1}{\Delta}e^{ht-\tilde hT}g,$$

де функція X^1 *має вигляд* (5.7), $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, *а функція* $T=T(t)$ *визначається формулами*

$$h\tilde h\neq 0\colon\ \frac{e^{-\tilde hT}-1}{-\tilde h}=\frac{\alpha\dfrac{e^{-ht}-1}{-h}+\beta}{\gamma\dfrac{e^{-ht}-1}{-h}+\delta};\qquad \begin{matrix}h\neq 0\\ \tilde h=0\end{matrix}\colon\ T=\frac{\alpha\dfrac{e^{-ht}-1}{-h}+\beta}{\gamma\dfrac{e^{-ht}-1}{-h}+\delta};$$

$$\begin{matrix}h=0\\ \tilde h\neq 0\end{matrix}\colon\ \frac{e^{-\tilde hT}-1}{-\tilde h}=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta};\qquad h=\tilde h=0\colon\ T=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}.$$

Тут α, β, γ *та* δ *— довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника.*

Таким чином, допустимі перетворення в класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ повністю описано. Справедливе також наступне твердження.

Теорема 5.7. *Клас* $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, *де показник степеня* n *не зафіксовано, не є нормалізованим. Проте його можна розбити на нормалізовані підкласи з фіксованими значеннями* n, *не пов'язані між собою точковими* *перетвореннями. Кожний підклас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з фіксованим значенням n (де $n\neq 1$) нормалізований у звичайному сенсі, в той час як підклас класу (5.6), що відповідає значенню $n=1$, нормалізований тільки в узагальненому розширеному сенсі. Будь-який клас, утворений об'єднанням підкласів класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з фіксованими значеннями n (де $n\neq 1$), нормалізований в узагальненому сенсі.*

5.2. Калібрування довільного елемента

Група перетворень $\hat{G}^{\sim}$ параметризована довільною функцією $T=T(t)$. Це дозволяє відкалібрувати одну з компонент довільного елемента — g або h — до простого (наприклад, сталого) значення. Зокрема, можна досягти $g=1$ або $h=0$. Калібрування $h=0$ виглядає більш зручним тому, що при ньому клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ пов'язаний з іншим класом рівнянь, для якого задачу групової класифікації розв'язано в [130]. Це калібрування здійснюється сім'єю перетворень з групи $\hat{G}^{\sim}$, яка параметризована функцією h і сталою n, де

$$T=\int (H(t))^n\,\mathrm{d}t,\quad H(t):=e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t},\quad \delta_1=1,\quad \delta_0=0, \tag{5.8}$$

і пов'язує клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з класом рівнянь вигляду $\hat{u}_{\hat{t}}+\hat{u}^n\hat{u}_{\hat{x}}=\hat{g}(\hat{t})\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$, де функція $\hat{g}$ виражається через h та g:

$$\hat{g}(\hat{t})=(H(t))^n g(t). \tag{5.9}$$

Якщо h — ненульова стала, то проекція параметризованого перетворення, яке калібрує h до нуля, на простір (t,x,u) має вигляд

$$\hat{t}=-\frac{1}{nh}e^{-nht},\qquad \hat{x}=x,\qquad \hat{u}=e^{ht}u.$$

Звичайно, сім'я перетворень еквівалентності, що дозволяє виконати калібрування $h=0$, не єдина. Наприклад, якщо $n\neq1$, більш загальною сім'єю таких перетворень є сім'я перетворень з групи $\hat{G}^{\sim}$, де $T=\alpha\int(H(t))^n\,\mathrm{d}t+\beta$, а α, β, δ_1 та δ_0 — довільні сталі, причому $\alpha\delta_1\neq0$.

У випадку $n = 1$ найбільш загальна сім'я перетворень, що реалізують калібрування, складається з перетворень з (t, x, u)-компонентами

$$\tilde{t} = \frac{\alpha\hat{t} + \beta}{\gamma\hat{t} + \delta}, \qquad \tilde{x} = \frac{x + \mu_1\hat{t} + \mu_0}{\gamma\hat{t} + \delta},$$
$$\tilde{u} = \frac{(\gamma\hat{t} + \delta)e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}u - \gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

де $\hat{t} = \int (H(t))^n\,\mathrm{d}t$, а α, β, γ, δ, μ_0 та μ_1 — довільні сталі, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Теореми 5.1, 5.5 і 5.7 вичерпно описують групоїд еквівалентності класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, що дозволяє легко знайти групоїд еквівалентності будь-якого його підкласу. Розглянемо два відкалібровані класи рівнянь

$$u_t + u^n u_x = g(t)u_{xx}, \qquad ng \neq 0, \tag{5.10}$$
$$u_t + uu_x = g(t)u_{xx}, \qquad g \neq 0. \tag{5.11}$$

Зауважимо, що (5.11) є підкласом класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній.

Наслідок 5.8. *Підклас класу* (5.10)*, виокремлений умовою $n \neq 1$, нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнена група еквівалентності співпадає з узагальненою групою еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{h=0}$ всього класу* (5.10) *і складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha t + \beta, \qquad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_0, \qquad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} u,$$
$$\tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^2}{\alpha}g(t), \qquad \tilde{n} = n,$$

де α, β, δ_0 та δ_1 — довільні сталі, причому $\alpha\delta_1 > 0$.

Наслідок 5.9. *Підклас* (5.11) *нормалізований у звичайному сенсі, і його звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{h=0,\,n=1}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \tilde{x} = \frac{x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},$$
$$\tilde{u} = \frac{(\gamma t + \delta)u - \gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \qquad \tilde{g} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\,g.$$

Тут α, β, γ, δ, μ_0, μ_1 — довільні сталі, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Зауваження 5.10. Альтернативне калібрування $g = 1$ можна провести, використавши сім'ю точкових перетворень з $\hat{G}^{\sim}$, які параметризовані функцією g та сталою n і проекції яких на простір незалежних і залежної змінних мають вигляд

$$\hat{t} = \int g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{x} = x \operatorname{sign} g(t), \qquad \hat{u} = |g(t)|^{-\frac{1}{n}} u.$$

Ця сім'я перетворень відображає клас $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ у клас рівнянь вигляду $\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}^n \hat{u}_{\hat{x}} + \hat{h}(\hat{t})\hat{u} = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$, де залежність компоненти $\hat{h}$ нового довільного елемента від h та g описується співвідношенням

$$\hat{h} = \frac{h}{g} + \frac{g_t}{ng^2}.$$

Зауваження 5.11. Групу $G^{\sim}_{h=0,\,n=1}$ знайдено раніше, див. [12, 65, 85], у процесі дослідження допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ та у його підкласі з $g = g(t)$.

5.3. Ліївські симетрії

У попередньому підрозділі доведено, що задачу групової класифікації для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ можна звести до відповідної задачі для його підкласу (5.10), виокремленого умовою $h(t) = 0$. Генераторами однопараметричних груп ліївських симетрій рівнянь з цього підкласу є векторні поля вигляду

$$Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

що задовольняють інфінітезимальний критерій інваріантності

$$Q_{(2)}[u_t + u^n u_x - g(t)u_{xx}]\Big|_{u_t = -u^n u_x + g(t)u_{xx}} = 0,$$

з якого виводимо визначальні рівняння на компоненти τ, ξ та η. З найпростіших визначальних рівнянь безпосередньо випливає, що

$$\tau = \tau(t), \qquad \xi = \xi(t,x), \qquad \eta = \eta^1(t,x)u + \eta^0(t,x),$$

де τ, ξ, η^1 та η^0 — довільні гладкі функції своїх змінних. З урахуванням отриманих виразів для компонент τ, ξ та η система визначальних рівнянь зводиться до системи

$$
\begin{aligned}
&2g\xi_x = (g\tau)_t, \qquad \eta^1_x u^{n+1} + \eta^0_x u^n + (\eta^1_t - g\eta^1_{xx})u + \eta^0_t - g\eta^0_{xx} = 0,\\
&(\tau_t - \xi_x + n\eta^1)u^n + n\eta^0 u^{n-1} + g\xi_{xx} - 2g\eta^1_x - \xi_t = 0.
\end{aligned}
$$

Результат розщеплення другого і третього рівнянь за u залежить від того, чи дорівнює n одиниці. При $n = 1$ визначальні рівняння, отримані розщепленням, мають вигляд

$$2g\xi_x = (g\tau)_t, \quad \eta^1_x = 0, \quad \eta^0_x + \eta^1_t = 0, \quad \tau_t - \xi_x + \eta^1 = 0, \quad \eta^0 - \xi_t = 0.$$

Для інших (ненульових) значень n вони набувають вигляду

$$\eta^0 = 0, \quad 2g\xi_x = (g\tau)_t, \quad \eta^1_x = 0, \quad \tau_t - \xi_x + n\eta^1 = 0, \quad \xi_t = 0.$$

У таблиці 5.1 наведено результат групової класифікації класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ з точністю до загальної точкової еквівалентності, що насправді породжується в класі $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ групами еквівалентності з теорем 5.1 та 5.5. Тут $h(t) = 0 \bmod \hat{G}^{\sim}$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod \hat{G}^{\sim}$, ρ — ненульова стала. У випадках 6 та 8 можна покласти $\rho > 0$ або $\rho < 0 \bmod \hat{G}^{\sim}_{n=1}$.

Цей результат можна також інтерпретувати як групову класифікацію класу (5.10) з точністю до загальної точкової еквівалентності, яка породжена в класі (5.10) групами еквівалентності, наведеними в наслідках 5.8 та 5.9. Перетин максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ (відповідно з класу (5.10)) — це алгебра $\langle \partial_x \rangle$, яку наведено як випадок 1 у таблицях 5.1–5.3.

Таблиця 5.2 містить повний перелік розширень ліївських симетрій для класу (5.10), де вигляд довільного елемента g не спрощено перетвореннями еквівалентності. Тут λ та ρ — ненульові сталі, а у випадках 3 та 8 $\alpha \neq 0$. Очевидно, що у випадках 6 та 7 набір довільних сталих $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ визначений з точністю до ненульового множника, причому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Але є й інші невизначеності у відповідних параметрах.

Таблиця 5.1. Групова класифікація класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ з точністю до загальної точкової еквівалентності

№	g	Базисні оператори $A^{\max}$
		$n\neq 1$. Цей випадок прокласифіковано з точністю до $\hat G^{\sim}$-еквівалентності.
1	$\forall$	∂_x
2	εt^ρ	$\partial_x,\qquad 2nt\partial_t+n(\rho{+}1)x\partial_x+(\rho{-}1)u\partial_u$
3	εe^t	$\partial_x,\qquad 2n\partial_t+nx\partial_x+u\partial_u$
4	1	$\partial_x,\qquad \partial_t,\qquad 2nt\partial_t+nx\partial_x-u\partial_u$
		$n=1$. Цей випадок прокласифіковано з точністю до $\hat G^{\sim}_{n=1}$-еквівалентності.
5	$\forall$	$\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u$
6	εt^ρ	$\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u,\qquad 2t\partial_t+(\rho{+}1)x\partial_x+(\rho{-}1)u\partial_u$
7	εe^t	$\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u,\qquad 2\partial_t+x\partial_x+u\partial_u$
8	$\varepsilon e^{2\rho\,\mathrm{arctg}\,t}$	$\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u,\qquad (t^2+1)\partial_t+(t+\rho)x\partial_x+(x+(\rho-t)u)\partial_u$
9	1	$\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u,\qquad \partial_t,\qquad 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,\qquad t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u$

Так, у випадку 6 можна незалежно масштабувати пари (α,β) і (γ,δ), відповідно перемасштабовуючи λ.

У випадку 7 тільки три сталі є справді незалежними, оскільки можна покласти $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(\alpha',0,0,1),(0,\beta',1,\delta')\}$. Щоб показати це, достатньо розглянути вираз для g при $\gamma=0$ та при $\gamma\neq 0$. Якщо $\gamma=0$, то $g=\lambda'\exp(\alpha' t)$, де $\lambda'=\lambda\exp(\beta/\delta)$, $\alpha'=\alpha/\delta$. Якщо $\gamma\neq 0$, то $g=\lambda'\exp\left(\frac{\beta'}{t+\delta'}\right)$, де $\lambda'=\lambda\exp(\alpha/\gamma)$, $\beta'=(\beta\gamma-\alpha\delta)/\gamma^2$, $\delta'=\delta/\gamma$.

Випадок 8 таблиці 5.2 може здатися частковим для відповідного розширення, проте насправді це загальний випадок. Дійсно, аналогічно до випадків 6 та 7 можна розглянути $g=\lambda\exp\Big(2\rho\,\mathrm{arctg}\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\Big)$, де $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Алгебра ліївських симетрій для цього g є лінійною оболонкою векторних полів

$$
\begin{aligned}
&\partial_x,\qquad t\partial_x+\partial_u,\\
&\big((\alpha t+\beta)^2+(\gamma t+\delta)^2\big)\,\partial_t+\big((\alpha^2+\gamma^2)t+\rho\Delta+\alpha\beta+\gamma\delta\big)\,x\partial_x+\\
&\qquad+\big(\big[-(\alpha^2+\gamma^2)t+\rho\Delta-\alpha\beta-\gamma\delta\big]\,u+(\alpha^2+\gamma^2)x\big)\,\partial_u.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Таблиця 5.2. Повний перелік розширень ліївських симетрій для класу (5.10)

№	g	Базисні оператори $A^{\max}$
		$n\neq 1$
1	$\forall$	∂_x
2	$\lambda(\alpha t+\beta)^\rho$	$\partial_x,\quad 2n(\alpha t+\beta)\partial_t+\alpha n(\rho{+}1)x\partial_x+\alpha(\rho{-}1)u\partial_u,\quad \alpha=\pm1$
3	$\lambda e^{\alpha t}$	$\partial_x,\quad 2n\partial_t+\alpha nx\partial_x+\alpha u\partial_u$
4	λ	$\partial_t,\quad \partial_x,\quad 2nt\partial_t+nx\partial_x-u\partial_u$
		$n=1$
5	$\forall$	$\partial_x,\quad t\partial_x+\partial_u$
6	$\lambda\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)^\rho$	$\partial_x,\quad t\partial_x+\partial_u,$ $(\alpha t+\beta)(\gamma t+\delta)\partial_t+\left(\frac12(\rho{-}1)\Delta+\alpha(\gamma t+\delta)\right)x\partial_x$ $+\left(\left[\frac12(\rho{+}1)\Delta-\alpha(\gamma t+\delta)\right]u+\alpha\gamma x\right)\partial_u$
7	$\lambda e^{\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}}$	$\partial_x,\quad t\partial_x+\partial_u,$ $(\gamma t+\delta)^2\partial_t+\left(\frac12\Delta+\gamma(\gamma t+\delta)\right)x\partial_x+\left(\left[\frac12\Delta-\gamma(\gamma t+\delta)\right]u+\gamma^2x\right)\partial_u$
8	$\lambda e^{2\rho\,\mathrm{arctg}(\alpha t+\beta)}$	$\partial_x,\quad t\partial_x+\partial_u,$ $\left((\alpha t+\beta)^2+1\right)\partial_t+\alpha\left(\alpha t+\rho+\beta\right)x\partial_x+\alpha\left([-\alpha t+\rho-\beta]\,u+\alpha x\right)\partial_u$
9	λ	$\partial_t,\quad \partial_x,\quad t\partial_x+\partial_u,\quad 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,\quad t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u$

Проте за формулою для суми арктангенсів маємо

$$\mathrm{arctg}\,y+\mathrm{arctg}\,z=\mathrm{arctg}\,\frac{y+z}{1-yz}+\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\,y)(1+\mathrm{sign}(1-yz)),$$

якщо $yz\neq 1$, і

$$\mathrm{arctg}\,y+\mathrm{arctg}\,z=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,y,$$

якщо $yz=1$. Це означає, що згадане вище g локально співпадає з $\check g=$ $=\check\lambda\exp(2\check\rho\,\mathrm{arctg}(\check\alpha t+\check\beta))$, де

$$\check\lambda=\lambda e^{-2\rho\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma}{\alpha}-\pi\rho\left(\mathrm{sign}\,\frac{\gamma}{\alpha}\right)\mathrm{sign}\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}(\check\alpha t+\check\beta)\right)},$$

$$\check\rho=\rho,\quad \check\alpha=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\delta-\beta\gamma},\quad \check\beta=\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma},$$

якщо $\alpha\gamma\neq 0$, або ж

$$\check\lambda=\lambda e^{\pi\rho\,\mathrm{sign}(\check\alpha t+\check\beta)},\quad \check\rho=-\rho,\quad \check\alpha=-\frac{\gamma}{\beta},\quad \check\beta=-\frac{\delta}{\beta},$$

якщо $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$, а випадок $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$ є очевидним. Ці вирази для сталих параметрів добре узгоджуються зі спрощенням вигляду третього векторного поля в (5.12).

Зауваження 5.12. Задачу групової класифікації для класу рівнянь вигляду $u_t + a(u^m)_x = g(t)u_{xx}$, де $g \neq 0$, $m \neq 0, 1$ та $a = \mathrm{const} \neq 0$, який, насправді, є ще одним зображенням підкласу класу рівнянь (5.10) з $n \neq -1$ (якщо покласти $a = 1/m$ та $m = n + 1$), розв'язано в [130]. Отже, класифікаційні списки для цих класів можна вивести один з одного. Оскільки випадок $n = -1$ не є сингулярним з точки зору ліївських симетрій, це значення n не виключено з класифікаційного списку для класу (5.10).

Зауваження 5.13. Груповій класифікації класу (5.11), який є підкласом класу (5.10), виокремленим умовою $n = 1$, присвячено кілька робіт. У [47] кожен з випадків 6 та 7 таблиці 5.2 розділено на два підвипадки —

$$g = e^{\alpha t}, \quad g = e^{\frac{1}{\alpha t}} \quad \text{та} \quad g = (\alpha t + \beta)^\rho, \quad g = \left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)^\rho.$$

Схожі результати отримано в [133]. Відповідну групу еквівалентності в цих роботах не наведено і не використано.

Щоб отримати повний перелік розширень ліївських симетрій для всього класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, де вигляд довільного елемента не спрощено точковими перетвореннями, застосуємо до випадків таблиці 5.2 перетворення з групи $\hat{G}^\sim$ з параметрами (5.8), причому відповідні значення g знайдемо за допомогою рівняння (5.9). Результати розмноження наведено у таблиці 5.3. Всі сталі в таблиці 5.3 задовольняють ті ж самі обмеження, що і в таблиці 5.2; функція $h(t)$ є довільною у всіх випадках, а

$$T = \int (H(t))^n \,\mathrm{d}t, \quad \text{де} \quad H(t) := e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Зауваження 5.14. Використовуючи таблицю 5.3, легко описати ліївські симетрії рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, для яких $h = \mathrm{const}$. Наприклад, якщо $n \neq 1$, то значеннями параметр-функції g, які відповідають

Таблиця 5.3. Повний перелік розширень ліївських симетрій для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$

№	g	Базисні оператори алгебри $A^{\max}$
		$n \neq 1$
1	$\forall$	∂_x
2	$\lambda T_t(\alpha T+\beta)^\rho$	$\partial_x, \quad 2n(\alpha T+\beta)T_t^{-1}\partial_t + \alpha n(\rho{+}1)x\partial_x$ $+\big(\alpha(\rho{-}1) - 2nh(t)(\alpha T+\beta)T_t^{-1}\big)\,u\partial_u$
3	$\lambda T_t e^{\alpha T}$	$\partial_x, \quad 2nT_t^{-1}\partial_t + \alpha nx\partial_x + \big(\alpha - 2nh(t)T_t^{-1}\big)\,u\partial_u$
4	λT_t	$\partial_x, \quad T_t^{-1}\partial_t - h(t)T_t^{-1}u\partial_u,$ $2nTT_t^{-1}\partial_t + nx\partial_x - \big(2nh(t)TT_t^{-1}+1\big)\,u\partial_u$
		$n = 1$
5	$\forall$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u$
6	$\lambda T_t\left(\frac{\alpha T+\beta}{\gamma T+\delta}\right)^\rho$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u,$ $(\alpha T+\beta)(\gamma T+\delta)T_t^{-1}\partial_t + \big(\tfrac12(\rho-1)\Delta + \alpha(\gamma T+\delta)\big)\,x\partial_x$ $+\big(\,\big[-\alpha(\gamma T+\delta) - h(t)(\alpha T+\beta)(\gamma T+\delta)T_t^{-1} + \tfrac12(\rho+1)\Delta\big]\,u$ $+\alpha\gamma T_t x\big)\partial_u$
7	$\lambda T_t e^{\frac{\alpha T+\beta}{\gamma T+\delta}}$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u,$ $(\gamma T+\delta)^2\,T_t^{-1}\partial_t + \big(\gamma(\gamma T+\delta) + \tfrac12\Delta\big)\,x\partial_x$ $+\big(\big[-\gamma(\gamma T+\delta) - h(t)(\gamma T+\delta)^2T_t^{-1} + \tfrac12\Delta\big]\,u + \gamma^2T_t x\big)\,\partial_u$
8	$\lambda T_t e^{2\rho\,\mathrm{arctg}(\alpha T+\beta)}$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u,$ $\big((\alpha T+\beta)^2+1\big)\,T_t^{-1}\partial_t + \alpha\,(\alpha T+\rho+\beta)\,x\partial_x$ $+\big(\big[\alpha(-\alpha T+\rho-\beta) - h(t)\,\big((\alpha T+\beta)^2+1\big)\,T_t^{-1}\big]\,u + \alpha^2T_t x\big)\partial_u$
9	λT_t	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u, \quad 2TT_t^{-1}\partial_t + x\partial_x - \big(2h(t)TT_t^{-1}+1\big)\,u\partial_u,$ $T_t^{-1}\partial_t - h(t)T_t^{-1}u\partial_u,$ $T^2T_t^{-1}\partial_t + Tx\partial_x + \big(T_t x - \big(h(t)T^2T_t^{-1}+T\big)\,u\big)\,\partial_u$

тим рівнянням, що допускають розширення ліївських симетрій, будуть $g=\lambda e^{-nht}(\alpha e^{-nht}+\beta)^\rho$, $g=\lambda e^{-nht}e^{\alpha e^{-nht}}$ та $g=\lambda e^{-nht}$, де λ, α та ρ — ненульові сталі, а стала β є довільною (див. випадки 2–4 таблиці 5.3). Для кожного з перших двох значень параметр-функції g максимальна алгебра ліївської інваріантності двовимірна, а третього — тривимірна. А саме, рівняння $u_t+u^nu_x+hu=\lambda e^{-nht}u_{xx}$, $n\neq 0,1$, допускає алгебру $\langle\,\partial_x,\ e^{nht}(\partial_t-hu\partial_u),\ 2\partial_t-nhx\partial_x-hu\partial_u\,\rangle$, третій базисний елемент якої пропущено у [125].

5.4. Інваріантні розв'язки

Деякі рівняння з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ допускають дискретні точкові симетрії. Наприклад, якщо g та h — непарні функції, то відповідне рівняння інваріантне відносно зміни знаку пари (t,x). Ці перетворення не використано в процесі класифікації підалгебр відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності.

5.4.1. Нееквівалентні підалгебри

Алгебри Лі, що є лінійними оболонками векторних полів, поданих у таблиці 5.1, мають наступну структуру. У випадку 1 відповідна алгебра є одновимірною (типу A_1; тут і далі використовуємо позначення, введені в [82]). У випадках 2, 3 та 5 алгебри двовимірні. У випадку 2 з $\rho=-1$ та у випадку 5 вони абелеві (типу $2A_1$), а у випадку 2 з $\rho\neq -1$ й у випадку 3 — неабелеві (типу A_2). Алгебри у випадках 4 і 6–8 тривимірні. У випадках 4 та 6 з $\rho\neq\pm1$ алгебри мають тип $A^a_{3.5}$, де $a=\frac{1}{2}$ та $a=\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^{\operatorname{sign}\rho}$ відповідно. Якщо $\rho=\pm1$, то алгебра у випадку 6 ізоморфна $A_1\oplus A_2$. У випадку 7 алгебра має тип $A_{3.2}$, а у випадку 8 вона має тип $A^a_{3.7}$, де $a=|\rho|$. П'ятивимірна алгебра у випадку 9 ізоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\Subset 2A_1$.

У таблиці 5.4 представлено оптимальні системи одно- та двовимірних підалгебр для всіх випадків таблиці 5.1 (крім випадку 9, що відповідає класичному рівнянню Бюргерса, і випадку $6_{\rho=1}$, що $\hat{G}^{\sim}_{n=1}$-еквівалентний до випадку $6_{\rho=-1}$). Тут $a\in\mathbb{R}$, $n\neq0$, $\sigma\in\{-1,0,1\}$. Ці результати повністю узгоджуються з [82], де оптимальні системи підалгебр отримано для всіх три- і чотиривимірних алгебр Лі. Оскільки рівняння Бюргерса лінеаризується перетворенням Коула–Хопфа [45, 62] до лінійного рівняння теплопровідності, знаходити його точні розв'язки за допомогою ліївських редукцій не потрібно.

Зауваження 5.15. Оптимальні системи одновимірних підалгебр максимальних алгебр ліївської інваріантності узагальнених рівнянь Бюргерса

Таблиця 5.4. Оптимальні системи одно- і двовимірних підалгебр максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$

№	Підалгебри
	$n \neq 1$
1	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$
$2_{\rho\neq -1}$	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{\rho}_{2.1} = \langle t\partial_t + \frac{\rho+1}{2}x\partial_x + \frac{\rho-1}{2n}u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{\rho}_{2.3} = \langle \partial_x,\, t\partial_t + \frac{\rho+1}{2}x\partial_x + \frac{\rho-1}{2n}u\partial_u \rangle$
$2_{\rho=-1}$	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{a}_{2.2} = \langle nt\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{-1}_{2.3} = \langle \partial_x,\, nt\partial_t - u\partial_u \rangle$
3	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}_{3.1} = \langle 2n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}_{3.2} = \langle \partial_x,\, 2n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle$
4	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{0}_{2.1} = \langle 2nt\partial_t + nx\partial_x - u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{0}_{2.3} = \langle \partial_x,\, 2nt\partial_t + nx\partial_x - u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{\sigma}_{4.1} = \langle \partial_t + \sigma\partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}_{4.2} = \langle \partial_t,\, \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}_{4.3} = \langle \partial_t,\, 2nt\partial_t + nx\partial_x - u\partial_u \rangle$
	$n = 1$
5	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{a}_{5} = \langle (t+a)\partial_x + \partial_u \rangle$
$6_{\rho\neq\pm 1}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{\rho}_{2.1} = \langle t\partial_t + \frac{\rho+1}{2}x\partial_x + \frac{\rho-1}{2}u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{\rho}_{2.3} = \langle \partial_x,\, t\partial_t + \frac{\rho+1}{2}x\partial_x + \frac{\rho-1}{2}u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{\sigma}_{5} = \langle (t+\sigma)\partial_x + \partial_u \rangle$ $\mathfrak{g}_{6.1} = \langle t\partial_x + \partial_u,\, t\partial_t + \frac{\rho+1}{2}x\partial_x + \frac{\rho-1}{2}u\partial_u \rangle$
$6_{\rho=-1}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$ $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}^{a}_{2.2} = \langle t\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{-1}_{2.3} = \langle \partial_x,\, t\partial_t - u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{\sigma}_{5} = \langle (t+\sigma)\partial_x + \partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{a}_{6.4} = \langle t\partial_x + \partial_u,\, t\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$
7	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$ $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}_{3.1} = \langle 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}_{3.2} = \langle \partial_x,\, 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}^{0}_{5} = \langle t\partial_x + \partial_u \rangle$
8	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$, $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, $\mathfrak{g}_8 = \langle (t^2+1)\partial_t + (t+\rho)x\partial_x + (x + (\rho - t)u)\partial_u \rangle$

з підкласу (5.11) знайдено у роботі [47], проте там міститься декілька неточностей. Зокрема, в [47] стверджується, що максимальні алгебри ліївської інваріантності у випадку 6 при $\rho = 1$ та $\rho = -1$ мають одну й ту саму оптимальну систему підалгебр, що насправді не так (див. таблицю 5.4). А саме, при $\rho = -1$ підалгебру $\langle t\partial_t + (x+at)\partial_x + a\partial_u \rangle$, наведену в [47] при $\rho = \pm 1$, потрібно замінити підалгеброю $\mathfrak{g}^{a}_{2.2} = \langle t\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$.

5.4.2. Ліївські редукції за одновимірними підалгебрами

Анзаци та редуковані рівняння, отримані для рівнянь з класу (5.10) за допомогою одновимірних підалгебр з таблиці 5.4, зібрано у таблиці 5.5. Тут $h(t) = 0 \bmod \hat{G}^{\sim}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ та $\varepsilon = \pm 1$. Для алгебри $\mathfrak{g}_{2.1}^{\rho}$ маємо додаткові обмеження: $\rho \neq -1$ при $n \neq 1$; $\rho \neq \pm 1$ при $n = 1$; $\varepsilon = 1$ у випадку $\rho = 0$.

Таблиця 5.5. Нееквівалентні ліївські редукції рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ до звичайних диференціальних рівнянь

$g(t)$	$\mathfrak{g}$	ω	Анзац, u	Редуковане рівняння
		При всіх n		
εt^{ρ}	$\mathfrak{g}_{2.1}^{\rho}$	$xt^{-\frac{\rho+1}{2}}$	$t^{\frac{\rho-1}{2n}}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi'' + \left(\frac{\rho+1}{2}\omega - \varphi^n\right)\varphi' + \frac{1-\rho}{2n}\varphi = 0$
εt^{-1}	$\mathfrak{g}_{2.2}^{a}$	$x - \frac{a}{n}\ln t$	$t^{-\frac{1}{n}}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi'' + \left(\frac{a}{n} - \varphi^n\right)\varphi' + \frac{1}{n}\varphi = 0$
εe^{t}	$\mathfrak{g}_{3.1}$	$xe^{-\frac{1}{2}t}$	$e^{\frac{1}{2n}t}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi'' + \left(\frac{1}{2}\omega - \varphi^n\right)\varphi' - \frac{1}{2n}\varphi = 0$
1	$\mathfrak{g}_{4.1}^{\sigma}$	$x - \sigma t$	$\varphi(\omega)$	$\varphi'' + (\sigma - \varphi^n)\varphi' = 0$
		При $n = 1$		
$\forall$	$\mathfrak{g}_{5}^{a}$	t	$\varphi(\omega) + \dfrac{x}{t+a}$	$(\omega + a)\varphi' + \varphi = 0$
$\varepsilon e^{2\rho \operatorname{arctg} t}$	$\mathfrak{g}_{8}$	$\dfrac{xe^{-\rho \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}$	$\dfrac{e^{\rho \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi(\omega) + \dfrac{xt}{t^2+1}$	$\varepsilon\varphi'' + (\rho\omega - \varphi)\varphi' - \rho\varphi - \omega = 0$

Редуковане рівняння, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, не розглядаємо, тому що воно дає лише сталі розв'язки рівнянь вигляду (5.10). Також пропускаємо підалгебру $\mathfrak{g}_0$, тому що вона не задовольняє умову трансверсальності [80] і не може бути використана для побудови анзаців. Завдяки кільком вдосконаленням процесу класифікації (калібрування h до 0 перетвореннями еквівалентності, подальше спрощення довільного елемента g перетвореннями еквівалентності для випадків розширень ліївських симетрій і обрання для проведення редукції найпростіших представників з-поміж усіх еквівалентних підалгебр) як анзаци, так і редуковані рівняння зазвичай мають просту одноманітну структуру.

Зауважимо, що перетворення $y=\varphi^{-n}$ відображає редуковані рівняння з таблиці 5.5 (крім рівнянь для підалгебр $\mathfrak{g}_5^a$ та $\mathfrak{g}_8$) у рівняння Ейлера–Пенлеве загального вигляду $yy''+\alpha y'^2+p(\omega)yy'+q(\omega)y^2+\beta y'+\gamma=0$ [118]. Тут p та q — гладкі функції від ω, а сталі α, β та γ довільні.

Зауваження 5.16. У роботі [133] редуковане рівняння, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{g}_8$, наведено з помилками у знаках. Як результат — вирази, побудовані в цій роботі в якості розв'язків, насправді не є розв'язками відповідного узагальненого рівняння Бюргерса, що можна перевірити прямою підстановкою.

Лише деякі з редукованих рівнянь допускають подальше пониження порядку, не кажучи вже про знаходження їхніх розв'язків у явному вигляді. Оскільки в літературі не було повного опису ліївських редукцій рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, розглянемо ці випадки детально. Тут і далі c_0 та c_1 — довільні сталі (сталі інтегрування).

Підалгебри $\mathfrak{g}_{2.1}^{\rho}$. Для $n\neq\pm1$ та $\rho=\frac{1-n}{1+n}$ відповідне редуковане рівняння спрощується до $\varepsilon\varphi''-\varphi^n\varphi'+\frac{1}{n+1}(\omega\varphi'+\varphi)=0$ й інтегрується один раз, див. [125, рівняння (85)]:

$$\varepsilon(n+1)\varphi'-\varphi^{n+1}+\omega\varphi+c_0=0. \tag{5.13}$$

Рівняння (5.13) можна розв'язати в частковому випадку при $c_0=0$. Отримаємо однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння (5.10) з функцією $g(t)=\varepsilon t^{\frac{1-n}{1+n}}$, де $\varepsilon=\pm1$, а $\mu=\frac{n}{2\varepsilon(n+1)}$:

$$u(t,x)=\frac{t^{-\frac{1}{n+1}}\exp\left(-\frac{\mu}{n}x^2t^{-\frac{2}{n+1}}\right)}{\left(c_1-2\mu t^{-\frac{1}{n+1}}\int\exp\left(-\mu x^2t^{-\frac{2}{n+1}}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac1n}}. \tag{5.14}$$

Якщо $\mu>0$, ці розв'язки можна записати в термінах функції помилок $\operatorname{erf}(\theta)=\frac{2}{\sqrt\pi}\int_0^\theta e^{-s^2}\mathrm{d}s$:

$$u(t,x)=\frac{t^{-\frac{1}{n+1}}\exp\left(-\frac{\mu}{n}x^2t^{-\frac{2}{n+1}}\right)}{\left(c_1-\sqrt{\pi\mu}\,\operatorname{erf}\left(\sqrt\mu\,xt^{-\frac{1}{n+1}}\right)\right)^{\frac1n}}. \tag{5.15}$$

Підалгебри $\mathfrak{g}^a_{2.2}$. У випадку $n=1$ підалгебра з цієї сім'ї з $a=0$ дає редуковане рівняння, яке можна один раз проінтегрувати й отримати

$$\varphi'+\ln(\varphi'-1)=\frac{\varphi^2}{2\varepsilon}+c_0,\quad \text{або}\quad (\varphi'-1)e^{\varphi'-1}=\tilde c_0 e^{\frac{\varphi^2}{2\varepsilon}}.$$

Останнє рівняння можна розв'язати відносно φ' у термінах функції Ламберта $W(y)$, яку неявно визначає рівняння $We^W=y$, а саме

$$\varphi'=1+W\big(\tilde c_0 e^{\frac{\varphi^2}{2\varepsilon}}\big).$$

Таким чином, загальний розв'язок цього редукованого рівняння можна записати неявно, ще раз проінтегрувавши це рівняння. Також можна виразити φ через φ' з один раз проінтегрованого рівняння, а потім використати той факт, що загальний розв'язок рівняння $\varphi=F(\varphi')$ можна зобразити в параметричній формі як

$$\omega+c_1=\int\zeta^{-1}F'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\qquad \varphi=F(\zeta).$$

Підалгебра $\mathfrak{g}_{3.1}$. Відповідне редуковане рівняння у випадку $n=-1$ можна проінтегрувати лише один раз:

$$\varepsilon\varphi'+\frac12\omega\varphi-\ln\varphi+c_0=0.$$

Зауваження 5.17. Редуковані рівняння, пов'язані з підалгебрами $\mathfrak{g}^\rho_{2.1}$ та $\mathfrak{g}_{3.1}$, розв'язано чисельними методами в [118]. Насправді, еквівалентну редукцію до першого з них розглянуто в [118] для $g=(t+1)^\rho$, що зводиться до $g=t^\rho$ зсувом по t.

Підалгебри $\mathfrak{g}^\sigma_{4.1}$. Для зручності спочатку замінимо $\sigma\in\{-1,0,1\}$ довільним $a\in\mathbb{R}$. Анзац $u=\varphi(x-at)$, отриманий для $g(t)=1$ (у випадку $n=1$ маємо класичне рівняння Бюргерса), приводить до редукованого рівняння $\varphi''+(a-\varphi^n)\varphi'=0$, звідки

$$\varphi'-\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}+a\varphi+c_0=0,\qquad \text{якщо}\qquad n\neq-1,$$
$$\varphi'+a\varphi-\ln\varphi+c_0=0,\qquad \text{якщо}\qquad n=-1.$$

Після ще одного інтегрування загальні розв'язки цих рівнянь неявно виражаються в квадратурах. Для деяких значень сталих можна знайти точні вирази цих розв'язків. Очевидний випадок $n = 1$ відповідає класичному рівнянню Бюргерса, а тому не є цікавим. В іншому випадку явного розв'язання, для якого $c_0 = 0$, залежно від значення a побудуємо дві різні сім'ї розв'язків рівняння (5.10) з $g(t) = 1$:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \left(\frac{a(n+1)}{1+c_1e^{an(x-at)}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{якщо} \qquad a \neq 0,\\
u(t,x) &= \left(\frac{n+1}{c_1-nx}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{якщо} \qquad a = 0.
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Підалгебри $\mathfrak{g}_5^a$. Редуковане рівняння має вигляд $(\omega+a)\varphi'+\varphi = 0$. Воно дає тривіальний розв'язок рівняння (5.11) для довільного значення $g(t)$:

$$
u(t,x) = \frac{x+c_0}{t+a}. \tag{5.17}
$$

5.4.3. Ліївські редукції за двовимірними підалгебрами

Такі редукції приводять до алгебраїчних редукованих рівнянь, що не дають змоги побудувати нетривіальні розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$. Так, підалгебра $\mathfrak{g}_0$ не задовольняє умову трансверсальності, а тому не дає ліївських анзаців для u. Редукції за $\mathfrak{g}_{2.3}^\rho$ та $\mathfrak{g}_{3.2}$ дають лише тривіальний (тотожно рівний нулю) розв'язок. Розв'язок є інваріантним відносно $\mathfrak{g}_{4.2}$ тоді і тільки тоді, коли він є сталою. Використовуючи підалгебру $\mathfrak{g}_{4.3}$, отримаємо розв'язок (5.16) з $c_1 = 0$. Єдиний розв'язок, інваріантний відносно підалгебри $\mathfrak{g}_{6.1}$, має вигляд (5.17) з $a = c_0 = 0$. Редукція за допомогою підалгебр $\mathfrak{g}_{6.4}^a$ дає розв'язок, тільки якщо $a = 0$, і цей розв'язок має вигляд (5.17) з $a = 0$.

5.4.4. Розмноження розв'язків перетвореннями еквівалентності

Використовуючи розв'язки (5.14)–(5.17), знайдені у пункті 5.4.2, і перетворення з групи $\hat{G}^{\sim}$, що відповідають значенням параметрів (5.8), можна побудувати розв'язки рівнянь з початкового класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ з довільними значеннями $h(t)$ та певними значеннями $g(t)$:

$$(i)\quad u_t + u^n u_x + h(t)u = \varepsilon T^{\frac{1-n}{1+n}} e^{-n\int h(t)\,\mathrm{d}t} u_{xx}:$$

$$u = \frac{T^{-\frac{1}{n+1}} \exp\left(-\frac{\mu}{n} x^2 T^{-\frac{2}{n+1}}\right) e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}}{\left(c_1 - 2\mu T^{-\frac{1}{n+1}} \int e^{-\mu x^2 T^{-\frac{2}{n+1}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}},$$

$$(ii)\quad u_t + u^n u_x + h(t)u = e^{-n\int h(t)\,\mathrm{d}t} u_{xx}:$$

$$u = \left(\frac{a(n+1)}{1 + c_1 e^{an(x-aT)}}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}, \quad u = \left(\frac{n+1}{c_1 - nx}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t},$$

$$(iii)\quad u_t + uu_x + h(t)u = g(t)u_{xx}:$$

$$u = \frac{x + c_0}{\int e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + a}\, e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Тут a та c — довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$, $\kappa = \sqrt{\frac{n}{2\varepsilon(n+1)}}$, а функцію $T = T(t)$ визначено в (5.8). Перед відображенням за допомогою згаданих вище перетворень розв'язок (5.14) можна додатково розмножити перетвореннями з групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{h=0}$. Зауважимо, що зсуви по x належать перетину максимальних груп ліївських симетрій усіх рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$ і, відповідно, з класу (5.10), а тому лише перетворюють розв'язки, в той час як зсуви по t і масштабні перетворення є перетвореннями еквівалентності та змінюють довільний елемент g.

Рівняння (ii) можна переписати у вигляді

$$u_t + u^n u_x - \frac{1}{n}\frac{k_t}{k} u = k u_{xx}, \tag{5.18}$$

де функції $k = k(t)$ та $h = h(t)$ пов'язані співвідношенням $k = e^{-n\int h(t)\,\mathrm{d}t}$. Для $n = 1$ рівняння (5.18) співпадає з рівнянням (3.262) з роботи [116, с. 90], яке застосовують для моделювання акустичних хвиль в атмосфері; від моделі Бюргерса для турбулентності воно відрізняється змінним коефіцієнтом дифузії. Отже, за допомогою розмноження перетворення-

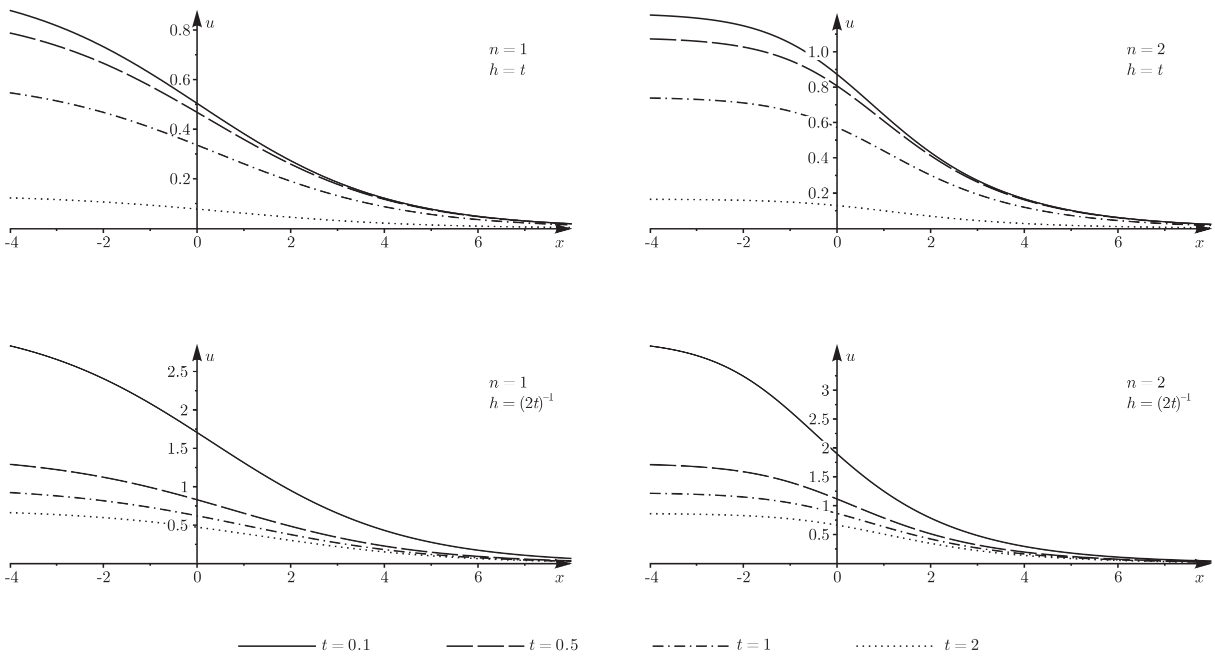

Рис. 5.1: Поведінка розв'язку (5.19) при $c_1 = 1$, $a = 0.5$ для окремих значень n та h

ми еквівалентності можна побудувати дві сім'ї точних розв'язків рівняння (ii). Поведінку розв'язку

$$u = \left(\frac{a(n+1)}{1 + c_1 e^{an(x-aT)}} \right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t} \tag{5.19}$$

для двох значень n та двох виглядів коефіцієнта дифузії h проілюстровано на рис. 5.1.

5.5. Узагальнені рівняння Бюргерса, що лінеаризуються до рівняння теплопровідності

Нагадаємо, що класичне рівняння Бюргерса

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = \lambda \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \tag{5.20}$$

лінеаризується до рівняння теплопровідності

$$\hat{v}_{\hat{t}} = \lambda \hat{v}_{\hat{x}\hat{x}} \tag{5.21}$$

перетворенням Коула–Хопфа $\hat{u} = -2\lambda\hat{v}_{\hat{x}}/\hat{v}$. А саме, це перетворення зводить рівняння (5.20) до рівняння $(\hat{v}\partial_{\hat{x}} - \hat{v}_{\hat{x}})\,[\hat{v}_{\hat{t}} - \lambda\hat{v}_{\hat{x}\hat{x}}] = 0$, яке можна проінтегрувати за x, і «сталу інтегрування», яка насправді є довільною функцією від t, можна покласти рівною нулю завдяки невизначеності у виборі функції $\hat{v}$. Таким чином, точні розв'язки (5.20) легко отримати з точних розв'язків лінійного рівняння теплопровідності (5.21).

У [123] рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + uu_x + hu = \lambda e^{-ht} u_{xx} \tag{5.22}$$

з $\lambda = \frac{1}{2}$ та $h = \mathrm{const}$ різними способами лінеаризовано до лінійних еволюційних рівнянь, які зводяться до класичного рівняння теплопровідності за допомогою точкових перетворень. Безпосередня лінеаризація рівняння (5.22) до рівняння теплопровідності є більш ефективною.

Виконаємо її, використавши композицію точкового перетворення еквівалентності з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, яке відображає (5.22) у рівняння (5.20), та перетворення Коула–Хопфа. Рівняння (5.22) лінеаризується до (5.21) перетворенням

$$\hat{t} = -\frac{1}{h}e^{-ht}, \qquad \hat{x} = x, \qquad -2\lambda\frac{\hat{v}_{\hat{x}}}{\hat{v}} = e^{ht}u.$$

Більш загально, всі рівняння з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq 0\}}$, які лінеаризуються до (5.21), мають вигляд

$$u_t + uu_x + h(t)u = \lambda e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t} u_{xx}. \tag{5.23}$$

Відповідне перетворення

$$\hat{t} = \int H(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{x} = x, \qquad -2\lambda\frac{\hat{v}_{\hat{x}}}{\hat{v}} = e^{\int h(t)\,\mathrm{d}t}u,$$

де $H(t) := e^{-\int h(t)\,\mathrm{d}t}$, дає формулу для породження розв'язків рівняння (5.23) з розв'язків рівняння теплопровідності:

$$u(t,x) = -2\lambda H(t)\frac{\hat{v}_x(\hat{t},x)}{\hat{v}(\hat{t},x)}, \qquad \text{де} \qquad \hat{t} = \int H(t)\,\mathrm{d}t.$$

Розглянемо, наприклад, точний розв'язок $\hat v = ce^{a\hat x + a^2\lambda\hat t}(\hat x + 2a\lambda\hat t)$ рівняння теплопровідності (5.21). Тут c та a — довільні ненульові сталі. Використовуючи наведену вище формулу, отримаємо точний розв'язок рівняння (5.23):

$$u(t,x) = -2\lambda H(t)\left(\frac{1}{x + 2a\lambda\int H(t)\,\mathrm{d}t} + a\right).$$

5.6. Висновки

У цьому розділі проведено групову класифікацію класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу. Дослідження ґрунтується на повному описі групоїдів еквівалентності всього класу і певних його підкласів. Цей опис представлено у теоремах 5.1, 5.5 і 5.7 та їхніх наслідках, які зручно сформулювати в термінах нормалізованих класів диференціальних рівнянь. Для опису допустимих перетворень у підкласі (5.6), виокремленому обмеженням $n = 1$, знадобилася узагальнена розширена група еквівалентності, x- та u-компоненти перетворень з якої нелокально залежать від довільного елемента h. Еквівалентність, породжена звичайною групою еквівалентності всього класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ або підкласу (5.6), є занадто слабкою для її ефективного використання. Перетворення з узагальненої розширеної групи еквівалентності підкласу (5.6) відіграють важливу роль, зокрема, в спрощенні процесу лінеаризації рівнянь з цього підкласу.

Опис допустимих перетворень використано при класифікації ліївських симетрій цих рівнянь. До спрощення групової класифікації класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ важливим є правильний вибір калібрування довільного елемента. Задачу групової класифікації для всього класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ з точністю до загальної точкової еквівалентності розв'язано шляхом її зведення до аналогічної задачі для підкласу (5.10). Це стало можливим завдяки калібруванню довільного елемента $h(t)$ до нуля. Відповідний результат класифікації (список значень довільного елемента та відповідних підалгебр) наведено в таблиці 5.1. Таблиця 5.3 містить повний список розширень ліївських симетрій для класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ без спрощень вигляду довільного елемента перетвореннями еквівалентності.

Знайдені ліївські симетрії застосовано до відшукання точних розв'язків рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, причому систематично виконано всі можливі нееквівалентні ліївські редукції. А саме, побудовано оптимальні системи одно- та двовимірних підалгебр виокремлених алгебр ліївської інваріантності, а також проведено відповідні ліївські редукції до звичайних диференціальних рівнянь і до алгебраїчних рівнянь. Розглянуто як загальну точкову еквівалентність рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$, так і еквівалентність підалгебр відносно внутрішніх автоморфізмів відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності. Це суттєво знизило кількість різноманітних ліївських редукцій, які необхідно було розглянути, а також спростило відповідні анзаци і редуковані рівняння. Деякі з узагальнених рівнянь Бюргерса цього класу лінеаризуються до рівняння теплопровідності за допомогою композиції перетворень еквівалентності з перетворенням Коула–Хопфа. Незважаючи на стисле представлення, побудовані у цьому розділі сім'ї точних розв'язків рівнянь з класу $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ включають у себе всі точні розв'язки цих рівнянь, відомі в літературі.

Результати цього розділу опубліковано в роботі [90].

Висновки

У дисертаційній роботі з використанням сучасних методів групового аналізу диференціальних рівнянь та оригінальних технік досліджено низку класів узагальнених рівнянь Бюргерса.

Вичерпно описано групоїди еквівалентності та знайдено групи еквівалентності класу (3.3) (який є надкласом для всіх класів узагальнених рівнянь Бюргерса, розглянутих у дисертації), класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, класів лінеаризовних узагальнених рівнянь Бюргерса, класу $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса у збережній формі, класу $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ узагальнених потенціальних рівнянь Бюргерса, класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням, де коефіцієнти залежать від часу, а також низки підкласів цих класів. Встановлено відповідність між групоїдами еквівалентності найширшого класу $\mathcal{A}\big|_{\{a\neq0\}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса, лінеаризовних перетворенням Коула–Хопфа, та класу лінійних однорідних еволюційних рівнянь другого порядку. Основною технікою опису групоїдів еквівалентності є перевірка нормалізованості класу або, якщо клас не є нормалізованим, розбиття його на нормалізовані підкласи. Зокрема, кожен з ненормалізованих класів $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ та $\mathcal{D}\big|_{\{ng\neq0\}}$ розбито на кілька підкласів, які нормалізовані в різному сенсі, а тому вимагають побудови різних груп еквівалентності (звичайної, узагальненої або узагальненої розширеної). Порівняння показало, що групоїди еквівалентності споріднених класів $\mathcal{P}\big|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{C}\big|_{\mathcal{S}}$ мають подібну структуру і суттєво відрізняються від групоїда еквівалентності класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Досить несподіваним результатом виявилося існування серед класів узагальнених рівнянь Бюргерса декількох прикладів класів, нормалізованих у звичайному сенсі, групи еквівалентності яких є скінченновимірними, а довільний елемент залежить від двох аргументів.

Проведено розширений симетрійний аналіз класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній, що включає опис ліївських симетрій, ліївських та некласичних редукцій, прихованих симетрій, законів збереження, потенціальних допустимих перетворень, потенціальних симетрій рівнянь з цього класу та побудову їх точних розв'язків. Хоча клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і складається з рівнянь досить простого вигляду, він має багатий набір властивостей, цікавих з точки зору симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, а тому придатний для перевірки на ньому різноманітних методів, що були або ще будуть розроблені в цій галузі. Більш того, вивчення класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у дисертації може слугувати джерелом ідей щодо покращення та модифікації існуючих технік симетрійного аналізу диференціальних рівнянь.

Зокрема, клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, але при цьому його алгебра еквівалентності $G^{\sim}$ скінченновимірна. Тому групову класифікацію цього класу ефективно проведено з використанням алгебраїчного методу, додатково оптимізованого описом лише придатних підалгебр у проекції його алгебри еквівалентності. Загалом для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ існує дев'ятнадцять $G^{\sim}$-нееквівалентних випадків розширення ліївської симетрії.

Запропоновано техніку класифікації ліївських редукцій для рівнянь з нормалізованого класу відносно групи еквівалентності цього класу. Завдяки поєднанню цієї техніки з відомою технікою підбору оптимальних анзаців для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ побудовано редуковані рівняння, що належать (за виключенням двох простих рівнянь першого порядку) класу звичайних диференціальних рівнянь другого порядку простого і уніфікованого вигляду. Це дозволило вичерпно описати ліївські редукції та приховані симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та знайти нові точні розв'язки таких рівнянь.

Оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ прокласифіковано з точністю до еквівалентності, породженої групою еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу. За допомогою спеціального випадку знайдених операторів редукції встановлено зв'язок між певними рівняннями з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та потенціальним рівнянням швидкої дифузії з нелінійністю степеня -1. Кожен відомий точний розв'язок цього рівняння дав змогу побудувати декілька параметризованих сімей точних розв'язків певного узагальненого рівняння Бюргерса. Слід зазначити, що це один з небагатьох прикладів повного опису операторів редукції для деякого класу диференціальних рівнянь, у якому некласичні редукції дають нетривіальні точні розв'язки.

Також досліджено закони збереження, потенціальні допустимі перетворення та потенціальні симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Виявилося зручним розпочинати класифікацію потенціальних симетрій диференціальних рівнянь з дослідження потенціальних допустимих перетворень у класі таких рівнянь. На прикладі класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$ запропоновано поняття потенціального групоїда еквівалентності.

Розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq0\}}$, до якого застосовано калібрування довільного елемента, що дозволило спростити процес класифікації. Систематично виконано всі можливі нееквівалентні ліївські редукції, завдяки чому вдалося побудувати деякі точні інваріантні розв'язки цих рівнянь. При цьому застосовані техніки були більш традиційними порівняно з розглядом відповідної задачі для класу $\mathcal{L}\big|_{\mathcal{S}}$. Проте розгляд класу $\mathcal{D}|_{\{ng\neq0\}}$ дозволив проілюструвати, як спрощується виконання групової класифікації при правильному виборі калібрування довільного елемента.

У зауваженнях 4.10, 5.13–5.16 детально проаналізовано неточності, які містяться у попередніх роботах, присвячених груповому аналізу узагальнених рівнянь Бюргерса з відповідних класів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Ахатов, И. Ш.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход / И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов // *Итоги науки и техн.* — 1989. — т. 34. — С. 3–83.

[2] *Капитанский, Л. В.* Групповой анализ уравнений Навье–Стокса при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения / Л. В. Капитанский // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1979. — т. 84. — С. 89–107.

[3] *Катков, В. Л.* Групповая классификация решений уравнений Хопфа / В. Л. Катков // *Журн. прикл. механики и техн. физики.* — 1965. — № 6. — С. 105–106.

[4] *Лейбович, С.* Нелинейные волны / С. Лейбович, А. Сибасс. — Москва: Мир, 1977. — 320 с.

[5] *Магадеев, Б. А.* О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений / Б. А. Магадеев // *Алгебра и анализ.* — 1993. — т. 5, вып. 2. — С. 141–156.

[6] *Мубаракзянов, Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли / Г. М. Мубаракзянов // *Изв. Высш. Учебн. Завед.* — 1963. — № 1 (32). — С. 114–123.

[7] *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — Москва: Наука, 1978. — 400.

[8] *Олвер, П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.

[9] *Попович, Р. О.* Про симетрію та точні розв'язки рівняння переносу / Р. О. Попович // *Укр. матем. журн.* — 1995. — т. 47, № 1. — С. 121–125.

[10] *Попович, Р. О.* Про клас Q-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь / Р. О. Попович // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці, Праці Інституту математики. — т. 19. — Київ: Інститут математики НАН України, 1998. — С. 194–199.

[11] *Попович, Р. О.* Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ: Інститут математики НАН України, 2009. — 396 с.

[12] *Почекета, О. А.* Групоїди еквівалентності узагальнених рівнянь Бюргерса / О. А. Почекета // *Доповіді НАН України.* — 2013. — № 7. — С. 19–25.

[13] *Почекета, О. А.* Оператори редукції і точні розв'язки узагальнених рівнянь Бюргерса / О. А. Почекета // Матеріали міжнародної наукової міждисциплінарної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2013» (Київ, 18–22 березня, 2013). — Київ: Logos, 2013. — С. 123–127.

[14] *Почекета, О. А.* Оператори редукції рівняння Бюргерса / О. А. Почекета, Р. О. Попович // *Доповіді НАН України.* — 2012. — № 12. — С. 24–30.

[15] *Сидоров, А. Ф.* Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука, 1984. — 272 с.

[16] *Уизем, Д.* Линейные и нелинейные волны / Д. Уизем. — Москва: Мир, 1977. — 638 с.

[17] *Фущич, В. И.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений / В. И. Фущич, Л. Баранник, А. Баранник. — Киев: Наукова думка, 1991. — 304 с.

[18] *Фущич, В. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. — Київ: Наукова думка, 1989. — 336 с.

[19] *Черніга, Н. Д.* Умовна симетрія рівняння Бюргерса та деяких його узагальнень / Н. Д. Черніга // *Пр. Інст. Мат. НАН України.* — 1998. — № 19. — С. 265–269.

[20] *Яненко, Н. Н.* Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных / Н. Н. Яненко // IV Всесоюзный математический съезд (Ленинград, 3–12 июля 1961 г.): труды. — Ленинград: Наука, 1964. — т. 2. Секционные д. — С. 247–252.

[21] *Abraham-Shrauner, B.* Master partial differential equations for a type II hidden symmetry / B. Abraham-Shrauner, K. S. Govinder // *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — Vol. 343. — P. 525–530.

[22] *Ames, W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. II / W. F. Ames. — Academic press edition. — New York, 1972. — xi+305 p.

[23] *Arrigo, D. J.* Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman–Cole and Clarkson–Kruskal / D. J. Arrigo, P. Broadbridge, J. M. Hill // *J. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 34. — P. 4692–4703.

[24] *Arrigo, D. J.* On the determining equations for the nonclassical reductions of the heat and Burgers' equation / D. J. Arrigo, F. Hickling // *J. Math. Anal. Appl.* — 2002. — Vol. 270, no. 2. — P. 582–589.

[25] *Arrigo, D. J.* Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source / D. J. Arrigo, J. M. Hill, P. Broadbridge // *IMA J. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 52. — P. 1–24.

[26] *Barannyk A. F.* On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics /

A. F. Barannyk, I. I. Yuryk // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1998. — Vol. 31, no. 21. — P. 4899–4907.

[27] *Basarab-Horwath, P.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / P. Basarab-Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov // *Acta Appl. Math.* — 2001. — Vol. 69, no. 1. — P. 43–94.

[28] *Bateman, H.* Some recent researches on the motion of fluids / H. Bateman // *Monthly Weather Review.* — 1915. — Vol. 43:4. — P. 163–170.

[29] *Bec, J.* Burgers turbulence / J. Bec, K. Khanin // *Phys. Rep.* — 2007. — Vol. 447, no. 1–2. — P. 1–66.

[30] *Bihlo, A.* Complete group classification of a class of nonlinear wave equations / A. Bihlo, E. D. S. Cardoso-Bihlo, R. O. Popovych // *J. Math. Phys.* — 2012. — Vol. 53, no. 12. — 123515, 32 p.

[31] *Bihlo, A.* Symmetry analysis of barotropic potential vorticity equation / A. Bihlo, R. O. Popovych // *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China).* — 2009. — Vol. 52, no. 4. — P. 697–700.

[32] *Bluman, G. W.* Construction of solutions to partial differential equations by the use of transformation groups: Ph.D. thesis. — Pasadena, California: California Institute of Technology, 1967.

[33] *Bluman, G. W.* The general similarity solution of the heat equation / G. W. Bluman, J. D. Cole // *J. Math. and Mech.* — 1969. — Vol. 18, no. 11. — P. 1025–1042.

[34] *Bluman, G. W.* Symmetries and differential equations / G. W. Bluman, S. Kumei — New York, Springer-Verlag, 1989. — xiv+412 p.

[35] *Boyko, V.* On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations / V. Boyko // Proc. 2nd Int. Conf. Symmetry in Nonli-

near Mathematical Physics (Kyiv, 1997). — Vol. 1. — Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. — P. 122–129.

[36] *Boyko, V. M.* Singular reduction modules of differential equations / V. M. Boyko, M. Kunzinger, R. O. Popovych. // arXiv:1201.3223. — 2012. — 30 p.

[37] *Boyko, V. M.* Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification / V. M. Boyko, R. O. Popovych, N. M. Shapoval // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2015. — Vol. 621. — 012002, 17 p.

[38] *Broadbridge, P.* The forced Burgers equation, plant roots and Schrödinger's eigenfunctions / P. Broadbridge // *J. Eng. Math.* — 1999. — Vol. 36, no. 1–2. — P. 25–39.

[39] *Burde, G. I.* New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations / G. I. Burde // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1996. — Vol. 29. — P. 1665–1683.

[40] *Burgers, J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence / J. M. Burgers // Advances in Applied Mechanics / Ed. by R. von Mises, T. von Karman. — New York: Academic Press Inc., 1948. — Vol. 1. — P. 171–199.

[41] *Cates, A. T.* A point transformation between forms of the generalised Burgers equation / A. T. Cates // *Phys. Lett. A.* — 1989. — Vol. 137, no. 3. — P. 113–114.

[42] *Clarkson, P. A.* New similarity reductions of the Boussinesq equation / P. A. Clarkson, M. D. Kruskal // *J. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 30, no. 10. — P. 2201–2213.

[43] *Clarkson, P. A.* Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions / P. A. Clarkson, E. L. Mansfield // *SIAM J. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 54, no. 6. — P. 1693–1719.

[44] *Clarkson, P. A.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations / P. A. Clarkson, E. L. Mansfield // *Physica D.* — 1994. — Vol. 70, no. 3. — P. 250–288.

[45] *Cole, J. D.* On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics / J. D. Cole // *Quart. Appl. Math.* — 1951. — Vol. 9. — P. 225–236.

[46] *Crighton, D. G.* Asymptotic solutions of model equations in nonlinear acoustics / D. G. Crighton, J. F. Scott // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.* — 1979. — Vol. 292, no. 1389. — P. 101–134.

[47] *Doyle, J.* Similarity solutions of a generalized Burgers equation / J. Doyle, M. J. Englefield // *IMA J. Appl. Math.* — 1990. — Vol. 44. — P. 145–153.

[48] Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities / O. O. Vaneeva, A. G. Johnpillai, R. O. Popovych, C. Sophocleous // *J. Math. Anal. Appl.* — 2007. — Vol. 330. — P. 1363–1386.

[49] *Eule, S.* A note on the forced Burgers equation / S. Eule, R. Friedrich // *Phys. Lett. A.* — 2006. — Vol. 351, no. 4–5. — P. 238–241.

[50] *Forsyth, A. R.* The theory of differential equations / A. R. Forsyth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1906. — Vol. 6.

[51] *Fushchich, V. I.* Conditional symmetry and reduction of partial differential equations / V. I. Fushchich, R. Z. Zhdanov // *Ukr. Math. J.* — 1992. — Vol. 44, no. 7. — P. 875–886.

[52] *Fushchich, W. I.* The complete sets of conservation laws for the electromagnetic field / W. I. Fushchich, A. G. Nikitin // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1992. — Vol. 25, no. 5. — P. L231–L233.

[53] *Fushchich, W. I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics / W. I. Fushchich, W. M. Shtelen, N. I. Serov. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. — Vol. 246 of *Mathematics and its Applications.* — xxiv+435 p.

[54] *Fushchich, W. I.* On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. I. Fushchich, I. M. Tsifra // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1987. — Vol. 20. — P. L45–L48.

[55] *Fushchych, W. I.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I / W. I. Fushchych, R. O. Popovych // *J. Nonlinear Math. Phys.* — 1994. — Vol. 1, no. 1. — P. 75–113.

[56] *Fushchych, W. I.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. II / W. I. Fushchych, R. O. Popovych // *J. Nonlinear Math. Phys.* — 1994. — Vol. 1, no. 2. — P. 158–188.

[57] *Gandarias, M. L.* Nonclassical potential symmetries of the Burgers equation / M. L. Gandarias // *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics.* — 1997. — Vol. 1. — P. 130–137.

[58] *Gandarias, M. L.* New symmetries for a model of fast diffusion / M. L. Gandarias // *Phys. Lett. A.* — 2001. — Vol. 286, no. 2–3. — P. 153–160.

[59] *Gazeau, J. P.* Symmetries of variable coefficient Korteweg–de Vries equations / J. P. Gazeau, P. Winternitz // *J. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 33, no. 12. — P. 4087–4102.

[60] *Hammerton, P. W.* Approximate solution methods for nonlinear acoustic propagatioin over long ranges / P. W. Hammerton, D. G. Crighton // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1989. — Vol. 426. — P. 125–152.

[61] *Hammerton, P. W.* Old-age behaviour of cylindrical and spherical nonlinear waves: numerical and asymptotic results / P. W. Hammerton,

D. G. Crighton // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1989. — Vol. 422. — P. 387–405.

[62] *Hopf, E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1950. — Vol. 33, no. 3. — P. 201–230.

[63] *Ivanova, N. M.* Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. I. Enhanced group classification / N. M. Ivanova, R. O. Popovych, C. Sophocleous // *Lobachevskii J. Math.* — 2010. — Vol. 31, no. 2. — P. 100–122.

[64] *Ivanova, N. M.* On nonclassical symmetries of generalized Huxley equations / N. M. Ivanova, C. Sophocleous // Proceedings of 5th Int. Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, 2010). — Protaras, Cyprus: 2011. — P. 91–98.

[65] *Kingston, J. G.* On point transformations of a generalised Burgers equation / J. G. Kingston, C. Sophocleous // *Phys. Lett. A.* — 1991. — Vol. 155, no. 1. — P. 15–19.

[66] *Kingston, J. G.* On form-preserving point transformations of partial differential equations / J. G. Kingston, C. Sophocleous // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1998. — Vol. 31. — P. 1597–1619.

[67] *Kunzinger, M.* Singular reduction operators in two dimensions / M. Kunzinger, R. O. Popovych // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Vol. 41. — 505201, 24 p.

[68] *Kunzinger, M.* Is a nonclassical symmetry a symmetry? / M. Kunzinger, R. O. Popovych // Proceedings of 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (26–30 October 2008, Protaras, Cyprus). — Protaras: 2009. — P. 107–120.

[69] *Kunzinger, M.* Generalized conditional symmetries of evolution equations / M. Kunzinger, R. O. Popovych // *J. Math. Anal. Appl.* — 2011. — Vol. 379. — P. 444–460.

[70] *Kurujyibwami, C.* Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations / C. Kurujyibwami, P. Basarab-Horwath, R. O. Popovych. — 2016. — 30 p.

[71] *Leibovich, S.* Nonlinear waves. Based on a series of seminars held at Cornell University, Ithaca, N.Y. , 1969 / S. Leibovich, A. R. Seebass. — Ithaca, N.Y.–London: Cornell University Press, 1974.

[72] *Levi, D.* Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1989. — Vol. 22. — P. 2915–2924.

[73] *Lie, S.* Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung / S. Lie // *Arch. for Math.* — 1881. — Vol. 6, no. 3. — P. 328–368.

[74] *Lighthill, M. J.* Viscosity effects in sound waves of finite amplitude / M. J. Lighthill // Surveys in mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1956. — P. 250–351.

[75] *Lisle, I. G.* Equivalence transformations for classes of differential equations: Ph.D. thesis. — University of British Columbia, 1992. — 170 p.

[76] *Mansfield, E. L.* The nonclassical group analysis of the heat equation / E. L. Mansfield // *J. Math. Anal. Appl.* — 1999. — Vol. 231, no. 2. — P. 526–542.

[77] Nonclassical symmetries of a class of Burgers' systems / D. J. Arrigo, D. A. Ekrut, J. R. Fliss, L. Le // *J. Math. Anal. Appl.* — 2010. — Vol. 371. — P. 813–820.

[78] *Olver, P. J.* Dirac's theory of constraints in field theory and the canonical form of Hamiltonian differential operators / P. J. Olver // *J. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 27, no. 10. — P. 2495–2501.

[79] *Olver, P. J.* Direct reduction and differential constraints / P. J. Olver // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1994. — Vol. 444, no. 1922. — P. 509–523.

[80] *Olver, P. J.* Group-invariant solutions of differential equations / P. J. Olver, P. Rosenau // *SIAM J. Appl. Math.* — 1987. — Vol. 47, no. 2. — P. 263–278.

[81] *Olver, P. J.* Nonclassical and conditional symmetries / P. J. Olver, E. M. Vorob'ev // CRC handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by R. L. Anderson, et al. — CRC, Boca Raton, FL, 1996. — Vol. 3. — P. 291–328.

[82] *Patera, J.* Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras / J. Patera, P. Winternitz // *J. Math. Phys.* — 1977. — Vol. 18, no. 7. — P. 1449–1455.

[83] *Patera, J.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // *J. Math. Phys.* — 1975. — Vol. 16, no. 8. — P. 1597–1614.

[84] *Pocheketa, O. A.* Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 18–19, 2011. Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2011.

[85] *Pocheketa, O. A.* Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // *Phys. Lett. A.* — 2012. — Vol. 376, no. 45. — P. 2847–2850.

[86] *Pocheketa, O. A.* Reduction operators of Burgers equation / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // *J. Math. Anal. Appl.* — 2013. — Vol. 398, no. 1. — P. 270–277.

[87] *Pocheketa, O. A.* Normalized classes of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012) / Ed. by O. O. Vaneeva, C. Sophocleous, R. O. Popovych et al. — Nicosia: University of Cyprus, 2013. — P. 170–178.

[88] *Pocheketa, O. A.* The nonclassical reduction method applied to generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Proceedings of the XVI International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigation" (Київ, 29–31 травня, 2013). — Київ: Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2013. — P. 49.

[89] *Pocheketa, O. A.* Nonclassical reductions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 21–24, 2013. Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2013.

[90] *Pocheketa, O. A.* Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych, O. O. Vaneeva // *Appl. Math. Comput.* — 2014. — Vol. 243. — P. 232–244.

[91] *Pocheketa, O. A.* Equivalence groupoid of generalized potential Burgers equations / O. A. Pocheketa // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2015. — Vol. 621. — 012011, 10 p.

[92] *Pocheketa, O. A.* Equivalence groupoid of a class of generalized potential Burgers equations / O. A. Pocheketa // Symmetry and Integrability of Mathematical Physics, Kyiv, December 27–28, 2015.

Abstract. — Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2015.

[93] *Pocheketa, O. A.* Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // arXiv:1603.09377. — 2016. — 31 p.

[94] *Popovich, R. O.* On Lie reduction of the Navier–Stokes equations / R. O. Popovich // *J. Nonlinear Math. Phys.* — 1995. — Vol. 2, no. 3–4. — P. 301–311.

[95] *Popovych, R. O.* Classification of admissible transformations of differential equations / R. O. Popovych // Collection of Works of Institute of Mathematics. — Kyiv, 2006. — Vol. 3. — P. 239–254.

[96] *Popovych, R. O.* Reduction operators of linear second-order parabolic equations / R. O. Popovych // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Vol. 41. — 185202, 31 p.

[97] *Popovych, R. O.* Symmetry preserving parameterization schemes / R. O. Popovych, A. Bihlo // *J. Math. Phys.* — 2012. — Vol. 53. — 073102, 36 p.

[98] *Popovych, R. O.* New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations / R. O. Popovych, N. M. Ivanova // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37, no. 30. — P. 7547–7565.

[99] *Popovych, R. O.* Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations / R. O. Popovych, N. M. Ivanova // *J. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 46. — 043502, 22 p.

[100] *Popovych, R. O.* Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations / R. O. Popovych, N. M. Ivanova // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2005. — Vol. 38. — P. 3145–3155.

[101] *Popovych, R. O.* Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations / R. O. Popovych, M. Kunzinger, H. Eshraghi // *Acta Appl. Math.* — 2010. — Vol. 109. — P. 315–359.

[102] *Popovych, R. O.* Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations / R. O. Popovych, M. Kunzinger, N. M. Ivanova // *Acta Appl. Math.* — 2008. — Vol. 100. — P. 113–185.

[103] *Popovych, R. O.* Local conservation laws of second-order evolution equations / R. O. Popovych, A. M. Samoilenko // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Vol. 41. — 362002, 11 p.

[104] *Popovych, R. O.* Exact solutions of a remarkable fin equation / R. O. Popovych, C. Sophocleous, O. O. Vaneeva // *Appl. Math. Lett.* — 2008. — Vol. 21. — P. 209–214.

[105] *Popovych, R. O.* More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: part I / R. O. Popovych, O. O. Vaneeva // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* — 2010. — Vol. 15. — P. 3887–3899.

[106] *Popovych, R. O.* Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation / R. O. Popovych, O. O. Vaneeva, N. M. Ivanova // *Phys. Lett. A.* — 2007. — Vol. 362. — P. 166–173.

[107] *Pucci, E.* Similarity reductions of partial differential equations / E. Pucci // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1992. — Vol. 25. — P. 2631–2640.

[108] *Pucci, E.* On the weak symmetry groups of partial differential equations / E. Pucci, G. Saccomandi // *J. Math. Anal. Appl.* — 1992. — Vol. 163. — P. 588–598.

[109] *Pucci, E.* Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables / E. Pucci, G. Saccomandi // *Physica D.* — 2000. — Vol. 139, no. 1–2. — P. 28–47.

[110] *Q*-conditional symmetry of the linear heat equation / W. I. Fushchych, W. M. Shtelen, M. I. Serov, R. O. Popowych // *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* — 1992. — no. 12. — P. 28–33.

[111] *Qu, C. Z.* Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Burgers equations / C. Z. Qu // *IMA J. Appl. Math.* — 1995. — Vol. 54, no. 3. — P. 203–225.

[112] *Rao, C. S.* Analysis of the self-similar solutions of the nonplanar Burger's equation / C. S. Rao, P. L. Sachdev, M. Ramaswamy // *Nonlinear Anal.* — 2002. — Vol. 51, no. 8. — P. 1447–1472.

[113] Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, M. W. Lutfullin // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36, no. 26. — P. 7337–7360.

[114] *Saccomandi, G.* A personal overview on the reduction methods for partial differential equations / G. Saccomandi // *Note Mat.* — 2004/05. — Vol. 23, no. 2. — P. 217–248.

[115] *Sachdev, P. L.* Analytic solutions of some generalized Burgers equations – an overview / P. L. Sachdev // *AIP Conf. Proc.* — 2008. — Vol. 1022, no. 17. — P. 17–29.

[116] *Sachdev, P. L.* Nonlinear diffusive waves / P. L. Sachdev. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[117] *Sachdev, P. L.* Exact *N*-wave solutions for the non-planar Burgers equation / P. L. Sachdev, K. T. Joseph, K. R. C. Nair // *Proc. R. Soc. London Ser. A.* — 1994. — Vol. 445, no. 1925. — P. 501–517.

[118] *Sachdev, P. L.* Generalized Burgers equations and Euler-Painlevé transcendents. III / P. L. Sachdev, K. R. C. Nair, V. G. Tikekar // *J. Math. Phys.* — 1988. — Vol. 29, no. 11. — P. 2397–2404.

[119] *Schulze-Halberg, A.* Darboux transformations for the time-dependent nonhomogeneous Burgers equation in (1+1) dimensions / A. Schulze-Halberg, J. M. C. Jiménez // *Phys. Scr.* — 2009. — Vol. 80, no. 6. — 065014.

[120] *Scott, J. F.* The long time asymptotics of solutions to the generalized Burgers equation / J. F. Scott // *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* — 1981. — Vol. 373. — P. 443–456.

[121] *Sionóid, P. N.* The generalized Burgers and Zabolotskaya–Khokhlov equations: transformations, exact solutions and qualitative properties / P. N. Sionóid, A. T. Cates // *Proc. Roy. Soc. A.* — 1994. — Vol. 447. — P. 253–270.

[122] *Sophocleous, C.* Transformation properties of a variable-coefficient Burgers equation / C. Sophocleous // *Chaos Solitons Fractals.* — 2004. — Vol. 20, no. 5. — P. 1047–1057.

[123] *Vaganan, B. M.* Generalized Burgers equations transformable to the Burgers equation / B. M. Vaganan, T. Jeyalakshmi // *Stud. Appl. Math.* — 2011. — Vol. 127. — P. 211–220.

[124] *Vaganan, B. M.* Direct similarity solutions of the Burgers equation with variable viscosity / B. M. Vaganan, M. S. Kumaran // *Indian J. Pure Appl. Math.* — 2003. — Vol. 34, no. 11. — P. 1645–1669.

[125] *Vaganan, B. M.* Exact linearization and invariant solutions of the generalized Burgers equation with linear damping and variable viscosity / B. M. Vaganan, M. S. Kumaran // *Stud. Appl. Math.* — 2006. — Vol. 117, no. 2. — P. 95–108.

[126] *Vaganan, B. M.* Large time asymptotic behaviors for periodic solutions of generalized Burgers equations with spherical symmetry or linear damping / B. M. Vaganan, S. Padmasekaran // *Stud. Appl. Math.* — 2009. — Vol. 124. — P. 1–18.

[127] *Vaganan, B. M.* Exact linearization and invariant solutions of a generalized Burgers equation with variable viscosity / B. M. Vaganan, M. Senthilkumaran // *Int. J. Appl. Math. Stat.* — 2009. — Vol. 14, no. M09. — P. 97–105.

[128] *Vaneeva, O. O.* Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source / O. O. Vaneeva, R. O. Popovych, C. Sophocleous // *Acta Appl. Math.* — 2009. — Vol. 106. — P. 1–46.

[129] *Vaneeva, O. O.* Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities / O. O. Vaneeva, R. O. Popovych, C. Sophocleous // *J. Math. Anal. Appl.* — 2012. — Vol. 396. — P. 225–242.

[130] *Vaneeva, O. O.* Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems / O. O. Vaneeva, C. Sophocleous, P. G. L. Leach // *J. Eng. Math.* — 2015. — Vol. 91. — P. 165–176.

[131] *Vaneeva, O. O.* Equivalence transformations in the study of integrability / O. O. Vaneeva, R. O. Popovych, C. Sophocleous // *Phys. Scr.* — 2014. — Vol. 89. — 038003, 9 p.

[132] *Vinogradov, A. M.* Local symmetries and conservation laws / A. M. Vinogradov // *Acta Appl. Math.* — 1984. — Vol. 2, no. 1. — P. 21–78.

[133] *Wafo Soh, C.* Symmetry reductions and new exact invariant solutions of the generalized Burgers equation arising in nonlinear acoustics / C. Wafo Soh // *Internat. J. Engng. Sci.* — 2004. — Vol. 42. — P. 1169–1191.

[134] *Woodard, H.* Similarity solutions for partial differential equations generated by finite and infinitesimal groups: Tech. rep. / H. Woodard, W. Ames. — Iowa City: 1971.

[135] *Woyczyński, W. A.* Burgers-KPZ turbulence / W. A. Woyczyński. — Berlin: Springer-Verlag, 1998. — Vol. 1700 of *Lecture Notes in Mathematics.* — xii+318 p.

[136] *Zhdanov, R. Z.* Conditional symmetry of a porous medium equation / R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno // *Physica D.* — 1998. — Vol. 122, no. 1–4. — P. 178–186.

[137] *Zhdanov, R. Z.* A precise definition of reduction of partial differential equations / R. Z. Zhdanov, I. M. Tsyfra, R. O. Popovych // *J. Math. Anal. Appl.* — 1999. — Vol. 238, no. 1. — P. 101–123.