ВІДГУК

офіційного опонента, кандидата фізико-математичних наук

Харкевича Юрія Іліодоровича

на дисертаційну роботу

Безкрилої Світлани Іванівни

"Про модулі неперервності вищих порядків та p-монотонне наближення",

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Модуль неперервності є одним з основних понять теорії наближення. Наприклад, починаючи з піонерських робіт С.Н. Бернштейна і Д.Джексона, прямі та обернені теореми теорії наближень досить часто формулюються саме в термінах модулів неперервності. Це поняття активно використовується й в інших розділах теорії функцій, а також в чисельному аналізі. Існує досить багато узагальнень та специфікацій класичного поняття модуля неперервності. Важливими узагальненнями цього поняття були поняття модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, що з'явилось в роботі М.П. Купцова, а також модуля неперервності дробового порядку, яке вперше було введено роботах П. Бутцера і співавторів і незалежно в роботі Р. Таберського для неперервних та інтегрованих функцій.

Добре відомий опис перших рівномірних модулів неперервності, що зустрічається ще в роботах А. Лебега та С.М. Нікольського. Опис різноманітних інтегральних модулів неперервності для функцій з простору L_2 було отримано значно пізніше у працях О.В. Бєсова і С.Б. Стєчкіна, Л.В. Тайкова, С.Б. Вакарчука і М.Б. Вакарчука. Крім цих випадків, точні описи інших модулів неперервності, наскільки нам відомо, досі не одержані.

У зв'язку з цим для тих модулів неперервності, точний опис яких невідомий або незручний для практичної перевірки, становлять великий інтерес різні необхідні та достатні умови на функцію для того, щоб вона рівною або була близькою в тому чи іншому сенсі до модуля неперервності деякої функції з відповідного класу.

У роботах В.Е. Гейта, І.О. Шевчука, В. І. Коляди і Т.В. Радославової в термінах k-мажорант було отримано опис рівномірних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, та інтегральних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$ з точністю до порядкової еквівалентності. У зв'язку з цим природно виникло таке питання: чи кожна k-мажоранта є модулем неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, деякої функції? Дослідженню цього питання і присвячений другий розділ дисертації С.І. Безкрилої. Зауважимо, що до публікацій автора дисертації на цю тему відповідь на дане питання була відома лише при $k = 2$, причому відповідь виявилась

негативною; цей результат встановив С.В. Конягін у 2010 р. для випадку рівномірних модулів неперервності рівномірно неперервних на осі функцій.

Хоча деякі задачі, які тепер прийнято відносити до теорії формозберігаючого наближення, розглядали ще П. Л. Чебишов та С. Н. Бернштейн, однак сучасна теорія формозберігаючого наближення започаткована роботами Г. Г. Лоренца та К. Л. Целлера (1968, 1969). Починаючи з цих робіт, досліджується питання, чи є вірними для формозберігаючого наближення класичні оцінки наближення без обмежень. За останню чверть століття відбулось суттєве просування у цій тематиці, важливу роль в якому відіграли праці І.О. Шевчука, його співавторів та учнів. Однак досі залишається ряд відкритих питань, відповідь на одне з яких і дана в третьому розділі дисертації.

Враховуючи викладене вище, вважаю, що тема дисертаційного дослідження є актуальною.

Структура дисертації така: анотація, зміст, перелік умовних позначень, три розділи, висновки, а також список використаних джерел, що містить 122 позиції та займає 14 сторінок. Повний обсяг дисертації складає 140 сторінок.

У вступі висвітлено актуальність обраної теми, вказано мету, завдання та методи дослідження, представлено наукову новизну отриманих результатів, апробацію результатів та особистий внесок здобувача.

Перший розділ дисертації присвячений огляду літератури за її темою.

У другому розділі доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку, а також отримано узагальнення цього твердження на випадок модулів неперервності порядку α при не цілих α; при цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, і для них встановлюються нові нерівності.

У підрозділі 2.1 наведено означення модуля неперервності дробового порядку, породженого півгрупою операторів, приклади, які показують, що класичні рівномірний та інтегральний модулі неперервності функцій, визначених на всій числовій прямій, є частинними випадками модуля неперервності, породженого півгрупою операторів; наведено також елементарні властивості такого модуля неперервності, а також приклад нерівності для модуля неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α.

У підрозділі 2.2 наводяться постановка задачі, що розв'язується у розділі 2, та формулювання основного результату (теорема 2.1). Доведення теореми 2.1 спирається на допоміжні нерівності: теорему 2.2, яка формулюється і доводиться у підрозділі 2.3 і встановлює допоміжну нерівність для k -го модуля у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, і теорему 2.3, яка формулюється і доводиться у підрозділі 2.4 і встановлює допоміжну нерівність у випадку, коли α не обов'язково ціле. Для отримання теореми 2.1 (її доведенню присвячений підрозділ 2.5) автори в цілому повторюють міркування з роботи С.В. Конягіна, однак слід зауважити, що техніка отримання

допоміжних нерівностей (теорем 2.2 і 2.3) зовсім інша, ніж та, яка застосовується у роботі С.В. Конягіна.

У підрозділі 2.6 наводяться доведення нерівностей, які уточнюють допоміжну нерівність з теореми 2.2 для третього і четвертого рівномірних модулів неперервності функцій, заданих на всій числовій прямій. Ці доведення використовують «класичне» означення рівномірного модуля неперервності, яке дається за допомогою скінченних різниць третього та четвертого порядків.

У третьому розділі на порядок посилено контрприклад, який показує, що для кусково p-монотонного $(p \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стєчкіна є хибною навіть з константою, що залежить від функції, яку наближають. Не можна не відзначити віртуозну аналітичну техніку, якою послуговується автор при побудові свого контрприкладу.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер; її результати та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних проблем теорії функцій і, зокрема, теорії наближень.

Усі результати, що виносяться на захист, є новими та строго обґрунтованими. Доведення теорем повні та коректні. Висновки до розділів, а також висновки до дисертації відповідають її змісту.

Основні результати дисертації пройшли належну апробацію. Їх викладено в 14 наукових публікаціях, серед яких 9 тез доповідей на міжнародних конференціях і 5 статей у фахових та/або міжнародних виданнях, два з яких індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та одне – міжнародною наукометричною базою Web of Science. Результати дисертації доповідались на чотирьох наукових семінарах: в Інституті математики НАН України, у КНУ імені Тараса Шевченка, в ЧНУ імені Юрія Федьковича та НПУ імені М.П. Драгоманова. У дисертації та авторефераті чітко визначено особистий внесок дисертанта.

Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертації.

Наведені нижче зауваження жодним чином не ставлять під сумнів правильність та цінність отриманих у дисертації результатів, але їх врахування, на мою думку, значно покращило б роботу.

1. Перелік умовних позначень, наведений на стор. 11 і 12, неповний. Він не містить деяких ключових позначень, які постійно використовуються в дисертації (наприклад, позначень для скінченної різниці порядку k, модуля неперервності, величини найкращого p-монотонного наближення та інших).

2. З огляду на формулу (2.35), вираз $\left|1 - z^n f\left(s_1, s_2, z\right)\right|$ слід замінити на вираз $\left|1 - z^{n-1} f\left(s_1, s_2, z\right)\right|$ в лівій частині формул (2.41), (2.42) та після першого знаку рівності у формулах (2.43) та (2.45).

3. У третьому розділі дисертації автор розглядає один з варіантів формозберігаючого наближення, який називає p-монотонним. Однак у статті

автора у «Віснику Київського університету», де опубліковані результати третього розділу, відповідне наближення називається q-опуклим.

4. У роботі наявні описки, мовні та пунктуаційні помилки:

– стор. 15, 9 рядок знизу, не вистачає крапки після скорочення ініціала;

– стор. 38, 1 рядок знизу, частина тексту «, де $\Delta^{(p)}$» зайва;

– стор. 45, 4 і 5 рядки зверху, наявні зайві дефіси;

– стор. 64, 1 рядок знизу, та стор. 65, 1 рядок зверху, слово «теореми» треба замінити на «теорему»;

– стор. 89, 2 і 3 рядки зверху, стор. 102, 1 рядок знизу, не вистачає ком.

Виходячи з викладеного вище, вважаю, що за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною і науковою цінністю одержаних результатів дисертаційна робота Безкрилої Світлани Іванівни «Про модулі неперервності вищих порядків та p-монотонне наближення» повністю задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12, 13 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 (зі змінами) щодо кандидатських дисертацій, а її автор заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент:
декан факультету інформаційних систем,
фізики та математики
Східноєвропейського національного університету
імені Лесі Українки, м. Луцьк,
кандидат фізико-математичних наук, професор Ю.І. Харкевич

ПІДПИС Харкевича Ю.І.
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар університету
"28" 09 2018 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 01.10.2018 р.
Секретар ради / Сатур О.Р. /