ВІДГУК
офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук
Сердюка Анатолія Сергійовича
на дисертаційну роботу
Безкрилої Світлани Іванівни
"Про модулі неперервності вищих порядків та p-монотонне наближення",
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Поняття модуля неперервності в математичному аналізі давно стало класичним і широко використовується для характеризації структурних властивостей функцій. Завдяки роботам А. Лебега, С.Н. Бернштейна, Ш. Валле-Пуссена, Д.Джексона, А.Зигмунда, С.М.Нікольського, В.К.Дзядика, М.П.Корнєйчука, С.Б.Стєчкіна, О.В.Бєсова, О.П.Тімана, М.П.Тімана, О.І.Степанця, В.П.Моторного, І.О.Шевчука та їх численних послідовників вивчення структурних (гладкісних) властивостей функцій та виявлення зв'язку між структурними та апроксимаційними властивостями функцій перебувало у полі зору спеціалістів з математичного аналізу, теорії функцій та теорії апроксимації впродовж усього XX століття. Властивості модулів неперервності та їх численних узагальнень можна знайти у фундаментальних монографіях О.П.Тімана, В.К.Дзядика, М.П.Корнєйчука, О.І.Степанця, Б.Сєндова і В.Попова, З.Діціана і В.Тотіка, Р.А.де Вора і Ж.Лоренца, І.О.Шевчука та ін. Незважаючи на численні публікації, інтерес до даної тематики не стихає і до цього часу в ній залишається багато важливих не розв'язаних проблем. Дисертація С.І. Безкрилої присвячена вивченню нових властивостей низки структурних характеристик функцій: класичних модулів неперервності вищих порядків (як цілого, так і дробового порядку), а також узагальнених модулів неперервності вищих порядків, які породжуються деякою стискуючою півгрупою операторів банахового простору. Ще один важливий напрям досліджень даної дисертаційної роботи С.І. Безкрилої відноситься до царини формозберігаючого наближення (монотонного, опуклого, p-монотонного, кусково p-монотонного і т.д.). Витоки цього важливого напряму досліджень беруть початок ще з робіт П.Л.Чебишова і С.Н.Бернштейна, а основи сучасної теорії формозберігаючого наближення були закладені в 1960-1970-х роках. Утім і до цього часу дана тематика активно розвивається в усьому світі. Тут слід відзначити роботи Г.Г.Лоренца, К.Л.Целлера, Р.А.де Вора, Я. Гілевича, Д.Левіатана, В.М.Коновалова, І.О.Шевчука, О.С.Шведова, З.Дітціана, К.А.Копотуна та ін. У даній дисертації вивчається питання про апроксимативну спроможність кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами при $p\geq 4$ функцій з класів Соболєва в аспекті можливості (чи неможливості) отримання для них аналогів нерівностей типу Джексона-Стєчкіна. З огляду на сказане вище, вважаю, що обрана тема дисертаційного дослідження С.І.Безкрилої є актуальною.

Робота складається з анотацій, додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 122

найменування. Загальний обсяг роботи – 140 сторінок машинописного тексту. У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дослідження, охарактеризовано методи дослідження, висвітлено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

У *першому розділі* висвітлено історію одержання наукових результатів, пов'язаних з тематикою дисертаційного дослідження та зроблено розгорнутий огляд наявної математичної літератури за вказаною тематикою.

Виклад основного матеріалу здійснюється у другому та третьому розділах дисертації (обсягом 80 сторінок).

Другий розділ присвячено вивченню модулів неперервності вищих та дробових порядків, породжених півгрупою операторів. Поняття таких структурних характеристик неперервних функцій, як модулі неперервності, а також модулі неперервності (гладкості) вищих порядків з'являються в 1910-1912-х роках у роботах А. Лебега, С.Н. Бернштейна та Д. Джексона. Вони використовувались при вивченні швидкості збіжності рядів Фур'є, а також для отримання прямих та обернених теорем теорії наближення функцій. Згодом з'являлись інші структурні характеристики, а поняття модуля неперервності модифікувалось та узагальнювалось. Воно знайшло численні застосування в різних розділах аналізу. Нерідко поняття модуля неперервності (як класичного модуля неперервності, так і різних його модифікацій та узагальнень) ставало й об'єктом самостійного вивчення. Повну характеризацію рівномірних модулів неперервності першого порядку можна знайти ще в роботах А. Лебега та С.М. Нікольського. На даний час отримано також повний опис інтегральних модулів неперервності функцій, інтегровних з квадратом. Для функцій однієї змінної цей результат отримали О.В. Бєсов та С.Б. Стєчкін (1975 р.) у випадку першого модуля неперервності та Л.В. Тайков (1979 р.) у випадку модуля неперервності довільного цілого порядку. У 2017 році у роботах С.Б. Вакарчука та М.Б. Вакарчука одержано аналогічні результати для функцій двох змінних, а також для модулів неперервності довільного додатного порядку (не обов'язково цілого). Окрім зазначених, інші випадки, коли дається повний опис функцій, які є модулями неперервності, наразі невідомі. Водночас зазначимо, що в період з 1971 по 2005 роки у роботах В.Е. Гейта, І.О. Шевчука, В.І. Коляди, Т.В. Радославової, С.В. Тихонова отримано описи модулів неперервності з точністю до порядкової еквівалентності для доволі широких класів функцій, зокрема, для рівномірних та інтегральних модулів неперервності довільного натурального порядку. Цей опис одержано в термінах так званих k-мажорант. Донедавна ні для яких модулів неперервності не було відомо відповіді на питання, поставлене професором І.О. Шевчуком, про те, чи кожна k-мажоранта є модулем неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. У 2010 р. С.В. Конягін дав негативну відповідь на це питання при $k = 2$ для модулів неперервності функцій, які рівномірно неперервні на числовій прямій. Виникла природна задача поширити цей результат С.В. Конягіна на випадок інших натуральних k. З цією простою за постановкою, але нетривіальною за розв'язанням, задачею, С.І.Безкрила цілком впоралась. Вона розглянула не лише рівномірні модулі неперервності і натуральні k, а й широке узагальнення цього поняття – модуль неперервності дробового порядку, породжений

півгрупою операторів. Поняття модуля неперервності дробового порядку, породженого півгрупою операторів, є синтезом ідей з роботи М.П. Купцова, в якій розглядався модуль неперервності k-го порядку, породжений півгрупою операторів, та робіт П.Бутцера і Ю.Вестпхаля, а також П.Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р.Стенса і роботи Р.Таберського, в яких введено поняття рівномірного та інтегрального модуля неперервності дробового порядку.

Основним результатом другого розділу дисертації є теорема 2.1. Ключовим моментом для доведення цієї теореми є встановлення деякої допоміжної нерівності (в дисертації це нерівності (2.11), (2.12), (2.13), (2.15)) виконання якої по суті є необхідною умовою того, щоб деяка функція була модулем неперервності порядку α, породженим стискуючою півгрупою. У дисертації отримано таку допоміжну нерівність для модуля неперервності порядку α у випадку, коли α не обов'язково ціле (див. формулу (2.15) теореми 2.3). Встановлено також (див. формулу (2.13) теореми 2.2.) посилення цієї нерівності для k-го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. В свою чергу, у випадках третього і четвертого класичних рівномірних модулів неперервності одержано уточнення загальної нерівності (2.13). Доведення цих уточнених нерівностей використовують «класичне» означення рівномірного модуля неперервності, яке дається за допомогою скінченних різниць третього та четвертого порядків. Принагідно зазначу, що використання поняття модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, дозволяє з єдиної точки зору охопити випадки рівномірного та інтегрального модуля неперервності, а подекуди й з спростити доведення властивостей таких модулів неперервності. При цілих k доведення властивостей k-х модулів неперервності, породжених півгрупою операторів, як правило, зводиться до встановлення деяких властивостей многочленів від операторів. Натомість, у випадку дробового модуля неперервності доводиться працювати вже не з многочленами, а з операторнозначними степеневими рядами. Тому для отримання допоміжної нерівності (2.15) для модуля неперервності порядку α у випадку, коли α не обов'язково ціле, автору довелося подолати низку істотних технічних труднощів.

Таким чином, основними результатами другого розділу, що виносяться на захист, є наступні: доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$; це твердження поширено на модулі неперервності дробового порядку; при цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів; встановлено нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню швидкості спадання величин найкращого кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами кусково p-монотонних функцій з класів Соболєва. Ця тематика є традиційною для школи професора І.О. Шевчука, який є відомим фахівцем у галузі формозберігаючого наближення.

Основним результатом третього розділу, є терема 3.1, яка стверджує, що при $r \geq p \geq 3$ для будь-якої необмеженої послідовності $\alpha_n \geq 0$ і для будь-якого набору точок Y_s існує кусково p-монотонна функція f з класу Соболєва W^r,

для якої верхня границя добутку $\alpha_n E_n^{(p)}(f, Y_s) n^{r-p+2}$ дорівнює нескінченності. Цей результат доповнює теорему Д.Левіатана і І.О.Шевчука [97], яка охоплює випадок $p=3$, на випадок довільних $p \geq 4$. Теорема 3.1 також посилює результат роботи Л.П.Ющенко [65], яка при $r \geq p \geq 4$ довела аналогічний результат для добутку $\alpha_n E_n^{(p)}(f, Y_s) n^{r-p+3}$. Для встановлення основного результату третього розділу дисертант використала методи роботи Д.Левіатана і І.О.Шевчука [97]. При цьому їй довелось долати значні технічні труднощі.

Таким чином, дисертація С.І. Безкрилої написана на актуальну тематику, містить нові цікаві та науково значимі теоретичні результати і є завершеною науковою працею, що складає внесок у теорію наближень. Результати дисертації строго математично обґрунтовані. Робота написана чітко і зрозуміло та акуратно оформлена. Результати дисертації своєчасно і з належною повнотою опубліковані у 5 фахових виданнях (з них 2 статті надруковані в журналах, внесених до наукометричної бази Scopus), і пройшли належну апробацію. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Зауваження.

1. В огляд літератури за темою дисертації слід було включити наступні роботи, де також вивчалися узагальнені модулі неперервності:

- Горбачук М.Л., Грушка Я.І., Торба С.М. Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр.мат.журн. — 2005. — 57, № 5. — С.633 - 643.
- Степанец А.И., Сердюк А.С. Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве Sp // Укр. мат. журн.— 2002.— 54, с. 106-124.
- Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций.— Киев: Наукова думка, 2009 .— 376 с.

2. У формулюваннях теореми 2.2 (див. с.66 дисертації та с.9 автореферату), а також наслідку 2.1 (с.69 дисертації та с.9 автореферату) необхідно добавити умову про те, що півгрупа T_h є стискуючою півгрупою класу (C_0), оскільки ця умова є ключовою при доведенні зазначених тверджень.

3. У формулі (2.29) у першому доданку виразу на с. 76, у першій стрічці знизу, та на с. 77, у першій стрічці зверху) пропущено множник 2, тобто замість « $\alpha C_n' +$ » та « $(\alpha + 9\ \alpha(\alpha-1))$ » треба писати відповідно «$2\alpha C_n' +$ » та «$(2\alpha + 9\ \alpha(\alpha-1))$». Справа в тому, що у цьому ланцюжку нерівностей другий множник першого доданку суми, що стоїть після першого знаку нерівності, оцінюється (з урахуванням нерівності (2.22)) наступним чином:

$$\left\| I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} f\left(s_1, s_2\right) \right\| \leq \|I\| + \varepsilon^{n-1} \|T\|^{n-1} \left\| f\left(s_1, s_2\right) \right\| \leq 2 .$$

Утім допущена неточність ніяк не впливає на правильність формулювання теореми 2.3, бо пропущений множник 2 не впливає на порядок величини C_n при $n \to \infty$.

4. На с. 104 у 9-й стрічці зверху замість «$S - \frac{1}{2}$» треба писати «$S(x) - \frac{1}{2}$».

5. На с. 105 у 2-й стрічці знизу замість виразу «$\left|\frac{1}{\lambda^j} S_\lambda^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|$» треба писати «$\left|\frac{1}{\lambda^j} S^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|$», а у 1-й стрічці знизу замість «$\frac{1}{\lambda^j}\max\limits_{x\in[-\lambda,\lambda]}\left|\frac{1}{\lambda^j} S_\lambda^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|$» має бути вираз «$\frac{1}{\lambda^j}\max\limits_{x\in[-\lambda,\lambda]}\left|S^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|$».

6. На с. 108 у 5 стрічці зверху замість «$\frac{3\lambda_n}{(p-2)!}$» треба писати «$\frac{2\lambda_n}{(p-2)!}$».

7. На с. 109 у 1-й стрічці зверху замість «$\frac{C_3}{2}-\frac{2C_3}{4}$» треба писати «$\frac{C_3}{2}-\frac{C_3}{4}$».

8. На с. 111 у 8-й і 9-й стрічках зверху замість «$E_n^{(p)}\left(f, Y_1^*\right)$» треба писати «$E_n^{(p)}\left(f_n, Y_1^*\right)$».

9. В тексті дисертації часто зустрічаються невдалі вислови на кшталт: «посилення на порядок контрприкладу» (с 16), «відкритих питань, відповідь у яких невідома» (с.16), «точно обчислено k-тий модуль неперервності» (с.34), «доведені наступні контрприклади» (с.41), «C_n – стала, що залежить лише від α і n, причому $C_n = O\left(n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right)$» (с. 71, 86), «$h$ пробігає весь проміжок» (с. 87), «частка $\frac{x}{\lambda}$ пробігає весь відрізок» (с. 106) та інші.

10. На с. 59 у 2-й стрічці знизу замість «$\left(T_h^{n-1}+\ldots+I\right)^k$» треба писати «$T_h^{n-1}+T_h^{n-2}+\ldots+T_h+I$».

11. Позначення класу (C_0), а також односторонніх похідних $\omega'_-(t_0)$ та $\omega'_+(t_0)$ доцільно було б внести до списку основних позначень.

12. У роботі зустрічаються невірні посилання на ті чи інші твердження. Так на с. 103 (10 стрічка знизу) замість теореми 1.5 треба вказувати теорему 1.6, а замість теореми 1.4 слід вказувати теорему 1.5.

13. У списку публікації автора (с. 7 у 2-й стрічці знизу, с. 129 у 1-й стрічці зверху дисертації та с. 13 у 2-й стрічці зверху автореферату) замість «Дніпровський національний» слід писати «Дніпропетровський національний».

14. Зустрічаються недоліки у бібліографічних посиланнях. Так, наприклад, на с. 133 у багатотомних джерелах [53] та [57] не вказано номер тому.

15. На с. 64 у 6-й стрічці зверху замість джерела [6] помилково вказане джерело [8].

16. На с. 116 у 5 рядку знизу, замість рівності $r=q$ має бути рівність $r=p$.

17. В тексті дисертації та тексті автореферату виявлено також ряд друкарських помилок (наприклад с. 3, 16, 38, 45, 78, 96 дисертації, с.1 автореферату).

Наведені неточності та недоліки не є принциповими, вони носять здебільшого технічний чи редакційний характер і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Вважаю, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх актуальністю та науковою новизною дисертаційна робота «Про модулі неперервності вищих порядків та p-монотонне наближення» повністю задовольняє вимоги пп. 9, 11-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 (зі змінами) щодо кандидатських дисертацій, а її автор Безкрила Світлана Іванівна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій Інституту
математики НАН України,
доктор фізико-математичних наук А.С. Сердюк

Національна академія наук України
Інститут математики
Ідентифікаційний код 05417...

ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
«2» жовтня 2018 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01
Секретар ради О.С.

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія

02.10.2018 р.
(Сатур О.Р.)