Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Лось Валерій Миколайович

УДК 517.956.4

ДИСЕРТАЦІЯ

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 – диференціальні рівняння

Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ В. М. Лось

Науковий консультант:

Михайлець Володимир Андрійович

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Лось В.М. *Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – "Диференціальні рівняння". – Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",— Інститут математики Національної академії наук України. – Київ, 2017.

Дисертація присвячена науковій проблемі побудови теорії параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера. Ці простори параметризуються функціональним параметром, що дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій/розподілів, ніж це можливо у рамках класичних просторів Соболєва і Гельдера, параметризованих числами. Завдання дисертаційної роботи — ввести класи анізотропних гільбертових просторів Хермандера, дослідити їх інтерполяційні властивості стосовно анізотропних просторів Соболєва і дати застосування просторів Хермандера до дослідження характеру розв'язності і властивостей розв'язків загальних параболічних початково-крайових задач. Основним аналітичним апаратом дисертації є інтерполяція з функціональним параметром лінійних операторів у парах гільбертових просторів.

Загальна теорія розв'язності параболічних задач у просторах Соболєва і Гельдера була побудована у відомих роботах І. Г. Петровського, М. С. Аграновича і М. І. Вішика, С. Д. Ейдельмана, О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. М. Уральцевої, А. Фрідмана, Ж.-Л. Ліонса і

Е. Мадженеса, С. Д. Івасишена, М. В. Житарашу та інших в 60 – 80 рр. минулого століття.

У 1963 р. Ларс Хермандер ввів широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва і дав застосування введених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Втім, довгий час простори Хермандера не знаходили застосувань у теорії крайових задач для диференціальних рівнянь. Це було пов'язано з відсутністю зручного аналітичного апарата для роботи з цими просторами. Окрім того, не був виділений клас просторів Хермандера, які допускають коректне означення на межі області, де розглядається крайова задача. Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили такий клас гільбертових ізотропних просторів Хермандера — уточнену соболєвську шкалу і на основі методу інтерполяції з функціональним параметром побудували теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у цих просторах. У цьому зв'язку природно постало питання про побудову теорії параболічних задач у просторах Хермандера. Розробка такої теорії ускладнюється тим, що для параболічних диференціальних рівнянь треба використовувати відповідні анізотропні простори, які утворені функціями, що мають різні властивості за часовою і просторовими змінними.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та метод дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано де була апробація та де опубліковані результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, та дано короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У розділі 2 виділено і досліджено широкий клас анізотропних гільбертових просторів Хермандера, які параметризуються двома числовими параметрами і функціональним параметром, повільно змінним на нескінченності за Караматою. Вивчено інтерполяційні властивості цих просторів стосовно анізотропних просторів Соболєва. Введено анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.

У розділі 3 досліджено лінійні параболічні початково-крайові задачі з нульовими початковими даними Коші у гільбертових анізотропних просторах Хермандера. Доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. В якості застосування цих результатів встановлено теореми про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Також отримано нові достатні умови, за яких узагальнені похідні заданого порядку розв'язків будуть неперервними. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь, а також систем рівнянь, параболічних за Петровським.

У розділі 4 досліджено загальні лінійні неоднорідні параболічні початково-крайові задачі у анізотропних просторах Хермандера. Доведено, що оператори, породжені загальними лінійними неоднорідними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера. Встановлено теорему про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Знайдено нові достатні умови того, що узагальнені розв'язки досліджуваних початково–крайових задач є класичними. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь. Результати дослідження конкретизовано для важливих з точки зору застосувань мішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані в теорії рівнянь з частиннними похідними, насамперед еліптичних і параболічних рівнянь, та теорії функціональних просторів.

Ключові слова: параболічна початково–крайова задача, простір Хермандера, повільно змінна функція, ізоморфізм, інтерполяція з функціональним параметром.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Los V. M. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2017. — **16**, no. 1. — P. 69 – 97.
2. Los V. M. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // Open Mathematics. — 2017. — **15** — P. 57 – 76.
3. Los V. M. Initial-boundary value problems for two-dimensional parabolic equations in Hörmander spaces / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — **23**, no. 2. — P. 177 – 191.

4. Лось В. М. Регулярність розв'язків за-гальних параболічних задач у просторах Хермандера / В. М. Лось, В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Доповіді НАН України. — 2017. — № 8. — С. 3 – 10.
5. Los V. M. Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **69**, no. 3. — P. 426 – 443.
6. Los V. M. Sufficient Conditions for the solutions of General Parabolic Initial-Boundary-Value Problems to be Classical / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 11. — P. 1756 – 1766.
7. Los V. M. Classical Solutions of Parabolic Initial-Boundary-Value Problems and Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 9. — P. 1412 – 1423.
8. Los V. M. Theorems on Isomorphisms for Some Parabolic Initial-Boundary-Value Problems in Hörmander Spaces: Limiting Case / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **68**, no. 6. – P. 894 – 909.
9. Лось В. М. Про достатні умови класичності узагальнених розв'язків деяких мішаних параболічних задач / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 1. — С. 228 – 243.
10. Лось В. М. Умови класичності розв'язків другої крайової задачі для параболічних рівнянь / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 175 – 192.
11. Los V. M. Anisotropic Hormander Spaces on the Lateral Surface of a Cylinder / V. M. Los // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2016. — **217**, no. 4. — P. 456 – 467.

12. Los V. M. Mixed Problems for the Two-Dimensional Heat-Conduction Equation in Anisotropic Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, no. 5. — P. 735 – 747.
13. Лось В. М. Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і 2b-анізотропні простори Хермандера / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 2. — С. 276 – 290.
14. Лось В. М. Параболічні мішані задачі для систем Петровського у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2014. — № 10. — С. 24 – 32.
15. Лось В. М. Неоднорідні параболічні мішані задачі і простори узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 249 – 267.
16. Лось В. Н. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости / В. Н. Лось, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. — 2014. — № 6. — С.23 – 31.
17. Лось В. М. Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2. — С. 219 – 234.
18. Los V. Parabolic problems and interpolation with a function parameter / V. Los, A. A. Murach // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2013. — **19**, no. 2. — P. 146 – 160.
19. Los V. M. Sobolev's Problem for Elliptic Systems / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2002. — **8**, no. 4. — P. 58 – 71.

20. Лось В. М. Параболічна гранична задача в області, межа якої складається з многовидів різних розмірностей / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2002. — № 1. — С. 47 – 53.

21. Los V. Sobolev's Problem in Complete Scale of Banach Spaces / V. Los, Ya. Roitberg, A. Sklyarets // Operator Theory: Advances and Applications. — 2000. — **117**. — P. 301 – 312.

22. Los V. M. On general parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // The International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18-23 September 2017). — Lviv, 2017.— P. 45.

23. Los V. M. On Isomorphism Theorems for Parabolic Problems in Hörmander Spaces and their Applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, 20-24 September 2016). — Lviv, 2016.— P.92-93.

24. Лось В. М. Про задачу Діріхле для параболічного рівняння другого порядку у просторах Хермандера / В. М. Лось // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19 - 20 травня, 2016р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ : НТУУ "КПІ 2016. — С. 189 – 190.

25. Los V. M. On applications of Hormander spaces to parabolic problems / V. M. Los, A. A. Murach // International V. Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine).— Lviv, 2015.— P.99.

26. Лось В. М. Про деякі параболічні задачі у просторах Хермандера / В. М. Лось // International Conference of Young Mathematicians (June 3-6, 2015, Kyiv, Ukraine). K.: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015.— P. 154.

27. Лось В. М. Про застосування інтерполяції з функціональним параметром у теорії параболічних диференціальних рівнянь / В. М. Лось, О. О. Мурач // Матеріали П'ятнадцятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014) .– К., 2014.— С.201.

28. Лось В. Н. О параболических смешанных задачах в уточненной соболевской шкале / В. Н. Лось // Крымская международная математическая конферен-ция (Судак, 22.09 - 4.10 2013).— Судак, 2013.— Т.2.— С.46—47.

29. Лось В. М. Про параболічні задачі у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Боголюбовські читання DIF-2013 (Севастополь, 23-30 червня 2013).— Севастополь, 2013.— С.133—134.

30. Los V. M. On parabolic problems in Hormander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banah (Lviv, 17-21 September 2012). — Lviv, 2012.— P.215—216.

31. Los V. M. On some parabolic problems in a refined Sobolev scale / V. M. Los, A. A. Murach // Матеріали Чотирнадцятої Міжнародної наукової кон-ференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012) .— К., 2012.— С.33.

ABSTRACT

Los V. M. *Parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces*, Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 “Differential equations”, National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the scientific problem of the creation of a theory of parabolic initial-boundary value problems in classes of inner product Hörmander spaces. These spaces are parametrized with a function parameter that allows a more subtle characterization of the regularity of functions/distributions than it is possible within the framework of classical Sobolev and Hölder spaces parametrized by numbers. The purpose of the thesis is to introduce classes of anisotropic inner product Hörmander spaces, to study their interpolation properties with respect to anisotropic Sobolev spaces, and to apply the Hörmander spaces to the investigation of the character of solvability and properties of solutions of general parabolic initial-boundary problems. The main analytical tool of the research presented in the thesis is an interpolation with a function parameter of linear operators on pairs of Hilbert spaces.

The general theory of solvability of parabolic problems in Sobolev and Hölder spaces was created in the well-known works by I. G. Petrovsky, M. S. Agranovich and M. I. Vishik, S. D. Eidelman, O. O. Ladyzhenskaya, V. O. Solonnikov and N. M. Uraltseva, A. Friedman, J.-L. Lions and E. Magenes, S. D. Ivasyshen, M. V. Zhitarashu and others in the 60–80-th years of the last century.

In 1963 Lars Hörmander introduced a broad and meaningful generalization of Sobolev spaces and gave the application of the spaces introduced to partial differential equations. However, for a long time Hörmander spaces did not find applications in the theory of boundary value problems for differential equations. This was connected with the lack of a convenient analytical tool for work with these spaces. Moreover, researches did not selected a class of Hörmander spaces that allow a correct definition on the boundary of the domain in which the boundary-value problem is considered.

Recently V. A. Mikhailets and O. O. Murach selected such a class of inner product isotropic Hörmander spaces—refined Sobolev scale—and elaborated a theory of solvability of general elliptic boundary-value problems in these spaces. This theory is based on the method of interpolation with a function parameter. In this connection the following task has set: to create a theory of parabolic problems in Hörmander spaces. The development of this theory is complicated by the fact that parabolic differential equations require relevant anisotropic spaces formed by functions which have different properties with respect to the time and spatial variables.

The thesis consists of introduction, four sections, conclusions and references. Introduction demonstrates that the topic of the research is present-day, formulates the goal, tasks, subject, object, and methods of the research, presents the scientific novelty and practical significance of the results obtained, notes the relationship of the research with scientific projects, indicates the applicant's contribution to the research, and also lists the conferences, seminars and articles where the results of the thesis were presented and published.

Section 1 gives a survey of the literature on the topic of the thesis and briefly describes the results obtained.

In Section 2, we select and investigate a wide class of anisotropic inner product Hörmander spaces parametrized with two number parameters and a function parameter that varies slowly in the sense of Karamata at infinity. We study interpolation properties of these spaces with respect to anisotropic Sobolev spaces. We introduce anisotropic inner product Hörmander spaces on a smooth compact manifold which is the lateral surface of a cylinder and proved that the spaces introduced and the topology in them do not depend on the choice of special local charts on this manifold.

Section 3 is devoted to the investigation of linear parabolic initial-boundary value problems with zero initial Cauchy data in inner product anisotropic Hörmander spaces. We prove that the operators corresponding to these problems are isomorphisms between appropriate Hörmander spaces. As applications of these results, we establish theorems on the local increase in the regularity of generalized solutions to the problems. We also obtain new sufficient conditions under which given generalized derivatives of the solutions are continuous. Note that multidimensional and two-dimensional parabolic equations are treated separately. We extend these results to Petrovskii parabolic systems.

Section 4 investigates general linear inhomogeneous parabolic initial boundary-value problems in anisotropic Hörmander spaces. We prove that these problems generate operators which are isomorphisms on appropriate pairs of anisotropic Hörmander spaces. We establish theorems on the local increase in regularity of generalized solutions to the problems under investigation. We find new sufficient conditions for the generalized solutions to be classical. These results are obtained separately for multidimensional and two-dimensional parabolic equations. We specify the results for some initial-boundary value problems that are posed for second order parabolic equations and are important in applications.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical research. The results of the thesis and the method for their obtaining can be used in the theory of partial differential equations (specifically, elliptic and parabolic equations) and in the theory of function spaces.

Keywords: Parabolic initial-boundary value problem, Hörmander space, slowly varying function, isomorphism property, interpolation with a function parameter.

Publications list of the applicant

1. Los V. M. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2017. — **16**, no. 1. — P. 69 – 97.
2. Los V. M. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // Open Mathematics. — 2017. — **15** — P. 57 – 76.
3. Los V. M. Initial-boundary value problems for two-dimensional parabolic equations in Hörmander spaces / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — **23**, no. 2. — P. 177 – 191.
4. Los V. M. Regularity of solutions to general parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Dopovidi NAS of Ukraine. — 2017. — № 8. — P. 3 — 10.
5. Los V. M. Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **69**, no. 3. — P. 426 – 443.

6. Los V. M. Sufficient Conditions for the solutions of General Parabolic Initial-Boundary-Value Problems to be Classical / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 11. — P. 1756 – 1766.
7. Los V. M. Classical Solutions of Parabolic Initial-Boundary-Value Problems and Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 9. — P. 1412 – 1423.
8. Los V. M. Theorems on Isomorphisms for Some Parabolic Initial-Boundary-Value Problems in Hörmander Spaces: Limiting Case / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **68**, no. 6. – P. 894 – 909.
9. Los V. M. On sufficient conditions under which generalized solutions of some mixed parabolic problems are classical / V .M. Los // Coll. Proceed. of the Institute of Mathematics NAS of Ukr. — 2016. — **13**, № 1. — P. 228 — 243.
10. Los V. M. The conditions under which the solutions of the second boundary-value problem for parabolic equations are classical / V .M. Los // Coll. Proceed. of the Institute of Mathematics NAS of Ukr. — 2016. — **13**, № 2. — P. 175 — 192.
11. Los V. M. Anisotropic Hormander Spaces on the Lateral Surface of a Cylinder / V. M. Los // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2016. — **217**, no. 4. — P. 456 – 467.
12. Los V. M. Mixed Problems for the Two-Dimensional Heat-Conduction Equation in Anisotropic Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, no. 5. — P. 735 – 747.
13. Los V. M. Classical solutions of a parabolic mixed problem and 2b-anisotropic Hörmander spaces / V .M. Los // Coll. Proceed. of the In-

stitute of Mathematics NAS of Ukr. — 2015. — **12**, № 2. — P. 276 — 290.

14. Los V. M. Parabolic mixed problems for Petrovsky's systems in spaces of generalized smoothness / V. M. Los // Dopovidi NAS of Ukraine. — 2014. — № 10. — P. 24 — 32.
15. Los V. M. Nonhomogeneous parabolic mixed problems and spaces of generalized smoothness / V. M. Los, A. A. Murach // Coll. Proceed. of the Institute of Mathematics NAS of Ukr. — 2014. — **11**, № 2. — P. 249 — 267.
16. Los V. N. Parabolic mixed problems in spaces of generalized smoothness / V. N. Los, A. A. Murach // Dopovidi NAS of Ukraine. — 2014. — № 6. — P. 23 — 31.
17. Los V. M. On the smoothness of solutions of parabolic mixed problems / V. M. Los, A. A. Murach // Coll. Proceed. of the Institute of Mathematics NAS of Ukr. — 2013. — **10**, № 2. — P. 219 — 234.
18. Los V. Parabolic problems and interpolation with a function parameter / V. Los, A. A. Murach // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2013. — **19**, no. 2. — P. 146 – 160.
19. Los V. M. Sobolev's Problem for Elliptic Systems / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2002. — **8**, no. 4. — P. 58 – 71.
20. Los V. M. A parabolic boundary value problem in a domain whose boundary consists of manifolds of different dimensions / V. M. Los // Dopovidi NAS of Ukraine. — 2002. — № 1. — P. 47 — 53.
21. Los V. Sobolev's Problem in Complete Scale of Banach Spaces / V. Los, Ya. Roitberg, A. Sklyarets // Operator Theory: Advances and Applications. — 2000. — **117**. — P. 301 – 312.

22. Los V. M. On general parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // The International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18-23 September 2017). — Lviv, 2017.— P. 45.

23. Los V. M. On Isomorphism Theorems for Parabolic Problems in Hörmander Spaces and their Applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, 20-24 September 2016). — Lviv, 2016.— P.92-93.

24. Los V. M. On the Dirichlet problem for a second-order parabolic equation in Hörmander spaces / V. M. Los // Proceedings of the seventeenth international scientific conference named after acad. M. Kravchuk (Kyiv, May 19-20, 2016).– V.1, differential and integral equations and their applications.– K., 2016.— P. 189 – 190.

25. Los V. M. On applications of Hormander spaces to parabolic problems / V. M. Los, A. A. Murach // International V. Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine).— Lviv, 2015.— P.99.

26. Los V. M. On some parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los // International Conference of Young Mathematicians (June 3-6, 2015, Kyiv, Ukraine). K.: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015.— P. 154.

27. Los V. M. On the application of interpolation with a functional parameter in the theory of parabolic equations / V. M. Los, A. A. Murach // Proceedings of the fourteenth international scientific conference named after acad. M. Kravchuk (Kyiv, May 15-17, 2014).– K., 2014.— P.201.

28. Los V. N. On parabolic mixed problems in a refined Sobolev scale / V. N. Los // Crimea International Mathematical Conference (Sudak, 22.09 - 4.10, 2013).— Sudak, 2013.— V.2.— P.46—47.

29. Лось В. М. On parabolic problems in spaces of generalized smoothness / V. M. Los, A. A. Murach // Bogolyubov readings DIF-2013 (Sevastopol, June 23-30, 2013).— Sevastopol, 2013.— P.133—134.

30. Los V. M. On parabolic problems in Hormander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banah (Lviv, September 17-21, 2012). — Lviv, 2012.— P.215—216.

31. Los V. M. On some parabolic problems in a refined Sobolev scale / V. M. Los, A. A. Murach // Proceedings of the fourteenth international scientific conference named after acad. M. Kravchuk (Kyiv, April 19-21, 2012).— K., 2012.— P.33.

ЗМІСТ

Вступ 21

РОЗДІЛ 1. **Огляд результатів дисертації та літератури** 29

1.1 Простори Хермандера 29

1.2 Параболічні задачі 46

РОЗДІЛ 2. **Простори Хермандера та інтерполяція з функціональним параметром** 82

2.1 Гільбертові простори Хермандера 82

2.2 Простори Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}(\cdot)$ 85

2.3 Простори Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}_{+}(\cdot)$ 95

2.4 Інтерполяція з функціональним параметром 99

2.5 Інтерполяційні властивості просторів Хермандера 104

2.6 Теорема про оператор даних Коші у просторах Хермандера . . 128

2.7 Версія теореми вкладання Хермандера 139

Висновки до розділу 2 143

РОЗДІЛ 3. **Напіводнорідні параболічні задачі у просторах Хермандера** 144

3.1 Постановка задачі у циліндрі 144

3.2 Основний результат. Теорема про ізоморфізми 148

3.3 Регулярність узагальнених розв'язків задачі 150

3.4 Теорема про ізоморфізми у соболєвському випадку 153

3.5 Доведення теорем підрозділів 3.2 і 3.3 157

3.6 Постановка задачі у прямокутнику 163

3.7 Теорема про ізоморфізми. Регулярність узагальнених розв'язків 166
3.8 Доведення теорем підрозділу 3.7 170
3.9 Постановка задачі для параболічних за Петровським систем . 172
3.10 Теорема про ізоморфізми. Регулярність узагальнених розв'язків 177
3.11 Доведення теорем підрозділу 3.10 181
Висновки до розділу 3 186

РОЗДІЛ 4. **Загальні параболічні задачі у просторах Хермандера** 187
4.1 Загальна параболічна початково-крайова задача у циліндрі . . 187
4.2 Основний результат. Теорема про ізоморфізми 190
4.3 Регулярність узагальнених розв'язків 197
4.4 Доведення теорем підрозділів 4.2 і 4.3 200
4.5 Класичність узагальненого розв'язку 213
4.6 Загальна параболічна початково-крайова задача у прямокутнику 219
4.7 Доведення теорем підрозділу 4.6 228
4.8 Початково-крайові задачі для параболічного рівняння другого порядку у циліндрі 233
4.9 Теореми про ізоморфізми 236
4.10 Доведення теорем підрозділу 4.9 (випадок $s > 2$) 246
4.11 Доведення теорем підрозділу 4.9 (випадок $s = 2$) 251
4.12 Класичність узагальнених розв'язків 258
4.13 Початково-крайові задачі для рівняння теплопровідності у прямокутнику. Теореми про ізоморфізми 273
4.14 Доведення теорем підрозділу 4.13 282
Висновки до розділу 4 285

Висновки до дисертації 286

Список використаних джерел 288

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена побудові теорії лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових анізотропних просторів Хермандера.

Актуальність теми.

Загальна теорія розв'язності параболічних задач у просторах Соболєва і Гельдера була побудована у відомих роботах [1, 8, 12–14, 17, 38, 39, 42, 45, 50, 60–62, 68] І. Г. Петровського, М. С. Аграновича і М. І. Вішика, С. Д. Ейдельмана, О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. М. Уральцевої, А. Фрідмана, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, С. Д. Івасишена, М. В. Житарашу та інших в 60 – 80 рр. минулого століття. У 1963 р. Ларс Хермандер [51] ввів широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва і дав застосування введених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Ці простори параметризуються функціональним параметром, що дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій/розподілів, ніж це можливо у рамках класичних просторів Соболєва і Гельдера, параметризованих числами.

Втім, довгий час простори Хермандера не знаходили застосувань у теорії крайових задач для диференціальних рівнянь. Це було пов'язано з відсутністю зручного аналітичного апарата для роботи з цими просторами. Окрім того, не був виділений клас просторів Хермандера, які допускають коректне означення на межі області, де розглядається крайова задача. Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [90] виділили такий клас гільбертових ізотропних просторів Хермандера — уточнену соболєвську шкалу і на основі методу інтерполяції з функціональним параметром побудували теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у цих просторах [90–94, 96–99, 101, 103]. У цьому зв'язку природно постало питання про побудову теорії параболічних задач у просторах Хермандера. Розробка такої теорії ускладнюється тим, що для параболічних диференціальних рівнянь треба використовувати відповідні анізотропні простори, які утворені функціями, що мають різні властивості за часовою і просторовими змінними.

В останні десятиліття простори Хермандера та їх різні узагальнення усе частіше застосовуються до важливих задач математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, теорії інтегральних рівнянь, теорії випадкових процесів (див. монографії В. А. Михайлеца і О. О. Мурача [35, 101] (2010, 2014), О. І. Степанця [47] (2002), Н. Якоба [64] (2001, 2002, 2005), В. Г. Мазьї, Т. О. Шапошнікової [87] (2009), Ф. Нікола, Л. Родино [105] (2010), Б. П. Панеяха [108] (2000), Г. Трибеля [113] (2001)). Серед них є задачі, пов'язані з параболічними диференціальними рівняннями.

Отже, побудова теорії параболічних початково-крайових задач у класах просторів Хермандера є актуальною і важливою математичною проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" згідно з планами, передбаченими у КПІ ім. Ігоря Сікорського та в рамках держбюджетної теми "№ 2810-Ф, Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення“ (номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії загальних лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є загальні лінійні параболічні початково-крайові задачі та гільбертові анізотропні простори Хермандера, пов'язані з цими задачами.

Предметом дослідження є характер розв'язності лінійних параболічних початково-крайових задач і властивості їх узагальнених розв'язків у відповідних просторах Хермандера, а також інтерполяційні властивості цих просторів.

Завдання дослідження:

1. Виділити клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, які можуть бути застосовані у теорії $2b$-параболічних диференціальних рівнянь, і дослідити інтерполяційні властивості цих просторів.
2. Ввести $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і дослідити їх властивості.
3. Встановити теореми про коректну розв'язність у просторах Хермандера лінійних параболічних початково-крайових задач як з однорідними, так і з неоднорідними початковими умовами.

4. Встановити теореми про локальну регулярність узагальнених розв'язків лінійних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.
5. Знайти достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків досліджуваних задач; зокрема, знайти достатні умови класичності цих розв'язків.
6. Встановити теореми про коректну розв'язність у просторах Хермандера початково-крайових задач для параболічних за Петровським систем і регулярність їх розв'язків.

Методи дослідження. У дисертації використано методи теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу і теорії функцій. Основним у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром лінійних операторів у парах гільбертових просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою.
2. Доведено, що ці простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.
3. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.

4. Встановлено теореми про коректну розв'язність у введених просторах Хермандера лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами, а саме, доведено, що оператори, породжені цими задачами, здійснюють ізоморфізми між відповідними анізотропними просторами Хермандера.
5. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.
6. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків цих задач.
7. Доведено, що оператори, породжені загальними лінійними неоднорідними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера.
8. Встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.
9. Знайдено достатні умови, за яких узагальнені розв'язки досліджуваних параболічних задач є класичними.
10. Доведено теореми про ізоморфізми у просторах Хермандера, породжені лінійними крайовими задачами для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами, і встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків цих задач у просторах Хермандера.

Частина результатів дисертації про локальну регулярність розв'язків параболічних задач є новою і для анізотропних просторів Соболєва.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження належить науковому консультанту — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Усі результати дисертації отримано її автором самостійно. У спільних роботах [20–22, 27, 69, 71, 77, 78] внесок усіх співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Україна, Львів, 18 – 23 вересня 2017 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— Сімнадцятій міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня, 2016 року);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Україна, Дрогобич, 25 – 28 серпня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 3 – 6 червня 2015 року);

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 15 – 17 травня 2014 року);

— Кримскій міжнародній математичній конференції (Україна, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 року);

— Міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя академіка А. М. Самойленка (Україна, Севастополь, 23 – 30 червня 2013 року);

— Міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (Україна, Львів, 17 – 21 вересня 2012 року);

— Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Україна, Київ, 19 – 21 квітня 2012 року);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— Київському семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук, член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей "Диференціальні рівняння. Інтегральні перетворення. Спеціальні функції" Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко);

— семінарі кафедри вищої математики ”Диференціальні рівняння та суміжні питання” Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 21 статті [19–27, 69–80] у вітчизняних і закордонних фахових наукових виданнях, з них 11 статей [70–80] в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, Web of Science, Math. Sci. Net Reference List, та у 10 тезах [28–32, 81–85] міжнародних математичних конференцій.

Структура дисертації та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 114 найменувань. Повний обсяг роботи складає 301 сторінку друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі опишемо основні результати дисертації і поряд з цим коротко обговоримо літературу за темою дисертації.

1.1. Простори Хермандера

Сучасна теорія загальних параболічних початково–крайових задач розроблена для класичних шкал функціональних просторів Гельдера–Зігмунда і Соболєва [43] в роботах [1, 8, 12–14, 17, 38, 39, 42, 45, 50, 60–62, 68] І. Г. Петровського, М. С. Аграновича і М. І. Вішика, С. Д. Ейдельмана, О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. М. Уральцевої, А. Фрідмана, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, С. Д. Івасишена, М. В. Житарашу та інших в 60 – 80 рр. минулого століття. Центральний результат цієї теорії – теореми про коректну розв'язність цих задач у підходящих парах вказаних просторів. Іншими словам, оператори, відповідні параболічним задачам є ізоморфізмами у цих парах просторів. Цей факт має важливі застосування до дослідження властивостей регулярності розв'язків параболічної задачі, властивостей її функції Гріна тощо.

Простори Соболєва параметризуються наборами числових параметрів. Подальше узагальнення просторів Соболєва було здійснено на шляху переходу від числових до функціональних параметрів, які описують більш тонко властивості регулярності розподілів, що належать просторам. У 1963 році Л. Хермандер [51, п. 2.2] вводить та досліджує нормовані функціональні простори, для яких індексом регулярності функцій або розподілів служить функціональний параметр, а не число. Це простори $\mathcal{B}_{p,\mu}$. Наведемо їх означення.

Нехай $1 \leq p \leq \infty$ і ціле $k \geq 1$. Нехай вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$ задовольняє умову: існують додатні числа c і l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq (1 + c\,|\xi - \eta|)^l \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k. \tag{1.1}$$

За означенням, лінійний простір Хермандера $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w} := \mathcal{F}w$ яких задовольняє умову $\mu\,\mathcal{F}w \in L_p(\mathbb{R}^k)$. Норма у просторі $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k)$ означається за формулою

$$\|w\|_{\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k)} := \|\mu\,\mathcal{F}w\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}.$$

Простір $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k)$ є повним простором відносно цієї норми.

У важливому окремрму випадку $p = 2$ простори Хермандера є гільбертовими.

Зв'язок між просторами $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^k)$ та класами функцій, що мають неперервні похідні, встановлює така теорема вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7].

Твердження 1.1. *Нехай $1/p + 1/q = 1$ і ціле $r \geq 0$. Якщо*

$$(1 + |\xi|)^r\,\mu^{-1}(\xi) \in L_q(\mathbb{R}^k_\xi), \tag{1.2}$$

то $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k) \subset C^r(\mathbb{R}^k)$. Навпаки, якщо для деякої непорожньої відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^k$ виконується включення

$$\bigl\{w \in \mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^k) : \operatorname{supp} w \subset V\bigr\} \subset C^r(\mathbb{R}^k),$$

то μ задовольняє умову (1.2).

Л. Хермандер [51, 53] дав застосування просторів $B_{p,\mu}$ для дослідження регулярності розв'язків гіпоеліптичних рівнянь в частинних похідних, до яких належать і параболічні рівняння.

Але довгий час простори, введені Л. Хермандером не знаходили застосувань у теоріях крайових задач для диференціальних рівнянь. Це, зокрема, пов'язане з двома причинами. По-перше, відсутність зручного аналітичного апарату для роботи з такими просторами; по-друге, не був виділений клас просторів Хермандера, які допускають коректне означення на межі області, де розглядається крайова задача.

Звичайно, найбільш важливими серед просторів Хермандера є гільбертові простори. Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [90] виділили досить широкий клас ізотропних гільбертових просторів Хермандера

$$H^{s;\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu} := \{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k) : \mu\widehat{w} \in L_2(\mathbb{R}^k)\}. \tag{1.3}$$

Тут функція

$$\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi\big((1 + |\xi|^2)^{1/2}\big)$$

$$\text{змінної} \quad \xi \in \mathbb{R}^k$$

служить показником регулярності, де s - дійсне число, а функція φ є повільно змінною на нескінченності за Й. Карамата:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \qquad \text{для кожного} \qquad \lambda > 0.$$

Клас просторів (1.3) містить соболевську шкалу $\{H^s\} = \{H^{s;1}\}$ і прив'язаний до неї числовим параметром s, але калібрований більш тонко, ніж шкала просторів Соболева.

В. А. Михайлецю і О. О. Мурачу [90–94, 96–99, 101, 103] для виділених ними просторів Хермандера вдалося подолати вище зазначені труднощі і побудувати у цих просторах та їх аналогах для евклідових областей і гладких многовидів теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач.

Ця теорія грунтується на методі інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, який встановлює зв'язок між просторами Соболєва і цими просторами Хермандера. За допомогою цієї інтерполяції В. А. Михайлець і О. О. Мурач перенесли класичну теорію еліптичних рівнянь та еліптичних крайових задач з просторів Соболєва на широкий клас гільбертових просторів Хермандера. Їх результати було доповнено в роботах О. О. Мурача, А. В. Аноп та Т. М. Зінченко [55,56,104, 114] для класу усіх гільбертових просторів, що є інтерполяційними для пар гільбертових просторів Соболєва. (Цей клас допускає опис через простори Хермандера і є замкненим відносно інтерполяції з функціональним параметром [100, 102].)

Відмітимо, що раніше різні методи інтерполяції пар нормованих просторів застосовувалися у теорії рівнянь з частинними похідними [3, 18, 33,49,68,86]. При цьому використовувались числові показники інтерполяції, яким відповідають степеневі функціональні параметри інтерполяції. Так, Ліонс та Мадженес [68] систематично використовували таку інтерполяцію для побудови теорії розв'язності параболічних початково-крайових задач у повній шкалі анізотропних гільбертових просторів Соболєва. Проте, щоб перейти від класичних просторів, параметризованих числовими параметрами до більш загальних класів просторів, параметризованих функціональними параметрами, потрібно використовувати інтерполяцію з більш загальним ніж степенева функція функціональним параметром [59, 89, 95].

У теорії параболічних задач застосовуються анізотропні простори Соболєва, задані у циліндрі та на його бічній поверхні. У гільбертовому випадку їх інтерполяція з функціональним параметром приводить до деяких анізотропних просторів Хермандера. (Навіть, якщо анізотропні простори Соболєва мають різні показники анізотропії, то їх інтерполяція з степеневим параметром дає простори Хермандера).

У *другому* розділі дисертації виділено широкий клас гільбертових анізотропних просторів Хермандера, які отримуються шляхом інтерполяції з функціональним параметром їх соболєвських аналогів. Введено версії цих просторів на многовиді, який є бічною поверхнею прямого обмеженого циліндра. Цей метод інтерполяції є основним методом дослідження у дисертації. Він також викладений у другому розділі.

Дамо відповідні означення. Нехай, як і раніше $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$ є довільна вимірна за Борелем функція, яка задовольняє умову (1.1). Позначимо через $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ гільбертів простір Хермандера $\mathcal{B}_{2,\mu}(\mathbb{R}^k)$.

Нагадаємо, що, за означенням, комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

У дисертації усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.

У просторі $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$. Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := (w, w)^{1/2}_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}.$$

Простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно введеного у ньому скалярного добутку.

Версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної непорожньої відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^k$ вводиться у стандартний спосіб. А саме,

$$H^\mu(V) := \bigl\{ w \restriction V : \, w \in H^\mu(\mathbb{R}^k) \bigr\},$$

$$\begin{gathered} \|u\|_{H^\mu(V)} := \inf \bigl\{ \|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} : \, w \in H^\mu(\mathbb{R}^k), \\ u = w \restriction V \bigr\}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

де $u \in H^\mu(V)$. Тут, як звичайно, $w \restriction V$ означає звуження розподілу $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на відкриту множину V. Іншими словами, $H^\mu(V)$ є фактор-простором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ за його підпростором

$$\begin{gathered} H^\mu_Q(\mathbb{R}^k) := \bigl\{ w \in H^\mu(\mathbb{R}^k) : \, \operatorname{supp} w \subseteq Q \bigr\} \\ \text{з} \;\; Q := \mathbb{R}^k \setminus V. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Тому простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим і сепарабельним. Норма (1.4) породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^\mu(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)},$$

де $w_j \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ у V для кожного $j \in \{1, 2\}$. Тут Υ є ортогональним проектором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (1.5).

З точки зору застосувань в теорії параболічних задач доцільно вибрати такий клас показників μ, щоб простори Хермандера H^{μ} мали такі властивості:

а) більш тонко характеризується регулярність розподілу, належного простору H^{μ}, ніж це можна робити в межах шкал просторів Соболєва,

б) версії цих просторів припускають коректне означення на бічній поверхні циліндра, у якому розглядаємо параболічну задачу,

в) ці простори отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових анізотропних просторів Соболєва.

Нехай ціле $k \geq 2$ і дійсне $\gamma > 0$. Будемо використовувати простори Хермандера $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ та їх версії $H^{\mu}(\cdot)$ з показником регулярності μ, що має вигляд

$$\mu(\xi', \xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \tag{1.6}$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$.

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

a) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, c]$, де $1 < c < \infty$;

b) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у [40, 57]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\ln r)^{\theta_1} (\ln \ln r)^{\theta_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ разів}} r)^{\theta_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) := H^{\mu}(\mathbb{R}^k),$$

де показник регулярності μ має вигляд (1.6). У важливому окремому випадку $\varphi(r) \equiv 1$ простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболева $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^k)$ порядку $(s, s\gamma)$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$\begin{gathered} H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k) \\ \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Тут і далі у випадку соболєвських просторів ($\varphi \equiv 1$) будемо опускати індекс φ у позначеннях функціональних просторів.

Розглянемо клас гільбертових функціональних просторів Хермандера

$$\bigl\{ H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) : \, s \in \mathbb{R}, \, \varphi \in \mathcal{M} \, \bigr\}. \tag{1.8}$$

Вкладання (1.7) показують, що у (1.8) функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s, s\gamma)$-гладкості. Якщо $\varphi(r) \to \infty$ (або $\varphi(r) \to 0$) при $r \to \infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Інакше кажучи, φ уточнює основну гладкість $(s, s\gamma)$. Тут $\gamma > 0$ виконує роль параметра анізотропії просторів, що утворюють цей клас.

У випадку $\gamma = 1/(2b)$, де b – натуральне число, будемо казати, що простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ є $2b$-анізотропний простір Хермандера на $\mathbb{R}^k$.

Опишемо область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в якій будемо розглядати параболічні задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$

і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо

$$\Omega := G \times (0, \tau) \text{— відкритий циліндр в } \mathbb{R}^{n+1},$$

$$S := \Gamma \times (0, \tau) \text{— його бічна поверхня.}$$

Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно. У окремому випадку $n = 1$ в якості області G візьмемо інтервал $(0, l)$, де довільно задане дійсне число $l > 0$. В цьому випадку $\Omega := (0, l) \times (0, \tau)$ — відкритий прямокутник в $\mathbb{R}^2$.

Розв'язки початково–крайових задач та праві частини параболічних рівнянь будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$$

де показник μ визначений формулою (1.6), у якій $k := n + 1$.

У випадку, коли Ω є циліндром нам знадобляться анізотропні простори Хермандера, задані на його бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$. Цим просторам будуть належати праві частини крайових умов параболічних задач. Означимо ці простори використовуючи спеціальні локальні карти на S.

Для наших задач достатньо обмежитись випадком $s > 0$. Отже, нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (1.6), у якій $k := n$.

Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами

$$\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j,$$

де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут кожна θ_j це C^∞-диффеоморфізм всього евклідового простору $\mathbb{R}^{n-1}$ на відкриту підмножину Γ_j множини Γ. Більш того, $\Gamma := \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_\lambda$, тобто відкрити множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ утворюють покриття Γ. Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, такі що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\chi_1 + \cdots + \chi_\lambda = 1$ на Γ. Ці функції утворюють C^∞-розбиття одиниці на Γ, яке підпорядковане покриттю.

Цей атлас на Γ породжує набір спеціальних локальних карт

$$\begin{gathered} \theta_j^* : \Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0, \tau), \\ j = 1, \ldots, \lambda, \end{gathered} \tag{1.9}$$

на $S = \Gamma \times (0, \tau)$ за формулою $\theta_j^*(x, t) := (\theta_j(x), t)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$. Розглянемо функції $\chi_j^*(x, t) := \chi_j(x)$ для $x \in \Gamma$ і $t \in (0, \tau)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Вони утворюють C^∞-розбиття одиниці на S, яке підпорядковане покриттю $\{\Gamma_j \times (0, \tau) : j = 1, \ldots, \lambda\}$ многовида S.

Означення 1.1. (2.1) лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номеру $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ функція

$$v_j(x, t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x), t)$$

аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(v, v')_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (v_j, v_j')_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}, \tag{1.10}$$

де $v, v' \in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$. Він породжує норму

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := (v, v)^{1/2}_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)}.$$

Теорема 1.1. (2.1) *Нехай $s > 0$, $\gamma > 0$, і $\varphi \in \mathcal{M}$. Такі твердження є правильні:*

(i) *Простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ.*

(ii) *Множина*

$$C^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{ h \restriction \overline{S} : \, h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}) \bigr\}.$$

є щільною у цьому просторі.

При дослідженні початково-крайової параболічної задачі з нульовими початковими даними нам будуть потрібні гільбертові простори, які позначимо $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(W)$, де $W \in \{\mathbb{R}^k, \Omega, S\}$. Означаються вони подібно до просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(W)$ по базовому простору

$$\begin{gathered} H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V) := \bigl\{ w \restriction V : \, w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k), \\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times [0,\infty) \bigr\}. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Тут $V-$ відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^k$ з $k \geq 2$. (Зокрема, $V = \mathbb{R}^k$ або $V = \Omega$ з $k = n+1$, або $V = \Pi$ з $k = n$.) Норма в лінійному просторі (1.11) визначається за формулою

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)} := \inf \bigl\{ \, & \|w\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)} : \\ & w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k), \ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times [0,\infty), \ u = w \restriction V \bigr\}, \end{aligned}$$

з $u \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$.

Теорема 1.2. (2.2) *Нехай $s > 0$, $\gamma > 0$, і $\varphi \in \mathcal{M}$. Такі твердження є правильні:*

(i) *Простір $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ.*

(ii) *Множина*

$$C^{\infty}_{+}(\overline{S}) := \bigl\{h \restriction \overline{S} :\ h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0,\infty)\bigr\}.$$

є щільною у цьому просторі.

Для дослідження приналежності узагальнених розв'язків параболічних задач просторам неперервно диференційовних функцій нам буде потрібна така версія наведеної вище теореми вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7].

Попередньо відмітимо, що використовуємо такі позначення $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t^{\beta} := \partial^{\beta}/\partial t^{\beta}$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ і β є цілими невід'ємними. Як звичайно, $\xi^{\alpha} := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Лема 1.1. (2.3) *Нехай $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $b \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $s := p + b + n/2$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильні такі два твердження:*

(i) Якщо φ задовольняє умову

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{1.12}$$

то кожна функція

$$w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$$

має таку властивість: всі її узагальнені частинні похідні

$$D_x^{\alpha} \partial_t^{\beta} w(x,t) \quad з \quad 0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$$

є неперервними на $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Нехай V є непорожня відкрита підмножина $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Якщо кожна функція

$$w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \textit{з} \quad \operatorname{supp} w \subset V$$

задовольняє умову

$$\partial^j w / \partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \textit{для кожного} \quad j \in \mathbb{Z} \quad \textit{з} \quad 0 \leq j \leq p,$$

то φ задовольняє умову (1.12).

Для формулювання результатів дисертації також будуть потрібні ізотропні простори Хермандера $H^{s;\varphi}(G)$. Покладемо $H^{s;\varphi}(G) := H^{\mu}(G)$, де показник μ має вигляд

$$\begin{gathered}\mu(\xi) = \bigl(1 + |\xi|^2\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi|^2)^{1/2}\bigr) \\ \text{для довільного } \ \xi \in \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Оскільки функція (1.13) є радіальною (залежить лише від $|\xi|$), то простір $H^{s;\varphi}(G)$ є ізотропним. Ці простори було виділено, досліджено, та систематично застосовано до еліптичних диференціальних операторів та еліптичних граничних задач В. А. Михайлецем та О. О. Мурачем [99, 101].

Виділені вище простори Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\cdot)$ мають важливу інтерполяційну властивість, яка відіграє ключову роль у дисертації. Кожний такий простір Хермандера можна отримати інтерполяцію з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Нагадаємо означення цієї інтерполяції.

Метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів було введено К. Фойашем і Ж.-Л. Ліонсом [63, с. 278]. Ця інтерполяція є природним узагальненням класичного методу інтерполяції

С. Г. Крейна [15] і Ж.-Л. Ліонса [67] в тому випадку, коли замість числа в якості параметра інтерполяції використовується досить загальна функція (див., наприклад, монографії [16, гл.4, п.1.10] і [18, гл.1, п.2 і п.5]). Вона досліджувалась різними авторами [65, 106, 107, 111] і застосовувалась у теорії функціональних просторів [59, 88, 89, 95, 101].

Для наших цілей достатньо обмежитись випадком сепарабельних комплексних гільбертових просторів. Ми слідуємо монографії [101, п.1.1], у якій систематично викладено цю інтерполяцію (див. також [95, п. 2]).

Нехай $X := [X_0, X_1]$ є впорядкованою парою сепарабельних комплексних гільбертових просторів для яких має місце неперервне і щільне вкладання $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує оператор J, такий, що він є самоспряженим додатньо визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1, причому $\|Jv\|_{X_0} = \|v\|_{X_1}$ для кожного $v \in X_1$. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X (див., наприклад, [16, гл.4, теорема 1.12]). Він визначає ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a,b]$, де $0 < a < b < \infty$, і $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a,\infty)$, де $a > 0$.

Для заданої функції $\psi \in \mathcal{B}$ розглянемо (взагалі необмежений) оператор $\psi(J)$, визначений в X_0 як борелевська функція ψ від J. Цей оператор будується за допомогою спектральної теореми, застосованої до самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$, або скорочено X_ψ, область візначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(v_1, v_2)_{X_\psi} := (\psi(J)v_1, \psi(J)v_2)_{X_0}.$$

Лінійний простір X_ψ є гільбертовим і сепарабельним відносно цього скалярного добутку. Останній породжує норму $\|v\|_{X_\psi} := \|\psi(J)v\|_{X_0}$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо *інтерполяційним параметром*, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0 правильно таке: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, тоді звуження відображення T на X_ψ є також обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ є інтерполяційним параметром, тоді будемо казати, що гільбертів простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. В цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладання $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$ (див. [35, 101, теорема 1.1]).

Клас всіх інтерполяційних параметрів (в сенсі даного означення) допускає конструктивний опис. А саме, функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді коли ψ є псевдоугнутою в околі ∞. Остання властивість означає, що існує угнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞. Цей критерій випливає з опису Ж. Петре [109, 110] класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. також [2, теорема 5.4.4]).

Ми будемо використовувати такий наслідок з цього критерію [101, теорема 1.11].

Твердження 1.2. *Припустимо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є правильно змінною на нескінченності функцією порядку θ, де $0 < \theta < 1$, тобто*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(\lambda r)}{\psi(r)} = \lambda^\theta \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром.

Відмітимо, що у випадку степеневих функцій твердження 1.2 приводить до вище зазначеного класичного результату Ж.-Л. Ліонса та С. Г. Крейна. А саме, вони довели, що функція $\psi(r) \equiv r^{\theta}$ є інтерполяційним параметром коли $0 < \theta < 1$. В цьому випадку показник θ розглядається як числовий параметр інтерполяції.

Тепер сформулюємо інтерполяційні теореми для просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ (версії цих теорем є правильними і для просторів $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$).

Нехай

$$s, s_0, s_1, \gamma \in \mathbb{R}, \quad s_0 < s < s_1, \quad \gamma > 0, \quad \text{і} \quad \varphi \in \mathcal{M}. \tag{1.14}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

За твердженням 1.2, ця функція є інтерполяційним параметром, оскільки вона є правильно змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s - s_0)/(s_1 - s_0)$ з $0 < \theta < 1$. Надалі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів з функціональним параметром ψ.

Теорема 1.3. (2.3) *Нехай $2 \leq k \in \mathbb{Z}$. У припущенні* (1.14) *правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]_{\psi} \tag{1.16}$$

з рівністю норм. Тут ψ – інтерполяційний параметр, заданий формулою (1.15).

Теорема 1.4. (2.6) *В додаток до* (1.14) *припустимо, що* $s_0 \geq 0$. *Тоді*

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\bigr]_{\psi} \tag{1.17}$$

і

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(S) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_{\psi} \tag{1.18}$$

з точністю до еквівалентності норм.

1.2. Параболічні задачі

У *третьому* розділі досліджено лінійні параболічні початково-крайові задачі з нульовими початковими даними Коші у анізотропних просторах Хермандера $H_{+}^{s,s/(2b);\varphi}(\cdot)$. Доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. В якості застосування цих результатів встановлено теореми про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Також отримано нові достатні умови, за яких узагальнені похідні заданого порядку розв'язків будуть неперервними. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь, а також систем рівнянь, параболічних за Петровським.

Наведемо коротко основні результати для задач у випадках багатовимірного параболічного рівняння та системи рівнянь, параболічної за Петровським. Версії цих результатів також отримано для випадку двовимірного параболічного рівняння (див. п. 3.7).

Розглянемо у циліндрі Ω таку параболічну початково–крайову задачу, яка складається з параболічного диференціального рівняння

$$\begin{gathered} A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \\ \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t) = f(x,t) \qquad (1.19) \\ \text{для всіх} \quad x\in G \quad \text{і} \quad t\in(0,\tau); \end{gathered}$$

m крайових умов

$$B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\le m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha\partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \tag{1.20}$$

$$\text{для всіх}\quad x\in\Gamma,\quad t\in(0,\tau)\quad \text{і}\quad j\in\{1,\dots,m\};$$

та $\varkappa := m/b$ початкових даних Коші

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для всіх}\quad x\in G\quad \text{і}\quad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{1.21}$$

Зазначимо, що початкові дані (1.21) вважаються нульовими. Тут b, m і всі m_j є довільно задані цілі числа, такі, що $m \ge b \ge 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \ge 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ і $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$, де $j\in\{1,\dots,m\}$ вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто кожна

$$a^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigl\{w\restriction\overline{\Omega}\colon\ w\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\bigr\}$$

і кожна

$$b_j^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{S}) := \bigl\{v\restriction\overline{S}\colon\ v\in C^\infty(\Gamma\times\mathbb{R})\bigr\}.$$

Використовуємо такі позначення $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ і $t\in\mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_n$. У формулах (1.19) і (1.20) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1,...,\alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайова задача (1.19)–(1.21) називається параболічною у циліндрі Ω, якщо виконуються такі дві умови.

Умова 1.1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, правильно

$$A^{\circ}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta} \neq 0$$

$$\text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Для формулювання умови 1.2 довільно виберемо точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\xi| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x)$ є ортом внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x. З умови 3.1 та нерівності $n \geq 2$ випливає, що многочлен $A^{\circ}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має рівно m коренів $\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)$, $j = 1,\ldots,m$, с додатною уявною частиною і m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 1.2. При кожному такому виборі x, t, ξ та p многочлени

$$B_j^{\circ}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p) \equiv$$

$$\sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,(\xi+\zeta\nu(x))^{\alpha}\,p^{\beta}, \quad j = 1,\ldots,m,$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}(\zeta - \zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)).$$

Відмітимо, що умова 1.1 є умовою $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [37] диференціального рівняння $Au = f$ у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 1.2 виражає той факт, що система крайових диференціальних операторів $\{B_1, \ldots, B_m\}$ накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

Пов'яжемо з параболічною задачею (1.19)–(1.21) лінійне відображення

$$\begin{gathered} C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto (Au, Bu) := \\ \bigl(Au, B_1 u, \ldots, B_m u\bigr) \in C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^{\infty}_{+}(\overline{S})\bigr)^m \end{gathered} \tag{1.22}$$

Тут і нижче

$$\begin{aligned} C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) &:= \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} :\ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \bigr\}, \\ C^{\infty}_{+}(\overline{S}) &:= \bigl\{ h \restriction \overline{S} :\ h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0, \infty) \bigr\}. \end{aligned}$$

Відображення (1.22) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ і $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}_{+}(\overline{S}))^m$. Це випливає з [1, теорема 12.1].

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \ \text{ для кожного } \ j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Основний результат для розглядуваної задачі (теорема про ізоморфізми) формулюється наступним чином.

Теорема 1.5. (3.1) *Для довільного дійсного числа $\sigma > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (1.22) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A, B) : H^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}_{+}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}^{\sigma - 2m, (\sigma - 2m)/(2b); \varphi}_{+}(\Omega, S), \tag{1.23}$$

де

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{\sigma - 2m, (\sigma - 2m)/(2b); \varphi}_{+}(\Omega, S) \\ &:= H^{\sigma - 2m, (\sigma - 2m)/(2b); \varphi}_{+}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{\sigma - m_j - 1/2, (\sigma - m_j - 1/2)/(2b); \varphi}_{+}(S). \end{aligned} \tag{1.24}$$

У соболєвському випадку $\varphi(r) \equiv 1$ ця теорема відомою. У припущенні $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$ ця теорема є наслідком результату М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1], який охоплює граничний випадок $\sigma = \sigma_0$ та стосується загальних параболічних задач із, взагалі кажучи, неоднорідними даними Коші. У подальшому М. В. Житарашу [7, теорема 9.1] узагальнив результат М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка, позбавившись припущення $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$.

Як тільки що було зазначено, відображення (1.22) продовжується за неперервністю до ізоморфізму

$$(A, B) : H_{+}^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0 - 2m, (\sigma_0 - 2m)/(2b)}(\Omega, S), \tag{1.25}$$

який діє у анізотропних просторах Соболєва. Всі ізоморіфзми (1.23), де $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, є звуженнями (1.25).

Кожна вектор-функція

$$(f, g_1, ..., g_m) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0 - 2m, (\sigma_0 - 2m)/(2b)}(\Omega, S) \tag{1.26}$$

має єдиний прообраз $u \in H_{+}^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при взаємнооднозначному відображенні (1.25). Цю функцію u називаємо (сильним) *узагальненим* розв'язком параболічної задачі (1.19)–(1.21) із правою частиною (1.26).

Тепер обговоримо властивості регулярності узагальненого розв'язку задачі (1.19)–(1.21) у просторах Хермандера.

Наслідок 1.1. (3.1) *Припустимо, що* $u \in H_{+}^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.19)–(1.21), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, ..., g_m) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma - 2m, (\sigma - 2m)/(2b); \varphi}(\Omega, S)$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H_{+}^{\sigma, \sigma/(2b); \varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай

$$\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing, \quad \pi_1 := U \cap \partial\Omega, \quad \pi_2 := U \cap S.$$

Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$, де $s > 0$, $\gamma = 1/(2b)$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma;\varphi}(\omega, \pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Аналогічно, позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma;\varphi}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v \mapsto \|\chi v\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Теорема 1.6. (3.2) *Нехай* $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.19)–(1.21) *із правою частиною* (1.26)*. Припустимо, що*

$$f \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\omega, \pi_1), \tag{1.27}$$

$$g_j \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(\pi_2), \quad \text{з} \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.28}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$*. Тоді* $u \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega, \pi_1)$.

У випадку $\omega = \Omega$ і $\pi_1 = \partial\Omega$ (тоді $\pi_2 = S$), теорема 1.6 просто є повторенням наслідку 1.1. Якщо $\pi_1 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$).

Використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови, за яких узагальнений розв'язок u та його узагальнені похідні заданого порядку неперервні на $\omega \cup \pi_1$.

Теорема 1.7. (3.3) *Нехай ціле* $p \geq 0$ *таке, що* $p + b + n/2 > \sigma_0$, *і нехай* $u \in H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.19)–(1.21) *із правою частиною* (1.26)*. Припустимо, що права частина задовольняє умови* (1.27), (1.28) *для* $\sigma := p + b + n/2$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *для якого виконується інтегральна умова* (1.12)*:*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ *та всі його узагальнені частинні похідні*

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) \quad \textit{з} \quad |\alpha| + 2b\beta \leq p$$

є неперервними на множині $\omega \cup \pi_1$.

Зауваження 1.1. (3.1) Інтегральна умова (1.12) у теоремі 1.7 є точною. А саме, нехай $\sigma := p + b + n/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$, і припустимо, що для кожної функції $u \in H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ наступна імплікація є правильною:

$$\big(\, u \text{ є розв'язком задачі (1.19)–(1.21) для деякої правої частини (1.27), (1.28)} \,\big)$$
$$\Rightarrow \ \big(\, u \text{ задовольняє висновок теореми 1.7} \,\big).$$

Тоді φ задовольняє умову (1.12).

Зауваження 1.2. (3.2) Якщо сформулювати аналог теореми 1.7 для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну, оскільки інтегральна умова (1.12) не виконується у цьому випадку. А саме, потрібно стверджувати, що права частина задачі (1.19)–(1.21) задовольняє умову (1.27), (1.28) для деякого $\sigma > p + b + n/2$. Це припущення сильніше ніж умова теореми 1.7 завдяки лівому вкладанню у (2.19).

Тепер наведемо версії цих результатів у випадку систем, параболічних за Петровським.

Розглянемо у циліндрі Ω початково–крайову параболічну за Петровським задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t) \qquad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad t \in (0,\tau) \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,N\}; \tag{1.29}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \qquad \text{для всіх} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,m\}; \tag{1.30}$$

$$\partial_t^r u_k(x,t)\big|_{t=0} = 0 \qquad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad k \in \{1,\ldots,N\} \quad \text{і} \quad r \in \{0,\ldots,\varkappa_k - 1\}. \tag{1.31}$$

Відмітимо, що початкові дані (1.31) ми припускаємо нульові. Тут лінійні диференціальні вирази мають вигляд

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta, \tag{1.32}$$

$$B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) :=$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta\leq l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k < 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

для всіх припустимих значень індексів j, k. В цій задачі ми довільним чином вибрали натуральні числа $N \geq 2$, b і $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, поклали $m := b(\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_N)$ і вибрали ще m цілих чисел $l_1, \ldots, l_m$. Число $2b$ називається параболічною вагою даної задачі. Всі коефіцієнти диференціальних виразів $A_{j,k}$ та $B_{j,k}$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто кожна

$$a_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} \colon\, w \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \bigr\}$$

і кожна

$$b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S}) := \bigl\{ v \restriction \overline{S} \colon\, v \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}) \bigr\}.$$

Запишемо головні символи диференціальних операторів (1.32) і (1.33):

$$A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) := \sum_{|\alpha|+2b\beta=2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, \xi^\alpha p^\beta,$$

$$B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) =: \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta=l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, \xi^\alpha p^\beta, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k < 0. \end{cases}$$

Ці символи є однорідними поліномами за сукупністю аргументів $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ (як завжди, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$). Утворимо матриці

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) := \bigl(A^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p)\bigr)_{j,k=1}^{N},$$

$$B^{(0)}(x,t,\xi,p) := \bigl(B^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p)\bigr)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N}}.$$

Нагадаємо [45, розд. 1, § 1], що початково-крайова задача (1.29)–(1.31) називається параболічною за Петровським у циліндрі Ω, якщо виконуються наступні три умови.

Умова 1.3. Для довільно вибраних точок $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$ і вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ усі корені многочлена $\det A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ по змінній $p \in \mathbb{C}$ задовольняють нерівності $\operatorname{Re} p(x,t,\xi) \leq -\delta\,|\xi|^{2b}$ зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від x, t і ξ.

Умова 1.4. У системі (1.29) кожне рівняння з номером $j \in \{1,\ldots,N\}$ розв'язуване відносно похідної $\partial_t^{\varkappa_j} u_j$ і не містить жодної похідної вигляду $\partial_t^{\varkappa_k} u_k$, де $k \neq j$. Тому можна вважати, що $a_{j,k}^{(0,0,\ldots,0),\varkappa_k}(x,t) \equiv \delta_{j,k}$ для довільних $j,k \in \{1,\ldots,N\}$; тут $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

Нехай число $\delta_1 \in (0,\delta)$, де δ є стала з умови 1.3. Для формулювання умови 1.5 виберемо довільним чином точки $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, дотичний до межі Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ такі, що $\operatorname{Re} p \geq -\delta_1 |\xi|^{2b}$ і $|\xi| + |p| > 0$. Нехай $\nu(x)$ є орт внутрішньої нормалі до межи Γ у точці x. З умови 1 випливає, що многочлен $\det A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)$, $j = 1,\ldots,m$, з додатною уявною частиною та решту m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 1.5. Для деякого числа $\delta_1 \in (0, \delta)$ та при кожному зазначеному вище виборі параметрів x, t, ξ і p рядки матриці

$$B^{(0)}(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p) \cdot \widetilde{A}^{(0)}(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p)$$

є лінійно незалежними за модулем многочлена

$$\prod_{j=1}^{m} (\zeta - \zeta_j^{+}(x, t, \xi, p)).$$

Тут $\widetilde{A}^{(0)}$ — транспонована матриця агебраїчних доповнень елементів матриці $A^{(0)}$.

Зауважимо, що умови 1.3 і 1.4 є умовами (рівномірної) $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [38, с. 100] системи (1.29) у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 1.5 говорить про те, що система крайових умов (1.30) накриває параболічну систему (3.39) на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

Запишемо систему (1.29) і крайові умови (1.30) у матричній формі

$$Au = f \quad \text{і} \quad Bu|_S = g;$$

тут і далі

$$A := (A_{j,k}(x, t, D_x, \partial_t))_{j,k=1}^{N},$$

$$B := \bigl(B_{j,k}(x, t, D_x, \partial_t)\bigr)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N}}$$

— матричні диференціальні оператори, а u, f та g є комплексно-значні вектор-функції.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (1.29)–(1.31) лінійне відображення

$$\bigl(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})\bigr)^{N} \ni u \mapsto (Au, Bu) \in \bigl(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})\bigr)^{N} \times \bigl(C_{+}^{\infty}(\overline{S})\bigr)^{m}. \qquad (1.34)$$

Тут і нижче

$$C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) := \bigl\{w\restriction\overline{\Omega}:\ w\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w\subseteq\mathbb{R}^{n}\times[0,\infty)\bigr\},$$
$$C^{\infty}_{+}(\overline{S}) := \bigl\{h\restriction\overline{S}:\ h\in C^{\infty}(\Gamma\times\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h\subseteq\Gamma\times[0,\infty)\bigr\}.$$

Відображення (1.34) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами

$$(C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^{N} \quad \text{і} \quad (C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}))^{N}\times(C^{\infty}_{+}(\overline{S}))^{m}.$$

Це випливає з [46, теорема 1.2].

Позначимо через σ_0 найменше ціле число таке, що

$$\sigma_0\geq 0,\quad \sigma_0\geq l_j+1\ \text{ для всіх }\ j\in\{1,\ldots,m\},\quad \frac{\sigma_0}{2b}\in\mathbb{Z}.$$

Основний результат для розглядуваної задачі (теорема про ізоморфізми) формулюється наступним чином.

Теорема 1.8. (3.7) *Для довільного дійсного числа* $\sigma>\sigma_0$ *і довільного функціонального параметра* $\varphi\in\mathcal{M}$ *відображення* (1.34) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A,B):\mathcal{G}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega):=\bigoplus_{k=1}^{N}H^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)\ \leftrightarrow$$

$$\bigl(H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)\bigr)^{N}\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}H^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}_{+}(S)=: \tag{1.35}$$

$$\mathcal{H}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S).$$

Якщо $\varphi\equiv 1$, то ізоморфізм (1.35) діє у парах анізотропних просторів Соболєва. У цій ситуації теорема 1.8 встановлена В. О. Солонніковим

[46, теорема 1.2] у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. М. В. Житарашу [62, теорема 5.7] позбавився припущення $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. Їх результати охоплюють і граничний випадок $\sigma = \sigma_0$.

Як тільки що було згадано, відображення (1.34) продовжується за неперервністю до ізоморфізму

$$(A, B) : \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S), \tag{1.36}$$

який діє у анізотропних просторах Соболєва. Всі ізоморіфзми (1.35), де $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, є звуженнями (1.36).

Кожна вектор-функція

$$(f, g) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S) \tag{1.37}$$

має єдиний прообраз $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при взаємнооднозначному відображенні (1.36). Цю вектор-функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком параболічної задачі (1.29)–(1.31) із правою частиною (1.37).

Обговоримо властивості регулярності цього розв'язку у просторах Хермандера. Наступний результат випливає з теореми 1.8.

Наслідок 1.2. (3.3) *Припустимо, що* $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.29) – (1.31)*, праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega, S)$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$*. Тоді* $u \in \mathcal{G}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай

$$\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing, \quad \pi_1 := U \cap \partial\Omega, \quad \pi_2 := U \cap S.$$

Теорема 1.9. (3.8) *Нехай вектор-функція* $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.29) – (1.31) *із правою частиною* (1.37). *Припустимо, що*

$$\begin{gathered}(f,g) \in \\ \left(H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\right)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(\pi_2)\end{gathered} \tag{1.38}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді*

$$u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) := \bigoplus_{k=1}^{N} H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \tag{1.39}$$

У випадку $\omega = \Omega$ і $\pi_1 = \partial\Omega$ (тоді $\pi_2 = S$), теорема 1.9 просто є повторенням наслідку 1.2. Якщо $\pi_1 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$).

Виберемо довільну компоненту u_k узагальненого розв'язку u. Використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови неперервності на $\omega \cup \pi_1$ обраної компоненти u_k та її узагальнених частинних похідних заданого порядку.

Теорема 1.10. (3.9) *Виберемо довільне* $k \in \{1, \ldots, N\}$. *Нехай ціле* $p \geq 0$ *таке, що* $p + b + n/2 > \sigma_0 + 2b\varkappa_k$, *і нехай вектор-функція* $u \in \mathcal{G}_+^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.29) – (1.31) *із правою частиною* (1.37). *Припустимо, що права частина задовольняє умову* (1.38) *для* $\sigma := p + b + n/2 - 2b\varkappa_k$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *для якого виконується інтегральна умова* (1.12):

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді компонента $u_k(x,t)$ *розв'язку* u *та всі її узагальнені частинні похідні* $D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)$, *для яких* $|\alpha| + 2b\beta \leq p$, *є неперервними на множині* $\omega \cup \pi_1$.

Для цієї теореми мають місце версії зауважень 1.1 і 1.2.

Зауваження 1.3. (3.3) Інтегральна умова (1.12) у теоремі 1.10 є точною. А саме, нехай $\sigma := p+b+n/2-2b\varkappa_k$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і припустимо, що для кожної вектор-функції $u \in \mathcal{G}_+^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ наступна імплікація є правильною

$$\big(\, u \text{ є розв'язком задачі (1.29)–(1.31) для деякої правої частини (1.38)} \,\big)$$
$$\Rightarrow \big(\text{компонента}\, u_k \text{ задовольняє висновку теореми 1.10} \,\big).$$

Тоді φ задовольняє умову (1.12).

Зауваження 1.4. (3.4) Якщо сформулювати аналог теореми 1.10 для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну, оскільки (1.12) не виконується у цьому випадку. А саме, потрібно стверджувати, що права частина задачі (1.29) – (1.31) задовольняє умову (1.38) для деякого $\sigma > p + b + n/2 - 2b\varkappa_k$. Це припущення сильніше ніж умова теореми 1.10 завдяки лівому вкладанню у (2.19).

У *четвертому* розділі досліджено загальні лінійні неоднорідні параболічні початково-крайові задачі у анізотропних просторах Хермандера $H^{s,s/(2b);\varphi}(\cdot)$. Доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. В якості застосування цих результатів встановлено теорему про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Також знайдено нові достатні умови того, що узагальнені розв'язки початково–крайових задач є класичними. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь. Також окремо проведено дослідження важливих з точки зору застосувань задач для параболічних рівнянь другого порядку.

Наведемо коротко основні результати.

Розглянемо у циліндрі Ω загальну неоднорідну параболічну початково–крайову задачу, яка складається з параболічного диференціального рівняння

$$\begin{gathered} A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \\ \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = f(x,t) \\ \text{для всіх}\quad x\in G \quad \text{і} \quad t\in(0,\tau); \end{gathered} \tag{1.40}$$

m крайових умов

$$\begin{gathered} B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \\ \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \\ \text{для всіх}\quad x\in\Gamma,\quad t\in(0,\tau) \quad \text{і} \quad j\in\{1,\dots,m\}; \end{gathered} \tag{1.41}$$

та $\varkappa := m/b$ початкових даних Коші

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = h_k(x) \quad \text{для всіх} \quad x\in G \quad \text{і} \quad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{1.42}$$

Тут b, m і всі m_j є довільно задані цілі числа, такі, що $m \geq b \geq 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \geq 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ і $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$, де $j \in \{1,\ldots,m\}$ вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайова задача (1.40)–(1.42) називається параболічною у циліндрі Ω, якщо виконуються умови 1.1 і 1.2.

Нехай

$$\sigma_0 := \max\{2m, m_1+1, \ldots, m_m+1\}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m-1$ для всіх $j \in \{1,\ldots,m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Пов'яжемо з параболічною задачею (1.40)–(1.42) лінійне відображення

$$\begin{aligned} &u \mapsto \Lambda u := \\ &= \big(Au, B_1u, \ldots, B_mu, u\restriction\overline{G}, \ldots, (\partial_t^{\varkappa-1}u)\restriction\overline{G}\big), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Основний результат для параболічної задачі (1.40)–(1.42) полягає в тому, що лінійне відображення (1.43) продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера.

Перш ніж сформулювати цей результат зауважимо, для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок u задачі (1.40)–(1.42), її праві частини повинні задовольняти природні умови узгодження (див., наприклад, [1, § 11] або [17, гл. 4, § 5]). Ці умови полягають в тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (1.40) та початкових умов (1.42), повинні задовольняти крайові умови (4.2) та співвідношення, що утворюються в результаті диференціювання крайових умов по змінній t.

Тому спочатку вкажемо простір правих частин задачі (1.40)–(1.42); будемо його позначати $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$.

Нехай $s \geq \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Розглянемо гільбертів простір

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\ &= H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \\ &\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(G).\end{aligned}$$

Покладемо

$$E := \{\sigma_0 + r - 1/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\}.$$

Нехай $s \notin E$. За означенням, гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій

$$F = \big(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}\big) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi},$$

які задовольняють природні умови узгодження (див. (4.10)).

Якщо $s \in E$, то означаємо гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\ &= \big[\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\big]_{1/2}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, означений формулою (1.44) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним у $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$.

Теорема 1.11. (4.1) *Для довільного дійсного числа $s > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (1.43) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : \, H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}. \tag{1.45}$$

Ця теорема є відомою у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$. А саме, вона міститься у результаті М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1] у припущенні $s/(2b) \in \mathbb{Z}$, який покривається результатом М. В. Житарашу [7, теорема 9.1], де зняте останнє припущення. Ці результати включають і граничний випадок $s = \sigma_0$.

Відмітимо, що необхідність означати простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ окремо для випадку $s \in E$ обумовлена наступним: якщо означити цей простір для $s \in E$ у той же спосіб, що і для $s \notin E$, то ізоморфізм (1.45) порушується щонайменше для $\varphi \equiv 1$. Це випливає з результату Солоннікова [44, § 6], див. також [68, зауваження 6.4].

Як випливає із зазначеного вище результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1], для кожної функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{1.46}$$

параболічна задача (1.40)–(1.42) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (1.46).

Обговоримо тепер властивості регулярності цього розв'язку у просторах Хермандера. Наступний результат стосується глобального підвищення регулярності розв'язку і випливає з теореми 1.11.

Наслідок 1.3. (4.1) *Припустимо, що* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.40)–(1.42), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

для деяких $s > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату.
Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, такою що $U \cap \Gamma = \varnothing$.
Нехай

$$\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing, \quad \pi_1 := U \cap \partial\Omega, \quad \pi_2 := U \cap S, \quad \pi_3 := U \cap G.$$

Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s;\varphi}(G)$ з $\gamma = 1/(2b)$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція.

Аналогічно, позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$, де $s > 0$, лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v \mapsto \|\chi v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_3$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$w \mapsto \|\chi w\|_{H^{s;\varphi}(G)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Теорема 1.12. (4.2) *Нехай $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1.40)–(1.42) *з правими частинами* (1.46). *Припустимо, що*

$$f \in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{1.47}$$

$$g_j \in H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2) \quad \textit{для всіх} \quad j \in \{1,\dots,m\}, \tag{1.48}$$

$$h_k \in H^{\sigma-2bk-b;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3) \quad \textit{для всіх} \quad k \in \{0,\dots,\varkappa-1\}, \tag{1.49}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

У випадку, коли $\pi_1 = \varnothing$, теоерма 1.12 стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$. Якщо $\pi_3 = \varnothing$ то ця теорема стверджує про підвищення регулярності розв'язку при $t > 0$ і є наслідком теореми 1.6. Якщо $\pi_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma$, $\pi_2 = S$, $\pi_3 = G$, то підвищення регулярності розв'язку відбувається на множині $\overline{\Omega} \setminus \Gamma$.

Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$).

Перейдемо тепер до теорем про ізоморфізми для початково–крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку.

У Ω розглянемо параболічне диференціальне рівняння другого порядку

$$Au(x,t) \equiv \partial_t u(x,t) + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x,t)\, D_x^\alpha u(x,t) = f(x,t) \quad \text{для всіх } \ x \in G \ \text{ і } \ t \in (0,\tau). \tag{1.50}$$

Всі коефіцієнти a_α диференціального виразу A вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, тобто $a^\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Припускаємо, що диференціальний оператор A є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, тобто, що виконується така умова (див.,наприклад, [1, § 9, п. 1]):

Умова 1.6. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$, виконується нерівність

$$p + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,t)\, \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

У роботі досліджуємо початково-крайову задачу, яка складається з параболічного рівняння (1.50), початкової умови

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{для всіх } \ x \in G, \tag{1.51}$$

і крайової умови нульового порядку (умови Діріхле)

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для всіх } \ x \in \Gamma \ \text{ і } \ t \in (0,\tau) \tag{1.52}$$

або загальної крайової умови першого порядку

$$Bu(x,t) \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j u(x,t) + b_0(x,t) u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для всіх } \ x \in \Gamma \ \text{ і } \ t \in (0,\tau). \tag{1.53}$$

Щодо (1.53) припускаємо, що всі коефіцієнти b_0, b_1, ..., b_n виразу B належать до $C^\infty(\overline{S})$ і що B накриває A на $\overline{S}$ [1, § 9, п. 1].

Останнє припущення означає, що виконується наступна умова:

Умова 1.7. Виберемо довільно $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ такі, що $|\eta| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ – одиничний вектор внутрішньої нормалі до Γ у точці x. Тоді:

a) правильна нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x) \neq 0;$$

b) число

$$\zeta = -\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x,t)\eta_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x)}$$

не є коренем полінома

$$p + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,t)\,(\eta_1 + \zeta\nu_1(x))^{\alpha_1} \cdots (\eta_n + \zeta\nu_n(x))^{\alpha_n}$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$.

Корисно зазначити, що якщо всі коефіцієнти b_1,..., b_n є дійсними, тоді частина b) умови 1.7 виконується автоматично. Це безпосередньо випливає з умови 1.6.

Таким чином, ми розглядаємо дві параболічні задачі: (1.50), (1.51), (1.52) і (1.50), (1.51), (1.53).

Пов'яжемо з параболічною задачею (1.50)–(1.52) лінійне відображення

$$\Lambda_0 : u \mapsto \bigl(Au, u\restriction\overline{S}, u(\cdot,0)\bigr), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{1.54}$$

а з параболічною задачею (1.50), (1.51), (1.53) лінійне відображення

$$\Lambda_1 : \, u \mapsto \big(Au, Bu, u(\cdot, 0)\big), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{1.55}$$

Як і у випадку загальних параболічних задач, для того, щоб існували достатньо регулярні розв'язки задач (1.50)–(1.52) і (1.50), (1.51), (1.53), їх праві частини повинні задовольняти природні умови узгодження.

Тому, перш ніж формулювати основні результати, вкажемо простори правих частин розглядуваних задач; будемо позначати їх $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ відповідно.

Нехай $s \geq 2$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Розглянемо гільбертові простори

$$\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4;\varphi}(S) \oplus H^{s-1;\varphi}(G).$$

і

$$\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} := H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4;\varphi}(S) \oplus H^{s-1;\varphi}(G).$$

Покладемо

$$E_0 := \{2r + 3/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\}.$$

Нехай спочатку $s \notin E_0$. За означенням, гільбертовий простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\big(f, g, h\big) \in \mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють природні умови узгодження (див. (4.90)).

Якщо $s \in E_0$, то означаємо гільбертовий простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := \big[\mathcal{Q}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \mathcal{Q}_0^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\big]_{1/2}. \tag{1.56}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром 1/2. Гільбертовий простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, означений формулою (1.56) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм.

Покладемо

$$E_1 := \{2r + 1/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\}.$$

Якщо $s \notin E_1$, то, за означенням, гільбертовий простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\big(f, g, h\big) \in \mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють природні умови узгодження (див. (4.100)).

Якщо $s \in E_1$, то означимо гільбертовий простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції, а саме

$$\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} := \big[\mathcal{Q}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \mathcal{Q}_1^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\big]_{1/2}. \tag{1.57}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно. Цей гільбертовий простір не залежить від вибору ε з точністю до еквівалентності норм.

Тепер ми можемо сформулювати теореми про ізоморфізми для розглядуваних параболічних задач.

Теорема 1.13. (4.6) *Для довільних $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ (при $s = 2$ додатково припускаємо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією) відображення* (1.54) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_0 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{1.58}$$

Теорема 1.14. (4.7) *Для довільних* $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *(при* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією) відображення* (1.55) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_1 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{1.59}$$

У цих теоремах при $s = 2$ додатково припускається, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Це пов'язане з наступним. При $s = 2$ права частина f рівняння (1.50) є елементом простору $H^{0,0;\varphi}(\Omega)$. Для довільної $\varphi \in \mathcal{M}$ останній простір може бути ширший ніж $L_2(\Omega)$. А в дисертаційній роботі розглядаються лише розподіли з $L_2(\Omega)$. Умова нестрогого зростання функції φ забезпечує необхідне вкладання $H^{0,0;\varphi}(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$.

Теореми 1.13 і 1.14 є відомими у соболєвському випадку, коли $\varphi \equiv 1$. А саме вони містяться в результаті Аграновича та Вішика [1, теорема 12.1] для випадку $s/2 \in \mathbb{Z}$, який покривається результатом Ліонса і Мадженеса [68, теорема 6.2] у припущенні, що ні s ні $s/2$ не є напівцілими. Результат М. В. Житарашу [7, теорема 9.1] знімає останнє припущення. Солонніков [44, теорема 17] довів відповідні апріорні оцінки для анізотропних соболєвських норм розв'язків задачі (1.50)–(1.52) та задачі (1.50), (1.51), (1.53) за умови, що (1.53) є крайовою умовою Неймана.

Тепер розглянемо питання за яких умов узагальнений розв'язок параболічної крайової задачі є класичним, тобто коли він в термінах класичних похідних і слідів функцій задовольняє рівняння у відкритому циліндрі, а на його бічній поверхні і основі – крайові і початкові умови відповідно. У роботах [10,11,17,34,45,50] відповідь на це питання отримано у термінах приналежності правих частин задачі деяким просторам Гельдера або Соболєва. У дисертаційній роботі сформулюємо ці умови у термінах приналежності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Їх застосування дозволяє отримати більш тонкі достатні умови ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва.

Попередньо зауважимо, що у сучасній теорії параболічних задач однією з умов класичності розв'язку є його неперервність на лінії Г, що з'єднує бічну поверхню і основу циліндра, у якому досліджується задача (див., наприклад, [36, с.42]). Ця умова звичайно виконується, якщо розв'язок буде неперервним на $\overline{\Omega}$. Для таких класичних розв'язків ми будемо вживати термін "сильно класичний".

Почнемо з мішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку. Приведемо необхідні означення.

Із результату М. С. Аграновіча та М. І. Вішика [1, теорема 12.1] випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{Q}_0^{0,0}$ задача (1.50)–(1.52) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_0^{0,0}$.

Точно так означається узагальнений розв'язок задачі (1.50), (1.51), (1.53). Для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{H}_1^{0,0}$ задача (1.50), (1.51), (1.53) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ [1, теорема 12.1]. Таку функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{H}_1^{0,0}$.

Означення 1.2. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (1.50)–(1.52) назвемо сильно класичним, якщо узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і

$D_x^\alpha u$, для яких $|\alpha| \le 2$, є неперервними в Ω, а сама функція u є неперервною у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Іншими словами, узагальнений розв'язок u задачі (1.50)–(1.52) назвемо її сильно класичним розв'язком, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Означення 1.3. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (1.50), (1.51), (1.53) назвемо сильно класичним, якщо узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$, для яких $|\alpha| \le 2$, є неперервними в Ω, а функція u та її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$ для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$ є неперервними у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

В різних практичних задачах (див., наприклад, [48, гл.3, §2, п.3]) корисно розглядати класичні розв'язки, які не є неперервними на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра, у якому досліджується задача. Дамо означення класичності узагальнених розв'язків у щойно зазначеному сенсі.

Означення 1.4. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (1.50)–(1.52) назвемо класичним, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \quad \text{і} \quad u \in C(\Omega \cup S \cup G).$$

Означення 1.5. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (1.50), (1.51), (1.53) назвемо класичним, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega), \quad u \in C(\Omega \cup G)$$
$$u,\ \partial u/\partial x_j \in C(\Omega \cup S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Тут скрізь, як звичайно, $C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ – множина функцій, які є неперервно диференційовні на Ω разом зі своїми частинними похідними $\partial_t u$ і $D^{\alpha}_x u$, для яких $|\alpha| \le 2$.

Зауважимо, що для початково-крайової задачі (1.50)–(1.52) (або (1.50), (1.51), (1.53)) “гарні“ умови

$$f \in C(\overline{\Omega}), \quad g \in C(\overline{S}) \quad \text{і} \quad h \in C(\overline{G})$$

ще не гарантують того, що її розв’язок u є класичним. Це зауваження випливає, зокрема, з результату Л. Хермандера [52, теорема 7.9.8]. Згідно з ним, навіть коли усі коефіцієнти рівняння (1.50) сталі, існує функція $f \in C(\Omega)$ з $\operatorname{supp} f \subset \Omega$, така, що це рівняння має узагальнений розв’язок $u \in C^1(\Omega) \setminus C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ з $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Отже, розглянута задача може мати некласичний розв’язок u у випадку “гарних“ правих частин $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \equiv 0$ і $h \equiv 0$.

Для того, щоб гарантувати класичність узагальненого розв’язку розглядуваних задач, потрібно на їх праві частини накладати деякі інші умови. Можна використати простори Гельдера. Зокрема, для задачі (1.50)–(1.52) достатньою умовою існування класичного розв’язку буде (див., наприклад, [36, с.42]) належність функції f простору Гельдера $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ з деяким $\alpha > 0$, неперервність функцій g та h на $\overline{S}$ і $\overline{G}$ відповідно, та виконання умови узгодження $g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma$. Для існування класичного розв’язку задачі (1.50), (1.51), (1.53), мабуть, лише неперервності функцій g і h буде недостатньо (див. [17, гл. 4, теорема 15.1], [11, §3, теорема 5], [50, с.185]).

Ми підемо іншим шляхом. Сформулюємо умови класичності узагальнених розв’язків задач (1.50)–(1.52) та (1.50), (1.51), (1.53) у термінах приналежності їх правих частин f, g і h гільбертовим функціональним просторам Хермандера.

Для зручності нагадаємо означення локальних просторів, що зустрічаються у наступних теоремах. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, такою що $U \cap \Gamma = \varnothing$. Позначимо

$$\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing, \quad \pi_1 := U \cap \partial\Omega, \quad \pi_2 := U \cap S, \quad \pi_3 := U \cap G.$$

Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$.

Аналогічно, позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$, де $s > 0$, лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$.

Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_3$.

Тепер сформулюємо достатні умови, за яких узагальнені розв'язки задач (1.50)–(1.52) і (1.50), (1.51), (1.53) відповідно, є сильно класичними.

Теорема 1.15. (4.8) *Нехай функція $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі* (1.50)–(1.52), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing), \tag{1.60}$$

$$(f,\ g,\ h) \in \mathcal{Q}_0^{-1+n/2,\ -1/2+n/4;\ \varphi_2} \tag{1.61}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 і $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ такими, що

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \textit{для всіх} \quad j \in \{1, 2\}. \tag{1.62}$$

При $n = 2$ *додатково припускаємо, що* φ_2 *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді* $u(x,t)$ *є сильно класичним розв'язком задачі* (1.50)*–*(1.52)*.*

Зауваження 1.5. Якщо сформулювати аналог теореми 1.15 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (1.60) і (1.61) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\, 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega, \varnothing), \tag{1.63}$$

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_0^{-1+n/2+\varepsilon_2,\, -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Теорема 1.16. (4.9) *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.50)*,* (1.51)*,* (1.53)*, праві частини якої задовольняють умови* (1.60) *і*

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_1^{n/2,\, n/4;\, \varphi_2} \tag{1.64}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 *і* $\varphi_2 \in \mathcal{M}$*, для яких правильно* (1.62)*. Тоді* $u(x,t)$ *є сильно класичним розв'язком задачі* (1.50)*,* (1.51)*,* (1.53)*.*

Вище зазначалось, що у термінах просторів Гельдера частиною достатніх умов існування класичних розв'язків розглядуваних задач буде належність функції f простору Гельдера $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ з деяким $\alpha > 0$.

Зауваження 1.6. Теореми 1.15 і 1.16 доповнюють класичні результати. А саме, існують функції $f \notin C(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови (1.60) і (1.61) (або (1.64)).

Зауваження 1.7. Якщо сформулювати аналог теореми 1.16 для соболєвської шкали ($\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (1.60) і (1.64) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (1.63) і

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_1^{n/2+\varepsilon_2,\, n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Перейдемо до формулювання достатні умов, за яких узагальнені розв'язки задач (1.50)–(1.52) і (1.50), (1.51), (1.53) відповідно, є класичними.

Теорема 1.17. (4.10) *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.50)–(1.52), *праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned} f \in\, & H^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\, \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap \\ & H^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S \cup G), \end{aligned} \tag{1.65}$$

$$g \in H^{1/2+n/2,\, 1/4+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S), \tag{1.66}$$

$$h \in H^{n/2;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(G) \tag{1.67}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 *і* $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int_1^{\infty} \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, 2\}. \tag{1.68}$$

При $n = 2$ *додатково припускаємо, що* φ_2 *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді* $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1.50)–(1.52).

Зауваження 1.8. Якщо сформулювати аналог теореми 1.17 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (1.65)–(1.67) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$
\begin{aligned}
&f \in H^{1+n/2+\varepsilon_1,\ 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\cap \\
&\qquad H^{-1+n/2+\varepsilon_2,\ -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S\cup G),\\
&g \in H^{1/2+n/2+\varepsilon_2,\ 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}_{\mathrm{loc}}(S),\\
&h \in H^{n/2+\varepsilon_2}_{\mathrm{loc}}(G)
\end{aligned}
$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Теорема 1.18. (4.11) *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.50), (1.51), (1.53), *праві частини якої задовольняють умови*

$$
\begin{aligned}
&f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing)\cap \\
&\qquad H^{n/2,\ n/4;\ \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S)\cap \\
&\qquad H^{-1+n/2,\ -1/2+n/4;\ \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega, G),
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

$$
g \in H^{1/2+n/2,\ 1/4+n/4;\ \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S), \tag{1.70}
$$

$$
h \in H^{n/2;\ \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G) \tag{1.71}
$$

з деякими функціональними параметрами φ_1, φ_2 *і* $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$
\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \textit{для всіх} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{1.72}
$$

При $n = 2$ *додатково припускаємо, що* φ_3 *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді* $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1.50), (1.51), (1.53).

Відмітимо, для означення локальних просторів на $\Omega \cup S$ і на S можна покласти, наприклад, $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\overline{G} \cup \overline{G}_\tau)$, де $\overline{G}$ і $\overline{G}_\tau$ відповідно нижня і верхня основи циліндра $\overline{\Omega}$.

Зауваження 1.9. Якщо сформулювати аналог теореми 1.18 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (1.69)–(1.71) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$\begin{aligned} f \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\, 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega, \varnothing) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_2,\, n/4+\varepsilon_2/2}(\Omega, S) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2+\varepsilon_3,\, -1/2+n/4+\varepsilon_3/2}(\Omega, G), \\ g \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1/2+n/2+\varepsilon_2,\, 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}(S), \\ h \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_3}(G) \end{aligned}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ і $\varepsilon_3 > 0$.

Наостанок сформулюємо в термінах просторів Хермандера достатні умови класичності узагальнених розв'язків загальної мішаної параболічної задачі.

Із результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1] випливає, що для кожної вектор–функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{1.73}$$

задача (1.40) – (1.42) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (1.73).

Дамо означення класичного розв'язку цієї задачі. Позначимо

$$m_0 := \max\{m_1, \ldots, m_m\}.$$

Означення 1.6. Узагальнений розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ задачі (1.40) – (1.42) назвемо класичним, якщо $u \in C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$, всі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$ для яких $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq m_0$, є неперервними на $\Omega \cup S$, а всі узагальнені частинні похідні $\partial^k_t u$ для яких $0 \leq k \leq \varkappa - 1$, є неперервними на $\Omega \cup G$.

Тут, як звичайно, $C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$ – множина функцій, які є неперервно диференційовні на Ω разом з усіма своїми частинними похідними $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$, для яких $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq 2m$.

Зауважимо, що в означенні класичного розв'язку задачі (1.40) – (1.42) ми не вимагаємо його неперервності у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Теорема 1.19. (4.3) *Покладемо* $\sigma_1 := 2m + b + n/2$, $\sigma_2 := m_0 + b + n/2$, $\sigma_3 := 2m - b + n/2$. *Припустимо, що* $\sigma_2 > \sigma_0$ *і* $\sigma_3 > \sigma_0$. *Нехай функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1.40) – (1.42), *праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned} f \in\, & H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap \\ & H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega,S) \cap \\ & H^{\sigma_3-2m,(\sigma_3-2m)/(2b);\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega,G), \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S) \quad \text{для всіх } j \in \{1,\dots,m\}, \tag{1.75}$$

$$h_k \in H^{\sigma_3-2bk-b;\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G) \quad \text{для всіх } k \in \{0,\dots,\varkappa-1\} \tag{1.76}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1, φ_2 *і* $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{1.77}$$

Тоді $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1.40) – (1.42).

Зауваження 1.10. Якщо сформулювати аналог теореми 1.19 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (1.74) – (1.76) при деяких $\sigma_1 > 2m + b + n/2$, $\sigma_2 > m_0 + b + n/2$ і $\sigma_3 > 2m - b + n/2$.

Наприкінці відмітимо, що у перших роботах за темою дисертації [19, 69, 70] було отримано теореми про ізоморфізми для крайових задач для загальних лінійних еліптичних і параболічних рівнянь і систем у шкалах просторів Соболєва, які є частинним випадком розглянутих ізотропних та анізотропних просторів Хермандера при $\varphi \equiv 1$.

РОЗДІЛ 2
ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ З ФУНКЦІОНАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Цей розділ присвячено деякому класу гільбертових просторів Хермандера, в якому будемо досліджувати параболічні початково-крайові задачі. Такі простори Хермандера мають важливу для застосувань властивість — вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Цей метод інтерполяції є основним методом дослідження у дисертації. Він також викладений у даному розділі.

2.1. Гільбертові простори Хермандера

У 1963 році Л. Хермандер [51, п. 2.2] запропонував широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва в категорії гільбертових просторів. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є довільна вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують числа $c > 0$ і $l > 0$ такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^{l} \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k. \tag{2.1}$$

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\, |\widehat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

У дисертації усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.

У просторі $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$. Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := (w, w)^{1/2}_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}.$$

Згідно з [51, п. 2.2], простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно введеного у ньому скалярного добутку. Крім того, цей простір є неперервно вкладеним у лінійний топологічний простір $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ повільно зростаючих розподілів заданих на $\mathbb{R}^k$, і множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ основних функцій заданих на $\mathbb{R}^k$ є щільною у $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ (див. також монографію Хермандера [53, п. 10.1]). Будемо казати, що функціональний параметр μ є показником регулярності для простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ та його версій $H^\mu(\cdot)$.

Версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної непорожньої відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^k$ вводиться у стандартний спосіб. А саме,

$$\begin{gathered} H^\mu(V) := \bigl\{ w \restriction V : \, w \in H^\mu(\mathbb{R}^k) \bigr\}, \\ \|u\|_{H^\mu(V)} := \inf\bigl\{ \|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} : \, w \in H^\mu(\mathbb{R}^k), \; u = w \restriction V \bigr\}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $u \in H^\mu(V)$. Тут, як звичайно, $w \restriction V$ означає звуження розподілу $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на відкриту множину V. Іншими словами, $H^\mu(V)$ є фактор-простором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ за його підпростором

$$H^\mu_Q(\mathbb{R}^k) := \bigl\{ w \in H^\mu(\mathbb{R}^k) : \, \operatorname{supp} w \subseteq Q \bigr\} \quad \text{з} \;\; Q := \mathbb{R}^k \backslash V. \tag{2.3}$$

Тому простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим і сепарабельним. Норма (2.2) породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^\mu(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)},$$

де $w_j \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ у V для кожного $j \in \{1, 2\}$. Тут Υ є ортогональним проектором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (2.3). Простори $H^\mu(V)$ і $H^\mu_Q(\mathbb{R}^k)$ було введено та досліджено Л. Р. Волєвичем і Б. П. Панеяхом [6, гл. 3].

З означення $H^\mu(V)$ та властивостей $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ безпосередньо випливає, що простір $H^\mu(V)$ неперервно вкладений у лінійний топологічний простір $\mathcal{D}'(V)$ всіх розподілів на V і множина

$$C_0^\infty(\overline{V}) := \bigl\{ w \restriction \overline{V} : \, w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k) \bigr\}$$

є щільною в $H^\mu(V)$.

2.2. Простори Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}(\cdot)$

З точки зору застосувань в теорії параболічних задач доцільно вибрати такий клас показників μ, щоб простори Хермандера H^{μ} мали такі властивості:

а) більш тонко характеризується регулярність розподілу, належного простору H^{μ}, ніж це можна робити в межах шкал просторів Соболєва,

б) версії цих просторів припускають коректне означення на бічній поверхні циліндра, у якому розглядаємо параболічну задачу,

в) ці простори отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових анізотропних просторів Соболєва.

Пункти б) і в) означають можливість побудови в таких просторах теорії розв'язності параболічних задач на основі методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів. З пункту а) слідує, наприклад, що в класі цих просторів можна отримати більш тонкі достатні умови класичності узагальнених розв'язків параболічних задач, ніж це можливо в шкалі просторів Соболєва.

Нехай ціле $k \geq 2$ і дійсне $\gamma > 0$. Відмітимо, що простори, які введемо нижче, будуть потрібні нам лише у випадку $\gamma = 1/(2b)$ з цілим $b \geq 1$; число $2b$ є параболічною вагою задачі. Але природньо їх ввести для довільного $\gamma > 0$. Отже, будемо використовувати простори Хермандера $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ та їх версії $H^{\mu}(\cdot)$ з показником регулярності μ, що має вигляд

$$\mu(\xi', \xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \qquad (2.4)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$. У кінці цього підрозділу покажемо, що функція μ вигляду (2.4) задовольняє умову Хермандера (2.1).

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, які задовольняють такі дві умови:

a) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,c]$, де $1 < c < \infty$;

b) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у [40, 57]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\ln r)^{\theta_1}\,(\ln\ln r)^{\theta_2}\ldots(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\ \text{разів}} r\,)^{\theta_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

З теореми про інтегральне зображення повільно змінних функцій (див., наприклад, [40, с. 10]) випливає такий опис класу $\mathcal{M}$.

Функція $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ належить до класу $\mathcal{M}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(r) = \exp\left(\beta(r) + \int_1^r \frac{\alpha(\tau)}{\tau}\,d\tau\right) \quad \text{при} \quad r \geq 1$$

для деяких неперервної функції $\alpha : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ такої, що $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$ і вимірної за Борелем обмеженої функції $\beta : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ такої, що має скінченну границю при $r \to \infty$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) := H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де показник регулярності μ має вигляд (2.4). У важливому окремому випадку $\varphi(r) \equiv 1$

простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^k)$ порядку $(s,s\gamma)$. В загальному випадку, коли $\varphi\in\mathcal{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)\hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)\quad\text{при}\quad s_0<s<s_1. \tag{2.5}$$

Дійсно, нехай $s_0<s<s_1$; оскільки $\varphi\in\mathcal{M}$, то існують додатні числа c_0 і c_1 такі, що

$$c_0\,r^{s_0-s}\leq\varphi(r)\leq c_1\,r^{s_1-s}\quad\text{для довільного}\quad r\geq 1$$

(див., наприклад, [40, п.1.5, властивість 1^0]). Тоді

$$\begin{aligned}c_0\bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s_0/2}&\leq\bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1+|\xi'|^2+|\xi_k|)^{1/2}\bigr)\\&\leq c_1\bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s_1/2}\end{aligned}$$

для довільних $\xi'\in\mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k\in\mathbb{R}$. Звідси зразу випливають неперервні вкладення просторів (2.5). Ці вкладення щільні, оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ щільна в усіх просторах з (2.5).

Розглянемо клас гільбертових функціональних просторів Хермандера

$$\bigl\{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k):\,s\in\mathbb{R},\,\varphi\in\mathcal{M}\,\bigr\}. \tag{2.6}$$

Вкладання (2.5) показують, що у (2.6) функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s,s\gamma)$-гладкості. Якщо $\varphi(r)\to\infty$ (або $\varphi(r)\to 0$) при $r\to\infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Інакше кажучи, φ уточнює основну гладкість $(s,s\gamma)$. Тут $\gamma>0$ виконує роль параметра анізотропії просторів, що утворюють цей клас.

У випадку $\gamma=1/(2b)$ будемо казати, що простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ є $2b$-анізотропний простір Хермандера на $\mathbb{R}^k$.

Опишемо область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в якій будемо розглядати параболічні задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно. У окремому випадку $n = 1$ в якості області G візьмемо інтервал $(0, l)$, де довільно задане дійсне число $l > 0$. В цьому випадку $\Omega := (0, l) \times (0, \tau)$ — відкритий прямокутник в $\mathbb{R}^2$.

Розв'язки початково–крайових задач та праві частини параболічних рівнянь будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$ де показник μ визначений формулою (2.4), у якій $k := n + 1$.

У випадку, коли Ω є циліндром нам знадобляться анізотропні простори Хермандера, задані на його бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$. Цим просторам будуть належати праві частини крайових умов параболічних задач. Означимо ці простори використовуючи спеціальні локальні карти на S.

Для наших задач достатньо обмежитись випадком $s > 0$. Отже, нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (2.4), у якій $k := n$.

Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут кожна θ_j це C^{∞}-диффеоморфізм всього евклідового простору $\mathbb{R}^{n-1}$ на відкриту підмножину Γ_j множини Γ. Більш того, $\Gamma := \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_{\lambda}$, тобто відкрити множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\lambda}$ утворюють покриття Γ.

Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, такі що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\chi_1 + \cdots + \chi_\lambda = 1$ на Γ. Ці функції утворюють C^∞-розбиття одиниці на Γ, яке підпорядковане покриттю.

Цей атлас на Γ породжує набір спеціальних локальних карт

$$\theta_j^* : \Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0, \tau), \quad j = 1, \ldots, \lambda, \tag{2.7}$$

на $S = \Gamma \times (0, \tau)$ за формулою $\theta_j^*(x, t) := (\theta_j(x), t)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$. Розглянемо функції $\chi_j^*(x, t) := \chi_j(x)$ для $x \in \Gamma$ і $t \in (0, \tau)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Вони утворюють C^∞-розбиття одиниці на S, яке підпорядковане покриттю $\{\Gamma_j \times (0, \tau) : j = 1, \ldots, \lambda\}$ многовида S.

Означення 2.1. лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номеру $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ функція

$$v_j(x, t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x), t)$$

аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$. Або, коротко

$$\begin{aligned} &H^{s,s\gamma;\varphi}(S) := \\ &\big\{ v \in L_2(S) : \, (\chi_j^* v) \circ \theta_j^* \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) \ \text{ для всіх } \ j \in \{1, \ldots, \lambda\} \big\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тут $L_2(S)$ – гільбертовий простір всіх інтегровних з квадратом відносно міри Лебега функцій $v : S \to \mathbb{C}$ на гладкому многовиді S. Як звичайно, $\circ$ означає композицію функцій або відображень, так що

$$((\chi_j^* v) \circ \theta_j^*)(x, t) = (\chi_j^* v)(\theta_j^*(x, t)) = \chi_j(\theta_j(x))\, v((\theta_j(x), t))$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$.

У просторі $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(v, v')_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (v_j, v_j')_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}, \tag{2.9}$$

де $v, v' \in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$. Він породжує норму

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := (v,v)^{1/2}_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)}.$$

Теорема 2.1. *Нехай $s > 0$, $\gamma > 0$, і $\varphi \in \mathcal{M}$. Такі твердження є правильні:*

(i) *Простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ.*

(ii) *Множина*

$$C^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{h\restriction \overline{S} :\, h \in C^{\infty}(\Gamma\times\mathbb{R})\bigr\}.$$

є щільною у цьому просторі.

Доведення теореми 2.1 буде представлеле у підрозділі 2.5 після теореми 2.6.

Нам також будуть потрібні ізотропні простори Хермандера $H^{s;\varphi}(V)$ на довільній непорожній відкритій множини $V \subseteq \mathbb{R}^k$ з $k \geq 1$. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $H^{s;\varphi}(V) := H^{\mu}(V)$, де показник μ має вигляд

$$\mu(\xi) = \bigl(1+|\xi|^2\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1+|\xi|^2)^{1/2}\bigr) \quad \text{для довільного } \xi \in \mathbb{R}^k. \tag{2.10}$$

Оскільки функція (2.10) є радіальною (залежить лише від $|\xi|$), то простір $H^{s;\varphi}(V)$ є ізотропним. Ми будемо використовувати простори $H^{s;\varphi}(V)$ задані на всьому Евклідовому просторі $V := \mathbb{R}^k$ або на області $V := G$ в $\mathbb{R}^n$.

Окрім того, нам будуть потрібні простори Хермандера $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ на $\Gamma = \partial\Omega$. Вони означаються за допомогою згаданих вище набору локальних карт $\{\theta_j\}$ і розбиття одиниці $\{\chi_j\}$ на Γ подібно до просторів на S. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За означенням, лінійний простір $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $\omega \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на многовиді Γ таких, що для кожного номеру

$j \in \{1, \dots, \lambda\}$ розподіл $\omega_j(x) := \chi_j(\theta_j(x))\,\omega(\theta_j(x))$ аргумента $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ належить до $H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. У просторі $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(\omega, \omega')_{H^{s;\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (\omega_j, \omega'_j)_{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $\omega, \omega' \in H^{s;\varphi}(\Gamma)$. Він породжує норму

$$\|\omega\|_{H^{s;\varphi}(\Gamma)} := (\omega, \omega)^{1/2}_{H^{s;\varphi}(\Gamma)}.$$

Простір $H^{s;\varphi}(\Gamma)$ є гільбертовим, сепарабельним та не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [101, теорема 2.3].

Класи ізотропних просторів Хермандера

$$\bigl\{H^{s;\varphi}(V) : s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\bigr\} \quad \text{і} \quad \bigl\{H^{s;\varphi}(\Gamma) : s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\bigr\}$$

було виділено, досліджено, та систематично застосовано до еліптичних диференціальних операторів та еліптичних граничних задач В. А. Михайлецем та О. О. Мурачем [99, 101].

Якщо $\varphi \equiv 1$, тоді розглянуті простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}(\cdot)$ стають просторами Соболєва $H^{s,s\gamma}(\cdot)$ і $H^{s}(\cdot)$ відповідно. З (2.5) зразу слідує, що

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\cdot) \hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\cdot) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \tag{2.11}$$

Аналогічно,

$$H^{s_1}(\cdot) \hookrightarrow H^{s;\varphi}(\cdot) \hookrightarrow H^{s_0}(\cdot) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1; \tag{2.12}$$

див [101, Теореми 2.3(iii) та 3.3(iii)]. Ці вкладення неперервні та щільні. Звичайно, якщо $s = 0$, то $H^{s}(\cdot) = H^{s,s\gamma}(\cdot)$ це гільбертовий простір $L_2(\cdot)$

всіх інтегрованих з квадратом функцій, заданих на відповідній вимірній множині.

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$, будемо опускати індекс φ у позначеннях функціональних просторів, що будуть введені на основі просторів Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H^{s;\varphi}(\cdot)$.

Наостанок покажемо, що функція μ вигляду (2.4) задовольняє умову Хермандера (2.1).

Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$, $\gamma > 0$ і $s \in \mathbb{R}$. Для зручності запишемо функцію (2.4) у вигляді

$$\mu(\xi,\eta) = r_\gamma^s(\xi,\eta)\,\varphi(r_\gamma(\xi,\eta)) \quad \text{де} \quad \xi \in \mathbb{R}^{k-1} \quad \text{і} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$r_\gamma(\xi,\eta) := \bigl(1 + |\xi|^2 + |\eta|^{2\gamma}\bigr)^{1/2} \quad \text{з} \quad \xi \in \mathbb{R}^{k-1} \quad \text{і} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Простір $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$ на $\mathbb{R}^k$, з $2 \leq k \in \mathbb{Z}$, є коректно означений, якщо функція μ задовольняє умову Хермандера (2.1): існують числа $c > 0$ і $l > 0$ такі, що

$$\frac{\mu(\xi',\eta_1)}{\mu(\xi'',\eta_2)} \leq c\,(1 + |\xi' - \xi''| + |\eta_1 - \eta_2|)^l \tag{2.13}$$

для довільних $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^{k-1}$ і $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Цю умову наведено у [51, п 2.1, зауваження] (див. також [6, глава I, § 1, п. 1]).

Доведемо, що μ задовольняє умову Хермандера. Оскільки $\varphi \in \mathcal{M}$, то існує число $c_\varphi \geq 1$ таке, що

$$\frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} \leq c_\varphi \lambda \quad \text{і} \quad \frac{\varphi(r)}{\varphi(\lambda r)} \leq c_\varphi \lambda \tag{2.14}$$

для довільних $r \geq 1$ і $\lambda \geq 1$; див [101, п. 2.4.1, формула (2.91)]. Крім того, згідно з [6, гл. I, § 2, п. 2] існують числа $c_\gamma \geq 1$ і $l_\gamma > 0$ такі, що

$$\frac{r_\gamma(\xi',\eta_1)}{r_\gamma(\xi'',\eta_2)} \leq c_\gamma(1 + |\xi' - \xi''| + |\eta_1 - \eta_2|)^{l_\gamma} \tag{2.15}$$

для довільних $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^k$ і $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

Нехай $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^k$ і $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. У випадку $r_\gamma(\xi', \eta_1) \geq r_\gamma(\xi'', \eta_2)$ отримаємо таку оцінку:

$$\frac{\mu(\xi', \eta_1)}{\mu(\xi'', \eta_2)} = \frac{r_\gamma^s(\xi', \eta_1)\, \varphi(r_\gamma(\xi', \eta_1))}{r_\gamma^s(\xi'', \eta_2)\, \varphi(r_\gamma(\xi'', \eta_2))} \leq c_\varphi \, \frac{r_\gamma^{s+1}(\xi', \eta_1)}{r_\gamma^{s+1}(\xi'', \eta_2)}$$
$$\leq c_\varphi c_\gamma^{\max\{s+1,0\}} (1 + |\xi' - \xi''| + |\eta_1 - \eta_2|)^{l_\gamma \max\{s+1,0\}}.$$

Тут ми використали першу нерівність у (2.14) і потім застосували (2.15). Аналогічно, у протилежному випадку, коли $r_\gamma(\xi', \eta_1) < r_\gamma(\xi'', \eta_2)$, отримаємо

$$\frac{\mu(\xi', \eta_1)}{\mu(\xi'', \eta_2)} \leq c_\varphi \, \frac{r_\gamma^{s-1}(\xi', \eta_1)}{r_\gamma^{s-1}(\xi'', \eta_2)} = c_\varphi \, \frac{r_\gamma^{1-s}(\xi'', \eta_2)}{r_\gamma^{1-s}(\xi', \eta_1)}$$
$$\leq c_\varphi c_\gamma^{\max\{1-s,0\}} (1 + |\xi' - \xi''| + |\eta_1 - \eta_2|)^{l_\gamma \max\{1-s,0\}}.$$

Тут використали другу нерівність у (2.14) і потім знову застосували (2.15). Отже, в будь-якому випадку ми отримуємо необхідну нерівність (2.13) з

$$c := c_\varphi c_\gamma^{\max\{s+1,1-s,0\}} \quad \text{і} \quad l := l_\gamma \max\{s+1, 1-s, 0\}.$$

Наприкінці відмітимо, що Л. Хермандер [51, означення 2.1.1] спочатку припускає, що функція μ задовольняє деяку сильнішу умову, ніж (2.13). Проте він зауважує нижче [51, п. 2.1, зауваження] що множина функцій μ, що задовольняють [51, означення 2.1.1] і множина неперервних функцій μ, що задовольняють (2.13) задають один і той самий набір просторів $\mathcal{B}_{2,\mu}$. Л. Р. Волевич і Б. П. Панеях [6, глава I, § 1, п. 1] відмічають, що умова неперервності μ не є істотною і може бути замінена на більш слабку умову вимірності за Борелем. Зокрема, оскільки $\varphi \in \mathcal{M}$, існує функція така $\varphi_1 \in \mathcal{M} \cap C^\infty([1,\infty))$, що обидві функції φ/φ_1 і φ_1/φ є обмеженими на $[1,\infty)$ (це випливає з [40, п. 1.4, властивість 1°]). Тому простори $\mathcal{B}_{2,\mu}$ і $\mathcal{B}_{2,\mu_1}$ співпадають з точністю до еквівалентності норм; тут $\mu_1(\xi,\eta) := r_\gamma^s(\xi,\eta)\,\varphi_1(r_\gamma(\xi,\eta))$ є неперервною функцією на $\mathbb{R}^k$. Більш того, вибравши нескінченно гладку функцію

$$\mu_2(\xi,\eta) := r_\gamma^s\bigl(\xi,\sqrt{1+\eta^2}\bigr)\,\varphi_1\bigl(r_\gamma(\xi,\sqrt{1+\eta^2})\bigr)$$

на $\mathbb{R}^k$, робимо висновок, що простори $\mathcal{B}_{2,\mu}$ і $\mathcal{B}_{2,\mu_2}$ співпадають з точністю до еквівалентності норм.

2.3. Простори Хермандера $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\cdot)$ і $H_+^{s;\varphi}(\cdot)$

Ці простори будуть потрібні нам при дослідженні початково-крайової параболічної задачі з нульовими початковими даними. Введемо їх використовуючи клас (2.6). Нехай V– відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^k$ з $k \geq 2$. (Зокрема, $V = \Omega$, з $k = n+1$.) Покладемо

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V) := \bigl\{ w\restriction V : \, w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k), \ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times [0,\infty) \bigr\}. \quad (2.16)$$

Норма в лінійному просторі (2.16) визначається за формулою

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V)} := \inf\bigl\{ \, & \|w\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)} : \\ & w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k), \ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times [0,\infty), \ u = w\restriction V \bigr\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

з $u \in H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V)$.

Розглядаючи випадок $V = \mathbb{R}^k$, відмітимо, що $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх $w \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ з $\operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times [0,\infty)$ і є (замкненим) підпростором гільбертового простору $H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$. Згідно з [6, Лема 3.3], множина

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times (0,\infty)) := \bigl\{ w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k) : \, \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times (0,\infty) \bigr\}$$

є щільною у просторі $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$.

Взагалі, $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V)$ є гільбертовим простором, оскільки формули (2.16) і (2.17) означають, що $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V)$ є фактор-простором гільбертового простору $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$ по його підпростору

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k, V) := \bigl\{ w \in H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) : \, w = 0 \ \text{на} \ V \bigr\}. \quad (2.18)$$

Норма (2.17) породжується скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)},$$

з $u_1, u_2 \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$. Тут, $w_j \in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ на V для кожного $j \in \{1,2\}$, і Υ є ортогональним проектором простору $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (2.18).

У соболєвському випадку $\varphi(r) \equiv 1$, будемо опускати індекс φ у позначеннях $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ і подібних просторів. Відмітимо подібні до (2.11) неперервні і щільні вкладання

$$H^{s_1,s_1\gamma}_{+}(V) \hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(V) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \tag{2.19}$$

Вони є результатом (2.5) та щільності множини

$$\bigl\{w \restriction \overline{V} : w \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^k \times (0,\infty))\bigr\}$$

у просторах, що записані у (2.19).

При дослідженні початково–крайових задач з однорідними початковими даними розв'язки таких задач та праві частини параболічних рівнянь будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ у випадку $k = n+1$ і $V = \Omega$. Відмітимо, що множина

$$C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) := \bigl\{w \restriction \overline{\Omega} :\ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \times [0,\infty)\bigr\}$$

є щільною в $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)$.

Також нам потрібно ввести аналог простору $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ для бічної поверхні S циліндра Ω. Зробимо це за тією ж процедурою, що і означали простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ з використанням тих самих спеціальних локальних карт (2.7) на S. Нехай $s > 0$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$. Розглянемо гільбертів простір $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(V)$ у випадку $k = n$ і $V = \Pi$. Для означення простору $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)$ потрібно в означенні простору $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ замінити простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$ на $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Pi)$.

А саме, покладемо

$$
\begin{gathered}
H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S) := \\
\bigl\{ v \in L_2(S) : \, (\chi_j^* v) \circ \theta_j^* \in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) \; \text{для всіх} \; j \in \{1, \ldots, \lambda\} \bigr\}.
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Скалярний добуток у лінійному просторі (2.20) означається за формулою

$$
(v_1, v_2)_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} ((\chi_j^* v_1) \circ \theta_j^*, (\chi_j^* v_2) \circ \theta_j^*)_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}, \tag{2.21}
$$

де $v_1, v_2 \in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$. Цей скалярний добуток природним чином породжує норму

$$
\|v\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := (v, v)^{1/2}_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)}.
$$

Теорема 2.2. *Нехай $s > 0$, $\gamma > 0$, і $\varphi \in \mathcal{M}$. Такі твердження є правильні:*

(i) *Простір $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним (тобто гільбертовим), сепарабельним і не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ.*

(ii) *Множина*

$$
C_{+}^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{ h \restriction \overline{S} : \, h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}), \; \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0, \infty) \bigr\}.
$$

є щільною у цьому просторі.

Доведення теореми буде представлеле у підрозділі 2.5 після теореми 2.5.

Відмітимо, що твердження (2.19) про неперервні і щільні вкладення також є правильним у випадку $V = S$ і $s_0 > 0$. Це негайно випливає з правильності цього твердження для відкритої множини $V = \Pi \subset \mathbb{R}^n$ і з теореми 2.2(ii).

Для двовимірних параболічних задач ($\Omega = (0, l) \times (0, \tau)$ є прямокутник), праві частини крайових умов будуть належати ізотропним просторам

Хермандера, заданим на $(0,\tau)$. Скориставшись шкалою $\{H^{s;\varphi}(\mathbb{R}) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$ введемо ці простори.

Покладемо

$$H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R}) := \bigl\{h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}) :\, \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\}$$

і інтерпретуємо $H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ як (замкнений) підпростір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R})$. Тепер означимо лінійний нормовний простір

$$H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau) := \bigl\{h\restriction(0,\tau) :\, h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})\bigr\},$$
$$\|v\|_{H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)} := \inf\bigl\{\|h\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R})} :\, h \in H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R}),\;\; h = v \text{ in } (0,\tau)\bigr\},$$

з $v \in H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$. Цей простір є гільбертовим, оскільки він є фактор-простором простору $H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ по його підпростору

$$\bigl\{h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}) :\, \operatorname{supp} h \subseteq \{0\} \cup [\tau,\infty)\bigr\}. \tag{2.22}$$

Обидва гільбертові простори $H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ і $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$ є сепарабельними. Множина $C^{\infty}_{0}(0,\infty)$ є щільною у $H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ [6, Лема 3.3], тому

$$\begin{aligned} C^{\infty}_{+}[0,\tau] :&= \bigl\{h\restriction[0,\tau] :\, h \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\; \operatorname{supp} h \subseteq [0,\infty)\bigr\} \\ &= \bigl\{v \in C^{\infty}[0,\tau] :\, v^{(\beta)}(0) = 0 \text{ for all } \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\}. \end{aligned}$$

є щільною у $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$.

2.4. Інтерполяція з функціональним параметром

У цьому підрозділі обговоримо метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, який було введено К. Фойашем і Ж.-Л. Ліонсом [63, с. 278]. Ця інтерполяція є природним узагальненням класичного методу інтерполяції С. Г. Крейна [15] і Ж.-Л. Ліонса [67] в тому випадку, коли замість числа в якості параметра інтерполяції використовується досить загальна функція (див., наприклад, монографії [16, гл.4, п.1.10] і [18, гл.1, п.2 і п.5]). Вона досліджувалась різними авторами [65, 106, 107, 111] і застосовувалась у теорії функціональних просторів [59, 88, 89, 95, 101].

Метод інтерполяції з функціональним параметром є основним методом дослідження у дисертації. Для наших цілей достатньо обмежитись випадком сепарабельних комплексних гільбертових просторів. Ми слідуємо монографії [101, п.1.1], у якій систематично викладено цю інтерполяцію (див. також [95, п. 2]).

Нехай $X := [X_0, X_1]$ є впорядкованою парою сепарабельних комплексних гільбертових просторів для яких має місце неперервне і щільне вкладання $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує оператор J, такий, що він є самоспряженим додатньо визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1, причому $\|Jv\|_{X_0} = \|v\|_{X_1}$ для кожного $v \in X_1$. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X (див., наприклад, [16, гл.4, теорема 1.12]). Він визначає ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a,b]$, де $0 < a < b < \infty$, і $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a,\infty)$, де $a > 0$.

Для заданої функції $\psi \in \mathcal{B}$ розглянемо (взагалі необмежений) оператор $\psi(J)$, визначений в X_0 як борелевська функція ψ від J. Цей оператор будується за допомогою спектральної теореми, застосованої до самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$, або скорочено X_ψ, область візначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(v_1, v_2)_{X_\psi} := (\psi(J)v_1, \psi(J)v_2)_{X_0}.$$

Лінійний простір X_ψ є гільбертовим і сепарабельним відносно цього скалярного добутку. Останній породжує норму $\|v\|_{X_\psi} := \|\psi(J)v\|_{X_0}$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо *інтерполяційним параметром*, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0 правильно таке: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0,1\}$, тоді звуження відображення T на X_ψ є також обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ є інтерполяційним параметром, тоді будемо казати, що гільбертів простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. В цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладання $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Клас всіх інтерполяційних параметрів (в сенсі даного означення) допускає конструктивний опис. А саме, функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді коли ψ є псевдоугнутою в околі ∞. Остання властивість означає, що існує угнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞. Цей критерій випливає з опису Ж. Петре [109, 110] класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. також [2, теорема 5.4.4]). Доведення цього критерію наведено в [101, п. 1.1.9].

Ми будемо використовувати такий наслідок з цього критерію [101, теорема 1.11].

Твердження 2.1. *Припустимо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є правильно змінною на нескінченності функцією порядку θ, де $0 < \theta < 1$, тобто*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(\lambda r)}{\psi(r)} = \lambda^{\theta} \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром.

Поняття правильно змінної функції належить Й. Карамата [66]. Очевидно, що функція $\psi : (r_0, \infty) \to (0, \infty)$, де $r_0 \in \mathbb{R}$, є правильно змінною порядку $\theta \in \mathbb{R}$ на нескінченності тоді і тільки тоді, коли $\psi(r) \equiv r^{\theta}\psi_0(r)$ для певної функції $\psi_0 : (r_0, \infty) \to (0, \infty)$, що повільно змінюється на нескінченності. Обидві функції припускаються вимірними за Борелем.

Відмітимо, що у випадку степеневих функцій твердження 2.1 приводить до вище зазначеного класичного результату Ж.-Л. Ліонса та С. Г. Крейна. А саме, вони довели, що функція $\psi(r) \equiv r^{\theta}$ є інтерполяційним параметром коли $0 < \theta < 1$. В цьому випадку показник θ розглядається як числовий параметр інтерполяції.

Також нам буде потрібна така форма критерію того, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметором [102, теорема 4.2].

Твердження 2.2. *Нехай $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ такі, що $s_0 < s_1$, а функція $\psi \in \mathcal{B}$. Покладемо*

$$\beta(t) := t^{s_0}\, \psi(t^{s_1 - s_0}) \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Функція ψ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли існує таке число $c \geq 1$, що правильні нерівності

$$\frac{\beta(t)}{t^{s_0}} \leq c\,\frac{\beta(\tau)}{\tau^{s_0}} \quad і \quad \frac{\beta(\tau)}{\tau^{s_1}} \leq c\,\frac{\beta(t)}{t^{s_1}} \qquad \text{для всіх} \quad t \geq 1 \quad і \quad \tau \geq t. \tag{2.23}$$

У кінці цього підрозділу сформулюємо три властивості інтерполяції, які будуть використані у подальших доведеннях. Перша з них дозволяє звести інтерполяцію підпросторів або фактор–просторів до інтерполяції вихідних просторів (див. [101, теорема 1.6] або [49, п. 1.17.1, теорема 1]). Зазначимо, що підпростори припускаються замкнені, і розглядаються, взагалі кажучи, не ортогональні проектори на підпростори.

Твердження 2.3. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ є допустимою парою гільбертових просторів, а Y_0 є підпростором в X_0. Тоді $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ є підпростором в X_1. Припустимо, що існує лінійне відображення $P : X_0 \to X_0$, яке для кожного $j \in \{0, 1\}$ є проектором простору X_j на його підпростір Y_j. Тоді пари $[Y_0, Y_1]$ та $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ є допустимими і для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ правильні рівності*

$$[Y_0, Y_1]_\psi = X_\psi \cap Y_0, \tag{2.24}$$

$$[X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi = X_\psi/(X_\psi \cap Y_0) \tag{2.25}$$

з еквівалентністю норм. Тут $X_\psi \cap Y_0$ є підпростором у X_ψ.

Друга властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків (див. [101, теорема 1.8]).

Твердження 2.4. *Нехай $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, де $j = 1, \ldots, q$, є скінченний набір допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\Bigl[\bigoplus_{j=1}^{q} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{q} X_1^{(j)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{q} \bigl[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\bigr]_\psi$$

з рівністю норм. Тут функція $\psi \in \mathcal{B}$ *є довільним інтерполяційним параметром.*

Третя показує, що повторне застосування інтерполяції з функціональним параметром дає знову інтерполяцію з деяким функціональним параметром (див. [101, теорема 1.3]).

Твердження 2.5. *Нехай* $\alpha, \beta, \psi \in \mathcal{B}$*, і припустимо, що функція* α/β *є обмеженою в околі нескінченності. Означимо функцію* $\omega \in \mathcal{B}$ *за формулою* $\omega(r) := \alpha(r)\psi(\beta(r)/\alpha(r))$ *для* $r > 0$*. Тоді* $\omega \in \mathcal{B}$*, і* $[X_\alpha, X_\beta]_\psi = X_\omega$ *з рівністю норм для кожної допустимої пари* X *гільбертових просторів. Крім того, якщо* α, β, ψ *є інтерполяційними параметрами, то* ω *також є інтерполяційним параметром.*

2.5. Інтерполяційні властивості просторів Хермандера

Простори Хермандера, означені у підрозділах 2.2 і 2.3 мають важливу інтерполяційну властивість, яка відіграє ключову роль у дисертації. Кожний такий простір Хермандера можна отримати інтерполяцію з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Для ізотропних просторів $H^{s;\varphi}(\cdot)$ відповідні результати отримано в роботах В. А. Михайлеця та О. О. Мурача [92, 101]. Для зручності спочатку наведемо це твердження. Далі отримаємо його аналоги для анізотропних просторів Хермандера.

Нехай

$$s, s_0, s_1, \gamma \in \mathbb{R}, \quad s_0 < s < s_1, \quad \gamma > 0, \quad \text{і} \quad \varphi \in \mathcal{M}. \tag{2.26}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi\big(r^{1/(s_1-s_0)}\big) & \text{для} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

За твердженням 2.1, ця функція є інтерполяційним параметром, оскільки вона є правильно змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s - s_0)/(s_1 - s_0)$ з $0 < \theta < 1$. Надалі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів з функціональним параметром ψ.

Твердження 2.6. *Нехай дійсні числа s_0, s, і s_1 задовольняють нерівності $s_0 < s < s_1$, і нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильна рівність просторів*

$$H^{s;\varphi}(W) = \big[H^{s_0}(W), H^{s_1}(W)\big]_{\psi} \tag{2.28}$$

з точністю до еквівалентності норм за умови, що $W = G$ або $W = \Gamma$. Якщо $W = \mathbb{R}^k$ з $1 \leq k \in \mathbb{Z}$, тоді (2.28) *правильно з рівністю норм у просторах.*

Цей результат отримано у [92, теореми 3.1 і 3.5]; див. також монографію [101, теореми 1.14, 2.2 і 3.2] для випадків $W = \mathbb{R}^k$, $W = \Gamma$, і $W = G$ відповідно.

Тепер встановимо версії твердження 2.6 для просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(W)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(W)$, де $W \in \{\mathbb{R}^k, \Omega, S\}$ та $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$. Почнемо з базового випадку $W = \mathbb{R}^k$. Відповідні результати сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 2.3. *Нехай* $2 \leq k \in \mathbb{Z}$. *У припущенні* (2.26) *правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]_{\psi} \tag{2.29}$$

з рівністю норм. Тут ψ *– інтерполяційний параметр, заданий формулою* (2.27).

Доведення. Нагадаємо, що для зручності позначаємо

$$r_{\gamma}(\xi', \xi_k) := \bigl(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{1/2} \quad \text{для будь-яких} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{k-1}, \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Згідно з (2.5) пара анізотропних просторів Соболєва

$$X := \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]$$

є допустимою.

Породжуючий оператор для цієї пари задається формулою

$$J : \, w \mapsto \mathcal{F}^{-1}[r_{\gamma}^{s_1-s_0}\,\mathcal{F}w\,] \quad \text{з} \quad w \in H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k).$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Тут через $\mathcal{F}$ [та $\mathcal{F}^{-1}$] позначено оператори прямого [та оберненого] перетворення Фур'є (по усіх змінних) повільно зростаючих розподілів, заданих на $\mathbb{R}^k$.

Породжуючий оператор J за допомогою перетворення Фур'є зводиться до оператора множення на функцію $r_\gamma^{s_1-s_0}$ і встановлює ізометричний ізоморфізм

$$\mathcal{F}:\ H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)\leftrightarrow L_2\big(\mathbb{R}^k, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k\big).$$

Тут, як звичайно, другий гільбертовий простір складається з усіх функцій (змінних $\xi'\in\mathbb{R}^{k-1}$ і $\xi_k\in\mathbb{R}$) що інтегровні з квадратом на $\mathbb{R}^k$ відносно міри Радона $r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k$. Тому $\mathcal{F}$ зводить $\psi(J)$ до оператора множення на функцію

$$\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\equiv r_\gamma^{s-s_0}(\xi',\xi_k)\,\varphi(r_\gamma(\xi',\xi_k)),$$

що визначена формулою (2.27).

Тому, для кожного $w\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ можна записати наступне

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{X_\psi} &= \|\psi(J)w\|^2_{H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)}\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\,(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^k} r_\gamma^{2s}(\xi',\xi_k)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi',\xi_k))\,|(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, d\xi' d\xi_k\\
&= \|w\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}$$

З цього випливає рівність просторів (2.29), оскільки в них обох є щільною множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$. Відмітимо, що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною у другому просторі, позначеному як X_ψ, тому що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною в просторі $H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)$, який неперервно та щільно вкладений в X_ψ. $\square$

Теорема 2.4. *Нехай $2\leq k\in\mathbb{Z}$. У додаток до* (2.26) *припустимо, що $s_0\geq 0$. Тоді правильна така інтерполяційна формула*

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)=\big[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\big]_\psi \tag{2.30}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут ψ *– інтерполяційний параметр, заданий формулою* (2.27).

Доведення. Виведемо цю теорему з теореми 2.3 за допомогою твердження 2.3. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $L_2(\mathbb{R}^k)$ таке, що звуження P на кожний простір $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^k)$, з $j \in \{0,1\}$, є проектором $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^k)$ на $H_{+}^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^k)$.

Розглянемо лінійний обмежений оператор

$$T : L_2((-\infty,0)) \to L_2(\mathbb{R}) \tag{2.31}$$

такий, що $Th = h$ на $(-\infty,0)$ для кожної функції $h \in L_2((-\infty,0))$ і що звуження відображення T на простір Соболєва $H^{s_j\gamma}((-\infty,0))$ є обмеженим оператором

$$T : H^{s_j\gamma}((-\infty,0)) \to H^{s_j\gamma}(\mathbb{R}) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.32}$$

Оператор T існує [49, Лема 2.9.3]. Скориставшись тензорним добутком обмежених операторів у гільбертових просторах, ми отримаємо лінійний обмежений оператор

$$I \otimes T : L_2(\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty,0)) \to L_2(\mathbb{R}^k) \tag{2.33}$$

такий, що $(I \otimes T)v = v$ на $\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty,0)$ для кожної функції $v \in L_2(\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty,0))$. Тут, I є тотожним оператором у $L_2(\mathbb{R}^{k-1})$.

Для кожного $j \in \{0,1\}$, можемо записати

$$\begin{aligned} &H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty,0)) \\ =&H^{s_j}(\mathbb{R}^{k-1}) \otimes L_2((-\infty,0)) \cap L_2(\mathbb{R}^{k-1}) \otimes H^{s_j\gamma}((-\infty,0)) \end{aligned} \tag{2.34}$$

і

$$H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^k) = H^{s_j}(\mathbb{R}^{k-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}^{k-1}) \otimes H^{s_j\gamma}(\mathbb{R}). \tag{2.35}$$

Ці рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм. З (2.31), (2.32), (2.34), та (2.35), випливає, що звуження оператора (2.33) на простір $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{k-1}\times(-\infty,0))$ є обмеженим оператором

$$I\otimes T : H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{k-1}\times(-\infty,0))\to H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{k}). \qquad (2.36)$$

Розглянемо лінійне відображення

$$P : w\mapsto w-(I\otimes T)\bigl(w\!\upharpoonright\!(\mathbb{R}^{k-1}\times(-\infty,0))\bigr), \quad \text{with} \quad w\in L_2(\mathbb{R}^k).$$

Легко бачити, що $\operatorname{supp} Pw\subseteq\mathbb{R}^{k-1}\times[0,\infty)$ і що включення $\operatorname{supp} w\subseteq\mathbb{R}^{k-1}\times[0,\infty)$ тягне за собою рівність $Pw=w$ на $\mathbb{R}^k$. Скориставшись цими властивостями P і обмеженістю оператора (2.36), приходимо до висновку, що відображення P побудоване.

Тепер, скориставшись твердженням 2.3 (формула (2.24)) та теоремою 2.3, можемо записати

$$\begin{aligned}
&\bigl[H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(\mathbb{R}^k),H^{s_1,s_1\gamma}_{+}(\mathbb{R}^k)\bigr]_{\psi}\\
=&\bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k),H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]_{\psi}\cap H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(\mathbb{R}^k)\\
=&H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)\cap H^{s_0,s_0\gamma}_{+}(\mathbb{R}^k)\\
=&H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\mathbb{R}^k).
\end{aligned}$$

Ці рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм. (Відмітимо, що перша пара є допустимою завдяки твердженню 2.3.) Отже, ми довели (2.30). $\square$

Для доведення наступної теореми нам буде потрібна така лема про опис просторів Соболєва $H^{s,s\gamma}_{+}(\Omega)$ і $H^{s,s\gamma}_{+}(S)$ у термінах просторів Соболєва $H^{s,s\gamma}(\Omega)$ і $H^{s,s\gamma}(S)$. Ці всі анізотропні простори Соболєва добре відомі в теорії параболічних рівнянь [1, 41, 62, 68].

Відмітимо неперервні вкладання

$$H_{+}^{s,s\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma}(\Omega) \quad \text{і} \quad H_{+}^{s,s\gamma}(S) \hookrightarrow H^{s,s\gamma}(S). \tag{2.37}$$

Вони прямо випливають з означення просторів що входять у (2.37).

Отже, нам потрібна така версія результату М. С. Аграновіча і М. І. Вішика [1, Твердження 8.1].

Лема 2.1. *Нехай $s > 0$, $\gamma > 0$, і $s\gamma - 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Тоді простір $H_{+}^{s,s\gamma}(\Omega)$ складаєтьcя з усіх функцій $u \in H^{s,s\gamma}(\Omega)$ таких, що*

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in G$$
$$\text{при всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \leq k < s\gamma - 1/2. \tag{2.38}$$

Більш того, норма у $H_{+}^{s,s\gamma}(\Omega)$ еквівалентна нормі у $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Ця лема залишаєтьcя правильною, якщо замінити Ω на S і G на Γ.

Лема 2.1 покриває результат М. С. Аграновіча і М. І. Вішика [1, Твердження 8.1]. Вони знайшли необхідні і достатні умови, при яких продовження кожної функції $u \in H^{s,s\gamma}(G \times (0,\theta))$ нулем нажелить до $H^{s,s\gamma}(G \times (-\infty,\theta))$ з $0 < \theta \leq \infty$, вони обмежились випадком, коли $s \in \mathbb{Z}$ і $\gamma = 1/(2b)$. Ці умови рівносильні (2.38) і з них виплває еквівалентність норм u та її продовження нулем. М. С. Аграновіч та М. І. Вішик також розглянули випадок, коли функції задані на $\Gamma \times (0,\theta)$.

Доведення леми 2.1. Відмітимо спочатку, що умова (2.38) є коректно поставленою завдяки теоремі про сліди для анізотропних просторів Соболєва (див., наприклад, [41, частина II, теорема 4]). Позначимо через $\Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega)$ лінійний многовид усіх функцій $u \in H^{s,s\gamma}(\Omega)$, що задовольняють (2.38). Згідно з цією теоремою про сліди, ми можемо і будемо розглядати $\Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega)$ як (замкнений) підпростір простору $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Як безпосередньо випливає з (2.37), маємо неперервне вкладання $H^{s,s\gamma}_{+}(\Omega) \hookrightarrow \Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тому (завдяки теоремі Банаха про обернений оператор) залишається довести зворотне включення $\Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega) \subset H^{s,s\gamma}_{+}(\Omega)$.

Нехай $u \in \Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega)$. Ми повинні довести, що $u = w$ на Ω для деякої функції $w \in H^{s,s\gamma}_{+}(\mathbb{R}^{n+1})$. Для цього ми використаємо наступні три оператори продовження O, T_τ, і T_G, що діють у деяких ізотропних просторах Соболєва.

Для даної функції $v \in L_2((0,\infty))$, означимо функцію $Ov \in L_2(\mathbb{R})$ за формулами $(Ov)(t) := v(t)$ для $t > 0$ і $(Ov)(t) := 0$ для $t \leq 0$. Таким чином, ми вводимо лінійний обмежений оператор

$$O : L_2((0,\infty)) \to L_2(\mathbb{R}). \tag{2.39}$$

Позначимо $\Upsilon^{s\gamma}((0,\infty))$ лінійний многовид всіх функцій $v \in H^{s\gamma}((0,\infty))$ таких, що $v^{(k)}(0) = 0$ коли $k \in \mathbb{Z}$ задовольняє нерівності $0 \leq k < s\gamma - 1/2$. За теоремою про сліди, $\Upsilon^{s\gamma}((0,\infty))$ є підпростором простору $H^{s\gamma}((0,\infty))$. З [49, теореми 2.9.3(a) і 2.10.3(b)] та умови $s\gamma - 1/2 \notin \mathbb{Z}$ безпосередньо випливає, що звуження (2.39) на $H^{s\gamma}((0,\infty))$ визначає ізоморфізм

$$O : \Upsilon^{s\gamma}((0,\infty)) \leftrightarrow H^{s\gamma}_{+}(\mathbb{R}). \tag{2.40}$$

Тут, $H^{s\gamma}_{+}(\mathbb{R})$ складається, за означенням, з усіх функцій $v \in H^{s\gamma}(\mathbb{R})$ з $\operatorname{supp} v \subseteq [0,\infty)$ і розглядається як підпростір $H^{s\gamma}(\mathbb{R})$.

Розглянемо лінійний обмежений оператор

$$T_\tau : L_2((0,\tau)) \to L_2((0,\infty)) \tag{2.41}$$

такий, що $T_\tau v = v$ на $(0,\tau)$ для кожної функції $v \in L_2((0,\tau))$ і що звуження відображення T_τ на простір $H^{s\gamma}((0,\tau))$ є обмеженим оператором

$$T_\tau : H^{s\gamma}((0,\tau)) \to H^{s\gamma}((0,\infty)). \tag{2.42}$$

Ми також розглянемо лінійний обмежений оператор

$$T_G : L_2(G) \to L_2(\mathbb{R}^n) \tag{2.43}$$

такий, що $T_G h = h$ на G для кожної функції $h \in L_2(G)$ і що звуження відображення T_G на простір $H^s(G)$ є обмеженим оператором

$$T_G : H^s(G) \to H^s(\mathbb{R}^n). \tag{2.44}$$

Оператори такого типу існують [49, теореми 4.2.2 і 4.2.3].

Відомо, що

$$H^{s,s\gamma}(\Omega) = H^s(G) \otimes L_2((0,\tau)) \cap L_2(G) \otimes H^{s\gamma}((0,\tau)) \tag{2.45}$$

і

$$H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = H^s(\mathbb{R}^n) \otimes L_2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}^n) \otimes H^{s\gamma}(\mathbb{R}) \tag{2.46}$$

з точністю до еквівалентності норм; див., наприклад, [1, § 8, п. 1]. (Як звичайно, $E \otimes F$ позначає тензорний добуток довільних гільбертових просторів E і F. Крім того, їх перетин $E \cap F$ розглядається як гільбертовий простір, наділений скалярним добутком $(v_1, v_2)_{E\cap F} := (v_1, v_2)_E + (v_1, v_2)_F$ векторів $v_1, v_2 \in E \cap F$.)

З (2.41), (2.42), (2.45) та включення $u \in \Upsilon^{s,s\gamma}(\Omega)$ безпосередньо випливає, що

$$(I \otimes T_\tau)u \in H^s(G) \otimes L_2((0,\infty)) \cap L_2(G) \otimes \Upsilon^{s\gamma}((0,\infty)).$$

Тут, I є тотожним оператором в $L_2(G)$. Тоді

$$\begin{aligned} w &:= (T_G \otimes (OT_\tau))u = (T_G \otimes O)(I \otimes T_\tau)u \\ &\in H^s(\mathbb{R}^n) \otimes L_2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}^n) \otimes H_+^{s\gamma}(\mathbb{R}) = H_+^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \end{aligned} \tag{2.47}$$

завдяки формулам (2.39), (2.40), (2.43), (2.44), і (2.46). Крім того, $w = u$ в Ω. Таким чином, $u \in H_+^{s,s\gamma}(\Omega)$.

Ті ж міркування показують, що лема 2.1 залишається правильною, якщо ми замінимо Ω на $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ і G на $\mathbb{R}^{n-1}$. (Звичайно, візьмемо $\mathbb{R}^n$ замість $\mathbb{R}^{n+1}$ і не потрібно у цьому випадку використовувати оператор продовження T_G.) З цього факту та з означення просторів $H_+^{s,s\gamma}(S)$ і $H^{s,s\gamma}(S)$ безпосередньо випливає, що лема 2.1 також залишається правильною, якщо ми замінимо Ω на S і G на Γ. $\square$

Теорема 2.5. *В додаток до* (2.26) *припустимо, що* $s_0 \geq 0$ *і*

$$s_j\gamma - 1/2 \notin \mathbb{Z} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.48}$$

Тоді

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) = \bigl[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\bigr]_\psi \tag{2.49}$$

і

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S) = \bigl[H_+^{s_0,s_0\gamma}(S), H_+^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_\psi \tag{2.50}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Спочатку доведемо (2.49). Нагадаємо, що за означенням,

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) = H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) / H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}, \Omega) \tag{2.51}$$

і

$$H_+^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) = H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) / H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}, \Omega) \tag{2.52}$$

для кожного $j \in \{0, 1\}$. Тут знаменники визначаються формулою (2.18). Виведемо формулу (2.49) з теореми 2.4 за допомогою твердження 2.3, використаємо інтерполяцію фактор-просторів. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ таке, що звуження P на кожний $H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, з $j \in \{0, 1\}$, є проектором простору $H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ на його підпростір $H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}, \Omega)$.

Скористаємось далі міркуваннями та позначеннями, наведеними в доведенні леми 2.1. Обгрунтування (2.47), наведене в цьому доведенні, також показує, що маємо обмежений оператор

$$T_+ := T_G \otimes (OT_\tau) : \Upsilon^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) \to H_+^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.53}$$

для кожного $j \in \{0, 1\}$. Тут, оператори T_G і T_τ відповідно є звуженнями відображень (2.41) і (2.43), які не залежать від j (див. [49, теореми 4.2.2 і 4.2.3]). Тому оператор (2.53) з $j = 1$ є звуженням його аналога з $j = 0$. Крім того, як ми вже згадували зразу після (2.47), рівність $T_+u = u$ виконується на Ω для кожного $u \in \Upsilon^{s_j,s_j\gamma}(\Omega)$. Відмітимо також, що $\Upsilon^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) = H_+^{s_j,s_j\gamma}(\Omega)$ завдяки лемі 2.1 та умові (2.48).

Розглянемо лінійне відображення

$$P : w \mapsto w - T_+(w \restriction \Omega), \quad \text{з} \quad w \in H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Відмітимо, що $Pw = 0$ на Ω і що з умовип $w = 0$ на Ω випливає рівність $Pw = w$ на $\mathbb{R}^{n+1}$. Враховуючи ці властивості P та обмеженість оператора (2.53), робимо висновок, що відображення P побудоване.

Тепер, скориставшись послідовно (2.52), твердженням 2.3 (формула (2.25)), теоремою 2.4, та (2.51) запишемо наступне:

$$\begin{aligned}
&\big[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\big]_\psi \\
=&\big[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1},\Omega), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_+^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1},\Omega)\big]_\psi \\
=&X_\psi/(X_\psi \cap H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1},\Omega)) \\
=&H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})/(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1},\Omega)) \\
=&H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})/H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1},\Omega) \\
=&H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega).
\end{aligned}$$

Тут,

$$X_\psi := \big[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\big]_\psi = H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Ці рівності просторів мають місце з точністю до еквівалентності норм. (Зауважимо також, що перша пара є допустимою завдяки твердженню 2.3.) Таким чином, ми довели (2.49).

Тепер доведемо інтерполяційну формулу (2.50). Пара просторів у правій частині (2.50) є допустимою згідно з теоремою 2.2. (Її доведення буде наведене нижче і воно не використовує теорему 2.5 у випадку $\varphi(r) \equiv 1$ і $s\gamma - 1/2 \notin \mathbb{Z}$.) Виведемо формулу (2.50) з її аналога

$$H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) = \big[H_+^{s_0,s_0\gamma}(\Pi), H_+^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)\big]_\psi \tag{2.54}$$

для $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$. Доведення (2.54) таке саме, як і (2.49), тільки з Π, $\mathbb{R}^n$, і тотожним опетатором замість Ω, $\mathbb{R}^{n+1}$, і T_G відповідно.

Використовуючи означення анізотропних просторів Хермандера на S дане у (2.20) і (2.21), виведемо (2.50) з (2.54) за допомогою певних операторів розпрямлення та склеювання многовиду S. Означимо оператор розпрямлення за формулою

$$L : v \mapsto ((\chi_1^* v) \circ \theta_1^*, \ldots, (\chi_\lambda^* v) \circ \theta_\lambda^*), \quad \text{з} \quad v \in L_2(S). \tag{2.55}$$

Його звуження на простори $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H_+^{s_j,s_j\gamma}(S)$ визначають лінійні ізометричні оператори

$$L : H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S) \to \bigl(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^\lambda \tag{2.56}$$

і

$$L : H_+^{s_j,s_j\gamma}(S) \to \bigl(H_+^{s_j,s_j\gamma}(\Pi)\bigr)^\lambda \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.57}$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ пари просторів у (2.57), отримаємо обмежений оператор

$$L : \bigl[H_+^{s_0,s_0\gamma}(S), H_+^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_\psi \to \bigl[\bigl(H_+^{s_0,s_0\gamma}(\Pi)\bigr)^\lambda, \bigl(H_+^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)\bigr)^\lambda\bigr]_\psi. \tag{2.58}$$

Останній інтерполяційний простір дорівнює $(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi))^\lambda$ з точністю до еквівалентності норм завдяки твердженню 2.4 і формулі (2.54). Отже, (2.58) є обмеженим оператором

$$L : \bigl[H_+^{s_0,s_0\gamma}(S), H_+^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_\psi \to \bigl(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^\lambda. \tag{2.59}$$

Визначимо оператор склеювання за формулою

$$K : (h_1, \ldots, h_\lambda) \mapsto \sum_{k=1}^{\lambda} O_k((\eta_k^* h_k) \circ \theta_k^{*-1}), \;\; \text{з} \;\; h_1, \ldots, h_\lambda \in L_2(\Pi). \tag{2.60}$$

Тут, кожна функція $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ вибрана так, що $\eta_k = 1$ на множині $\theta_k^{-1}(\operatorname{supp}\chi_k)$; далі $\eta_k^*(x,t) := \eta_k(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$. Крім того, O_k означає оператор продовження (функцій) нулем з $\Gamma_k \times (0,\tau)$ на S;

Таким чином, для кожного $y\in\Gamma$ і $t\in(0,\tau)$, маємо

$$\big(O_k((\eta_k^* h_k)\circ\theta_k^{*-1})\big)(y,t)$$

$$=\begin{cases}\eta_k(x)h_k(x,t) & \text{якщо } \ y=\theta_k(x)\in\Gamma_k \ \text{ з } \ x\in\mathbb{R}^{n-1};\\ 0 & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Відображення K є лівим оберненим до L. Дійсно,

$$\begin{aligned}KLv&=\sum_{k=1}^{\lambda} O_k\Big(\big(\eta_k^*\,((\chi_k^* v)\circ\theta_k^*)\big)\circ\theta_k^{*-1}\Big)\\&=\sum_{k=1}^{\lambda} O_k\big((\chi_k^* v)\circ\theta_k^*\circ\theta_k^{*-1}\big)=\sum_{k=1}^{\lambda}\chi_k^* v=v,\end{aligned}$$

тобто

$$KLv=v\quad\text{для кожного}\quad v\in L_2(S). \tag{2.61}$$

Покажемо, що звуження лінійного відображення K на $(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi))^{\lambda}$ є обмеженим оператором

$$K:\big(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\big)^{\lambda}\to H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S). \tag{2.62}$$

Для довільної вектор-функції

$$h:=(h_1,\dots,h_\lambda)\in\big(H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\big)^{\lambda},$$

запишемо

$$\begin{aligned}\big\|Kh\big\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)}&=\sum_{l=1}^{\lambda}\big\|(\chi_l^*\,Kh)\circ\theta_l^*\big\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}\\&=\sum_{l=1}^{\lambda}\Big\|\Big(\chi_l^*\,\sum_{k=1}^{\lambda}O_k\big((\eta_k^* h_k)\circ\theta_k^{*-1}\big)\Big)\circ\theta_l^*\,\Big\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}\\&=\sum_{l=1}^{\lambda}\Big\|\sum_{k=1}^{\lambda}Q_{k,l}\,h_k\,\Big\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}.\end{aligned}\tag{2.63}$$

Тут

$$(Q_{k,l}\, w)(x,t) := \eta_{k,l}(\beta_{k,l}(x))\, w(\beta_{k,l}(x),t) \tag{2.64}$$

для всіх $w \in L_2(\Pi)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, і $t \in (0,\tau)$, де

$$\eta_{k,l} := (\chi_l \circ \theta_k)\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$$

і, крім того, $\beta_{k,l} : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ є нескінченно гладким дифеоморфізмом таким, що $\beta_{k,l} = \theta_k^{-1} \circ \theta_l$ в околі $\operatorname{supp} \eta_{k,l}$. Як відомо [54, теорема B.1.8], оператор $\omega \mapsto (\eta_{k,l}\, \omega) \circ \beta_{k,l}$ є обмеженим у кожному соболєвському просторі $H^\sigma(\mathbb{R}^{n-1})$ з $\sigma \in \mathbb{R}$. Тому оператор $w \mapsto Q_{k,l}\, w$ означений формулою (2.64) для всіх $w \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, і $t \in \mathbb{R}$ є обмеженим у кожному просторі

$$H^{s_j, s_j\gamma}(\mathbb{R}^n) = H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes H^{s_j\gamma}(\mathbb{R})$$

з $j \in \{0,1\}$. Отже, звуження відображення $w \mapsto Q_{k,l}w$, з $w \in L_2(\Pi)$, на кожний простір $H_+^{s_j, s_j\gamma}(\Pi)$ є обмеженим оператором на цьому просторі. Потім, завдяки інтерполяційній формулі (2.54), звуження цього відображення на простір $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$ є обмеженим оператором на цьому просторі. Поєднавши останній висновок з (2.63), можемо записати

$$\begin{aligned}\left\|Kh\right\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)} &= \sum_{l=1}^{\lambda} \Big\| \sum_{k=1}^{\lambda} Q_{k,l}\, h_k \Big\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)} \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\lambda} \|h_k\|^2_{H_+^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}\end{aligned}$$

для деякого числа $c > 0$, що не залежить від h. Таким чином, ми довели обмеженість оператора (2.62).

Ті ж міркування доводять, що звуження відображення K на простір $(H_+^{s_j, s_j\gamma}(\Pi))^\lambda$ є обмеженим оператором

$$K:\left(H_{+}^{s_j,s_j\gamma}(\Pi)\right)^{\lambda}\to H_{+}^{s_j,s_j\gamma}(S)\quad\text{для кожного}\quad j\in\{0,1\}.\tag{2.65}$$

Проінтерполювавши простори у (2.65) з функціональним параметром ψ та скориставшись твердженням 2.4 і формулою (2.54), отримаємо обмежений оператор

$$K:\left(H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\right)^{\lambda}\to\left[H_{+}^{s_0,s_0\gamma}(S),H_{+}^{s_1,s_1\gamma}(S)\right]_{\psi}.\tag{2.66}$$

Тепер з (2.56), (2.66), і (2.61) прямо випливає, що тотожний оператор KL здійснює неперервне вкладання простору $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ у інтерполяційний простір

$$\left[H_{+}^{s_0,s_0\gamma}(S),H_{+}^{s_1,s_1\gamma}(S)\right]_{\psi}.$$

Більш того, як відразу випливає з (2.59) і (2.62), тотожний оператор KL здійснює обернене неперервне вкладення. Таким чином, ми довели рівність (2.50) з точністю до еквівалентності норм. □

Тепер можемо довести теорему 2.2.

Доведення теореми 2.2. Спочатку ми розглянемо випадок, де $\varphi(r)\equiv 1$ і $s\gamma-1/2\notin\mathbb{Z}$. З леми 2.1 випливає, що $H_{+}^{s,s\gamma}(S)$ дорівнює з точністю до еквівалентності норм певному підпростору простору $H^{s,s\gamma}(S)$. Тому твердження (i) безпосередньо випливає з його відомого аналогу для анізотропного простору Соболєва $H^{s,s\gamma}(S)$; див. [41, глава I, § 5].

Доведемо твердження (ii) за допомогою оператора розпрямлення L та оператора зклеювання K, які використовуються у доведенні теореми 2.5.

Як зазначено у підрозділі 2.3, множина

$$\Upsilon_0^\infty(\overline{\Pi}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Pi} : w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)) \bigr\}$$

є щільною у $H_+^{s,s\gamma}(\Pi)$. Візьмемо функцію $v \in H_+^{s,s\gamma}(S)$, апроксимуємо вектор Lv послідовністю векторів $h^{(j)} \in (\Upsilon_0^\infty(\overline{\Pi}))^\lambda$ у нормі простору $\bigl(H_+^{s,s\gamma}(\Pi)\bigr)^\lambda$. Тоді послідовність функцій $Kh^{(j)} \in C_+^\infty(\overline{S})$ апроксимує функцію $KLv = v$ у нормі простору $H_+^{s,s\gamma}(S)$. Твердження (ii) доведено у розглядуваній ситуації.

У загальній ситуації, теорема 2.2 слідує з цього випадку за допомогою теореми 2.5. Дійсно, простір $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним і сепарабельним завдяки властивостям інтерполяції, яка використовується у формулі (2.50). Крім того, нехай $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ є дві пари, кожна з яких складається з атласу на Γ та розбиття одиниці, що використовуються в означеннях (2.20) і (2.21). Нехай $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_k)$ і $H_+^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_k)$, з $j \in \{0,1\}$, означають простори $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H_+^{s_j,s_j\gamma}(S)$ відповідні парам $\mathcal{A}_k$ з $k \in \{0,1\}$. Розглянемо тотожнє відображення $I : v \mapsto v$, з $v \in L_2(S)$. Як було зазначено при доведенні попереднього випадку, звуження I є ізоморфізмом просторів Соболєва $H_+^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_0)$ і $H_+^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_1)$ для кожного $j \in \{0,1\}$. Тому, завдяки інтерполяційній формулі (2.50), звуження I є ізоморфізмом просторів $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_0)$ і $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_1)$. Це означає, що простір $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ не залежить від вибору алтасу на Γ і розбиття одиниці. Нарешті, твердження (ii) у загальній ситуації є результатом щільності $H_+^{s_1,s_1\gamma}(S)$ у $H_+^{s,s\gamma;\varphi}(S)$. (Проте, це твердження може бути доведено так само, як і в попередньому випадку.) $\square$

Далі встановимо версію теореми 2.5 для просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ і $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ та доведемо теорему 2.1 .

Теорема 2.6. *В додаток до* (2.26) *припустимо, що* $s_0 \geq 0$. *Тоді*

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\bigr]_\psi \tag{2.67}$$

і

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(S) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_\psi \tag{2.68}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Доведення цієї теореми проведемо за тією ж схемою, що і доведення теореми 2.5. Спочатку доведемо (2.67). Нагадаємо, що за означенням,

$$H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) = H^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s,s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.69}$$

і

$$H^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) = H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.70}$$

для кожного $j \in \{0,1\}$. Тут знаменники визначаються формулою (2.3). Виведемо формулу (2.67) з теореми 2.3 за допомогою твердження 2.3, використаємо інтерполяцію фактор-просторів. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ таке, що звуження P на кожний $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, з $j \in \{0,1\}$, є проектором простору $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ на його підпростір $H_Q^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Скористаємось далі міркуваннями та позначеннями, наведеними в доведенні леми 2.1. Позначимо через $T_{(0,\tau)}$ обмежений оператор, утворений заміною G на $(0,\tau)$ і підстановкою $n = 1$ у (2.43). Обгрунтування (2.47), наведене в цьому доведенні, також показує, що маємо обмежений оператор

$$T := T_G \otimes T_{(0,\tau)} : H^{s_j,s_j\gamma}(\Omega) \to H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.71}$$

для кожного $j \in \{0,1\}$. Тут, оператори T_G і $T_{(0,\tau)}$ відповідно є звуженнями відображення (2.43), яке не залежить від j (див. [49, теорема 4.2.2]). Тому оператор (2.71) з $j = 1$ є звуженням його аналога з $j = 0$. Крім того, рівність $Tu = u$ виконується на Ω для кожного $u \in H^{s_j, s_j\gamma}(\Omega)$.

Розглянемо лінійне відображення

$$P : w \mapsto w - T(w \restriction \Omega), \quad \text{з} \quad w \in H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Відмітимо, що $Pw = 0$ на Ω і що з умовин $w = 0$ на Ω випливає рівність $Pw = w$ на $\mathbb{R}^{n+1}$. Враховуючи ці властивості P та обмеженість оператора (2.71), робимо висновок, що відображення P побудоване.

Тепер, скориставшись послідовно (2.70), твердженням 2.3 (формула (2.25)), теоремою 2.3, та (2.69) запишемо наступне:

$$\begin{aligned}
&\big[H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega)\big]_\psi \\
=&\big[H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\big]_\psi \\
=&X_\psi/(X_\psi \cap H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})) \\
=&H^{s, s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})/(H^{s, s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})) \\
=&H^{s, s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s, s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \\
=&H^{s, s\gamma,\varphi}(\Omega).
\end{aligned}$$

Тут,

$$X_\psi := \big[H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\big]_\psi = H^{s, s\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Ці рівності просторів мають місце з точністю до еквівалентності норм. (Зауважимо також, що перша пара є допустимою завдяки твердженню 2.3.) Таким чином, ми довели (2.67).

Тепер доведемо інтерполяційну формулу (2.68). Пара просторів Соболєва у правій частині (2.68) є допустимою. Виведемо формулу (2.68) з її аналога

$$H^{s, s\gamma;\varphi}(\Pi) = \big[H^{s_0, s_0\gamma}(\Pi), H^{s_1, s_1\gamma}(\Pi)\big]_\psi \tag{2.72}$$

для $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$. Доведення (2.72) таке саме, як і (2.67), тільки з Π, $\mathbb{R}^n$, і тотожним опетатором замість Ω, $\mathbb{R}^{n+1}$, і T_G відповідно.

Далі використовуючи означення анізотропних просторів Хермандера на S дане у (2.8) і (2.9), формула (2.68) виводиться з (2.72) за допомогою операторів розпрямлення (2.55) та зклеювання (2.60) многовиду S, означених у доведенні теореми 2.5. Приведемо необхідні міркування.

Звуження оператора розпрямлення (2.55) на простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s_j,s_j\gamma}(S)$ визначають лінійні ізометричні оператори

$$L : H^{s,s\gamma;\varphi}(S) \to \bigl(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^{\lambda} \tag{2.73}$$

і

$$L : H^{s_j,s_j\gamma}(S) \to \bigl(H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi)\bigr)^{\lambda} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.74}$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ пари просторів у (2.74), отримаємо обмежений оператор

$$L : \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_{\psi} \to \bigl[\bigl(H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi)\bigr)^{\lambda}, \bigl(H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)\bigr)^{\lambda}\bigr]_{\psi}. \tag{2.75}$$

Останній інтерполяційний простір дорівнює $(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi))^{\lambda}$ з точністю до еквівалентності норм завдяки твердженню 2.4 і формулі (2.72). Отже, (2.75) є обмеженим оператором

$$L : \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_{\psi} \to \bigl(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^{\lambda}. \tag{2.76}$$

Так же, як і при доведенні теореми 2.5 покажемо, що звуження лінійного відображення зклеювання (2.60) на $(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi))^{\lambda}$ є обмеженим оператором

$$K : \bigl(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^{\lambda} \to H^{s,s\gamma;\varphi}(S). \tag{2.77}$$

Для довільної вектор-функції

$$h := (h_1, \dots, h_\lambda) \in \bigl(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\bigr)^\lambda,$$

запишемо

$$\begin{aligned}
\bigl\|Kh\bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} &= \sum_{l=1}^{\lambda} \bigl\|(\chi_l^*\,Kh)\circ\theta_l^*\bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)} \\
&= \sum_{l=1}^{\lambda} \Bigl\|\Bigl(\chi_l^*\,\sum_{k=1}^{\lambda} O_k\bigl((\eta_k^* h_k)\circ\theta_k^{*-1}\bigr)\Bigr)\circ\theta_l^*\,\Bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)} \qquad (2.78) \\
&= \sum_{l=1}^{\lambda} \Bigl\|\sum_{k=1}^{\lambda} Q_{k,l}\,h_k\,\Bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}.
\end{aligned}$$

Тут $Q_{k,l}$ – оператор (2.64). Як показано у доведенні теореми 2.5, цей оператор є обмеженим у кожному просторі $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^n)$ з $j \in \{0,1\}$. Отже, звуження відображення $w \mapsto Q_{k,l}w$, з $w \in L_2(\Pi)$, на кожний простір $H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi)$ є обмеженим оператором на цьому просторі. Потім, завдяки інтерполяційній формулі (2.72), звуження цього відображення на простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$ є обмеженим оператором на цьому просторі. Поєднавши останній висновок з (2.78), можемо записати

$$\begin{aligned}
\bigl\|Kh\bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} &= \sum_{l=1}^{\lambda} \Bigl\|\sum_{k=1}^{\lambda} Q_{k,l}\,h_k\,\Bigr\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)} \\
&\leq c\sum_{k=1}^{\lambda} \|h_k\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}
\end{aligned}$$

для деякого числа $c > 0$, що не залежить від h. Таким чином, ми довели обмеженість оператора (2.77).

Ті ж міркування доводять, що звуження відображення K на простір $(H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi))^\lambda$ є обмеженим оператором

$$K:\big(H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi)\big)^\lambda\to H^{s_j,s_j\gamma}(S)\quad\text{для кожного}\quad j\in\{0,1\}. \tag{2.79}$$

Проінтерполювавши простори у (2.79) з функціональним параметром ψ та скориставшись твердженням 2.4 і формулою (2.72), отримаємо обмежений оператор

$$K:\big(H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)\big)^\lambda\to\big[H^{s_0,s_0\gamma}(S),H^{s_1,s_1\gamma}(S)\big]_\psi. \tag{2.80}$$

Тепер з (2.73), (2.80), і (2.61) прямо випливає, що тотожний оператор KL здійснює неперервне вкладання простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ у інтерполяційний простір

$$\big[H^{s_0,s_0\gamma}(S),H^{s_1,s_1\gamma}(S)\big]_\psi.$$

Більш того, як відразу випливає з (2.76) і (2.77), тотожний оператор KL здійснює обернене неперервне вкладення. Таким чином, ми довели рівність (2.68) з точністю до еквівалентності норм. □

Тепер можемо довести теорему 2.1.

Доведення теореми 2.1. Твердження (i) випливає з його відомого аналогу для анізотропного простору Соболєва $H^{s,s\gamma}(S)$ (див. [41, глава I, § 5]) за допомогою теореми 2.6. Дійсно, простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ є повним і сепарабельним завдяки властивостям інтерполяції, яка використовується у формулі (2.68). Крім того, нехай $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ є дві пари, кожна з яких складається з атласу на Γ та розбиття одиниці, що використовуються в означеннях (2.8) і (2.9). Нехай $H^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_k)$ і $H^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_k)$, з $j\in\{0,1\}$, означають простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s_j,s_j\gamma}(S)$ відповідні парам $\mathcal{A}_k$ з $k\in\{0,1\}$. Розглянемо тотожнє відображення $I:v\mapsto v$, з $v\in L_2(S)$. Як показано у [41, глава I, § 5], звуження I є ізоморфізмом просторів Соболєва $H^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_0)$ і $H^{s_j,s_j\gamma}(S,\mathcal{A}_1)$ для кожного $j\in\{0,1\}$. Тому, завдяки інтерполяційній формулі (2.68), звуження I є ізоморфізмом просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_0)$ і $H^{s,s\gamma;\varphi}(S,\mathcal{A}_1)$. Це означає, що простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ не залежить від вибору алтасу на Γ і розбиття одиниці.

Твердження (ii) є результатом щільності $H^{s_1,s_1\gamma}(S)$ у $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$. □

У кінці цього підрозділу встановимо інтерполяційну формулу для просторів $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$. Цей допоміжний результат сформулюємо у вигляді леми.

Лема 2.2. *У додаток до* (2.26) *припустимо, що* $s_0\geq 0$. *Тоді*

$$H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)=\bigl[H^{s_0}_{+}(0,\tau),H^{s_1}_{+}(0,\tau)\bigr]_{\psi}\tag{2.81}$$

з еквівалентністю норм.

Доведення. Формула (2.81) доводиться подібно до формули (2.49) для анізотропних просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)$.

Нам буде потрібна формула (2.28) у випадку $W=\mathbb{R}$. Для зручності запишемо її:

$$H^{s,\varphi}(\mathbb{R})=\bigl[H^{s_0}(\mathbb{R}),H^{s_1}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi}\tag{2.82}$$

з рівністю норм.

Нехай $G\subset\mathbb{R}$ є вікритою піввіссю. Розглянемо лінійний обмежений оператор

$$T_G:L_2(G)\to L_2(\mathbb{R})$$

такий, що $T_Gh=h$ на G для кожної функції $h\in L_2(G)$ і що звуження відображення T_G на простір Соболєва $H^{s_j\gamma}(G)$ є обмеженим оператором

$$T_G : H^{s_j\gamma}(G) \to H^{s_j\gamma}(\mathbb{R}) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}.$$

Оператор T_G існує [49, Лема 2.9.3].

Відображення

$$P : h \mapsto h - T_G(h\restriction G),$$

де $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $G := (-\infty, 0)$, визначає проектор простору $H^{s_j}(\mathbb{R})$ на його підпростір $H^{s_j}_{+}(\mathbb{R})$ для кожного $j \in \{0,\ 1\}$. Тому завдяки твердженню 2.3 і формулі (2.82) можемо записати

$$\begin{aligned}&\bigl[H^{s_0}_{+}(\mathbb{R}), H^{s_1}_{+}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi}\\ &\quad= \bigl[H^{s_0}(\mathbb{R}), H^{s_1}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi} \cap H^{s_0}_{+}(\mathbb{R}) = H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})\end{aligned} \tag{2.83}$$

з еквівалентністю норм.

Тепер виведемо (2.81) з (2.83). Нагадаємо, що $H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)$ є фактор-простором простору $H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})$ по його підпростору (2.22). Останній співпадає з

$$H^{s,\varphi}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R}) := \bigl\{h \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}) :\ \operatorname{supp} h \subseteq [\tau,\infty)\bigr\}$$

оскільки $s > 0$. Відображення

$$P_\tau : h \mapsto h - T_{G_\tau}(h\restriction G_\tau),$$

де $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $G_\tau := (-\infty, \tau)$, є проектором простору $H^{s_j}_{+}(\mathbb{R})$ на його підпростір $H^{s_j}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R})$ для кожного $j \in \{0,\ 1\}$. Тому завдяки твердженню 2.3 і формулі (2.83) можемо записати

$$
\begin{aligned}
&\bigl[H^{s_0}_{+}(0,\tau), H^{s_1}_{+}(0,\tau)\bigr]_{\psi}\\
&= \bigl[H^{s_0}_{+}(\mathbb{R})/H^{s_0}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R}), H^{s_1}_{+}(\mathbb{R})/H^{s_1}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi}\\
&= \bigl[H^{s_0}_{+}(\mathbb{R}), H^{s_1}_{+}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi}\big/\bigl(\bigl[H^{s_0}_{+}(\mathbb{R}), H^{s_1}_{+}(\mathbb{R})\bigr]_{\psi}\cap H^{s_0}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R})\bigr)\\
&= H^{s,\varphi}_{+}(\mathbb{R})/H^{s,\varphi}_{[\tau,\infty)}(\mathbb{R}) = H^{s,\varphi}_{+}(0,\tau)
\end{aligned}
$$

з еквівалентністю норм. Формула (2.81) доведена. $\square$

2.6. Теорема про оператор даних Коші у просторах Хермандера

При виведенні ключових теорем про ізоморфізми у просторах Хермандера для розглядуваних в роботі параболічних задач з їх відомих аналогів у просторах Соболєва нам буде потрібна наступна теорема про властивості оператора, який довільній функції $g \in H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ ставить у відповідність її дані Коші на Γ.

Теорема 2.7. *Нехай задане ціле $b \geq 1$. Виберемо ціле $r \geq 1$, і розглянемо лінійне відображення*

$$R : g \mapsto \bigl(g \restriction \Gamma, \partial_t g \restriction \Gamma, \ldots, \partial_t^{r-1} g \restriction \Gamma\bigr) \quad \text{з} \quad g \in C^{\infty}(\overline{S}). \tag{2.84}$$

Це відображення продовжується однозначно (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$R : H^{s,s/(2b);\varphi}(S) \to \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(\Gamma) =: \mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma) \tag{2.85}$$

для довільних $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Цей оператор має правий обернений; більш того, існує лінійне відображення $T : (L_2(\Gamma))^r \to L_2(S)$ таке, що для довільних $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ звуження T на простір $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)$ є лінійним обмеженим оператором

$$T : \mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma) \to H^{s,s/(2b);\varphi}(S) \tag{2.86}$$

і

$$RTv = v$$

для кожної $v \in \mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)$.

Доведення. Спочатку доведемо аналог цієї теореми для просторів Хермандера заданих на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n-1}$ замість S і Γ. Потім ми виведемо теорему з цього аналогу за допомогою спеціальних локальних карт на S.

Розглянемо лінійне відображення

$$R_0 : w \mapsto \bigl(w\,|_{t=0},\, \partial_t w\,|_{t=0}, \ldots, \partial_t^{r-1} w\,|_{t=0}\bigr), \quad \text{з} \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.87}$$

Тут ми інтерпретуємо w як функцію $w(x,t)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in \mathbb{R}$, так що $R_0 w \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^r$. Виберемо $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ довільно, і доведемо, що відображення (2.87) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$R_0 : H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) =: \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.88}$$

Цей факт відомий у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$, див. [41, глава II, теорема 7]. Використовуючи інтерполяцію з функціональним параметром пар просторів Соболєва, ми зможемо вивести цей факт у загальній ситуації довільної $\varphi \in \mathcal{M}$.

А саме, виберемо $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ такі, що $2br - b < s_0 < s < s_1$ і розглянемо лінійні обмежені оператори

$$R_0 : H^{s_j,s_j/(2b)}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{H}^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \text{з} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.89}$$

Нехай ψ – інтерполяційний параметр (2.27). Тоді звуження відображення (2.89) з $j = 0$ на простір

$$\bigl[H^{s_0,s_0/(2b)}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,s_1/(2b)}(\mathbb{R}^n)\bigr]_\psi = H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n) \tag{2.90}$$

є обмеженим оператором

$$R_0 : H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigl[\mathbb{H}^{s_0}(\mathbb{R}^{n-1}), \mathbb{H}^{s_1}(\mathbb{R}^{n-1})\bigr]_\psi. \tag{2.91}$$

Остання рівність має місце завдяки теоремі 2.3. Цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (2.87) оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ є щільною в $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Завдяки твердженням 2.4 і 2.6 отримаємо

$$
\begin{aligned}
\bigl[\mathbb{H}^{s_0}(\mathbb{R}^{n-1}),\mathbb{H}^{s_1}(\mathbb{R}^{n-1})\bigr]_\psi &= \bigoplus_{k=0}^{r-1}\bigl[H^{s_0-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1}),H^{s_1-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})\bigr]_\psi \\
&= \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}).
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

Отже, лінійний обмежений оператор (2.91) є необхідним оператором (2.88).

Тепер побудуємо таке лінійне відображення

$$
T_0 : \bigl(L_2(\mathbb{R}^{n-1})\bigr)^r \to L_2(\mathbb{R}^n), \tag{2.93}
$$

що його звуження на кожний простір $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ з $s > 2br - b$ та $\varphi \in \mathcal{M}$ є обмеженим оператором, що діє з $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ у $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n)$ і що цей оператор є правим оберненим до (2.88).

Подібно до Хермандера [51, доведення теореми 2.5.7] означимо лінійне відображення

$$
T_0 : v \mapsto F^{-1}_{\xi\mapsto x}\Bigl[\beta\bigl(\langle\xi\rangle^{2b}t\bigr)\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}\,\widehat{v_k}(\xi)\times t^k\Bigr](x,t) \tag{2.94}
$$

на лінійному топологічному просторі векторів

$$
v := (v_0,\ldots,v_{r-1}) \in \bigl(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})\bigr)^r.
$$

Розглядаємо $T_0 v$ як розподіл на евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ точок (x,t), з $x = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in \mathbb{R}$. У (2.94) функція $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ вибрана так, що $\beta = 1$ у певному околі нуля. Як звичайно, $F^{-1}_{\xi\mapsto x}$ позначає обернене перетворення Фур'є відносно $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, і $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Змінна ξ є дуальною до x відносно прямого перетворення Фур'є $\widehat{w}(\xi) = (Fw)(\xi)$ функції $w(x)$.

Звісно, відображення (2.94) є коректно визначеним і діє неперервно у парі просторів $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})^r$ і $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Очевидно також, що звуження цього відображення на простір $(L_2(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ є обмеженим оператором у парі просторів $(L_2(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ і $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Ми стверджуємо, що

$$R_0 T_0 v = v \quad \text{для кожного} \quad v \in \bigl(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})\bigr)^r. \tag{2.95}$$

Тут, як звичайно, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ позначає лінійний топологічний простір усіх швидко спадаючих нескінченно гладких функцій на $\mathbb{R}^{n-1}$. Оскільки з $v \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^r$ випливає $T_0 v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, то ліва частина рівності (2.95) є коректно визначеною. Доведемо цю рівність.

Обравши $j \in \{0, \ldots, r-1\}$ і $v = (v_0, \ldots, v_{r-1}) \in (S(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ довільно, отримаємо

$$\begin{aligned}
&F\bigl[\partial_t^j T_0 v\,|_{t=0}\bigr](\xi)\\
&= \partial_t^j F_{x\mapsto\xi}[T_0 v](\xi, t)\Big|_{t=0}\\
&= \partial_t^j \Biggl(\beta\bigl(\langle\xi\rangle^{2b} t\bigr) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!}\, \widehat{v_k}(\xi)\, t^k\Biggr)\Bigg|_{t=0}\\
&= \beta(0)\Biggl(\partial_t^j \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!}\, \widehat{v_k}(\xi)\, t^k\Biggr)\Bigg|_{t=0}\\
&= \beta(0)\, j!\, \frac{1}{j!}\, \widehat{v_j}(\xi)\\
&= \widehat{v_j}(\xi)
\end{aligned}$$

для кожного $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. У четвертій рівності ми використали той факт, що $\beta = 1$ в околі нуля. Таким чином, перетворення Фур'є всіх компонент векторів $R_0 T_0 v$ і v збігаються, що еквівалентно (2.95).

Доведемо тепер, що звуження відображення (2.94) на кожний простір

$$\mathbb{H}^{2bm}(\mathbb{R}^{n-1}) = \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{2bm-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{2.96}$$

з $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ є обжеженим оператором у парі просторів $\mathbb{H}^{2bm}(\mathbb{R}^{n-1})$ і $H^{2bm,m}(\mathbb{R}^{n})$. Відмітимо, що числа $2bm - 2bk - b$ у (2.96) можуть бути негативними.

Нехай ціле $m \geq 0$. Скористаємось тим фактом, що норма в просторі $H^{2bm,m}(\mathbb{R}^{n})$ еквівалентна нормі

$$\|w\|_{2bm,m} := \left(\|w\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_{x_j}^{2bm} w\|^2 + \|\partial_t^m w\|^2 \right)^{1/2}$$

(див., наприклад, [5, п. 9.1]). Тут і нижче у цьому доведенні $\|\cdot\|$ означає норму у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$. Звичайно, $\partial_{x_j} u$ і ∂_t означають оператори узагальнених частинних похідних по x_j та t відповідно. Вибравши $v = (v_0, \ldots, v_{r-1}) \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ довільно і скориставшись рівністю Парсеваля отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
\|T_0 v\|_{2bm,m}^2 &= \|T_0 v\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_{x_j}^{2bm}\, T_0 v\|^2 + \|\partial_t^m\, T_0 v\|^2 \\
&= \|\widehat{T_0 v}\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\xi_j^{2bm}\, \widehat{T_0 v}\|^2 + \|\partial_t^m\, \widehat{T_0 v}\|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|\beta(\langle\xi\rangle^{2b} t)\, \widehat{v_k}(\xi)\, t^k\bigr|^2 d\xi dt \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|\xi_j^{2bm}\, \beta(\langle\xi\rangle^{2b} t)\, \widehat{v_k}(\xi)\, t^k\bigr|^2 d\xi dt \\
&+ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|\partial_t^m \bigl(\beta(\langle\xi\rangle^{2b} t)\, t^k\bigr)\, \widehat{v_k}(\xi)\bigr|^2 d\xi dt.
\end{aligned}$$

Оцінимо окремо кожний з цих трьох інтегралів. Почнемо з третього інтеграла. Зробивши заміну змінної $\tau = \langle\xi\rangle^{2b}t$ у внутрішньому інтегралі по t, отримаємо рівності

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_t^m\big(\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)\,t^k\big)\,\widehat{v_k}(\xi)\right|^2 d\xi dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi \int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_t^m(\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)t^k)|^2 dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \langle\xi\rangle^{4bm-4bk-2b}\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi \int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_\tau^m(\beta(\tau)\tau^k)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_t^m\big(\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)\,t^k\big)\,\widehat{v_k}(\xi)\right|^2 d\xi dt = c_1\,\|v_k\|^2_{H^{2bm-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

з

$$c_1 := \int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_\tau^m(\beta(\tau)\tau^k)|^2 d\tau < \infty.$$

Використовуючи ту саму заміну змінної t у другому інтегралі, отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi_j^{2bm}\,\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)\,\widehat{v_k}(\xi)\,t^k\right|^2 d\xi dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi_j|^{4bm}|\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi \int\limits_{\mathbb{R}} |t^k\,\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)|^2 dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi_j|^{4bm}\langle\xi\rangle^{-4bk-2b}\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi \int\limits_{\mathbb{R}} |\tau^k\beta(\tau)|^2 d\tau \\
&\le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \langle\xi\rangle^{4bm-4bk-2b}\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2 d\xi \int\limits_{\mathbb{R}} |\tau^k\beta(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\xi_j^{2bm}\,\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)\,\widehat{v_k}(\xi)\,t^k\right|^2 d\xi dt \le c_2\,\|v_k\|^2_{H^{2bm-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

з

$$c_2 := \int\limits_{\mathbb{R}} |\tau^k \beta(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

Нарешті, замінивши символ ξ_j на 1 у попередніх міркуваннях, отримаємо таку оцінку для першого інтеграла:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|\beta(\langle\xi\rangle^{2b}t)\, \widehat{v_k}(\xi)\, t^k\bigr|^2 d\xi dt$$
$$\leq c_2\, \|v_k\|^2_{H^{-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c_2\, \|v_k\|^2_{H^{2bm-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Отже, робимо висновок про те, що

$$\|T_0 v\|^2_{H^{2bm,m}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sum_{k=0}^{r-1} \|v_k\|^2_{H^{2bm-2bk-b}(\mathbb{R}^{n-1})} = c\, \|v\|^2_{\mathbb{H}^{2bm}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

для довільного $v \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))^r$, з константою $c > 0$, що не залежить від v. Оскільки множина $\bigl(S(\mathbb{R}^{n-1})\bigr)^r$ є щільною у $\mathbb{H}^{2bm}(\mathbb{R}^{n-1})$, то з останньої оцінки випливає, що відображення (2.94) є лінійним обмеженим оператором

$$T_0 : \mathbb{H}^{2bm}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{2bm,m}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для всіх} \quad 0 \leq m \in \mathbb{Z}.$$

Виведемо з цього факту, що відображення (2.94) діє неперервно у парі просторів $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ і $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для кожних $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $s_0 = 0$, виберемо ціле $s_1 > s$ таке, що $s_1/(2b) \in \mathbb{Z}$, і розглянемо лінійні обмежені оператори

$$T_0 : \mathbb{H}^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{s_j,s_j/(2b)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{з} \quad j \in \{0,1\}. \tag{2.97}$$

Нехай, як і вище, ψ є інтерполяційним параметром (2.27). Тоді звуження відображення (2.97) з $j = 0$ на простір

$$\bigl[\mathbb{H}^{s_0}(\mathbb{R}^{n-1}), \mathbb{H}^{s_1}(\mathbb{R}^{n-1})\bigr]_{\psi} = \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$$

є обмеженим оператором

$$T_0 : \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n). \tag{2.98}$$

Тут ми використали формули (2.90) і (2.92), які залишаються правильними для розглянутих s_0 і s_1.

Тепер рівність (2.95) продовжується за неперервністю на всі вектори $v \in \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Отже, оператор (2.98) є правим оберненим до (2.88). Таким чином, побудовано необхідне відображення (2.93).

Далі потрібно ввести аналоги операторів (2.88) і (2.98) для смуги

$$\Pi = \bigl\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t < \tau\bigr\}.$$

Нехай $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Для заданої $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)$ покладемо $R_1 u := R_0 w$, де функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умову $w \restriction \Pi = u$. Очевидно, це означення не залежить від вибору w. Лінійне відображення $u \mapsto R_1 u$ є обмеженим оператором

$$R_1 : H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi) \to \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.99}$$

Це безпосередньо випливає з обмеженості оператора (2.88) і означення норми у $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)$.

Введемо правий обернений оператор до (2.99) на основі відображення (2.94). Покладемо $T_1 v := (T_0 v) \restriction \Pi$ для довільного $v \in (L_2(\mathbb{R}^{n-1}))^r$. Звуження лінійного відображення $v \mapsto T_1 v$ на вектори $v \in \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ є обмеженим оператором

$$T_1 : \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi). \tag{2.100}$$

Це випливає безпосередньо з обмеженості оператора (2.98). Зауважимо, що

$$R_1 T_1 v = R_1\bigl((T_0 v) \restriction \Pi\bigr) = R_0 T_0 v = v \quad \text{для кожного} \quad v \in \mathbb{H}^{s;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Таким чином, оператор (2.100) є правим оберненим до (2.99).

Використовуючи оператори (2.99) і (2.100) тепер можемо довести нашу теорему за допомогою спеціальних локальних карт (2.7) на S. Як і вище, нехай $s > 2br - b$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Вибравши $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ і $g \in C^\infty(\overline{S})$ довільно, отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^k g \restriction \Gamma\|^2_{H^{s-2bk-b;\varphi}(\Gamma)} &= \sum_{j=1}^{\lambda} \|\big(\chi_j(\partial_t^k g \restriction \Gamma)\big) \circ \theta_j\|^2_{H^{s-2bk-b;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{\lambda} \|\partial_t^k \big((\chi_j\, g) \circ \theta_j^*\big) \restriction \mathbb{R}^{n-1})\|^2_{H^{s-2bk-b;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&\leq c^2 \sum_{j=1}^{\lambda} \|(\chi_j\, g) \circ \theta_j^*\|^2_{H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)} \\
&= c^2\, \|g\|^2_{H^{s,s/(2b);\varphi}(S)}.
\end{aligned}$$

Тут через c позначено норму обмеженого оператора (2.99), і, як завжди, символ "$\circ$" означає композицію функцій. Нагадаємо, що $\{\theta_j\}$ – це набір локальних карт на Γ і $\{\chi_j\}$ - нескінченно гладке розбиття одиниці на Γ. Таким чином,

$$\|Rg\|_{\mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)} \leq c\,\sqrt{r}\,\|g\|_{H^{s,s/(2b);\varphi}(S)} \quad \text{для кожної} \quad g \in C^\infty(\overline{S}).$$

Це означає, що відображення (2.84) продовжується за неперервністю до лінійного обмеженого оператора (2.85).

Побудуємо лінійне відображення $T : (L_2(\Gamma))^r \to L_2(S)$, звуження якого на $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)$ є правим оберненим оператором до (2.85). Розглянемо лінійне відображення розпрямлення Γ

$$L_\Gamma : v \mapsto \big((\chi_1 v) \circ \theta_1, \ldots, (\chi_\lambda v) \circ \theta_\lambda\big), \quad \text{з} \quad v \in L_2(\Gamma).$$

Його звуження на $H^{\sigma;\varphi}(\Gamma)$ є ізометричним оператором

$$L_\Gamma : H^{\sigma;\varphi}(\Gamma) \to \big(H^{\sigma;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})\big)^\lambda \quad \text{для всіх} \quad \sigma > 0. \tag{2.101}$$

Крім того, розглянемо лінійне відображення зклеювання Γ

$$K_\Gamma : (h_1, \ldots, h_\lambda) \mapsto \sum_{j=1}^{\lambda} O_j\big((\eta_j h_j) \circ \theta_j^{-1}\big), \quad \text{з} \quad h_1, \ldots, h_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Тут кожна функція $\eta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ вибрана так, що $\eta_j = 1$ на множині $\theta_j^{-1}(\operatorname{supp}\chi_j)$; тут також O_j означає оператор продовження нулем на Γ функції, заданої на Γ_j. Звуження цього відображення на $(H^{\sigma;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}))^\lambda$ є обмеженим оператором

$$K_\Gamma : \big(H^{\sigma;\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})\big)^\lambda \to H^{\sigma;\varphi}(\Gamma) \quad \text{для всіх} \quad \sigma > 0,$$

і цей оператор є лівим оберненим до (2.101) (див. [101, доведення теореми 2.2]).

Відображення K_Γ породжує оператор K (див. (2.60)) зклеювання многовиду $S = \Gamma \times (0, \tau)$ за формулою

$$\big(K(g_1, \ldots, g_\lambda)\big)(x, t) := \big(K_\Gamma(g_1(\cdot, t), \ldots, g_\lambda(\cdot, t))\big)(x)$$

для довільних функцій $g_1, \ldots, g_\lambda \in L_2(\Pi)$ та майже всіх $x \in \Gamma$ і $t \in (0, \tau)$. Звуження відображення K на $(H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Pi))^\lambda$ є обмеженим оператором

$$K : (H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Pi))^\lambda \to H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(S) \quad \text{для всіх} \quad \sigma > 0 \tag{2.102}$$

(див. (2.77)).

Для заданого $v := (v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}) \in (L_2(\Gamma))^r$ покладемо

$$Tv := K\big(T_1(v_{0,1}, \ldots, v_{r-1,1}), \ldots, T_1(v_{0,\lambda}, \ldots, v_{r-1,\lambda})\big),$$

де

$$(v_{k,1}, \ldots, v_{k,\lambda}) := L_\Gamma v_k \in (L_2(\mathbb{R}^{n-1}))^\lambda$$

для кожного цілого $k \in \{0, \ldots, r-1\}$. Лінійне відображення $v \mapsto Tv$ діє неперервно з $(L_2(\Gamma))^r$ у $L_2(S)$, що безпосередньо випливає з означень L_Γ,

T_1 і K. Звуження цього відображення на $\mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)$ є обмеженим оператором (2.86). Це одразу випливає з обмеженості операторів (2.100), (2.101) і (2.102). Оператор (2.86) є правим оберненим до (2.85). Дійсно, вибираючи вектор $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}) \in \mathbb{H}^{s;\varphi}(\Gamma)$ довільно, отримаємо наступні рівності:

$$\begin{aligned}
(RTv)_k &= \bigl(RK\bigl(T_1(v_{0,1}, \ldots, v_{r-1,1}), \ldots, T_1(v_{0,\lambda}, \ldots, v_{r-1,\lambda})\bigr)\bigr)_k \\
&= K_\Gamma\bigl(\bigl(R_1 T_1(v_{0,1}, \ldots, v_{r-1,1})\bigr)_k, \ldots, \bigl(R_1 T_1(v_{0,\lambda}, \ldots, v_{r-1,\lambda})\bigr)_k\bigr) \\
&= K_\Gamma(v_{k,1}, \ldots, v_{k,\lambda}) = K_\Gamma L_\Gamma v_k = v_k.
\end{aligned}$$

Тут індекс k пробігає множину $\{0, \ldots, r-1\}$ і позначає k-ту компоненту вектора. Таким чином, $RTv = v$. $\square$

2.7. Версія теореми вкладання Хермандера

Для дослідження приналежності узагальнених розв'язків параболічних задач просторам неперервно диференційовних функцій нам буде потрібна така версія теореми вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7].

Попередньо, для зручності, нагадаємо, що використовуємо такі позначення $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t^\beta := \partial^\beta/\partial t^\beta$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ і β є цілими невід'ємними. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Лема 2.3. *Нехай $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $b \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $s := p + b + n/2$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильні такі два твердження:*

(i) Якщо φ задовольняє умову

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{2.103}$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ має таку властивість: всі її узагальнені частинні похідні

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t) \quad \text{з} \quad 0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$$

є неперервними на $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Нехай V є непорожня відкрита підмножина $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Якщо кожна функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ з $\operatorname{supp} w \subset V$ задовольняє умову $\partial^j w/\partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ для кожного $j \in \mathbb{Z}$ з $0 \leq j \leq p$, то φ задовольняє умову (2.103).

Доведення. (i) Для заданої функції $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ розглянемо її довільну частинну похідну

$$w_{\alpha,\beta}(x,t) := D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} w(x,t) \quad \text{з} \quad 0 \le |\alpha| + 2b\beta \le p.$$

З умови

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\xi^{\alpha}|^2\, |\eta|^{2\beta}\, d\xi\, d\eta}{r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\, \varphi^2(r_{\gamma}(\xi,\eta))} < \infty, \tag{2.104}$$

де

$$r_{\gamma}(\xi,\eta) := \bigl(1 + |\xi|^2 + |\eta|^{2\gamma}\bigr)^{1/2}$$
$$\text{з} \quad \gamma := 1/(2b), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{і} \quad \eta \in \mathbb{R},$$

випливає включення $w_{\alpha,\beta} \in C(\mathbb{R}^{n+1})$. Дійсно, за нерівністю Шварца можемо записати

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widetilde{w_{\alpha,\beta}}(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \le \|w\|_{H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\xi^{\alpha}|^2\, |\eta|^{2\beta}\, d\xi\, d\eta}{r_{\gamma}^{2s}(\xi,\eta)\, \varphi^2(r_{\gamma}(\xi,\eta))}.$$

Отже, якщо умова (2.104) виконується, то функція $\widetilde{w_{\alpha,\beta}}$ є інтегровною по $\mathbb{R}^{n+1}$ і тому її обернене перетворення Фур'є $w_{\alpha,\beta}$ є неперервним на $\mathbb{R}^{n+1}$.

Покажемо, що з (2.103) випливає ця умова. У кратному інтегралі, записаному у (2.104), зробимо заміну змінної $\eta = \eta_1^{2b}$, потім перейдемо до сферичних координат $(\varrho, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ з $\varrho = (|\xi|^2 + \eta_1^2)^{1/2}$, і насамкінець зробимо заміну $r = (1+\varrho^2)^{1/2}$. Отже, запишемо наступне:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\xi^\alpha|^2\, |\eta|^{2\beta} d\xi\, d\eta}{r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\, \varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))} \\
&\quad = 2^{n+1} \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{|\xi^\alpha|^2\, \eta^{2\beta} d\xi\, d\eta}{r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\, \varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))} \\
&\quad = 2^{n+1} \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{2b\, |\xi^\alpha|^2\, \eta_1^{4b\beta+2b-1}\, d\xi\, d\eta_1}{(1+|\xi|^2+\eta_1^2)^s \varphi^2\big(\sqrt{1+|\xi|^2+\eta_1^2}\,\big)} \\
&\quad = c_{\alpha,\beta} \int\limits_0^\infty \frac{\varrho^{2|\alpha|+4b\beta+2b-1}\, \varrho^n\, d\varrho}{(1+\varrho^2)^s \varphi^2(\sqrt{1+\varrho^2}\,)} \\
&\quad = c_{\alpha,\beta} \int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{|\alpha|+2b\beta+b-1/2+n/2}\, r\, dr}{r^{2s}\, \varphi^2(r)\, (r^2-1)^{1/2}} \\
&\quad = c_{\alpha,\beta} \int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{s-1-\delta(\alpha,\beta)}}{r^{2s-1}\, \varphi^2(r)}\, dr;
\end{aligned}$$

тут $c_{\alpha,\beta}$ є певне додатне число і

$$\delta(\alpha,\beta) := p - |\alpha| - 2b\beta \in [0,p].$$

Таким чином,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\xi^\alpha|^2\, |\eta|^{2\beta}\, d\xi\, d\eta}{r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\, \varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))} = c_{\alpha,\beta} \int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{s-1-\delta(\alpha,\beta)}}{r^{2s-1}\, \varphi^2(r)}\, dr. \tag{2.105}$$

Відмітимо, що

$$\begin{aligned}
(2.103) \;\Leftrightarrow\; &\int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{s-1}}{r^{2s-1}\, \varphi^2(r)}\, dr < \infty \\
\Rightarrow\; &\int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{s-1-\delta(\alpha,\beta)}}{r^{2s-1}\, \varphi^2(r)}\, dr < \infty.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Остання імплікація є правильною, оскільки $\delta(\alpha,\beta) \geq 0$ і

$$s - 1 - \delta(\alpha,\beta) \geq p + b + n/2 - 1 - p \geq 0.$$

Тому з (2.103) випливає (2.104) з огляду на (2.105). Твердження (i) доведене.

(ii) Нехай припущення, зроблене у твердженні (ii), виконується. Слідуючи доведенню Хермандера його теореми вкладання [51, теорема 2.2.7] у частині необхідності, робимо висновок про те, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\xi_k^p|^2\,d\xi\,d\eta}{r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))} < \infty.$$

Ця властивість разом із (2.105) дає

$$\int\limits_1^\infty \frac{(r^2-1)^{s-1}}{r^{2s-1}\,\varphi^2(r)}\,dr < \infty. \tag{2.107}$$

Тут ми скористались (2.105) у випадку, коли $\alpha_k = p$, $\alpha_q = 0$ для всіх $q \neq k$, і $\beta = 0$, тоді $\delta(\alpha,\beta) = 0$. Тепер (2.103) слідує з (2.106) і (2.107). Твердження (ii) доведене. $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі виділено клас гільбертових просторів Хермандера, в яких будемо досліджувати параболічні початково-крайові задачі. Такі простори Хермандера мають важливу для застосувань властивість — вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Цей метод інтерполяції є основним методом дослідження у дисертації. Він також викладений у даному розділі.

Основні результати другого розділу.

1. Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою.
2. Доведено, що ці простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.
3. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.

Ці результати опубліковано у статтях [71, 73, 77, 78] та висвітлено у тезах конференцій [81, 82].

РОЗДІЛ 3
НАПІВОДНОРІДНІ ПАРАБОЛІЧНІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

У цьому розділі ми досліджуємо загальні лінійні параболічні початково-крайові задачі з нульовими початковими даними Коші у введених у попередньому розділі анізотропних просторах Хермандера $H_{+}^{s,s/(2b);\varphi}(\cdot)$. Буде доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. В якості застосування цих результатів встановимо теореми про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Також отримаємо нові достатні умови, за яких узагальнені похідні заданого порядку розв'язків будуть неперервними.

Окремо розглянемо випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь, а також систем рівнянь, параболічних за Петровським. Почнемо з першого.

3.1. Постановка задачі у циліндрі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Розглянемо у циліндрі Ω таку параболічну початково–крайову задачу

$$A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t) = f(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in G \quad \text{і} \quad t \in (0,\tau); \tag{3.1}$$

$$B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\le m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha\partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t)$$

$$\text{для всіх}\quad x\in\Gamma,\quad t\in(0,\tau)\quad\text{і}\quad j\in\{1,\dots,m\}; \tag{3.2}$$

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}=0 \quad\text{для всіх}\quad x\in G\quad\text{і}\quad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{3.3}$$

Зазначимо, що початкові дані (3.3) вважаються нульовими. Тут b, m і всі m_j є довільно задані цілі числа, такі, що $m\ge b\ge 1$, $\varkappa := m/b\in\mathbb{Z}$ і $m_j\ge 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ і $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$, де $j\in\{1,\dots,m\}$ вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто кожна

$$a^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigl\{w\restriction\overline{\Omega}\colon\, w\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\bigr\}$$

і кожна

$$b_j^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{S}) := \bigl\{v\restriction\overline{S}\colon\, v\in C^\infty(\Gamma\times\mathbb{R})\bigr\}.$$

Використовуємо такі позначення $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ і $t\in\mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_n$. У формулах (3.1) і (3.2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1,...,\alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайова задача (3.1)–(3.3) називається параболічною у циліндрі Ω, якщо виконуються такі дві умови.

Умова 3.1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, правильно

$$A^{\circ}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta} \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi|+|p| \neq 0.$$

Для формулювання умови 3.2 довільно виберемо точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межи Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\xi|+|p| \neq 0$. Нехай $\nu(x)$ є ортом внутрішньої нормалі до межи Γ у точці x. З умови 3.1 та нерівності $n \geq 2$ випливає, що многочлен $A^{\circ}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має рівно m коренів $\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)$, $j=1,\ldots,m$, с додатною уявною частиною і m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 3.2. При кожному такому виборі x, t, ξ та p многочлени

$$B_j^{\circ}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,(\xi+\zeta\nu(x))^{\alpha}\,p^{\beta}, \quad j=1,\ldots,m,$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}(\zeta-\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)).$$

Відмітимо, що умова 3.1 є умовою $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [37] диференціального рівняння $Au=f$ у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 3.2 виражає той факт, що система крайових диференціальних операторів $\{B_1,\ldots,B_m\}$ накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

Пов'яжемо з параболічною задачею (3.1)–(3.3) лінійне відображення

$$\begin{gathered} C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto (Au,Bu) := \\ \bigl(Au,B_1u,\ldots,B_mu\bigr) \in C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_{+}^{\infty}(\overline{S})\bigr)^{m} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Тут і нижче

$$C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega}) := \bigl\{w\restriction\overline{\Omega}:\ w\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w\subseteq\mathbb{R}^{n}\times[0,\infty)\bigr\},$$
$$C^{\infty}_{+}(\overline{S}) := \bigl\{h\restriction\overline{S}:\ h\in C^{\infty}(\Gamma\times\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h\subseteq\Gamma\times[0,\infty)\bigr\}.$$

У дисертації усі функції (та розподіли) вважаються комплекснозначними.

Відображення (3.4) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ і $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}_{+}(\overline{S}))^{m}$. Це випливає з [1, теорема 12.1] (див. міркування у кінці п. 3.4).

Наша мета полягає в тому, щоб показати, що це відображення продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера.

3.2. Основний результат. Теорема про ізоморфізми

У цьому підрозділі сформулюємо теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (3.1)–(3.3) у просторах Хермандера, введених у підрозділі 2.3.

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \ \text{ для кожного } \ j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Теорема про ізоморфізми формульюється наступним чином.

Теорема 3.1. *Для довільного дійсного числа $\sigma > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (3.4) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A, B) : H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega, S), \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega, S) \\ &:= H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+}^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S). \end{aligned} \tag{3.6}$$

У соболєвському випадку $\varphi(r) \equiv 1$ і $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$ ця теорема слідує з результату М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1], який охоплює граничний випадок $\sigma = \sigma_0$ та стосується загальних параболічних задач із, взагалі кажучи, неоднорідними даними Коші. Це буде показано у п. 3.4. У загальній ситуації виведемо теорему 3.1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Це буде зроблено у п. 3.5.

Як тільки що було згадано, відображення (3.4) продовжується за неперервністю до ізоморфізму

$$(A,B) : H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega,S), \tag{3.7}$$

який діє у анізотропних просторах Соболєва. Всі ізоморіфзми (3.5), де $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, є звуженнями (3.7). Цей результат слідує із вкладень (2.19), правильних для $V = \Omega$ і $V = S$.

Кожна вектор-функція

$$(f, g_1, ..., g_m) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega,S) \tag{3.8}$$

має єдиний прообраз $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при взаємнооднозначному відображенні (3.7). Цю функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком параболічної задачі (3.1)–(3.3) із правою частиною (3.8).

3.3. Регулярність узагальнених розв'язків задачі

У цьому підрозділі обговоримо властивості регулярності узагальненого розв'язку задачі (3.1)–(3.3) у просторах Хермандера. Наступний результат випливає з теореми 3.1.

Наслідок 3.1. *Припустимо, що* $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.1)–(3.3)*, праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, ..., g_m) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega, S)$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$*. Тоді* $u \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Дійсно, припустимо, що умова цього наслідку виконується. Тоді, за теоремою 3.1, існує функція $w \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$ така, що $(A, B)w = (f, g_1, \ldots, g_m)$. Отже, $(A, B)(u - w) = (0, 0, \ldots, 0)$, де $u - w \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ завдяки правому вкладанню у (2.19). Тому $u-w = 0$ згідно з ізоморфізмом (3.7). Тепер робимо висновок про те, що $u = w \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, і $\pi_2 := U \cap S$. Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(S)$, де $s > 0$, $\gamma = 1/(2b)$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma;\varphi}(\omega, \pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H_{+}^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Аналогічно, позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v\in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v\mapsto\|\chi v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Теорема 3.2. *Нехай $u\in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.1)–(3.3) *із правою частиною* (3.8). *Припустимо, що*

$$f\in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{3.9}$$

$$g_j\in H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_2),\quad \textit{з}\quad j=1,\dots,m, \tag{3.10}$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тоді $u\in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

У випадку $\omega=\Omega$ і $\pi_1=\partial\Omega$ (тоді $\pi_2=S$), теорема 3.2 просто є повторенням наслідку 3.1. Якщо $\pi_1=\varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi\equiv 1$).

Використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови, за яких узагальнений розв'язок u та його узагальнені похідні заданого порядку неперервні на $\omega\cup\pi_1$.

Теорема 3.3. *Нехай ціле $p\geq 0$ таке, що $p+b+n/2>\sigma_0$, і нехай $u\in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.1)–(3.3) *із правою частиною* (3.8). *Припустимо, що права частина задовольняє* *умови* (3.9), (3.10) *для* $\sigma := p+b+n/2$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *для якого виконується інтегральна умова* (2.103)*:*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ *та всі його узагальнені частинні похідні* $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)$ *з* $|\alpha| + 2b\beta \le p$ *є неперервними на множині* $\omega \cup \pi_1$.

Зауваження 3.1. Інтегральна умова (2.103) у теоремі 3.3 є точною. А саме, нехай $\sigma := p+b+n/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$, і припустимо, що для кожної функції $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ наступна імплікація є правильною:

$$\bigl(\, u \text{ є розв'язком задачі (3.1)–(3.3) для деякої правої частини (3.9), (3.10)} \,\bigr)$$
$$\Rightarrow \ \bigl(\, u \text{ задовольняє висновок теореми 3.3} \,\bigr).$$

Тоді φ задовольняє умову (2.103).

Зауваження 3.2. Якщо сформулювати аналог теореми 3.3 для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну, оскільки інтегральна умова (2.103) не виконується у цьому випадку. А саме, потрібно стверджувати, що права частина задачі (3.1)–(3.3) задовольняє умову (3.9), (3.10) для деякого $\sigma > p+b+n/2$. Це припущення сильніше ніж умова теореми 3.3 завдяки лівому вкладанню у (2.19).

У підрозділі 3.5 виведемо теорему 3.2 з теореми про ізоморфізми 3.1 і покажемо, що теорема 3.3 є наслідком теореми 3.2 і леми 2.3 (версії теореми вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7]). Також обгрунтуємо зауваження 3.1.

3.4. Теорема про ізоморфізми у соболєвському випадку

Розглядаючи теорему 3.1 у цьому підрозділі, ми обмежуємось соболєвським випадком $\varphi(r) \equiv 1$ і $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$ і припускаємо що $\sigma \geq \sigma_0$. Мета цього підрозділу показати, що теорема 3.1 у цьому випадку випливає з вище згаданого результату М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1].

Розглянемо параболічну початково-крайову задачу (3.1)–(3.3) для довільно обраної правої частини

$$(f, g_1, \ldots, g_m) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega, S). \tag{3.11}$$

Звичайно, рівності та частинні похідні, що з'являються у цій задачі, інтерпретуються в сенсі теорії розподілів. Вектор-функція (3.11) задовольняє умови узгодження [1, § 11] у випадку нульвих початкових даних (3.3). Теорема М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1] з огляду на (2.37) стверджує, що задача (3.1)–(3.3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)$, який задовольняє двосторонню оцінку

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)} &\leq c_1 \|(f, g_1, \ldots, g_m)\|_{\mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega,S)} \\ &\leq c_2 \, \|u\|_{H^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

з деякими додатними числами c_1 і c_2, що не залежать від (3.11) та u. Тут ми поклали

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega, S) \\ :=&H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b)}(S). \end{aligned}$$

Покажемо, що $u \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)$. Для цього скористаємось лемою 2.1 з $s := \sigma$ та $\gamma := 1/(2b)$. Згідно з (3.3), функція u задовольняє (2.38) за умови, що $0 \leq k \leq \varkappa - 1$. Тут

$$\varkappa - 1 = \frac{2m}{2b} - 1 < \frac{\sigma}{2b} - \frac{1}{2}.$$

Виконання (2.38) для інших значень цілого k (коли $\varkappa - 1 < k < \sigma/(2b) - 1/2$) доводиться (якщо такі значення існують) наступним чином.

Нехай кількість цих значень $l \geq 1$; тоді

$$\varkappa + l - 1 < \frac{\sigma}{2b} - \frac{1}{2} < \varkappa + l. \tag{3.13}$$

Умова параболічності 3.1 у випадку $\xi = 0$ і $p = 1$ означає, що коефіцієнт $a^{(0,\ldots,0),\varkappa}(x,t) \neq 0$ для всіх $x \in \overline{G}$ і $t \in [0,\tau]$. Тому параболічне рівняння (3.1) можна розв'язати відносно $\partial_t^{\varkappa} u(x,t)$; а саме, запишемо

$$\begin{aligned} \partial_t^{\varkappa} u(x,t) = \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta\leq 2m,\\ \beta\leq\varkappa-1}} & a_0^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x,t) + \\ & + (a^{(0,\ldots,0),\varkappa}(x,t))^{-1} f(x,t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

для деяких функцій $a_0^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Якщо $l \geq 2$, то диференціюємо рівність (3.14) $l-1$ разів по змінній t і отримаємо $l-1$ рівностей

$$\begin{aligned} \partial_t^{\varkappa+j} u(x,t) = \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta\leq 2m+2bj,\\ |\alpha|\leq 2m,\ \beta\leq\varkappa+j-1}} & a_j^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x,t) + \\ & + \partial_t^{j}((a^{(0,\ldots,0),\varkappa}(x,t))^{-1} f(x,t)), \\ & \text{з} \quad j = 1, \ldots, l-1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тут кожна $a_j^{\alpha,\beta}(x,t)$, це певна функція з $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Рівності (3.14) і (3.15) розглядаються в $\Omega = \{(x,t) : x \in G,\ 0 < t < \tau\}$. Оскільки $f \in H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega)$, то $\partial_t^{j} f(x,t)\big|_{t=0} = 0$ для майже всіх $x \in G$ і для кожного цілого $j \in \{0, \dots, l-1\}$ завдяки лемі 2.1 і (3.13). Використовуючи ці рівності, виводимо послідовно з (3.14) та (3.15), що $\partial_t^{\varkappa+j} u(x,t)\big|_{t=0} = 0$ для тих же x та j.

Таким чином, функція $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)$ задовольняє умову (2.38). Тому $u \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)$ завдяки лемі 2.1. Більш того, згідно з цією леммою та формулами (3.11) і (3.12), можемо записати

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_+^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)} &\leq c_3 \|(f, g_1, \dots, g_m)\|_{\mathcal{H}_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b)}(\Omega,S)} \\ &\leq c_4 \, \|u\|_{H_+^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тут c_3 і c_4 - це деякі додатні числа, які не залежать від (3.11) та u.

Таким чином, робимо висновок, що для довільного вектора (3.11) існує єдиний розв'язок $u \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)$ параболічної задачі (3.1)–(3.3), і що цей розв'язок задовольняє (3.16). Очевидно, цей висновок еквівалентний теоремі 3.1 у розглянутому соболєвському випадку. Тому теорема 3.1 у даному випадку є наслідком результату М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1].

На завершення цього підрозділу покажемо, що відображення (3.4) є бієкцією

$$(A, B) : C_+^{\infty}(\overline{\Omega}) \leftrightarrow C_+^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_+^{\infty}(\overline{S})\bigr)^m, \tag{3.17}$$

як ми стверджували це в кінці підрозділу 3.1. Скористаємось теоремою 3.1 у соболєвському випадку, про який тільки що говорили. А саме, $\sigma = 2bl > \sigma_0$, де $l \in \mathbb{Z}$. За цією теоремою відображення (3.4) є ін'єктивним. Залишається показати, що (3.4) є сюр'єктивним. Нехай вектор-функція $(f, g_1, \dots, g_m)$ належить простору $C_+^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_+^{\infty}(\overline{S})\bigr)^m$. Згідно з цією теоремою існує єдина функція

$$u \in \bigcap_{l \in \mathbb{Z},\, 2bl > \sigma_0} H_+^{2bl,l}(\Omega) \tag{3.18}$$

така, що $(A, B)u = (f, g_1, \ldots, g_m)$. Для виведення потрібного включення $u \in C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ з формули (3.18) скористаємось операторами продовження O, T_τ і T_G з доведення леми 2.1. Можемо припустити, що відображення T_τ і T_G не залежать від $s > 0$. Оператори продовження такого типу побудовані, наприклад, в [112]. Тоді, згідно з (2.47) (при $s = 2bl$ і $\gamma = 1/(2b)$) і (3.18), можемо записати

$$w := (T_G \otimes (OT_\tau))u \in \bigcap_{l \in \mathbb{Z},\, 2bl > \sigma_0} H^{2bl,l}_{+}(\mathbb{R}^{n+1}) \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.19}$$

Тут відмітимо, що $u \in \Upsilon^{2bl,l}(\Omega)$ згідно з лемою 2.1 для l вказаних у (3.19), простір $\Upsilon^{2bl,l}(\Omega)$ був означений у доведенні цієї леми. Також зазначимо, що останнє включення в (3.19) є правильним згідно теореми вкладання Соболєва (див. також [41, гл. II, теорема 13]). Отже, $u = w \restriction \Omega \in C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$. Таким чином, відображення (3.4) є сюр'єктивним. Ми обгрунтували бієкцію (3.17).

3.5. Доведення теорем підрозділів 3.2 і 3.3

У цьому підрозділі ми доведемо теореми 3.1, 3.2 і 3.3. Також обгрунтуємо зауваження 3.1.

Доведення теореми 3.1. Нехай $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Виберемо ціле $\sigma_1 > \sigma$ таке, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. Згідно з результатом М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1], відображення (3.4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$(A, B) : H_{+}^{\sigma_k, \sigma_k/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_k-2m,(\sigma_k-2m)/(2b)}(\Omega, S) \quad \text{з} \quad k \in \{0, 1\}. \tag{3.20}$$

(Тут, нагадаємо, другий простір визначається формулою (3.6) з $\sigma := \sigma_k$ і $\varphi \equiv 1$.)

Визначимо інтерполяційний параметр ψ формулою (2.27) у якій $s := \sigma$, $s_0 := \sigma_0$ і $s_1 := \sigma_1$. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ простори у (3.20) отримаємо ізоморфізм

$$\begin{aligned}(A, B) : {} & \bigl[H_{+}^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1, \sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \\ & \leftrightarrow \bigl[\mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega, S), \mathcal{H}_{+}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}(\Omega, S)\bigr]_{\psi}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Він є звуженням оператора (3.20) з $k = 0$.

Згідно з теоремою 2.5 і твердженням 2.4 можемо записати

$$\bigl[H_{+}^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1, \sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H_{+}^{\sigma, \sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$$

і

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega,S),\mathcal{H}_{+}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}(\Omega,S)]_{\psi}\\
=&\big[H_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega),H_{+}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}(\Omega)\big]_{\psi}\\
&\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}\big[H_{+}^{\sigma_0-m_j-1/2,(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(S),H_{+}^{\sigma_1-m_j-1/2,(\sigma_1-m_j-1/2)/(2b)}(S)\big]_{\psi}\\
=&H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}H_{+}^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S)\\
=&\mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega,S).
\end{aligned}
$$

Ці рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм. Таким чином, ізоморфізм (3.21) дає (3.5). Цей ізоморфізм є продовженням за неперервністю відображення (3.4) оскільки множина $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ є щільною у просторі $H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$. □

Доведення теореми 3.2. Спочатку покажемо, що з умов (3.9) і (3.10) цієї теореми випливає правильність імплікації

$$
u\in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)\;\Rightarrow\;u\in H^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) \tag{3.22}
$$

для кожного цілого $\lambda\geq 1$, такого що $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Для χ існує функція $\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta\subset\omega\cup\pi_1$ і $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи диференціальні оператори A і B_j з оператором множення на χ, можемо записати

$$
\begin{aligned}
(A,B)(\chi u)&=(A,B)(\chi\eta u)=\chi\,(A,B)(\eta u)+(A',B')(\eta u)\\
&=\chi\,(A,B)u+(A',B')(\eta u)\\
&=\chi\,(f,g_1,...,g_m)+(A',B')(\eta u).
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Тут

$$
(A',B'):=(A',B'_1,\dots,B'_m)
$$

це диференціальний оператор з компонентами

$$A'(x,t,D_x,\partial_t)=\sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m-1} a_1^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha\partial_t^\beta \tag{3.24}$$

і

$$B'_j(x,t,D_x,\partial_t)=\sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j-1} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha\partial_t^\beta,\quad j=1,\ldots,m, \tag{3.25}$$

де всі $a_1^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ and $b_{j,1}^{\alpha,\beta}\in C^\infty(\overline{S})$. Цей оператор неперервно діє у парі просторів

$$(A',B'):\ H_+^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)\to\mathcal{H}_+^{s+1-2m,(s+1-2m)/(2b);\varphi}(\Omega,S) \tag{3.26}$$

для кожного $s>\sigma_0-1$. У випадку, коли $\varphi\equiv 1$ і другі індекси не є напівцілими це зразу слідує з (3.24), (3.25), леми 2.1 і відомих властивостей анізотропного простору Соболєва $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ (див, наприклад, [41, гл. I, лема 4, та гл. II, теореми 3 і 7]). Обмеженість оператора (3.26) у загальній ситуації зразу випливає з цього випадку за допомогою твердження 2.4 та інтерполяційної теореми 2.5.

З умов (3.9) і (3.10) отримаємо включення

$$\chi\,(f,g_1,\ldots,g_m)\in\mathcal{H}_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega,S).$$

Крім того, згідно (3.26) з $s:=\sigma-\lambda$, має місце імплікація

$$\begin{aligned}&u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\\&\quad\Rightarrow\ (A',B')(\eta u)\in\mathcal{H}_+^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\varphi}(\Omega,S).\end{aligned}$$

Тому, скориставшись (3.23) і наслідком 3.1 можемо записати

$$\begin{aligned}&u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\\&\quad\Rightarrow\ (A,B)(\chi u)\in\mathcal{H}_+^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\varphi}(\Omega,S)\\&\quad\Rightarrow\ \chi u\in H_+^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\Omega).\end{aligned}$$

Відмітимо, що тут наслідок 3.1 застосовний, оскільки $\chi u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми і $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$. Тим самим, імплікація (3.22) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ.

Використаємо цю імплікацію для доведення включення $u \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)$. Розглянемо окремо випадки $\sigma\notin\mathbb{Z}$ і $\sigma\in\mathbb{Z}$.

Нехай спочатку $\sigma\notin\mathbb{Z}$. У цьому випадку існує ціле число $\lambda_0\geq 1$ таке, що

$$\sigma-\lambda_0<\sigma_0<\sigma-\lambda_0+1. \tag{3.27}$$

Скориставшись імплікацією (3.22) послідовно для значень $\lambda:=\lambda_0$, $\lambda:=\lambda_0-1$,..., і $\lambda:=1$, виводимо необхідне включення слідуючим чином:

$$\begin{aligned} u\in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)&\subset H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0,(\sigma-\lambda_0)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\\ &\Rightarrow\ u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0+1,(\sigma-\lambda_0+1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\\ &\Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \end{aligned}$$

Відмітимо, що $u\in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми.

Нехай тепер $\sigma\in\mathbb{Z}$. У цьому випадку не існує цілого числа λ_0, що задовольняє (3.27). Але, оскільки $\sigma-1/2\notin\mathbb{Z}$ і $\sigma-1/2>\sigma_0$, то, як довели у попередньому абзаці, правильне включення

$$u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1).$$

Звідси, скориставшись імплікацією (3.22) з $\lambda:=1$, виводимо потрібне включення, а саме:

$$\begin{aligned} u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)&\subset H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1,(\sigma-1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\\ &\Rightarrow\ u\in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \end{aligned}$$

$\square$

Доведення теореми 3.3. Довільно виберемо точку $M \in \omega \cup \pi_1$. Нехай функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняє такі умови: $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$ і $\chi = 1$ у певному околі $V(M) \subseteq \overline{\Omega}$ точки M. Згідно з теоремою 3.2 маємо включення $\chi u \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$ з $\sigma = p + b + n/2$. Отже, існує функція $w \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ така, що $w = \chi u = u$ на множині $V(M)$. Згідно з лемою 2.3(i), кожна узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$, є неперервною на $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким чином, похідна $D_x^\alpha \partial_t u(x,t)$ є неперервною в околі $V(M)$ точки M. Оскільки точка $M \in \omega \cup \pi_1$ вибрана довільно, то ця похідна є неперервною на $\omega \cup \pi_1$. □

У кінці цього підрозділу обгрунтуємо зауваження 3.1. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$ і нехай ціле $p \geq 0$ таке, що $\sigma := p + b + n/2 > \sigma_0$. Припустимо, що кожна функція $u \in H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ задовольняє імплікацію, наведену у зауваженні 3.1. Отже, якщо для довільної функції $u \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$ покладемо

$$(f, g_1, ..., g_m) := (A, B)u \in \mathcal{H}_+^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega, S),$$

то отримаємо, що u задовольняє висновку теореми 3.3. Таким чином, якщо функція u належить до $H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$, то всі її узагальнені похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $|\alpha| + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\omega \cup \pi_1$. Зокрема, кожна похідна $\partial^j u/\partial x_1^j$ з $0 \leq j \leq p$ є неперервною на $\omega \cup \pi_1$.

Нехай V є непорожньою відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$ такою, що $\overline{V} \subset \omega$. Довільно виберемо функцію $w \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ таку, що $\operatorname{supp} w \subset V$, і покладемо

$$u := w \upharpoonright \Omega \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega).$$

Функція w та її узагальнені похідні $\partial^j w/\partial x_1^j$ з $1 \leq j \leq p$ є неперервними на $\mathbb{R}^{n+1}$ внаслідок властивості u, виведеної в попередньому абзаці згідно зі зробленим припущенням. Отже, φ задовольняє (2.103) згідно з лемою 2.3(ii). Таким чином ми обгрунтували зауваження 3.1.

3.6. Постановка задачі у прямокутнику

Нехай довільно задані дійсні числа $l > 0$ і $\tau > 0$. Позначимо $\Omega := (0, l) \times (0, \tau)$ — відкритий прямокутник в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо у прямокутнику Ω лінійну параболічну задачу з однорідними початковими умовами:

$$A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.28}$$

$$B_{j,0}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=0}$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} b_{j,0}^{\alpha,\beta}(t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_{x=0} = g_{j,0}(t) \quad \text{і} \tag{3.29}$$

$$B_{j,1}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=l}$$
$$\equiv \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_{x=l} = g_{j,1}(t) \tag{3.30}$$

$$\text{для} \quad 0 < t < \tau \quad \text{і} \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < l \quad \text{і} \quad k = 0, \ldots, \varkappa - 1. \tag{3.31}$$

Тут b, m і всі m_j є довільні фіксовані цілі числа, такі, що $m \ge b \ge 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \ge 0$. Всі коефіцієнти виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ та $B_{j,k} := B_{j,k}(t,D_x,\partial_t)$, де $j \in \{1,\ldots,m\}$ та $k \in \{0,\,1\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. А саме, $a^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ та $b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^\infty[0,\tau]$, де $\overline{\Omega} := [0,l] \times [0,\tau]$. Використовуємо позначення $D_x := i\,\partial/\partial x$ та $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних. Підсумовування здійснюємо по цілим індексам $\alpha, \beta \ge 0$, що задовольняють нерівності, вказані під знаком суми.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайову задачу (3.28)–(3.31) називають параболічною в Ω, якщо виконуються такі три умови.

Умова 3.3. Для довільних $x \in [0,l]$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$ та $p \in \mathbb{C}$ з $\mathrm{Re}\, p \geq 0$ правильно

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, \xi^{\alpha} p^{\beta} \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Умова 3.4. Нехай величини $x \in \{0,l\}$, $t \in [0,\tau]$, та $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $\mathrm{Re}\, p \geq 0$ довільні. Тоді многочлен $A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ відносно $\xi \in \mathbb{C}$ має m коренів $\xi_j^{+}(x,t,p)$, $j = 1,\ldots,m$, з додатною уявною частиною та m коренів з від'ємною уявною частиною, з урахуванням їх кратності.

Умова 3.5. Нехай величини x, t, та p такі самі, як і в умові 3.4. Покладемо $k := 0$ якщо $x = 0$, або $k := 1$ якщо $x = l$. Тоді многочлени

$$B_{j,k}^{(0)}(t,\xi,p) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta=m_j} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(t)\, \xi^{\alpha} p^{\beta}, \quad j = 1,\ldots,m,$$

аргументу ξ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m} \bigl(\xi - \xi_j^{+}(x,t,p)\bigr).$$

Пов'яжемо з параболічною задачею (3.28)–(3.31) лінійне відображення

$$C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto (Au, Bu) := \tag{3.32}$$
$$:= \bigl(Au, B_{1,0}u, B_{1,1}u, \ldots, B_{m,0}u, B_{m,1}u\bigr) \in C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_{+}^{\infty}[0,\tau]\bigr)^{2m},$$

Тут позначено

$$C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{ w \restriction \overline{\Omega} : \ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2), \ \mathrm{supp}\, w \subseteq \mathbb{R} \times [0,\infty) \bigr\} =$$
$$= \bigl\{ u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : \ \partial_t^{\beta} u(x,t)|_{t=0} = 0 \ \text{для всіх} \ \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ x \in [0,l] \bigr\}$$

та

$$C_{+}^{\infty}[0,\tau] := \bigl\{ h \restriction [0,\tau] : \ h \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \ \mathrm{supp}\, h \subseteq [0,\infty) \bigr\} =$$
$$= \bigl\{ v \in C^{\infty}[0,\tau] : \ v^{(\beta)}(0) = 0 \ \text{для всіх} \ \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \bigr\}.$$

У дисертації усі функції (та розподіли) вважаються комплекснозначними.

Відображення (3.32) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ та $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})\times\bigl(C^{\infty}_{+}[0,\tau]\bigr)^{2m}$ (див. нижче міркування після теореми 3.4). Наша мета полягає в тому, щоб показати, що це відображення продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера.

3.7. Теорема про ізоморфізми. Регулярність узагальнених розв'язків

У цьому підрозділі сформулюємо теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (3.28)–(3.31) у просторах Хермандера, введених у підрозділі 2.3. Потім розглянемо застосування цієї теореми до дослідження регулярності узагальнених розв'язків досліджуваної задачі.

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \ \text{ для всіх } \ j \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Зокрема, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Теорема 3.4. *Нехай довільно задані дійсне число* $\sigma > \sigma_0$ *і функціональний параметр* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді відображення* (3.32) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A, B): \ H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega) \ \leftrightarrow \tag{3.33}$$
$$\leftrightarrow H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \bigl(H_{+}^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(0,\tau)\bigr)^2 :=$$
$$:= \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}.$$

Якщо $\varphi \equiv 1$, то оператор (3.33) діє у соболєвських просторах. Для них теорема 3.4 була доведена М. С. Аграновічем і М. І. Вішіком [1, теорема 12.1] у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. Їх результат охоплює граничний випадок $\sigma = \sigma_0$ та стосується загальних параболічних задач із, взагалі кажучи, неоднорідними даними Коші.

Згідно з теоремою вкладання Соболєва і згаданим вище результатом М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1], отримаємо рівності

$$C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) = \bigcap_{\substack{\sigma>\sigma_0,\\ \sigma/(2b)\in\mathbb{Z}}} H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega),$$

$$C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_{+}^{\infty}[0,\tau]\bigr)^{2m} = \bigcap_{\substack{\sigma>\sigma_0,\\ \sigma/(2b)\in\mathbb{Z}}} (A,B)\bigl(H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b)}(\Omega)\bigr).$$

З них випливає, що відображення (3.32) встановлює взаємнооднозначну відповідність між просторами $C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C_{+}^{\infty}[0,\tau]\bigr)^{2m}$.

Завдяки згаданій теоремі Аграновіча–Вішика, кожний вектор

$$F := (f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \qquad (3.34)$$

має єдиний прообраз $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при відображенні (3.33). Цю функцію u називаємо узагальненим розв'язком параболічної задачі (3.28)–(3.31) із правою частиною (3.34).

Наслідком теореми 3.4 є наступна властивість глобального підвищення регулярності цього розв'язку.

Наслідок 3.2. *Припустимо, що* $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.28)–(3.31), *праві частини якої задовольняють умову*

$$F := (f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^2$, і нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_{2k} := U \cap \{(k,t) : t \in (0,\tau)\}$ для кожного $k \in \{0, 1\}$. Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)$ і $H^{s;\varphi}_{+}(0,\tau)$, де $s>0$, $\gamma=1/(2b)$ і $\varphi\in\mathcal{M}$.

Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u\in H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u\mapsto\|\chi u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}_{+}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Аналогічно, позначимо через $H^{s;\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_{2k})$ лінійний простір усіх розподілів v на $(0,\tau)$ таких, що $\chi v\in H^{s;\varphi}_{+}(0,\tau)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty[0,\tau]$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_{2k}$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v\mapsto\|\chi v\|_{H^{s;\varphi}_{+}(0,\tau)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Теорема 3.5. *Нехай $u\in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.28)–(3.31) *із правою частиною* (3.34)*. Припустимо, що*

$$f\in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1),\tag{3.35}$$

$$g_{j,k}\in H^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\pi_{2k})\quad\text{для всіх}\quad k\in\{0,\,1\}\quad\text{та}\quad j\in\{1,\dots,m\}.\tag{3.36}$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тоді $u\in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

Якщо $\omega=\Omega$ і $\pi_1=\partial\Omega$, то за цією теоремою маємо глобальне підвищення регулярності, тобто наслідок 3.2. У випадку, коли $\pi_1=\varnothing$, теорема 3.5 стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$. Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi\equiv 1$).

Як уже зазначалось у п. 3.3, використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови, за яких узагальнений розв'язок u та його узагальнені похідні заданого порядку неперервні на $\omega \cup \pi_1$.

Теорема 3.6. *Нехай ціле $p \geq 0$ таке, що $p + b + 1/2 > \sigma_0$, і нехай $u \in H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.28)–(3.31) *із правою частиною* (3.34)*. Припустимо, що права частина задовольняє умови* (3.35), (3.36) *для $\sigma := p + b + 1/2$ і деякого функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$, для якого виконується інтегральна умова* (2.103)*:*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ та всі його узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)$ з $\alpha + 2b\beta \leq p$ є неперервними на множині $\omega \cup \pi_1$.

Відмітимо, що зауваження 3.1 і 3.2 залишаються правильними для теореми 3.6.

3.8. Доведення теорем підрозділу 3.7

Доведення теореми 3.4. Нехай $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Виберемо ціле $\sigma_1 > \sigma$ таке, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. Згідно з результатом М. С. Аграновіча і М. І. Вішика [1, теорема 12.1], відображення (3.32) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів просторів Соболєва

$$(A,B):\ H_{+}^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_k \quad \text{для кожного} \quad k \in \{0,1\}, \tag{3.37}$$

де

$$\mathcal{H}_k := H_{+}^{\sigma_k-2m,(\sigma_k-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\bigl(H_{+}^{(\sigma_k-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\bigr)^2.$$

Визначимо інтерполяційний параметр ψ формулою (2.27) у якій $s := \sigma$, $s_0 := \sigma_0$ і $s_1 := \sigma_1$. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ простори у (3.37) отримаємо ізоморфізм

$$(A,B):\ \bigl[H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \leftrightarrow [\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]_{\psi}. \tag{3.38}$$

Він є звуженням оператора (3.37) з $k=0$.

Згідно з теоремою 2.5, лемою 2.2 і твердженням 2.4 можемо записати

$$\bigl[H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$$

і

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]_{\psi} &= \bigl[H_{+}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \\
&\quad \oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\Bigl(\bigl[H_{+}^{(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau), H_{+}^{(\sigma_1-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\bigr]_{\psi}\Bigr)^2 \\
&= H_{+}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\bigl(H_{+}^{(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(0,\tau)\bigr)^2.
\end{aligned}$$

Ці рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм. Таким чином, ізоморфізм (3.38) дає (3.33). Цей ізоморфізм є продовженням за неперервністю відображення (3.32) оскільки множина $C^{\infty}_{+}(\overline{\Omega})$ є щільною у просторі $H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$. $\square$

Доведення теореми 3.5 таке саме, як і теореми 3.2, тільки з просторами $\mathcal{H}^{\cdot,\cdot;\varphi}_{+}$ замість $\mathcal{H}^{\cdot,\cdot;\varphi}_{+}(\Omega,S)$.

Доведення теореми 3.6 таке саме, як і теореми 3.3, тільки з $n=1$.

3.9. Постановка задачі для параболічних за Петровським систем

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Розглянемо у циліндрі Ω початково–крайову параболічну за Петровським задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad t \in (0,\tau) \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,N\}; \tag{3.39}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,m\}; \tag{3.40}$$

$$\partial_t^r u_k(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in G, \quad k \in \{1,\ldots,N\} \quad \text{і} \quad r \in \{0,\ldots,\varkappa_k - 1\}. \tag{3.41}$$

Відмітимо, що початкові дані (3.41) ми припускаємо нульові. Тут лінійні диференціальні вирази мають вигляд

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq 2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta, \tag{3.42}$$

$$B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta \leq l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k < 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

для всіх припустимих значень індексів j, k. В цій задачі ми довільним чином вибрали натуральні числа $N \geq 2$, b і $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, поклали $m := b(\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_N)$ і вибрали ще m цілих чисел $l_1, \ldots, l_m$. Число $2b$ називається параболічною вагою даної задачі. Всі коефіцієнти диференціальних виразів $A_{j,k}$ та $B_{j,k}$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто кожна

$$a_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) := \bigl\{w \restriction \overline{\Omega}\colon\, w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})\bigr\}$$

і кожна

$$b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{S}) := \bigl\{v \restriction \overline{S}\colon\, v \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R})\bigr\}.$$

Використовуємо такі позначення $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. У формулах (3.42) і (3.43) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Запишемо головні символи диференціальних операторів (3.42) і (3.43):

$$A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) := \sum_{|\alpha|+2b\beta=2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta},$$

$$B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) =: \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta=l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^{\alpha}p^{\beta}, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k \geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k < 0. \end{cases}$$

Ці символи є однорідними поліномами за сукупністю аргументів $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ (як завжди, $\xi^{\alpha} := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$). Утворимо матриці

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) := \bigl(A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p)\bigr)_{j,k=1}^{N},$$

$$B^{(0)}(x,t,\xi,p) := \big(B^{(0)}_{j,k}(x,t,\xi,p)\big)_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,N}}.$$

Нагадаємо [45, розд. 1, § 1], що початково-крайова задача (3.39)–(3.41) називається параболічною за Петровським у циліндрі Ω, якщо виконуються наступні три умови.

Умова 3.6. Для довільно вибраних точок $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$ і вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ усі корені многочлена $\det A^{(0)}(x,t,\xi,p)$ по змінній $p \in \mathbb{C}$ задовольняють нерівності $\operatorname{Re} p(x,t,\xi) \leq -\delta\,|\xi|^{2b}$ зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від x, t і ξ.

Умова 3.7. У системі (3.39) кожне рівняння з номером $j \in \{1,\dots,N\}$ розв'язуване відносно похідної $\partial_t^{\varkappa_j} u_j$ і не містить жодної похідної вигляду $\partial_t^{\varkappa_k} u_k$, де $k \neq j$. Тому можна вважати, що $a_{j,k}^{(0,0,\dots,0),\varkappa_k}(x,t) \equiv \delta_{j,k}$ для довільних $j,k \in \{1,\dots,N\}$; тут $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

Нехай число $\delta_1 \in (0,\delta)$, де δ є стала з умови 3.6. Для формулювання умови 3.8 виберемо довільним чином точки $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, дотичний до межі Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ такі, що $\operatorname{Re} p \geq -\delta_1|\xi|^{2b}$ і $|\xi| + |p| > 0$. Нехай $\nu(x)$ є орт внутрішньої нормалі до межи Γ у точці x. З умови 1 випливає, що многочлен $\det A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)$, $j = 1,\dots,m$, з додатною уявною частиною та решту m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 3.8. Для деякого числа $\delta_1 \in (0,\delta)$ та при кожному зазначеному вище виборі параметрів x, t, ξ і p рядки матриці

$$B^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)\cdot \widetilde{A}^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$$

є лінійно незалежними за модулем многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}(\zeta - \zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)).$$

Тут $\widetilde{A}^{(0)}$ — транспонована матриця агебраїчних доповнень елементів матриці $A^{(0)}$.

Зауважимо, що умови 3.6 і 3.7 є умовами (рівномірної) $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [38, с. 100] системи (3.39) у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 3.8 говорить про те, що система крайових умов (3.40) накриває параболічну систему (3.39) на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

Запишемо систему (3.39) і крайові умови (3.40) у матричній формі

$$Au = f \quad \text{і} \quad Bu|_S = g;$$

тут і далі

$$A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^{N}, \quad B := \big(B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)\big)_{\substack{j=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,N}}$$

— матричні диференціальні оператори, а u, f та g є комплексно-значні вектор-функції.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (3.39)–(3.41) лінійне відображення

$$\big(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})\big)^{N} \ni u \mapsto (Au, Bu) \in \big(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})\big)^{N} \times \big(C_{+}^{\infty}(\overline{S})\big)^{m}. \tag{3.44}$$

Тут і нижче

$$C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}) := \big\{w \restriction \overline{\Omega} :\ w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n} \times [0,\infty)\big\},$$
$$C_{+}^{\infty}(\overline{S}) := \big\{h \restriction \overline{S} :\ h \in C^{\infty}(\Gamma \times \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0,\infty)\big\}.$$

У роботі усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.

Відображення (3.44) встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}))^{N}$ і $(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}))^{N} \times (C_{+}^{\infty}(\overline{S}))^{m}$. Це випливає з [46, теорема 1.2] тими самими міркуваннями, що були проведені для (3.17).

Основна мета полягає в тому, щоб показати, що відображення (3.44) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами анізотропних гільбертових функціональних просторів Хермандера.

3.10. Теорема про ізоморфізми. Регулярність узагальнених розв'язків

У цьому підрозділі сформулюємо теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (3.39) – (3.41) у просторах Хермандера, введених у підрозділі 2.3. Потім розглянемо застосування цієї теореми до дослідження регулярності узагальнених розв'язків досліджуваної задачі.

Позначимо через σ_0 найменше ціле число таке, що

$$\sigma_0 \geq 0, \quad \sigma_0 \geq l_j + 1 \text{ для всіх } j \in \{1, \dots, m\}, \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3.7. *Для довільного дійсного числа* $\sigma > \sigma_0$ *і довільного функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$ *відображення* (3.44) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\begin{aligned}(A,B) : \mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{N} H_{+}^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}(\Omega) \;\leftrightarrow \\ \bigl(H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)\bigr)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \\ =: \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega,S).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Якщо $\varphi \equiv 1$, то ізоморфізм (3.45) діє у парах анізотропних просторів Соболєва. У цій ситуації теорема 3.7 встановлена В. О. Солонніковим [46, теорема 1.2] у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$. Його результат охоплює і граничний випадок $\sigma = \sigma_0$. У загальній ситуації, ми виведемо теорему 3.7 із теореми Солоннікова за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва.

Як тільки що було згадано, відображення (3.44) продовжується за неперервністю до ізоморфізму

$$(A,B):\mathcal{G}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)\leftrightarrow\mathcal{H}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega,S), \tag{3.46}$$

який діє у анізотропних просторах Соболєва. Всі ізоморіфзми (3.45), де $\sigma>\sigma_0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, є звуженнями (3.46). Цей результат слідує із вкладень (2.19), правильних для $V=\Omega$ і $V=S$.

Кожна вектор-функція

$$(f,g)\in\mathcal{H}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega,S) \tag{3.47}$$

має єдиний прообраз $u\in\mathcal{G}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ при взаємнооднозначному відображенні (3.46). Цю вектор-функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком параболічної задачі (3.39)–(3.41) із правою частиною (3.47).

Обговоримо властивості регулярності цього розв'язку у просторах Хермандера. Наступний результат випливає з теореми 3.7.

Наслідок 3.3. *Припустимо, що* $u\in\mathcal{G}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (3.39) – (3.41), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g)\in\mathcal{H}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S)$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ *і* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тоді* $u\in\mathcal{G}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, і нехай $\omega:=U\cap\Omega\neq\varnothing$, $\pi_1:=U\cap\partial\Omega$, і $\pi_2:=U\cap S$.

Локальні простори $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$ і $H^{s,s\gamma;\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_2)$ було введено раніше у п. 3.3.

Теорема 3.8. *Нехай вектор-функція* $u \in \mathcal{G}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (3.39) – (3.41) *із правою частиною* (3.47). *Припустимо, що*

$$(f,g) \in \bigl(H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)\bigr)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_2) \qquad (3.48)$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді*

$$u \in \mathcal{G}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) := \bigoplus_{k=1}^{N} H^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1). \qquad (3.49)$$

У випадку $\omega = \Omega$ і $\pi_1 = \partial\Omega$ (тоді $\pi_2 = S$), теорема 3.8 просто є повторенням наслідку 3.3. Якщо $\pi_1 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$. Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$).

Виберемо довільну компоненту u_k узагальненого розв'язку u. Використання просторів Хермандера дозволяє отримати кращі, ніж у випадку просторів Соболєва, достатні умови неперервності на $\omega \cup \pi_1$ обраної компоненти u_k та її узагальнених частинних похідних заданого порядку.

Теорема 3.9. *Виберемо довільне* $k \in \{1,\ldots,N\}$. *Нехай ціле* $p \geq 0$ *таке, що* $p+b+n/2 > \sigma_0+2b\varkappa_k$, *і нехай вектор-функція* $u \in \mathcal{G}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (3.39) – (3.41) *із правою частиною* (3.47). *Припустимо, що права частина задовольняє умову* (3.48) *для* $\sigma := p + b + n/2 - 2b\varkappa_k$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *для якого* *виконується інтегральна умова* (2.103)*:*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді компонента $u_k(x,t)$ *розв'язку* u *та всі її узагальнені частинні похідні* $D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)$*, для яких* $|\alpha| + 2b\beta \leq p$*, є неперервними на множині* $\omega \cup \pi_1$*.*

Для цієї теореми мають місце версії зауважень 3.1 і 3.2.

Зауваження 3.3. Умова (2.103) у теоремі 3.9 є точною. А саме, нехай $\sigma := p+b+n/2-2b\varkappa_k$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і припустимо, що для кожної вектор-функції $u \in \mathcal{G}_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ наступна імплікація є правильною

$$\bigl(\, u \text{ є розв'язком задачі (3.39)–(3.41) для деякої правої частини (3.48)}\,\bigr)$$
$$\Rightarrow\ \bigl(\text{компонента}\, u_k \text{ задовольняє висновку теореми 3.9}\,\bigr).$$

Тоді φ задовольняє умову (2.103).

Зауваження 3.4. Якщо сформулювати аналог теореми 3.9 для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну, оскільки (2.103) не виконується у цьому випадку. А саме, потрібно стверджувати, що права частина задачі (3.39) – (3.41) задовольняє умову (3.48) для деякого $\sigma > p + b + n/2 - 2b\varkappa_k$. Це припущення сильніше ніж умова теореми 3.9 завдяки лівому вкладанню у (2.19).

3.11. Доведення теорем підрозділу 3.10

Доведення теореми 3.7. Спочатку зазначимо, що у випадку просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$) і $\sigma = 2bl > \sigma_0$, де $l \in \mathbb{Z}$, теорема 3.7 випливає зі згаданого результату Солоннікова [46, теорема 1.2]. Дійсно, з леми 2.1 випливає, що у цьому випадку функціональні простори, що фігурують у [46, теорема 1.2] співпадають із просторами з (3.45).

Нехай $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Виберемо ціле $\sigma_1 > \sigma$ таке, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. Згідно з результатом В. О. Солоннікова [46, теорема 1.2], відображення (3.44) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$(A, B) : \mathcal{G}_{+}^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{+}^{\sigma_k,\sigma_k/(2b)}(\Omega, S) \quad \text{де} \quad k \in \{0, 1\}. \tag{3.50}$$

(Тут, нагадаємо, простори означаються як і у формулі (3.45) з $\sigma := \sigma_k$ і $\varphi \equiv 1$.)

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (2.27) в якій $s := \sigma$, $s_0 := \sigma_0$, і $s_1 := \sigma_1$. Інтерполюючи з функціональним параметром ψ пари просторів у (3.50), ми отримаємо ізоморфізм

$$\begin{aligned}(A, B) : \bigl[\mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), \mathcal{G}_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \\ \leftrightarrow \bigl[\mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S), \mathcal{H}_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega, S)\bigr]_{\psi}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Він є звуженням оператора (3.50) з $k = 0$.

Згідно з теоремою 2.5 і твердженням 2.4 можемо записати

$$\begin{aligned}&\bigl[\mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), \mathcal{G}_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \bigl[H_{+}^{\sigma_0+2b\varkappa_k,(\sigma_0+2b\varkappa_k)/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1+2b\varkappa_k,(\sigma_1+2b\varkappa_k)/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} H_{+}^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}(\Omega) = \mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)\end{aligned}$$

і

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega,S),\mathcal{H}_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega,S)]_{\psi}\\
=&\bigoplus_{j=1}^{N}\bigl[H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega),H_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_{\psi}\\
&\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}\bigl[H_{+}^{\sigma_0-l_j-1/2,(\sigma_0-l_j-1/2)/(2b)}(S),H_{+}^{\sigma_1-l_j-1/2,(\sigma_1-l_j-1/2)/(2b)}(S)\bigr]_{\psi}\\
=&\bigl(H_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)\bigr)^{N}\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}H_{+}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(S)\\
=&\mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega,S).
\end{aligned}
$$

Ці рівності просторів правильні з точністю до еквівалентності норм. Таким чином ізоморфізм (3.51) дає (3.45). Цей ізоморфізм продовженням за неперервністю відображення (3.44) оскільки множина $\bigl(C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})\bigr)^{N}$ є щільною у просторі $\mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$. □

Доведення теореми 3.8. Спочатку покажемо, що з умови (3.48) цієї теореми випливає правильність імплікації

$$
u\in\mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\;\Rightarrow\;u\in\mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)\tag{3.52}
$$

для кожного цілого $\lambda\geq 1$, такого що $\sigma-\lambda+1>\sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi\subset\omega\cup\pi_1$. Для χ існує функція $\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta\subset\omega\cup\pi_1$ і $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи диференціальний оператор (A,B) з оператором множення на χ, можемо записати

$$
\begin{aligned}
(A,B)(\chi u)&=(A,B)(\chi\eta u)=\chi\,(A,B)(\eta u)+(A',B')(\eta u)\\
&=\chi\,(A,B)u+(A',B')(\eta u)=\chi\,(f,g)+(A',B')(\eta u).
\end{aligned}\tag{3.53}
$$

Тут

$$
A':=(A'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^{N},\quad\text{і}\quad B':=\bigl(B'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)\bigr)_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,N}}
$$

– матричні диференціальні оператори з компонентами

$$A'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2b\varkappa_k-1} a^{\alpha,\beta}_{j,k,1}(x,t)\,D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}, \tag{3.54}$$

$$B'_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) :=$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|+2b\beta\leq l_j+2b\varkappa_k-1} b^{\alpha,\beta}_{j,k,1}(x,t)\,D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k-1\geq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j+2b\varkappa_k-1<0, \end{cases} \tag{3.55}$$

де всі $a^{\alpha,\beta}_{j,k,1}\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $b^{\alpha,\beta}_{j,k,1}\in C^{\infty}(\overline{S})$. Цей оператор неперервно діє у парі просторів

$$(A',B'):\,\mathcal{G}^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)\to\mathcal{H}^{s+1,(s+1)/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S) \tag{3.56}$$

для кожного $s>\sigma_0-1$. У випадку, коли $\varphi\equiv 1$ і другі індекси не є напівцілими, це зразу слідує з (3.54), (3.55), леми 2.1 і відомих властивостей анізотропного простору Соболєва $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ (див, наприклад, [41, гл. I, лема 4, та гл. II, теореми 3 і 7]). Обмеженість оператора (3.56) у загальній ситуації зразу випливає з цього випадку за допомогою твердження 2.4 та інтерполяційної теореми 2.5.

З умови (3.48) маємо включення

$$\chi\,(f,g)\in\mathcal{H}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S).$$

Крім того, згідно (3.56) з $s:=\sigma-\lambda$, має місце імплікація

$$u\in\mathcal{G}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$$
$$\Rightarrow\ (A',B')(\eta u)\in\mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S).$$

Тому, скориставшись (3.53) і наслідком 3.3 можемо записати

$$u\in\mathcal{G}^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$$
$$\Rightarrow\ (A,B)(\chi u)\in\mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}_{+}(\Omega,S)$$
$$\Rightarrow\ \chi u\in\mathcal{G}^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}_{+}(\Omega).$$

Відмітимо, що тут наслідок 3.3 застосовний, оскільки $\chi u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми, і $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$. Тим самим, імплікація (3.52) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ.

Використаємо цю імплікацію для доведення включення $u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1)$. Розглянемо окремо випадки $\sigma \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma \in \mathbb{Z}$.

Нехай спочатку $\sigma \notin \mathbb{Z}$. У цьому випадку існує ціле число $\lambda_0 \geq 1$ таке, що

$$\sigma - \lambda_0 < \sigma_0 < \sigma - \lambda_0 + 1. \tag{3.57}$$

Скориставшись імплікацією (3.52) послідовно для значень $\lambda := \lambda_0$, $\lambda := \lambda_0 - 1$,..., $\lambda := 1$, виводимо необхідне включення слідуючим чином:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) &\subset \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0,(\sigma-\lambda_0)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \\ &\Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-\lambda_0+1,(\sigma-\lambda_0+1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \\ &\Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \end{aligned}$$

Відмітимо, що $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми.

Нехай тепер $\sigma \in \mathbb{Z}$. У цьому випадку не існує цілого числа λ_0, що задовольняє (3.57). Але, оскільки $\sigma - 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma - 1/2 > \sigma_0$, то, як довели у попередньому абзаці, правильне включення

$$u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1).$$

Звідси, скориставшись імплікацією (3.52) з $\lambda := 1$, виводимо потрібне включення, а саме:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1/2,(\sigma-1/2)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) &\subset \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-1,(\sigma-1)/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1) \\ &\Rightarrow\ u \in \mathcal{G}_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\omega,\pi_1). \end{aligned}$$

$\square$

Доведення теореми 3.9. Виберемо довільним чином точку $M \in \omega \cup \pi_1$. Нехай функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняє наступні умови: $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$ і $\chi = 1$ в деякому околі $V(M) \subseteq \overline{\Omega}$ точки M. Згідно з теоремою 3.8 маємо включення $\chi u \in \mathcal{G}_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$, де $\sigma = p + b + n/2 - 2b\varkappa_k$. Це включення означає, що $\chi u_k \in H_+^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\Omega)$, де $\sigma = p + b + n/2$. Отже, існує функція $w \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ така, що $w = \chi u_k = u_k$ на множині $V(M)$. Згідно з лемою 2.3(i), кожна узагальнена частинна похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x,t)$, де $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$, є неперервною на $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким чином, похідна $D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)$ є неперервною в околі $V(M)$ точки M. Оскільки точка $M \in \omega \cup \pi_1$ є довільною, то ця похідна є неперервною на $\omega \cup \pi_1$.

$\square$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено характер розв'язності лінійних параболічних початково–крайових задач з нульовими початковими даними Коші та властивості регулярності їх узагальнених розв'язків у гільбертових анізотропних просторах Хермандера. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь, а також систем рівнянь, параболічних за Петровським.

Основні результати третього розділу.

1. Встановлено теореми про коректну розв'язність у просторах Хермандера лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами, а саме, доведено, що оператори, породжені цими задачами, здійснюють ізоморфізми між відповідними анізотропними просторами Хермандера.
2. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.
3. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків цих задач.
4. Доведено теореми про ізоморфізми у просторах Хермандера, породжені крайовими задачами для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами, і встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків цих задач у просторах Хермандера.

Ці результати опубліковано у статтях [20, 21, 23, 71, 77, 79] та висвітлено у тезах конференцій [28–30, 81, 82].

РОЗДІЛ 4
ЗАГАЛЬНІ ПАРАБОЛІЧНІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

Цей розділ присвячено дослідженню загальних неоднорідних лінійних параболічних початково-крайових задач у введених у розділі 2 анізотропних просторах Хермандера $H^{s,s/(2b);\varphi}(\cdot)$. Буде доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. В якості застосування цих результатів встановимо теорему про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків задач. Також буде знайдено нові достатні умови того, що узагальнені розв'язки початково–крайових задач є класичними.

Окремо розглянемо випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь. Також окремо проведемо дослідження важливих з точки зору застосувань задач для параболічних рівнянь другого порядку.

4.1. Загальна параболічна початково-крайова задача у циліндрі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G\times(0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma\times(0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Розглянемо у циліндрі Ω таку параболічну початково–крайову задачу

$$\begin{aligned}&A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\\ &\equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)=f(x,t)\\ &\quad\text{для всіх}\quad x\in G\quad\text{і}\quad t\in(0,\tau);\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S\\ &\equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_S=g_j(x,t)\\ &\text{для всіх}\quad x\in\Gamma,\quad t\in(0,\tau)\quad\text{і}\quad j\in\{1,\dots,m\};\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}&\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}=h_k(x)\\ &\quad\text{для всіх}\quad x\in G\quad\text{і}\quad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Тут b, m і всі m_j є довільно задані цілі числа, такі, що

$$m\geq b\geq 1,\quad \varkappa:=m/b\in\mathbb{Z}\quad\text{і}\quad m_j\geq 0.$$

Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ і $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$, де $j \in \{1,\dots,m\}$ вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; тобто кожна

$$a^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}(\overline{\Omega}):=\bigl\{w\restriction\overline{\Omega}:\ w\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})\bigr\}$$

і кожна

$$b_j^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}(\overline{S}):=\bigl\{v\restriction\overline{S}:\ v\in C^{\infty}(\Gamma\times\mathbb{R})\bigr\}.$$

Використовуємо такі позначення $D_x^{\alpha}:=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k:=i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x =$

$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i це уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ є мультиіндекс, і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. У формулах (4.1) і (4.2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайова задача (4.1)–(4.3) називається параболічною у циліндрі Ω, якщо виконуються умови 3.1 і 3.2 (див. п. 3.1).

4.2. Основний результат. Теорема про ізоморфізми

У цьому підрозділі сформулюємо теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (4.1)–(4.3) у просторах Хермандера, введених у підрозділі 2.2.

Спочатку зауважимо, для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок u задачі (4.1)–(4.3), її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див., наприклад, [1, § 11] або [17, гл. 4, § 5]). Ці умови полягають в тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (4.1) та початкових умов (4.3), повинні задовольняти крайові умови (4.2) та співвідношення, що утворюються в результаті диференціювання крайових умов по змінній t. Для написання цих умов узгодження використаємо простори Соболєва.

Нехай

$$\sigma_0 := \max\{2m, m_1+1, \dots, m_m+1\}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m-1$ для всіх $j \in \{1,\dots,m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Пов'яжемо з параболічною задачею (4.1)–(4.3) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := \bigl(Au, B_1u, \dots, B_mu, u\restriction\overline{G}, \dots, (\partial_t^{\varkappa-1}u)\restriction\overline{G}\bigr), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (4.4)$$

Нехай $s \geq \sigma_0$. Відображення (4.4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\begin{aligned}\Lambda :\ H^{s,s/(2b)}(\Omega) \ \to\ \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b)} &:= H^{s-2m,(s-2m)/(2b)}(\Omega)\oplus \\ \oplus\bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b)}(S) &\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b}(G).\end{aligned} \quad (4.5)$$

Це безпосередньо випливає з [41, гл. I, лема 4 і гл. II, теореми 3 та 7]. Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$
\begin{gathered}
f \in H^{s-2m,(s-2m)/(2b)}(\Omega), \\
g_j \in H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b)}(S), \\
h_k \in H^{s-2bk-b}(G)
\end{gathered} \tag{4.6}
$$

$$
\text{для всіх} \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad \text{і} \quad k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}
$$

задачі за формулою

$$
(f, g_1, ..., g_m, h_0, ..., h_{\varkappa-1}) := \Lambda u
$$

за допомогою цього обмеженого оператора.

Умови узгодження на функції f, g_j і h_k природно виникають так. Згідно з [41, гл. II, теорема 7], означені за замиканням сліди $\partial_t^k u(\cdot, 0) \in H^{s-2bk-b}(G)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < s/(2b) - 1/2$ (і лише для таких k). Ці сліди можна виразити з рівняння (4.1) та початкових даних (4.3) через функції f і h_k у такий спосіб.

Умова параболічності 3.1 (див. п. 3.1) у випадку $\xi = 0$ і $p = 1$ означає, що коефіцієнт $a^{(0,\dots,0),\varkappa}(x,t) \neq 0$ для всіх $x \in \overline{G}$ і $t \in [0, \tau]$. Тому параболічне рівняння (3.1) можна розв'язати відносно $\partial_t^{\varkappa} u(x,t)$; а саме, запишемо

$$
\begin{gathered}
\partial_t^{\varkappa} u(x,t) = \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta \leq 2m, \\ \beta \leq \varkappa - 1}} a_0^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha} \partial_t^{\beta} u(x,t) \\
+ (a^{(0,\dots,0),\varkappa}(x,t))^{-1} f(x,t)
\end{gathered} \tag{4.7}
$$

для деяких функцій $a_0^{\alpha,\beta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. З умов (4.3), рівності (4.7) та рівностей, одержаних з неї шляхом диференціювання $k - \varkappa$ разів (при $\varkappa < k < s/(2b) - 1/2$, якщо такі цілі k існують) по змінній t отримуємо рекурентну формулу для слідів $\partial_t^k u(x,0)$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^k u(x,0) = h_k(x) \quad \text{якщо} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\},\\
&\partial_t^k u(x,0) = \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta\leq 2m,\\ \beta\leq\varkappa-1}} \sum_{q=0}^{k-\varkappa} \binom{k-\varkappa}{q} \partial_t^{k-\varkappa-q} a_0^{\alpha,\beta}(x,0)\, D_x^\alpha \partial_t^{\beta+q} u(x,0) + \\
&\qquad + \partial_t^{k-\varkappa}\big((a^{(0,\ldots,0),\varkappa}(x,0))^{-1} f(x,0)\big) \quad \text{якщо} \quad k \geq \varkappa
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$ такого, що $0 \leq k < s/(2b)-1/2$. Ці рівності виконуються для майже всіх $x \in G$.

Окрім того, згідно з [41, гл. II, теорема 7], для кожного $j \in \{1,\ldots,m\}$ означені за замиканням сліди $\partial_t^k g_j(\cdot,0) \in H^{s-m_j-1/2-2bk-b}(\Gamma)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < (s-m_j-1/2-b)/(2b)$ (і тільки таких k). Ми можемо виразити ці сліди через функцію $u(x,t)$ та її похідні по часу; а саме,

$$
\begin{aligned}
\partial_t^k g_j(x,0) &= \big(\partial_t^k B_j u(x,t)\big)|_{t=0}\\
&= \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \partial_t^{k-q} b_j^{\alpha,\beta}(x,0) D_x^\alpha \partial_t^{\beta+q} u(x,0)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

для майже всіх $x \in \Gamma$. Тут всі функції $u(x,0)$, $\partial_t u(x,0)$,..., $\partial_t^{[m_j/(2b)]+k} u(x,0)$ змінної $x \in G$ виражаються через функції $f(x,t)$ і $h_k(x)$ за рекурентною формулою (4.8). Тут і нижче вираз $[a]$ позначає цілу частину числа a.

Підставляючи (4.8) у праву частину формули (4.9), ми отримаємо умови узгодження

$$
\begin{gathered}
\partial_t^k g_j \restriction \Gamma = B_{j,k}[v_0,\ldots,v_{[m_j/(2b)]+k}]\\
\text{з} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad 0 \leq k < \frac{s-m_j-1/2-b}{2b} \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,m\}.
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

Тут функції v_0, ..., $v_{[m_j/(2b)]+k}$ для зазначених j і k означені на G за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} & v_k(x) := h_k(x) \quad \text{якщо} \quad k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}, \\ & v_k(x) := \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta \le 2m, \\ \beta \le \varkappa - 1}} \sum_{q=0}^{k-\varkappa} \binom{k-\varkappa}{q} \partial_t^{k-\varkappa-q} a_0^{\alpha,\beta}(x,0)\, D_x^\alpha v_{\beta+q}(x) + \\ & \qquad + \partial_t^{k-\varkappa}\bigl((a^{(0,\ldots,0),\varkappa}(x,0))^{-1} f(x,0)\bigr) \quad \text{якщо} \quad k \ge \varkappa; \end{aligned} \tag{4.11}$$

(ці співвідношення виконуються для майже всіх $x \in G$) і ми поклали

$$B_{j,k}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+k}] = \sum_{|\alpha|+2b\beta \le m_j} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \partial_t^{k-q} b_j^{\alpha,\beta}(x,0) D_x^\alpha v_{\beta+q}(x)$$

для майже всіх $x \in \Gamma$. Тут розглядаємо функції $D_x^\alpha v_{\beta+q}(x)$ змінної $x \in \Gamma$ як сліди функцій $D_x^\alpha v_{\beta+q} \in H^{s-b-2b(\beta+q)-|\alpha|}(G)$ на Γ. Відмітимо, що

$$v_k \in H^{s-b-2bk}(G) \quad \text{для кожного} \quad k \in \mathbb{Z} \cap [0, s/(2b) - 1/2) \tag{4.12}$$

завдяки (4.6). Таким чином,

$$B_{j,k}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+k}] \in H^{s-m_j-2bk-b-1/2}(\Gamma)$$

згідно з (4.12) і $s - m_j - 2bk - b - 1/2 > 0$. Отже, умови узгодження (4.10) є коректно поставленими.

Зауважимо, якщо $s \le \min\{m_j\} + b + 1/2$, то умови узгодження у задачі відсутні.

Покладемо

$$E := \{\sigma_0 + r - 1/2 : 1 \le r \in \mathbb{Z}\}.$$

Зауважимо, що E – це множина всіх можливих розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.10) в залежності від $s \ge \sigma_0$.

Основний результат для параболічної задачі (4.1)–(4.3) полягає в тому, що лінійне відображення (4.4) продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера. Вкажемо ці простори. Виберемо довільно дійсне число $s > \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ або виберемо $s = \sigma_0$ і $\varphi \equiv 1$. Візьмемо $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму; іншими словами, $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ виступає як простір розв'язків u задачі. Для введення другого простору дії ізоморфізму розглянемо гільбертів простір

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\
&H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \\
&\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(G).
\end{aligned}$$

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.5). Другий простір дії ізоморфізму вкладений у $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Будемо позначати його $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Дамо означення цього простору окремо для випадку $s \notin E$ і для випадку $s \in E$.

Нехай спочатку $s \notin E$. За означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій

$$F = \big(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}\big) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi},$$

які задовольняють умови узгодження (4.10). Як вже зазначалось раніше, ці умови є коректно поставленими у випадку просторів Соболєва, зокрема, для кожного $F \in \mathcal{H}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$ (або $\varepsilon = 0$, якщо $s = \sigma_0$ і $\varphi \equiv 1$). Отже, вони також є коректно поставленими для кожного $F \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ завдяки неперервному вкладанню

$$\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}. \tag{4.13}$$

Останнє безпосередньо випливає з (2.11) та (2.12). Таким чином, наше означення є коректним.

Наділимо лінійний простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Дійсно, якщо число $\varepsilon > 0$ достатньо мале, то

$$\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} = \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \cap \mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}.$$

Тут простір $\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}$ є повним, оскільки диференціальні оператори та сліди операторів, що використовуються в умовах узгодження, є обмеженими у відповідних парах просторів Соболєва. Тому простір, що стоїть у правій частині цієї рівності є повним відносно суми норм у просторах-компонентах перетину; ця сума еквівалентна нормі у $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ на підставі (4.13). Таким чином, простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ є повним (відносно останньої норми).

Якщо $s \in E$, то означаємо гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\ &\bigl[\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Про таку інтерполяцію йшлося у п. 2.4.

Гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, означений формулою (4.14) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним у $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Це буде показано у зауваженні 4.1 у п. 4.4 зразу після доведення теореми 4.1.

Теорема 4.1. *Для довільного дійсного числа $s > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (4.4) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda : \, H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.15}$$

Ця теорема є відомою у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$. А саме, вона міститься у результаті М. С. Аграновіча і М. І. Вішіка [1, теорема 12.1] у випадку $s/(2b) \in \mathbb{Z}$, який покривається результатом М. В. Житарашу [7, теорема 9.1]. Відмітимо, що ці результати включають граничний випадок $s = \sigma_0$. У загальній ситуації $\varphi \in \mathcal{M}$ виведемо теорему 4.1 із соболєвського випадку (результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1]) шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Це буде зроблено у п. 4.4.

Відмітимо, що необхідність означати простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ окремо для випадку $s \in E$ обумовлена наступним: якщо означити цей простір для $s \in E$ у той же спосіб, що і для $s \notin E$, то ізоморфізм (4.15) порушується щонайменше для $\varphi \equiv 1$. Це випливає з результату Солоннікова [44, § 6], див. також [68, зауваження 6.4].

4.3. Регулярність узагальнених розв'язків

Як випливає з результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1], для кожної функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{4.16}$$

параболічна задача (4.1)–(4.3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (4.16).

Обговоримо тепер властивості регулярності цього розв'язку у просторах Хермандера. Наступний результат випливає з теореми 4.1.

Наслідок 4.1. *Припустимо, що* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.1)–(4.3), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

для деяких $s > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

Тепер сформулюємо локальний аналог цього результату. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, такою що $U \cap \Gamma = \varnothing$. Нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$. Введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s;\varphi}(G)$ з $\gamma = 1/(2b)$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Аналогічно, позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$, де $s>0$, лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v\in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v\mapsto\|\chi v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція. Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$, де $s\geq 0$, лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w\in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi\in C^\infty(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\pi_3$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$w\mapsto\|\chi w\|_{H^{s;\varphi}(G)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Теорема 4.2. *Нехай $u\in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.1)–(4.3) *з правими частинами* (4.16)*. Припустимо, що*

$$f\in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{4.17}$$

$$g_j\in H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)\quad \textit{для всіх}\quad j\in\{1,\dots,m\}, \tag{4.18}$$

$$h_k\in H^{\sigma-2bk-b;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)\quad \textit{для всіх}\quad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}, \tag{4.19}$$

для деяких $\sigma>\sigma_0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тоді $u\in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

У випадку, коли $\pi_1=\varnothing$, теоерма 4.2 стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Якщо $\pi_3 = \varnothing$ то ця теорема стверджує про підвищення регулярності розв'язку при $t > 0$ і є наслідком теореми 3.2. Якщо $\pi_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma$, $\pi_2 = S$, $\pi_3 = G$, то підвищення регулярності розв'язку відбувається на множині $\overline{\Omega} \setminus \Gamma$.

Відмітимо, що ця теорема є новою і у випадку анізотропних просторів Соболєва ($\varphi \equiv 1$).

У наступному підрозділі виведемо теорему 4.2 з теореми 4.1.

4.4. Доведення теорем підрозділів 4.2 і 4.3

Для доведення теореми 4.1 нам знадобиться версія інтерполяційної теореми 2.6 для просторів $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, які зустрічаються у ізоморфізмі (4.15). З означення цих просторів випливає, що інтерполяційна формула для них потрібна лише у випадку, коли $s \notin E$. Тому розглянемо такі інтервали

$$J_0 = (\sigma_0, \sigma_0 + 1/2), \quad J_r = (\sigma_0 + r - 1/2, \sigma_0 + r + 1/2), \text{ з } 1 \leq r \in \mathbb{Z}$$

зміни величини s.

Лема 4.1. *Нехай $1 \leq r \in \mathbb{Z}$. Припустимо, що дійсні числа $s_0, s, s_1 \in J_{r-1}$ задовольняють нерівності $s_0 < s < s_1$ і що $\varphi \in \mathcal{M}$. Визначимо інтерполяційний параметр $\psi \in \mathcal{B}$ формулою* (2.27)*. Тоді правильна така рівність просторів*

$$\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} = \left[\mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \mathcal{Q}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\right]_\psi \tag{4.20}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Нагадаємо, що $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ і $\mathcal{Q}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$ з $\lambda \in \{0, 1\}$ є підпросторами гільбертових просторів $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ і $\mathcal{H}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$ відповідно. Згідно з твердженнями 2.4, 2.6 і теоремою 2.6 отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \mathcal{H}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\right]_\psi \\
&= \Big[H^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s_0-m_j-1/2,(s_0-m_j-1/2)/(2b)}(S) \\
&\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s_0-2bk-b}(G),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& H^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s_1-m_j-1/2,(s_1-m_j-1/2)/(2b)}(S) \\
& \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s_1-2bk-b}(G)\big]_{\psi} \\
& = \big[H^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}(\Omega), H^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}(\Omega)\big]_{\psi} \\
& \quad \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \big[H^{s_0-m_j-1/2,\,(s_0-m_j-1/2)/(2b)}(S), H^{s_1-m_j-1/2,\,(s_1-m_j-1/2)/(2b)}(S)\big]_{\psi} \\
& \quad \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} \big[H^{s_0-2bk-b}(G), H^{s_1-2bk-b}(G)\big]_{\psi} \\
& = H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \\
& \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(G) \\
& = \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\big[\mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \mathcal{H}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} = \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \tag{4.21}
$$

з еквівалентністю норм.

Виведемо необхідну формулу (4.20) з (4.21) за допомогою твердження 2.3. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $\mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$ таке, що P є проектором простору $\mathcal{H}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$ на його підпростір $\mathcal{Q}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$ для кожного $\lambda \in \{0,\, 1\}$. Якщо у нас є це відображення, ми отримаємо

$$
\begin{aligned}
& \big[\mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \mathcal{Q}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} \\
& = \big[\mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \mathcal{H}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} \cap \mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)} \\
& = \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \cap \mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}
\end{aligned}
$$

$$= \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

завдяки твердженню 2.3, формулі (4.21) та умовам $s_0, s \in J_{r-1}$ і $s_0 < s$. Зауважимо, що з цих умов випливає остання рівність, оскільки елементи просторів $\mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$ і $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ задовольняють одні і ті самі умови узгодження і оскільки $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ неперервно вкладений у $\mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$.

Побудуємо вище згадане відображення P за допомогою теореми 2.7. Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ покладемо

$$q_{r,j} := \left[\frac{\sigma_0 + r - m_j - 1 - b}{2b}\right] = \left[\frac{s - m_j - 1/2 - b}{2b}\right]$$

(тут $[a]$ означає цілу частину числа a). Для даної вектор–функції

$$F := \bigl(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}\bigr) \in \mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$$

покладемо

$$g_j^* := g_j \quad \text{якщо} \quad q_{r,j} < 0;$$

$$g_j^* := g_j + T(w_{j,0}, \ldots, w_{j,q_{r,j}}) \quad \text{якщо} \quad q_{r,j} \geq 0$$

для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тут

$$w_{j,0} = B_{j,0}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]}] - g_j \restriction \Gamma,$$

$$\ldots$$

$$w_{j,q_{r,j}} = B_{j,q_{r,j}}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+q_{r,j}}] - \partial_t^{q_{r,j}} g_j \restriction \Gamma,$$

функції

$$v_k \in H^{s_0-b-2bk}(G) \quad \text{з} \quad k = 0, \ldots, \max\{[m_j/(2b)] + q_{r,j}\}$$

визначені рекурентною формулою (4.11), і відображення T взяте з теореми 2.7.

Лінійне відображення $P : F \mapsto F^*$ з

$$F^* := (f, g_1^*, ..., g_m^*, h_0, ..., h_{\varkappa-1}),$$

визначене на всіх векторах $F \in \mathcal{H}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$, є шуканим. Дійсно, його звуження на кожний простір $\mathcal{H}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$ з $\lambda \in \{0,\, 1\}$, є обмеженим оператором на цьому просторі. Це безпосередньо випливає з теореми 2.7, в якій взяли $s := s_\lambda - m_j - 1/2$ для кожного $j \in \{1, \dots, m\}$. Більш того, якщо $F \in \mathcal{Q}^{s_\lambda-2m,(s_\lambda-2m)/(2b)}$, то $PF = F$ завдяки умовам узгодження (4.10). $\square$

Нам також будуть потрібні такі дві леми, якими скористаємось при доведенні теорем 4.1 і 4.2 у випадку $s \in E$.

Лема 4.2. *Нехай дійсні числа s і ε такі, що $s > \varepsilon > 0$, і нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильна рівність просторів*

$$H^{s,s/(2b);\varphi}(V) = \bigl[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/(2b);\varphi}(V), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/(2b);\varphi}(V)\bigr]_{1/2} \tag{4.22}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $V \in \{\Omega, S\}$.

Доведення. Виберемо дійсне $\delta > 0$ таке, що $s - \varepsilon - \delta > 0$. Згідно з теоремою 2.6 маємо рівності

$$H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/(2b);\varphi}(V) = \bigl[H^{s-\varepsilon-\delta,(s-\varepsilon-\delta)/(2b)}(V), H^{s+\varepsilon+\delta,(s+\varepsilon+\delta)/(2b)}(V)\bigr]_{\alpha}$$

і

$$H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/(2b);\varphi}(V) = \bigl[H^{s-\varepsilon-\delta,(s-\varepsilon-\delta)/(2b)}(V), H^{s+\varepsilon+\delta,(s+\varepsilon+\delta)/(2b)}(V)\bigr]_{\beta}.$$

Тут інтерполяційні параметри α і β визначені формулами

$$\alpha(r) := r^{\delta/(2\varepsilon+2\delta)}\varphi(r^{1/(2\varepsilon+2\delta)}),$$
$$\beta(r) := r^{(2\varepsilon+\delta)/(2\varepsilon+2\delta)}\varphi(r^{1/(2\varepsilon+2\delta)}) \quad \text{якщо} \quad r \geq 1$$

і $\alpha(r) = \beta(r) := 1$ якщо $0 < r < 1$. Тому, завдяки твердженню 2.5 і теоремі 2.6, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\bigl[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/(2b);\varphi}(V), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/(2b);\varphi}(V)\bigr]_{1/2}\\
&= \Bigl[\bigl[H^{s-\varepsilon-\delta,(s-\varepsilon-\delta)/(2b)}(V), H^{s+\varepsilon+\delta,(s+\varepsilon+\delta)/(2b)}(V)\bigr]_{\alpha},\\
&\qquad \bigl[H^{s-\varepsilon-\delta,(s-\varepsilon-\delta)/(2b)}(V), H^{s+\varepsilon+\delta,(s+\varepsilon+\delta)/(2b)}(V)\bigr]_{\beta}\Bigr]_{1/2}\\
&= \bigl[H^{s-\varepsilon-\delta,(s-\varepsilon-\delta)/(2b)}(V), H^{s+\varepsilon+\delta,(s+\varepsilon+\delta)/(2b)}(V)\bigr]_{\omega}\\
&= H^{s,s/(2b);\varphi}(V).
\end{aligned}
$$

Тут інтерполяційний параметр ω визначений за формулами

$$
\omega(r) := \alpha(r)(\beta(r)/\alpha(r))^{1/2} = r^{1/2}\varphi(r^{1/(2\varepsilon+2\delta)}) \quad \text{якщо} \quad r \geq 1
$$

і $\omega(r) := 1$ якщо $0 < r < 1$. Таким чином, (4.22) доведено. □

Лема 4.3. *Нехай дійсні числа s і ε такі, що $s-\varepsilon > \sigma_0$, і нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильна рівність просторів*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}\\
&= \bigl[\mathcal{H}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{H}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Рівність (4.23) випливає з твердження 2.4, формули (4.22) та її аналога для ізотропних просторів $H^{s;\varphi}(G)$ (див. [101, лема 4.3]). Дійсно,

$$
\begin{aligned}
&\bigl[\mathcal{H}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{H}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}\\
&= \bigl[H^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2-\varepsilon,(s-m_j-1/2-\varepsilon)/(2b);\varphi}(S)\\
&\qquad \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b-\varepsilon;\varphi}(G),
\end{aligned}
$$

$$H^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}H^{s-m_j-1/2+\varepsilon,(s-m_j-1/2+\varepsilon)/(2b);\varphi}(S)$$

$$\oplus\bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1}H^{s-2bk-b+\varepsilon;\varphi}(G)\big]_{1/2}$$

$$=\big[H^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega),H^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega)\big]_{1/2}$$

$$\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}\big[H^{s-m_j-1/2-\varepsilon,\,(s-m_j-1/2-\varepsilon)/(2b);\varphi}(S),H^{s-m_j-1/2+\varepsilon,\,(s-m_j-1/2+\varepsilon)/(2b);\varphi}(S)\big]_{1/2}$$

$$\oplus\bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1}\big[H^{s-2bk-b-\varepsilon;\varphi}(G),H^{s-2bk-b+\varepsilon;\varphi}(G)\big]_{1/2}$$

$$=H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S)$$

$$\oplus\bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1}H^{s-2bk-b;\varphi}(G)=\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.$$

Таким чином, (4.23) доведено. □

Тепер доведемо теореми 4.1 і 4.2.

Доведення теореми 4.1. Як зазначалось у попередньому підрозділі, теорему 4.1 виведемо із соболєвського випадку $\varphi\equiv 1$, а саме, з результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1]. У згаданій роботі [7] простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$ означений дещо в інший, ніж у п. 4.2 спосіб. А саме, використовується інша форма умов узгодження (4.10). Тому покажемо еквівалентність цих означень простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$ (з точністю до еквівалентності норм). Спочатку зробимо це для $s\geq\sigma_0$ таких, що $s+1/2\notin\mathbb{Z}$ і $s/(2b)+1/2\notin\mathbb{Z}$. Цього достатньо для доведення теореми 4.1. Еквівалентність означень для решти $s\geq\sigma_0$ буде випливати безпосередньо з ізоморфізму (4.15).

Запишемо умови узгодження вектора правих частин задачі, що використовуються для означення простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$ в роботі [7] (див., наприклад, [1, §11] або [62, п.5.1.1, означення 5.2]). Нехай $s \geq \sigma_0$, $s+1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $s/(2b)+1/2 \notin \mathbb{Z}$. Вектор-функція

$$F := \bigl(f, g_1, ..., g_m, h_0, ..., h_{\varkappa-1}\bigr) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$$

задовольняє умови узгодження правих частин задачі (4.1) – (4.3), якщо для F існує функція $v = v(x,t)$ класу $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ така, що

$$f - Av \in H_{+}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}(\Omega), \tag{4.24}$$

$$g_j - B_j v \in H_{+}^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b)}(S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\dots,m\}, \tag{4.25}$$

$$h_k = \partial_t^k v\big|_{t=0} \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{4.26}$$

Згідно з лемою 2.1 перепишемо (4.24) і (4.25) у вигляді

$$\begin{aligned} &\partial_t^k (f - Av)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in G \\ &\text{для всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \leq k < (s-2m)/2b - 1/2. \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t^k (g_j - B_j v)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Gamma \\ &\text{для всіх} \quad j \in \{1,\dots,m\} \\ &\text{і всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \leq k < (s-m_j-1/2-b)/2b. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Тепер покажемо еквівалентність умов узгодження, зазначених вище і умов узгодження (4.10). Нехай спочатку існує $v \in H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ така, що правильні рівності (4.26), (4.27) і (4.28). Рівності (4.26) і (4.27) являють собою еквівалентну форму запису рівностей (4.11), де

$$\begin{aligned} v_k(x) = &\partial_t^k v(x,0) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in G \\ &\text{для всіх} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{таких, що} \quad 0 \leq k < s/(2b) - 1/2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Тому з (4.28) випливає (4.10).

Навпаки, нехай правильні рівності (4.10). Тоді рівності (4.11) визначають вектор-функцію

$$V=(v_0,...,v_r)\in\bigoplus_{k=0}^{r}H^{s-2bk-b}(G),$$

де $r=[s/(2b)-1/2]$. Для V існує (див. [41, гл. 2, теорема 10]) така функція $v\in H^{s,s/(2b)}(\Omega)$, що правильно (4.29). З означення V, (4.29) та зазначеної вище еквівалентності (4.11) і ((4.26), (4.27)) випливає, що ця функція v задовольняє рівності (4.26) і (4.27). Також функція v задовольняє (4.28), оскільки правильно (4.10). Отже, еквівалентність відповідних умов узгодженння, а значить відповідних означень простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$ для зазначених вище s встановлена.

Нехай $s>\sigma_0$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Спочатку розглянемо випадок $s\notin E$. Тоді $s\in J_{r-1}$ для певного цілого r. Виберемо числа $s_0,s_1\in J_{r-1}$ так, що $s_0/(2b)+1/2\notin\mathbb{Z}$, $s_1/(2b)+1/2\notin\mathbb{Z}$ і $s_0<s<s_1$. Згідно з результатом М. В. Житарашу [7, теорема 9.1], відображення (4.4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$\Lambda:\ H^{s_j,s_j/(2b)}(\Omega)\leftrightarrow\mathcal{Q}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)}\quad\text{для кожного}\quad j\in\{0,1\}. \tag{4.30}$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром (2.27). Тоді звуження оператора (4.30) з $j=0$ на простір

$$\bigl[H^{s_0,s_0/(2b)}(\Omega),H^{s_1,s_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_\psi=H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$$

є ізоморфізмом

$$\begin{aligned}\Lambda:\ H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)\leftrightarrow&\bigl[\mathcal{Q}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)},\mathcal{Q}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\bigr]_\psi\\&=\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Тут рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм завдяки теоремі 2.6 і лемі 4.1. Оператор (4.31) є продовженням за неперервністю відображення (4.4) оскільки множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ є щільною у $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$. Отже, у розглядуваному випадку теорема 4.1 доведена.

Розглянемо тепер випадок $s \in E$. Виберемо довільно число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Оскільки $s \pm \varepsilon \notin E$ і $s - \varepsilon > \sigma_0$, то маємо ізоморфізми

$$\Lambda : H^{s\pm\varepsilon,(s\pm\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s\pm\varepsilon-2m,(s\pm\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.32}$$

З них випливає, що відображення (4.4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$\begin{aligned}\Lambda :&\big[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega)\big]_{1/2}\\ &\leftrightarrow \big[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2m,(s-\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2m,(s+\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}\big]_{1/2}\\ &= \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Нагадаємо, що остання рівність є означенням простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Для завершення доведення залишилось у (4.33) застосувати лему 4.2 для $V = \Omega$. $\square$

Зауваження 4.1. Простір, означений формулою (4.14) не залежить від вибору числа $\varepsilon \in (0, 1/2)$ з точністю до еквівалентності норм. Дійсно, нехай $s \in E$; тоді, згідно з теоремою 4.1, маємо ізоморфізм

$$\Lambda : H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \big[\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\big]_{1/2}$$

для кожного $0 < \varepsilon < 1/2$. Це означає необхідну незалежність.

Доведення теореми 4.2. Спочатку покажемо, що з умов (4.17)–(4.19) цієї теореми випливає правильність імплікації

$$u \in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1) \;\Rightarrow\; u \in H^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1) \tag{4.34}$$

для кожного цілого $\lambda \geq 1$, такого що $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$.

Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Для χ існує функція $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\eta \subset \omega \cup \pi_1$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставляючи диференціальні оператори A, B_j і ∂_t^k з оператором множення на χ, можемо записати

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi u) &= \Lambda(\chi\eta u) = \chi\,\Lambda(\eta u) + \Lambda'(\eta u)\\ &= \chi\,\Lambda u + \Lambda'(\eta u) = \chi\,(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) + \Lambda'(\eta u).\end{aligned} \tag{4.35}$$

Тут

$$\Lambda' := (A', B_1', \ldots, B_m', C_0', \ldots C_{\varkappa-1}')$$

це диференціальний оператор з компонентами

$$A'(x,t,D_x,\partial_t) = \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m-1} a_1^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha \partial_t^\beta, \tag{4.36}$$

$$B_j'(x,t,D_x,\partial_t) = \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j-1} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^\alpha \partial_t^\beta, \quad j = 1,\ldots,m \tag{4.37}$$

і

$$C_0' = 0, \quad C_k'(x,t,\partial_t) = \sum_{l=0}^{k-1} c_{l,k}(x,t)\,\partial_t^l, \quad k = 1,\ldots,\varkappa-1, \tag{4.38}$$

де всі $a_1^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $b_{j,1}^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S})$ і $c_{l,k} \in C^\infty(\overline{G})$. Цей оператор неперервно діє у парі просторів

$$\Lambda' :\; H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}^{s+1-2m,(s+1-2m)/(2b);\varphi} \tag{4.39}$$

для кожного $s > \sigma_0 - 1$. У випадку, коли $\varphi \equiv 1$ це зразу слідує з (4.36), (4.37), (4.38) і відомих властивостей анізотропного простору Соболєва $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ (див, наприклад, [41, гл. I, лема 4, та гл. II, теореми 3 і 7]). Обмеженість оператора (4.39) у загальній ситуації зразу випливає з цього випадку за допомогою інтерполяційної теореми 2.6 і твердження 2.6 з $W = G$.

З умов (4.17), (4.18) і (4.19) отримаємо включення

$$\chi\,(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{H}^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}.$$

Крім того, згідно (4.39) з $s := \sigma - \lambda$, має місце імплікація

$$\begin{aligned} &u \in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1) \\ &\quad \Rightarrow\ \Lambda'(\eta u) \in \mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\varphi}. \end{aligned}$$

Тому, скориставшись (4.35), можемо записати

$$\begin{aligned} &u \in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1) \\ &\quad \Rightarrow\ \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\varphi}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Тепер покажемо, що для довільного $s > \sigma_0$ з включення $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ і зробленого вибору функції χ випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.41}$$

Попередньо відмітимо, що оскільки $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\chi, \Gamma) > 0$, то $\chi = 0$ в деякому околі Γ. Звідси маємо, що

$$\Lambda(\chi u) = 0 \tag{4.42}$$

в цьому околі Γ. Розглянемо окремо випадки $s \notin E$ і $s \in E$.

Нехай $s \notin E$. Рівність (4.42) означає, що для вектор–функції $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ виконуються умови узгодження (4.10), і отже, правильне включення (4.41).

Нехай $s \in E$. Виберемо функцію $\chi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\chi_1 = 0$ в деякому околі Γ. Зі сказаного у попередньому абзаці випливає, що відображення $M_{\chi_1} : F \mapsto \chi_1 F$ визначає обмежені оператори

$$M_{\chi_1} : \mathcal{H}^{s-2m\pm\varepsilon,(s-2m\pm\varepsilon)/(2b);\varphi} \mapsto \mathcal{Q}^{s-2m\pm\varepsilon,(s-2m\pm\varepsilon)/(2b);\varphi} \tag{4.43}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Застосуємо до (4.43) інтерполяцію з числовим параметром $1/2$ і отримаємо ще один обмежений оператор

$$\begin{aligned} M_{\chi_1} : \bigl[\mathcal{H}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{H}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2} \to \\ \bigl[\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Тепер застосуємо у (4.44) інтерполяційну формулу (4.23) і означення (4.14) простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. В результаті отримаємо обмежений оператор

$$M_{\chi_1} : \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \mapsto \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.45}$$

Нехай $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Позначимо O_1 той окіл Γ, у якому $\Lambda(\chi u) = 0$. Нехай O_2 і O_3 такі околи Γ, що $O_3 \subset O_2 \subset O_1$, і $\overline{O_3} \subset O_2$, і $\overline{O_2} \subset O_1$. Виберемо функцію $\chi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\chi_1 = 0$ в O_3 і $\chi_1 = 1$ в $\overline{\Omega} \setminus O_2$. Тоді $\chi_1 \Lambda(\chi u) = \Lambda(\chi u)$. А з (4.45) випливає, що $\chi_1 \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Отже, правильне включення (4.41).

Тепер, скориставшись імплікацією (4.40), включенням (4.41) та наслідком 4.1, можемо записати

$$\begin{aligned} & u \in H^{\sigma-\lambda,(\sigma-\lambda)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1) \\ & \quad \Rightarrow\ \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{\sigma-\lambda+1-2m,(\sigma-\lambda+1-2m)/(2b);\varphi} \\ & \quad \Rightarrow\ \chi u \in H^{\sigma-\lambda+1,(\sigma-\lambda+1)/(2b);\varphi}(\Omega). \end{aligned}$$

Відмітимо, що тут наслідок 4.1 застосовний, оскільки $\chi u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми і $\sigma - \lambda + 1 > \sigma_0$. Тим самим, імплікація (4.34) доведена, якщо зважити на зроблений вибір функції χ.

Використаємо цю імплікацію для доведення включення $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$. Розглянемо окремо випадки $\sigma \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma \in \mathbb{Z}$.

Нехай спочатку $\sigma \notin \mathbb{Z}$. У цьому випадку існує ціле число $\lambda_0 \geq 1$ таке, що

$$\sigma - \lambda_0 < \sigma_0 < \sigma - \lambda_0 + 1. \tag{4.46}$$

Скориставшись імплікацією (4.34) послідовно для значень $\lambda := \lambda_0$, $\lambda := \lambda_0 - 1$,..., і $\lambda := 1$, виводимо необхідне включення слідуючим чином:

$$
\begin{aligned}
u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega) &\subset H^{\sigma-\lambda_0,(\sigma-\lambda_0)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) \\
&\Rightarrow\ u \in H^{\sigma-\lambda_0+1,(\sigma-\lambda_0+1)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) \\
&\Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ u \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1).
\end{aligned}
$$

Відмітимо, що $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ за умовою теореми.

Нехай тепер $\sigma \in \mathbb{Z}$. У цьому випадку не існує цілого числа λ_0, що задовольняє (4.46). Але, оскільки $\sigma - 1/4 \notin \mathbb{Z}$ і $\sigma - 1/4 > \sigma_0$, то, як довели у попередньому абзаці, правильне включення

$$
u \in H^{\sigma-1/4,(\sigma-1/4)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1).
$$

Звідси, скориставшись імплікацією (4.34) з $\lambda := 1$, виводимо потрібне включення, а саме:

$$
\begin{aligned}
u \in H^{\sigma-1/4,(\sigma-1/4)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) &\subset H^{\sigma-1,(\sigma-1)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1) \\
\Rightarrow\ u \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1).
\end{aligned}
$$

$\square$

4.5. Класичність узагальненого розв'язку

Актуальним є питання, за яких умов узагальнений розв'язок задачі (4.1)–(4.3) є класичним, тобто коли він в термінах класичних похідних і слідів функцій задовольняє рівняння у відкритому циліндрі, а на його бічній поверхні і основі – крайові і початкові умови відповідно. У роботах [10, 11, 17, 34, 45, 50] відповідь на це питання отримано у термінах приналежності правих частин задачі деяким просторам Гельдера або Соболєва. Зазначимо [52] (теорема 7.9.8), що неперервність у замкнутому циліндрі правої частини параболічного рівняння недостатня для класичності розв'язку мішаної задачі навіть у випадку однорідних крайових і початкових умов.

У цьому підрозділі ми встановимо нові достатні умови того, що узагальнені розв'язки загальної мішаної параболічної задачі є класичними. Ці умови буде сформульвано у термінах приналежності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Їх застосування дозволяє отримати більш тонкі достатні умови ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва.

Як зазначалось у п. 4.3, із результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1] випливає, що для кожної вектор–функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{4.47}$$

задача (4.1) – (4.3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (4.47).

Дамо означення класичного розв'язку цієї задачі. Позначимо

$$m_0 := \max\{m_1, \ldots, m_m\}.$$

Означення 4.1. Узагальнений розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ задачі (4.1) – (4.3) назвемо класичним, якщо $u \in C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$, всі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$ для яких $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq m_0$, є неперервними на $\Omega \cup S$, а всі узагальнені частинні похідні $\partial^k_t u$ для яких $0 \leq k \leq \varkappa - 1$, є неперервними на $\Omega \cup G$.

Тут, як звичайно, $C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$ – множина функцій, які є неперервно диференційовні на Ω разом з усіма своїми частинними похідними $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$, для яких $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq 2m$.

Зауважимо, що в означенні класичного розв'язку задачі (4.1) – (4.3) ми не вимагаємо його неперервності у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Теорема 4.3. *Покладемо*

$$\sigma_1 := 2m + b + n/2, \quad \sigma_2 := m_0 + b + n/2, \quad \sigma_3 := 2m - b + n/2.$$

Припустимо, що $\sigma_2 > \sigma_0$ *і* $\sigma_3 > \sigma_0$. *Нехай функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (4.1) – (4.3), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap \tag{4.48}$$
$$H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega,S) \cap H^{\sigma_3-2m,(\sigma_3-2m)/(2b);\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega,G),$$

$$g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S) \quad \text{для всіх } j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{4.49}$$

$$h_k \in H^{\sigma_3-2bk-b;\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G) \quad \text{для всіх } k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\} \tag{4.50}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1, φ_2 *і* $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{4.51}$$

Тоді $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (4.1) – (4.3).

Зауваження 4.2. Якщо сформулювати аналог теореми 4.3 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (4.48) – (4.50) при деяких $\sigma_1 > 2m+b+n/2$, $\sigma_2 > m_0+b+n/2$ і $\sigma_3 > 2m-b+n/2$.

Доведення теореми 4.3 спирається на теорему 4.2 про локальне підвищення регулярності розв'язку задачі (4.1) – (4.3) та лему 2.3, яка є версією теореми вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7].

Доведення теореми 4.3. Спочатку зазначимо, що твердження (i) леми 2.3 зберігає силу, якщо у ньому замінити $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ на $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ і $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\overline{\Omega}$.

Справді, з означення простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з леми 2.3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$.

Далі у доведенні будемо використорвувати лему 2.3(i) саме із зазначеною вище заміною $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ на $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ і $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\overline{\Omega}$.

Тепер покажемо, що $u \in C_{x,t}^{2m,2m/(2b)}(\Omega)$. З умов (4.48) – (4.50) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}(\Omega,\varnothing),\\
&g_j \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_1-m_j-1/2,(\sigma_1-m_j-1/2)/(2b);\varphi_1}(\varnothing) \quad \text{для всіх } j \in \{1,\ldots,m\},\\
&h_k \in \mathcal{D}'(G) = H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_1-2bk-b;\varphi_1}(\varnothing) \quad \text{для всіх } k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\}
\end{aligned}
$$

з $\sigma_1 := 2m + b + n/2 > \sigma_3 > \sigma_0$. З цих включень і теореми 4.2, де $\sigma := 2m + b + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{2m+b+n/2,\ (2m+b+n/2)/(2b);\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing). \tag{4.52}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини Ω. Знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $O(x_0) \subset \Omega$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\mathrm{supp}\,\chi \subset \Omega$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.52) випливає включення

$$\chi u \in H^{2m+b+n/2,\ (2m+b+n/2)/(2b);\ \varphi_1}(\Omega).$$

На підставі цього включення і леми 2.3(i), де $p := 2m$, маємо включення

$$D^\alpha_x \partial^\beta_t (\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \le |\alpha| + 2b\beta \le 2m.$$

З останніх включень випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$ з $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le 2m$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою Ω, то $u \in C^{2m, 2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$.

Подібним чином покажемо, що всі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$ для яких $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le m_0$, є неперервними на $\Omega \cup S$. З умов (4.48) – (4.50) маємо включення

$$\begin{aligned}
& f \in H^{\sigma_2 - 2m, (\sigma_2 - 2m)/(2b); \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S), \\
& g_j \in H^{\sigma_2 - m_j - 1/2, (\sigma_2 - m_j - 1/2)/(2b); \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S) \quad \text{для всіх } \ j \in \{1, \dots, m\}, \\
& h_k \in \mathcal{D}'(G) = H^{\sigma_2 - 2bk - b; \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\varnothing) \quad \text{для всіх } \ k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}
\end{aligned}$$

з $\sigma_2 := m_0 + b + n/2$. З цих включень і теореми 4.2, де $\sigma := m_0 + b + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{m_0+b+n/2,\ (m_0+b+n/2)/(2b);\ \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S). \tag{4.53}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $O(x_0) \subset \Omega \cup S$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup S$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.53) випливає включення

$$\chi u \in H^{m_0+b+n/2,\ (m_0+b+n/2)/(2b);\ \varphi_2}(\Omega).$$

На підставі цього включення і леми 2.3(i), де $p := m_0$, маємо включення

$$D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}(\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq m_0.$$

З останніх включень випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq m_0$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S$, то всі ці узагальнені частинні похідні неперервні на множині $\Omega \cup S$.

Нарешті, покажемо, що всі узагальнені частинні похідні $\partial_t^k u$ для яких $0 \leq k \leq \varkappa - 1$, є неперервними на $\Omega \cup G$. З умов (4.48) – (4.50) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3-2m,(\sigma_3-2m)/(2b);\varphi_3}(\Omega, G),\\
&g_j \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3-m_j-1/2,(\sigma_3-m_j-1/2)/(2b);\varphi_3}(\varnothing) \quad \text{для всіх} \ \ j \in \{1, \ldots, m\},\\
&h_k \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3-2bk-b;\varphi_3}(G) \quad \text{для всіх} \ \ k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}
\end{aligned}
$$

з $\sigma_3 := 2m - b + n/2$. З цих включень і теореми 4.2, де $\sigma := 2m - b + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\mathrm{loc}}^{2m-b+n/2,\ (2m-b+n/2)/(2b);\ \varphi_3}(\Omega, G). \tag{4.54}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup G$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $O(x_0) \subset \Omega \cup G$ і $\operatorname{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.54) випливає включення

$$\chi u \in H^{2m-b+n/2,\ (2m-b+n/2)/(2b);\ \varphi_3}(\Omega).$$

На підставі цього включення і леми 2.3(i), де $p := 2m-2b$, маємо включення

$$D_x^\alpha \partial_t^k (\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leq |\alpha| + 2bk \leq 2m - 2b.$$

З останніх включень при $|\alpha| = 0$ випливає, що всі узагальнені частинні похідні $\partial_t^k u$ з $0 \leq k \leq \varkappa - 1$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup G$, то всі ці узагальнені частинні похідні неперервні на множині $\Omega \cup G$.

$\square$

4.6. Загальна параболічна початково-крайова задача у прямокутнику

У цьому підрозділі розглянемо загальну початково-крайову задачу для двовимірного параболічного рівняння. Буде доведено, що оператори, відповідні цій задачі встановлюють ізоморфізми між відповідними просторами Хермандера.

Нехай довільно задані дійсні числа $l > 0$ і $\tau > 0$. Позначимо $\Omega := (0,l)\times(0,\tau)$ — відкритий прямокутник в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо у прямокутнику Ω таку лінійну параболічну задачу:

$$A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4.55}$$

$$B_{j,0}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=0} \equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq m_j} b_{j,0}^{\alpha,\beta}(t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_{x=0} = g_{j,0}(t) \quad \text{і} \tag{4.56}$$

$$B_{j,1}(t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_{x=l} \equiv \sum_{\alpha+2b\beta\leq m_j} b_{j,1}^{\alpha,\beta}(t)\,D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}u(x,t)\big|_{x=l} = g_{j,1}(t) \tag{4.57}$$

$$\text{для} \quad 0<t<\tau \quad \text{і} \quad j=1,\dots,m,$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = h_k(x) \quad \text{для} \quad 0<x<l \quad \text{і} \quad k=0,\dots,\varkappa-1. \tag{4.58}$$

Тут b, m і всі m_j є довільні фіксовані цілі числа, такі, що $m\geq b\geq 1$, $\varkappa := m/b\in\mathbb{Z}$ і $m_j\geq 0$. Всі коефіцієнти виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ та $B_{j,k} := B_{j,k}(t,D_x,\partial_t)$, де $j\in\{1,\dots,m\}$ та $k\in\{0,\,1\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. А саме, $a^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ та $b_{j,k}^{\alpha,\beta}\in C^{\infty}[0,\tau]$, де $\overline{\Omega} := [0,l]\times[0,\tau]$. Використовуємо позначення $D_x := i\,\partial/\partial x$ та

$\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних. Підсумовування здійснюємо по цілим індексам $\alpha, \beta \geq 0$, що задовольняють нерівності, вказані під знаком суми.

Нагадаємо [1, § 9, п. 1], що початково–крайова задача (4.55)–(4.58) називається параболічною в Ω, якщо виконуються умови 3.3–3.5, наведені у п. 3.6.

Перейдемо до формулювання теореми про ізоморфізми для параболічної задачі (4.55)–(4.58) у просторах Хермандера, введених у підрозділі 2.3. Зазначена теорема є версією теореми 4.1 для розглядуваної задачі. Тому подальші міркування є подібними до міркувань підрозділу 4.2.

Як і у випадку загальної параболічної задачі у циліндрі (див. п. 4.2), для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок u задачі (4.55)–(4.58), її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див., наприклад, [1, § 11] або [17, гл. 4, § 5]). Ці умови полягають в тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (4.55) та початкових умов (4.58), повинні задовольняти крайові умови (4.57), (4.58) та співвідношення, що утворюються в результаті диференціювання крайових умов по змінній t. Для написання цих умов узгодження використаємо простори Соболєва.

Нехай

$$\sigma_0 := \max\{2m, m_1 + 1, \ldots, m_m + 1\}.$$

Відмітимо, якщо $m_j \leq 2m - 1$ для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$, тоді $\sigma_0 = 2m$.

Пов'яжемо з параболічною задачею (4.55)–(4.58) лінійне відображення

$$\begin{aligned} u \mapsto \Lambda u := \big(Au, B_{1,0}u, & B_{1,1}u, \ldots, B_{m,0}u, B_{m,1}u, \\ & u\restriction_{[0,l]}, \ldots, (\partial_t^{\varkappa-1}u)\restriction_{[0,l]}\big), \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Нехай $s \geq \sigma_0$. Відображення (4.59) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda : H^{s,s/(2b)}(\Omega) \to \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b)} := H^{s-2m,(s-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \\ \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \bigl(H^{(s-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\bigr)^2 \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b}(0,l). \tag{4.60}$$

Це безпосередньо випливає з [41, гл. I, лема 4 і гл. II, теореми 3 та 7]. Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$\begin{aligned} &f \in H^{s-2m,(s-2m)/(2b)}(\Omega), \\ &g_{j,\lambda} \in H^{(s-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau), \\ &h_k \in H^{s-2bk-b}(0,l) \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\text{для всіх} \quad \lambda \in \{0,1\}, \quad j \in \{1,\ldots,m\} \quad \text{і} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\}$$

задачі за формулою

$$(f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}, h_0, ..., h_{\varkappa-1}) := \Lambda u$$

за допомогою цього обмеженого оператора.

Умови узгодження на функції f, $g_{j,\lambda}$ і h_k природно виникають так. Згідно з [41, гл. II, теорема 7], означені за замиканням сліди $\partial_t^k u(\cdot,0) \in H^{s-2bk-b}(0,l)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < s/(2b) - 1/2$ (і лише для таких k). Ці сліди можна виразити з рівняння (4.55) та початкових даних (4.58) через функції f і h_k у такий спосіб.

Умова параболічності 3.3 (див. п. 3.6) у випадку $\xi = 0$ і $p = 1$ означає, що коефіцієнт $a^{0,\varkappa}(x,t) \neq 0$ для всіх $x \in [0,l]$ і $t \in [0,\tau]$. Тому параболічне рівняння (4.55) можна розв'язати відносно $\partial_t^{\varkappa} u(x,t)$; а саме, запишемо

$$\partial_t^{\varkappa} u(x,t) = \sum_{\substack{\alpha+2b\beta \leq 2m, \\ \beta \leq \varkappa-1}} a_0^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^{\alpha} \partial_t^{\beta} u(x,t) + (a^{0,\varkappa}(x,t))^{-1} f(x,t) \tag{4.62}$$

для деяких функцій $a_0^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. З умов (4.58), рівності (4.62) та рівностей, одержаних з неї шляхом диференціювання $k - \varkappa$ разів (при $\varkappa < k < s/(2b) - 1/2$, якщо такі цілі k існують) по змінній t отримуємо рекурентну формулу для слідів $\partial_t^k u(x,0)$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t^k u(x,0) = h_k(x) \quad \text{якщо} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\},\\
&\partial_t^k u(x,0) = \sum_{\substack{\alpha+2b\beta\le 2m,\\ \beta\le\varkappa-1}} \sum_{q=0}^{k-\varkappa} \binom{k-\varkappa}{q} \partial_t^{k-\varkappa-q} a_0^{\alpha,\beta}(x,0)\, D_x^\alpha \partial_t^{\beta+q} u(x,0) + \\
&\qquad + \partial_t^{k-\varkappa}\big((a^{0,\varkappa}(x,0))^{-1} f(x,0)\big) \quad \text{якщо} \quad k \ge \varkappa
\end{aligned} \tag{4.63}$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$ такого, що $0 \le k < s/(2b) - 1/2$. Ці рівності виконуються для майже всіх $x \in (0,l)$.

Окрім того, згідно з (4.61), для кожного $j \in \{1,\ldots,m\}$ і $\lambda \in \{0,1\}$ означені сліди $\partial_t^k g_{j,\lambda}(0) \in \mathbb{C}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \le k < (s - m_j - 1/2 - b)/(2b)$ (і тільки таких k). Ми можемо виразити ці сліди через функцію $u(x,t)$ та її похідні по часу; а саме,

$$\begin{aligned}
\partial_t^k g_{j,\lambda}(0) &= \big(\partial_t^k B_{j,\lambda} u(x,t)\big)|_{t=0}\\
&= \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \partial_t^{k-q} b_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(0) D_x^\alpha \partial_t^{\beta+q} u(x,0),
\end{aligned} \tag{4.64}$$

де $x = 0$ якщо $\lambda = 0$ та $x = l$ якщо $\lambda = 1$. Тут всі функції $u(x,0)$, $\partial_t u(x,0)$,..., $\partial_t^{[m_j/(2b)]+k} u(x,0)$ змінної $x \in (0,l)$ виражаються через функції $f(x,t)$ і $h_0(x)$,...,$h_{\varkappa-1}(x)$ за рекурентною формулою (4.63). Тут і нижче вираз $[a]$ позначає цілу частину числа a.

Підставляючи (4.63) у праву частину формули (4.64), ми отримаємо умови узгодження

$$
\begin{gathered}
\partial_t^k g_{j,0}|_{t=0} = B_{j,0,(k)}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+k}],\\
\partial_t^k g_{j,1}|_{t=0} = B_{j,1,(k)}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+k}],\\
\text{з} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad 0 \le k < \frac{s - m_j - 1/2 - b}{2b} \quad \text{і} \quad j \in \{1, \ldots, m\}.
\end{gathered} \tag{4.65}
$$

Тут функції v_0, ..., $v_{[m_j/(2b)]+k}$ для зазначених j і k означені на $(0,l)$ за рекурентною формулою

$$
\begin{aligned}
&v_\mu(x) := h_\mu(x) \quad \text{якщо} \quad \mu \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\},\\
&v_\mu(x) := \sum_{\substack{\alpha+2b\beta\le 2m,\\ \beta\le\varkappa-1}} \sum_{q=0}^{\mu-\varkappa} \binom{\mu-\varkappa}{q} \partial_t^{\mu-\varkappa-q} a_0^{\alpha,\beta}(x,0)\, D_x^\alpha v_{\beta+q}(x) +\\
&\qquad + \partial_t^{\mu-\varkappa}\big((a^{0,\varkappa}(x,0))^{-1} f(x,0)\big) \quad \text{якщо} \quad \mu \ge \varkappa;
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

і ми поклали

$$
B_{j,\lambda,(k)}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+k}] = \sum_{\alpha+2b\beta\le m_j} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \partial_t^{k-q} b_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(0) \big(D_x^\alpha v_{\beta+q}(x)\big)\big|_{x=d},
$$

де $d = 0$ якщо $\lambda = 0$ і $d = l$ якщо $\lambda = 1$. Відмітимо, що

$$
v_\mu \in H^{s-b-2b\mu}(0,l) \quad \text{для кожного} \quad \mu \in \mathbb{Z} \cap [0, s/(2b) - 1/2) \tag{4.67}
$$

завдяки (4.61).

Праві частини рівностей (4.65) є коректно означеними, оскільки функція $D_x^\alpha v_{\beta+q}(x)$ належить до

$$
H^{s-\alpha-b-2b(\beta+q)}(0,l) \subseteq H^{s-m_j-2bk-b}(0,l)
$$

завдяки (4.67) і тому слід $\big(D_x^\alpha v_{\beta+q}(x)\big)\big|_{x=d}$ означений кожного разу, коли $s - m_j - 2bk - b - 1/2 > 0$. Зауважимо, якщо $s \le \min\{m_j\} + b + 1/2$, то умови узгодження у задачі відсутні.

Покладемо

$$E := \{\sigma_0 + r - 1/2 : 1 \le r \in \mathbb{Z}\}.$$

Зауважимо, що E – це множина всіх можливих розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.65) в залежності від $s \ge \sigma_0$.

Основний результат для параболічної задачі (4.55)–(4.58) полягає в тому, що лінійне відображення (4.59) продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера. Вкажемо ці простори. Виберемо довільно дійсне число $s > \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ або виберемо $s = \sigma_0$ і $\varphi \equiv 1$. Візьмемо $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму; іншими словами, $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ виступає як простір розв'язків u задачі. Для введення другого простору дії ізоморфізму розглянемо гільбертів простір

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\
&H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \bigl(H^{(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(0,\tau)\bigr)^2 \\
&\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(0,l).
\end{aligned}$$

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.60). Другий простір дії ізоморфізму вкладений у $\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Будемо позначати його $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Дамо означення цього простору окремо для випадку $s \notin E$ і для випадку $s \in E$.

Нехай спочатку $s \notin E$. За означенням, лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій

$$F = \bigl(f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}, h_0, ..., h_{\varkappa-1}\bigr) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi},$$

які задовольняють умови узгодження (4.65). Як зазначалось вище, ці умови є коректно поставленими для функцій із соболєвських просторів, а отже, для кожного $F \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$ (або $\varepsilon = 0$, якщо $s = \sigma_0$ і $\varphi \equiv 1$). Тому вони також є коректно поставленими для кожного $F \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ завдяки неперервному вкладанню

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b)}. \tag{4.68}$$

Останнє безпосередньо випливає з (2.11) та (2.12). Таким чином, наше означення є коректним.

Наділимо лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Простір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Це обгрунтовується точно так, як і для простору $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ у підрозділі 4.2.

Якщо $s \in E$, то означаємо гільбертовий простір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} := \\ \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}.\end{gathered} \tag{4.69}$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Про таку інтерполяцію йшлося у п. 2.4. Гільбертовий простір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, означений формулою (4.69) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним у $\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Це буде показано у зауваженні 4.3 у кінці п. 4.7.

Теорема 4.4. *Для довільного дійсного числа $s > \sigma_0$ і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (4.59) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda: \, H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.70}$$

Ця теорема є відомою у соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$. А саме, вона міститься у результаті М. С. Аграновіча і М. І. Вішика [1, теорема 12.1] у випадку $s/(2b) \in \mathbb{Z}$, який покривається результатом М. В. Житарашу [7, теорема 9.1]. Відмітимо, що ці результати включають граничний випадок $s = \sigma_0$. У загальній ситуації $\varphi \in \mathcal{M}$ виведемо теорему 4.4 із соболєвського випадку (результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1]) шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Це буде зроблено у п. 4.7.

Завдяки згаданій теоремі М. В. Житарашу, кожна вектор-функція

$$\bigl(f,\, g_{1,0},\, g_{1,1}, \ldots, g_{m,0},\, g_{m,1},\, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}\bigr) \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{4.71}$$

має єдиний прообраз $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при відображенні (4.70). Цю функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком параболічної задачі (4.55)–(4.58) із правою частиною (4.71).

Наслідком теореми 4.4 є наступна властивість глобального підвищення регулярності цього розв'язку.

Наслідок 4.2. *Припустимо, що $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.55)–(4.58), *права частина якої задовольняє умову*

$$\bigl(f,\, g_{1,0},\, g_{1,1}, \ldots, g_{m,0},\, g_{m,1},\, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}\bigr) \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \tag{4.72}$$

для деяких $s > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$.

Зауважимо, що додаткова регулярність φ правих частин успадковується розв'язком задачі.

В якості застосування теореми 4.4 дамо наступну достатню умову неперервності на $\overline{\Omega}$ узагальненого розв'язку u задачі (4.55)–(4.58) та його узагальнених частинних похідних заданого порядку.

Теорема 4.5. *Нехай ціле $p \geq 0$ таке, що $p + b + 1/2 > \sigma_0$, і нехай $u \in H^{\sigma_0, \sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.55)–(4.58) *із правою частиною* (4.71). *Припустимо, що права частина задовольняє умову* (4.72) *для $s := p + b + 1/2$ і деякого функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$, для якого виконується інтегральна умова* (2.103)*:*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty.$$

Тоді розв'язок $u(x,t)$ та всі його узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$, з $\alpha + 2b\beta \leq p$, є неперервними на множині $\overline{\Omega}$.

Якщо сформулювати аналог теореми 4.5 для соболєвських просторів (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну: права частина задачі (4.55)–(4.58) задовольняє умову (4.72) для деякого $s > p + b + 1/2$.

Відмітимо, що для задачі (4.55)–(4.58) буде мати місце аналог теореми 4.2 про локальне підвищення регулярності узагальненого розв'язку.

4.7. Доведення теорем підрозділу 4.6

Для доведення теореми 4.1 спочатку нам знадобиться версія інтерполяційної формули (4.20) для просторів $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, які зустрічаються у ізоморфізмі (4.70). З означення цих просторів випливає, що інтерполяційна формула для них потрібна лише у випадку, коли $s \notin E$. Тому розглянемо такі інтервали

$$J_0 = (\sigma_0, \sigma_0 + 1/2), \quad J_r = (\sigma_0 + r - 1/2, \sigma_0 + r + 1/2), \;\text{ з }\; 1 \leq r \in \mathbb{Z}$$

зміни величини s.

Лема 4.4. *Нехай $1 \leq r \in \mathbb{Z}$. Припустимо, що дійсні числа $s_0, s, s_1 \in J_{r-1}$ задовольняють нерівності $s_0 < s < s_1$ і що $\varphi \in \mathcal{M}$. Визначимо інтерполяційний параметр $\psi \in \mathcal{B}$ формулою* (2.27). *Тоді правильна така рівність просторів*

$$\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} = \big[\widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} \tag{4.73}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Згідно з твердженнями 2.4, 2.6 і теоремою 2.6 отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}
&\big[\widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{H}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} \\
&\quad = \Big[H^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \big(H^{(s_0-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\big)^2 \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s_0-2bk-b}(0,l), \\
&\qquad\quad H^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \big(H^{(s_1-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\big)^2 \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s_1-2bk-b}(0,l)\Big]_{\psi} \\
&\quad = \big[H^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}(\Omega), H^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}(\Omega)\big]_{\psi}
\end{aligned}$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\Big(\big[H^{(s_0-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau), H^{(s_1-m_j-1/2)/(2b)}(0,\tau)\big]_{\psi}\Big)^2$$
$$\oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1}\big[H^{s_0-2bk-b}(0,l), H^{s_1-2bk-b}(0,l)\big]_{\psi}$$
$$= H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m}\big(H^{(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(0,\tau)\big)^2 \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(0,l)$$
$$= \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.$$

Отже,

$$\big[\widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{H}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} = \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \tag{4.74}$$

з еквівалентністю норм.

Виведемо необхідну формулу (4.73) з (4.74) за допомогою твердження 2.3. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $\widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$ таке, що P є проектором простору $\widetilde{\mathcal{H}}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)}$ на його підпростір $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)}$ для кожного $j \in \{0,\, 1\}$. Якщо у нас є це відображення, ми отримаємо

$$\big[\widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi}$$
$$= \big[\widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{H}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\big]_{\psi} \cap \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$$
$$= \widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} \cap \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$$
$$= \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

завдяки твердженню 2.3, формулі (4.74) та умовам $s_0, s \in J_{r-1}$ і $s_0 < s$. Зауважимо, що з цих умов випливає остання рівність, оскільки елементи просторів $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$ і $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ задовольняють одні і ті самі умови узгодження і оскільки $\widetilde{\mathcal{H}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ неперервно вкладений у $\widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$.

Побудуємо вище згадане відображення P у такий спосіб. Для довільних $1 \le n \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ лінійне відображення

$$\{z_0, \ldots, z_{n-1}\} \mapsto w(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k t^k}{k!}, \quad \text{з} \quad z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$$

визначає обмежений оператор

$$T : \mathbb{C}^n \to H^{s;\varphi}(0, \tau). \tag{4.75}$$

Крім того, якщо $w = T(z_0, \ldots, z_{n-1})$, то $\partial_t^k w(0) = z_k$ для кожного $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ покладемо

$$q_{r,j} := \left[\frac{\sigma_0 + r - m_j - 1 - b}{2b}\right] = \left[\frac{s - m_j - 1/2 - b}{2b}\right].$$

Для даної вектор–функції

$$F := (f, g_{1,0}, g_{1,1}, ..., g_{m,0}, g_{m,1}, h_0, ..., h_{\varkappa-1}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)},$$

покладемо

$$\begin{aligned} &g^*_{j,\lambda} := g_{j,\lambda} \quad \text{якщо} \quad q_{r,j} < 0; \\ &g^*_{j,\lambda} := g_{j,\lambda} + T(z_{j,\lambda,0}, \ldots, z_{j,\lambda,q_{r,j}}) \quad \text{якщо} \quad q_{r,j} \ge 0 \end{aligned} \tag{4.76}$$

для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$ і $\lambda \in \{0, 1\}$. Тут

$$z_{j,\lambda,0} = B_{j,\lambda,(0)}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]}] - g_{j,\lambda}|_{t=0},$$

$$\ldots$$

$$z_{j,\lambda,q_{r,j}} = B_{j,\lambda,(q_{r,j})}[v_0, \ldots, v_{[m_j/(2b)]+q_{r,j}}] - \partial_t^{q_{r,j}} g_{j,\lambda}|_{t=0},$$

функції $v_k \in H^{s_0-b-2bk}(0, l)$, з $k = 0, \ldots, \max\{[m_j/(2b)] + q_{r,j}\}$, визначені рекурентною формулою (4.66) і T – відображення (4.75). Лінійне відображення $P : F \mapsto F^*$, з

$$F^* := (f, g^*_{1,0}, g^*_{1,1}, ..., g^*_{m,0}, g^*_{m,1}, h_0, ..., h_{\varkappa-1}),$$

визначене на всіх векторах $F \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}$, є шуканим. Дійсно, його звуження на кожний простір $\widetilde{\mathcal{H}}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)}$, з $j \in \{0, 1\}$, є обмеженим оператором на цьому просторі. Це безпосередньо випливає з (4.75). Більш того, якщо $F \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)}$, то $PF = F$ завдяки умовам узгодження (4.65). □

Доведення теореми 4.4. Нехай $s > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Спочатку розглянемо випадок $s \notin E$. Тоді $s \in J_{r-1}$ для певного цілого r. Виберемо числа $s_0, s_1 \in J_{r-1}$ так, що $s_0/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, $s_1/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $s_0 < s < s_1$. Згідно з результатом М. В. Житарашу [7, теорема 9.1], відображення (4.59) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$\Lambda :\ H^{s_j,s_j/(2b)}(\Omega) \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_j-2m,(s_j-2m)/(2b)} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0, 1\}. \tag{4.77}$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром (2.27). Тоді звуження оператора (4.77) з $j = 0$ на простір

$$\bigl[H^{s_0,s_0/(2b)}(\Omega), H^{s_1,s_1/(2b)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$$

є ізоморфізмом

$$\begin{aligned}\Lambda :\ H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \bigl[&\widetilde{\mathcal{Q}}^{s_0-2m,(s_0-2m)/(2b)}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s_1-2m,(s_1-2m)/(2b)}\bigr]_\psi \\ &= \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.\end{aligned} \tag{4.78}$$

Тут рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм завдяки теоремі 2.6 і лемі 4.4. Оператор (4.78) є продовженням за неперервністю відображення (4.59) оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною у $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$. Отже, у розглядуваному випадку теорема 4.4 доведена.

Розглянемо тепер випадок $s \in E$. Виберемо довільно число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Оскільки $s \pm \varepsilon \notin E$ і $s - \varepsilon > \sigma_0$, то маємо ізоморфізми

$$\Lambda : H^{s\pm\varepsilon,(s\pm\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}^{s\pm\varepsilon-2m,(s\pm\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}. \tag{4.79}$$

З них випливає, що відображення (4.59) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$
\begin{aligned}
&\Lambda : \bigl[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/(2b);\varphi}(\Omega)\bigr]_{1/2} \\
&\leftrightarrow \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-\varepsilon-2m,(s-\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s+\varepsilon-2m,(s+\varepsilon-2m)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2} \\
&= \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

Нагадаємо, що остання рівність є означенням простору $\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$. Для завершення доведення залишилось у (4.80) застосувати лему 4.2 для $V = \Omega$ (відмітимо, що твердження леми 4.2 залишається правильним і у випадку, коли Ω є прямокутником). $\square$

Зауваження 4.3. Простір, означений формулою (4.69) не залежить від вибору числа $\varepsilon \in (0, 1/2)$ з точністю до еквівалентності норм. Дійсно, нехай $s \in E$; тоді, згідно з теоремою 4.4, маємо ізоморфізм

$$
\Lambda : H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \widetilde{\mathcal{Q}}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{1/2}.
$$

для кожного $0 < \varepsilon < 1/2$. Це означає необхідну незалежність.

Доведення теореми 4.5. З умови теореми та наслідку 4.2 випливає, що $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}$ з $s = p + b + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, для якого виконується інтегральна умова (2.103). З означення простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з леми 2.3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $\alpha + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$. $\square$

4.8. Початково-крайові задачі для параболічного рівняння другого порядку у циліндрі

У наступних підрозділах результати для загальних мішаних параболічних задач доповнимо та конкретизуємо на випадок важливих з точки зору застосувань задач для параболічних рівнянь другого порядку.

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0, \tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

У Ω розглянемо параболічне диференціальне рівняння другого порядку

$$Au(x,t) \equiv \partial_t u(x,t) + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x,t)\, D_x^\alpha u(x,t) = f(x,t) \tag{4.81}$$
$$\text{для всіх } \ x \in G \ \text{ і } \ t \in (0, \tau).$$

Використовуємо такі позначення для частинних похідних: $\partial_t := \partial / \partial t$ і $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_j := i\, \partial / \partial x_j$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, і $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з $0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{Z}$ і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Всі коефіцієнти a_α диференціального виразу A вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, тобто $a^\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Припускаємо, що диференціальний оператор A є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, тобто, що виконується така умова (див.,наприклад, [1, § 9, п. 1]):

Умова 4.1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$, виконується нерівність

$$p + \sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(x,t)\, \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

У роботі досліджуємо початково-крайову задачу, яка складається з параболічного рівняння (4.81), початкової умови

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{для всіх } \ x \in G, \tag{4.82}$$

і крайової умови нульового порядку (умови Діріхле)

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для всіх } \ x \in \Gamma \ \text{ і } \ t \in (0,\tau) \tag{4.83}$$

або загальної крайової умови першого порядку

$$Bu(x,t) \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j u(x,t) + b_0(x,t) u(x,t) = g(x,t)$$
$$\text{для всіх } \ x \in \Gamma \ \text{ і } \ t \in (0,\tau). \tag{4.84}$$

Щодо (4.84) припускаємо, що всі коефіцієнти b_0, b_1, ..., b_n виразу B належать до $C^\infty(\overline{S})$ і що B накриває A на $\overline{S}$ [1, § 9, п. 1].

Останнє припущення означає, що виконується наступна умова:

Умова 4.2. Виберемо довільно $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ до межи Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ з $\operatorname{Re} p \geq 0$ такі, що $|\eta| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ – одиничний вектор внутрішньої нормалі до Γ у точці x. Тоді:

a) правильна нерівність $\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x) \neq 0$;

b) число

$$\zeta = -\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x,t)\eta_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j(x)}$$

не є коренем полінома

$$p + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,t) \left(\eta_1 + \zeta\nu_1(x)\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\eta_n + \zeta\nu_n(x)\right)^{\alpha_n}$$

$$\text{змінної } \ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Корисно зазначити, що якщо всі коефіцієнти b_1,..., b_n є дійсними, тоді частина b) умови 4.2 виконується автоматично. Це безпосередньо випливає з умови 4.1.

Таким чином, ми розглядаємо дві параболічні задачі: (4.81), (4.82), (4.83) і (4.81), (4.82), (4.84). Будемо досліджувати їх у відповідних просторах Хермандера, що були введені у підрозділі 2.2.

4.9. Теореми про ізоморфізми

Як зазначалось при дослідженні загальних параболічних задач, для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок такої задачі, її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див. п. 4.2). Конкретизуємо ці умови спочатку для задачі (4.81)–(4.83). Викорстаємо для цього простори Соболєва.

Пов'яжемо з параболічною задачею (4.81)–(4.83) лінійне відображення

$$\Lambda_0 : \, u \mapsto \bigl(Au, u\restriction\overline{S}, u(\cdot,0)\bigr), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.85}$$

Нехай $s \geq 2$. Відображення (4.85) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda_0 : \, H^{s,s/2}(\Omega) \to H^{s-2,s/2-1}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \oplus H^{s-1}(G). \tag{4.86}$$

Це безпосередньо випливає з [41, гл. I, лема 4 і гл. II, теореми 3 та 7]. Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$f \in H^{s-2,s/2-1}(\Omega), \quad g \in H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \quad \text{і} \quad h \in H^{s-1}(G) \tag{4.87}$$

задачі за формулою $(f,g,h) := \Lambda_0 u$ за допомогою цього обмеженого оператора.

Згідно з [41, гл. II, теорема 7], означені за замиканням сліди $\partial_t^k u(\cdot,0) \in H^{s-1-2k}(G)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < s/2 - 1/2$ (і лише для таких k). Скориставшись (4.81) і (4.82), виразимо ці сліди через функції $f(x,t)$ і

$h(x)$ за рекурентною формулою

$$\begin{gathered}u(x,0)=h(x),\\ \partial_t^k u(x,0)=-\sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{q=0}^{k-1}\binom{k-1}{q}\partial_t^{k-1-q}a_\alpha(x,0)\,D_x^\alpha\partial_t^q u(x,0)+\partial_t^{k-1}f(x,0)\\ \text{для кожного}\quad k\in\mathbb{Z}\quad\text{такого, що}\quad 1\le k<s/2-1/2.\end{gathered}\tag{4.88}$$

Ці рівності виконуються для майже всіх $x\in G$.

Окрім того, означені за замиканням сліди $\partial_t^k g(\cdot,0)\in H^{s-3/2-2k}(\Gamma)$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$ таких, що $0\le k<s/2-3/4$ (і тільки для цих k). Тому, внаслідок крайової умови Діріхле (4.83), виконується рівність

$$\partial_t^k g(x,0)=\partial_t^k u(x,0)\quad\text{для майже всіх}\quad x\in\Gamma\tag{4.89}$$

для цих цілих k. Права частина цієї рівності є коректно означеною, оскільки функція $\partial_t^k u(\cdot,0)\in H^{s-1-2k}(G)$ має слід $\partial_t^k u(\cdot,0)\restriction\Gamma\in H^{s-3/2-2k}(\Gamma)$ за умови $s-3/2-2k>0$.

Тепер підставивши (4.88) у (4.89), дістаємо умови узгодження

$$\partial_t^k g\restriction\Gamma=v_k\restriction\Gamma,\quad\text{з}\quad k\in\mathbb{Z}\quad\text{і}\quad 0\le k<s/2-3/4.\tag{4.90}$$

Тут функції v_k означені за рекурентною формулою

$$\begin{gathered}v_0(x):=h(x),\\ v_k(x):=-\sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{q=0}^{k-1}\binom{k-1}{q}\partial_t^{k-1-q}a_\alpha(x,0)\,D_x^\alpha v_q(x)+\partial_t^{k-1}f(x,0)\qquad(4.91)\\ \text{для кожного}\quad k\in\mathbb{Z}\quad\text{такого, що}\quad 1\le k<s/2-1/2,\end{gathered}$$

ці співвідношення виконуються для майже всіх $x\in G$. Оскільки

$$v_k\in H^{s-1-2k}(G)\quad\text{для кожного}\quad k\in\mathbb{Z}\cap[0,s/2-1/2)\tag{4.92}$$

завдяки (4.87), то за замиканням означений слід $v_k \restriction \Gamma \in H^{s-3/2-2k}(\Gamma)$ якщо $s-3/2-2k>0$. Отже, умови узгодження (4.90) є коректно поставленими.

Наприклад, якщо $2 < s \leq 7/2$, то формула (4.90) дає одну умову узгодження

$$g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma.$$

Далі, якщо $7/2 < s \leq 11/2$, то (4.90) дає вже дві умови узгодження

$$g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma$$

і

$$\partial_t g \restriction \Gamma = \Bigl(-\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x,0)\, D_x^\alpha h(x) + f(x,0)\Bigr) \restriction \Gamma.$$

І так далі.

Покладемо

$$E_0 := \{2r + 3/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\}.$$

Відмітимо, що E_0 – це множина всіх розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.90) в залежності від $s \geq 2$. Зауважимо, що у випадку загальної задачі для параболічного рівняння і крайових умов довільних порядків (див. п. 4.2), ми використовували множину

$$E := \{\sigma_0 + r - 1/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\},$$

яка при $\sigma_0 = 2$ є ширшою ніж множина E_0. Насправді, для кожної задачі з заданими порядками рівняння та крайових умов доцільно використовувати не загальну множину E, а таку множину, яка складається тільки з тих значень s, при переході через які змінюється кількість умов узгодження правих частин задачі. Для задачі (4.81)–(4.83) такою множиною буде E_0.

Далі, для випадку $s = 2$ додатково будемо припускати, що $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Для зручності, позначимо через $\mathcal{M}_1$ клас усіх зростаючих (в нестрогому сенсі) функцій $\varphi \in \mathcal{M}$. Необхідність такого припущення пояснимо у наступному абзаці. Попередньо зауважимо таке. Подібно до (2.11), для довільної $\varphi \in \mathcal{M}_1$ має місце неперервне та щільне вкладення

$$H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s/2}(\Omega), \tag{4.93}$$

яке є безпосереднім наслідком зростання функції φ.

Основний результат для параболічної задачі (4.81)–(4.83) полягає в тому, що лінійне відображення (4.85) продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера. Вкажемо ці простори. Виберемо довільні дійсне число $s \geq 2$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку $s = 2$ додатково припустимо, що $\varphi \in \mathcal{M}_1$. Візьмемо $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму; іншими словами, $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ виступає як простір розв'язків u задачі. Для введення другого простору дії ізоморфізму розглянемо гільбертів простір

$$\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4;\varphi}(S) \oplus H^{s-1;\varphi}(G).$$

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.86). Найширший простір, в який діє оператор (4.86), що розглядаємо у дисертаційній роботі, це соболєвський простір $\mathcal{H}_0^{0,0}$. Умова $\varphi \in \mathcal{M}_1$ при $s = 2$ забезпечує необхідне вкладення $\mathcal{H}_0^{0,0;\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_0^{0,0}$, яке є наслідком формули (4.93) та її очевидних аналогів для просторів на S і на G. Другий простір дії ізоморфізму вкладений у $\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Будемо позначати його $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Дамо означення цього простору окремо для випадку $s \notin E_0$ і для випадку $s \in E_0$.

Нехай спочатку $s \notin E_0$. За означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (4.90). Як вже зазначалось раніше, ці умови є коректно поставленими у випадку просторів Соболєва, зокрема, для кожного $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}$; тут і далі у цьому абзаці при $s>2$ число $\varepsilon>0$ достатньо мале, а якщо $s=2$, то $\varepsilon=0$. Отже, вони також є коректно поставленими для кожного $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ завдяки неперервному вкладанню

$$\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}. \tag{4.94}$$

Таким чином, наше означення є коректним. Наділимо лінійний простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Це випливає з рівності

$$\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} = \mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} \cap \mathcal{Q}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}.$$

Тут простір $\mathcal{Q}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}$ є повним, оскільки диференціальні оператори та сліди операторів, що використовуються в умовах узгодження, є обмеженими у відповідних парах просторів Соболєва. Тому простір, що стоїть у правій частині цієї рівності є повним відносно суми норм у просторах-компонентах перетину; ця сума еквівалентна нормі у $\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ на підставі (4.94). Таким чином, простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним (відносно останньої норми).

Якщо $s \in E_0$, то означаємо гільбертовий простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\mathcal{Q}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \mathcal{Q}_0^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\bigr]_{1/2}. \tag{4.95}$$

Тут число $\varepsilon \in (0,1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Про таку інтерполяцію йшлося у п. 2.4. Гільбертовий простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, означений формулою (4.95) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним у $\mathcal{H}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Це буде показано у зауваженні 4.5 у кінці підрозділу 4.10.

Тепер ми можемо сформулювати наш основний результат щодо параболічної початково-крайової задачі (4.81)–(4.83).

Теорема 4.6. *Для довільних $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ (при $s = 2$ додатково припускаємо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією) відображення* (4.85) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_0 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{4.96}$$

Відмітимо, що необхідність означати простір $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ окремо для випадку $s \in E_0$ обумовлена наступним: якщо означити цей простір для $s \in E_0$ у той же спосіб, що і для $s \notin E_0$, то ізоморфізм (4.96) порушується щонайменше для $\varphi \equiv 1$. Це випливає з результату Солоннікова [44, § 6].

Розглянемо тепер параболічну задачу (4.81), (4.82), (4.84), яка відповідає на S крайовій умові першого порядку. Запишемо умови узгодження для правих частин цієї задачі.

Пов'яжемо з параболічною задачею (4.81), (4.82), (4.84) лінійне відображення

$$\Lambda_1 :\ u \mapsto \bigl(Au, Bu, u(\cdot,0)\bigr), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{4.97}$$

Для довільного дійсного $s \geq 2$ це відображення продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda_1 : H^{s,s/2}(\Omega) \to H^{s-2,s/2-1}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4}(S) \oplus H^{s-1}(G). \qquad (4.98)$$

Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$f \in H^{s-2,s/2-1}(\Omega), \quad g \in H^{s-3/2,s/2-3/4}(S), \quad \text{і} \quad h \in H^{s-1}(G)$$

задачі за формулою $(f, g, h) := \Lambda_1 u$ за допомогою цього обмеженого оператора. Тут, на відміну від (4.87), з включення $u \in H^{s,s/2}(\Omega)$ випливає $g = Bu \in H^{s-3/2,s/2-3/4}(S)$ завдяки [41, гл. II, теорема 7]. Згідно з цією теоремою, сліди $\partial_t^k g(\cdot, 0) \in H^{s-5/2-2k}(\Gamma)$ означені за замиканням для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < s/2 - 5/4$ (і лише цих k). Ми можемо виразити ці сліди через функцію $u(x,t)$ та її похідні по часу, а саме,

$$\begin{aligned} &\partial_t^k g(x,0) = \big(\partial_t^k Bu(x,t)\big)|_{t=0} \\ &= \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \Big(\sum_{j=1}^{n} \partial_t^{k-q} b_j(x,0)\, D_j \partial_t^q u(x,0) + \partial_t^{k-q} b_0(x,0)\, \partial_t^q u(x,0) \Big) \end{aligned} \qquad (4.99)$$

для майже всіх $x \in \Gamma$. Тут всі функції $u(x,0)$, $\partial_t u(x,0)$,..., $\partial_t^k u(x,0)$ змінної $x \in G$ виражені через функції $f(x,t)$ і $h(x)$ за рекурентною формулою (4.88).

Підставивши (4.88) у праву частину формули (4.99), отримаємо умови узгодження

$$\begin{gathered} \partial_t^k g \restriction \Gamma = B_k[v_0, \ldots, v_k] \\ \text{з} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad 0 \leq k < s/2 - 5/4. \end{gathered} \qquad (4.100)$$

Тут функції v_0, v_1,..., v_k визначені на G за рекурентною формулою (4.91), і ми поклали

$$B_k[v_0,\ldots,v_k](x) :=$$
$$\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\partial_t^{k-q}b_j(x,0)\,D_jv_q(x)+\partial_t^{k-q}b_0(x,0)\,v_q(x)\Bigr)$$

для майже всіх $x\in\Gamma$. Тут розглядаємо функції $D_jv_q(x)$ і $v_q(x)$ змінної $x\in\Gamma$ як сліди функцій $D_jv_q\in H^{s-2-2q}(G)$ і $v_q\in H^{s-1-2q}(G)$ на Γ. Таким чином

$$B_k[v_0,\ldots,v_k]\in H^{s-5/2-2k}(\Gamma)$$

завдяки (4.92) і $s-5/2-2k>0$. Зауважимо, якщо $s\leq 5/2$, то умови узгодження у задачі відсутні.

Покладемо

$$E_1 := \{2r+1/2 : 1\leq r\in\mathbb{Z}\}.$$

Зауважимо, що E_1 – це множина всіх розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.100) в залежності від $s\geq 2$.

Щоб сформулювати теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (4.81), (4.82), (4.84) введемо простори, в яких буде діяти цей ізоморфізм. Нехай $s\geq 2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. У випадку $s=2$ додатково припустимо, що $\varphi\in\mathcal{M}_1$. Як і вище, візьмемо $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму. Другий простір дії ізоморфізму позначимо через $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, він вкладений у гільбертовий простір

$$\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} := H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\oplus H^{s-3/2,s/2-3/4;\varphi}(S)\oplus H^{s-1;\varphi}(G).$$

У соболєвському випадку $\varphi\equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.98).

Якщо $s \notin E_1$, то, за означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (4.100). Означення є коректним, оскільки умови узгодження є коректно поставленими для довільного $\bigl(f,g,h\bigr) \in \mathcal{H}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$ і тому, що

$$\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}. \qquad (4.101)$$

Це неперервне вкладення безпосередньо випливає з (2.11) і (2.12). Лінійний простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ наділимо скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Це доводиться тими ж міркуваннями, які ми використовували для доведення повноти $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Відмітимо, якщо $2 \leq s < 5/2$, то простори $\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ співпадають, оскільки в цьому випадку умови узгодження (4.100) відсутні.

Якщо $s \in E_1$, то означимо гільбертовий простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції, а саме

$$\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\mathcal{Q}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \mathcal{Q}_1^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\bigr]_{1/2}. \qquad (4.102)$$

Тут число $\varepsilon \in (0,1/2)$ вибрано довільно. Цей гільбертовий простір не залежить від вибору ε з точністю до еквівалентності норм і неперервно вкладений в $\mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, як це буде показано у зауваженні 4.5.

Тепер можемо сформулювати основний результат для параболічної початково-крайової задачі (4.81), (4.82), (4.84).

Теорема 4.7. *Для довільних $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ (при $s = 2$ додатково припускаємо, що φ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією) відображення* (4.97) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до* *ізоморфізму*

$$\Lambda_1 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}. \qquad (4.103)$$

Відмітимо, що необхідність означати простір $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ окремо для випадку $s \in E_1$ обумовлена подібною причиною, як це вказано для простору $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. А саме, якщо ми означимо цей простір для $s \in E_1$ у той же спосіб, що і для $s \notin E_1$, то ізоморфізм (4.103) порушується щонайменше коли $\varphi \equiv 1$ і (4.84) є крайовою умовою Неймана (див. [44, § 6]).

Теореми 4.6 і 4.7 є відомими у соболєвському випадку, коли $\varphi \equiv 1$. А саме вони містяться в результаті Аграновича та Вішика [1, теорема 12.1] для випадку $s/2 \in \mathbb{Z}$, який покривається результатом Ліонса і Мадженеса [68, теорема 6.2] у припущенні, що ні s ні $s/2$ не є напівцілими. Результат М. В. Житарашу [7, теорема 9.1] знімає останнє припущення. Солонніков [44, теорема 17] довів відповідні апріорні оцінки для анізотропних соболєвських норм розв'язків задачі (4.81)–(4.83) та задачі (4.81), (4.82), (4.84) за умови, що (4.84) є крайовою умовою Неймана.

Виведемо теореми 4.6 і 4.7 зі згаданого результату Ліонса і Мадженеса шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Зробимо це у наступних двох підрозділах: окремо для випадку $s > 2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і випадку $s = 2$, $\varphi \in \mathcal{M}_1$.

4.10. Доведення теорем підрозділу 4.9 (випадок $s > 2$)

Для доведення цих теорем нам будуть потрібні інтерполяційні формули для просторів $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які зустрічаються у ізоморфізмах (4.96) і (4.103). З означення цих просторів випливає, що формули для них потрібні лише у випадках, коли $s \notin E_0$ і $s \notin E_1$ відповідно. Тому розглянемо такі інтервали

$$J_{0,1} := (2,\, 7/2), \quad J_{0,r} := (2r - 1/2,\, 2r + 3/2), \;\; \text{з} \;\; 2 \le r \in \mathbb{Z},$$

і

$$J_{1,0} := (2, 5/2), \quad J_{1,r} := (2r + 1/2,\, 2r + 5/2), \;\; \text{з} \;\; 1 \le r \in \mathbb{Z},$$

зміни величини s. Відмітимо, що кількість умов узгодження (4.90) і (4.100) є сталою на цих інтервалах. А саме, якщо s належить деякому $J_{l,r}$, то ця кількість дорівнює r.

Лема 4.5. *Нехай $l \in \{0, 1\}$ і $1 \le r \in \mathbb{Z}$. Припустимо, що дійсні числа $s_0, s, s_1 \in J_{l,r}$ задовольняють нерівності $s_0 < s < s_1$ і що $\varphi \in \mathcal{M}$. Визначимо інтерполяційний параметр $\psi \in \mathcal{B}$ формулою* (2.27)*. Тоді правильна така рівність просторів*

$$\mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi} = \bigl[\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{Q}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_{\psi} \tag{4.104}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Нагадаємо, що $\mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\mathcal{Q}_l^{s_j-2,s_j/2-1}$ з $j \in \{0, 1\}$, є підпросторами гільбертових просторів $\mathcal{H}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\mathcal{H}_l^{s_j-2,s_j/2-1}$ відповідно.

Згідно з твердженнями 2.4, 2.6 і теоремою 2.6 отримаємо наступне:

$$
\begin{aligned}
&\bigl[\mathcal{H}_l^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{H}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi\\
&\quad=\bigl[H^{s_0-2,s_0/2-1}(\Omega)\oplus H^{s_0-(2l+1)/2,s_0/2-(2l+1)/4}(S)\oplus H^{s_0-1}(G),\\
&\qquad H^{s_1-2,s_1/2-1}(\Omega)\oplus H^{s_1-(2l+1)/2,s_1/2-(2l+1)/4}(S)\oplus H^{s_1-1}(G)\bigr]_\psi\\
&\quad=\bigl[H^{s_0-2,s_0/2-1}(\Omega),H^{s_1-2,s_1/2-1}(\Omega)\bigr]_\psi\\
&\qquad\oplus\bigl[H^{s_0-(2l+1)/2,s_0/2-(2l+1)/4}(S),H^{s_1-(2l+1)/2,s_1/2-(2l+1)/4}(S)\bigr]_\psi\\
&\qquad\oplus\bigl[H^{s_0-1}(G),H^{s_1-1}(G)\bigr]_\psi\\
&\quad=H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\oplus H^{s-(2l+1)/2,s/2-(2l+1)/4;\varphi}(S)\oplus H^{s-1;\varphi}(G)\\
&\quad=\mathcal{H}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\bigl[\mathcal{H}_l^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{H}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi=\mathcal{H}_l^{s-2,s/2-1;\varphi} \tag{4.105}
$$

з еквівалентністю норм.

Виведемо необхідну формулу (4.104) з (4.105) за допомогою твердження 2.3. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $\mathcal{H}_l^{s_0-2,s_0/2-1}$ таке, що P є проектором простору $\mathcal{H}_l^{s_j-2,s_j/2-1}$ на його підпростір $\mathcal{Q}_l^{s_j-2,s_j/2-1}$ для кожного $j\in\{0,1\}$. Якщо у нас є це відображення, то отримаємо

$$
\begin{aligned}
\bigl[\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{Q}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi&=\bigl[\mathcal{H}_l^{s_0-2,s_0/2-1},\mathcal{H}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi\cap\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1}\\
&=\mathcal{H}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}\cap\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1}\\
&=\mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}
\end{aligned}
$$

завдяки твердженню 2.3, формулі (4.105) та умовам $s_0,s\in J_{l,r}$ і $s_0<s$. Зауважимо, що з цих умов випливає остання рівність, оскільки елементи просторів $\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1}$ і $\mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}$ задовольняють одні і ті самі умови узгодження і оскільки $\mathcal{H}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}$ неперервно вкладений у $\mathcal{H}_l^{s_0-2,s_0/2-1}$.

Побудуємо вище згадане відображення P за допомогою теореми 2.7. Розглянемо спочатку випадок $l = 0$. Для даного $(f, g, h) \in \mathcal{H}_0^{s_0-2,s_0/2-1}$ покладемо

$$g^* := g + T\bigl(v_0 \restriction \Gamma - g \restriction \Gamma, \ldots, v_{r-1} \restriction \Gamma - \partial_t^{r-1} g \restriction \Gamma\bigr).$$

Тут функції $v_k \in H^{s_0-1-2k}(G)$, з $k = 0, \ldots, r-1$, визначені рекурентною формулою (4.91), і відображення T взяте з теореми 2.7. Лінійне відображення $P : (f, g, h) \mapsto (f, g^*, h)$, визначене на всіх векторах $(f, g, h) \in \mathcal{H}_0^{s_0-2,s_0/2-1}$, є шуканим. Дійсно, його звуження на кожний простір $\mathcal{H}_0^{s_j-2,s_j/2-1}$, з $j \in \{0, 1\}$, є обмеженим оператором на цьому просторі. Це безпосередньо випливає з теореми 2.7, в якій взяли $s := s_j - 1/2$, $b := 1$. Більш того, якщо $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_0^{s_j-2,s_j/2-1}$, то $P(f, g, h) = (f, g, h)$ завдяки умовам узгодження (4.90).

Розглянемо тепер випадок $l = 1$. Для даного $(f, g, h) \in \mathcal{H}_1^{s_0-2,s_0/2-1}$ покладемо

$$g^* := g + T\bigl(B_0[v_0] - g \restriction \Gamma, \ldots, B_{r-1}[v_0, \ldots, v_{r-1}] - \partial_t^{r-1} g \restriction \Gamma\bigr).$$

Тут функції $v_0, \ldots, v_{r-1}$ і відображення T такі самі, як і у випадку $l = 0$. Лінійне відображення $P : (f, g, h) \mapsto (f, g^*, h)$, визначене на всіх векторах $(f, g, h) \in \mathcal{H}_1^{s_0-2,s_0/2-1}$, є шуканим. Дійсно, його звуження на кожний простір $\mathcal{H}_1^{s_j-2,s_j/2-1}$, з $j \in \{0, 1\}$, є обмеженим оператором на цьому просторі завдяки теоремі 2.7, в якій взяли $s := s_j - 3/2$, $b := 1$. Більш того, якщо $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_1^{s_j-2,s_j/2-1}$, то $P(f, g, h) = (f, g, h)$ завдяки умовам узгодження (4.100). $\square$

Зауваження 4.4. Якщо $l = 1$ і $r = 0$, то висновок леми 4.5 залишається правильним. Дійсно, у цьому випадку $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} = \mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і

$\mathcal{Q}_1^{s_j-2,s_j/2-1} = \mathcal{H}_1^{s_j-2,s_j/2-1}$ для кожного $j \in \{0,\,1\}$, так що (4.104) збігається з рівністю (4.105). Остання є правильною і в розглянутому випадку.

Тепер можемо перейти до доведення теорем.

Доведення теорем 4.6 і 4.7. Нехай $s > 2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $l \in \{0,\,1\}$. Якщо $l = 0$ [або $l = 1$], то наші міркування стосуються теореми 4.6 [або теореми 4.7]. Спочатку розглянемо випадок $s \notin E_l$. Тоді $s \in J_{l,r}$ для певного цілого r. Виберемо числа $s_0, s_1 \in J_{l,r}$ такі, що жодне з чисел s_0, $s_0/2$, s_1, $s_1/2$ не є напівцілим і $s_0 < s < s_1$. Згідно з результатом Ліонса і Мадженеса [68, теорема 6.2], відображення

$$u \mapsto \Lambda_l u \quad \text{з} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.106}$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізмів

$$\Lambda_l : H^{s_j,s_j/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_l^{s_j-2,s_j/2-1} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0,1\}. \tag{4.107}$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром (2.27). Тоді звуження оператора (4.107) з $j = 0$ на простір

$$\bigl[H^{s_0,s_0/2}(\Omega), H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$$

є ізоморфізмом

$$\Lambda_l : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \bigl[\mathcal{Q}_l^{s_0-2,s_0/2-1}, \mathcal{Q}_l^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi = \mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{4.108}$$

Тут рівності просторів є правильними з точністю до еквівалентності норм завдяки теоремі 2.6 і лемі 4.5 (див. також зауваження 4.4). Оператор (4.108) є продовженням за неперервністю відображення (4.106) оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною у $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$. Отже, у розглядуваному випадку теореми 4.6 і 4.7 доведені.

Розглянемо тепер випадок $s \in E_l$. Виберемо довільно число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Оскільки $s \pm \varepsilon \notin E_l$ і $s - \varepsilon > 2$, то маємо ізоморфізми

$$\Lambda_l : H^{s\pm\varepsilon,(s\pm\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_l^{s\pm\varepsilon-2,(s\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}. \tag{4.109}$$

З них випливає, що відображення (4.106) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$\begin{aligned} \Lambda_l :&\big[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big]_{1/2} \\ &\leftrightarrow \big[\mathcal{Q}_l^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}_l^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\big]_{1/2} = \mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Нагадаємо, що остання рівність є означенням простору $\mathcal{Q}_l^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Для завершення доведення залишилось у (4.110) застосувати формулу

$$H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) = \big[H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(s+\varepsilon)/2;\varphi}(\Omega)\big]_{1/2},$$

яка є окремим випадком формули (4.22). □

Зауваження 4.5. Простори, означені формулами (4.95) і (4.102) не залежать від вибору числа $\varepsilon \in (0, 1/2)$ з точністю до еквівалентності норм. Дійсно, нехай $l \in \{0,\, 1\}$, $s \in E_l$; тоді, згідно з теоремами 4.6 і 4.7 маємо ізоморфізми

$$\Lambda_l : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \big[\mathcal{Q}_l^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \mathcal{Q}_l^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\big]_{1/2}$$

для кожного $0 < \varepsilon < 1/2$. Це означає необхідну незалежність.

4.11. Доведення теорем підрозділу 4.9 (випадок $s = 2$)

Для доведення теорем у розглядуваному випадку нам будуть потрібні версії інтерполяційних формул (2.67) і (4.104) у ситуації, коли $s = s_0$. Тому у цьому підрозділі скористаємось відмінним від (2.27) параметром інтерполяції ψ. Означимо його. Нехай

$$s_0, s_1, \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 \le s_0 < s_1, \quad \gamma > 0 \quad \text{і} \quad \varphi \in \mathcal{M}_1. \tag{4.111}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} \varphi(r^{1/(s_1 - s_0)}) & \text{для} \quad r \ge 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{4.112}$$

Покажемо, що ця функція є інтерполяційним параметром. З означення класу $\mathcal{M}_1$ випливає, що $\psi \in \mathcal{B}$. Справді, ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, оскільки φ є обмеженою на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$. Також $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a, \infty)$, де $a > 0$, оскільки φ є додатною зростаючою функцією. Тепер з твердження 2.2 випливає, що (4.112) є інтерполяційним параметром. Справді, запишемо для нашого випадку нерівності (2.23) зі сталою $c = 1$:

$$\begin{gathered} \varphi(t) \le \varphi(\tau) \quad \text{і} \quad \tau^{s_0 - s_1}\varphi(\tau) \le t^{s_0 - s_1}\varphi(t) \\ \text{для всіх} \quad t \ge 1 \quad \text{і} \quad \tau \ge t. \end{gathered} \tag{4.113}$$

Ці нерівності є правильними. Справді, ліва нерівність у (4.113) є наслідком зростання функції φ, а права є наслідком повільної зміни φ (див. [40, с.27]).

Відмітимо, що існують функції $\varphi \in \mathcal{M}$ з якими (4.112) не є інтерполяційним параметром (див., наприклад, [101, приклад 1.5]).

Надалі у цьому підрозділі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів з функціональним параметром ψ, заданим формулою (4.112).

Як зазначалось, інтерполяція ізотропних соболєвських просторів досліджена в роботах В. А. Михайлеця та О. О. Мурача [99, 101, 102]. У припущенні (4.111) правильна така рівність

$$H^{s_0;\varphi}(G) = \bigl[H^{s_0}(G), H^{s_1}(G)\bigr]_{\psi} \tag{4.114}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут інтерполяційний параметр ψ заданий формулою (4.112). Рівність (4.114) є окремим випадком формули (4.2) з [102].

Встановимо версії формули (4.114) для анізотропних просторів $H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(\Omega)$ та $H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(S)$. Як і у підрозділі 2.5, почнемо з базової інтерполяційної формули для просторів $H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)$.

Лема 4.6. *Нехай* $2 \leq k \in \mathbb{Z}$. *У припущенні* (4.111) *правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k) = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]_{\psi} \tag{4.115}$$

з рівністю норм. Тут ψ – інтерполяційний параметр, заданий формулою (4.112).

Доведення. Нагадаємо, що позначаємо

$$r_\gamma(\xi',\xi_k) := \bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{1/2} \quad \text{для будь-яких} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{k-1},\ \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Пара анізотропних просторів Соболєва $X = \bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\bigr]$ є допустимою згідно з (2.5). Породжуючий оператор для цієї пари задається формулою

$$J:\, w \mapsto \mathcal{F}^{-1}[r_\gamma^{s_1-s_0}\,\mathcal{F}w\,] \quad \text{з} \quad w \in H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k).$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Тут через $\mathcal{F}$ [та $\mathcal{F}^{-1}$] позначено оператори прямого [та оберненого] перетворення Фур'є (по усіх змінних) повільно зростаючих розподілів, заданих на $\mathbb{R}^k$. Оператор J за допомогою перетворення Фур'є зводиться до оператора множення на функцію $r_\gamma^{s_1-s_0}$ і встановлює ізометричний ізоморфізм $\mathcal{F}:\ H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)\leftrightarrow L_2\bigl(\mathbb{R}^k, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k\bigr)$. Тому $\mathcal{F}$ зводить $\psi(J)$ до оператора множення на функцію

$$\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\equiv\varphi(r_\gamma(\xi',\xi_k)).$$

Тепер для кожного $w\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ можна записати наступне

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{X_\psi} &= \|\psi(J)w\|^2_{H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)}\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\,(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^k} r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi',\xi_k))\,|(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, d\xi' d\xi_k\\
&= \|w\|_{H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}$$

З цього випливає рівність просторів (4.115), оскільки в них обох є щільною множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$. Відмітимо, що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною у другому просторі, позначеному як X_ψ, тому що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною в просторі $H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)$, який неперервно та щільно вкладений в X_ψ. $\square$

Лема 4.7. *У припущенні* (4.111) *правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(\Omega)=\bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega),H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)\bigr]_\psi, \tag{4.116}$$

з точністю до еквівалентності норм.

У додаток до (4.111) *припустимо, що* $s_0>0$. *Тоді правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s_0,s_0\gamma;\varphi}(S)=\bigl[H^{s_0,s_0\gamma}(S),H^{s_1,s_1\gamma}(S)\bigr]_\psi \tag{4.117}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут у обох формулах ψ *– інтерполяційний параметр, заданий формулою* (4.112).

Доведення цієї леми дослівно збігається з доведенням теореми 2.6. Для цього потрібно у доведенні теореми покласти $s := s_0$, в якості інтерполяційного параметра ψ взяти параметр, визначений формулою (4.112) і замість (2.29) скористатись базовою інтерполяційною формулою (4.115).

Доводити теореми 4.6 і 4.7 для $s = 2$ будемо за тією ж схемою, що і для $s > 2$. Тому розглянемо такий проміжок $[2; 5/2)$ зміни величини s. Для кожної із задач кількість умов узгодження на цьому проміжку є сталою. А саме, для задачі (4.81)–(4.83) (див. (4.90)) маємо одну умову узгодження

$$g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma; \tag{4.118}$$

для задачі (4.81), (4.82), (4.84) маємо нуль умов узгодження. Останнє означає, що $\mathcal{Q}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} = \mathcal{H}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$.

Доведення теорем 4.6 і 4.7. Нехай $s = s_0 = 2$, $s_1 \in [2; 5/2)$ і $\varphi \in \mathcal{M}_1$. Спочатку встановимо, що правильна така інтерполяційна формула

$$\mathcal{Q}_0^{0,0;\varphi} = \left[\mathcal{Q}_0^{0,0}, \mathcal{Q}_0^{s_1-2,(s_1-2)/2}\right]_\psi \tag{4.119}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут ψ – інтерполяційний параметр, заданий формулою (4.112).

На підставі твердження 2.4 і формул (4.114), (4.116), (4.117) можемо записати таке

$$
\begin{aligned}
&\big[\mathcal{H}_0^{0,0}, \mathcal{H}_0^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi = \\
&\qquad \big[H^{0,0}(\Omega) \oplus H^{3/2,\,3/4}(S) \oplus H^1(G), \\
&\qquad H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_1-1/2,\,s_1/2-1/4}(S) \oplus H^{s_1-1}(G)\big]_\psi = \\
&\qquad \big[H^{0,0}(\Omega), H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega)\big]_\psi \oplus \big[H^{3/2,\,3/4}(S), H^{s_1-1/2,\,s_1/2-1/4}(S)\big]_\psi \\
&\qquad \oplus \big[H^1(G), H^{s_1-1}(G)\big]_\psi = \\
&\qquad H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{3/2,\,3/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G) = \mathcal{H}_0^{0,0;\varphi}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\big[\mathcal{H}_0^{0,0}, \mathcal{H}_0^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi = \mathcal{H}_0^{0,0;\varphi} \tag{4.120}
$$

з точністю до еквівалентності норм.

Виведемо необхідну формулу (4.119) з (4.120) за допомогою твердження 2.3. Для цього скористаємось побудованим у доведенні леми 4.5 (випадок $l = 0$) лінійним відображенням P на $\mathcal{H}_0^{s_0-2,s_0/2-1}$, яке є проектором простору $\mathcal{H}_0^{s_j-2,s_j/2-1}$ на його підпростір $\mathcal{Q}_0^{s_j-2,s_j/2-1}$ для кожного $j \in \{0,\,1\}$. У нашій ситуації це відображення матиме вигляд

$$
P : (f, g, h) \mapsto \big(f, g + T\big(h\restriction\Gamma - g\restriction\Gamma\big), h\big) \quad \text{з} \quad (f, g, h) \in \mathcal{H}_0^{0,0}.
$$

Оскільки у нас є необхідне відображення P, то отримаємо

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{Q}_0^{0,0}, \mathcal{Q}_0^{s_1-2,s_1/2-1}\big]_\psi &= \big[\mathcal{H}_0^{0,0}, \mathcal{H}_0^{s_1-2,s_1/2-1}\big]_\psi \cap \mathcal{Q}_0^{0,0} \\
&= \mathcal{H}_0^{0,0;\varphi} \cap \mathcal{Q}_0^{0,0} \\
&= \mathcal{Q}_0^{0,0;\varphi}
\end{aligned}
$$

завдяки твердженню 2.3 і формулі (4.120). Зауважимо, що остання рівність є правильною, оскільки елементи просторів $\mathcal{Q}_0^{0,0}$ і $\mathcal{Q}_0^{0,0;\varphi}$ задовольняють одну і ту саму умову узгодження (4.118) і оскільки $\mathcal{H}_0^{0,0;\varphi}$ неперервно вкладений у $\mathcal{H}_0^{0,0}$.

Тепер встановимо правильність такої інтерполяційної формули

$$\mathcal{H}_1^{0,0;\varphi} = \big[\mathcal{H}_1^{0,0}, \mathcal{H}_1^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi \tag{4.121}$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут ψ – інтерполяційний параметр, заданий формулою (4.112).

На підставі твердження 2.4 і формул (4.114), (4.116) і (4.117) маємо

$$\begin{aligned}
&\big[\mathcal{H}_1^{0,0}, \mathcal{H}_1^{s_1-2,(s_1-2)/2}\big]_\psi = \\
&\qquad \big[H^{0,0}(\Omega) \oplus H^{1/2,\,1/4}(S) \oplus H^1(G), \\
&\qquad H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_1-3/2,\,s_1/2-3/4}(S) \oplus H^{s_1-1}(G)\big]_\psi = \\
&\qquad \big[H^{0,0}(\Omega), H^{s_1-2,(s_1-2)/2}(\Omega)\big]_\psi \oplus \big[H^{1/2,\,1/4}(S), H^{s_1-3/2,\,s_1/2-3/4}(S)\big]_\psi \\
&\qquad \oplus \big[H^1(G), H^{s_1-1}(G)\big]_\psi = \\
&\qquad H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{1/2,\,1/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G) = \mathcal{H}_1^{0,0;\varphi}.
\end{aligned}$$

Отже, формула (4.121) правильна з точністю до еквівалентності норм.

Перейдемо до встановлення ізоморфізмів (4.96) і (4.103) у випадку $s = 2$. Якщо $l = 0$ [або $l = 1$], то наші міркування стосуються теореми 4.6 [або теореми 4.7]. Виберемо довільне число $s_1 \in (2; 5/2)$. Нагадаємо, що $\mathcal{Q}_1^{0,0;\varphi} = \mathcal{H}_1^{0,0;\varphi}$, $\mathcal{Q}_1^{0,0} = \mathcal{H}_1^{0,0}$ і $\mathcal{Q}_1^{s_1-2,s_1/2-1} = \mathcal{H}_1^{s_1-2,s_1/2-1}$. Завдяки згаданій у п. 4.9 теоремі Ліонса і Мадженеса [68, теорема 6.2] маємо ізоморфізми у просторах Соболєва

$$\Lambda_l:\, H^{2,1}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_l^{0,0} \quad \text{і} \quad \Lambda_l:\, H^{s_1,s_1/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_l^{s_1-2,(s_1-2)/2}. \tag{4.122}$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром (4.112). Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ до (4.122), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_l : \big[H^{2,1}(\Omega), H^{s_1,s_1/2}(\Omega)\big]_\psi \leftrightarrow [\mathcal{Q}_l^{0,0}, \mathcal{Q}_l^{s_1-2,(s_1-2)/2}]_\psi. \tag{4.123}$$

Застосувавши у (4.123) інтерполяційні формули (4.116) та (4.119) якщо $l = 0$ [або (4.121) якщо $l = 1$] отримаємо необхідний ізоморфізм

$$\Lambda_l : H^{2,1;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_l^{0,0;\varphi}. \tag{4.124}$$

Оператор (4.124) є продовженням за неперервністю відображення

$$u \mapsto \Lambda_l u \quad \text{з} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною у $H^{2,1;\varphi}(\Omega)$. $\square$

4.12. Класичність узагальнених розв'язків

У підрозділі 4.5 ми розглянули умови, за яких узагальнений розв'язок загальної параболічної задачі є класичним, тобто коли він в термінах класичних похідних і слідів функцій задовольняє рівняння у відкритому циліндрі, а на його бічній поверхні і основі – крайові і початкові умови відповідно. Зараз дослідимо детальніше це питання для мішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку. Попередньо зауважимо, що у сучасній теорії параболічних задач однією з умов класичності розв'язку є його неперервність на лінії Γ, що з'єднує бічну поверхню і основу циліндра, у якому досліджується задача (див., наприклад, [36, с.42]). Ця умова звичайно виконується, якщо розв'язок буде неперервним на $\overline{\Omega}$. Для таких класичних розв'язків ми будемо вживати термін "сильно класичний". Зрозуміло, що кожний сильно класичний розв'язок є класичним, але не навпаки.

У теорії параболічних рівнянь мішані задачі для рівнянь другого порядку займають особливе місце, що пов'язано з їх численними застосуваннями. Тому для таких задач, на відміну від загальних задач, розглянемо достатні умови існування як класичних так і сильно класичних розв'язків. Почнемо з необхідних означень.

Із результату М. С. Аграновіча та М. І. Вішіка [1, теорема 12.1] випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{Q}_0^{0,0}$ задача (4.81)–(4.83) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_0^{0,0}$.

Точно так означається узагальнений розв'язок задачі (4.81), (4.82), (4.84). Для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{H}_1^{0,0}$ задача (4.81), (4.82), (4.84) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ ([1, теорема 12.1]). Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{H}_1^{0,0}$.

Означення 4.2. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (4.81)–(4.83) назвемо сильно класичним, якщо узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$, для яких $|\alpha| \leq 2$, є неперервними в Ω, а сама функція u є неперервною у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Іншими словами, узагальнений розв'язок u задачі (4.81)–(4.83) назвемо її сильно класичним розв'язком, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Означення 4.3. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (4.81), (4.82), (4.84) назвемо сильно класичним, якщо узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$, для яких $|\alpha| \leq 2$, є неперервними в Ω, а функція u та її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$ є неперервними у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

В різних практичних задачах (див., наприклад, [48, гл.3, §2, п.3]) корисно розглядати класичні розв'язки, які не є неперервними на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра, у якому досліджується задача. Дамо означення класичності узагальнених розв'язків у щойно зазначеному сенсі.

Означення 4.4. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (4.81)–(4.83) назвемо класичним, якщо

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \quad \text{і} \quad u \in C(\Omega \cup S \cup G).$$

Означення 4.5. Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (4.81), (4.82), (4.84) назвемо класичним, якщо

$$u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega), \quad u \in C(\Omega \cup G)$$

$$u,\ \partial u/\partial x_j \in C(\Omega \cup S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Тут скрізь, як звичайно, $C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ – множина функцій, які є неперервно диференційовні на Ω разом зі своїми частинними похідними $\partial_t u$ і $D^\alpha_x u$, для яких $|\alpha| \le 2$.

Зауважимо, що для початково-крайової задачі (4.81)–(4.83) (або (4.81), (4.82), (4.84)) "гарні" умови $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\overline{S})$ і $h \in C(\overline{G})$ ще не гарантують того, що її розв'язок u є класичним. Це зауваження випливає, зокрема, з результату Л. Хермандера [52, теорема 7.9.8]. Згідно з ним, навіть коли усі коефіцієнти рівняння (4.81) сталі, існує функція $f \in C(\Omega)$ з $\operatorname{supp} f \subset \Omega$, така, що це рівняння має узагальнений розв'язок $u \in C^1(\Omega) \setminus C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ з $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Отже, розглянута задача може мати некласичний розв'язок u у випадку "гарних" правих частин $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \equiv 0$ і $h \equiv 0$.

Для того, щоб гарантувати класичність узагальненого розв'язку розглядуваних задач, потрібно на їх праві частини накладати деякі інші умови. Можна використати простори Гельдера. Зокрема, для задачі (4.81)–(4.83) достатньою умовою існування класичного розв'язку буде (див., наприклад, [36, с.42]) належність функції f простору Гельдера $C^\alpha(\overline{\Omega})$ з деяким $\alpha > 0$, неперервність функцій g та h на $\overline{S}$ і $\overline{G}$ відповідно, та виконання умови узгодження $g \restriction \Gamma = h \restriction \Gamma$. Для існування класичного розв'язку задачі (4.81), (4.82), (4.84), мабуть, лише неперервності функцій g і h буде недостатньо (див. [17, гл. 4, теорема 15.1], [11, §3, теорема 5], [50, с.185]).

Ми підемо іншим шляхом. Сформулюємо умови класичності узагальнених розв'язків задач (4.81)–(4.83) та (4.81), (4.82), (4.84) у термінах приналежності їх правих частин f, g і h гільбертовим функціональним просторам Хермандера.

Для зручності нагадаємо означення локальних просторів (див. п. 4.3), що зустрічаються у наступних теоремах. Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, такою що $U \cap \Gamma = \varnothing$. Позначимо $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$.

Нехай $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp} \chi \subset \omega \cup \pi_1$.

Аналогічно, позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$, де $s > 0$, лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$ із $\operatorname{supp} \chi \subset \pi_2$.

Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$, де $s \geq 0$, лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$ із $\operatorname{supp} \chi \subset \pi_3$.

Тепер сформулюємо достатні умови, за яких узагальнені розв'язки задач (4.81)–(4.83) і (4.81), (4.82), (4.84) відповідно, є сильно класичними.

Теорема 4.8. *Нехай функція $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі* (4.81)–(4.83)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing), \tag{4.125}$$

$$(f,\ g,\ h) \in \mathcal{Q}_0^{-1+n/2,\ -1/2+n/4;\ \varphi_2} \tag{4.126}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 *і* $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,2\}. \tag{4.127}$$

При $n = 2$ *додатково припускаємо, що* φ_2 *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді* $u(x,t)$ *є сильно класичним розв'язком задачі* (4.81)–(4.83).

Зауваження 4.6. Якщо сформулювати аналог теореми 4.8 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (4.125) і (4.126) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\ 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega, \varnothing), \tag{4.128}$$

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_0^{-1+n/2+\varepsilon_2,\ -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Зауваження 4.7. З леми 2.3(ii) випливає, що існують функції $f \notin C(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови (4.125) і (4.126) (або (4.129)).

Теорема 4.9. *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (4.81), (4.82), (4.84), *праві частини якої задовольняють умови* (4.125) *і*

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_1^{n/2,\ n/4;\ \varphi_2} \tag{4.129}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 *і* $\varphi_2 \in \mathcal{M}$, *для яких правильно* (4.127). *Тоді* $u(x,t)$ *є сильно класичним розв'язком задачі* (4.81), (4.82), (4.84).

Зауваження 4.8. Якщо сформулювати аналог теореми 4.9 для соболєвської шкали ($\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (4.125) і (4.129) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (4.128) і

$$(f,\, g,\, h) \in \mathcal{Q}_1^{n/2+\varepsilon_2,\, n/4+\varepsilon_2/2}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Перейдемо до формулювання достатні умов, за яких узагальнені розв'язки задач (4.81)–(4.83) і (4.81), (4.82), (4.84) відповідно, є класичними.

Теорема 4.10. *Нехай функція $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі* (4.81)–(4.83), *праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned} f \in\ & H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\, \varphi_1}(\Omega, \varnothing) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\, \varphi_2}(\Omega, S \cup G), \end{aligned} \tag{4.130}$$

$$g \in H_{\mathrm{loc}}^{1/2+n/2,\, 1/4+n/4;\, \varphi_2}(S), \tag{4.131}$$

$$h \in H_{\mathrm{loc}}^{n/2;\, \varphi_2}(G) \tag{4.132}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 і $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ такими, що

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, 2\}. \tag{4.133}$$

При $n = 2$ додатково припускаємо, що φ_2 є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді $u(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (4.81)–(4.83).

Відмітимо, для означення локальних просторів, що фігурують в теоремі, можна покласти, наприклад, $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Gamma \cup \overline{G}_\tau)$, де $\overline{G}_\tau$ – верхня основа циліндра $\overline{\Omega}$.

Зауваження 4.9. Якщо сформулювати аналог теореми 4.10 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (4.130)–(4.132) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$\begin{aligned}
&f \in H^{1+n/2+\varepsilon_1,\, 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\cap \\
&\qquad H^{-1+n/2+\varepsilon_2,\, -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S\cup G),\\
&g \in H^{1/2+n/2+\varepsilon_2,\, 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}_{\mathrm{loc}}(S),\\
&h \in H^{n/2+\varepsilon_2}_{\mathrm{loc}}(G)
\end{aligned}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

Теорема 4.11. *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (4.81)*,* (4.82)*,* (4.84)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned}
f \in\; &H^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\; \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\cap \\
&H^{n/2,\, n/4;\; \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S)\cap \\
&H^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\; \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega, G),
\end{aligned} \tag{4.134}$$

$$g \in H^{1/2+n/2,\, 1/4+n/4;\; \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S), \tag{4.135}$$

$$h \in H^{n/2;\; \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G) \tag{4.136}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1*,* φ_2 *і* $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.137}$$

При $n = 2$ *додатково припускаємо, що* φ_3 *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді* $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (4.81)*,* (4.82)*,* (4.84)*.*

Відмітимо, для означення локальних просторів на $\Omega \cup S$ і на S можна покласти, наприклад, $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\overline{G} \cup \overline{G}_\tau)$, де $\overline{G}$ і $\overline{G}_\tau$ відповідно нижня і верхня основи циліндра $\overline{\Omega}$.

Зауваження 4.10. Якщо сформулювати аналог теореми 4.11 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (4.134)–(4.136) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$
\begin{aligned}
f \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\ 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega, \varnothing)\cap \\
& H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_2,\ n/4+\varepsilon_2/2}(\Omega, S)\cap \\
& H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2+\varepsilon_3,\ -1/2+n/4+\varepsilon_3/2}(\Omega, G), \\
g \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1/2+n/2+\varepsilon_2,\ 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}(S), \\
h \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_3}(G)
\end{aligned}
$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ і $\varepsilon_3 > 0$.

Переходимо до доведення теорем. Ці доведення спираються на теореми 4.6, 4.7 (про ізоморфізми), теорему 4.2 (про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків) та лему 2.3 (модифікацію теореми вкладання Хермандера [51, теорема 2.2.7]).

Для зручності сформулюємо простий наслідок з леми 2.3 і окремі випадки теореми 4.2 для кожної з розглядуваних задач.

Наслідок 4.3. *Лема 2.3(i) зберігає силу, якщо у ній замінити $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ на $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ і $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\overline{\Omega}$.*

Справді, з означення простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з з леми 2.3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$.

Теорема 4.12 (окремий випадок теореми 4.2). *Нехай* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.81)–(4.83) *із правою частиною* $(f,g,h) \in \mathcal{Q}_0^{0,0}$. *Припустимо, що*

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{s-2,(s-2)/2;\varphi}(\omega,\pi_1), \tag{4.138}$$

$$g \in H_{\mathrm{loc}}^{s-1/2,(s-1/2)/2;\varphi}(\pi_2), \tag{4.139}$$

$$h \in H_{\mathrm{loc}}^{s-1;\varphi}(\pi_3) \tag{4.140}$$

для деяких $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *(при* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Тоді* $u \in H_{\mathrm{loc}}^{s,s/2;\varphi}(\omega,\pi_1)$.

Теорема 4.13 (окремий випадок теореми 4.2). *Нехай* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (4.81), (4.82), (4.84) *із правою частиною* $(f,g,h) \in \mathcal{H}_1^{0,0}$. *Припустимо, що*

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{s-2,(s-2)/2;\varphi}(\omega,\pi_1), \tag{4.141}$$

$$g \in H_{\mathrm{loc}}^{s-3/2,(s-3/2)/2;\varphi}(\pi_2), \tag{4.142}$$

$$h \in H_{\mathrm{loc}}^{s-1;\varphi}(\pi_3) \tag{4.143}$$

для деяких $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *(при* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією). Тоді* $u \in H_{\mathrm{loc}}^{s,s/2;\varphi}(\omega,\pi_1)$.

Теореми 4.12 і 4.13 є окремими випадками теореми 4.2 якщо $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Проте, їх висновки залишаються правильними, коли $s = 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}_1$. Останній випадок потрібний у доведенні теорем 4.10 і 4.11 для $n = 2$ (тобто коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$).

Доведення теорем 4.12 *і* 4.13 *для* $s = 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}_1$. Почнемо з першої теореми. Нехай $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \omega\cup\pi_1$. Переставляючи диференціальний оператор A з оператором множення на χ, можемо записати

$$\Lambda(\chi u) := (A(\chi u), \chi u\big|_S, \chi u\big|_{t=0}) = \chi(f,g,h) + (A'u, 0, 0), \tag{4.144}$$

де

$$A'u = u\partial_t \chi + \sum_{|\alpha|\le 1} a_{\alpha,1}(x,t)\, D_x^\alpha u \in H^{1,1/2}(\Omega).$$

З (4.144), умов (4.138)–(4.140) для $s=2$ і лівого вкладання (2.11) випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{3/2,3/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G) = \mathcal{H}_0^{0,0;\varphi}.$$

Відмітимо, що для вектор-функції $\Lambda(\chi u)$ виконується умова узгодження $(\chi g) \restriction \Gamma = (\chi h) \restriction \Gamma$. Справді, оскільки $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \Gamma) > 0$, то $\chi = 0$ в деякому околі Γ. Отже, $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}_0^{0,0;\varphi}$. Завдяки теоремі 4.6 для $s=2$ остання умова тягне за собою включення $\chi u \in H^{2,1;\varphi}(\Omega)$. Врахувавши довільність вибору функції χ, маємо $u \in H^{2,1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$.

Перейдемо до другої теореми. Нехай $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Переставляючи кожний з диференціальних операторів A і B з оператором множення на χ, можемо записати

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi u) := (A(\chi u), &B(\chi u)\big|_S, \chi u\big|_{t=0}) \\ &= \chi(f,g,h) + (A'u, B'u\big|_S, 0),\end{aligned} \tag{4.145}$$

де

$$A'u = u\partial_t \chi + \sum_{|\alpha|\le 1} a_{\alpha,1}(x,t)\, D_x^\alpha u \in H^{1,1/2}(\Omega),$$

$$B'u\big|_S = u \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j \chi\big|_S \in H^{3/2,3/4}(S).$$

З (4.145), умов (4.141)–(4.143) для $s = 2$, лівого вкладання (2.11) (для просторів на Ω і на S) випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{1/2,1/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G) = \mathcal{H}_1^{0,0;\varphi}.$$

Завдяки теоремі 4.7 для $s = 2$ останнє включення тягне за собою включення $\chi u \in H^{2,1;\varphi}(\Omega)$. Врахувавши довільність вибору функції χ, маємо $u \in H^{2,1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$. □

Доведення теореми 4.8. Спочатку покажемо, що $u \in C(\overline{\Omega})$. З включення (4.126) та ізоморфізму (4.96) для $s = 1 + n/2$ випливає включення

$$u \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_2}(\Omega).$$

Звідси на підставі наслідку 4.3, де $p := 0$ і $b := 1$, робимо висновок, що $u \in C(\overline{\Omega})$.

Тепер покажемо, що $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$. З умов з (4.125) і (4.126) маємо включення

$$\begin{aligned} &f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing),\\ &g \in \mathcal{D}'(S) = H^{5/2+n/2,\ 5/4+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing),\\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H^{2+n/2;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing). \end{aligned}$$

З цих включень і теореми 4.12, де $s := 3 + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{3+n/2,\ 3/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing). \tag{4.146}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини Ω. Знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $O(x_0) \subset \Omega$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.146) випливає включення $\chi u \in H^{3+n/2,\ 3/2+n/4;\ \varphi_1}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 4.3, де $p := 2$ і $b := 1$, маємо включення

$$\partial_t(\chi u),\ D_x^\alpha(\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leq 2.$$

З останніх включень випливає, що узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$ з $|\alpha| \leq 2$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою Ω, то $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$. □

Доведення теореми 4.9. Проводимо ті самі міркування, що і при доведенні теореми 4.8. З умови (4.129) випливає на підставі ізоморфізму (4.103) для $s = 2 + n/2$, що $u \in H^{2+n/2,\ 1+n/4,\ \varphi_2}(\Omega)$. Тому згідно з наслідком 4.3, де $p := 1$ і $b := 1$, маємо потрібні включення $u \in C(\overline{\Omega})$ і $\partial u/\partial x_j \in C(\overline{\Omega})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Тепер покажемо, що $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$. З умов з (4.125) і (4.129) маємо включення

$$\begin{aligned} &f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}(\Omega, \varnothing),\\ &g \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{3/2+n/2,\ 3/4+n/4;\ \varphi_1}(\varnothing),\\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H_{\mathrm{loc}}^{2+n/2;\ \varphi_1}(\varnothing). \end{aligned}$$

З цих включень і теореми 4.13, де $s := 3 + n/2$, випливає включення (4.146). У доведенні теореми 4.8 було показано, що включення $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$ є наслідком включення (4.146).

□

Доведення теореми 4.10. Спочатку покажемо, що $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$. З умов (4.130)–(4.132) маємо включення

$$\begin{aligned} &f \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}(\Omega, \varnothing),\\ &g \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{5/2+n/2,\ 5/4+n/4;\ \varphi_1}(\varnothing),\\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H_{\mathrm{loc}}^{2+n/2;\ \varphi_1}(\varnothing). \end{aligned}$$

У доведенні теореми 4.8 було показано, що включення $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ є наслідком цих включень.

Залишилось довести, що $u \in C(\Omega \cup S \cup G)$. З умов (4.130)–(4.132) і теореми 4.12, де $s := 1 + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\,\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S \cup G). \tag{4.147}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S \cup G$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup S \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.147) випливає включення $\chi u \in H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\,\varphi_2}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 4.3, де $p := 0$ і $b := 1$, маємо включення $\chi u \in C(\overline{\Omega})$. З останнього включення випливає, що функція u є неперервною в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S \cup G$, то $u \in C(\Omega \cup S \cup G)$. □

Доведення теореми 4.11. Спочатку покажемо, що $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$. З умов (4.134)–(4.136) маємо включення

$$\begin{aligned} &f \in H^{1+n/2,\,1/2+n/4;\,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing),\\ &g \in \mathcal{D}'(S) = H^{3/2+n/2,\,3/4+n/4;\,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing),\\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H^{2+n/2;\,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing). \end{aligned}$$

У доведенні теореми 4.9 було показано, що включення $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ є наслідком цих включень.

Наступним кроком доведемо, що функція u і всі її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$, де $j \in \{1, \dots, n\}$, є неперервними на $\Omega \cup S$. З умов (4.134)–

(4.136) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in\, H^{n/2,\, n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S),\\
&g \in H^{1/2+n/2,\, 1/4+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S),\\
&h \in \mathcal{D}'(G) = H^{1+n/2;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\varnothing).
\end{aligned}
$$

З цих включень і теореми 4.13, де $s := 2 + n/2$, випливає, що

$$
u \in H^{2+n/2,\, 1+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S). \tag{4.148}
$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий що $O(x_0) \subset \Omega \cup S$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup S$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.148) випливає включення $\chi u \in H^{2+n/2,\, 1+n/4;\, \varphi_2}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 4.3, де $p := 1$ і $b := 1$, маємо включення

$$
\chi u,\ \partial(\chi u)/\partial x_j \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, n\}.
$$

З останніх включень випливає, що функція u і всі її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$, де $j \in \{1, \ldots, n\}$, є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S$, то це правильно на всій множині $\Omega \cup S$.

Нарешті, покажемо, що $u \in C(\Omega \cup G)$. Справді, з умов (4.134)–(4.136) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in\, H^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\, \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega, G),\\
&g \in \mathcal{D}'(S) = H^{-1/2+n/2,\, -1/4+n/4;\, \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\varnothing),\\
&h \in H^{n/2;\, \varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G).
\end{aligned}
$$

З цих включень і теореми 4.13, де $s := 1 + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_3}(\Omega, G). \tag{4.149}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup G$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $\operatorname{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (4.149) випливає включення $\chi u \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_3}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 4.3, де $p := 0$ і $b := 1$, маємо включення $\chi u \in C(\overline{\Omega})$. З останнього включення випливає, що функція u є неперервною в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup G$, то $u \in C(\Omega \cup G)$. $\square$

4.13. Початково-крайові задачі для рівняння теплопровідності у прямокутнику. Теореми про ізоморфізми

У цьому підрозділі конкретизуємо та уточнимо результати підрозділу 4.2 (теореми про ізоморфізми) на випадок мішаних задач для двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами Діріхле або Неймана. Міркування цього підрозділу є подібними до підрозділів 4.8 і 4.9.

Нехай $\Omega := (0,l) \times (0,\tau)$, де l і τ є довільні додатні числа. $S_0 = \{(0,t) : 0 < t < \tau\}$, $S_1 = \{(l,t) : 0 < t < \tau\}$ є бічними сторонами, а $G = \{(x,0) : 0 < x < l\}$ є основою прямокутника Ω. Розглянемо в Ω рівняння теплопровідності

$$\begin{gathered} Au \equiv u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = f(x,t) \\ \text{для всіх } x \in (0,l) \text{ і } t \in (0,\tau). \end{gathered} \tag{4.150}$$

У роботі досліджуємо початково-крайову параболічну задачу, яка складається з рівняння (4.150), початкової умови

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{для всіх } x \in (0,l) \tag{4.151}$$

і крайової умови Діріхле

$$u(0,t) = g_0(t) \quad \text{і} \quad u(l,t) = g_1(t) \quad \text{для всіх } t \in (0,\tau), \tag{4.152}$$

або крайової умови Неймана

$$u'_x(0,t) = g_0(t) \quad \text{і} \quad u'_x(l,t) = g_1(t) \quad \text{для всіх } t \in (0,\tau). \tag{4.153}$$

Як вже неодноразово зазначалось при дослідженні мішаних параболічних задач, для для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок такої задачі, її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див., наприклад, п. 4.6). Конкретизуємо ці умови спочатку для задачі (4.150)–(4.152). Використаємо для цього простори Соболєва.

Пов'яжемо з параболічною задачею (4.150)–(4.152) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda_0 u : (Au, u\restriction_{\overline{S_0}}, u\restriction_{\overline{S_1}}, u\restriction_{\overline{G}}), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.154}$$

Тут

$$\overline{S}_0 = \{(0,t) : 0 \leq t \leq \tau\},$$

$$\overline{S}_1 = \{(l,t) : 0 \leq t \leq \tau\},$$

$$\overline{G} = \{(x,0) : 0 \leq x \leq l\}.$$

Нехай $s \geq 2$. Відображення (4.154) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\begin{aligned} \Lambda_0 :\ H^{s,s/2}(\Omega) \to & H^{s-2,s/2-1}(\Omega) \oplus \\ & \oplus (H^{s/2-1/4}(0,\tau))^2 \oplus H^{s-1}(0,l). \end{aligned} \tag{4.155}$$

Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$f \in H^{s-2,s/2-1}(\Omega), \quad g_0, g_1 \in H^{s/2-1/4}(0,\tau) \quad \text{і} \quad h \in H^{s-1}(G) \tag{4.156}$$

задачі за формулою

$$(f, g_0, g_1, h) := \Lambda_0 u$$

за допомогою цього обмеженого оператора.

Згідно з [41, гл. II, теорема 7], означені за замиканням сліди $u_t^{(k)}(\cdot,0) \in H^{s-1-2k}(0,l)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \le k < s/2-1/2$ (і лише для таких k).

Скориставшись (4.150) і (4.151), виразимо ці сліди через функції $f(x,t)$ і $h(x)$ за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} &u_t^{(0)}(x,0) = u(x,0) = h(x),\\ &u_t^{(k)}(x,0) = (u_t^{(k-1)}(x,0))''_{xx} + f_t^{(k-1)}(x,0) \\ &\text{для кожного} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{такого, що} \quad 1 \le k < s/2-1/2. \end{aligned} \tag{4.157}$$

Окрім того, означені сліди $g_0^{(k)}(0)$ і $g_1^{(k)}(0)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \le k < s/2-3/4$ (і тільки для цих k). Це випливає з (4.156). Тому, внаслідок крайової умови Діріхле (4.152), виконуються рівності

$$g_0^{(k)}(0) = u_t^{(k)}(0,0) \quad \text{і} \quad g_1^{(k)}(0) = u_t^{(k)}(l,0) \tag{4.158}$$

для цих цілих k. Праві частини цих рівностей є коректно означеними, оскільки функція $u_t^{(k)}(\cdot,0) \in H^{s-1-2k}(0,l)$ має сліди $u_t^{(k)}(0,0)$ і $u_t^{(k)}(l,0)$ за умови $s-3/2-2k>0$.

Тепер підставивши (4.157) у (4.158), дістаємо умови узгодження

$$\begin{aligned} &g_0^{(k)}(0) = v_k(0) \quad \text{і} \quad g_1^{(k)}(0) = v_k(l)\\ &\text{з} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad 0 \le k < s/2-3/4. \end{aligned} \tag{4.159}$$

Тут функції v_k означені за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} &v_0(x) = h(x),\\ &v_k(x) = (v_{k-1}(x))''_{xx} + f_t^{(k-1)}(x,0) \end{aligned} \tag{4.160}$$

для кожного $\quad k \in \mathbb{Z} \quad$ такого, що $\quad 1 \le k < s/2-1/2$.

Оскільки

$$v_k \in H^{s-1-2k}(0,l) \quad \text{для кожного} \quad k \in \mathbb{Z} \cap [0, s/2-1/2) \tag{4.161}$$

завдяки (4.156), то означені сліди $v_k(0)$ і $v_k(l)$ якщо $s-3/2-2k>0$. Отже, умови узгодження (4.159) є коректно поставленими.

Нагадаємо,

$$E_0 := \{2r+3/2 : 1 \leq r \in \mathbb{Z}\}.$$

Відмітимо, що E_0 – це множина всіх розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.159) в залежності від $s \geq 2$.

Основний результат для параболічної задачі (4.150)–(4.152) полягає в тому, що лінійне відображення (4.154) продовжується єдидиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між відповідними парами функціональних просторів Хермандера. Вкажемо ці простори. Нехай $s>2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Візьмемо $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму; іншими словами, $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ виступає як простір розв'язків u задачі. Для введення другого простору дії ізоморфізму розглянемо гільбертів простір

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega) \oplus (H^{s/2-1/4;\varphi}(0,\tau))^2 \oplus H^{s-1;\varphi}(0,l).$$

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.155). Другий простір дії ізоморфізму вкладений у $\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Будемо позначати його $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Дамо означення цього простору окремо для випадку $s \notin E_0$ і для випадку $s \in E_0$.

Нехай спочатку $s \notin E_0$. За означенням, лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\bigl(f, g_0, g_1, h\bigr) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (4.159). Як вже зазначалось раніше, ці умови є коректно поставленими у випадку просторів Соболєва, зокрема, для кожного $\bigl(f, g_0, g_1, h\bigr) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}$ для достатньо малого $\varepsilon>0$. Отже, вони також є коректно поставленими для кожного $\bigl(f, g_0, g_1, h\bigr) \in$

$\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ завдяки неперервному вкладанню

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}.$$

Таким чином, наше означення є коректним. Наділимо лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Це доводиться точно так, як ми доводили повноту $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ (див. підрозділ 4.9).

Якщо $s \in E_0$, то означаємо гільбертовий простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції пари тільки що введених аналогів цього простору. А саме, покладемо

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\bigr]_{1/2}. \tag{4.162}$$

Тут число $\varepsilon \in (0,1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції записаної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$. Про таку інтерполяцію йшлося у п. 2.4. Гільбертовий простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$, означений формулою (4.162) не залежить від вибору числа ε з точністю до еквівалентності норм і є неперервно вкладеним у $\widetilde{\mathcal{H}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$.

Тепер сформулюємо теорему про ізоморфізми для параболічної початково-крайової задачі (4.150)–(4.152).

Теорема 4.14. *Для довільних $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (4.154) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_0 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{4.163}$$

Розглянемо тепер параболічну задачу (4.150), (4.151), (4.153). Запишемо умови узгодження для правих частин цієї задачі. Пов'яжемо з нею лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda_1 u : (Au, u'_x \restriction_{\overline{S_0}}, u'_x \restriction_{\overline{S_1}}, u \restriction_{\overline{G}}), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.164}$$

Для довільного дійсного $s \geq 2$ це відображення продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda_1 : \, H^{s,s/2}(\Omega) \to H^{s-2,s/2-1}(\Omega) \oplus (H^{s/2-3/4}(0,\tau))^2 \oplus H^{s-1}(0,l). \tag{4.165}$$

Виберемо довільно функцію $u(x,t)$ з простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ і означимо праві частини

$$f \in H^{s-2,s/2-1}(\Omega), \quad g_0, g_1 \in H^{s/2-3/4}(0,\tau), \quad \text{і} \quad h \in H^{s-1}(0,l)$$

задачі за формулою

$$(f, g_0, g_1, h) := \Lambda_1 u$$

за допомогою цього обмеженого оператора.

Тут, на відміну від (4.156), з включення $u \in H^{s,s/2}(\Omega)$ випливає, що $g_0(\cdot) = u'_x(0,\cdot)$ і $g_1(\cdot) = u'_x(l,\cdot)$ належать простору $H^{s/2-3/4}(0,\tau)$ завдяки [41, гл. II, теорема 7]. Отже, означені сліди $g_0^{(k)}(0)$ і $g_1^{(k)}(0)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ таких, що $0 \leq k < s/2 - 5/4$ (і лише цих k). Ми можемо виразити ці сліди через функцію $u(x,t)$ та її похідні по часу, а саме,

$$g_0^{(k)}(0) = (u_t^{(k)}(x,0))'_x\big|_{x=0} \quad \text{і} \quad g_1^{(k)}(0) = (u_t^{(k)}(x,0))'_x\big|_{x=l}. \tag{4.166}$$

Тут функція $u_t^{(k)}(x,0)$ змінної $x \in (0,l)$ виражена через функції $f(x,t)$ і $h(x)$ за рекурентною формулою (4.157).

Підставивши (4.157) у праву частину формули (4.166), отримаємо умови узгодження

$$\begin{gathered} g_0^{(k)}(0) = (v_k)'_x(0) \quad \text{і} \quad g_1^{(k)}(0) = (v_k)'_x(l) \\ \text{з} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{і} \quad 0 \leq k < s/2 - 5/4. \end{gathered} \tag{4.167}$$

Тут функції v_k визначені на $(0,l)$ за рекурентною формулою (4.160). Відмітимо, що завдяки (4.161) означені праві частини рівностей (4.167) якщо $s-5/2-2k>0$. Отже, умови узгодження (4.167) є коректно поставленими. Зауважимо, якщо $s\leq 5/2$, то умови узгодження у задачі відсутні.

Нагадаємо,

$$E_1:=\{2r+1/2:1\leq r\in\mathbb{Z}\}.$$

Зауважимо, що E_1 – це множина всіх розривів функції, яка визначає кількість умов узгодження (4.167) в залежності від $s\geq 2$.

Щоб сформулювати теорему про ізоморфізми для параболічної задачі (4.150), (4.151), (4.153) введемо простори, в яких буде діяти цей ізоморфізм. Нехай $s>2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Як і вище, візьмемо $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ як вихідний простір цього ізоморфізму. Другий простір дії ізоморфізму позначимо через $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, він вкладений у гільбертовий простір

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}:=H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\oplus(H^{s/2-3/4;\varphi}(0,\tau))^2\oplus H^{s-1;\varphi}(0,l).$$

У соболєвському випадку $\varphi\equiv 1$ цей простір збігається з простором в який діє обмежений оператор (4.165).

Якщо $s\notin E_1$, то, за означенням, лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ складається з усіх вектор–функцій $\bigl(f,g_0,g_1,h\bigr)\in\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (4.167). Означення є коректним, оскільки умови узгодження є коректно поставленими для довільного $\bigl(f,g_0,g_1,h\bigr)\in\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}$ для достатньо малого $\varepsilon>0$ і тому, що

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2}.$$

Лінійний простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ наділимо скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ є повним, тобто гільбертовим. Це доводиться точно так, як ми доводили повноту $\mathcal{Q}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ (див. підрозділ 4.9). Відмітимо, якщо $2 \leq s < 5/2$, то простори $\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ співпадають, оскільки в цьому випадку умови узгодження (4.167) відсутні.

Якщо $s \in E_1$, то означимо гільбертовий простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$ за допомогою інтерполяції, а саме

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi} := \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2-\varepsilon,s/2-1-\varepsilon/2;\varphi}, \widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2+\varepsilon,s/2-1+\varepsilon/2;\varphi}\bigr]_{1/2}. \tag{4.168}$$

Тут число $\varepsilon \in (0,1/2)$ вибрано довільно. Цей гільбертовий простір не залежить від вибору ε з точністю до еквівалентності норм і неперервно вкладений в $\widetilde{\mathcal{H}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$.

Тепер можемо сформулювати теорему про ізоморфізми для параболічної початково-крайової задачі (4.150), (4.151), (4.153).

Теорема 4.15. *Для довільних $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (4.164) *продовжується единим чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_1 : H^{s,s/2;\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{4.169}$$

Як вже неодноразово зазначалось, необхідність означати простір $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ ($\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$) окремо для випадку $s \in E_0$ ($s \in E_1$) обумовлена наступним: якщо означити цей простір для $s \in E_0$ ($s \in E_1$) у той же спосіб, що і для $s \notin E_0$ ($s \notin E_1$), то ізоморфізм (4.163) ((4.169)) порушується щонайменше для $\varphi \equiv 1$. Це випливає з результату Солоннікова [44, § 6], див. також [68, зауваження 6.4].

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ теореми 4.14 і 4.15 є відомими. Вони є окремими випадками теореми, доведеної Ліонсом і Мадженесом [68, теорема 6.2] для лінійного параболічного оператора в Ω порядку $2m$

($m \in \mathbb{N}$) по змінній x і першого порядку по змінній t з нормальними крайовими умовами у припущенні $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ і $s/(2m) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ (їх результат охоплює і граничний випадок $s = 2$). Подібну теорему для загальних лінійних $2b$–параболічних початково–крайових задач у анізотропних просторах Соболєва було встановлено М. С. Аграновічем та М. І. Вішиком [1, теорема 12.1] у припущенні $s/(2b) \in \mathbb{N}$. Це припущення можна зняти, що випливає з результату М. В. Житарашу [7, теорема 9.1].

4.14. Доведення теорем підрозділу 4.13

Виводяться теореми 4.14 і 4.15 тими самими міркуваннями, що і теореми 4.6 і 4.7 зі згаданого результату Ліонса і Мадженеса шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Тому детально не будемо записувати доведення. Опишемо його схематично.

Розглянувши попередньо інтервали

$$J_{0,1} := (2,\, 7/2), \quad J_{0,r} := (2r - 1/2,\, 2r + 3/2), \text{ з } 2 \leq r \in \mathbb{Z},$$

і

$$J_{1,0} := (2, 5/2), \quad J_{1,r} := (2r + 1/2,\, 2r + 5/2), \text{ з } 1 \leq r \in \mathbb{Z},$$

зміни величини s, сформулюємо аналог леми 4.5 для просторів $\widetilde{\mathcal{Q}}_0^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\widetilde{\mathcal{Q}}_1^{s-2,s/2-1;\varphi}$. Відмітимо, що кількість умов узгодження (4.159) і (4.167) є сталою на цих інтервалах. А саме, якщо s належить деякому $J_{\lambda,r}$, то ця кількість дорівнює $2r$.

Лема 4.8. *Нехай* $\lambda \in \{0, 1\}$ *і* $1 \leq r \in \mathbb{Z}$. *Припустимо, що дійсні числа* $s_0, s, s_1 \in J_{\lambda,r}$ *задовольняють нерівності* $s_0 < s < s_1$ *і що* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Визначимо інтерполяційний параметр* $\psi \in \mathcal{B}$ *формулою* (2.27). *Тоді правильна така рівність просторів*

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\lambda^{s-2,s/2-1;\varphi} = \bigl[\widetilde{\mathcal{Q}}_\lambda^{s_0-2,s_0/2-1}, \widetilde{\mathcal{Q}}_\lambda^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi \tag{4.170}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Схематичне доведення леми. Згідно з твердженнями 2.4, 2.6 і теоремою 2.6 отримуємо:

$$\bigl[\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda^{s_0-2,s_0/2-1}, \widetilde{\mathcal{H}}_\lambda^{s_1-2,s_1/2-1}\bigr]_\psi = \widetilde{\mathcal{H}}_\lambda^{s-2,s/2-1;\varphi} \tag{4.171}$$

з еквівалентністю норм.

Тепер необхідна формула (4.170) випливає з (4.171) за допомогою твердження 2.3. Для цього нам потрібно представити лінійне відображення P на $\widetilde{\mathcal{H}}_{\lambda}^{s_0-2,s_0/2-1}$ таке, що P є проектором простору $\widetilde{\mathcal{H}}_{\lambda}^{s_j-2,s_j/2-1}$ на його підпростір $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\lambda}^{s_j-2,s_j/2-1}$ для кожного $j \in \{0, 1\}$. Розглянемо спочатку випадок $\lambda = 0$. Для даного $(f, g_0, g_1, h) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{0}^{s_0-2,s_0/2-1}$ покладемо

$$
\begin{aligned}
g_0^* &= g_0 + T\big(v_0(0) - g_0^{(0)}(0), \ldots, v_{r-1}(0) - g_0^{(r-1)}(0)\big),\\
g_1^* &= g_1 + T\big(v_0(l) - g_1^{(0)}(0), \ldots, v_{r-1}(l) - g_1^{(r-1)}(0)\big).
\end{aligned}
$$

Тут функції $v_k \in H^{s_0-1-2k}(0,l)$, з $k = 0, \ldots, r-1$, визначені рекурентною формулою (4.160), і T – відображення (4.75). Лінійне відображення $P : (f, g_0, g_1, h) \mapsto (f, g_0^*, g_1^*, h)$, визначене на всіх векторах $(f, g_0, g_1, h) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{0}^{s_0-2,s_0/2-1}$, є шуканим.

Розглянемо тепер випадок $\lambda = 1$. Для даного $(f, g_0, g_1, h) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{1}^{s_0-2,s_0/2-1}$ покладемо

$$
\begin{aligned}
g_0^* &= g_0 + T\big((v_0)'_x(0) - g_0^{(0)}(0), \ldots, (v_{r-1})'_x(0) - g_0^{(r-1)}(0)\big),\\
g_1^* &= g_1 + T\big((v_0)'_x(l) - g_1^{(0)}(0), \ldots, (v_{r-1})'_x(l) - g_1^{(r-1)}(0)\big).
\end{aligned}
$$

Тут функції $v_0, \ldots, v_{r-1}$ і відображення T такі самі, як і у випадку $\lambda = 0$. Лінійне відображення $P : (f, g_0, g_1, h) \mapsto (f, g_0^*, g_1^*, h)$, визначене на всіх векторах $(f, g_0, g_1, h) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{1}^{s_0-2,s_0/2-1}$, є шуканим. $\square$

Відмітимо, якщо $\lambda = 1$ і $r = 0$, то висновок леми 4.8 залишається правильним. Дійсно, у цьому випадку $\widetilde{\mathcal{Q}}_{1}^{s-2,s/2-1;\varphi} = \widetilde{\mathcal{H}}_{1}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ і $\widetilde{\mathcal{Q}}_{1}^{s_j-2,s_j/2-1} = \widetilde{\mathcal{H}}_{1}^{s_j-2,s_j/2-1}$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, так що (4.170) збігається з рівністю (4.171). Остання є правильною і в розглянутому випадку.

Доведення теорем 4.14 і 4.15 таке саме, як і теорем 4.6 і 4.7 для випадку $s>2$ (див. п. 4.10), тільки з λ замість l і $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\lambda}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ замість $\mathcal{Q}_{l}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ відповідно.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджено характер розв'язності загальних лінійних параболічних початково–крайових задач та властивості регулярності їх узагальнених розв'язків у гільбертових анізотропних просторах Хермандера. Знайдено нові достатні умови того, що узагальнені розв'язки таких задач є класичними. Окремо розглянуто випадки багатовимірного і двовимірного параболічних рівнянь. Отримані результати конкретизовано та доповнено для важливих з точки зору застосувань задач для параболічних рівнянь другого порядку.

Основні результати четвертого розділу.

1. Доведено, що оператори, породжені загальними лінійними неоднорідними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера.
2. Встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.
3. Знайдено достатні умови, за яких узагальнені розв'язки досліджуваних параболічних задач є класичними.
4. Результати попередніх пунктів конкретизовано на випадок мішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку і доповнено для цих задач теоремами про ізоморфізми для граничного значення числового показника регулярності $s = 2$.

Ці результати опубліковано у статтях [21, 22, 24–27, 72, 74–76, 78, 80] та висвітлено у тезах конференцій [31, 32, 83–85].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертації побудована теорія лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових анізотропних просторів Хермандера. Ці простори параметризуються функціональним параметром, що дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність належних ним функцій/розподілів, ніж це можливо у рамках класичних просторів Соболєва і Гельдера, параметризованих числами.

Основні результати роботи є такі.

1. Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою.
2. Доведено, що ці простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.
3. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.
4. Встановлено теореми про коректну розв'язність у просторах Хермандера лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами, а саме, доведено, що оператори, породжені цими задачами, здійснюють ізоморфізми між відповідними анізотропними просторами Хермандера.

5. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.
6. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків цих задач.
7. Доведено, що оператори, породжені загальними лінійними неоднорідними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера.
8. Встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.
9. Знайдено достатні умови, за яких узагальнені розв'язки досліджуваних параболічних задач є класичними.
10. Результати пунктів 7-9 конкретизовано на випадок мішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку і доповнено для цих задач теоремами про ізоморфізми для граничного значення числового показника регулярності $s = 2$.
11. Доведено теореми про ізоморфізми у просторах Хермандера, породжені крайовими задачами для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами, і встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків цих задач у просторах Хермандера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агранович М. С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи матем. наук. — 1964. — Т. 19, № 3. — С. 53 — 161.
2. Берг Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. — Москва: Мир, 1980. — 264 с.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
4. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — Киев: Выща школа, 1990. — 600 с.
5. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — Москва: Наука, 1975. — 480 с.
6. Волевич Л. Р. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения / Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях // Успехи матем. наук. — 1965. — Т. 20, № 1. — С. 3—74.
7. Житарашу Н. В. Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2–теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И.Г. Петровскому уравнения / Н. В. Житарашу // Математический сборник. – 1985. – **128(170)**, № 4. – С. 451–473.
8. Житарашу Н. В. О корректной разрешимости общих модельных параболических граничных задач в пространствах $\mathcal{H}^s$, $-\infty < s < \infty$ / Н. В. Житарашу // Изв. АН СССР. – 1987. – **51**,№ 5. – С. 962–993.

9. Житарашу Н. В. L_2–теория обобщенных решений общих линейных параболических граничных задач / Н. В. Житарашу // Математические исследования. – 1990. – **112**. – С. 104–115.
10. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В. А. Ильин // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97 – 154.
11. Ильин А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 3. – С. 3 – 146.
12. Ивасишен С. Д. О корректной разрешимости общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера / С. Д. Ивасишен // Доклады АН УССР. – 1977. – серия А., № 5. – С. 396 – 400.
13. Ивасишен С. Д. Линейные параболические граничные задачи / С. Д. Ивасишен. – Киев: Выща школа, 1987. – 72 с.
14. Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач / С. Д. Ивасишен. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.
15. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов / С. Г. Крейн // Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 130, № 3. — С. 491 — 494.
16. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
17. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

18. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — Москва: Мир, 1971. — 372 с. (Переклад видання: Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. — Paris: Dunod, 1968. — 372 p.)

19. Лось В. М. Параболічна гранична задача в області, межа якої складається з многовидів різних розмірностей / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2002. — № 1. — С. 47 – 53.

20. Лось В. М. Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2. — С. 219 – 234.

21. Лось В. Н. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости / В. Н. Лось, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. — 2014. — № 6. — С.23 – 31.

22. Лось В. М. Неоднорідні параболічні мішані задачі і простори узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 249 – 267.

23. Лось В. М. Параболічні мішані задачі для систем Петровського у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2014. — № 10. — С. 24 – 32.

24. Лось В. М. Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і 2b-анізотропні простори Хермандера / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 2. — С. 276 – 290.

25. Лось В. М. Про достатні умови класичності узагальнених розв'язків деяких мішаних параболічних задач / В. М. Лось // Збірник праць

Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 1. — С. 228 – 243.

26. Лось В. М. Умови класичності розв'язків другої крайової задачі для параболічних рівнянь / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 175 – 192.
27. Лось В. М. Регулярність розв'язків за-гальних параболічних задач у просторах Хермандера / В. М. Лось, В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Доповіді НАН України. — 2017. — № 8. — С. 3 – 10.
28. Лось В. М. Про параболічні задачі у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Боголюбовські читання DIF-2013 (Севастополь, 23-30 червня 2013).— Севастополь, 2013.— С.133—134.
29. Лось В. Н. О параболических смешанных задачах в уточненной соболевской шкале / В. Н. Лось // Крымская международная математическая конферен-ция (Судак, 22.09 - 4.10 2013).— Судак, 2013.— Т.2.— С.46—47.
30. Лось В. М. Про застосування інтерполяції з функціональним параметром у теорії параболічних диференціальних рівнянь / В. М. Лось, О. О. Мурач // Матеріали П'ятнадцятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014) .– К., 2014.— С.201.
31. Лось В. М. Про деякі параболічні задачі у просторах Хермандера / В. М. Лось // International Conference of Young Mathematicians (June 3-6, 2015, Kyiv, Ukraine). K.: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015.— P. 154.
32. Лось В. М. Про задачу Діріхле для параболічного рівняння другого порядку у просторах Хермандера / В. М. Лось // Сімнадцята

міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19 - 20 травня, 2016р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ : НТУУ "КПІ", 2016. — С. 189 – 190.

33. Мадженес Э. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных / Э. Мадженес // Успехи матем. наук. — 1966. — Т. 21, № 2. — С. 169 — 218.

34. Матийчук М. И. О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини / М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**,№ 3. – С. 328 – 337.

35. Михайлец В. А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи / В. А. Михайлец, А. А. Мурач. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с.

36. Михайлов В. П. Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем / В. П. Михайлов // Мат. энциклопедия. Т.5 – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – 1248 с.

37. Петровский И. Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И. Г. Петровский // Бюлл. МГУ. — 1938.— секция А, 1, вып. 7.— С. 1–72.

38. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. / И. Г. Петровский // Алгебраическая геометрия. – Москва: Наука, 1986. – 504 с.

39. Ройтберг И. Я. Формула Грина и плотность решений общих параболических задач в функциональных пространствах на мно-

гообразиях/ И. Я. Ройтберг, Я. А. Ройтберг // Диф. ур-ния.— 1995.— Т. 31, N8.— С.1426—1433.

40. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — Москва: Наука, 1985. — 142 с.
41. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Н. Слободецкий // Ученые записки Ленинградского гос. пед. ин-та. — 1958. — Т 187. — С. 54—112.
42. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_2 решений линейных эллиптических и параболических систем / Л. Н. Слободецкий // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. — 1960. — № 7. — С. 28—47.
43. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — Ленинград: Изд. Ленинград. ун-та, 1950. — 255 с.
44. Солонников В.А. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1964. —Т. 70. — С. 133—212.
45. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1965. —Т. 83. — С. 3—163.
46. Солонников В. А. Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1967. — Т. 102. — С. 137—160.

47. Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2-х томах / А. И. Степанец. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 468 с. — Т. 2. — 427 с.

48. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.— Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

49. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

50. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман.– Москва: Мир, 1968. – 428 с.

51. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1965. — 380 с. (Переклад видання: Hörmander L. Linear partial differential operators. — Berlin: Springer, 1963. — vii+287 p.)

52. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 464 с.

53. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.

54. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

55. Anop A. V. Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter / A. V. Anop, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — V. 20, no. 2. — P. 103 — 116.

56. Anop A. V. Regular elliptic boundary-value problems in the extended Sobolev scale / A. V. Anop, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2014. — **66**, no. 7. — P. 969 – 985.

57. Bingham N. H. Regular variation / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

58. Brudnyĭ Yu. A. Interpolation functors and interpolation spaces / Yu. A. Brudnyĭ, N. Ya. Krugljak. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — xvi+718 p.

59. Cobos F. Hardy-Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter / F. Cobos, D. L. Fernandez // Proc. Lund Conf. 1986. Lecture Notes in Math. V. 1302. — Berlin: Springer, 1988. — P. 158 — 170.

60. Eidel'man S. D. Parabolic Systems / S. D. Eidel'man. — North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

61. Eidel'man S. D. Parabolic equations / S. D. Eidel'man // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.

62. Eidel'man S. D. Parabolic boundary value problems / S. D. Eidel'man, N. V. Zhitarashu. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.

63. Foiaş C. Sur certains théorèmes d'interpolation / C. Foiaş, J.-L. Lions // Acta Scient. Math. Szeged. — 1961. — V. 22, № 3 – 4. — P. 269 — 282.

64. Jacob N. Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 volumes / N. Jacob. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

65. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation / S. Janson // J. Funct. Anal. — 1981. — V. 44, № 1. — P. 50 — 73.

66. Karamata J. Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood / J. Karamata // Mathematica (Cluj). — 1930. — V. 3. — P. 33—48.

67. Lions J.-L. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications / J.-L. Lions // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie. — 1958. — V. 50, № 4. — P. 419 — 432.

68. Lions J.-L. Non-homogeneous boundary-value problems and applications, Vol. II / J.-L. Lions, E. Magenes. — Berlin: Springer, 1972. — x+242 p.

69. Los V. Sobolev's Problem in Complete Scale of Banach Spaces / V. Los, Ya. Roitberg, A. Sklyarets // Operator Theory: Advances and Applications. — 2000. — **117**. — P. 301 – 312.

70. Los V. M. Sobolev's Problem for Elliptic Systems / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2002. — **8**, no. 4. — P. 58 – 71.

71. Los V. Parabolic problems and interpolation with a function parameter / V. Los, A. A. Murach // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2013. — **19**, no. 2. — P. 146 – 160.

72. Los V. M. Mixed Problems for the Two-Dimensional Heat-Conduction Equation in Anisotropic Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, no. 5. — P. 735 – 747.

73. Los V. M. Anisotropic Hormander Spaces on the Lateral Surface of a Cylinder / V. M. Los // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2016. — **217**, no. 4. — P. 456 – 467.

74. Los V. M. Theorems on Isomorphisms for Some Parabolic Initial-Boundary-Value Problems in Hörmander Spaces: Limiting Case / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **68**, no. 6. – P. 894 – 909.

75. Los V. M. Classical Solutions of Parabolic Initial-Boundary-Value Problems and Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 9. — P. 1412 – 1423.

76. Los V. M. Sufficient Conditions for the solutions of General Parabolic Initial-Boundary-Value Problems to be Classical / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 11. — P. 1756 – 1766.

77. Los V. M. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2017. — **16**, no. 1. — P. 69 – 97.

78. Los V. M. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // Open Mathematics. — 2017. — **15** — P. 57 – 76.

79. Los V. M. Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **69**, no. 3. — P. 426 – 443.

80. Los V. M. Initial-boundary value problems for two-dimensional parabolic equations in Hörmander spaces / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — **23**, no. 2. — P. 177 – 191.

81. Los V. M. On some parabolic problems in a refined Sobolev scale / V. M. Los, A. A. Murach // Матеріали Чотирнадцятої Міжнародної наукової кон-ференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012) .— К., 2012.— С.33.

82. Los V. M. On parabolic problems in Hormander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banah (Lviv, 17-21 September 2012). — Lviv, 2012.— P.215—216.

83. Los V. M. On applications of Hormander spaces to parabolic problems / V. M. Los, A. A. Murach // International V. Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine).— Lviv, 2015.— P.99.

84. Los V. M. On Isomorphism Theorems for Parabolic Problems in Hörmander Spaces and their Applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, 20-24 September 2016). — Lviv, 2016.— P.92-93.

85. Los V. M. On general parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // The International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18-23 September 2017). — Lviv, 2017.— P. 45.

86. Lunardi A. Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems / A. Lunardi.— Birkhauser Verlag, Basel, 1995.

87. Maz'ya V. G. Theory of Sobolev multipliers. With applications to differential and integral operators / V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova. — Berlin: Springer, 2009. — xiii+609 p.

88. Merucci C. Interpolation réelle avec fonction paramètre: réitération et applications aux espaces $\Lambda^{\varrho}(\varphi)$ / C. Merucci // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1982. — V. 295, № 6. — P. 427 — 430.

89. Merucci C. Application of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces / C. Merucci // Proc. Lund Conf. 1983. Lecture Notes in Math. V. 1070. — Berlin: Springer, 1984. — P. 183 — 201.

90. Mikhailets V. A. Elliptic operators in a refined scale of function spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — **57**, no. 5. — P. 817 – 825.

91. Mikhailets V. A. Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – **58**, no. 2. – P. 244 – 262.

92. Mikhailets V. A. Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – **58**, no. 3. – P. 398 – 417.

93. Mikhailets V. A. A regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous equation in a two-sided refined scale of spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – **58**, no. 11. – P. 1748 – 1767.

94. Mikhailets V. A. Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – **59**, no. 5. – P. 744 – 765.

95. Mikhailets V. A. Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — V 14, no. 1. — P. 81 — 100.

96. Mikhailets V. A. An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2008. – **60**, no. 4. – P. 574 – 597.

97. Mikhailets V. A. Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2008. — V. 56, no. 3—4. — P. 213—224.

98. Mikhailets V. A. Elliptic problems and Hörmander spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Operator Theory: Advances and Applications. V. 191. — Basel: Birkhäser, 2009. — P. 447—470.

99. Mikhailets V. A. The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, no. 2. – P. 211 – 281.

100. Mikhailets V. A. Extended Sobolev scale and elliptic operators / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – **65**, no. 3. – P. 435 – 447.

101. Mikhailets V. A. Hoï¿½mander spaces, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.

102. Mikhailets V. A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Results Math. – 2015. – **67**, no. 1–2. – P. 135 – 152.

103. Murach A. A. Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold / A. A. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – **59**, no. 6. – P. 874 – 893.

104. Murach A. A. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale / A. A. Murach, T. Zinchenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — V. 19, no. 1. — P. 29 — 39.

105. Nicola F. Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces / F. Nicola, L. Rodino. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

106. Ovchinnikov V. I. The methods of orbits in interpolation theory / V. I. Ovchinnikov // Math. Rep. — 1984. — V. 1, no. 2. — P. 349 — 515.

107. Ovchinnikov V. I. Interpolation orbits in couples of Lebesgue spaces / V. I. Ovchinnikov // Funct Anal Appl. — 2005. — V. 39, no. 1. — P. 46 — 56.

108. Paneah B. The oblique derivative problem. The Poincaré problem / B. Paneah. — Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

109. Peetre J. On interpolation functions / J. Peetre // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1966. — V. 27. — P. 167 — 171.

110. Peetre J. On interpolation functions. II / J. Peetre // Acta sci. math. — 1968. — V. 29, no. 1. — P. 91 — 92.

111. Persson L.-E. Interpolation with a function parameter / L.-E. Persson // Math. Scand. — 1986. — V. 59, no. 2. — P. 199 — 222.

112. Rychkov V. S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domain / V. S. Rychkov // J. London Math. Soc. – 1999. – **60**, no. 1. – P. 237 – 257.

113. Triebel H. The structure of functions / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+425 p.

114. Zinchenko T. N. Douglis–Nirenberg elliptic systems in Hörmander spaces / Zinchenko T. N., Murach A. A. // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – **64**, no. 11. – P. 1672 – 1687.