Державний вищий навчальний заклад
“Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”
Міністерство освіти та науки України
Інститут математики
Національна академія наук України

*Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису*

Осипчук Михайло Михайлович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика
111 — математика
(11 — математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
. М.М. Осипчук

Науковий консультант Портенко Микола Іванович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України

Івано-Франківськ – 2019

АНОТАЦІЯ

Осипчук М.М. Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – "Теорія ймовірностей та математична статистика", 111 – "Математика". – ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертацію присвячено дослідженню симетричних α-стійких випадкових процесів в евклідовому просторі та пов'язаних з ними псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. Розглядається, в основному, випадок $1 < \alpha < 2$. Такі процеси є процесами Маркова і відповідне псевдодиференціальне рівняння є лінійним та містить оператор диференціювання першого порядку за часовою змінною та генератор (твірний оператор) симетричного α-стійкого випадкового процесу, що є псевдодиференціальним оператором порядку α за просторовою змінною. При $\alpha = 2$ симетричний α-стійкий випадковий процес є процесом броунівського руху. Розв'язані також деякі задачі для процесу броунівського руху та для пов'язаних з ним дифузійних процесів.

Основна частина дисертації складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації та відомостями про апробацію її результатів.

Перший розділ дисертації традиційно присвячений огляду відомих результатів, що стосуються її тематики. Тут же введені основні поняття та доведено кілька допоміжних тверджень.

В другому розділі для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу пов'язаних із симетричними α-стійкими випадковими процесами побудовано деяку версію теорії потенціалу простого шару. Центральною точкою цієї теорії є аналог класичної теореми про стрибок конормальної похідної

потенціалу простого шару. Аналогом градієнта в цій теорії виступає деякий векторнозначний псевдодиференціальний оператор порядку $\alpha - 1$ (дробовий градієнт). Він пов'язаний з генератором відповідного α-стійкого випадкового процесу таким же чином, як в класичній теорії градієнт пов'язаний з оператором Лапласа. Зокрема встановлено, що у випадку, коли носій потенціалу є гіперплощиною чи обмеженою замкненою поверхнею з гельдеровою нормаллю, а густина його є неперервною функцією, абсолютно обмеженою зверху функцією $Ct^{-\beta}$ зі сталими $C > 0$, $\beta < 1$, потенціал простого шару існує, є неперервною функцією та задовольняє згадане рівняння в кожній області, що не містить точок поверхні-носія. Проекція на нормаль до поверхні результату дії дробового градієнта за просторовою змінною має розрив типу стрибка у відповідній точці поверхні. Величина цього стрибка визначається значенням густини потенціалу в цій точці. Пряме значення проекції на нормаль до поверхні результату дії дробового градієнта за просторовою змінною в точках поверхні існує, причому, у випадку гіперплощини, тотожно рівне нулю.

Використовуючи теорію потенціалу простого шару, побудовані фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу пов'язаних із симетричними α-стійкими випадковими процесами. Граничні умови в цих задачах ставляться на деякій поверхні (гіперплощина або ж обмежена замкнена поверхня з гельдеровою нормаллю). Ці умови пов'язують значення односторонніх границь проекції на нормаль до поверхні результату дії дробового градієнта за просторовою змінною на розв'язок рівняння та, у випадку третьої задачі, значення цього розв'язку в даній точці поверхні. Виявляється, що в окремих випадках ці фундаментальні розв'язки є невід'ємними і визначають деякі процеси Маркова — певні перетворення початкового α-стійкого процесу. Наприклад, випадковий процес в евклідовому просторі побудований таким чином, що він описує α-стійкий рух у цьому просторі з липкою мембраною, розташованою на даній поверхні. В інших ситуаціях побудовані фундаментальні розв'язки, через їх можливі від'ємні значення, не визначають жодного випадкового процесу, а лише "псевдопроцеси".

Завершують цей розділ результати для перетворення Лапласа за часовою змінною потенціалу простого шару з обмеженою густиною. А саме, встановлено властивості такого перетворення аналогічні властивостям самого потенціалу: зображення потенціалу простого шару є неперервною функцією; задовольняє відповідне рівняння для перетворень Лапласа за часовою змінною; справджується твердження теореми про стрибок. Використовуючи ці результати, з допомогою деякої випадкової заміни часу побудовано процес Маркова, який моделює вплив липучої мембрани на симетричний α-стійкий випадковий процес.

У третьому розділі генератор α-стійкого процесу адитивно збурюється дробовим градієнтом, помноженим на задане векторне поле, що визначається деякою вимірною функцією. Розглянуто випадки, коли ця функція інтегровна в деякому досить великому степені, або обмежена, або ж узагальнена типу дельта-функції на поверхні. В останньому випадку поверхня може бути або гіперплощиною, або ж обмеженою замкненою поверхнею з гельдеровою нормаллю. Побудовано відповідні напівгрупи операторів на просторі неперервних обмежених функцій, які, між іншим, не визначають жодного процесу Маркова, оскільки не зберігають інваріантним конус невід'ємних функцій. У випадку сталого векторного поля знайдено явний вигляд (з точністю до інтегралу) ядра цієї напівгрупи. Це дало змогу побачити можливість від'ємних значень у ядра напівгрупи. Слід зауважити, що в граничному випадку, $\alpha = 2$, деякі з цих перетворень приводять до процесів Маркова, наприклад, асиметричного вінерового процесу (косого броунівського руху) на дійсній прямій і деяких його багатовимірних аналогів.

Четвертий розділ присвячений дослідженню деяких одновимірних процесів Маркова, пов'язаних із симетричним α-стійким процесом $x(t)$. Мова йде про процеси утворені з α-стійкого процесу убиванням його в моменти першого виходу зі стартової півосі та в момент першого попадання в початок координат. У випадку $\alpha = 2$ такі процеси однакові і мають щільність ймовірності переходу, що задається виразом типу $g(t, x, y) - g(t, -|x|, |y|)$, де функція g є щільністю ймовірності переходу симетричного α-стійкого процесу. Така функція і у випадку $1 < \alpha < 2$ задає деякий процес Маркова $x^*(t)$. Проте, цей процес не збігається із описаними вище та і ці процеси є різними. В цьому розділі одержано ряд цікавих результатів, зокрема, одержана формула для зображення (перетворення Лапласа за часовою змінною) ядра напівгрупи операторів на множині неперервних обмежених функцій, що одержана перетворенням Фейнмана-Каца напівгрупи симетричного α-стійкого процесу з функціоналом типу локального часу в початку координат; знайдено перетворення Лапласа моменту першого потрапляння симетричного α-стійкого процесу в початок координат та щільність розподілу цього момента; знайдена щільність ймовірності переходу процесу утвореного із симетричного α-стійкого процесу убиванням його в момент першого потрапляння в початок координат; знайдені формули для ядер потенціалів цього процеса та процеса $x^*(t)$; встановлено розподіл часу існування процесу $x^*(t)$; встановлено, що процеси $x(t)$ та $x^*(t)$ при $\alpha = 2$ пов'язані між собою перетворенням типу Фейнмана-Каца, правда з деякою узагальненою функцією, а при $1 < \alpha < 2$ їх зв'язок дещо складніший; знайдено компенсатор для процесу очікування зникнення процесу $x^*(t)$.

Останній, п'ятий, розділ присвячений певним задачам для вінерового процесу (випадок $\alpha = 2$) або для більш загальних дифузійних процесів.

Перший тип цих задач стосується граничної поведінки послідовності одновимірних дифузійних процесів з локальними характеристиками: коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$ з деякими заданими функціями a і b. При цьому локальні характеристики процесів розглянутих послідовностей не збігаються до відповідних характеристик граничних процесів. Зокрема, знайдено граничний розподіл локальних часів в початку координат цих процесів; розв'язана задача про граничний розподіл кількостей перетину певного рівня цією послідовністю дифузійних процесів при додаковій умові періодичності функцій a і b.

Інший клас задач, розглянутих в цьому розділі, стосується деяких екстремальних задач для одновимірного вінерового процесу. А саме, розв'язані екстремальні задачі, що полягають у побудові переносів (стратегій) для даного вінерового процесу, за умови максимізації (в певному розумінні) локального часу в початку координат чи мінімізації часу першого потрапляння в початок координат. Кожного разу розглядаються перетворення Гірсанова початкової ймовірнісної міри, які приводять до процесів, що максимізують (чи мінімізують) відповідні цільові функіонали. Встановлено існування немарківської оптимальної стратегії в задачі максимізації локального часу. Розглянуто деякі марківські стратегії близькі до оптимальної. В задачі мінімізації часу першого потрапляння в початок координат знайдено локальну оптимальну стратегію та глобальну ε-оптимальну стратегію.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти своє застосування в теорії випадкових процесів, в теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ. Зокрема, розроблена теорія потенціалів простого шару дозволяє розв'язувати деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу; результати збурень симетричих α-стійких випадкових процесів спонукають до досліджень таких об'єктів, як "псевдопроцеси".

Ключові слова: симетричний α-стійкий випадковий процес, вінерів процес, дифузійний процес, інфінітезимальний оператор, резольвента, локальний час, формула Фейнмана-Каца, рівняння збурення, випадкова заміна часу, псевдопроцес, псевдодиференціальний оператор, псевдодиференціальне рівняння параболічного типу, потенціал простого шару, задача Коші, початково-крайова задача.

ABSTRACT

Osypchuk M.M. Symmetric stable stochastic processes and their transformations. – Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.05 – "Probability theory and mathematical statistics", 111 – "Mathematics". – Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to investigating symmetric α-stable stochastic processes in Euclidean space associated with some class of pseudo-differential equations of parabolic type. Mainly, the case of $1 < \alpha < 2$ is considered. Such processes are Markov processes and the corresponding pseudo-differential equations are linear and contain the first-order differential operator with respect to the time variable and the generator of the symmetric α-stable stochastic process that is a pseudo-differential operator of the order α with respect to the spatial variable. For $\alpha = 2$, a symmetric α-stable stochastic process is a Brownian motion. Some problems for the Brownian motion and related diffusion processes are also solved.

The main part of the thesis consists of an introduction, five chapters, conclusions, and a list of references. They are followed by an appendix which lists the author's publications and information about the approbation of thesis results.

The first chapter of the thesis is traditionally devoted to the review of well-known results relating to its subject matter. Here the basic concepts are introduced and several assertions are proved.

In the second chapter, a version of the theory of single-layer potential is constructed for pseudo-differential equations of a parabolic type related to symmetric α-stable stochastic processes. The central point of that theory is the result being an analogy to the classical theorem on the jump of the conormal derivative of a single-layer potential. An analog of the gradient in this theory is a certain vector-valued pseudo-differential operator of the order $\alpha - 1$ (fractional gradient).

It is connected with the generator of a corresponding α-stable stochastic process in the same way as the gradient is associated with the Laplace operator in the classical theory. In particular, it has been found that in the case when the potential carrier is a hyperplane or a bounded closed surface with a Hölder continuous normal vector and its density is a continuous function that is absolutely bounded above by the function $Ct^{-\beta}$ with some constants $C > 0$, $\beta < 1$, the single-layer potential exists, it is a continuous function and satisfies the above equation in each region that does not contain points of the potential carrier surface. A projection of the action result of a fractional gradient with respect to the spatial variable on a surface normal vector has a gap of a jump type at the corresponding point of the surface. The value of this jump is determined by the value of the density of the potential at this point. The direct value of the projection of the action result of a fractional gradient with respect to the spatial variable on a surface normal vector at the surface points exists, and, in the case of a hyperplane, it identically equals to zero.

Making use the theory of single-layer potential, fundamental solutions of the second and the third initial boundary-value problems for the pseudo-differential equations of a parabolic type associated with the symmetric α-stable stochastic processes are constructed. The boundary conditions in these problems are formulated on some surface (an hyperplane or a bounded closed surface with a Hölder continuous normal vector). These conditions associate the values of the one-sided limits of the projection of the action result of a fractional gradient with respect to the spatial variable on a surface normal vector on the solution of the equation and, in the case of the third problem, the value of this solution at this point of the surface.

It turns out that in some cases those fundamental solutions are non-negative and they determine some Markov processes being certain transformations of a starting α-stable process. For example, the fundamental solution of a symmetric third initial boundary-value problem is transition probability density of a Markov process created by the Feynman-Kac transformation. In others situations the constructed fundamental solutions do not determine any stochastic process but only "pseudo-process", because they have negative values.

This chapter concludes the results for the Laplace transform with respect to the time variable of the single-layer potential with a bounded density. Namely, the properties of such transformation are similar to those of the very potential: the Laplace transform of the single-layer potential is a continuous function; it satisfies the corresponding equation for Laplace transforms with respect to a time variable; the assertion of the jump theorem is true. Using these results, with the help of some random time replacement, a Markov process is constructed that simulates the effect of a sticky membrane on a symmetric α-stable stochastic process.

In the third chapter, the generator of an α-stable process is perturbed additively with a fractional gradient multiplied by a given vector field determined by some measurable function. Cases are considered when this function is integrable in some sufficiently high degree or bounded or even a generalized function of delta function type on the surface. In the latter case, the surface may be either a hyperplane or a bounded closed surface with a Hölder continuous normal vector. The corresponding semigroups of operators on the space of continuous bounded functions are constructed, which, incidentally, do not define any Markov process, since they do not preserve the cone of non-negative functions by invariant. In the case of a constant vector field, an explicit (up to integral) representation of this semigroup's kernel has been found. This enabled us to see the presence of negative values in the semigroup's kernel. It should be remarked that in the limit case of $\alpha = 2$, some of those transformations lead us to Markov processes, for example, a skew Brownian motion on a real line and some multidimensional analogues of it.

The fourth chapter is devoted to the study of some one-dimensional Markov processes associated with a symmetric α-stable process $x(t)$. These are processes formed from the α-stable process by killing it at the moments of the first exit from the starting half-axis and at the moment of the first hit at the origin. In the case of $\alpha = 2$, these processes are identical and they have the transition probability density given by the expression $g(t,x,y) - g(t,-|x|,|y|)$, where the function g is the transition probability density of the symmetric α-stable process. This function specifies some Markov process $x^*(t)$ in the case $1 < \alpha < 2$ as well. However, this process does not coincide with the ones described above and those processes are different. A series of interesting results has been obtained in this chapter, in particular: the formula for the Laplace transform with respect to time variable has been obtained for the semigroup of operators on the set of continuous bounded functions constructed by the Feynman-Kac transformation of a symmetric α-stable process with functional of a local time type at the origin; the Laplace transform of the first hit at the origin time of a symmetric α-stable process and the distribution density of this time have been found; the transition probability density of the process formed from the symmetric α-stable process by killing it at the moment of the first hit at the origin has been found; formulas for the potentials kernel of this process and of the process $x^*(t)$ have been established; the distribution of the life time of the process $x^*(t)$ has been found; it is established that the processes $x(t)$ and $x^*(t)$ for $\alpha = 2$ are connected by a Feynman-Kac type transformation, with some generalized function, and for $1 < \alpha < 2$ their connection is somewhat more complex; a compensator for the process of waiting for the disappearance of the process $x^*(t)$ has been found.

The last, fifth, chapter is devoted to some problems for Brownian motion (the case of $\alpha = 2$) or more general diffusion processes. The first type of these problems relates to the boundary behavior of the sequence of one-dimensional diffusion processes with local characteristics: the drift coefficients $a_n(x) = na(nx)$ and the diffusion coefficients $b_n(x) = b(nx)$ with some given functions a and b. In this case, the local characteristics of the processes of the considered sequences do not converge to the corresponding characteristics of the limit process. In particular, the limit distribution of local time at the origin of these processes has been found; the problem of the limit behavior of the crossings number of a fixed level by this sequence of diffusion processes has been solved with the additional condition for the periodicity of the functions a and b.

Another class of problems considered in this chapter relates to some extremum problems for a one-dimensional Brownian motion. Namely, the extremum problems which consist in constructing of drifts (strategies) for a given Brownian motion have been solved, subject to the maximization (in a certain sense) of the local time at the origin or minimization of the time of the first hit at the origin. Each time we consider the Girsanov transforms of the initial probability measure, which lead to process that maximizes (or minimizes) the corresponding target function. The existence of a non-Markov optimal strategy in the problem of maximizing local time has been established. Some Markov strategies neared to optimal one have been considered. The local optimal strategy and the global ε-optimal strategy have been found in the problem of minimizing of the time of the first hit at the origin.

Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the theory of stochastic processes, in the theory of pseudo-differential equations, the stochastic models studying of natural and socioeconomic phenomena. In particular, the constructed theory of single-layer potentials allows us to solve some initial-boundary value problems for pseudo-differential equations of a parabolic type; the results of perturbations of symmetric α-stable stochastic processes are induced to investigate such objects as "pseudo-processes".

Keywords: symmetric α-stable stochastic process, Wiener process, diffusion process, generator, resolvent, local time, Feynman-Kac formula, perturbation equations, random change of time, pseudo-process, pseudo-differential operator, pseudo-differential parabolic type equation, simple-layer potential, Cauchy problem, initial-boundary value problem.

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Список праць, де опубліковані основні наукові результати дисертації

[1] *Osypchuk M.M.* On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. -2018. -V. 9, No. 4, -P. 811-835.

[2] *Osypchuk M.M.* On some Markov processes related to a symmetric α-stable process / M. M. Osypchuk, M. I. Portenko // Stochastics. -2018. -V. 90, № 7. -P. 972-991.

[3] *Osypchuk M.M.* On the crossings number of a hyperplane by a stable random process/M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2018. -V. 10, № 2, -P. 346-351.

[4] *Osypchuk M.M.* On the distribution of a rotationally invariant α-stable process at the moment when it is hitting a given hyperplane/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. -2018. №12, -P. 14-20.

[5] *Осипчук М.М.* Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2017. -Т. 69, № 10. -С. 1406-1421.

[6] *Osypchuk M.M.* On constructing some membranes for a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Communications on Stochastic Analysis. -2017. -V. 11, № 1. -P. 11-20.

[7] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a symmetric stable process and the

corresponding Cauchy problems/ M.M. Osypchuk// Theory Stoch. Process. -2016. -V. 21, № 1. -P. 64-72.

[8] *Осипчук М.М.* Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2015. -Т. 67, № 11. -С. 1512-1524.

[9] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2015. -V. 7, № 1. -P. 101–107.

[10] *Бігун Г.С.* Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдодиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, Г.С. Бігун// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2015. № 1(29). -С. 123-131.

[11] *Osypchuk M.M.* On Ornshtein-Uhlenbeck's measure of a Hilbert ball in the space of continuous functions/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 1. -P. 46-51.

[12] *Osypchuk M.M.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 2. -P. 42-51.

[13] *Бігун Г.С.* Дифузії, породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2013. -Т. 5, № 2. -С. 180-186.

[14] *Осипчук М. М.* Про одну задачу оптимального управління вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2012. № 1(17). -С. 21-27.

[15] *Osypchuk M.M.* An extremum problem for some class of Brownian motions with drifts/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Journal of Mathematical Sciences. -2011. -V. 179, № 1. -P. 164-173.

[16] *Осипчук М. М.* Граничний розподіл локальних часів в нулі деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичний вісник НТШ. -2011. -Т. 8. -С. 168-185.

[17] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів довільного рівня послідовністю дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичні студії. -2010. -Т. 33, № 2. -С. 199-211.

[18] *Осипчук М.М.* Щільність ймовірності переходу одного класу узагальнених дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1998. -Т. 50, № 10. -С. 1433-1437.

[19] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом/ М.М. Осипчук// Теорія ймовірностей та математична статистика. -1996. -Т. 54. -С. 122-128.

[20] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1995. -Т. 47, №9. -С. 1224-1230.

[21] *Осипчук М.М.* Узагальнений дифузійний процес в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. Зб. наук. пр. АН України. Ін-т математики. -1994. -С. 210-221.

Список праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[22] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів певних рівнів деякою послідовністю одновимірних дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-28.03.2010). -Івано-Франківськ:ПрНУ. -2010. -С. 9.

[23] *Осипчук М.М.* Про перетворення Лапласа міри Орнштейна-Уленбека гільбертової кулі/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеук. наук. конф. "Прикладні задачі математики" (Яремче, 13-15.10.2011). -Івано-Франківськ: ІФНТУНГ. -2011. -С. 82, 83.

[24] *Осипчук М.М.* Про граничний розподіл локальних часів деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. ”Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22-25.02.2011). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2011. -с. 16

[25] *Осипчук М.М.* Граничні теореми для однієї послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика” (Микуличин, 20-23.09.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 32

[26] *Осипчук М.М.* Оптимальне керування вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 23-26.02.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 23.

[27] *Осипчук М.М.* Дифузії породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 4.

[28] *Осипчук М.М.* Про щільність спільного розподілу значення процесу Маркова і його локального часу/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 26.

[29] *Осипчук М.М.* Породження вінеровим процесом багатовимірних дифузій/ Г.С. Бігун М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 8.

[30] *Осипчук М.М.* Про деякі методи оцінювання розв'язків параболічних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 5.

[31] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solution of pseudo-differential equations / M.M. Osypchuk// Stochastic Processes in Abstract Spaces Intern. Conf. (Kyiv, 14-16.10.2015). -Kyiv:NTUU. -2015. -P. 42.

[32] *Osypchuk M.M.* On the solution of the Cauchy problem for one class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Intern. V. Skorobohatko mathematical conf. (Drogobych, 25-28.08.2015). -Lviv: LNU. -2015. -P. 121.

[33] *Осипчук М.М.* Фундаментальний розв'язок одного псевдодиференціального рівняння параболічного типу зі сталими коефіцієнтами/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Наук. конф. присв. 100-річчю від дня нар. К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1-4.07.2015). -Чернівці: ЧНУ. -2015. -С. 20, 21.

[34] *Осипчук М.М.* Збурення стійких процесів та псевдодиференціальні рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25.02-01.03.2015). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2015. -С. 52, 53.

[35] *Осипчук М.М.* Симетричний стійкий процес та задача про склеювання/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2016). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2016. -С. 43, 44.

[36] *Osypchuk M., Portenko M.* On some Markov processes related to a symmetric stable process/ M. Osypchuk, M. Portenko// "Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics"international workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin (Kyiv, 10-12.10.2016). -Kyiv: NTUU. -2016. -P. 41, 42.

[37] *Осипчук М.М.* Третя початково-крайова задача для псевдодиференціального рівняння пов'язаного із симетричним стійким випадковим процесом/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-25.02.2017). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2017. -С. 43, 44.

[38] *Osypchuk M.M.* Jump theorem and its applications/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 17-19.10.2017). -Vinnytsia: DonNU. -2017. -P. 97, 98.

[39] *Osypchuk M.M.* On crossings numbers of a fixed hyperplane by some processes related to the rotationally invariant α-stable random process/M.M. Osypchuk// Intern. conf. Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 24-26.05.2018). -Kyiv: KNU. -2018. -P. 48.

[40] *Osypchuk M.M.* On some initial-boundary value problems for pseudo-differential equations related to a rotationally invariant α-stable stochastic process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 17-22.09.2018). -Kyiv: NTUU. -P. 69, 70.

[41] *Осипчук М.М.* Ймовірнісні представлення розв'язків деяких початково-крайових задач дл одного виду псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу/ М.М. Осипчук// VI Всеукр. наук. конф. імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, Микуличин, 26-28.09.2018). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2018. С. 42, 43.

[42] *Осипчук М.М.* Стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук// Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Мат. міжнар. наук. конф., присвяченої 50-річчю фа-

культету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, (Чернівці, 17-19.09.2018). -Чернівці: ЧНУ. -2018. -С. 88.

Зміст

Вступ

Актуальність теми. У дисертаційній роботі розроблено теорію потенціалів простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу асоційованих із симетричними стійкими випадковими процесами. Симетричні стійкі випадкові процеси в теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу відіграють ту ж роль, що вінерів процес чи процес броунівського руху в класичній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу та теорії потенціалів для таких рівнянь. У зв'язку з цим вивчення симетричних стійких випадкових процесів є досить важливою задачею.

В теорії дифузійних процесів перетворення вінерового процесу (чи більш загального процесу) з допомогою, в першу чергу, збурень його оператором градієнта домноженого на деяке векторне поле дозволяє будувати моделі процесів, що перебувають під впливом таких полів. Тому збурення симетричного стійкого процесу оператором, який відіграє роль градієнта в класичній теорії, відкриває нові можливості для застосування відповідних результатів до побудови роз'язків псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. Дослідження результатів таких збурень з огляду на їх відмінність від класичних випадкових процесів є актуальним завданням.

Не дивлячись на досить довгу історію досліджень стійких випадкових процесів залишається ще багато питань стосовно їх властивостей, особливо, їх відмінність від вінерового процесу, що є симетричним стійким процесом з гранично можливим значенням показника такого процесу.

Всі ці питання тією чи іншою мірою розглянуті в дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрах статистики і вищої математики та математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науково-дослідних тем "Ймовірнісні та статистичні методи досліджень" (номер державної реєстрації 0109U008940), "Аналітичні та статистичні методи в моделюванні процесів і систем" (номер державної реєстрації 0115U007236).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження симетричних стійких випадкових процесів у їх зв'язку з псевдодиференціальними рівняннями параболічного типу та властивостей перетворень таких процесів.

Об'єктом дослідження є симетричні стійкі випадкові процеси та псевдодиференціальні рівняння параболічного типу.

Предметом дослідження є властивості симетричних стійких випадкових процесів та їх перетворень, методи розв'язання початково-крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Завдання дослідження полягають у розвиненні теорії потенціалів для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, асоційованих із симетричними стійкими випадковими процесами, побудові перетворень симетричних стійких випадкових процесів пов'язаних із збуренням їх інфінітезимальних операторів, вивченні властивостей симетричних стійких випадкових процесів.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертації використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, теорії диференціальних рівнянь, математичного і функціонального аналізу, теорії міри.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

- побудовано теорію потенціалів простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими $(1 < \alpha < 2)$ випадковими процесами, зокрема, досліджено властивості потенціалу простого шару, центральною з яких є теорема про стрибок його конормальної похідної порядку $\alpha - 1$ за просторовою змінною в точках поверхні-носія потенціалу;

- побудовані фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу, пов'язаного із симетричним α-стійким випадковим процесом;

- побудовано адитивні збурення генератора симетричного α-стійкого процесу з допомогою оператора градієнта порядку $\alpha - 1$ з множником, що є векторним полем, яке задається функцією чи обмеженою, чи інтегровною в деякому степені, чи узагальненою типу дельта-функції, та досліджено властивості відповідних напівгруп лінійних обмежених операторів на просторі неперервних обмежених функцій;

- досліджено властивості моменту першого потрапляння в початок координат одновимірним α-стійким випадковим процесом та виходу зі стартової півосі, а також досліджено процес, який при $\alpha = 2$ збігається із симетричним α-стійким процесом, обірваним у ці моменти часу;

- доведено граничні теореми для розподілів локальних часів в нулі та кількості перетинів довільного рівня деякою слабко збіжною послідовностю дифузійних процесів;

- розв'язані задачі максимізації локального часу в нулі та мінімізації часу потрапляння в нуль вінерового процесу з переносом.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають здебільшого теоретичний характер. Вони можуть бути використані у теорії випадкових процесів, теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ, а також в педагогічній практиці при підготовці фахівців за спеціальностями галузі знань математика та статистика.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації.

В роботах (див. Додаток А) [1, 5, 6, 8, 11, 12, 15–17] М.І. Портенку належить постановка деяких проблем та частковий аналіз одержаних результатів. В роботі [2] М.І. Портенку належить ідея застосування формули Рогозіна-Спіцера. В роботі [10] Г.С. Бігун побудувала графіки щільності, що відповідає збуреній напівгрупі операторів. Вклад співавторів в решти спільних з автором дисертації роботах приблизно рівнозначний. Результати та основні положення дисертаційної роботи в опублікованих роботах викладені в повному обсязі.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- наукових конференціях:
  Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 2010 — 2018); Засідання відділення математики НАН України (Івано-Франківськь, 2011); Всеукраїнська наукова конференція ”Прикладні задачі математики”(Яремче, 2011); Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”(Івано-Франківськ, 2012); Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 2015); Stochastic Processes in Abstract Spaces International Conference (Kyiv, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Drogobych, 2015); International Conference on Differential Equations, Mathe-

matical Physics and Applications (Cherkasy, 2017); Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 2018); International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 2018); VI Всеукраїнська наукова конференція імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ — Микуличин, 2018); Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Математична міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 2018); звітні конференції Прикарпатського національного університету (2006 — 2018);

- наукових семінарах:
  "Числення Маллявена" (Інститут математики НАН України, відділ теорії випадкових процесів, керівник Дороговцев А.А.) 5 червня 2018, 4 вересня 2018; "Теорія ймовірностей та математична статистика" (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, керівник Мішура Ю.С.) 24 вересня 2018; міжкафедральному семінарі факультету математики та інформатики (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, керівник Загороднюк А.В.) 23 травня 2018.

Публікації. Результати дисертації висвітлені в 21 статті, опублікованих в наукових періодичних виданнях, з яких (див. Додаток А):

- зарубіжні (міжнародні) видання, внесені до наукометричних баз Scopus і Web of Science — 2 статті [1, 2];

- зарубіжні (міжнародні) видання, внесені до наукометричної бази Scopus — 2 статті [6, 15];

- видання України, внесені до наукометричних баз Scopus і Web of Science — 4 статті [5, 8, 18, 20];

- видання України, внесені до наукометричної бази Scopus — 3 статті [7, 11, 12];

- видання України, внесені до наукометричної бази Web of Science — 1 стаття [3];

- інші фахові видання України — 9 статей [4, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 21];

а також в 21 тезах доповідей на наукових конференціях та семінарах [22–42].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, пункти та підпункти, висновків, списку використаних джерел, який містить 107 найменувань. Повний обсяг роботи — 329 сторінок, в тому числі 286 сторінок основного тексту.

Розділ 1

Вихідні положення, огляд літератури та основні напрямки дослідження.

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження.

1.1.1 Псевдодиференціальні рівняння пов'язані із симетричними стійкими випадковими процесами.

Симетричному α-стійкому випадковому процесу ($\alpha \in (0, 2]$) в скінченновимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, як процесу Маркова відповідає псевдодиференціальне рівняння параболічного типу $\dfrac{\partial}{\partial t}u = \mathbf{A}u$ з оператором $\mathbf{A}$, що є псевдодиференціальним оператором порядку α за просторовою змінною. Цей оператор є генератором відповідної напівгрупи лінійних обмежених операторів в просторі неперервних обмежених функцій. Оператор $\mathbf{A}$ має однорідний символ порядку α. Такі рівняння при $\alpha \geq 1$ розглядалися багатьма авторами. В першу чергу слід згадати монографію [17], де розглядаються методи розв'язання лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу досить загального виду. Там, зокрема, побудовані фундаментальні розв'язки задач Коші для певного класу параболічних псевдодиференціальних рівнянь, який включає в себе написане вище рівняння. Досліджені питання існування фундаментального розв'язку, його невід'ємність та деякі інші властивості. Псевдодиференціальним рівнянням параболічного типу, що відповідають певним класам випадкових процесів присвячено тритомник [25].

При розв'язанні початково-крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку параболічного типу вирішальне значення має теорія потенціалів. Чільне місце в ній займають потенціали простого шару та теорема про стрибок (ко-)нормальної похідної потенціалу простого шару в точках поверхні-носія потенціалу. Саме вона дає змогу будувати розв'язки початково-крайових задач типу Неймана чи третьої (змішаної) крайової задачі (див., наприклад, [20, 37]). Симетричні стійкі випадкові процеси відіграють таку ж роль в теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу та відповідній теорії потенціалів, як вінерів процес в теорії параболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку.

1.1.2 Адитивні збурення інфінітезимального оператора симетричного стійкого випадкового процесу

Під адитивним збуренням інфінітезимального оператора процесу Маркова розуміємо додавання до нього деякого оператора та побудову відповідної напівгрупи операторів.

В літературі здебільшого розглядаються адитивні збурення оператора $\mathbf{A}$ (інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу) з допомогою оператора виду $(a(\cdot), \nabla)$, де a — деяка функція зі значеннями в $\mathbb{R}^d$. K. Богдан (K. Bogdan) і Т. Якубовський (T. Jakubowski) [12] та Т. Якубовський [26] розглядали таке збурення з функцією, що належить до класу Като $\mathcal{K}_d^{\alpha-1}$, С.І. Подолинний і М.І. Портенко [91] та М.І. Портенко [93, 96, 97] дослідили це збурення з функцією із L_p. О.М. Кулик та В.П. Кнопова [28] побудували щільність ймовірності переходу процесу Маркова зі збуреним генератором у випадку обмеженої неперервної функції a при $1 < \alpha < 2$ та в інших випадках при виконанні деяких додаткових умов гладкості функції a.

Й.-У. Льобус (J.-U.Loebus) і М.І. Портенко [42] збурювали інфінітезимальний оператор одновимірного симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою деякого оператора диференціювання порядку $\alpha-1$ з коефіцієнтом дельта-функцією Дірака помноженою на деяке дійсне число. Так побудована напівгрупа операторів виявилась такою, що не зберігає конус невід'ємних функцій. Тому їй відповідає тільки "псевдопроцес". Псевдопроцеси пов'язані з рівняннями типу теплопровідності досліджувались в роботах Ю.Л. Далецького [14], Ю.Л. Далецького та С.В. Фоміна [15], М. Міямото (M. Miyamoto) [45]. Е. Орсінгер (E. Orsingher) та Л. Бегін (L. Beghin) [5] знайшли розподіл локального часу псевдопроцесу пов'язаного з тепловим диференціальним рівнянням порядку не меншого, ніж 2.

1.1.3 Дослідження одновимірного симетричного стійкого випадкового процесу.

В цій роботі розглядаються задачі пов'язані з моментами першого попадання в початок координат, зміни півосі одновимірним симетричним стійким випадковим процесом. Г.П. Маккін (H.P. McKean) [44] встановив, що момент першого попадання цього процесу в нуль у випадку $1 < \alpha \leq 2$ скінченний з ймовірністю 1. Варто зауважити, що цей момент зупинки симетричного стійкого випадкового процесу слугував об'єктом досліджень в багатьох роботах (див., наприклад, $[6, 36, 38, 90, 103, 107]$). Розподіл моменту часу першого попадання процесу в початок координат виявився пов'язаним з локальним часом такого процесу в нулі. Необхідні та достаті умови неперервності локального часу в нулі симетричного стійкого процесу одержав М.Т. Барлоу (M.T. Barlow) [4].

1.2 Термінологія та допоміжні результати.

1.2.1 Основні поняття та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d$ позначатиме d-вимірний ($d \geq 1$) дійсний евклідів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та відповідною нормою $|\cdot|$. У випадку $d = 1$ ми позначатимемо його через $\mathbb{R}$ та матимемо очевидні відповідники скалярного добутку та норми.

Позначення $(f(x))_{x \in D}$ означатиме функцію задану на множині D. Множина значень такої функції кожного разу буде зазначатися.

Серед функціональних множин ми регулярно матимемо справу з множиною обмежених неперервними дійснозначних функцій $(f(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, яка разом з нормою $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ утворює банахів простір $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Через $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$ позначатиметься підпростір $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ складений з тих функцій $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, для яких при довільному $\varepsilon > 0$ множина $\{x \in \mathbb{R}^d : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$ є компактом в $\mathbb{R}^d$.

Для операторів, заданих на деякій функціональній множині $\mathbb{F}(D)$, ми використовуватимемо позначення $\mathbf{A}, \ldots$, і $(\mathbf{A}f(x))_{x \in D}, \ldots$ — для результату їх дії на функцію $f \in \mathbb{F}(D)$. Іноді, коли функція f залежить ще і від параметрів чи кількох аргументів, писатимемо $\mathbf{A}f(\cdot, y)(x)$, вказуючи цим за якою змінною діє оператор $\mathbf{A}$.

Нехай $\mathbb{F}(\mathbb{R}^d)$ множина дійснозначних функцій заданих на $\mathbb{R}^d$, що є перетвореннями Фур'є. Тобто $\varphi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^d)$, якщо $\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi, x)} \mathit{\Phi}(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою функцією $(\mathit{\Phi}(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$. Символом оператора $\mathbf{A}$, заданого на деякій підмножині $\mathbb{F}(\mathbb{R}^d)$, називається функція $(\varkappa(x, \xi))_{x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d}$, якщо $\mathbf{A}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi, x)} \varkappa(x, \xi) \mathit{\Phi}(\xi)\, d\xi$.

Нехай $\mathbb{F}_\gamma(\mathbb{R}^d)$ ($\gamma > 0$) означає клас функцій $\varphi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^d)$ таких, що функція $|\lambda|^\gamma \mathit{\Phi}(\lambda)$ є абсолютно інтегровною на $\mathbb{R}^d$.

1.2.2 Симетричний α-стійкий розподіл та його властивості.

Зафіксуємо значення параметрів $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$ та деяке значення $d \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел).

1.2.2.1 Функція симетричного стійкого розподілу.

Означення. Для $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$h_d^{c,\alpha}(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{-i(x,\xi) - c|\xi|^\alpha\}\, d\xi. \tag{1.1}$$

Відоме наступне зображення функції $h_d^{c,\alpha}$ (див., наприклад, [10])

$$h_d^{c,\alpha}(x) = (2\pi)^{-d/2}|x|^{-d/2+1} \int\limits_0^\infty \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha} J_{d/2-1}(\rho|x|)\, d\rho, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

де J_μ означає беселеву функцію, тобто,

$$J_\mu(z) = \frac{(z/2)^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu + 1/2)} \int\limits_{-1}^1 (1 - u^2)^{\mu - 1/2} \cos(zu)\, du$$

при $\operatorname{Re}\mu > -1/2$ та $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cos z$.

Для початку зауважимо, що функція $(e^{-c|\xi|^\alpha})_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ є характеристичною функцією деякого розподілу в $\mathbb{R}^d$ при $\alpha \in (0, 2]$ і не є такою при $\alpha > 2$. Цей розподіл називається симетричним α-стійким розподілом. Тому ми зосереджуємо свою увагу саме на першому випадку, в якому функція $h_d^{c,\alpha}$ є щільністю цього розподілу.

Зауваження 1.1. При $d \geq 2$ правильніше було б називати цей розподіл ротаційно інваріантним α-стійким розподілом. Поняття симетричного розподілу є вужчим в цьому випадку на відміну від випадку $d = 1$. Проте, слідуючи традиції, ми далі називатимемо описаний розподіл симетричним α-стійким розподілом при всіх $d \geq 1$.

Звідси зокрема маємо, що $h_d^{c,\alpha}(x) \geq 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$. Наступні міркування показують, що тут має місце строга нерівність.

Нехай підпростір $\mathbb{L}$ простору $\mathbb{R}^d$ є таким, що $\dim \mathbb{L} = m$, $1 \leq m < d$. Тоді $\dim \mathbb{L}^\perp = d - m$ і з (1.1) випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} h_d^{c,\alpha}(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = e^{-c(|\tilde{\xi}|^2+|\hat{\xi}|^2)^{\alpha/2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

де $\tilde{\xi}$ та $\hat{\xi}$ ортогональні проекції $\xi \in \mathbb{R}^d$ на $\mathbb{L}$ та $\mathbb{L}^\perp$, відповідно. Але якщо $\xi \in \mathbb{L}$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^d} h_d^{c,\alpha}(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = e^{-c|\xi|^\alpha}$. А це означає, що

$$\int\limits_{\mathbb{L}^\perp} h_d^{c,\alpha}(x)\, d\hat{x} = h_m^{c,\alpha}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{L}.$$

Зокрема, при $m = 1$ маємо в правій частині цієї рівності щільність одновимірного симетричного стійкого розподілу з тими ж параметрами.

Формула (1.2) має своїм наслідком наступне твердження, що характеризує поведінку $h_d^{c,\alpha}$ при великих $|x|$ (див. [10]):

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{d+\alpha} h_d^{c,\alpha}(x) = \alpha\, c\; 2^{\alpha-1} \pi^{-d/2-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.3}$$

Зауважимо, що права частина рівності (1.3) додатна і маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^\beta h_d^{c,\alpha}(x)\, dx < \infty$$

при кожному $\beta < \alpha$.

Добре відомо, що $h_1^{c,\alpha}$ є одновершинною функцією (див. [23]). Звідси випливає, що функція $h_d^{c,\alpha}$ одновершинна при кожному $d \geq 1$.

Наступне твердження та наслідок з нього будуть активно використовуватись в подальших розділах дисертації.

Лема 1.1. *Нехай $d \geq 2$, ν — фіксований орт в $\mathbb{R}^d$, а $\tilde{x}$ — довільний вектор* *в $\mathbb{R}^d$ ортогональний до ν. Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi} h_d^{c,\alpha}(\lambda\nu + \tilde{x})\, d\lambda = \\ = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty \exp\left\{-c(\xi^2+\rho^2)^{\alpha/2}\right\} \rho^{\frac{d-1}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\, d\rho. \tag{1.4}$$

Доведення. Позначимо інтеграл в лівій частині (1.4) через I. З формули (1.2) випливає рівність

$$I = \frac{2}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \rho^{d/2} e^{-c\rho^\alpha}\, d\rho \int_0^\infty J_{d/2-1}\left(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2}\right)(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi)\, d\lambda,$$

де $b = |\tilde{x}|$. Внутрішній інтеграл в цій формулі обчислюється (див. [11, гл. III, §16]), а саме

$$\int_0^\infty J_{d/2-1}\left(\rho\sqrt{\lambda^2+b^2}\right)(\lambda^2+b^2)^{-\frac{d-2}{4}} \cos(\lambda\xi)\, d\lambda = \\ = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\xi| > \rho \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho^{-\frac{d-2}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)\left(\frac{\sqrt{\rho^2-\xi^2}}{b}\right)^{\frac{d-3}{2}}, & \text{якщо } |\xi| < \rho. \end{cases}$$

Тому $I = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} b^{-\frac{d-3}{2}} \int_{|\xi|}^\infty e^{-c\rho^\alpha} \rho\, J_{\frac{d-3}{2}}\left(b\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)\left(\sqrt{\rho^2-\xi^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} d\rho$. Зробивши тут підстановку $\rho' = \sqrt{\rho^2-\xi^2}$, прийдемо до формули (1.4). □

Наслідок 1.1.1. *Нехай $\mathbb{L}$ — підпростір $\mathbb{R}^d$, $\dim \mathbb{L} = k$, $1 \le k < d$. Для довільних $\xi \in \mathbb{L}$ та $\tilde{x} \in \mathbb{L}^\perp$ справджується рівність*

$$\int_{\mathbb{L}} e^{i(x,\xi)} h_d^{c,\alpha}(x+\tilde{x})\, dx = \\ = (2\pi)^{-\frac{d-k}{2}} |\tilde{x}|^{-\frac{d-k-2}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{d-k}{2}} \exp\left\{-c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}\right\} J_{\frac{d-k-2}{2}}(\rho|\tilde{x}|)\, d\rho.$$

Зокрема, якщо ν — фіксований орт в $\mathbb{R}^d$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\right\}$, то для $\xi \in S$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливим є таке співвідношення

$$\int\limits_S e^{i(x,\xi)} h_d^{c,\alpha}(x + \lambda\nu)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-c(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}} \cos(\rho\lambda)\, d\rho. \tag{1.5}$$

Оцінки. При $\alpha \in (0, 2)$ з попереднього, зокрема з (1.3), легко вивести існування таких додатних сталих N_1 та N_2, що

$$\frac{N_1}{(1 + |x|)^{d+\alpha}} \le h_d^{c,\alpha}(x) \le \frac{N_2}{(1 + |x|)^{d+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

Оцінки (1.6) були отримані в [17, Ch. 4].

Далі нам знадобляться такі факти стосовно функції $h_d^{c,\alpha}$. По перше, очевидно, що $\int\limits_{\mathbb{R}^d} h_d^{c,\alpha}(x)\, dx = 1$ та $h_d^{c_1,\alpha} * h_d^{c_2,\alpha} = h_d^{c_1+c_2,\alpha}$. З оцінок (1.6) для кожного $\varepsilon > 0$ випливає справедливість таких нерівностей

$$\frac{N_1\omega_d}{d + \alpha - 1} \frac{\varepsilon^{d-1}}{(\varepsilon + 1)^{d+\alpha-1}} \le \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} h_d^{c,\alpha}(x)\, dx \le \frac{N_2\omega_d}{\alpha\varepsilon^\alpha}, \tag{1.7}$$

де $\omega_d = \dfrac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}$ — площа $(d-1)$-вимірної сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^d$.

Часткові випадки.

Гаусів розподіл. При $\alpha = 2$ очевидно справджується рівність

$$h_d^{c,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4c}\right\}.$$

Розподіл Коші. Якщо ж $\alpha = 1$, то з (1.1) одержуємо

$$h_d^{c,1} = \frac{\Gamma((d + 1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{c}{(c^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}}.$$

1.2.2.2 Щільність ймовірності переходу симетричного α-стійкого випадкового процесу.

Означення 1.1. Визначимо функцію $(g(t, x, y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$g(t, x, y) = t^{-d/\alpha} h_d^{c,\alpha}\left((x - y)t^{-1/\alpha}\right) = h_d^{ct,\alpha}(x - y). \tag{1.8}$$

Враховуючи (1.1), одержуємо, що ця рівність може бути записана і наступним чином

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi) - ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi. \tag{1.9}$$

З нерівностей (1.6) легко випливають наступні нерівності, які ми регулярно використовуватимемо впродовж всієї роботи. А саме при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$

$$N_1 \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}} \le g(t,x,y) \le N_2 \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}}, \tag{1.10}$$

де N_1, N_2 — деякі додатні сталі.

Функція g неперервна в області, що задається умовами $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Більше того, вона рівномірно неперервна в кожній області виду $(t,x,y) \in [\tau,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для довільного фіксованого $\tau > 0$. Як випливає з [10] (див., також, [17, Ch. 4]), вона та її похідні задовольняють нерівності (тут D^k означає диференціальний оператор k-го порядку, $k = 0,1,2,\dots$)

$$|D^k g(t,\cdot,y)(x)| \le N_k \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha+k}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d, \tag{1.11}$$

де N_k деякі додатні сталі. Для псевдодиференціального оператора $\mathbf{D}^\varkappa$ з однорідним символом $(Q_\varkappa(\xi))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ порядку $\varkappa$ справджується оцінка

$$|D^\varkappa g(t,\cdot,y)(x)| \le \tilde{N}_\varkappa \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\varkappa}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d \tag{1.12}$$

з деякою сталою $\tilde{N}_\varkappa > 0$, якщо функція $Q_\varkappa$ при $\xi \ne 0$ має всі похідні порядку $l \le M$ з деяким $M \ge 2d + \varkappa + \alpha + 1$ і $|D^l Q_\varkappa(\xi)| \le C_M |\xi|^{\varkappa - l}|$, $|\xi| \ne 0$, $C_M > 0$ (див. [17, 29]).

Твердження 1.2. *Функція g задовольняє наступні властивості*

1. $g(t,x,y) > 0$ *при всіх* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$;
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,z) g(s,z,y)\, dz = g(s+t,x,y)$ *при всіх* $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ *(рівняння Колмогорова-Чепмена);*

3. $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\,dy = 1$ *при всіх* $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$*;*

4. для кожного компакта $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ *та при всіх* $T>0$ *справджується* $\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{t\le T}\int\limits_{\Gamma} g(t,x,y)\,dy = 0$*;*

5. для кожного $\varepsilon>0$ *виконується* $\lim\limits_{t\to 0+}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon} g(t,x,y)\,dy = 0.$

Доведення. Перший та третій пункти твердження є очевидними наслідками означення функції g та властивостей функції $h_d^{c,\alpha}$.

Рівність Колмогорова-Чепмена виконується для функції g, оскільки для кожних $s>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,z)g(s,z,y)\,dz = (h_d^{ct,\alpha} * h_d^{cs,\alpha})(x-y) = h_d^{c(t+s),\alpha}(x-y).$$

З нерівностей (1.10) випливає оцінка $\int\limits_{\Gamma} g(t,x,y)\,dy \le KT(\rho(x,\Gamma))^{-d-\alpha}$ правильна для кожних $x\notin\Gamma$ та $t\le T$, де $\rho(x,\Gamma)$ — відстань від точки x до множини Γ, а K — деяка додатна стала. Це і доводить твердження четверного пункту.

Остання властивість випливає з того, що для кожного $\varepsilon>0$, враховуючи (1.7), можемо записати $\int\limits_{|x-y|>\varepsilon} g(t,x,y)\,dy = \int\limits_{|z|>\varepsilon t^{-1/\alpha}} h_d^{c,\alpha}(z)\,dz \le \dfrac{N_2\omega_d}{\alpha\varepsilon^\alpha}t$, де ω_d — як і вище, площа $(d-1)$-вимірної сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^d$. $\square$

Наслідком цього твердження, як випливає з твердження Теореми 3.6 монографії [16], є існування процесу Маркова в $\mathbb{R}^d$, для якого g є щільністю (відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^d$) ймовірності переходу. Більше того, цей процес можна вибрати так, щоб його траєкторії були неперервними справа і не мали розривів другого роду. Саме цей процес називатимемо симетричним (ротаційно інваріантним) α-стійким випадковим процесом в $\mathbb{R}^d$ (з параметрами c та α).

1.2.2.3 Поверхні класу $H^{1+\gamma}$.

Нехай в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ задана деяка обмежена замкнена поверхня S, яка розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини: внутрішню — D та зовнішню — $\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$ (через $\bar{\Gamma}$ позначається замкнення множини $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$).

Будемо припускати, що в кожній точці $x \in S$ існує дотична до S гіперплощина. Через $\nu(x)$ позначатиметься одиничний вектор зовнішньої нормалі до S в точці $x \in S$. Локальною системою координат в точці $x \in S$ зветься така ортогональна система координат $(y^1, y^2, \dots, y^d)$ з початком в точці x, що $y^d = (\nu(x), y)$. Припускатиметься, що існує таке $r_0 > 0$, що для будь-якої точки $x \in S$ частина поверхні $S_{r_0}(x) = S \cap B_{r_0}(x)$ (тут і далі через $B_\delta(z)$ позначається замкнена куля в $\mathbb{R}^d$ радіуса $\delta > 0$ з центром в точці $z \in \mathbb{R}^d$) може бути заданою в локальній системі координат (з початком в точці x) рівнянням $y^d = F_x(y^1, y^2, \dots, y^{d-1})$, де F_x — деяка однозначна функція. Нагадаємо, що S зветься поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ для деякого $\gamma \in (0,1)$ (див., наприклад, [20, Гл. III, §8], де такі поверхні називаються поверхнями класу $C^{1+\gamma}$), якщо для кожного $x \in S$ відповідна функція F_x в області $\sum\limits_{k=1}^{d-1} (y^k)^2 \leq r_0^2/4$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial F_x}{\partial y^k}$, $k = 1, 2, \dots, d-1$, які задовольняють в цій області умову Гельдера з показником γ і з константою, що не залежить від x.

З властивостей обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ ми регулярно будемо використовувати те, що існують додатне число δ_0 та натуральне число m такі, що для кожної точки $x \in S$ існує скінченний набір точок $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ на поверхні S, для яких має місце співвідношення $S \setminus S_{r_0/2}(x) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} S_{r_0/2}(x_k)$ з деяким $l \leq m$ і при цьому $\min\limits_{1 \leq k \leq l} \inf\limits_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x| \geq \delta_0$.

1.2.2.4 Деякі допоміжні нерівності.

Далі неодноразово нам знадобиться оцінка з наступної леми.

Лема 1.3. *Нехай S — деяка обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Для кожних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\theta > -1$ справджується нерівність*

$$\int\limits_S \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\theta}} \leq C \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \tag{1.13}$$

з деякою сталою $C > 0$.

Доведення. Позначивши через I інтеграл в лівій частині нерівності (1.13), при $t \geq 1$, очевидно, можна записати (оскільки $d \geq 2$) $I \leq |S| \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(d+\theta)} \leq |S| \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$, де $|S|$ — площа поверхні S.

Якщо ж $0 < t < 1$ і $\rho(x,S) = \inf_{y \in S} |y-x| \geq \rho_0$ з деякою сталою $\rho_0 > 0$, то $I \leq |S| \cdot \rho_0^{-d-\theta} < |S| \cdot \rho_0^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}$. Виберемо тепер $\rho_0 > 0$ досить малим і розглянемо випадок $x \in \mathbb{R}^d$ з $\rho(x,S) < \rho_0$. Нехай $\tilde{x} \in S$ задовольняє рівність $\rho(x,S) = |x - \tilde{x}|$. Позначимо через $\tilde{y}$ проекцію точки $y \in S$ на гіперплощину дотичну до S в точці $\tilde{x}$. Розіб'ємо поверхню S на дві частини: $S_{r_0/2}(\tilde{x})$ та $S \setminus S_{r_0/2}(\tilde{x})$. Враховуючи властивості поверхні S (див. п. 1.2.2.3), можемо записати

$$I \leq \int\limits_{S_{r_0/2}(\tilde{x})} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |\tilde{y} - \tilde{x}|)^{d+\theta}} + \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{S_{r_0/2}(x_k)} \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}|)^{d+\theta}} = \\ = I' + I''.$$

Для I' справджується нерівність

$$I' \leq const \int\limits_0^{r_0/2} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(t^{1/\alpha} + \xi)^{d+\theta}} = const \int\limits_0^{\frac{r_0}{2} t^{-1/\alpha}} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(1+\xi)^{d+\theta}} \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \leq \\ \leq const \int\limits_0^{\infty} \frac{\xi^{d-2}\, d\xi}{(1+\xi)^{d+\theta}} \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)} \leq const \cdot t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)},$$

де $const$ означає деяку додатну сталу, значення якої для нас неважливе.

Вибравши тепер $\rho_0 < \delta_0$ (число δ_0 означено в пункті 1.2.2.3), матимемо $|y - \tilde{x}| - |x - \tilde{x}| > \delta_0 - \rho_0 > 0$ і тому

$$I'' \leq m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} < m|S|(\delta_0 - \rho_0)^{-d-\theta} t^{-\frac{1}{\alpha}(\theta+1)}.$$

Цим і завершується доведення леми. $\square$

Зауважимо, що стала в нерівності (1.13) залежить тільки від d, θ і поверхні S.

Доведена нерівність разом з (1.10) приводить до оцінки

$$\int\limits_S g(t,x,y)\,d\sigma_y \leq K\ t^{-1/\alpha}, \tag{1.14}$$

що справедлива для кожної поверхні S, яка задовольняє умови Леми 1.3, при всіх $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$ з деякою сталою $K>0$.

В наступній лемі доводиться нерівність, подібна до тих, що розглядалися А. Н. Кочубеєм (див. [17, Ch. 4]). Ми використаємо запропонований там метод доведення.

Лема 1.4. *Нехай S — деяка обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma\in(0,1)$ в $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$. Для кожних $k>-1$, $l>-1$, $\varkappa>k-\alpha+1$, $\lambda>l-\alpha+1$ і для всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$ справджується нерівність*

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \frac{(t-\tau)^{\varkappa/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+k}}\frac{\tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+l}}\,d\sigma_z \leq\\ \leq K\cdot\left(B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa-k-1),1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+l}}+\right.\\ \left.+B\left(1+\frac{1}{\alpha}(\lambda-l-1),1+\frac{\varkappa}{\alpha}\right)\frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+k}}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

з деякою сталою $K>0$, що залежить тільки від d, l, k та поверхні S, де $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Доведення. Розіб'ємо множину інтегрування в лівій частині нерівності, що доводиться, на частини ($t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ фіксовані):

$$\Pi_1=\left\{(\tau,z):\tau\in(0,t/2]\,,z\in S\right\},\quad \Pi_2=\left\{(\tau,z):\tau\in(t/2,t]\,,z\in S\right\},$$

а їх в свою чергу — на такі частини:

$$\Pi_{11}=\left\{(\tau,z)\in\Pi_1:(t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\leq\frac{1}{2}(t^{1/\alpha}+|y-x|)\right\},\ \Pi_{12}=\Pi_1\setminus\Pi_{11};$$

$$\Pi_{21} = \left\{ (\tau, z) \in \Pi_2 : \tau^{1/\alpha} + |y - z| \le \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \right\}, \quad \Pi_{22} = \Pi_2 \setminus \Pi_{21}.$$

Скориставшись очевидними нерівностями $(u-v)^\rho \ge u^\rho - v^\rho$ при $0 < v < \frac{u}{2}$, $0 < \rho < 1$ та $|y - x| \le |y - z| + |z - x|$, можемо записати:

$$\tau^{1/\alpha} + |y-z| \ge t^{1/\alpha} - (t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x| - |z-x| \ge \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y-x|) \text{ при } (\tau, z) \in \Pi_{11};$$

$$(t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x| \ge t^{1/\alpha} - \tau^{1/\alpha} + |y-x| - |y-z| \ge \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y-x|) \text{ при } (\tau, z) \in \Pi_{21}.$$

Крім того, очевидно, що

$$(t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x| > \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \text{ при } (\tau, z) \in \Pi_{12};$$

$$\tau^{1/\alpha} + |y - z| > \frac{1}{2}(t^{1/\alpha} + |y - x|) \text{ при } (\tau, z) \in \Pi_{22}.$$

Тому для лівої частини нерівності (1.15) (позначимо її через I) виконується

$$\begin{aligned} I \le & \frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} \int\limits_{\Pi_{11} \cup \Pi_{22}} \frac{(t - \tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+k}} \, d\tau d\sigma_z + \\ + & \frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+k}} \int\limits_{\Pi_{12} \cup \Pi_{21}} \frac{(t - \tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y - z|)^{d+l}} \, d\tau d\sigma_z \le \\ \le & \frac{2^{d+l}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+l}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{(t - \tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - x|)^{d+k}} \, d\sigma_z + \\ + & \frac{2^{d+k}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+k}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{(t - \tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\lambda/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y - z|)^{d+l}} \, d\sigma_z. \end{aligned}$$

Нерівність (1.13) дозволяє тепер записати

$$I \le K \left(\frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+l}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}(\varkappa - k - 1)} \tau^{\lambda/\alpha}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+k}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\varkappa/\alpha} \tau^{\frac{1}{\alpha}(\lambda - l - 1)}\, d\tau \right) =$$

$$= K \left(B\left(1 + \frac{1}{\alpha}(\varkappa - k - 1), 1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-k-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+l}} \right.$$

$$\left. + B\left(1 + \frac{1}{\alpha}(\lambda - l - 1), 1 + \frac{\varkappa}{\alpha}\right) \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}(\varkappa+\lambda-l-1)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+k}} \right),$$

де K — деяка додатна стала, що залежить тільки від d, l, k та поверхні S. $\square$

1.2.2.5 Оператор A.

Визначимо оператор $\mathbf{A}$ його символом: $(-c|\xi|^{\alpha})_{\xi \in \mathbb{R}^d}$. Зауважимо, що для достатньо гладкої (принаймні з ліпшицевим градієнтом) та обмеженої разом зі своїми похідними функції $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ можливе інше зображення дії оператора $\mathbf{A}$ на таку функцію, а саме

$$\mathbf{A}\varphi(x) = c q_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x+z) - \varphi(x) - (z, \nabla\varphi(x))) \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1.16}$$

В цій формулі стала $q_\alpha = \dfrac{\alpha\Gamma\left((3-\alpha)/2\right)\Gamma\left((d+\alpha)/2\right)}{\pi^{(d+1)/2}\Gamma(2-\alpha)}$ залежить лише від α і розмірності простору d. Щоб встановити вигляд сталої q_α досить обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[e^{i(\xi,y)} - 1 - i(\xi, y) \right] |y|^{-d-\alpha}\, dy$$

з деяким $\xi \in \mathbb{R}^d$. Перейшовши до сферичної в $\mathbb{R}^d$ системи координат, для якої якобіан переходу має вигляд $J(\omega, r) = r^{d-1} j(\omega)$, одержимо

$$I = \int\limits_{\Omega} j(\omega)\, d\omega \int\limits_0^\infty \left[e^{i(\xi,\tilde{y})r} - 1 - i(\xi,\tilde{y})r \right] \frac{dr}{r^{1+\alpha}},$$

де $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{d-1})$ — вектор кутових координат, $\Omega = [0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi)$, $j(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1 \sin^{d-3}\omega_2 \cdot \dots \cdot \sin\omega_{d-2}$, $\tilde{y} = \tilde{y}(\omega)$ — проекція точки $y \in \mathbb{R}^d$ на одиничну сферу з центром в початку координат. Внутрішній інтеграл можна обчислити і одержати

$$I = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^\alpha \int\limits_\Omega |(\hat{\xi}, \tilde{y})|^\alpha j(\omega)\, d\omega = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^\alpha I^*,$$

де $\hat{\xi} = \dfrac{1}{|\xi|}\xi$. Зрозуміло, що інтеграл I^*, який ще залишилось обчислити не залежить від $\hat{\xi}$ і, отже, можемо взяти $\hat{\xi} = (1, 0, \dots, 0)$. Тоді

$$I^* = \int\limits_0^\pi |\cos\omega_1|^\alpha \sin^{d-2}\omega_1\, d\omega_1 \int\limits_0^\pi \sin^{d-3}\omega_2\, d\omega_2 \cdots \int\limits_0^\pi \sin\omega_{d-2}\, d\omega_{d-2} \int\limits_0^{2\pi} d\omega_{d-1}.$$

Оскільки $\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin^k\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)}$ для кожного натурального k, а

$$\int\limits_0^\pi |\cos\theta|^\alpha \sin^{d-2}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)},$$

то $I^* = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}$ і, отже,

$$I = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^\alpha.$$

Враховуючи, що $-c|\xi|^\alpha = cq_\alpha I$, одержимо

$$q_\alpha = -\frac{\alpha(\alpha-1)\Gamma((d+\alpha)/2)}{2\pi^{(d-1)/2}\Gamma(2-\alpha)\Gamma((\alpha+1)/2)\cos(\pi\alpha/2)} = \\ = \frac{\alpha\Gamma\left((3-\alpha)/2\right)\Gamma\left((d+\alpha)/2\right)}{\pi^{(d+1)/2}\Gamma(2-\alpha)},$$

де врахована відома формула доповнення $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-z\right) = \dfrac{\pi}{\cos\pi z}$.

1.2.2.6 Задача Коші.

Для неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ з дійсними значеннями покладемо

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.17}$$

Ця функція є розв'язком такої задачі Коші (див. [17, Ch. 4]):

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d; \tag{1.18}$$

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.19}$$

Довести це можна наступним чином. Згідно означення оператора $\mathbf{A}$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ маємо

$$\mathbf{A}g(t,\cdot,y)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,x-y)-ct|\xi|^\alpha}(-c|\xi|^\alpha)\,d\xi.$$

Так само

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,x-y)-ct|\xi|^\alpha}(-c|\xi|^\alpha)\,d\xi.$$

З нерівності (1.12) випливає, що

$$|\mathbf{A}g(t,\cdot,y)(x)| \le \frac{\tilde{N}_\alpha}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d.$$

Права частина цієї нерівності при фіксованих $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ інтегровна по y на всьому $\mathbb{R}^d$. Причому збіжність відповідного інтеграла є локально рівномірною по $t>0$.

Таким чином, для кожної функції $\varphi\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ справджується рівність

$$\mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathbf{A}g(t,\cdot,y)(x)\varphi(y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial t}g(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x,\varphi).$$

Виконання початкової умови випливає з наступних простих обчислень.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy = t^{-d/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(1,0,(y-x)t^{-1/\alpha})\varphi(y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(1,0,z)\varphi(x+zt^{1/\alpha})\,dz \to \varphi(x), \quad t\to 0+$$

при всіх $x\in\mathbb{R}^d$.

Неважко зрозуміти, що при всіх $t>0$ функція $u(t,\cdot,\varphi)$, визначена інтегралом (1.17), є функцією з $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$, якщо такою є функція φ.

З принципу максимуму для рівняння (1.18) (див. [17, Lemma 4.7]) випливає, що розв'язок задачі Коші (1.18) — (1.19) єдиний в класі $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Справджується також наступне твердження (див., наприклад, [17, 29]). Нехай $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^d)$ і $(f(t,x))_{t\ge 0, x\in\mathbb{R}^d}$ є неперервною функцією, обмеженою на кожній множині виду $D_T=[0,T]\times\mathbb{R}^d$ для $T<\infty$. Припустимо, що функція f неперервна за Гельдером (з показником з інтервалу $(0,1)$) за аргументом x локально рівномірно по t. Тоді єдиний обмежений розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + f(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.20}$$

має наступний вигляд

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)f(\tau,z)\,dz.$$

1.2.3 Оператор B.

Позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, символом якого є векторнозначна функція $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$, де i — уявна одиниця. Це означає, що дія оператора $\mathbf{B}$ на функцію $\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\,d\xi$, $x\in\mathbb{R}^d$, визначається рівністю

$$\mathbf{B}\phi(x) = i\int\limits_{\mathbb{R}^d} \xi|\xi|^{\alpha-2}e^{i(x,\xi)}\Phi(\xi)\,d\xi, \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

в припущенні, що цей інтеграл є добре визначеним.

Інша формула для результату дії оператора $\mathbf{B}$ на обмежену Ліпшицеву функцію $(\phi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ має вигляд

$$\mathbf{B}\phi(x) = \frac{q_\alpha}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{|y|^{d+\alpha}}\, y\, dy, \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

де q_α — стала, визначена вище (див. пункт 1.2.2.5).

Оператор $\mathbf{B}$ буде відігравати роль, подібну до ролі градієнта в класичній (при $\alpha = 2$) теорії. Зауважимо, що $\mathbf{A} = c\cdot\mathbf{div}\,\mathbf{B}$, де $\mathbf{div}$ означає оператор дівергенції.

Для фіксованого орта $\nu\in\mathbb{R}^d$ через $\mathbf{B}_\nu$ позначаємо оператор, що визначається символом $(i|\xi|^{\alpha-2}(\xi, 2c\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом помноженого на $2c$ оператора диференціювання в напрямку ν.

Позначимо через $g^\nu(t,x,y)$ результат дії оператора $\mathbf{B}_\nu$ на функцію g, як функцію середнього аргумента $g^\nu(t,x,y) = \mathbf{B}_\nu g(t,\cdot,y)(x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$. З формули (1.9) випливає рівність

$$g^\nu(t,x,y) = \frac{2ic}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(x-y,\xi)-ct|\xi|^\alpha\}|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu)\, d\xi,$$

що справджується при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$. Повернувши систему координат так, щоб вектор ν став ортом її однієї з осей (нехай останньої), застосувавши інтегрування частинами та виконавши зворотній поворот системи координат, одержимо

$$\begin{aligned}
g^\nu(t,x,y) &= \frac{2ic}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} d\eta^{<d>}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\hat{x}-\hat{y},\eta)-ct|\eta|^\alpha\}|\eta|^{\alpha-2}\eta_d\, d\eta_d = \\
&= \frac{2ic}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} d\eta^{<d>}\Bigg(-\frac{1}{ct\alpha}\exp\{i(\hat{x}-\hat{y},\eta)-ct|\eta|^\alpha\}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \\
&\qquad + \frac{i}{ct\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{i(\hat{x}-\hat{y},\eta)-ct|\eta|^\alpha\}(\hat{x}_d-\hat{y}_d)\, d\eta_d\Bigg) = \\
&= \frac{2(y-x,\nu)}{t\alpha}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\{i(x-y,\xi)-ct|\xi|^\alpha\}\, d\xi,
\end{aligned}$$

що означає
$$g^{\nu}(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\,\frac{(y-x,\nu)}{t}\,g(t,x,y). \tag{1.21}$$
Ця формула цілком подібна до похідної в напрямку ν щільності ймовірності переходу вінерового процесу (остання отримується з формули (1.9), якщо там покласти $\alpha = 2$ та $c = 1/2$).

1.2.4 Формула Фейнмана-Каца.

Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, \zeta, \mathbb{P}_x)$ прогресивно-вимірний процес Маркова у фазовому просторі $(X, \mathcal{B})$. Позначимо через $P(t,x,\Gamma)$ при $t > 0$, $x \in X$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$ перехідну ймовірність цього процесу $P(t,x,\Gamma) = \mathbb{P}_x(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\zeta > t\})$. Для заданої вимірної обмеженої функції $(v(x))_{x \in X}$ з комплексними значеннями, покладемо
$$P^{\bullet}(t,x,\Gamma) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\Gamma}(x(t))\exp\left\{\int\limits_0^t v(x(s))\,ds\right\}\right], \tag{1.22}$$
де $t > 0$, $x \in X$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$. Ця функція є комплекснозначною мірою на $(X, \mathcal{B})$ при фіксованих $t > 0$ та $x \in X$, яка задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена $P^{\bullet}(s+t,x,\Gamma) = \int\limits_X P^{\bullet}(s,x,dy)P^{\bullet}(t,y,\Gamma)$ при всіх $s > 0$, $t > 0$, $x \in X$ та $\Gamma \in \mathcal{B}$. Функції P та $P^{\bullet}$ пов'язані наступною парою рівнянь
$$P^{\bullet}(t,x,\Gamma) = P(t,x,\Gamma) + \int\limits_0^t ds \int\limits_X P(s,x,dy)v(y)P^{\bullet}(t-s,y,\Gamma),$$
$$P^{\bullet}(t,x,\Gamma) = P(t,x,\Gamma) + \int\limits_0^t ds \int\limits_X P^{\bullet}(s,x,dy)v(y)P(t-s,y,\Gamma).$$
Перше рівняння є простим наслідком тотожності
$$\exp\left\{\int\limits_0^t v(x(s))\,ds\right\} = 1 + \int\limits_0^t v(x(s))\exp\left\{\int\limits_s^t v(x(s'))\,ds'\right\}ds$$

а друге легко випливає з наступного співвідношення

$$\exp\left\{\int_0^t v(x(s))\,ds\right\} = 1 + \int_0^t v(x(s))\exp\left\{\int_0^s v(x(s'))\,ds'\right\} ds.$$

Якщо якась із функцій P та $P^\bullet$ абсолютно неперервна відносно деякої фіксованої міри l на $(X, \mathcal{B})$, то такою є й інша та відповідні щільності G і $G^\bullet$ пов'язані між собою наступними співвідношеннями

$$G^\bullet(t,x,y) = G(t,x,y) + \int_0^t ds \int_X G(s,x,z)v(z)G^\bullet(t-s,z,y)\,l(dz), \quad (1.23)$$

$$G^\bullet(t,x,y) = G(t,x,y) + \int_0^t ds \int_X G^\bullet(s,x,z)v(z)G(t-s,z,y)\,l(dz). \quad (1.24)$$

Зауваження 1.2. Ці рівності повинні справджуватися при всіх $t > 0$, $x \in X$ та майже всіх $y \in X$ відносно міри l. Проте, в ситуаціях, які ми будемо розглядати, G та $G^\bullet$ будуть неперервними за всіма своїми аргументами і рівності (1.23) та (1.24) будуть вірними при всіх $y \in X$.

Рівняння (1.23) та (1.24) можна розглядати як формули збурень в ситуації коли генератор напівгрупи збурюється з допомогою оператора, чия дія на функцію полягає у множенні її на дану функцію $(v(x))_{x\in X}$ (див. [27]).

Стартуючи з множини вимірних обмежених функцій v та використовуючи граничний перехід, можна розповсюдити рівняння (1.23), (1.24) та співвідношення (1.22) на функції v, що є локально необмеженими та навіть узагальненими.

1.2.5 W-функціонали від процесів Маркова.

Завершимо перший розділ нагадуванням деяких фактів з теорії W-функціоналів від процесів Маркова (див. [16, Ch. 6, §6]). Так називаються адитивні однорідні неперервні невід'ємні функціонали $(\eta_t)_{t\geq 0}$ від процесу Маркова $(x(t), \mathcal{M}_t, \zeta, \mathbb{P}_x)$ в $(X, \mathcal{B})$ такі, що $\sup\limits_{x\in X} \mathbb{E}_x \eta_t < \infty$ для кожного $t > 0$. Доведено, що W-функціонал $(\eta_t)_{t\geq 0}$ однозначно визначається функцією $F_t(x) = \mathbb{E}_x\eta_t$, $t \geq 0$, $x \in X$, що називається характеристикою W-функціонала $(\eta_t)_{t\geq 0}$. Ця функція вимірна відносно $x \in X$ при фіксованому $t \geq 0$, зростаюча відносно $t \geq 0$ при фіксованому $x \in X$ ($F_0(x) \equiv 0$) та задовольняє наступну рівність

$$\int\limits_X F_t(y)P(s,x,dy) = F_{s+t}(x) - F_s(x)$$

при всіх $s > 0$, $t > 0$ та $x \in X$.

Кожна функція $(H_t(x))_{t\geq 0, x\in X}$, що задовольняє ці властивості, називається W-функцією і важливим є питання коли дана W-функція є характеристикою деякого W-функціонала. Відповідь на це питання ствердна, якщо дана W-функція $(H_t(x))_{t\geq 0, x\in X}$ задовольняє умову $\sup\limits_{x\in X} H_t(x) \to 0$, при $t \to 0+$. Ця умова достатня, але не необхідна. У нас буде можливість нижче розглянути W-функціонал, характеристика якого не задовольняє цю умову.

1.3 Загальна характеристика роботи та основні результати дослідження.

В цьому параграфі коротко, наскільки це можливо, опишемо структуру дисертації та сформулюємо основні результати дисертаційного дослідження. При цьму збережемо нумерацію тверджень.

У **вступі** висвітлено актуальність дослідження, зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну одержаних у дисертації результатів, виокремлено особистий внесок здобувача та вказано установи й організації, де доповідались та обговорювались результати дисертації.

У **першому розділі** дисертації подано короткий огляд відомих результатів, що стосуються тематики роботи. Він дозволить дати уявлення про сучасний стан досліджень з даної тематики та про місце результатів дисертаційної роботи у розв'язанні поставленої проблеми. Крім того, тут введено необхідні терміни, сформульовано попередні відомості та результати, доведено деякі допоміжні твердження, які потрібні для розуміння роботи, зроблено короткий огляд дисертації.

Другий розділ дисертації присвячений побудові теорії потенціалу простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними стійкими випадковими процесами в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Як і в класичній теорії потенціалу для параболічних рівнянь другого порядку, згадані потенціали використані для побудови фундаментальних розв'язків другої (типу Неймана) та третьої (змішаної) початково-крайових задач, а також для побудови розв'язків деяких інших задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу.

У *першому підрозділі* введено поняття потенціалу простого шару для псевдодиференціального рівняння параболічного типу виду

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \mathbf{A} u(t,\cdot)(x), \tag{1.25}$$

де $\mathbf{A}$ — псевдодиференціальний оператор, символ якого задається функцією $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ з деякими сталими $c > 0$ та $\alpha \in (1,2)$. Цей оператор є інфінітезимальним оператором стандартного процесу Маркова $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, що зветься симетричним α-стійким випадковим процесом.

Нехай S — деяка двостороння вимірна поверхня. Потенціалом простого шару з густиною $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ на поверхні S називатимемо функцію

$$v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\, d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

де функція $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,x\in\mathbb{R}^d}$ — щільність ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, а внутрішній інтеграл є поверхневим інтегралом першого роду.

В дисертаційній роботі розглядаються дві основні ситуації: перша, коли $d \geq 2$ і поверхня S є обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$; друга, коли носій потенціалу — гіперплощина (включно з точкою у випадку $d = 1$).

Існування потенціалу простого шару забезпечує виконання щодо його густини умови $|\psi(t,x)| \leq C\, t^{-\beta}$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$.

Доведені наступні властивості такого потенціалу. Функція v є неперервною на $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$; в області $(t,x) \in (0,\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$ ця функція задовольняє рівняння (1.25). Центральним місцем в теорії потенціалу простого шару є, так звана, теорема про стрибок його конормальної похідної (в нашому випадку порядку $\alpha - 1$) в точках поверхні S.

Позначимо через $(g^\nu(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ результат дії на функцію $g(t,x,y)$ за аргументом x оператора $\mathbf{B}_\nu$, що задається символом $(i|\xi|^{\alpha-2}(\xi, 2c\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом конормальної похідної в класичній теорії (при $\alpha = 2$). Так ми його і будемо називати.

Теорема 2.2. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня в $\mathbb{R}^d$ класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини D і $\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$, а $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову $|\psi(t,x)| \le C\,t^{-\beta}$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$, то при фіксованих $t > 0$ та $x_0 \in S$ справджується співвідношення*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0\pm} \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y = \\ = \mp\,\psi(t,x_0) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,\end{aligned} \tag{1.26}$$

де $\nu(x_0)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в точці x_0, а $x \to x_0+$ (відповідно x_0-) означає, що x наближається до x_0 вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x_0, такому, що $\mathcal{K} \subset (\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}) \cup \{x_0\}$ (відповідно $\mathcal{K} \subset D \cup \{x_0\}$).

Інтеграл в правій частині формули (1.26) зветься прямим значенням результату дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$ на потенціал простого шару в точці $x_0 \in S$. Аналог цієї теореми для гіперплощини формулюється так.

Теорема 2.3. *Нехай $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\}$ з деяким одиничним вектором $\nu \in \mathbb{R}^d$, а $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями,* *що задовольняє умову* $|\psi(t,x)| \le C\, t^{-\beta}$ *з деякими сталими* $C > 0$ *та* $\beta < 1$.

Тоді справджується співвідношення

$$\lim_{z\to x\pm} \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu}(t-\tau, z, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y = \mp\psi(t,x) \tag{1.27}$$

для всіх $t > 0$ *та* $x \in S$, *де* $z \to x+$ *(відповідно,* $z \to x-$*) означає, що* z *наближається до* x *вздовж довільної кривої, що лежить в скінченному замкненому конусі* $\mathcal{K}$ *в* $\mathbb{R}^d$ *з вершиною в точці* x *такому, що* $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z,\nu) > 0\} \cup \{x\}$ *(відповідно,* $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z,\nu) < 0\} \cup \{x\}$*).*

Відсутність в правій частині рівності (1.27) прямого значення результату дії оператора $\mathbf{B}_\nu$ на потенціал простого шару в точці $x \in S$ є наслідком рівності

$$g^{\nu}(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\frac{(y-x,\nu)}{t} g(t,x,y),$$

яка справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

В *другому підрозділі* розглянуті початково-крайові задачі для псевдодиференціального рівняння (1.25) та ймовірнісні представлення їх розв'язків.

Нехай S — деяка гладка поверхня в $\mathbb{R}^d$, яка ділить множину $\mathbb{R}^d$ на дві частини D_+ та D_- так, що $\mathbb{R}^d = D_+ \cup S \cup D_-$, а $\nu(x)$ — орт нормалі до S в точці $x \in S$ направленої в сторону D_+. Розглядаємо дві ситуації: перша, коли S є обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$, а друга, коли S — гіперплощина, яка проходить через початок координат (що несуттєво) ортогонально до деякого фіксованого одиничного вектора ν (тоді $\nu(x) = \nu$ при всіх $x \in S$).

Задавши на S деякі неперервні дійснозначні функції $(q(x))_{x\in S}$ та $(r(x))_{x\in S}$ ($r(x) \ge 0$, $x \in S$), а також, зафіксувавши деяку функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (так позначаємо множину обмежених неперервних дійснозначних функцій на $\mathbb{R}^d$), розглянемо задачу побудови неперервної функції $(u(t,x,\varphi))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє:

(i) псевдодиференціальне рівняння:

$$\frac{\partial u(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S;$$

(ii) початкову умову: $u(0+,x,\varphi)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$;

(iii) граничну умову: при $t>0$, $x\in S$

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)u(t,x,\varphi).$$

Як і вище, в умові (iii) під записом $f(x+)$ (відповідно $f(x-)$) розуміємо границю функції $(f(y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ в точці $x\in S$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K}\subset D_+\cup\{x\}$ (відповідно $\mathcal{K}\subset D_-\cup\{x\}$). Таку задачу ми називаємо третьою початково-крайовою задачею для псевдодиференціального рівняння (1.25). При $r(x)\equiv 0$ вона стає другою початково-крайовою задачею.

Сформульовану задачу розв'язуємо з використанням потенціалу простого шару та теореми про стрибок конормальної похідної порядку $\alpha-1$ останнього. При цьому розглядається окремо випадок $q(x)\equiv 0$, це — так звана симетрична початково-крайова задача, та випадок $r(x)\equiv 0$ — друга початково-крайова задача. Кожного разу нас цікавитиме питання про ймовірнісні сенс та представлення відповідних розв'язків.

В першому пункті цього підрозділу розв'язується друга початково-крайова задача. Гранична умова в ній виглядає так

(iv) $(1+q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - (1-q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-) = 0$
при всіх $t>0$, $x\in S$.

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

$$\tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \qquad (1.28)$$

де функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ потребує визначення. Використовуючи властивості потенціалу простого шару (в тому числі і теорему про стрибок), приходимо до висновку, що функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in S,$$

яке розв'язується методом послідовних наближень. Нехай

$$\psi_0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in S, \tag{1.29}$$

а для $n\geq 1$

$$\psi_n(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi_{n-1}(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in S. \tag{1.30}$$

Теорема 2.6. *Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє умови Теореми 2.2, $(q(x))_{x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, а $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то початково-крайова задача (i), (ii), (iv) має такий розв'язок, який зображається формулою* (1.28) *з функцією ψ, визначеною з допомогою ряду $\psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(t,x)$, члени якого задовольняють співвідношення* (1.29), (1.30).

Аналогічно, в другому пункті побудовано фундаментальний розв'язок задачі (i), (ii), (iv).

Теорема 2.7. *Функція $(\tilde{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю*

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

де $(w(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння ($t>0$, $x\in S$, $y\in\mathbb{R}^d$)

$$w(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

є фундаментальним розв'язком задачі (i), (ii), (iv).

Зауважимо, що функція $\tilde{g}$ задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\tilde{g}(s+t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(s,x,z)\tilde{g}(t,z,y)\,dz$$

для всіх $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$, і, крім того, справджується тотожність $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1$. Але крім додатніх значень вона може приймати і від'ємні. Таким чином, стверджувати про існування такого процесу Маркова, для якого побудований в Теоремі 2.7 фундаментальний розв'язок був би щільністю ймовірності переходу, ми не можемо. Тут можна говорити тільки про "псевдопроцес".

Для другої початково-крайової задачі у випадку граничної умови на гіперплощині маємо такі ж результати.

В третьому пункті розглядається симетрична третя початково-крайова задача з обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$ в якості границі. Гранична умова в цій задачі має вигляд

(v) $\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)u(t,x,\varphi)$,
при $t > 0$, $x \in S$.

Збурюючи інфінітезимальний оператор симетричного α-стійкого випадкового процесу оператором множення на функцію $r(\cdot)\delta_S$, в якій δ_S є узагальненою функцію — дельта-функцією на поверхні S, одержуємо процес Маркова $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$, утворений з $(x(t))_{t\geq 0}$ убиванням з інтенсивністю $(r(x))_{x\in S}$ останнього на поверхні S. Щільність ймовірності переходу $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ такого процесу задовольняє інтегральне рівняння (рівняння збурення)

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\hat{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{1.31}$$

Розв'язок рівняння (1.31) будується методом послідовних наближень. Крім того, для кожної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ при всіх $t > 0$,

$x \in \mathbb{R}^d$ виконується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\eta_t(r)}, \qquad (1.32)$$

де $(\eta_t(r))_{t\geq 0}$ — W-функціонал з характеристикою

$$f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Це наслідок формули Фейнмана-Каца та доведеної наступної апроксимаційної леми. Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T>0$ виконується $\sup\limits_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < \infty$, розглянемо її перетворення

$$\psi_h(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ h>0, \quad (1.33)$$

в якому $v_h(x) = \int\limits_S g(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y$.

Лема 2.8. *Для даних чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$ та $T > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що нерівність $|\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)| < \varepsilon$ виконується при всіх $h > 0$, $t' \in (0,T]$, $t \in (0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ з властивістю $\sup\limits_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < L$, якщо тільки $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.*

Теорема 2.9. *Побудована вище функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі* (i), (ii), (v).

Симетрична третя початково-крайова задача з граничною умовою на гіперплощині розглядається в четвертому пункті цього підрозділу. Єдина відмінність цієї ситуації від попередньої полягає в тому, що відповідна апроксимаційна лема у випадку $d \geq 2$ стверджує тільки локальну по просторовій змінній компактність перетворення типу (1.33).

Позначимо $B_R = \{y \in \mathbb{R}^d : |y| \leq R\}$ для $R > 0$ та $B_R^C = \mathbb{R}^d \setminus B_R$.

Лема 2.11. *Якщо $d \geq 2$, то для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $T > 0$ та $R > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)| < \varepsilon$ справджується при всіх $h > 0$, $t \in [0, T]$, $t' \in [0, T]$, $x \in B_R$, $x' \in B_R$ та всіх вимірних функціях $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$, що володіють властивістю*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} |\psi(t, x)| \leq L,$$

якщо тільки виконується нерівність $|t' - t| + |x' - x| < \delta$.

П'ятий пункт присвячений загальній третій початково-крайовій задачі (i) — (iii) з граничною умовою на обмеженій замкненій поверхні класу $H^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0, 1)$.

Фундаментальний розв'язок цієї задачі будується як спільний розв'язок пари рівнянь ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g^*(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \qquad (1.34)$$

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S g^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \qquad (1.35)$$

в яких функція $(\tilde{g}(t, x, y))_{t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ — та ж, що її визначено вище (фундаментальний розв'язок другої початково-крайової задачі).

Спільний розв'язок рівнянь (1.34), (1.35) шукаємо у вигляді суми ряду

$$g^*(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k^*(t, x, y), \qquad (1.36)$$

де $g_0^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y)$, а при $k \geq 1$

$$g_k^*(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g_{k-1}^*(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z.$$

Теорема 2.15. *Функція* $(g^*(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$*, задана рівністю* (1.36)*, є фундаментальним розв'язком задачі* (i) — (iii).

Як уже зазначалось, функція $\tilde{g}$ не може бути щільністю ймовірності переходу жодного процесу Маркова. Але її можна розглядати такою для псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$ і, тому, функція g^* повинна бути пов'язана з цим псевдопроцесом за аналогією з (1.32) так, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^*(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}_x^*\varphi(y(t))e^{-\eta_t^*(r)}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

де $\mathbb{E}_x^*$ позначає "математичне сподівання" відносно псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$ а $(\eta_t^*(r))_{t\geq 0}$ — деякий "адитивний функціонал від нього".

Ситуація у випадку гіперплощини нічим не відрізняється від цієї, як видно з шостого пункту.

В *третьому підрозділі* розглядається задача побудови липучої мембрани для симетричного α-стійкого випадкового процесу $(x(t),\mathcal{M}_t,\mathbb{P}_x)$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, як на гіперплощині, так і на кривій поверхні. Тут з допомогою випадкової заміни часу побудовано випадковий процес $(\hat{x}(t),\hat{\mathcal{M}}_t,\mathbb{P}_x)$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, результат дії резольвентного оператора якого $\hat{U}(\lambda,x,\varphi)=\hat{\mathbf{R}}_\lambda\varphi(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(\hat{x}(t))\,dt$ на кожну обмежену гельдерову функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, задовольняє рівняння

(I) $\lambda\hat{U}(\lambda,x,\varphi)-\varphi(x)=\mathbf{A}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x)$ при всіх $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^d\setminus S$;

(II) $\lambda\hat{U}(\lambda,x,\varphi)-\varphi(x)=\dfrac{1}{2p(x)}\Big[\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x+)-\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x-)\Big]$ при всіх $\lambda>0$, $x\in S$,

де $(p(x))_{x\in S}$ — деяка додатна функція.

Цей факт можна розуміти, як те, що процес $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$ проводить на поверхні S ненульовий час.

В першому пункті цього підрозділу розглядаються перетворення Лапласа потенціалу простого шару

$$V(\lambda, x, \psi) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} v(t, x, \psi)\, dt = \int\limits_S G(\lambda, x, y) \Psi(\lambda, y)\, d\sigma_y,$$

де $G(\lambda, x, y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g(t, x, t)\, dt$, $\Psi(\lambda, x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \psi(t, x)\, dt$, та його властивості. Зокрема, функція $(V(\lambda, x, \psi))_{\lambda>0, x\in\mathbb{R}^d}$ неперервна та задовольняє рівняння $\mathbf{A}V(\lambda, \cdot, \psi)(x) = \lambda V(\lambda, x, \psi), \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus S$. Відповідник теореми про стрибок для обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$ формулюється наступним чином.

Теорема 2.17. *Нехай обмежена замкнена поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$, а функція $(\psi(t, x))_{t\geq 0, x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються співвідношення*

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} V(\lambda, \cdot, \psi)(x\pm) = \int\limits_S G^{\nu(x)}(\lambda, x, y) \Psi(\lambda, y)\, d\sigma_y \mp \Psi(\lambda, x),$$

при всіх $\lambda > 0$.

Якщо S — гіперплощина, то при $d \geq 2$ маємо наступне твердження

Теорема 2.18. *Якщо функція $(\psi(t, x))_{t\geq 0, x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються співвідношення $\mathbf{B}_\nu V(\lambda, \cdot, \psi)(x\pm) = \mp\Psi(\lambda, x)$, при всіх $\lambda > 0$.*

По суті те ж саме твердження маємо і для $d = 1$. В цьому випадку $S = \{0\}$ і потенціал простого шару задається рівністю

$$v(t, x, \psi) = \int\limits_0^t g(t - \tau, x, 0) \psi(\tau)\, d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

в якій $(\psi(t))_{t>0}$ — неперервна функція, що задовольняє нерівність $|\psi(t)| \leq Ct^{-\beta}$ з деякими сталими $C > 0$, $\beta < 1$.

Теорема 2.19. *Якщо функція $(\psi(t))_{t\geq 0}$ обмежена і неперервна на $[0,\infty)$, то справджуються співвідношення*

$$\lim_{x\to 0\pm} 2c\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{B}v(t,\cdot,\psi)(x)\,dt = \mp\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)\,dt.$$

при кожному $\lambda > 0$.

Останні два пункти цього підрозділу присвячені вивченню W-функціоналу $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ з характеристикою $f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(\tau,x,y)p(y)\,d\sigma_y$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, де $(p(x))_{x\in S}$ — деяка додатна неперервна функція (додатково обмежена у випадку гіперплощини), та побудові процесу $(\hat{x}(t),\hat{\mathcal{M}}_t,\mathbb{P}_x)$, де $\hat{x}(t) = x(\zeta_t)$, $\hat{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_{\zeta_t}$, а $\zeta_t = \inf\{s\geq 0 : s+\eta_s(p)\geq t\}$.

Теорема 2.21. *У випадку $d\geq 2$ для кожної обмеженої гельдерової функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ функція $\hat{U}(\lambda,x,\varphi) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(\hat{x}(t))\,dt$, $\quad\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, є розв'язком задачі (I), (II).*

Якщо $d = 1$, то маємо $S = \{0\}$, $p(x)\equiv p\in(0,\infty)$ і

$$f_t(x) = p\int\limits_0^t g(\tau,x,0)\,d\tau,\quad t > 0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Тоді функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ є домноженим на p локальним часом процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ в нулі (початку координат). Твердження останньої теореми залишається без змін.

У **третьому розділі** розглядаються адитивні збурення інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою оператора $(a(\cdot),\mathbf{B})$, де векторний оператор $\mathbf{B}$ визначається своїм символом $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ та $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — деяка $\mathbb{R}^d$-значна функція.

З точки зору теорії диференціальних рівнянь потрібно розглянути задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + (a(x),\mathbf{B}u(t,\cdot)(x)) \tag{1.37}$$

в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Фундаментальний розв'язок такої задачі шукається як спільний розв'язок наступної пари рівнянь (рівняння збурення)

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)(a(z), \mathbf{B}\hat{g}(\tau,\cdot,y)(z))\,dz, \\
\hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t-\tau,x,z)(a(z), \mathbf{B}g(\tau,\cdot,y)(z))\,dz.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

В *першому підрозділі* побудовано збурення з коефіцієнтом $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — функцією з $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 3.1. *Нехай функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову: $a \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з деяким $p > d+\alpha$ (можливо, $p = \infty$).*

Збурення $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ існує та має наступні властивості:

- *задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,z)\hat{g}(s,z,y)\,dz = \hat{g}(t+s,x,y), \quad t>0,\ s>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d;$$

- *як функція третього аргумента (при фіксованих перших двох) є абсолютно інтегровним і* $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1$.

Наступне твердження дозволяє сконструювати узагальнений розв'язок згаданої вище задачі Коші.

Теорема 3.3. *Нехай задані функції $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, що задовольняють умови Теореми 3.1. Позначимо через $\hat{g}$ та $\tilde{g}$ розв'язки рівнянь типу* (1.38)*, в яких функція a замінена на $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, відповідно. Тоді справджується нерівність*

$$|\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y)| \le H_T \|\hat{a}-\tilde{a}\|_p \frac{t^{1-\frac{d}{\alpha p}}}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p > d+\alpha$ *скінченне, чи*

$$|\hat{g}(t,x,y)-\tilde{g}(t,x,y)| \le H_T \|\hat{a}-\tilde{a}\|_\infty \frac{t}{(t^{\frac{1}{\alpha}}+|y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p=\infty$, *на множині* $(0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ *для кожного* $T>0$, *де додатна стала* H_T *залежить тільки від* c, α, $\|\hat{a}\|_p$, $\|\tilde{a}\|_p$, T.

Наслідок 3.3.1. *Нехай* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ *та* $\hat{g}$, $\tilde{g}$ *такі ж, як в Теоремі 3.1. Покладемо* $\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $\tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$. *Тоді справджується наступна нерівність (включно з* $p=\infty$*)*

$$|\hat{u}(t,x)-\tilde{u}(t,x)| \le L_T \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \|\hat{a}-\tilde{a}\|_p$$

при $x\in\mathbb{R}^d$, $0<t\le T$ *для кожного* $T>0$. *Тут* L_T *— деяка додатна стала, що можливо залежить від* T.

Нехай $\mathbb{R}^d$-значна функція $(a(x))_{\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову $\|a\|_p < \infty$ для деякого $p > d+\alpha$. Тоді існує послідовність функцій $a_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ така, що $\|a_n - a\|_p \to 0$, якщо $n\to\infty$. Відповідно до твердження Наслідку 3.3.1 можемо визначити функцію $\hat{u}(t,x)$ рівністю $\hat{u}(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n(t,x)$, де $\hat{u}_n(t,x)$ є розв'язком ссформульованої вище задачі Коші з функцією a_n в коефіцієнті. Твердження Теореми 3.3 означає, що

$$\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy,$$

де $\hat{g}(t,x,y)$ є збуренням (з функцією a) щільності ймовірності переходу симетричного α-стійкого випадкового процесу. Саме в цьому сенсі ми говоримо, що функція $\hat{u}(t,x)$ є узагальненим розв'язком сформульованої вище задачі Коші.

В *другому підрозділі* будується збурення зі сталим коефіцієнтом $a(x)\equiv a$.

Теорема 3.6. *Фундаментальний розв'язок рівняння* (1.37) *зі сталою функцією* $a(x) = a\in\mathbb{R}^d$ *задається формулою*

$$\hat{g}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ i(|\lambda|^{\alpha-2} t\, a + x - y, \lambda) - c\,t|\lambda|^\alpha \right\} d\lambda,$$

при $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$.

Третій підрозділ цього розділу присвячено побудові збурення з коефіцієнтом типу дельта-функції на поверхні.

Нехай в просторі $\mathbb{R}^d$ $(d\geq 2)$ задана деяка обмежена замкнена поверхня S класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma\in(0,1)$. Позначимо через $\nu(x)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в її точці x. Нехай $(q(x))_{x\in S}$ — деяка неперервна дійснозначна функція.

Задавши функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$\hat{g}(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

де функція $(w(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$w(t,x,y)=g^{\nu(x)}(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

в якому $g^{\nu(x)}(t,x,y)=\mathbf{B}_{\nu(x)}g(t,\cdot,y)(x)=\dfrac{(y-x,\nu(x))}{c\alpha t}g(t,x,y)$, визначимо сім'ю операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$ заданих на обмежених неперервних дійснозначних функціях φ на $\mathbb{R}^d$ рівністю

$$\hat{T}_t\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.39}$$

Теорема 3.7. *Для кожного* $t>0$, *оператор* $\hat{T}_t$ *визначений формулою (1.39) є лінійним обмеженим оператором на* $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ *та їх сукупність* $(\hat{T}_t)_{t>0}$ *утворює напівгрупу.*

Нехай δ_S — дельта-функція зосереджена на поверхні S. Причому вважатимемо, що узагальнена функція δ_S симетрична в тому сенсі, що її дія поширюється на функцію з компактним носієм $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, яка має розриви типу стрибків на поверхні S, за правилом

$$\langle\delta_S,\psi\rangle=\frac{1}{2}\int_S\left(\psi(x+)+\psi(x-)\right)\,d\sigma.$$

Теорема 3.9. *Оператор* $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S \mathbf{B}_{\nu(\cdot)}$ *є слабким генератором напівгрупи* $(\hat{T}_t)_{t>0}$.

Ситуація з гіперплощиною, як носієм дельта-функції, нічим не відрізняється від описаної, звичайно, крім деяких моментів в доведеннях відповідних тверджень.

Четвертий розділ дисертаційної роботи містить результати досліджень одновимірних симетричних α-стійких випадкових процесів.

В *першому підрозділі* формуються основні об'єкти дослідження пов'язані з розглядуваним процесом.

Як і вище, позначимо через $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ симетричний α-стійкий випадковий процес з показником α. Розглянемо наступні моменти зупинки цього випадкового процесу:

$$\tau^0 = \inf\{s \geq 0 : x(s) = 0\} \text{ — момент першого потрапляння в } 0\ ,$$

$$\sigma = \inf\{s \geq 0 : x(s) \cdot x(0) \leq 0\} \text{ — момент першого виходу з півосі }.$$

Одночасно розглянемо функцію $g^*(t, x, y) = g(t, x, y) - g(t, -|x|, |y|)$, задану при $t > 0$, $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Це щільність ймовірності переходу процесу Маркова $(x^*(t), \mathcal{M}_t^*, \tau^*, \mathbb{P}_x^*)$ у фазовому просторі $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ із σ-алгеброю $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ всіх борелевих підмножин $\mathbb{R}_0$. Тут τ^* є часом існування випадкового процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ або моментом часу, коли цей процес зникає з простору $\mathbb{R}_0$.

Добре відомо, що у випадку $\alpha = 2$ справджується рівність $\tau^0 = \sigma$ $\mathbb{P}_x$-м.н. для кожного $x \in \mathbb{R}$, та справджуються співвідношення

$$\mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\sigma > t\}\right) = \mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\tau^0 > t\}\right) = \\ = \int_\Gamma g^*(t, x, y)\, dy \tag{1.40}$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$. Якщо $\alpha < 2$, то τ^0 та σ стають різними, а функція g^* не пов'язана співвідношеннями (1.40) ні з τ^0, ні з σ.

В *другому підрозділі* обговорюються питання пов'язані з локальним часом в нулі одновимірного симетричного α-стійкого випадкового процесу. Позначимо його через $(\eta_t)_{t\geq 0}$.

Нехай функція $(g^{(\mu)}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}}$ для кожного $\mu > 0$ така, що для кожної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ виконується

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g^{(\mu)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\mu\eta_t}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Покладемо при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$

$$G(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g(t,x,y)\,dt, \quad G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g^{(\mu)}(t,x,y)\,dt.$$

Встановлена наступна рівність,

$$G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = G(\lambda,x,y) - \frac{\mu}{1+\mu G(\lambda,0,0)} G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y),$$

яка виявилась корисною в доведенні багатьох тверджень цього розділу.

В *третьому підрозділі* наведені загальні властивості симетричного α-стійкого випадкового процесу в одновимірному випадку, зокрема, асимптотична формула для щільності ймовірності переходу цього процесу та формула Рогозіна-Спіцера.

Четвертий підрозділ присвячений вивченню моменту першого потрапляння симетричного α-стійкого випадкового процесу в початок координат.

Теорема 4.1. *При всіх $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda\tau^0} = \varkappa\lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda,x,0),$$

в якій $\varkappa = c^{1/\alpha}\alpha \sin\dfrac{\pi}{\alpha}$.

Наслідок 4.1.1. *Для кожного $x \in \mathbb{R}_0$ розподіл випадкової величини τ^0 має щільність відносно міри Лебега $f^0(t,x) = \varkappa \mathbf{D}_t^{1-1/\alpha} g(t,x,0)$.*

Позначимо ймовірність переходу процесу $(x^0(t))_{t\geq 0}$ через $P^0(t,x,\Gamma)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

Теорема 4.2. *Рівність* $P^0(t,x,\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} g_0(t,x,y)\,dy$ *справджується для* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$, *де* g_0 *задається співвідношеннями*

$$g_0(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t f^0(s,x) g(t-s,0,y)\,ds =$$

$$= g(t,x,y) - \int\limits_0^t g(s,x,0) f^0(t-s,y)\,ds$$

для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $y \in \mathbb{R}_0$.

Теорема 4.3. *Справджується наступна формула для ядра потенціалу процесу* $(x^0(t))_{t\ge 0}$

$$\int\limits_0^\infty g_0(t,x,y)\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \left(|x|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1} - |y-x|^{\alpha-1}\right)$$

при $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $y \in \mathbb{R}_0$.

Покладемо $\beta_t = \max\{s \ge 0 : \eta_s = t\}$, $t \ge 0$.

Теорема 4.4. *Для* $\lambda > 0$, $t > 0$ *та* $x \in \mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda\beta_t} = \varkappa\lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda,x,0) \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}.$$

Зокрема, $\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\beta_t} = \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}$, $\lambda > 0$, $t > 0$. *Іншими словами,* $(\beta_t)_{t\ge 0}$ *є одновимірним стійким процесом з показником* $1 - \dfrac{1}{\alpha}$ *за умови, що* $x(0) = 0$.

В *п'ятому підрозділі* розглядається випадковий процес $(x^*(t))_{t\ge 0}$. Розподіл часу існування цього процесу задається рівністю з наступного твердження.

Теорема 4.5. *Для* $t > 0$ *та* $x \in \mathbb{R}_0$ *маємо* $\mathbb{P}^*_x(\tau^* \le t) = \int\limits_0^t \dfrac{2|x|}{\alpha s} g(s,x,0)\,ds$.

Далі обґрунтовується відмінність розподілів випадкових величин σ та τ^* у випадку $1 < \alpha < 2$.

Теорема 4.6. *Функції розподілу випадкових величин σ та τ^* різні, якщо $1 < \alpha < 2$.*

Нехай $(f^*(t,x))_{t>0}$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}_0$ означає щільність розподілу відносно міри $\mathbb{P}_x^*$ випадкової величини τ^*. Наступні два твердження показують принципову відмінність випадків $1 < \alpha < 2$ та $\alpha = 2$.

Теорема 4.7. *Якщо $1 < \alpha < 2$, то представлення*

$$f^*(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)v(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0, \tag{1.41}$$

справджується з функцією $v(x) = \dfrac{2c}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}_0$.

Теорема 4.8. *Якщо $\alpha = 2$, то функція v в (1.41) є узагальненою функцією, чия дія на основну функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$, яка є достатньо гладкою, такою, що задовольняє умови $\varphi(0-) = \varphi(0+) = 0$ та границі $\varphi'(0-)$ і $\varphi'(0+)$ існують, відповідно до наступного правила $\langle v, \varphi\rangle = c\left(\varphi'(0+) - \varphi'(0-)\right)$.*

Розглянемо тепер функцію

$$F_t^*(x) = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}_0. \tag{1.42}$$

Ця функція є W-функцією для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ при кожному $\alpha \in (1,2]$. Але $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0} F_t^*(x) = 1$, $t > 0$.

При $1 < \alpha < 2$ маємо

$$\mathbb{E}_x^* \int\limits_0^t v(x^*(s))\,ds = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds = F_t^*(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0,$$

і, отже, в цьому випадку існує W-функціонал $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ з характеристикою (1.42).

Теорема 4.10. *У випадку $\alpha = 2$ не існує W-функціонала $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ такого, що*

$$\mathbb{E}_x^*\zeta_t = F_t^*(x) = \int\limits_0^t \frac{|x|}{2\sqrt{c\pi s^3}} e^{-x^2/4cs}\,ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0.$$

Як показує наступне твердження, у випадку $\alpha = 2$ функція g та g^* пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8, хоча в строгому сенсі це не так, як випливає з попереднього.

Теорема 4.11. *У випадку $\alpha = 2$ функції g та g^* пов'язані співвідношеннями*

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z)g^*(t-s,z,y)v(z)\,dz,$$

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,z)g(t-s,z,y)v(z)\,dz$$

з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8.

Покладемо $m(t) = 1\!\!1_{\{\tau^*\le t\}} - \zeta_t$ для $t \ge 0$, де $\zeta_t = \int_0^t v(x^*(s))\,ds$.

Теорема 4.12. *Якщо $1 < \alpha < 2$, то процес $(m(t))_{t\ge 0}$ є $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$-мартингалом для кожного $x \in \mathbb{R}_0$.*

Іншими словами, W-функціонал $(\zeta_t)_{t\ge 0}$ слугує компенсатором для точкового процесу $(1\!\!1_{\{\tau^*\le t\}})_{t\ge 0}$.

У випадку $1 < \alpha < 2$ функції g та g^* не пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца. Як показує наступне твердження, зв'язок тут набагато складніший. Позначимо через $\Pi(dx)$ міру Леві процесу $(x(t))_{t\ge 0}$. Добре відомо, що $\Pi(dx) = \dfrac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha-1}\,dx$.

Нехай $\mathcal{L}$ означає оператор, що діє на функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ (двічі неперервно диференційовну та обмежену разом зі своїми похідними) відповідно до формули

$$\mathcal{L}\varphi(x) = v(x)\varphi(x) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x) - \varphi(y - |x|\operatorname{sign} y)\,1\!\!1_{\{|y|>|x|\}}\right]\Pi(dy),$$

де $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначена в Теоремі 4.7.

Теорема 4.13. *Для кожних $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ та $x \in \mathbb{R}_0$ процес*

$$\varphi(x^*(t)) - \varphi(x^*(0)) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(x^*(s))\,ds, \quad t \geq 0,$$

є $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$-мартингалом.

Завершує цей підрозділ формула, яка представляє ядро потенціалу для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$:

$$\int_0^\infty g^*(t,x,y)\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)} \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, 1\!\!1_{\{x\cdot y>0\}} \left(|x+y|^{\alpha-1} - |x-y|^{\alpha-1}\right).$$

П'ятий розділ дисертації за своєю тематикою знаходиться дещо осторонь основної її лінії. В цьому розділі розглядається одновимірний вінерів процес, що є симетричним α-стійким випадковим процесом порядку $\alpha = 2$. Вінерів процес є джерелом багатьох дифузійних процесів.

В *першому підрозділі* п'ятого розділу розглядаються деякі граничні теореми для однієї слабко збіжної послідовності дифузійних процесів. Нехай задані обмежені дійснозначні функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють наступні умови:

1. $|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq L|x-y|^\gamma$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ з деякими сталими $L > 0$, $0 < \gamma < 1$;

2. $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$;

3. функція $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy, \quad x \in \mathbb{R}$, обмежена на всій області визначення.

Разом з функцією $(A(x))_{x\in\mathbb{R}}$ розглянемо такі визначені на $\mathbb{R}$ функції:

$$F(x) = \int_0^x e^{-2A(y)}dy, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}.$$

Позначимо через $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$, $x \in \mathbb{R}$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, відповідно.

Щільність ймовірності переходу $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}}$ дифузійного процесу $(x_1(t))_{t\geq 0}$ задовольняє нерівності

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x,y)\right| \leq Kt^{-\frac{k+1}{2}-j}\exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\}, \tag{1.43}$$

що мають місце при $k=0,1$ та $j=0,1$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ та $t\in(0;T]$, яким би не було $T>0$, з деякою сталою $\mu>0$ та сталою $K>0$, яка може залежати від T.

Основним результатом другого пункту цього підрозділу є твердження про граничний розподіл послідовності локальних часів в нулі дифузійних процесів $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 5.3. *Нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^+$, відповідно, обмежені гельдерові та $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x)>0$. Припустимо, що функція $A(x)=\int\limits_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy$ обмежена на $\mathbb{R}$ та існують границі*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{-2A(y)}dy=\varkappa_F^{\pm},\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}=\varkappa_H^{\pm}.$$

Крім того, нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ настільки гладкі, що нерівності (1.43) справджуються при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ з $k+j\leq 1$.

Тоді послідовність локальних часів в нулі до моменту часу t дифузійних процесів на $\mathbb{R}$ з коефіцієнтами переносу $na(nx)$ та дифузії $b(nx)$, які стартують в точці x, збігається за розподілом при $n\to\infty$, для кожних $t>0$ та $x\in\mathbb{R}$, до випадкової величини, розподіл якої задається функцією

$$F_{t,x}(y)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{\frac{y}{\beta}b(0)+|x|\sqrt{\varkappa(x)}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz,$$

де $\beta=\dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$, а $\varkappa(x)=\varkappa_F^-\varkappa_H^-+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa_F^+\varkappa_H^+-\varkappa_F^-\varkappa_H^-)$.

Розглянуто також деякі часткові випадки.

В третьому пункті *першого підрозділу* розглядається задача про граничний розподіл кількості перетинів фіксованого рівня послідовністю дифузійних процесів $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ з періодичними коефіцієнтами. Додатково до сформульованих умов, які задовольняють функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, припустимо, що ці функції періодичні зі спільним періодом $l > 0$.

Тоді справджується наступне: $\dfrac{1}{x}F(x) \to \varkappa_F$, $\dfrac{1}{x}H(x) \to \varkappa_H$, коли $x \to \pm\infty$, де $\varkappa_F = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int\limits_0^l e^{-2A(y)}\,dy$, $\varkappa_H = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int\limits_0^l e^{2A(y)}\,\dfrac{dy}{b(y)}$. Очевидно, $\varkappa_F > 0$ та $\varkappa_H > 0$. Позначатимемо їх добуток через $\varkappa$.

Фіксуємо тепер деяке $r \in \mathbb{R}$ і позначимо через $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, m та n випадкову величину, яка приймає значення 1 у разі, якщо випадкові величини $x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)$ та $x_n\left(\frac{k}{m}\right)$ приймають значення по різні боки від точки r на дійсній осі, і значення 0 в протилежному випадку:

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m} - r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m} - r\right)\right) < 0; \\ 0, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m} - r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m} - r\right)\right) \geq 0. \end{cases}$$

Тоді випадкова величина $\nu_N^{(n,m)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(n,m)}$ при натуральних N визначає кількість перетинів рівня r послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$, $\ldots$, $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

Виявилось, що слід розрізняти два випадки:

а) існують такі цілі числа p та q (їх можна вважати взаємно простими, причому $q > 0$), що $r = \frac{p}{q}l$;

б) число $\frac{r}{l}$ є ірраціональним.

У першому випадку множина натуральних чисел розбивається на q підпослідовностей $(n_k^{(i)})_{k\geq 1}$, $i = 0, 1, ..., q-1$, таких, що для кожного такого i маємо $rn_k^{(i)} = \left(\frac{i}{q} + m^{(i,k)}\right)l$, де $m^{(i,k)}$ — ціле число. По кожній з таких підпослідовностей величини $\nu_N^{(n,m)}$ (N та m пов'язані з n) з певним нормуючим множником мають граничні розподіли. Всі ці розподіли — одного типу, але мають параметри, що відрізняються в різних розподілів. У випадку б) для кожного $\beta \in [0; l)$ існує підпослідовність $(n_k(\beta))_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел, для якої $\{\frac{r}{l}n_k(\beta)\}l \to \beta$ при $k \to \infty$, де $\{x\}$ означає дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$. І знову кожна така підпослідовність визначає граничний розподіл, подібний до тих, що згадано вище.

Теорема 5.8. *Припустимо що підпослідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ та $(m_k)_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел вибрані так, що $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$, а $\beta_{n_k} = \left\{\frac{r}{l}n_k\right\} l \to \beta$ при $k \to \infty$ для деяких $\tau \in (0; \infty)$ та $\beta \in [0; l)$. Тоді при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ справджується співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x \left(n_k^{-1} \nu_{[m_k t]}^{(n_k, m_k)} < y \right) = 1\!\!1_{(0,\infty)}(y) \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{y\gamma^{-1}+d(x)} e^{-\frac{z^2}{2t}}\, dz,$$

де покладено $\gamma = \dfrac{\delta(\beta,\tau)}{\tau} \sqrt{\dfrac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$, $d(x) = |x - r|\sqrt{\varkappa}$,

$$\delta(\beta,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\beta} \left(\int\limits_{\beta}^{\infty} g(\tau, y, z)\, dz \right) dH(y) + \int\limits_{\beta}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\beta} g(\tau, y, z)\, dz \right) dH(y).$$

В *другому підрозділі* п'ятого розділу розглядаються деякі екстремальні задачі для одновимірного вінерового процесу.

Задавши на деякому ймовірнісному просторі одновимірний вінерів процес $(w(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, розглянемо множину всіх ймовірнісних мір на тому ж просторі, кожна з яких є результатом перетворення Гірсанова початкової міри.

В першому пункті будуємо одну з таких мір, яка максимізує відповідним чином нормований локальний час процесу в нулі до деякого фіксованого моменту часу $t > 0$.

Прогресивно вимірний процес $(\omega(s))_{s\in[0,t]}$ (відносно фільтрації $(\mathcal{M}_s)_{s\in[0,t]}$) називатиметься допустимою стратегією, якщо $\mathbb{P}\left(\int\limits_0^t \omega^2(s) ds < \infty \right) = 1$ і

$\mathbb{E}\mathcal{E}_t^0(\omega) = 1$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2 < \infty$, де

$$\mathcal{E}_s^0(\omega) = \exp\left\{ \int_0^s \omega(\tau)dw(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^s \omega^2(\tau)d\tau \right\}$$

для $s \in [0,t]$ (тут перший інтеграл є інтегралом Іто).

Нехай $(\eta_t)_{t\geq 0}$ — локальний час в нулі вінерового процесу. Визначимо цільову функцію рівністю $\Phi_t(\omega) = \dfrac{\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t^0(\omega)\eta_t\right]}{(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2)^{1/2}}$ для деякої допустимої стратегії ω. Задача полягає у побудові такої допустимої стратегії, яка б максимізувала значення функції Φ_t.

Теорема 5.11. *Допустима стратегія* $(\omega_*^{(t)}(s))_{s\in[0,t]}$ *задана рівністю*

$$\omega_*^{(t)}(s) = h'_x(t-s, w(s)) \left[\sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \int_0^s h'_x(t-\tau, w(\tau))dw(\tau)\right]^{-1},$$

де $h(t,x) = \displaystyle\int_0^t \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}},\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, *максимізує цільову функцію*

$$\Phi_t(\omega) = \frac{\mathbb{E}[\eta_t \mathcal{E}_t^0(\omega)]}{(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2)^{1/2}}.$$

Зауважимо, що побудована в Теоремі 5.11 оптимальна стратегія не є марківською. Прикладами марківських стратегій досить близьких до оптимальної є процеси виду $\omega_\rho(s) = -\rho w(s)$ чи $\omega_\rho(s) = -\rho \operatorname{sign} w(s)$ з деякими $\rho > 0$.

Другий пункт цього підрозділу присвячений задачі знаходження коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту часу $\tau = \inf\{s \geq 0 : w(s) = 0\}$ першого досягнення вінеровим процесом початку координат. Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині V прогресивно вимірних процесів $(\omega(t), \mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, для яких $\mathbb{P}_x\left(\displaystyle\int_0^\tau \omega^2(s)\,ds < \infty\right) = 1$ та справджуються наступні умови $\mathbb{E}_x\mathcal{E}_\tau^0(\omega) = 1$, $\mathbb{E}_x[\mathcal{E}_\tau^0(\omega)]^2 < \infty$, де $\mathcal{E}_\tau^0(\omega) = \exp\left\{\displaystyle\int_0^\tau \omega(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \omega^2(s)\,ds\right\}$. Елементи множини V називатимемо допустимими стратегіями.

Нехай функція $(f(t))_{t\geq 0}$ додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена. Цільовою функцією будемо називати функціонал

$$\Phi(\omega) = \mathbb{E}_x f(\tau)\mathcal{E}_\tau^0(\omega) \tag{1.44}$$

заданий на множині V допустимих стратегій.

Теорема 5.12. *Нехай додатна неперервна строго монотонно зростаюча та обмежена функція $(f(t))_{t\geq 0}$ така, що існують сталі $u > 0$ та $r \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ і функція $(\rho(t))_{t>0}$, для яких при всіх $0 < t < u$, $s > 0$ виконується $f(s+t) - f(s) \leq \rho(s)t^r$, причому функція ρ квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.*

Тоді існує допустима стратегія $\omega_*(t) = \dfrac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$, на якій функціонал Φ досягає свого мінімуму на множині $W = \{\omega \in V : \mathbb{E}_x(\mathcal{E}_\tau^0(\omega))^2 < K\}$. Тут $K = \dfrac{\mathbb{D}_x f(\tau)}{(C - \mathbb{E}_x f(\tau))^2} + 1$, $h(t, x) = C - \mathbb{E}_x f(t+\tau)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, а $C = \sup\limits_{t\geq 0} f(t)$.

Цікавим є наступний приклад, в якому вдається знайти в явному вигляді оптимальну стратегію з Теореми 5.12. Розглянемо функціонал (1.44) з функцією $f(t) = 1 - e^{-mt}$, де $m > 0$ — деяка стала. Оскільки при всіх $s > 0$, $t > 0$ справджується нерівність $e^{-ms}(1 - e^{-mt}) \leq me^{-ms}t$, то умови Теореми 5.12 виконані і, отже, існує допустима стратегія, яка мінімізує функціонал (1.44) на множині W. Множина допустимих стратегій задається нерівністю $\mathbb{E}_x[\mathcal{E}_\tau^0(\omega)]^2 \leq e^{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{m}|x|}$. Оптимальна стратегія має вигляд $\omega_*(t) = -\sqrt{2m}\,\mathrm{sign}(w(t))$.

Поставимо питання про існування оптимальної стратегії, в сенсі мінімізації значення функціоналу Φ, на всій множині допустимих стратегій V. Показано, що можна одержати як завгодно мале додатне значення функціоналу Φ на V.

Множину $V_\varepsilon \subset V$, $\varepsilon > 0$ назвемо ε-оптимальною стратегією для задачі мінімізації невід'ємного функціоналу Φ на множині допустимих стратегій V, якщо існує така допустима стратегія $\omega_* \in V_\varepsilon$, що $\Phi(\omega_*) \leq \inf\limits_{\omega\in V} \Phi(\omega) + \varepsilon$.

Теорема 5.13. *Нехай функція* $(f(t))_{t\geq 0}$ *зі значенням* $f(0) = 0$ *неперервна та невід'ємна. Нехай існує скінченне* $\mathbb{E}_x f(\tau)$*, де* τ *— момент першого досягнення вінеровим процесом* $(w(t))_{t\geq 0}$ *початку координат. Тоді для задачі мінімізації функціоналу* Φ*, що задається рівністю* (1.44)*, існує* ε*-оптимальна стратегія. Елементи цієї стратегії утворюють однопараметричну множину (при* $\lambda > 0$*) і задаються рівностями* $\omega_\lambda(t) = -\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(w(t))$*,* $t > 0$.

Розділ 2

Багатовимірні симетричні α-стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для відповідних псевдодиференціальних рівнянь.

2.1 Потенціали простого шару та теорема про стрибок.

Одним з найважливіших понять в теорії рівнянь в частинних похідних параболічного та еліптичного типів є поняття потенціалу простого шару. Теорема про стрибок (ко-) нормальної похідної такого потенціалу є визначним результатом класичного аналізу. Зокрема, саме ця теорема дозволяє будувати розв'язки другої початково-крайової задачі для відповідного рівняння (див. [20, Гл. V], а також відповідні бібліографічні зауваження).

2.1.1 Обмежена замкнена поверхня, як носій потенціалу.

В цьому пункті припускатимемо, що S — обмежена замкнена поверхня в d-вимірному ($d \geq 2$) евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, яка належить до класу $H^{1+\gamma}$ (див. п. 1.2.2.3) з деяким $\gamma \in (0, 1)$.

2.1.1.1 Потенціал простого шару.

Нехай на множині $(0,\infty)\times S$ задана неперервна дійснозначна функція ψ, яка задовольняє нерівність $|\psi(t,x)| \le C\,t^{-\beta}$ при всіх $(t,x)\in(0,\infty)\times S$ з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$. Розглянемо функцію v аргументів $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$, що визначається рівністю

$$v(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y. \tag{2.1}$$

Неважко бачити, що ця функція є неперервною за сукупністю аргументів в області $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$, та задовольняє таку нерівність

$$|v(t,x)|\le C\,K\,\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-1/\alpha)}{\Gamma(2-\beta-1/\alpha)}\,t^{1-\beta-1/\alpha}, \tag{2.2}$$

де K — стала з (1.14). Ця функція зветься потенціалом простого шару (з густиною ψ "маси", розподіленої по поверхні S в кожен з моментів часу, що розглядаються).

Покажемо, що функція v задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)=\mathbf{A}v(t,\cdot)(x) \tag{2.3}$$

в області $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$. Для цього доведемо можливість внесення оператора $\mathbf{A}$ під знак інтегралів в (2.1). Зауважимо спочатку, що з нерівностей (1.11) випливає диференційовність довільну кількість раз функції $v(t,\cdot)$ для кожного фіксованого $t>0$ на множині $\mathbb{R}^d\setminus S$. Зафіксувавши довільну точку $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$, використаємо представлення (1.16).

$$\mathbf{A}v(t,\cdot)(x)=c\cdot q_\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^d}(v(t,x+u)-v(t,x)-(u,\nabla v(t,\cdot)(x)))\frac{du}{|u|^{d+\alpha}}=$$

$$=c\cdot q_\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{du}{|u|^{d+\alpha}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S(g(t-\tau,x+u,y)-g(t-\tau,x,y)-$$

$$-(u,\nabla g(t-\tau,\cdot,y)(x)))\,d\sigma_y=I_1+I_2,$$

де I_1 та I_2 інтеграли від тієї ж підінтегральної функції по (u, τ, y) на множинах $B_\delta(0) \times (0,t) \times S$ та $B_\delta(0)^C \times (0,t) \times S$, відповідно. Тут $B_\delta(0)^C$ — доповнення в $\mathbb{R}^d$ до кулі радіуса δ з центром в початку координат.

Враховуючи нерівності (1.11), підінтегральну функцію в I_1 оцінимо зверху за абсолютною величиною виразом

$$\frac{1}{|u|^{d+\alpha-2}}\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} g(t-\tau, x, y)\big|_{x=\hat{x}}\right| |\psi(\tau, y)| \leq$$
$$\leq \frac{C}{|u|^{d+\alpha-2}}\frac{(t-\tau)\tau^{-\beta}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-\hat{x}|)^{d+\alpha+2}}$$

з деякою додатною сталою C та точкою $\hat{x} = x + \theta u$ ($\theta = \theta(t-\tau, y) \in (0,1)$). Вибравши $\delta < \rho(x, S)$ ($\rho(x,S)$ — відстань від точки x до поверхні S), одержимо мажоранту

$$\frac{C}{|u|^{d+\alpha-2}}\frac{(t-\tau)\tau^{-\beta}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+\rho(x,S)-\delta)^{d+\alpha+2}} \leq \frac{\hat{C}(t-\tau)\tau^{-\beta}}{|u|^{d+\alpha-2}},$$

яка інтегровна на всій множині інтегрування інтеграла I_1. Отже, в цьому інтегралі можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Підінтегральна функція в інтегралі I_2 оцінюється наступним виразом

$$\frac{1}{|u|^{d+\alpha}}(|g(t-\tau, x+u, y)| + |g(t-\tau, x, y)| + |u||\nabla g(t-\tau, \cdot, y)(x)|)|\psi(\tau, y)| \leq$$
$$\leq \frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}}\left(\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x-u|)^{d+\alpha}} + \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{|u|}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha+1}}\right) \leq$$
$$\leq \frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}}\left(\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x-u|)^{d+\alpha}} + \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+\rho(x,S))^{d+\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{|u|}{((t-\tau)^{1/\alpha}+\rho(x,S))^{d+\alpha+1}}\right)$$

Маємо суму трьох функцій, в якій останні дві, очевидно, інтегровні за (u, τ, y) на $B_\delta(0)^C \times (0,t) \times S$. Розглянемо інтеграл від першого доданка (змінивши порядок інтегрування). Зробивши в ньому заміну змінної u за формулою $(t-$

$\tau)^{1/\alpha}v = y - x - u$, одержимо

$$\int_0^t d\tau \int_S d\sigma_y \int_{B_\delta(0)^C} \frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}} \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha}}\, du =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_S d\sigma_y \int_{D(\tau,y)} \frac{C\tau^{-\beta}}{|y-x-(t-\tau)^{1/\alpha}v|^{d+\alpha}} \frac{1}{(1+|v|)^{d+\alpha}}\, dv < \infty,$$

де $D(\tau, y) = \{v \in \mathbb{R}^d : |y - x - (t-\tau)^{1/\alpha}v| > \delta\}$. Таким чином, в інтегралі I_2 можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Отже,

$$\mathbf{A}v(t,\cdot)(x) = \int_0^t d\tau \int_S \mathbf{A}g(t-\tau,\cdot,y)(x)\psi(\tau,y)\, d\sigma_y, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus S.$$

Оскільки $g(t-\tau, x, y)$, як функція аргументів $(t,x) \in (\tau,\infty) \times \mathbb{R}^d$, задовольняє рівняння (2.3) при фіксованих $\tau > 0$ та $y \in \mathbb{R}^d$, то залишається довести, що при фіксованих $x \notin S$ та $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_S g(\varepsilon, x, y)\psi(t,y)\, d\sigma_y = 0.$$

Але це випливає з нерівності (1.10):

$$\int_S g(\varepsilon,x,y)|\psi(t,y)|\, d\sigma_y \le C\, N\, |S|\, t^{-\beta} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^{1/\alpha} + d(x,S))^{d+\alpha}}.$$

Таким чином, рівність (2.3) справджується в області $(t,x) \in (0,\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$.

Цей результат кореспондується з відповідним класичним результатом: поза поверхнею-носієм потенціалу простого шару він є розв'язком відповідного параболічного рівняння (див. [20, Гл. V]).

2.1.1.2 Теорема про стрибок.

Нехай S, як і вище, є заданою обмеженою замкненою поверхнею в $\mathbb{R}^d$, що належить класу $H^{1+\gamma}$. Фіксуємо точку $x_0 \in S$ і покажемо, що при $0 < \tau < t$

існує інтеграл $\int\limits_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau, x_0, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y$, де ψ — функція на $(0,\infty)\times S$, яка задовольняє умови пункту 2.1.1.1, а $g^{\nu(x)}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu(x)} g(t,\cdot,y)(x)$, як і вище. Позначивши цей інтеграл через I і врахувавши (1.21), можемо записати

$$I = \frac{2}{\alpha(t-\tau)} \int\limits_S (y - x_0, \nu(x_0)) g(t-\tau, x_0, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y = I' + I'',$$

де I' відповідає інтегралу по $S_{r_0/2}(x_0)$, а I'' — по $S \setminus S_{r_0/2}(x_0)$.

Для $y \in S_{r_0/2}(x_0)$, використовуючи локальну систему координат (див. пункт 1.2.2.3), будемо мати $|(y, \nu(x_0))| \le const\, |y|^{1+\gamma}$ (тут $const$ не залежить від x_0). Оцінка (1.10) дозволяє тепер твердити, що

$$|I'| \le const\, \tau^{-\beta} \int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y|^{1+\gamma}\, d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y|)^{d+\alpha}} \le const\, \tau^{-\beta}(t-\tau)^{-1+\gamma/\alpha}.$$

Далі, існують додатне число δ_0 і скінченна кількість точок x_1, x_2,..., x_{m_0} на поверхні S, таких, що $S \setminus S_{r_0/2}(x_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_0} S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому

$$\inf_{y \in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x_0| \ge \delta_0 \quad \text{при всіх } k = 1, 2, \dots, m_0.$$

Але тоді $|I''| \le const\, \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha} + \delta_0)^{-d-\alpha}$.

З нерівностей для I' та I'' випливає таке твердження.

Лема 2.1. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d \setminus S$ на дві відкриті підмножини, а $(\psi(t,x))_{t>0, x\in S}$ — неперервна функція, що задовольняє умову $|\psi(t,x)| \le C\, t^{-\beta}$, $t > 0$, $x \in S$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$, то для будь-якого $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при $(t,x) \in (0,T] \times S$ справджується оцінка*

$$\left| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y \right| \le C_T\, t^{-\beta+\gamma/\alpha}. \tag{2.4}$$

Інтеграл в лівій частині (2.4) зветься прямим значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x \in S$, на потенціал простого шару $v(t,x)$ за просторовою змінною в точці $x \in S$. Лема 2.1 в класичній теорії звучить так: пряме значення (ко)нормальної похідної за просторовою змінною потенціалу простого шару існує.

Зауваження 2.1. Міркування, подібні до тих, що доводять Лему 1 §3 глави I книги [20], дозволяють твердити, що пряме значенням дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x)}$, $x \in S$, на потенціал простого шару є неперервною функцією аргументів $(t, x) \in (0, \infty) \times S$.

Нехай поверхня S та функція ψ на $(0, \infty) \times S$ задовольняють умови Леми 2.1. Знову фіксуємо точку $x_0 \in S$ і для $t > 0$ та $x \notin S$ розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y. \tag{2.5}$$

Його існування випливає з наступних міркувань

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y \right| &\le \frac{2}{\alpha} N\, C\, \tau^{-\beta} \int\limits_S \frac{|y-x|\, d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \le \\ &\le \frac{2}{\alpha} N\, C\, \tau^{-\beta} \int\limits_S \frac{d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \\ &\le \frac{2}{\alpha} N\, C\, |S|\, \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x, S))^{-d-\alpha+1}, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S |g^{\nu(x_0)}(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)|\, d\sigma_y \le \\ &\qquad \le \frac{2}{\alpha} N\, C\, |S| \int\limits_0^t \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha} + d(x, S))^{-d-\alpha+1}\, d\tau, \end{aligned}$$

і права частина тут скінченна при $t > 0$.

Інтеграл (2.5) є результатом застосування оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$, $x_0 \in S$, до потенціалу простого шару

$$v(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y$$

в точці $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$. Позначимо інтеграл (2.5) через $v^{\nu(x_0)}(t,x)$. Нашим завданням тепер буде дослідити поведінку функції $v^{\nu(x_0)}(t,x)$ при $x\to x_0$. Як і в класиці, функція $v^{\nu(x_0)}$ при переході через поверхню робить стрибок. Точніше, справедливе таке твердження.

Теорема 2.2. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня в $\mathbb{R}^d$ класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d\setminus S$ на дві відкриті підмножини, а $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову*

$$|\psi(t,x)|\le C\,t^{-\beta}$$

з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$, то при фіксованих $t>0$ та $x_0\in S$ справджується співвідношення

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0\pm}\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y=\\ =\mp\,\psi(t,x_0)+\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,\end{aligned}\tag{2.6}$$

де $x\to x_0+$ (відповідно x_0-) означає, що x наближається до x_0 вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x_0, такому, що (див. позначення в п. 1.2.2.3) $\mathcal{K}\subset(\mathbb{R}^d\setminus\bar{D})\cup\{x_0\}$ (відповідно $\mathcal{K}\subset D\cup\{x_0\}$).

Доведення. Доведення цієї теореми багато в чому повторює доведення класичного результату, хоча є і певні відмінності. Зокрема, досить розглянути лише випадок, коли x наближається до x_0 вздовж нормалі $\nu(x_0)$, тобто, $x=x_0+\delta\nu(x_0)$, де $\delta\in\mathbb{R}$ і $\delta\to0$. Тоді

$$\begin{aligned}v^{\nu(x_0)}(t,x)=\frac{2}{\alpha}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_S(y-x_0,\nu(x_0))g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y-\\ -\frac{2}{\alpha}\,\delta\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y=J_1+J_2.\end{aligned}$$

Позначимо інтеграл в лівій частині (2.4) через $V(t,x)$, $t>0$, $x\in S$. Доданок J_1 в попередній формулі можна записати так:

$$J_1 = V(t,x_0)+$$
$$+\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (y-x_0,\nu(x_0))\psi(\tau,y)(g(t-\tau,x,y)-g(t-\tau,x_0,y))\,d\sigma_y =$$
$$= V(t,x_0)+J_1'.$$

Доведемо, що $\lim\limits_{\delta\to 0} J_1' = 0$. Для цього подамо J_1' у вигляді суми інтегралів (помножених на $\frac{2}{\alpha}$) від тієї ж функції, по множинах:

$$(0,t-\rho)\times S, \quad (t-\rho,t)\times S_{r_0/2}(x_0), \quad (t-\rho,t)\times S\setminus S_{r_0/2}(x_0),$$

з деяким $0<\rho<t$ ($t>0$ фіксоване). Називатимемо їх першим, другим та третім, відповідно. Почнемо з оцінювання другого та третього інтегралів.

$$\left|\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} (y-x_0,\nu(x_0))\psi(\tau,y)(g(t-\tau,x,y)-g(t-\tau,x_0,y))\,d\sigma_y\right| \le$$
$$\le C\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|^{1+\gamma}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}\,d\sigma_y+$$
$$+C\int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{\tau^\beta}\int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y-x_0|^{1+\gamma}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x_0|)^{d+\alpha}}\,d\sigma_y = I_2,$$

де $C>0$ деяка стала.

Позначимо через $\tilde{y}$ ортогональну проекцію $y\in S_{r_0/2}(x_0)$ на площину, дотичну до S в точці x_0. Очевидно, $|y-x|\ge|\tilde{y}-x_0|$. З іншого боку, виконується нерівність $0<const_1\le\dfrac{|y-z|}{|\tilde{y}-z|}\le const_2$ для $y\in S_{r_0/2}(x_0)$ та $z=x_0+\zeta\nu(x_0)$ при $\zeta\in[-|\delta|,|\delta|]$ (це доведено в §1 глави V книги [20]). Тому, переходячи до локальних координат з початком в точці x_0, запишемо нерівність (через Δ_{x_0}

позначено деяку область в $\mathbb{R}^{d-1}$, а $\tilde{C}$ та $\hat{C}$ деякі додатні сталі)

$$I_2 \le \tilde{C} \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{\Delta_{x_0}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma}\, d\tilde{y}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \frac{\tilde{C}}{(t-\rho)^\beta} \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\tilde{y}|^{1+\gamma}\, d\tilde{y}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |\tilde{y}|)^{d+\alpha}} = \frac{\hat{C}}{(t-\rho)^\beta} \rho^{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Тому другий інтеграл робиться як завгодно малим вибором малого ρ.

Третій інтеграл оцінюється наступним чином.

$$\left| \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S \setminus S_{r_0/2}(x_0)} (y - x_0, \nu(x_0)) \psi(\tau, y)(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y))\, d\sigma_y \right| \le$$

$$\le C \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{S \setminus S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y - x_0|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}\, d\sigma_y +$$

$$+ C \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{S_{r_0/2}(x_0)} \frac{|y - x_0|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y - x_0|)^{d+\alpha}}\, d\sigma_y = I_3$$

Врахуємо вимірність та обмеженість поверхні S, а також нерівності

$$|y - x_0| \ge \delta_0, \quad |y - x| \ge |y - x_0| - |\delta| \ge \delta_0 - |\delta|,$$

що справджуються при всіх $y \in S \setminus S_{r_0/2}(x_0)$. Тоді, взявши $|\delta| < \delta_0$ матимемо

$$I_3 \le \tilde{C}(\delta_0 - |\delta|)^{-d-\alpha}(t^{1-\beta} - (t-\rho)^{1-\beta}),$$

що може бути зроблено як завгодно малим вибором малого ρ.

Тепер зафіксуємо таке $\rho > 0$, щоб сума другого та третього інтегралів була досить малою, і розглянемо перший інтеграл

$$\int\limits_{0}^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S} (y - x_0, \nu(x_0)) \psi(\tau, y)(g(t-\tau, x, y) - g(t-\tau, x_0, y))\, d\sigma_y.$$

Позначивши цей інтеграл через Q, зауважимо, що функція $g(t-\tau, x, y)$ рівномірно неперервна на множинах $(\tau, x, y) \in [0, t-\rho] \times K_1 \times K_2$, де K_1 та K_2 —

довільні компакти в $\mathbb{R}^d$. Тому $\lim\limits_{\delta\to 0} Q = 0$ (нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$). Цим завершується доведення співвідношення: $\lim\limits_{\delta\to 0} J_1' = 0$. Отже,

$$\lim_{\delta\to 0} J_1 = V(t, x_0). \tag{2.7}$$

Залишається дослідити поведінку J_2 при $\delta \to 0$. Задамо J_2 у вигляді суми $J_2 = \sum\limits_{k=1}^{4} J_2^{(k)}$, де

$$J_2^{(1)} = -\frac{2\delta}{\alpha}\psi(t, x_0) \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(2)} = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)(\psi(t, x_0) - \psi(\tau, y))\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(3)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{0}^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2^{(4)} = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S\setminus S_\varepsilon(x_0)} g(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y.$$

Для оцінки $J_2^{(4)}$ при фіксованому $\varepsilon > 0$ використаємо міркування, подібні до тих, що доводять Лему 2.1 (див. оцінювання там величини I''), а саме, існують такі точки $x_k \in S \setminus S_\varepsilon(x_0)$, $k = 1, 2, \dots, l_0$, та таке число $p_0 > 0$, що $S \setminus S_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{l_0} S_{r_0/2}(x_k)$ і при цьому $\inf\limits_{|\zeta|\le|\delta|} \inf\limits_{y\in S_{r_0/2}(x_k)} |y - x_0 - \zeta\nu(x_0)| \ge p_0$ при всіх $k = 1, 2, \dots, l_0$ (числа l_0 та p_0 залежать від ε). Тому для фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо

$$|J_2^{(4)}| \le \frac{2}{\alpha}\, l_0\, N\, C\, |\delta| \int\limits_{0}^{t} \tau^{-\beta}((t-\tau)^{1/\alpha} + p_0)^{-d-\alpha}\, d\tau \to 0,$$

коли $\delta \to 0$.

Далі, при фіксованому $\rho > 0$, маємо оцінку

$$|J_2^{(3)}| \le \frac{2}{\alpha(1-\beta)}\, N\, C\, |S|\, \rho^{-\frac{d+\alpha}{\alpha}} |\delta| \to 0,$$

коли $\delta \to 0$.

Якщо тепер довести, що існує $\lim\limits_{\delta\to 0} J_2^{(1)}$ при фіксованих $\rho > 0$ та $\varepsilon > 0$, то звідси буде випливати, що $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}}|J_2^{(2)}|$ може бути зроблена як завгодно малою вибором ρ та ε внаслідок того, що функція ψ неперервна в точці (t, x_0).

Позначимо через Π_{x_0} гіперплощину в $\mathbb{R}^d$, дотичну до S в точці x_0 і обчислимо границю інтеграла

$$R = \frac{2\delta}{\alpha}\int\limits_{t-\rho}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{\Pi_{x_0}} g(t-\tau, x_0+\delta\nu(x_0), y)\, d\sigma_y,$$

коли $\delta \to 0$. Використовуючи формулу (1.5), можемо записати

$$R = \frac{2\delta}{\pi\alpha}\int\limits_{t-\rho}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-c(t-\tau)r^\alpha}\cos(r\delta)\, dr.$$

Інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі приводить до виразу

$$R = \frac{2c}{\pi}\int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau\int\limits_{0}^{\infty} e^{-c(t-\tau)r^\alpha} r^\alpha\frac{\sin(r\delta)}{r}\, dr.$$

Так звана друга теорема про середнє значення в інтегральному численні дозволяє тут змінити порядок інтегрування (див., наприклад, [11, с. 18], [19, т. 2, с. 117, 600]). Тому

$$R = \operatorname{sign}\delta - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-c\rho r^\alpha}\frac{\sin(r\delta)}{r}\, dr,$$

звідки $\lim\limits_{\delta\to 0\pm} R = \pm 1$.

Тепер неважко зрозуміти, що

$$\lim_{\delta\to 0\pm} J_2^{(1)} = \mp\psi(t, x_0) + R_1(\varepsilon, \rho),$$

де $\varepsilon > 0$ та $\rho > 0$ вибрані досить малими, а (нагадаємо, що $x = x_0 + \delta\nu(x_0)$)

$$R_1(\varepsilon, \rho) = \lim_{\delta\to 0\pm}\frac{2}{\alpha}\delta\psi(t, x_0)\int\limits_{0}^{\rho}\frac{d\tau}{\tau}\left(\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} - \int\limits_{\Pi_{x_0}}\right) g(\tau, x, z)\, d\sigma_z.$$

Розглянемо

$$\delta\int\limits_0^\rho \frac{d\tau}{\tau}\left(\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} - \int\limits_{\Pi_{x_0}}\right) g(\tau,x,z)\,d\sigma_z =$$

$$= \delta\int\limits_0^\rho \frac{d\tau}{\tau}\left(\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} - \int\limits_{\Pi_\varepsilon(x_0)}\right) g(\tau,x,z)\,d\sigma_z - \delta\int\limits_0^\rho \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{\Pi_{x_0}\setminus\Pi_\varepsilon(x_0)} g(\tau,x,z)\,d\sigma_z =$$

$$= J' - J'',$$

де $\Pi_\varepsilon(x_0)$ ортогональна проекція $S_\varepsilon(x_0)$ на Π_{x_0}.

Враховуючи властивості поверхні S, легко зрозуміти, що існує така стала $\theta > 0$, що для кожного $z \in \Pi_{x_0} \setminus \Pi_\varepsilon(x_0)$ виконується $|z| \geq \theta$. Тому

$$|J''| \leq C|\delta|\rho\int\limits_\theta^\infty \frac{r^{d-2}\,dr}{(\delta^2+r^2)^{(d+\alpha)/2}} = C\rho\int\limits_{\theta/|\delta|}^\infty \frac{r^{d-2}\,dr}{(1+r^2)^{(d+\alpha)/2}}\frac{1}{|\delta|^\alpha}$$

з деякою сталою $C > 0$. Звідси, користуючись правилом Лопіталя, одержуємо, що $J'' \to 0$ при $\delta \to 0$.

Для оцінки J' перейдемо до локальної системи координат з початком в точці x_0 та ортом останньої осі $\nu(x_0)$. Оскільки

$$S_\varepsilon(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = F_{x_0}(u^{<d>}), u^{<d>} \in D_{x_0} \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

$$\Pi_\varepsilon(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = 0, u^{<d>} \in D_{x_0} \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

де D_{x_0} — деяка обмежена замкнена множина, яка залежить тільки від особливостей поверхні S і через $u^{<d>}$ позначено вектор $(u^1, u^2, \dots u^{d-1})$, то, перетворюючи поверхневі інтеграли на кратні, одержуємо

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z)\, d\sigma_z - \int\limits_{\Pi_\varepsilon(x_0)} g(\tau, x, z)\, d\sigma_z =$$

$$= \int\limits_{D_{x_0}} g(\tau, (0^{<d>}, \delta), (u^{<d>}, F_{x_0}(u^{<d>}))) \left(\sqrt{1 + (\nabla F_{x_0}(u^{<d>}))^2} - 1\right) du^{<d>} +$$

$$+ \int\limits_{D_{x_0}} \left(g(\tau, (0^{<d>}, \delta), (u^{<d>}, F_{x_0}(u^{<d>}))) - g(\tau, (0^{<d>}, \delta), (u^{<d>}, 0))\right) du^{<d>} =$$

$$= Q_1 + Q_2$$

Далі врахуємо, що поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$. Це приводить до нерівностей

$$\sqrt{1 + (\nabla F_{x_0}(u^{<d>}))^2} - 1 \le (\nabla F_{x_0}(u^{<d>}))^2 \le C|u^{<d>}|^{2\gamma},$$

$$|F_{x_0}(u^{<d>})| \le C|u^{<d>}|^{1+\gamma},$$

що справджуються при $u^{<d>} \in D_{x_0}$ з деякою сталою $C > 0$. Тоді, використовуючи властивості поверхні S та нерівність (1.10), одержимо

$$|Q_1| \le K \int\limits_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{2\gamma}\, dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + \sqrt{|v|^2 + (F_{x_0}(v) - \delta)^2}\right)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le K \int\limits_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{2\gamma}\, dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + k_1\sqrt{|v|^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}}$$

$$|Q_2| \le K \int\limits_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{1+\gamma}\, dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + \sqrt{|v|^2 + (\theta F_{x_0}(v) - \delta)^2}\right)^{d+\alpha+1}} \le$$

$$\le K \int\limits_{D_{x_0}} \frac{\tau |v|^{\gamma}\, dv}{\left(\tau^{1/\alpha} + k_2\sqrt{|v|^2 + \delta^2}\right)^{d+\alpha}},$$

де $K > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ деякі сталі, $\theta = \theta_{\tau,\delta} \in (0, 1)$.

Таким чином, маємо

$$\left|\delta\int\limits_0^\rho \frac{d\tau}{\tau}\left(\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} - \int\limits_{\Pi_{x_0}}\right) g(\tau,x,z)\,d\sigma_z\right| \le$$

$$\le K|\delta|\int\limits_0^\rho \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{D_{x_0}} \frac{\tau|v|^\gamma(1+|v|^\gamma)\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+k\sqrt{|v|^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \hat{K}|\delta|\int\limits_0^\rho d\tau\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{r^{d-2+\gamma}\,dr}{\left(\tau^{1/\alpha}+k\sqrt{r^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}} = J,$$

де $\hat{K}>0$, $\varepsilon_0>0$ деякі сталі, $k=\min(k_1,k_2)$. Міняючи порядок інтегрування та враховуючи рівність $\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau^{1/\alpha}+a)^{d+\alpha}} = \alpha B(d,\alpha)a^{-d}$, що правильна при кожному $a>0$, одержуємо оцінку

$$J \le \tilde{K}|\delta|\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{r^{d-2+\gamma}\,dr}{\left(\sqrt{r^2+\delta^2}\right)^d} \le \tilde{K}\int\limits_0^\infty \frac{r^{d-2+\gamma}\,dr}{\left(\sqrt{r^2+1}\right)^d}|\delta|^\gamma$$

з деякою сталою $\tilde{K}>0$. Тому $J'\to 0$ при $\delta\to 0$.

Цим завершується доведення факту $\lim\limits_{\delta\to 0\pm} J_2 = \mp\psi(t,x_0)$, який разом з (2.7) і завершує доведення Теореми 2.2. $\square$

2.1.2 Гіперплощина, як носій потенціалу.

Нехай $S=\{x\in\mathbb{R}^d : (x,\nu)=0\}$ гіперплощина в $\mathbb{R}^d$ (зосередимось на випадку $d\ge 2$) ортогональна до заданого одиничного вектора $\nu\in\mathbb{R}^d$. З (1.5) випливає рівність

$$\int\limits_S e^{i(\xi,y)}g(t,x,y)\,d\sigma_y = e^{i(\tilde{x},\xi)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct(|\xi|^2+\rho^2)^{\alpha/2}}\cos(\rho(x,\nu))\,d\rho \qquad (2.8)$$

що справджується при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\xi\in S$, де $\tilde{x}$ — ортогональна проекція точки x на гіперплощину S. Комбінуючи (1.10) та (2.8) з $\xi=0$, одержимо оцінку

$$\int\limits_S g(t,x,y)\,d\sigma_y \le N\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|(x,\nu)|)^{1+\alpha}} \tag{2.9}$$

правильну при всіх $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$ з деякою сталою $N>0$. Дійсно, досить зауважити, що при $\xi=0$ права частина рівності (2.8) є значенням в точці $(t,0,(x,\nu))$ щільності ймовірності переходу одновимірного симетричного α-стійкого процесу з тим же параметром c, що і в процесу який розглядається.

Нехай задано деяку неперервну дійснозначну функцію $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ таку, що нерівність $|\psi(t,x)|\le Ct^{-\beta}$ виконується $t>0$ та $x\in S$ з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$. Як і раніше визначимо потенціал простого шару $(v(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, поклавши

$$v(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y. \tag{2.10}$$

З нерівності (2.9) випливає наступна оцінка для v

$$|v(t,x)|\le CN\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right))}{\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}-\beta\right)}t^{1-\beta-\frac{1}{\alpha}},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.11}$$

Вона дозволяє стверджувати, що функція v є не тільки добре визначеною, а і неперервною відносно аргументів $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$.

Покажемо, що, як і у випадку обмеженої замкненої поверхні, функція v задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)=\mathbf{A}v(t,\cdot)(x) \tag{2.12}$$

в області $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$. Для цього доведемо можливість внесення оператора $\mathbf{A}$ під знак інтегралів в (2.10). Зафіксуємо довільну точку $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$ та використаємо представлення (1.16). Можливість використання цього зображення при $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$ випливає з оцінок (1.11)

$$\mathbf{A}v(t,\cdot)(x) = c \cdot q_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^d} (v(t,x+u) - v(t,x) - (u, \nabla v(t,\cdot)(x))) \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} =$$

$$= c \cdot q_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S (g(t-\tau, x+u, y) - g(t-\tau, x, y) -$$

$$-(u, \nabla g(t-\tau,\cdot,y)(x)))\, d\sigma_y = I_1 + I_2,$$

де I_1 та I_2 інтеграли від тієї ж функції на множинах $B_\delta \times (0,t) \times S$ та $B_\delta^C \times (0,t) \times S$, відповідно. Тут B_δ^C — доповнення в $\mathbb{R}^d$ до кулі B_δ радіуса δ з центром в початку координат.

Враховуючи нерівності (1.11), підінтегральну функцію в I_1 оцінимо зверху за абсолютною величиною виразом

$$\frac{1}{|u|^{d+\alpha-2}} \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} g(t-\tau, x, y)\big|_{x=\hat{x}} \right| |\psi(\tau, y)| \le$$

$$\le \frac{C}{|u|^{d+\alpha-2}} \frac{\tau^{-\beta}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |y-\hat{x}|)^{d+\alpha}}$$

з деякою додатною сталою C та точкою $\hat{x} = x + \theta u$ ($\theta = \theta(t-\tau, y) \in (0,1)$). Вибравши $0 < \delta < \frac{1}{2}|(x,\nu)|$ та зауваживши, що для кожного $y \in S$ виконуються співвідношення $|y-\hat{x}| \ge |y-x| - \delta > \frac{1}{2}|y-x|$ та $|y-x| = \sqrt{|y-\tilde{x}|^2 + (x,\nu)^2}$ з $\tilde{x} = x - (x,\nu)\nu$, одержимо мажоранту

$$\frac{C}{|u|^{d+\alpha-2}} \frac{\tau^{-\beta}}{(|y-\tilde{x}|^2 + (x,\nu)^2)^{(d+\alpha)/2}},$$

яка інтегровна на всій множині інтегрування інтеграла I_1. Отже, в цьому інтегралі можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Підінтегральна функція в інтегралі I_2 оцінюється наступним виразом

$$\frac{1}{|u|^{d+\alpha}}(|g(t-\tau,x+u,y)|+|g(t-\tau,x,y)|+|u||\nabla g(t-\tau,\cdot,y)(x)|)|\psi(\tau,y)| \le$$

$$\le \frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}}\left(\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x-u|)^{d+\alpha}}+\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|u|}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha+1}}\right) \le$$

$$\le \frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}}\left(\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x-u|)^{d+\alpha}}+\frac{1}{(|y-\tilde{x}|^2+(x,\nu)^2)^{(d+\alpha)/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|u|}{(|y-\tilde{x}|^2+(x,\nu)^2)^{(d+\alpha+1)/2}}\right)$$

Маємо суму трьох функцій, в якій останні дві, очевидно, інтегровні за (u,τ,y) на $B_\delta^C\times(0,t)\times S$. Розглянемо інтеграл від першого доданка та змінимо в ньому порядок інтегрування. Зробивши в одержаному інтегралі заміну змінної u за формулою $(t-\tau)^{1/\alpha}v=y-x-u$, матимемо

$$\int_0^t d\tau\int_S d\sigma_y\int_{B_\delta(0)^C}\frac{C\tau^{-\beta}(t-\tau)}{|u|^{d+\alpha}}\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x-u|)^{d+\alpha}}\,du=$$

$$=\int_0^t d\tau\int_S d\sigma_y\int_{D(\tau,y)}\frac{C\tau^{-\beta}}{|y-x-(t-\tau)^{1/\alpha}v|^{d+\alpha}}\frac{1}{(1+|v|)^{d+\alpha}}\,dv<\infty,$$

де $D(\tau,y)=\{v\in\mathbb{R}^d:|y-x-(t-\tau)^{1/\alpha}v|>\delta\}$. Таким чином, в інтегралі I_2 можлива довільна зміна порядку інтегрування.

Отже,

$$\mathbf{A}v(t,\cdot)(x)=\int_0^t d\tau\int_S \mathbf{A}g(t-\tau,\cdot,y)(x)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S.$$

Оскільки $g(t-\tau,x,y)$, як функція аргументів $(t,x)\in(\tau,\infty)\times\mathbb{R}^d$, задовольняє рівняння (2.12) при фіксованих $\tau>0$ та $y\in\mathbb{R}^d$, то залишається довести, що при фіксованих $x\notin S$ та $t>0$

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_S g(\varepsilon,x,y)\psi(t,y)\,d\sigma_y=0.$$

Але це випливає з нерівності (2.9). Дійсно

$$\int_S g(\varepsilon, x, y)|\psi(t, y)|\, d\sigma_y \leq Ct^{-\beta} \int_S g(\varepsilon, x, y)\, d\sigma_y \leq NCt^{-\beta} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^{1/\alpha} + |(x, \nu)|)^{1+\alpha}}.$$

Таким чином, рівність (2.12) справджується в області

$$(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S).$$

2.1.2.1 Функція $\mathbf{B}_\nu v$.

Доведемо співвідношення

$$\mathbf{B}_\nu v(t, \cdot)(x) = \int_0^t d\tau \int_S g^\nu(t - \tau, x, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y, \tag{2.13}$$

що справджується для $t > 0$ та $x \notin S$.

Перш за все зауважимо, що функція в правій частині рівності (2.13) (позначимо її через $v^\nu(t, x)$ для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$) добре визначена. Зрозуміло, що $v^\nu(t, x) = 0$ для $t > 0$ та $x \in S$, оскільки $g^\nu(t - \tau, x, y) = 0$ для $x \in S$ та $y \in S$ відповідно до (1.21). Якщо $x \notin S$, то (1.21) та (1.10) приводять до нерівності

$$|g^\nu(t - \tau, x, y)| \leq \frac{2}{\alpha} N \frac{|(x, \nu)|}{[(t - \tau)^{1/\alpha} + ((x, \nu)^2 + |y - \tilde{x}|^2)^{1/2}]^{d+\alpha}}, \quad y \in S,$$

де $\tilde{x} = x - \nu(x, \nu)$ ($\tilde{x}$ — ортогональна проекція x на S). Таким чином,

$$\begin{aligned}
&|v^\nu(t, x)| \leq \\
&\leq \frac{2}{\alpha} CN \int_0^t \tau^{-\beta}\, d\tau \int_S \frac{d\sigma_y}{[(t - \tau)^{1/\alpha} + ((x, \nu)^2 + |y - \tilde{x}|^2)^{1/2}]^{d+\alpha-1}} \leq \\
&\leq \frac{2}{\alpha(1 - \beta)} CN|(x, \nu)|^{-\alpha} t^{1-\beta} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{(d+\alpha-1)/2}}
\end{aligned}$$

і функція v^ν коректно визначена при $t > 0$, $x \notin S$.

Це дозволяє показати, що при кожних $t > 0$, $x \notin S$ функція

$$\left(\frac{v(t, x + y) - v(t, x)}{|y|^{d+\alpha}} (y, \nu) \right)_{y \in \mathbb{R}^d}$$

інтегровна на $\mathbb{R}^d$ і що $\mathbf{B}_\nu v(t,\cdot)(x) = v^\nu(t,x)$ для $t > 0$ та $x \notin S$. Взявши до уваги оцінку (2.11), приходимо до висновку, що досить переконатись в скінченності інтегралу (використовуємо позначення $B_\delta = \{y \in \mathbb{R}^d : |y| \le \delta\}$)

$$\int\limits_{B_\delta} |v(t,x+y) - v(t,x)||y|^{-d-\alpha+1} dy, \quad x \notin S, \tag{2.14}$$

для додатних досить малих δ.

Виберемо $0 < \delta < \frac{1}{2}|(x,\nu)|$ ($x \notin S$ — фіксована точка). За теоремою Лапласа про скінченні прирости

$$g(t-\tau, x+y, z) - g(t-\tau, x, z) = (\nabla g(t-\tau,\cdot,z)(x^*), y),$$

де $x^* = x + \theta y$ при деякому $\theta = \theta(t-\tau, z) \in (0,1)$.

Відповідно до нерівності Кочубея (див. [17, Лема 4.1])

$$|\nabla g(t-\tau,\cdot,z)(x^*)| \le N \frac{t-\tau}{[(t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x^*|]^{d+\alpha+1}}.$$

Оскільки $|z - x^*| > \dfrac{1}{2}|z-x| = \dfrac{1}{2}\left(|z-\tilde{x}|^2 + (x,\nu)^2\right)^{1/2}$ для $z \in S$ та

$$\begin{aligned}\int\limits_S |\nabla g(t-\tau,\cdot,z)(x^*)|\, d\sigma_z \le & N(t-\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{2^{d+\alpha+1}\, dz}{(|z|^2 + (x,\nu)^2)^{(d+\alpha+1)/2}} = \\ = & const \cdot (t-\tau)|(x,\nu)|^{-\alpha-2},\end{aligned}$$

то справджується наступна оцінка

$$\begin{aligned}&\int\limits_{B_\delta} |v(t,x+y) - v(t,x)||y|^{-d-\alpha}|(y,\nu)|\, dy \le \\ &\qquad \le const \cdot |(x,\nu)|^{-\alpha-2} \int\limits_0^t \tau^{-\beta}(t-\tau)\, d\tau \int\limits_{B_\delta} |y|^{-d-\alpha+2} dy.\end{aligned}$$

Ця нерівність показує, що інтеграл (2.14) скінченний. Крім того, можлива зміна порядку інтегрування в інтегралі, який задає $\mathbf{B}_\nu v(t,\cdot)(x)$. Це і завершує доведення рівності (2.13).

2.1.2.2 Стрибок функції $\mathrm{B}_\nu v$ в точках носія потенціалу.

Функція v^ν визначена рівністю (2.13) неперервна відносно $t > 0$ та $x \notin S$ та має стрибки в точках гіперплощини S описані наступним варіантом теореми про стрибок (див. Теорема 2.2).

Теорема 2.3. *Справджується співвідношення*

$$\lim_{z \to x\pm} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^\nu(t-\tau, z, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y = \mp\psi(t, x) \tag{2.15}$$

для всіх $t > 0$ *та* $x \in S$, *де* $z \to x+$ *(відповідно,* $z \to x-$*) означає, що* z *наближається до* x *вздовж довільної кривої, що лежить в скінченному замкненому конусі* $\mathcal{K}$ *в* $\mathbb{R}^d$ *з вершиною в точці* x *такому, що* $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) > 0\} \cup \{x\}$ *(відповідно,* $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) < 0\} \cup \{x\}$*).*

Так зване пряме значення $\mathbf{B}_\nu v(t, \cdot)(x)$ для $t > 0$ та $x \in S$ обнуляється в (2.15), оскільки справджується рівність $g^\nu(t, x, y) = 0$ для $t > 0$, $x \in S$ та $y \in S$ (див. (1.21)). Дуальне співвідношення для (2.15) таке:

$$\lim_{z \to y\pm} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \psi(t-\tau, x) g^\nu(\tau, x, z)\, d\sigma_x = \pm\psi(t, y) \tag{2.16}$$

для $t > 0$ та $y \in S$.

Справедливість співвідношень (2.15) випливає з міркувань подібних до тих, що викладені в доведенні Теореми 2.2. Але спочатку доведемо деяке допоміжне твердження.

Лема 2.4. *Справджується рівність*

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^\nu(\tau, z, y)\, d\sigma_y = -\operatorname{sign}(z, \nu) + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha} \frac{\sin(\xi(z, \nu))}{\xi}\, d\xi$$

при всіх $t > 0$, $z \notin S$.

Доведення. Введемо позначення

$$I(t,z)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^\nu(\tau,z,y)\,d\sigma_y,\quad t>0,\ z\notin S.$$

Відповідно до (2.8), маємо

$$I(t,z)=-\frac{2(z,\nu)}{\pi\alpha}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\tau}\int\limits_0^\infty e^{-c\tau\xi^\alpha}\cos(\xi(z,\nu))\,d\xi.$$

Інтегруючи частинами, одержимо для $t>0$ та $z\notin S$

$$I(t,z)=-\frac{2c}{\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty \xi^\alpha e^{-c\tau\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi(z,\nu))}{\xi}\,d\xi=$$

$$=-\lim_{\delta\to0+}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-c\delta\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi(z,\nu))}{\xi}\,d\xi+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi(z,\nu))}{\xi}\,d\xi.$$

Таким чином, справджується наступна рівність

$$I(t,z)=-\operatorname{sign}(z,\nu)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi(z,\nu))}{\xi}\,d\xi$$

для всіх $t>0$ та $z\notin S$. $\square$

Доведення Теореми 2.3. Виберемо деякі $\varepsilon>0$ та $0<\rho<t$ ($t>0$ фіксоване) і подамо інтеграл з лівої частини рівності (2.15) у вигляді суми $\sum\limits_{k=1}^4 J_k$, в якій

$$J_1=-\frac{2\delta}{\alpha}\psi(t,x)\int\limits_{t-\rho}^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S_\varepsilon} g(t-\tau,z,y)\,d\sigma_y,$$

$$J_2=\frac{2\delta}{\alpha}\int\limits_{t-\rho}^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S_\varepsilon} g(t-\tau,z,y)(\psi(t,x)-\psi(\tau,y))\,d\sigma_y,$$

$$J_3=-\frac{2\delta}{\alpha}\int\limits_0^{t-\rho}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S_\varepsilon} g(t-\tau,z,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,$$

$$J_4=-\frac{2\delta}{\alpha}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S\setminus S_\varepsilon} g(t-\tau,z,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,$$

а $S_\varepsilon = \{y \in S : |y - x| < \varepsilon\}$. Доданок J_1 запишемо у вигляді $J_1 = -\psi(t,x)I$, де

$$I = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varepsilon} g(t-\tau, z, y)\, d\sigma_y =$$

$$= \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{\rho} \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_S g(\tau, z, y)\, d\sigma_y - \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{\rho} \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_{S \setminus S_\varepsilon} g(\tau, z, y)\, d\sigma_y =$$

$$= I' - I''.$$

Враховуючи оцінки, які задовольняють функції g та ψ, одержуємо наступне (C, $\tilde{C}$ — деякі додатні сталі).

$$|J_4| \le C|\delta| \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + \sqrt{\delta^2 + |y-x|^2})^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_\varepsilon^{\infty} \frac{r^{d-2}dr}{((t-\tau)^{1/\alpha} + r)^{d+\alpha}} \le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_\varepsilon^{\infty} \frac{dr}{r^{2+\alpha}} \to 0, \quad \delta \to 0;$$

$$|J_3| \le C|\delta| \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{((t-\tau)^{1/\alpha} + \sqrt{\delta^2 + |y-x|^2})^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{r^{d-2}dr}{((t-\tau)^{1/\alpha} + r)^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{\tau^\beta} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{r^{d-2}dr}{(\rho^{1/\alpha} + r)^{d+\alpha}} \to 0, \quad \delta \to 0;$$

$$|I''| \le C|\delta| \int\limits_0^{\rho} d\tau \int\limits_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{(\tau^{1/\alpha} + \sqrt{\delta^2 + |y-x|^2})^{d+\alpha}} \le$$

$$\le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{\rho} d\tau \int\limits_\varepsilon^{\infty} \frac{r^{d-2}dr}{(\tau^{1/\alpha} + r)^{d+\alpha}} \le \tilde{C}|\delta| \int\limits_0^{\rho} d\tau \int\limits_\varepsilon^{\infty} \frac{dr}{r^{2+\alpha}} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Скористаємось тепер твердженням доведеної вище Леми 2.4, зауваживши, що $I' = I(\rho, x + \delta\nu)$. Тому, оскільки

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-c\rho\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi\delta)}{\xi}\,d\xi \to 0, \quad \delta \to 0,$$

маємо $\lim\limits_{\delta\to 0\pm} I' = \pm 1$ і, отже, $\lim\limits_{\delta\to 0\pm} J_2 = \mp\psi(t, x)$.

Враховуючи неперервність функції ψ та існування границі J_1 при $\delta \to 0$, можемо стверджувати, що J_2 може бути зроблено як завгодно малим вибором ρ та ε. Цим і завершується доведення теореми. □

2.1.2.3 Одновимірний випадок.

В попередній частині пункту 2.1.2 розглядалася ситуація $d \geq 2$. Нехай тепер $d = 1$. Тоді гіперплощина $S = \{0\}$ і слід розуміти $\int\limits_S f(x)\,d\sigma_x = f(0)$. Таким чином, задавши деяку неперервну функцію $(\psi(t))_{t>0}$, яка задовольняє нерівність $|\psi(t)| \leq Ct^{-\beta}$ з деякими $C > 0$ та $\beta < 1$, визначимо потенціал простого шару формулою

$$v(t, x) = \int\limits_0^t g(t - \tau, x, 0)\psi(\tau)\,d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Всі міркування щодо коректності такого визначення, оцінок та властивостей функції $(v(t, x))_{t>0, x\in\mathbb{R}}$, наведені вище в пункті 2.1.2, залишаються в силі. Сформулюємо окремі з них.

По перше, функція $(v(t, x))_{t>0, x\in\mathbb{R}}$ неперервна на своїй області визначення та справджується нерівність

$$|v(t, x)| \leq Kt^{1-\beta-1/\alpha}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Наступне, функція $(v(t, x))_{t>0, x\in\mathbb{R}}$ задовольняє в області $(t, x) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ рівняння

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}v(t, \cdot)(x).$$

Крім того, при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ вона допускає застосування оператора $\mathbf{B}$ за просторовою змінною під знаком інтеграла, тобто,

$$\mathbf{B}v(t,\cdot) = \int_0^t \mathbf{B}g(t-\tau,\cdot,0)(x)\psi(\tau)\,d\tau.$$

Оскільки при $t > 0$ та $x \neq 0$ справджується рівність (див. твердження Леми 2.4)

$$2c\int_0^t \mathbf{B}g(\tau,\cdot,0)\,d\tau = -\operatorname{sign} x + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\,d\xi, \tag{2.18}$$

то аналогічно доведенню теореми про стрибок (Теорема 2.3) без будь-яких особливостей (навіть з деяким спрощенням) доводиться співвідношення

$$\lim_{x\to 0\pm} 2c\mathbf{B}v(t,\cdot)(x) = \mp\psi(t), \quad t > 0.$$

2.2 Початково-крайові задачі та ймовірнісні представлення їх розв'язків.

Крайові чи початково-крайові задачі посідають важливе місце в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для диференціальних рівнянь параболічного та еліптичного типу узагальнені розв'язки згаданих задач мають явні ймовірнісні представлення (див., наприклад, [16, с. 4–7]). Ми розглядатимемо псевдодиференціальне рівняння параболічного типу виду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.19}$$

Нехай S — деяка гладка поверхня в $\mathbb{R}^d$, яка ділить множину $\mathbb{R}^d$ на дві частини D_+ та D_- так, що $\mathbb{R}^d = D_+ \cup S \cup D_-$, а $\nu(x)$ — орт нормалі до S в точці $x \in S$ направленої в сторону D_+. Далі розглядатимемо дві ситуації: перша, коли S є обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$, а друга, коли S — гіперплощина, яка проходить через початок координат (що несуттєво) ортогонально до деякого фіксованого одиничного вектора ν (тоді $\nu(x) = \nu$ при всіх $x \in S$).

Задавши на S деякі неперервні дійснозначні функції $(q(x))_{x\in S}$ та $(r(x))_{x\in S}$ (друга з них вважатиметься невід'ємною), а також, зафіксувавши деяку функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, розглянемо задачу (далі в цьому пункті — основна задача) побудови неперервної функції $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє:

(i) псевдодиференціальне рівняння:

$$\frac{\partial u(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S;$$

(ii) початкову умову: $u(0+,x,\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d$;

(iii) граничну умову: при $t>0$, $x\in S$

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)u(t,x,\varphi).$$

Як і вище, в умові (iii) під записом $f(x+)$ (відповідно $f(x-)$) розуміємо границю функції $(f(y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ в точці $x\in S$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K}\subset D_+\cup\{x\}$ (відповідно $\mathcal{K}\subset D_-\cup\{x\}$). Таку задачу ми називаємо третьою початково-крайовою задачею для псевдодиференціального рівняння (2.19). При $r(x)\equiv 0$ вона стає другою початково-крайовою задачею.

Як і в класичній теорії, сформульовану задачу ми будемо розв'язувати з використанням потенціалів простого шару та теореми про стрибок конормальної, в нашому випадку, похідної порядку $\alpha-1$ останніх. При цьому окремо розглянемо випадок $q(x)\equiv 0$, це — так звана симетрична початково-крайова задача, та випадок $r(x)\equiv 0$ — друга початково-крайова задача. Фундаментальним розв'язком симетричної другої початково-крайової задачі є, очевидно, функція g. Тому цей випадок не потребує додаткового розгляду. Кожного разу нас цікавитиме питання про ймовірнісні сенс та представлення відповідних розв'язків.

Необмеженість гіперплощини на відміну від обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ та деяка відмінність теорем про стрибок в цих випадках спонукають розглядати їх окремо. Крім того, ситуація з гіперплощиною поширюється на випадок з $d = 1$, що ми регулярно робитимемо.

Якщо $\alpha = 2$ (та $c = \frac{1}{2}$), то $(x(t))_{t\geq 0}$ є вінеровим процесом. Деякі результати стосовно сформульованої задачі в цьому випадку можна знайти, зокрема, в книгах [16, 21] чи статті [2].

Зауваження 2.2. В деяких випадках умови на густину потенціалу простого шару виявляються занадто обмежливими. Твердження Теорем 2.2 та 2.3 справджуються і при наступних умовах на функцію $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$.

Говоритимемо, що функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ належить до класу $\mathbb{U}$, якщо вона неперервна та для кожного $T > 0$ існує така стала $C_T > 0$, що при всіх $t \in (0,T]$, $x \in S$ виконується нерівність $|\psi(t,x)| \leq C_T t^{-\beta}$ з деякою сталою $\beta < 1$.

2.2.1 Друга початково-крайова задача з граничною умовою на обмеженій замкненій поверхні.

2.2.1.1 Постановка задачі та її розв'язок.

Нехай поверхня S в $\mathbb{R}^d$ обмежена замкнена та належить класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$.

Задача полягає в побудові такої неперервної функції $(u(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє умови (i), (ii) та граничну умову виду

(iv) $(1+q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - (1-q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-) = 0$ при всіх $t > 0$, $x \in S$.

Покладемо для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \qquad (2.20)$$

де $(\psi(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ — невідома функція. Нашим завданням тепер буде побудувати функцію ψ так, щоб для $\tilde{u}$ виконувались умови (i), (ii), (iv)

З Теореми 2.2 випливає рівність (для $t > 0$ та $x \in S$)

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}\tilde{u}(t,\cdot)(x\pm) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy \mp q(x)\psi(t,x)+ \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{2.21}$$

якщо тільки функція ψ неперервна при $(t,x) \in (0,\infty) \times S$ та виконується нерівність $|\psi(t,x)| \le Ct^{-\beta}$ при всіх $t \in (0,T])$, $x \in S$ для кожного $T > 0$ з деякими сталими $C > 0$ (можливо залежить від T), $\beta \in (0,1)$.

Поклавши $\psi(t,x) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_{\nu(x)}\tilde{u}(t,\cdot)(x+) + \mathbf{B}_{\nu(x)}\tilde{u}(t,\cdot)(x-))$, $t > 0$, $x \in S$, дістанемо інтегральне рівняння для функції ψ:

$$\psi(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy+ \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{2.22}$$

де $t > 0$, $x \in S$. Це рівняння розв'язується методом послідовних наближень, а саме, покладемо

$$\psi_0(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in S,$$

а для $n \ge 1$

$$\psi_n(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi_{n-1}(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t > 0,\ x \in S.$$

Оцінимо ψ_0, використовуючи співвідношення (1.21) (нагадаємо, що $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$).

$$|\psi_0(t,x)| \le \|\varphi\| \frac{2}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |y-x| g(t,x,y)\,dy = L\,\|\varphi\|\,t^{-1+1/\alpha}, \quad t > 0,\ x \in S, \tag{2.23}$$

де стала L визначається рівністю $L = \dfrac{2}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |z| h_d(z)\, dz$ (цей інтеграл обчислюється, але для нас зараз його точне значення неважливе). Фіксуємо тепер довільне $T \in (0, \infty)$ і зауважимо, що з доведення Леми 2.1 випливає така нерівність

$$\int\limits_S |g^{\nu(x)}(t-\tau, x, y)|\, d\sigma_y \le K_T\, (t-\tau)^{-1+\frac{\gamma}{\alpha}}, \tag{2.24}$$

справедлива при всіх $(t, x) \in (0, T] \times S$ з деякою сталою $K_T > 0$. Досить в Лемі 2.1 покласти $\psi(t, x) \equiv 1$, тоді $\beta = 0$.

Індукцією по n дістаємо оцінки ($\|q\| = \max\limits_{x \in S} |q(x)|$)

$$|\psi_n(t, x)| \le L\, \Gamma(1/\alpha) \|\varphi\|\, (K_T \|q\| \Gamma(\gamma/\alpha))^n\, \frac{t^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1+n\gamma}{\alpha}\right)}, \tag{2.25}$$

справедливі при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$ та $n = 0, 1, \ldots$. При $n = 0$ нерівність (2.25) доведена вище. Нехай вона справджується при деякому $n \ge 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
|\psi_{n+1}(t, x)| \le L\, \Gamma(1/\alpha) \|\varphi\|\, (K_T \|q\| \Gamma(\gamma/\alpha))^n\, \frac{\|q\|}{\Gamma\left(\frac{1+n\gamma}{\alpha}\right)} \int\limits_0^t \tau^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}}\, d\tau \\
\int\limits_S |g^{\nu(x)}(t-\tau, x, y)|\, d\sigma_y \le \\
\le L\, \Gamma(1/\alpha) \|\varphi\|\, (K_T \|q\| \Gamma(\gamma/\alpha))^n\, \frac{\|q\| K_T}{\Gamma\left(\frac{1+n\gamma}{\alpha}\right)} \int\limits_0^t \tau^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}} (t-\tau)^{-1+\frac{\gamma}{\alpha}}\, d\tau, = \\
= L\, \Gamma(1/\alpha) \|\varphi\|\, (K_T \|q\| \Gamma(\gamma/\alpha))^{n+1}\, \frac{t^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{(n+1)\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1+(n+1)\gamma}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

Це і доводить (2.25).

Очевидно, що ряд

$$\psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t, x) \tag{2.26}$$

збігається рівномірно на кожній множині $(t, x) \in (0, T] \times S$ і, отже, є на цій множині неперервною функцією, яка задовольняє рівняння (2.22), а також умову $|\psi(t,x)| \le N_T\, t^{-1+1/\alpha}$, $t \in (0,T]$, $x \in S$, де $N_T > 0$ — деяка стала, що, можливо, залежить від T.

Підставляючи побудовану функцію ψ у формулу (2.20), дістаємо функцію $\tilde{u}$, яка задовольняє умову (i), що випливає з результатів пунктів 1.2.2.6 та 2.1.1.1. З (2.21) та (2.22) випливають рівності

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}\tilde{u}(t,\cdot)(x\pm) = (1 \mp q(x))\psi(t,x), \quad t > 0,\ x \in S,$$

які мають своїм наслідком факт, що функція $\tilde{u}$ задовольняє умову (iv). Щоб довести, що функція $\tilde{u}$ задовольняє також умову (ii), треба показати, що другий доданок в правій частині (2.20) прямує до нуля, коли $t \to 0+$, при кожному $x \in \mathbb{R}^d$. Це буде випливати з такого твердження.

Лема 2.5. *Нехай $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $t_0 > 0$, що при $\tau \in (0, t_0)$ виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy \right| \le \varepsilon\, \tau^{-1+1/\alpha}, \quad x \in S. \tag{2.27}$$

Доведення. Зауважимо, що $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(\tau,x,y)\,dy = \mathbf{B}_{\nu(x)}1 = 0$ при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(\tau,x,y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy.$$

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо $r > 0$ так, щоб

$$\sup_{x\in S}\ \sup_{y\in B_r(x)} |\varphi(y)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

де L — стала з нерівності для ψ_0. Тоді

$$\left| \int\limits_{B_r(x)} g^{\nu(x)}(\tau,x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}\tau^{-1+1/\alpha}$$

при всіх $\tau > 0$ та $x \in S$. Інтеграл по $\mathbb{R}^d \setminus B_r(x) = B_r(x)^C$ при фіксованому $r > 0$ оцінимо так

$$\left| \int\limits_{B_r(x)^C} g^{\nu(x)}(\tau, x, y)(\varphi(y) - \varphi(x))\, dy \right| \leq$$
$$\leq \frac{4}{\alpha} \|\varphi\| \, \tau^{-1} \int\limits_{B_r(x)^C} |y - x| g(\tau, x, y)\, dy \leq$$
$$\leq \frac{4}{\alpha} \|\varphi\| \, \tau^{-1} r^{-\beta_0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |y - x|^{1+\beta_0} g(\tau, x, y)\, dy \leq$$
$$\leq \frac{4}{\alpha r^{\beta_0}} \|\varphi\| \, \tau^{-1+(1+\beta_0)/\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |z|^{1+\beta_0} h_d(z)\, dz,$$

де $\beta_0 \in (0, \alpha - 1)$, так що останній інтеграл скінченний. Звідси видно, що при $\tau \in (0, t_0)$ цей вираз буде меншим, ніж $\frac{\varepsilon}{2} \tau^{-1+1/\alpha}$, якщо тільки t_0 вибране досить малим. Лему доведено. $\square$

Тепер можемо сформулювати основне твердження цього пункту.

Теорема 2.6. *Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє умови Теореми 2.2, $(q(x))_{x \in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, а $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то початково-крайова задача (i), (ii), (iv) має такий розв'язок, який зображається формулою* (2.20) *з функцією ψ, визначеною з допомогою ряду* (2.26).

Доведення. Нехай задано $\varepsilon > 0$ і нехай t_0 вибрано так, що виконується (2.27).

Аналогічно до того, як з допомогою (2.23) та (2.24) було одержано нерівності (2.25), використовуючи (2.27) та ту ж (2.24), знаходимо оцінку

$$|\psi_n(t, x)| \leq \varepsilon \, \Gamma(1/\alpha) \left(K_T \|q\| \Gamma(\gamma/\alpha)\right)^n \frac{t^{-1+\frac{1}{\alpha}+\frac{n\gamma}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1+n\gamma}{\alpha}\right)}, \tag{2.28}$$

справедливу при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$ та $n = 0, 1, \ldots$. Звідси випливає, що сума ряду (2.26) буде задовольняти нерівність $|\psi(\tau, x)| \leq \varepsilon \, \tilde{N}_T \, \tau^{-1+1/\alpha}$ при $\tau \in (0, t_0)$, $x \in S$, де $\tilde{N}_T$ — деяка стала. Тепер, враховуючи нерівність (1.14), дістаємо таку оцінку для другого доданка в правій частині (2.20)

$$\left| \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y \right| \le \varepsilon\,\tilde{N}_T \|q\|\,K \int_0^t \tau^{-1+1/\alpha}(t-\tau)^{-1/\alpha}\,d\tau = \\ = \varepsilon\,\tilde{N}_T\|q\|\,K\,\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha),$$

якщо тільки $t \in (0, t_0)$. Цим завершується доведення Теореми 2.6. □

2.2.1.2 Фундаментальний розв'язок.

В попередньому пункті побудовано розв'язок задачі (i), (ii), (iv). Тут ми будуємо *фундаментальний розв'язок* цієї задачі.

Задамо функцію $(\tilde{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \tag{2.29}$$

з деякою невідомою функцією $(w(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$.

Нашою метою в цьому пункті є побудова такої функції w, щоб для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$\tilde{u}(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d \tag{2.30}$$

задовольняла умови (i), (ii), (iv). Це і означатиме, що функція $\tilde{g}$ є фундаментальним розв'язком другої початково-крайової задачі (i), (ii), (iv). Очевидно, що для виконання умов (i), (ii) досить, щоб при кожній $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція

$$v(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in S \tag{2.31}$$

належала до класу $\mathbb{U}$ (див. Зауваження 2.2). Це випливатиме з властивостей функції g та потенціалу простого шару $\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z$, які були сформульовані в пунктах 2.2.3 та 2.1.1.2, відповідно.

Теорема про стрибок (див. п. 2.1.1.2) приводить нас до висновку, що умова (iv) буде виконуватись, якщо функція w задовольнятиме рівняння ($t > 0$, $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$w(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z. \qquad (2.32)$$

Спочатку оцінимо функцію $(g^{\nu(x)}(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$, для якої справджується представлення (див. (1.21))

$$g^{\nu(x)}(t,x,y) = \frac{2}{\alpha}\frac{(y-x,\nu(x))}{t}g(t,x,y), \quad t>0,\ x\in S,\ y\in\mathbb{R}^d \qquad (2.33)$$

Враховуючи оцінку (1.10) та властивості поверхні S (див. п. 1.2.2.3), одержуємо при $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ оцінку

$$|g^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{C}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \qquad (2.34)$$

з деякою сталою $C > 0$. Дійсно з (1.10) та (2.33) випливає

$$|g^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{2}{\alpha}\frac{N|(y-x,\nu(x))|}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}. \qquad (2.35)$$

Для $y \in S_{r_0/2}(x)$ в локальній системі координат пов'язаній з точкою x можемо записати ($u^{<d>} = (u^1,u^2,\ldots,u^{d-1})$, $K > 0$ — деяка стала)

$$(y-x,\nu(x)) = F_x(u^{<d>}), \quad |F_x(u^{<d>})| \le K|u^{<d>}|^{1+\gamma}.$$

Але оскільки $|u^{<d>}|^2 = |y-x|^2 - (y-x,\nu(x))^2 \le |y-x|^2$, для правої частини M нерівності (2.35) виконується ($C > 0$ — деяка стала)

$$M = \frac{2}{\alpha}\frac{N|F_x(u^{<d>})|}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}} \le \frac{C|y-x|^{1+\gamma}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}.$$

Для $y \in S \setminus S_{r_0/2}(x)$, враховуючи, що $|y-x| \ge \delta_0$, запишемо

$$M \le \frac{2}{\alpha}\frac{N}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \frac{2}{\alpha}\frac{N\delta_0^{-\gamma}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}$$

Нерівність (2.34) доведена.

Якщо ж $t > 0$, $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$, то можемо записати, що

$$|g^{\nu(x)}(t,x,y)| \leq \frac{C}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}}, \tag{2.36}$$

де $\rho(y,S) = \inf\limits_{x\in S} |y-x|$, $C > 0$ — деяка стала.

Далі, розв'язуватимемо рівняння (2.32) при $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ методом послідовних наближень. Покладемо при $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ нульове наближення $w_0(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y)$ та для $k \geq 1$

$$w_k(t,x,y) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z) w_{k-1}(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z. \tag{2.37}$$

Індукцією по k, використовуючи твердження Леми 1.4, доводимо, що при всіх $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ та $k \geq 0$ виконуються нерівності

$$|w_k(t,x,y)| \leq R_k \frac{t^{k\gamma/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}, \tag{2.38}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ визначається співвідношеннями

$$R_0 = C \text{ та } R_k = C\|q\|K\left(\frac{\alpha}{k\gamma} + B\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 1 + (k-1)\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right) R_{k-1} \text{ при } k \geq 1,$$

в яких $C > 0$, $K > 0$ – деякі сталі. Дійсно, оцінка для w_0 збігається з (2.34). Якщо нерівність (2.38) справджується при деякому $k \geq 0$, то маємо (K — стала з Леми 1.4)

$$\begin{aligned}
&|w_{k+1}(t,x,y)| \leq \\
&\leq R_k C\|q\| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}} \frac{t^{k\gamma/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}\, d\sigma_z \leq \\
&\leq R_k C\|q\|K\left(\frac{\alpha}{(k+1)\gamma} + B\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 1 + k\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right) \frac{t^{(k+1)\gamma/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}.
\end{aligned}$$

Одержані оцінки функцій $(w_k(t,x,y))_{t>0, x\in S, y\in S}$ дозволяють стверджувати, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(t,x,y)$ збігається абсолютно при $(t,x,y) \in (0,\infty) \times S \times S$ та рівномірно по $(x,y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума

$(w(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in S}$ є неперервним розв'язком рівняння (2.32) і для кожного $T>0$ існує така стала $C_T>0$, що при всіх $t\in(0,T]$, $x\in S$, $y\in S$ виконується нерівність

$$|w(t,x,y)|\le C_T\frac{1}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}. \qquad (2.39)$$

Крім того, функція w задовольняє рівняння ($t>0$, $x\in S$, $y\in S$)

$$w(t,x,y)=g^{\nu(x)}(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_S w(t-\tau,x,z)g^{\nu(z)}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z. \qquad (2.40)$$

Останнє випливає із співвідношень ($t>0$, $x\in S$, $y\in S$)

$$w_k(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_S w_{k-1}(t-\tau,x,z)g^{\nu(z)}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,\quad k\ge 1, \qquad (2.41)$$

які легко доводяться з допомогою індукції по k та нерівностей (2.34) і (2.38). А саме, при $k=1$ ця рівність повторює (2.37) при $k=1$. Якщо вона справджується при деякому $k\ge 1$, то з (2.37) та (2.41) маємо

$$w_{k+1}(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)$$
$$\int_0^\tau d\xi\int_S w_{k-1}(\tau-\xi,z,u)g^{\nu(u)}(\xi,u,y)q(u)\,d\sigma_u q(z)\,d\sigma_z.$$

Нерівності (2.34) і (2.38) дозволяють змінити тут порядок інтегрування та одержати

$$
\begin{aligned}
w_{k+1}(t,x,y) = &\int_0^t d\xi \int_S g^{\nu(u)}(\xi,u,y)q(u) \\
&\qquad \int_\xi^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w_{k-1}(\tau-\xi,z,u)q(z)\, d\sigma_z\, d\sigma_u = \\
= &\int_0^t d\xi \int_S g^{\nu(u)}(\xi,u,y)q(u) \\
&\qquad \int_0^{t-\xi} d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\xi-\tau,x,z)w_{k-1}(\tau,z,u)q(z)\, d\sigma_z\, d\sigma_u = \\
= &\int_0^t d\xi \int_S g^{\nu(u)}(\xi,u,y)q(u)w_k(t-\xi,z,u)\, d\sigma_u,
\end{aligned}
$$

де остання рівність правильна згідно (2.37). Отже, (2.41) доведено.

Співвідношення (2.40) продовжує функцію w на множину

$$(t,x,y) \in (0,\infty) \times S \times \mathbb{R}^d.$$

Підставивши одержану функцію w в праву частину (2.32) та міняючи порядок інтегрування з врахуванням оцінок (2.34) і (2.39), доводимо, що побудована функція $(w(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння (2.32).

Оцінки (2.36) та (2.39) разом з нерівністю (1.13) дозволяють записати

$$|w(t,x,y)| \le C_T \frac{1}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}} \tag{2.42}$$

при $t \in (0,T]$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Враховуючи нерівність (1.10) та співвідношення (2.33), можемо записати оцінку

$$|g^{\nu(x)}(t,x,y)| \le \frac{2N}{\alpha} \frac{1}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}}, \quad t>0,\ x\in S,\ y\in\mathbb{R}^d.$$

Тому, домноживши обидві частини співвідношення (2.40) на $\varphi(y)$ та проінтегрувавши його по $y \in \mathbb{R}^d$ (тут враховуємо нерівність (2.42)), для функції $(w(t,x,y))_{t>0,x\in S}$, заданої рівністю (2.31), одержуємо, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, при кожному $T > 0$ виконується нерівність $|v(t,x,\varphi)| \leq C_T t^{-1+1/\alpha}$, $t \in (0,T]$, $x \in S$ з деякою сталою $C_T > 0$.

Отже, функція $(v(t,x,\varphi))_{t>0,x\in S}$ належить до класу $\mathbb{U}$.

Сформулюємо тепер одержаний основний результат цього пункту у вигляді теореми.

Теорема 2.7. *Функція* $(\tilde{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$*, задана рівністю* (2.29)*, де* $(w(t,x,y))_{t>0,x\in S,y\in\mathbb{R}^d}$ *задовольняє рівняння* (2.32)*, є фундаментальним розв'язком задачі* (i)*,* (ii)*,* (iv)*.*

Зауважимо, що для функції $\tilde{g}$ можна запропонувати деяке інше зображення. А саме, покладемо для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$

$$\tilde{w}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z.$$

Використовуючи зображення $w(\tau,z,y)$ при $\tau > 0$, $z \in S$, $y \in S$ у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\tau,z,y)$ та враховуючи (2.41), одержуємо, що $\tilde{w}$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{w}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t-\tau,x,z)g^{\nu(z)}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Як наслідок, враховуючи (2.29), маємо наступне, дуальне до (2.29), зображення функції $\tilde{g}$

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t-\tau,x,z)g^{\nu(z)}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

правильне при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$.

Звідси легко дістати формули $\tilde{g}(t,x,y\pm) = (1 \pm q(y))\tilde{w}(t,x,y)$, справедливі при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$. Дійсно, з теореми про стрибок (Теорема 2.2) маємо

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t,x,y\pm) = g(t,x,y)+ &\\ &+\int_0^t d\tau \int_S \tilde{w}(t-\tau,x,z)g^{\nu(z)}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \pm q(y)\tilde{w}(t,x,y) = \\ &= (1\pm q(y))\tilde{w}(t,x,y).\end{aligned}$$

Тому цілком природно покласти для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$

$$\tilde{g}(t,x,y) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(t,x,y+) + \tilde{g}(t,x,y-)] = \tilde{w}(t,x,y).$$

Зауважимо, що з рівності (2.29) при $t>0$, $x\in S$ та $y\in\mathbb{R}^d$ випливають співвідношення $\mathbf{B}_{\nu(x)}\tilde{g}(t,\cdot,y)(x\pm) = (1\mp q(x))w(t,x,y)$.

2.2.2 Друга початково-крайова задача з граничною умовою на гіперплощині.

Нехай $S=\{x\in\mathbb{R}^d : (x,\nu)=0\}$, де $\nu\in\mathbb{R}^d$ — фіксований орт. Враховуючи нескінченність поверхні S, вимагатимемо додатково, щоб q була обмеженою функцією.

2.2.2.1 Фундаментальний розв'язок.

Як і вище побудуємо фундаментальний розв'язок задачі (i), (ii), (iv), використовуючи Теорему 2.3.

Покладемо для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)g^{\nu}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \tag{2.43}$$

та перш за все покажемо, що інтеграл в (2.43) добре визначений. Це очевидно для $y\in S$ оскільки справджується рівність $g^{\nu}(\tau,z,y)=0$ для $z\in S$ та $y\in S$

(див. (1.21)); отже, маємо $\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$. Далі, як випливає з (1.21) та (1.10), справедлива нерівність

$$|g^\nu(\tau,z,y)| \le \frac{2}{\alpha} N \frac{|(y,\nu)|}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+\alpha}}$$

для $\tau > 0$, $z \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Оскільки $|y-z| = (|\tilde{y}-z|^2 + (y,\nu)^2)^{1/2} \ge |(y,\nu)|$ для $z \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d$ (нагадаємо, що $\tilde{y} = y - \nu(y,\nu)$ для $y \in \mathbb{R}^d$), то справджується оцінка $|g^\nu(\tau,z,y)| \le \dfrac{2}{\alpha} N |(y,\nu)|^{-d-\alpha+1}$ при $\tau > 0$, $z \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$. Це має своїм наслідком нерівності

$$\left| \int_S g(t-\tau,x,z) g^\nu(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z \right| \le$$
$$\le \frac{2}{\alpha} \|q\| N |(y,\nu)|^{-d-\alpha+1} \int_S g(t-\tau,x,z)\, d\sigma_z \le$$
$$\le \frac{2}{\alpha} \|q\| N^2 |(y,\nu)|^{-d-\alpha+1} (t-\tau)^{-1/\alpha}$$

що справджуються при $0 < \tau < t$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$, де $\|q\| = \sup\limits_{x \in S} |q(x)|$ та використано очевидний наслідок з (2.9)

$$\int_S g(t-\tau,x,z)\, d\sigma_z \le N(t-\tau)^{-1/\alpha}.$$

Таким чином, встановлено, що функція $\tilde{g}$ коректно визначена. Більше того, вона є неперервною функцією своїх аргументів $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d \setminus S$.

Оскільки, враховуючи рівність (1.21) та той очевидний факт, що $g(t,x,y) = g(t,y,x)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, можемо записати

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z) g^\nu(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z =$$
$$= g(t,x,y) - \int_0^t d\tau \int_S g^\nu(\tau,y,z) g(t-\tau,z,x) q(z)\, d\sigma_z,$$

то неважко вивести з Теореми 2.3, що

$$\tilde{g}(t,x,y\pm) = (1 \pm q(y))g(t,x,y), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in S, \tag{2.44}$$

тобто при фіксованих (t,x) функція $\tilde{g}$, як функція третього аргумента, має в точках $y \in S$ стрибки.

Покажемо тепер, що при кожних (t,x) функція $(\tilde{g}(t,x,y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ є абсолютно інтегровною на $\mathbb{R}^d$. Деякі досить прості обчислення дозволяють написати формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |(y,\nu)| g(\tau,z,y)\,dy = \frac{2c^{1/\alpha}}{\pi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\tau^{1/\alpha}, \quad \tau>0,\ z\in S,$$

та нерівність (більш точну, ніж написана вище)

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)\,d\sigma_z \le \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha c^{1/\alpha}}(t-\tau)^{-1/\alpha}, \quad 0<\tau<t,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\tilde{g}(t,x,y)|\,dy \le$$

$$\le 1 + \frac{4c^{1/\alpha}\|q\|}{\pi\alpha}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int\limits_0^t \tau^{\frac{1}{\alpha}-1}\,d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\,d\sigma_z \le 1 + \frac{4\|q\|}{\alpha^2\sin^2\frac{\pi}{\alpha}},$$

що означає бажану інтегрованість.

Як наслідок, маємо нерівність

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy\right| \le \left(1 + \frac{4\|q\|}{\alpha^2\sin^2\frac{\pi}{\alpha}}\right)\|\varphi\| \tag{2.45}$$

при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Оскільки $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^\nu(t,x,y)\,dy \equiv 0$, то справджується тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1. \tag{2.46}$$

Крім того, функція $\tilde{g}$ задовольняє рівняння

$$\tilde{g}(s+t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(s,x,z)\tilde{g}(t,z,y)\,dz \tag{2.47}$$

для всіх $s>0$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Доведення цієї рівності базується на формулі ($s>0$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu}(s,x,z)g(t,z,y)\,dz = g^{\nu}(s+t,x,y),$$

справедливість якої легко перевірити безпосередньо.

В одновимірному випадку функція $\tilde{g}$ задається рівністю (див. [42])

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \frac{2qy}{\alpha}\int\limits_0^t g(t-\tau,x,0)g(\tau,0,y)\frac{d\tau}{\tau} \tag{2.48}$$

для всіх $t>0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$. Як було показано в [42], ця функція приймає не тільки невід'ємні значення, а й має від'ємні значення (якщо $q \neq 0$). Те саме стосується і функції $\tilde{g}$ у випадку $d \geq 2$ (та $q(x) \not\equiv 0$).

Тепер можна довести, що функція $\tilde{g}$ є фундаментальним розв'язком задачі (i), (ii), (iv). По перше, для фіксованого $y \notin S$ вона задовольняє рівняння (2.19) в області $(t,x) \in (0,\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus S)$. Якщо $y \in S$, то $\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y)$ і отже, це рівняння задовольняється функцією $(\tilde{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ у всій області $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$.

По друге, для даної функції $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, покладемо

$$\tilde{u}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\tilde{g}(t,x,y)\,dy, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Ця функція може бути записана наступним чином

$$\tilde{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)u^{\nu}(\tau,y,\varphi)q(y)\,d\sigma_y, \tag{2.49}$$

де

$$u^{\nu}(\tau,y,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu}(\tau,y,z)\varphi(z)\,dz = \mathbf{B}_{\nu}u(\tau,\cdot,\varphi)(y), \quad \tau>0,\ y \in S,$$

а функція u визначається рівністю

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.50}$$

Як випливає з результатів пункту 2.1.2, функція $\tilde{u}$ задовольняє умови (i) та (ii). Застосовуючи тепер оператор $\mathbf{B}_\nu$ до обох сторін рівності (2.49) та використовуючи співвідношення (2.15), приходимо до наступних рівностей

$$\mathbf{B}_\nu\tilde{u}(t,\cdot,\varphi)(x\pm) = (1\mp q(x))u^\nu(t,x,\varphi), \quad t>0,\ x\in S.$$

Таким чином, функція $\tilde{u}$ задовольняє граничну умову (iv).

2.2.3 Симетрична третя початково-крайова задача з граничною умовою на обмеженій замкненій поверхні.

2.2.3.1 Процес з убиванням на поверхні.

Нехай $(x(t),\mathcal{M}_t,\mathbb{P}_x)$ — стандартний процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, щільність ймовірності переходу якого задається рівністю (1.9), тобто симетричний α-стійкий випадковий процес.

Через S позначимо деяку обмежену замкнену поверхню класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma\in(0,1)$.

Рівняння збурення. Для заданої неперервної невід'ємної функції $(r(x))_{x\in S}$ розглянемо функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, що є розв'язком рівняння

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\hat{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{2.51}$$

Для початку зауважимо, що рівняння (2.51) може бути розв'язане методом послідовних наближень. А саме, шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\hat{g}(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g_k(t,x,y), \tag{2.52}$$

де при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$

$$g_0(t,x,y) = g(t,x,y)$$

та для $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(t,x,y) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z) g_{k-1}(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z. \tag{2.53}$$

Для оцінювання членів ряду в (2.52) скористаємось нерівністю (1.10) (яку для зручності читання випишемо ще раз тут)

$$g(t,x,y) \leq N \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d \tag{2.54}$$

з деякою сталою $N > 0$ та твердженнями доведених вище Лем 1.3 та 1.4.

Займемось тепер оцінюванням членів ряду з рівності (2.52). Із співвідношень (2.53) та нерівності (2.54) одержуємо, що

$$0 < g_k(t,x,y) \leq N\|r\| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha}}\, g_{k-1}(t-\tau,z,y)\, d\sigma_z$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \ldots$, де $\|r\| = \sup\limits_{x \in S} r(x)$.

Індукцією по k з допомогою Леми 1.4 доводимо, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 0, 1, 2, \ldots$ справджується нерівність

$$g_k(t,x,y) \leq R_k \frac{t^{1+k(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}}, \tag{2.55}$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 0\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (при $k \geq 1$)

$$R_k = R_{k-1} N K \|r\| \left(B(1-1/\alpha, 2 + (k-1)(1-1/\alpha)) + B(2, k(1-1/\alpha)) \right)$$

з $R_0 = N$, де $N > 0$ — стала з нерівності (2.54), а $K > 0$ — з (1.15).

Таким чином, ряд в рівності (2.52) збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та рівномірно на множині $(t,x,y) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $T > 0$. Звідси робимо висновок, що його сума $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є неперервною функцією, яка задовольняє рівняння (2.51), причому для кожного $T > 0$ існує стала $C_T > 0$ така, що при всіх $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$|\hat{g}(t,x,y)| \leq C_T \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}}. \tag{2.56}$$

Зауваження 1. Функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє також і рівняння

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z) g(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z. \tag{2.57}$$

Це стає зрозумілим, якщо довести, наприклад, за індукцією по k співвідношення

$$g_k(t,x,y) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g_{k-1}(t-\tau,x,z) g(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k = 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що розв'язки кожного з рівнянь (2.51) та (2.57) єдині в класі функцій, які задовольняють нерівність (2.56). Це випливає з того, що оцінка (2.55) при всіх $k \geq 1$ справджується для різниці кожних двох розв'язків кожного із згаданих рівнянь.

В наступному пункті ми встановимо, що функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова, який утворюється з процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ обривом (з інтенсивністю $(r(x))_{x\in S}$) в точках поверхні S.

Формула Фейнмана-Каца та апроксимаційна процедура. При кожному $t > 0$ розглянемо функцію $(f_t(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, що задається рівністю

$$f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau,x,y) r(y)\, d\sigma_y, \tag{2.58}$$

в якій функція $(r(x))_{x\in S}$ та ж, що і в попередньому пункті.

Перевіримо, що функція (2.58) є W-функцією для процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ (див. [16, Ch. 6, §3]). Очевидним є те, що при кожному $t \geq 0$ функція $(f_t(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ вимірна, а при кожному $x \in \mathbb{R}^d$ функція $(f_t(x))_{t\geq 0}$ зростаюча та $f_0(x) \equiv 0$. Користуючись рівністю Колмогорова-Чепмена, одержуємо

$$\mathbb{E}_x f_t(x(s)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,z)\,dz \int_0^t d\tau \int_S g(\tau,z,y)r(y)\,d\sigma_y =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_S r(y) \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,z)g(\tau,z,y)\,dz\,d\sigma_y =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_S g(s+\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y = \int_s^{s+t} d\tau \int_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y =$$

$$= f_{s+t}(x) - f_s(x).$$

Крім того, як потенціал простого шару з обмеженою однорідною в часі густиною, функція $(f_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє нерівність (див. (2.2))

$$f_t(x) \leq Ct^{1-1/\alpha} \tag{2.59}$$

при всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C > 0$. Отже, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} f_t(x) \to 0$ при $t \to 0+$. Тому, відповідно до твердження Теореми 6.6 з [16], існує такий W-функціонал $(\eta_t(r))_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, що $\mathbb{E}_x\eta_t(r) = f_t(x)$ при всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$, де $\mathbb{E}_x$ означає умовне математичне сподівання при умові $x(0) = x$ (тобто, математичне сподівання за мірою $\mathbb{P}_x$).

Нашою метою в цьому пункті є показати, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ справджується співвідношення

$$\mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\eta_t} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{2.60}$$

в якому $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ побудований в попередньому пункті розв'язок рівнянь (2.51) та (2.57).

Для початку апроксимуємо функціонал η_t деякими простішими функціоналами від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$. Для кожних $h>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$ покладемо

$$v_h(x)=\int\limits_S g(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

При фіксованому $h>0$ ця функція є неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}^d$. Визначимо (для фіксованого $h>0$) адитивний функціонал $(\eta_t^{(h)})_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ з допомогою співвідношення $\eta_t^{(h)}=\int\limits_0^t v_h(x(\tau))\,d\tau$. Це — W-функціонал з характеристикою

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(\tau,x,y)v_h(y)\,dy=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(\tau+h,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Після нескладних перетворень одержуємо, що

$$\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}-\mathbb{E}_x\eta_t=\int\limits_t^{t+h} d\tau\int\limits_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y-\int\limits_0^h d\tau\int\limits_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

З нерівності (2.54) та твердження Леми 1.3 при $\theta=\alpha$ випливає, що для кожного $T>0$ при всіх $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $h>0$ справджується нерівність

$$|\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)}-\mathbb{E}_x\eta_t|\leq C_T\frac{\alpha}{\alpha-1}\left((t+h)^{1-1/\alpha}-t^{1-1/\alpha}+h^{1-1/\alpha}\right),$$

де $C_T>0$ — деяка стала. Теорема 6.4 з [16] дозволяє стверджувати, що $\eta_t^{(h)}\to\eta_t$ при $h\to 0+$ в середньому квадратичному при кожному $t>0$. Звідси одержуємо, що для кожної $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ між функціями ($t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$)

$$u^{(h)}(t,x,\varphi)=\mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\eta_t^{(h)}}\ \text{та}\ \hat{u}(t,x,\varphi)=\mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\eta_t}$$

справджується співвідношення $\lim\limits_{h\to 0+}u^{(h)}(t,x,\varphi)=\hat{u}(t,x,\varphi)$ в сенсі поточкової збіжності.

При кожному $h>0$ функція $(u^{(h)}(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$u^{(h)}(t,x,\varphi))=u(t,x,\varphi))-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)u^{(h)}(\tau,y,\varphi))v_h(y)\,dy,\quad(2.61)$$

в якому

$$u(t,x,\varphi)) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy. \qquad (2.62)$$

Перейдемо тепер до границі при $h \to 0+$ в рівнянні (2.61). Зробити це нам допоможе доведена нижче лема.

Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T>0$ виконується $\sup\limits_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < \infty$, розглянемо її перетворення

$$\psi_h(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ h>0.$$

Лема 2.8. *Для даних чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$ та $T > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що нерівність $|\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)| < \varepsilon$ виконується при всіх $h > 0$, $t' \in (0,T]$, $t \in (0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ з властивістю $\sup\limits_{0\leq t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < L$, якщо тільки $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.*

Доведення. Розглянемо при $0 < t < t' \leq T$ та $x' \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ різницю $\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)$, подавши її у вигляді суми двох доданків

$$I_1 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[g(t'-\tau,x',y) - g(t-\tau,x,y)\right]\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy,$$

$$I_2 = \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t'-\tau,x',y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy.$$

Оскільки з нерівностей (2.54) та (1.13) при $\theta = \alpha$ випливає оцінка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)v_h(y)\,dy = \int\limits_S g(h+t,x,z)r(z)\,d\sigma_z \leq \|r\|C(t+h)^{-1/\alpha} \leq \|r\|Ct^{-1/\alpha}$$

з деякою сталою $C > 0$, то $|I_2| \leq const(t'-t)^{1-1/\alpha}$. Це означає, що I_2 може бути зроблений як завгодно малим, якщо тільки малим вибрати $t'-t$.

Візьмемо тепер деяке число $\rho \in (0,t)$ і подамо I_1 у вигляді суми двох інтегралів за змінними (τ, y) від тієї ж підінтегральної функції: перший, I_1', по множині $(0, t-\rho) \times \mathbb{R}^d$, а другий, I_1'', по $(t-\rho, t) \times \mathbb{R}^d$.

Враховуючи доведену вище нерівність, запишемо

$$
\begin{aligned}
&|I_1''| \le \\
&\le L \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t'-\tau, x', y) v_h(y)\, dy + L \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, y) v_h(y)\, dy \le \\
&\le L\|r\| C \int\limits_{t-\rho}^{t} \left[(t'-\tau)^{-1/\alpha} + (t-\tau)^{-1/\alpha} \right] d\tau = \\
&= L\|r\| C \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[(t'-t+\rho)^{1-1/\alpha} - (t'-t)^{1-1/\alpha} + \rho^{1-1/\alpha} \right].
\end{aligned}
$$

Це дозволяє вибрати ρ таким, щоб I_1'' стало достатньо малим рівномірно відносно $t \in (0;T]$, $t' \in (0;T]$ $(t < t')$, $x \in \mathbb{R}^d$, $x' \in \mathbb{R}^d$.

Якщо тепер врахувати, що функція g рівномірно неперервна на множині $[\rho, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $\rho > 0$, то для доведення того, що I_1' можна зробити малим при достатньо малих $t' - t$ та $|x' - x|$, досить довести, що $\sup\limits_{h>0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_h(y)\, dy < \infty$. Але, оскільки

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^d} v_h(y)\, dy = \int\limits_{S} r(z)\, d\sigma_z \le \|r\| |S| < \infty,
$$

то лема доведена. $\square$

З властивостей функції g, як фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (2.19), випливає рівність

$$
\lim_{h \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_h(x)\, dx = \int\limits_{S} \varphi(x) r(x)\, d\sigma, \tag{2.63}
$$

справедлива для будь-якої $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Твердження Леми 2.8 дозволяє вибрати послідовність $h_n \to 0+$, $n \to \infty$ таку, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(h_n)}(t, x, \varphi) = \hat{u}(t, x, \varphi)$ локально рівномірно по $t \ge 0$ та рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$.

З рівності (2.63), використовуючи твердження Леми 2.8, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)u^{(h_n)}(\tau,y,\varphi)v_{h_n}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,y)\hat{u}(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y.$$

Перехід до границі в (2.61) по послідовності h_n при $n\to\infty$ приводить нас до наступного рівняння для функції $\hat{u}$

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) - \int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,y)\hat{u}(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y. \tag{2.64}$$

Це ж рівняння одержиться, якщо домножити обидві частини рівняння (2.51) на $\varphi(y)$ та проінтегрувати їх по $y\in\mathbb{R}^d$. Оскільки обмежений розв'язок рівняння (2.64) єдиний, то

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy \tag{2.65}$$

і рівність (2.60) доведена.

2.2.3.2 Фундаментальний розв'язок.

В цьому пункті розглядатимемо задачу (i) — (iii) в частковому випадку, коли $q(x)\equiv 0$. Тоді умова (iii) матиме вигляд

(v) $\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)u(t,x,\varphi)$,
при $t>0$, $x\in S$.

Теорема 2.9. *Побудована вище функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі* (i), (ii), (v).

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ і доведемо, що функція (2.65), яка є розв'язком рівняння (2.64), задовольняє умови задачі (i), (ii), (v).

У пункті 2.2.3 вже згадувалось, що функція g є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (2.19). Тому функція $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю (2.62), задовольняє рівняння з умови (i) в області $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ та початкову умову (ii) із заданою функцією φ.

Нескладно зрозуміти, що функція

$$Q(t,x,\varphi)=\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,y)\hat{u}(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y,$$

визначена для $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$, є потенціалом простого шару. З його властивостей (див. п. 1.2.2.3) маємо, що функція $(Q(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ при кожній $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умову (i) та при всіх $t>0$, $x\in S$ рівність

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}Q(t,\cdot,\varphi)(x\pm)=\mp r(x)\hat{u}(t,x,\varphi)+\\+\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)\hat{u}(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y.$$

Звідси одержуємо, що функція $(\hat{u}(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, визначена рівністю (2.65), задовольняє умову (v). Очевидна тотожність $Q(0+,x,\varphi)\equiv 0$ завершує доведення теореми. $\square$

2.2.4 Симетрична третя початково-крайова задача з граничною умовою на гіперплощині.

В цьому пункті функція $S=\{x\in\mathbb{R}^d:(x,\nu)=0\}$ з деяким ортом $\nu\in\mathbb{R}^d$, функція q тотожно дорівнює нулю та задана обмежена неперервна функція $(r(x))_{x\in S}$ з невід'ємними значеннями. Нашим завданням є побудова фундаментального розв'язку задачі (i) — (iii) в цьому випадку.

2.2.4.1 Рівняння збурення.

Зауважимо, що для довільної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ визначена рівністю

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.66}$$

має властивість напівгрупи

$$u(s+t,x,\varphi) = u(s,x,u(t,\cdot,\varphi)), \quad s>0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

з оператором $\mathbf{A}$ в якості її генератора.

Нагадаємо, що функція g є щільністю ймовірності переходу симетричного α-стійкого випадкового процесу. Позначимо його $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ або більш коротко $(x(t))_{t\ge 0}$.

Неважко здогадатися, що для отримання напівгрупи, пов'язаної із задачею (i), (ii), (v), ми повинні адитивно збурити генератор $\mathbf{A}$ оператором, чия дія на дану функцію полягає у множенні її на функцію $(r(x)\delta_S(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, де δ_S є узагальненою функцією на $\mathbb{R}^d$, що визначається співвідношенням

$$\langle \delta_S, \psi\rangle = \int\limits_S \psi(x)\,d\sigma, \tag{2.67}$$

яке справджується для кожної пробної функції $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$. Відповідно до теорії збурень (див. [27]), така збурена напівгрупа буде визначатися ядром $\hat{g}(t,x,y)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$, що задовольняє кожне з наступної пари рівнянь

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\hat{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z,\\
\hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z)g(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Побудуємо тепер розв'язок цих рівнянь. Деяка апроксимаційна процедура буде описана після цього.

Застосуємо метод послідовних наближень для побудови розв'язку рівнянь (2.68). Для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $n = 1, 2, \ldots$ покладемо

$$g_n(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z) g_{n-1}(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z, \text{ а } g_0(t,x,y) = g(t,x,y).$$

За індукцією по n можна перевірити, що

$$g_n(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_S g_{n-1}(t-\tau,x,z) g(\tau,z,y) r(z)\, d\sigma_z.$$

Перш за все, одержимо оцінки для g_n, для того, щоб стверджувати, що сума ряду

$$\hat{g}(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n(t,x,y) \tag{2.69}$$

є розв'язком кожного з рівнянь (2.68).

Наш план є таким. Ми встановимо бажані оцінки в області $t > 0$, $x \in S$ та $y \in S$ і тоді, матимемо розв'язок (2.68) в цій області. Як випливає з цих рівнянь, функція $\hat{g}$ однозначно визначається своїми значеннями в області $t > 0$, $x \in S$ та $y \in S$ (навіть тільки в області $t > 0$, $x \in S_+$ та $y \in S_+$, де $S_+ = \{z \in S : r(x) > 0\}$).

Випадок $d = 1$ розглянемо окремо, а тепер нехай $d \geq 2$.

Лема 2.10. *Якщо $d \geq 2$, то справджується наступна оцінка*

$$g_n(t,x,y) \leq \frac{(4C)^n (\Gamma(\theta))^n N^{n+1} \|r\|^n}{\Gamma(2+n\theta)} \frac{t^{n\theta+1}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \tag{2.70}$$

для всіх $t > 0$, $x \in S$, $y \in S$ та $n = 0, 1, 2, \ldots$, де N стала з (1.10), $\theta = 1 - \frac{1}{\alpha}$, $\|r\| = \sup\limits_{x \in S} r(x)$, $C = 2^{d+\alpha} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{dz}{(1+|z|)^{d+\alpha}}$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції по n. Нерівність (2.70) для $n = 0$ збігається з (1.10) і є правильною. Припустимо, що вона правильна для деякого $n \geq 0$. Оцінимо наступний інтеграл для $t > 0$, $x \in S$ та $y \in S$

$$I = \int_0^t d\tau \int_S \frac{t-\tau}{[(t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|]^{d+\alpha}} \frac{\tau^{n\theta+1}}{[\tau^{1/\alpha} + |y-z|]^{d+\alpha}}\, d\sigma_z, \tag{2.71}$$

використовуючи нерівність (1.15) доведену в Лемі 1.4.

Взявши в Лемі 1.4 $\varkappa = \alpha$, $k = \alpha$, $\lambda = (n\theta+1)\alpha$, $l = \alpha$, бачимо, що її умови виконуються, і тому з нерівності (1.15) маємо

$$I \le K\left(B\left(\theta, 2+n\theta\right) + B\left((n+1)\theta, 2\right)\right)\frac{t^{(n+1)\theta+1}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}.$$

Взявши до уваги очевидну нерівність $B(\theta, 2+n\theta) \ge B((n+1)\theta, 2)$, що справджується при всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$ та $0 < \theta < 1$, приходимо до оцінки

$$I \le \frac{4Ct^{(n+1)\theta+1}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}B(2+n\theta, \theta),$$

з якої випливає (2.70). Лема доведена. $\square$

Як випливає з тільки що доведеної леми, сума ряду (2.69) в області $t > 0$, $x \in S$ та $y \in S$ є неперервною функцією $\hat{g}(t, x, y)$, що задовольняє рівняння (2.68) в цій області. Більше того, для кожного $T > 0$ існує додатна стала L_T така, що справджується нерівність

$$\hat{g}(t, x, y) \le L_T\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}} \tag{2.72}$$

для всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$ та $y \in S$. Використовуючи цей результат та друге рівняння в (2.68), можемо розповсюдити функцію $\hat{g}$ на область $t > 0$, $x \in S$ та $y \in \mathbb{R}^d$. Той факт, що ця розповсюджена функція володіє властивістю (2.72), випливає з оцінок подібних на ті, що доводять Лему 2.10 (для $n = 0$). Після цього, з допомогою першого рівняння в (2.68), функція $\hat{g}$ може бути розповсюджена на всю область $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ і одержана функція $\hat{g}$ задовольнятиме нерівність (2.72) для всіх $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in \mathbb{R}^d$ з деякою додатною сталою L_T скінченною при $T > 0$.

Зауважимо, що розв'язок кожного з рівнянь (2.68), який задовольняє (2.72), єдиний. Це твердження випливає з Леми 2.10, оскільки оцінка (2.70) при всіх $n = 0, 1, 2\ldots$ справджується для різниці між кожними двома такими розв'язками.

Функція $\hat{g}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$, утвореного з процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ убиванням в деякий момент зупинки ζ. Ясно, що

$$\mathbb{P}_x(\{\zeta > t\}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

З другого рівняння в (2.68) одержуємо

$$\mathbb{P}_x(\{\zeta > t\}) = 1 - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Тому, щільність розподілу ζ задається рівністю

$$-\frac{d}{dt}\mathbb{P}_x(\{\zeta > t\}) = \int\limits_S g(t,x,y)r(y)\,d\sigma_y$$

Випадок $\mathbf{d=1}$. В цьому випадку рівняння (2.68) можуть бути переписані наступним чином

$$\begin{aligned} \hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) - r\int\limits_0^t g(t-\tau,x,0)\hat{g}(\tau,0,y)\,d\tau, \\ \hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) - r\int\limits_0^t \hat{g}(t-\tau,x,0)g(\tau,0,y)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.73}$$

де r деяке невід'ємне число. Індукцією по n, одержуємо ($\theta = 1-\frac{1}{\alpha}$)

$$g_n(t,0,0) = \frac{(\alpha c^{1/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha})^{-n-1}}{\Gamma((n+1)\theta)}t^{-\frac{1}{\alpha}+n\theta}, \quad t>0,\ n=0,1,\ldots$$

Отже,

$$\hat{g}(t,0,0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-r)^n\frac{(\alpha c^{1/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha})^{-n-1}}{\Gamma((n+1)\theta)}t^{-\frac{1}{\alpha}+n\theta}.$$

Маючи $\hat{g}(t,0,0)$, знаходимо $\hat{g}(t,x,0)$ з першого рівняння в (2.73)

$$\hat{g}(t,x,0) = g(t,x,0) - r\int\limits_0^t g(t-\tau,x,0)\hat{g}(\tau,0,0)\,d\tau$$

і після цього, функція $\hat{g}(t,x,y)$ виражається з другого рівняння в (2.73)

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - r\int\limits_0^t \hat{g}(t-\tau,x,0)g(\tau,0,y)\,d\tau.$$

Якщо покласти

$$G(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g(t,x,y)\,dt, \quad \hat{G}(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\hat{g}(t,x,y)\,dt$$

для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$, то прийдемо до формули

$$\begin{aligned}\hat{G}(\lambda,x,y) = G(\lambda,x,y) - \frac{G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)}{\hat{G}(\lambda,0,0)} + \\ + \frac{1}{1+rG(\lambda,0,0)}\frac{G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)}{\hat{G}(\lambda,0,0)}.\end{aligned} \tag{2.74}$$

Деякі цікаві наслідки цієї формули можна буде знайти в розділі 4.

Як і в багатовимірному випадку, функція $\hat{g}$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$, утвореного з процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ убиванням в початку координат. Формула (2.74) задає резольвентне ядро цього процесу.

2.2.4.2 Апроксимаційна процедура.

Апроксимуємо тепер узагальнену функцію $(r(x)\delta_S(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ регулярними функціями $(v_h(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ при $h \to 0+$, задавши

$$v_h(x) = \int\limits_S g(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ h > 0.$$

Досить просто перевірити правильність співвідношення

$$\lim_{h\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d} v_h(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_S r(x)\varphi(x)\,d\sigma \tag{2.75}$$

для кожної неперервної з компактним носієм функції φ. Іншими словами $\lim\limits_{h\to 0+} v_h(x) = r(x)\delta_S(x)$.

Нехай $u^{(h)}(t,x,\varphi)$, $h>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ є розв'язком наступної задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^{(h)}}{\partial t}=\mathbf{A}u^{(h)}-v_h(x)u^{(h)}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ u^{(h)}(0+,x,\varphi)=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.\end{cases} \tag{2.76}$$

Як випливає з основних положень теорії збурень, розв'язок цієї задачі повинен задовольняти інтегральне рівняння

$$u^{(h)}(t,x,\varphi)=u(t,x,\varphi)-\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)u^{(h)}(\tau,y,\varphi)v_h(y)\,dy, \tag{2.77}$$

в якому функція u визначається рівністю (2.66).

Метод послідовних наближень дозволяє побудувати розв'язок цього рівняння. Покладемо $u_0^{(h)}(t,x,\varphi)=u(t,x,\varphi)$ і для $k\geq 1$

$$u_k^{(h)}(t,x,\varphi)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)u_{k-1}^{(h)}(\tau,y,\varphi)v_h(y)\,dy.$$

Як випливає з (2.9),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)v_h(y)\,dy=\int_S g(t-\tau+h,x,z)r(z)\,d\sigma_z\leq\\ \leq\|r\|N(t-\tau+h)^{-1/\alpha}\leq\|r\|N(t-\tau)^{-1/\alpha}.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Використовуючи цю оцінку, з допомогою індукції по k одержуємо наступну нерівність

$$|u_k^{(h)}(t,x,\varphi)|\leq\frac{\|\varphi\|(N\|r\|\Gamma(\theta))^k}{\Gamma(k\theta+1)}t^{k\theta}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ h>0,\ k=0,1,\ldots,$$

де $\theta=1-\frac{1}{\alpha}$, як і вище. Тому, сума ряду

$$u^{(h)}(t,x,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k^{(h)}(t,x,\varphi)$$

є розв'язком рівняння (2.77), який задовольняє умову

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}|u^{(h)}(t,x,\varphi)|<\infty$$

для всіх $T > 0$. Такий розв'язок єдиний.

Принцип максимуму для рівняння в (2.76) дозволяє стверджувати, що значення функції $u^{(h)}$ є невід'ємними, якщо тільки такими є значення функції φ.

Тепер перейдемо до границі при $h \to 0+$ у рівнянні (2.77). Щоб зробити це нам знадобиться деяке допоміжне твердження.

Нехай вимірна комплекснозначна функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ така, що

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| < \infty$$

для всіх $T > 0$. Розглянемо її перетворення ψ_h для $h > 0$, що задається рівністю

$$\psi_h(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, y)\psi(\tau, y)v_h(y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Наступні леми стверджують, що це перетворення в деякому розумінні компактне. Розглянемо окремо випадки $d \geq 2$ і $d = 1$. Як і вище, будемо позначати $B_R = \{y \in \mathbb{R}^d : |y| \leq R\}$ для $R > 0$ та $B_R^C = \mathbb{R}^d \setminus B_R$.

Лема 2.11. *Якщо $d \geq 2$, то для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $T > 0$ та $R > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність*

$$|\psi_h(t', x') - \psi_h(t,x)| < \varepsilon$$

справджується при всіх $h > 0$, $t \in [0,T]$, $t' \in [0,T]$, $x \in B_R$, $x' \in B_R$ та всіх вимірних функціях $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$, що володіють властивістю

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| \leq L,$$

якщо тільки виконується нерівність $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.

Доведення. Для довільних $t < t'$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $x' \in \mathbb{R}^d$ представимо різницю $\psi_h(t', x') - \psi_h(t,x)$ у вигляді суми двох доданків I_1 та I_2, де

$$I_1 = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} [g(t'-\tau, x', y) - g(t-\tau, x, y)]\psi(\tau, y)v_h(y)\, dy,$$

$$I_2 = \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t'-\tau, x', y)\psi(\tau, y)v_h(y)\,dy.$$

Нерівність (2.78) приводить до оцінки (нагадаємо, що $\|r\| = \sup\limits_{x\in S} r(x)$)

$$|I_2| \le L \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t'-\tau, x', y)v_h(y)\,dy \le \frac{L\|r\|N}{\theta}(t'-t)^{\theta}$$

і тому $I_2 \to 0$ рівномірно відносно $h > 0$ та $x' \in \mathbb{R}^d$, якщо $t' - t \to 0$.

Інтеграл I_1 подамо у вигляді суми $I_1 = I_1' + I_1''$, де

$$I_1' = 1\!\!1_{\{t>\gamma\}} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} [g(t'-\tau, x', y) - g(t-\tau, x, y)]\psi(\tau, y)v_h(y)\,dy.$$

Оскільки при $0 < \gamma < t < t' \le T$ та $x' \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \int\limits_{t-\gamma}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t'-\tau, x', y)\psi(\tau, y)v_h(y)\,dy \right| \le$$

$$\le L\|r\| \int\limits_0^{\gamma} d\tau \int\limits_S g(t'-t+\tau+h, x', y)\,d\sigma_y \le L\|r\|N\frac{\gamma^{\theta}}{\theta},$$

то $|I_1''| \le const[(t'-t)^{\theta} + \gamma^{\theta}]$ (стала $const$ залежить тільки від L, N, $\|r\|$, c та α). Отже, I_1'' стає достатньо малим, якщо $t' - t$ та $\gamma > 0$ вибрати малими.

Для оцінювання I_1' при фіксованому $\gamma > 0$, використаємо рівномірну неперервність функції g, відносно аргументів $(t, x, y) \in [\gamma, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ для кожного $\gamma > 0$. Треба лише враховувати, що функція v_h може бути не інтегровною в цілому $\mathbb{R}^d$ (так буде у випадку, якщо функція $(r(y))_{y\in S}$ неінтегровна по S).

Отже, покладемо

$$J_Q^{(h)}(\tau, x) = \int\limits_{B_Q^C} g(\tau, x, y)v_h(y)\,dy$$

при $h > 0$, $Q > 0$, $\tau \in (0,T]$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Використовуючи нерівність (1.10), можемо записати при $x \in B_R$ та $Q > R$

$$\begin{aligned} J_Q^{(h)}(\tau,x) \leq & N \int\limits_{B_Q^C} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} v_h(y)\,dy \leq \\ \leq & N \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |y-x|/2 + (Q-R)/2)^{d+\alpha}} v_h(y)\,dy. \end{aligned}$$

Відповідно до (2.9) маємо

$$v_h(y) \leq N\|r\| \frac{h}{(h^{1/\alpha} + |(y,\nu)|)^{\alpha+1}}, \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.79}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & J_Q^{(h)}(\tau,x) \leq \\ & \leq N^2\|r\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h\,d\rho}{(h^{1/\alpha} + |\rho|)^{\alpha+1}} \int\limits_{\{(y,\nu)=\rho\}} \frac{\tau\,d\sigma_y}{(\tau^{1/\alpha} + |y-x|/2 + (Q-R)/2)^{d+\alpha}}. \end{aligned}$$

Взявши до уваги, що при $y \in \{z \in \mathbb{R}^d : (z,\nu) = \rho\}$ та $x \in \mathbb{R}^d$ справджується нерівність $|y-x| \geq |\tilde{y} - \tilde{x}|$ (нагадаємо, що $\tilde{z}$ означає ортогональну проекцію z на S), приходимо до нерівностей

$$\begin{aligned} & J_Q^{(h)}(\tau,x) \leq \\ & \leq N^2\|r\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{(1 + |\rho|)^{\alpha+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\tau\,dz}{(\tau^{1/\alpha} + |z|/2 + (Q-R)/2)^{d+\alpha}} \leq \\ & \leq \frac{2^{d+\alpha+1}}{\alpha} N^2\|r\|\tau(Q-R)^{-\alpha-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{dz}{(1+|z|)^{d+\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми довели, що рівномірно відносно $h > 0$ та $(t,x) \in [0,T] \times B_R$, виконується співвідношення

$$\int\limits_0^t J_Q^{(h)}(\tau,x)\,d\tau \to 0, \text{ при } Q \to \infty.$$

Залишається тепер показати, що для фіксованих $\gamma > 0$ та $Q > 0$ інтеграл

$$\mathbb{1}_{\{t>\gamma\}} \int_0^{t-\gamma} d\tau \int_{B_Q} [g(t'-\tau, x', y) - g(t-\tau, x, y)]\psi(\tau, y) v_h(y)\, dy$$

стає достатньо малим, якщо точки $(t', x') \in [0, T] \times B_R$, $(t, x) \in [0, T] \times B_R$ вибрані достатньо близькими одна до одної. Вище було зазначено, що функція g рівномірно неперервна на множині $[\gamma, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, отже, бажане твердження буде доведено, якщо ми покажемо, що

$$\sup_{h>0} \int_{B_Q} v_h(y)\, dy < \infty$$

при фіксованому $Q > 0$. Використовуючи (2.79), можемо написати нерівність

$$\int_{B_Q} v_h(y)\, dy \leq N\|r\| \int_{-Q}^{Q} \frac{h\, d\rho}{(h^{1/\alpha} + |\rho|)^{\alpha+1}} \int_{B_Q \cap \{(y,\nu)=\rho\}} d\sigma_y.$$

Ясно, що

$$\int_{B_Q \cap \{(y,\nu)=\rho\}} d\sigma_y \leq \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)} Q^{d-1},$$

$$\int_{-Q}^{Q} \frac{h\, d\rho}{(h^{1/\alpha} + |\rho|)^{\alpha+1}} = \frac{2}{\alpha}\left(1 - \left(1 + Qh^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}\right).$$

Отже,

$$\int_{B_Q} v_h(y)\, dy \leq \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\alpha\Gamma((d+1)/2)} N\|r\| Q^{d-1}. \tag{2.80}$$

Цим закінчується доведення леми. □

У випадку $d = 1$ може бути встановлений наступний посилений варіант Леми 2.11.

Лема 2.12. *Якщо $d = 1$, тоді для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$ та $T > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність*

$$|\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)| < \varepsilon$$

виконується при всіх $h > 0$, $t \in [0,T]$, $t' \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ *та всіх вимірних функціях* $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$, *що задовольняють нерівність*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |\psi(t,x)| \leq L,$$

якщо тільки справджується нерівність $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.

Доведення. В даній ситуації маємо $v_h(y) = r\cdot g(h,y,0)$ при $y \in \mathbb{R}$ (див. попередні міркування до Леми 2.10). Тому використовуючи позначення з доведення Леми 2.11, можемо записати

$$|I_2| \leq L \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} g(t'-\tau, x', y) v_h(y)\, dy = Lr \int\limits_t^{t'} g(t'+h-\tau, x', 0)\, d\tau \leq$$

$$\leq LrN \int\limits_t^{t'} (t'+h-\tau)^{-1/\alpha}\, d\tau \leq LrN \int\limits_t^{t'} (t'-\tau)^{-1/\alpha}\, d\tau \leq \frac{LrN}{\theta}(t'-t)^{\theta}.$$

Аналогічно

$$|I_1''| \leq L \int\limits_{t-\gamma}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} (g(t'-\tau, x', y) + g(t-\tau, x, y)) v_h(y)\, dy =$$

$$= Lr \int\limits_{t-\gamma}^{t} (g(t'+h-\tau, x', 0) + g(t+h-\tau, x, 0))\, d\tau \leq$$

$$\leq LrN \int\limits_{t-\gamma}^{t} \left((t'+h-\tau)^{-1/\alpha} + (t+h-\tau)^{-1/\alpha} \right) d\tau \leq$$

$$\leq LrN \int\limits_{t-\gamma}^{t} \left((t'-\tau)^{-1/\alpha} + (t-\tau)^{-1/\alpha} \right) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{LrN}{\theta} \left((t'-t+\gamma)^{\theta} - (t'-t)^{\theta} + \gamma^{\theta} \right).$$

Вибором малих $\gamma > 0$ і $t'-t$ можна зроботи як завгодно малими I_2 та I_1''. При вже вибраному γ, враховуючи, що $\int\limits_{\mathbb{R}} v_h(y)\, dy = r$ та рівномірну неперервність функції g на множинах виду $[\gamma, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, одержуємо, що малим буде і вираз I_1'. Лема доведена. □

Тепер можемо перейти до границі при $h \to 0+$ в рівнянні (2.77). Перш за все, використовуючи діагональний метод, можемо вибрати послідовність $h_n \to 0+$ таким чином, що $u^{(h_n)}(t,x,\varphi)$ збігається до функції $u(t,x,\varphi)$ локально рівномірно відносно $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Тоді з (2.75) випливає рівняння для граничної функції $\hat{u}$

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) - \int_0^t \int_S g(t-\tau,x,y)\hat{u}(\tau,y,\varphi)r(y)\,d\sigma_y. \tag{2.81}$$

Зауважимо, що оцінки для $u_k^{(h)}$, $k = 0,1,2,\ldots$, рівномірні відносно $h > 0$. Тому граничне рівняння (2.81) може бути розв'язане так само, як і рівняння для $u^{(h)}$. Відповідно, можемо стверджувати, що розв'язок рівняння (2.81), який має наступну властивість $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} |\hat{u}(t,x,\varphi)| < \infty$ при всіх $T > 0$, єдиний. Це означає, по перше, що $\lim\limits_{h\to 0+} u^{(h)}(t,x,\varphi) = \hat{u}(t,x,\varphi)$ та, по друге, що значення функції $(\hat{u}(t,x,\varphi))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ невід'ємні, якщо тільки $\varphi(x) \geq 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^d$.

Тепер зауважимо, що рівняння (2.81) може бути одержане множенням першого з рівнянь (2.68) на $\varphi(y)$ ($\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$) та інтегруванням обох частин його по $y \in \mathbb{R}^d$. Це означає, що для $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.82}$$

Як наслідок, маємо, що функція $\hat{g}$ приймає тільки невід'ємні значення.

З точки зору теорії випадкових процесів функція $f_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, що визначається рівністю

$$f_t(x) = \int_0^t d\tau \int_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y,$$

є W-функцією для цього процесу, яка задовольняє умову $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} f_t(x) \to 0$, при $t \to 0+$ (див. (2.9)). Відповідно до Теореми 6.6 з [16], існує W-функціонал $(\eta_t(r))_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ такий, що $f_t(x) = \mathbb{E}_x\eta_t(r)$ при всіх $t > 0$ та

$x \in \mathbb{R}^d$. При $r_0(x) \equiv 1$ позначимо $\eta_t = \eta_t(r_0)$, $t \geq 0$. Функціонал $(\eta_t)_{t\geq 0}$ називається локальним часом на поверхні S процесу $(x(t))_{t\geq 0}$. Ясно, що

$$\eta_t(r) = \int_0^t r(x(s))\, d\eta_s, \quad t \geq 0.$$

Для $h > 0$, покладемо

$$\eta_t^{(h)}(r) = \int_0^t v_h(x(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

де v_h визначена в підпункті 2.2.4.2. Досить прості викладки показують, що

$$\mathbb{E}_x \eta_t^{(h)}(r) = \int_h^{t+h} d\tau \int_S g(\tau, x, y) r(y)\, d\sigma_y, \quad t \geq 0,\ h > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Це приводить до оцінки

$$\left| \mathbb{E}_x \eta_t^{(h)}(r) - \mathbb{E}_x \eta_t(r) \right| \leq \|r\| N \left[(t+h)^{1-1/\alpha} - t^{1-1/\alpha} + h^{1-1/\alpha} \right],$$

що справджується при всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $h > 0$. Застосовуючи Теорему 6.4 з [16], одержуємо співвідношення

$$\lim_{h \to 0+} \eta_t^{(h)}(r) = \eta_t(r) \tag{2.83}$$

в сенсі середньоквадратичної збіжності. Функції $\hat{u}$ та $u^{(h)}$ введені в пункті 2.2.4 мають наступний ймовірнісний зміст

$$u^{(h)}(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x \left(\varphi(x(t)) e^{-\eta_t^{(h)}(r)} \right), \quad \hat{u}(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x \left(\varphi(x(t)) e^{-\eta_t(r)} \right).$$

Співвідношення (2.83) приводить до поточкової збіжності

$$\hat{u}(t, x, \varphi) = \lim_{h \to 0+} u^{(h)}(t, x, \varphi). \tag{2.84}$$

Той факт, що функція $u^{(h)}$ є розв'язком рівняння (2.77), є наслідком формули Фейнмана-Каца. Лема 2.11 дозволяє стверджувати, що збіжність в (2.84) локально рівномірна відносно $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ (якщо $d = 1$ ця збіжність рівномірна відносно $x \in \mathbb{R}$ згідно твердження Леми 2.12). Остаточно, маємо наступне ймовірнісне представлення функції $\hat{u}$

$$\hat{u}(t, x, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y)\varphi(y)\, dy = \mathbb{E}_x \left(\varphi(x(t)) e^{-\eta_t(r)} \right), \tag{2.85}$$

що справджується при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

З рівняння (2.81) та підпунктів 2.1.2.1, 2.1.2.2 випливає, що для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ функція $(\hat{u}(t, x, \varphi))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє умови (i) та (ii). Крім того, справджуються рівності

$$\mathbf{B}_\nu \hat{u}(t, \cdot, \varphi)(x\pm) = u^\nu(t, x, \varphi) \pm r(x)\hat{u}(t, x, \varphi)$$

при всіх $t > 0$ та $x \in S$. Тоді

$$\frac{1}{2}\mathbf{B}_\nu \hat{u}(t, \cdot, \varphi)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_\nu \hat{u}(t, \cdot, \varphi)(x-) = r(x)\hat{u}(t, x, \varphi), \quad t > 0,\ x \in S,$$

тобто справджується умова (v).

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 2.13. *Функція $\hat{g}$, що є сумою ряду* (2.69), *є фундаментальним розв'язком симетричної початково-крайової задачі* (i), (ii), (v).

2.2.5 Загальна третя початково-крайова задача з граничною умовою на обмеженій замкненій поверхні.

В цьому пункті розглянемо загальну третю початково-крайову задачу (i) — (iii) сформульовану вище. Фундаментальний розв'язок цієї задачі будуватимемо як спільний розв'язок пари рівнянь ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \tilde{g}(t-\tau, x, z) g^*(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{2.86}$$

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^*(t-\tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{2.87}$$

в яких функція $(\tilde g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ — та ж, що її визначено в пункті 2.2.1.2.

Зауважимо, що рівняння (2.86), (2.87) досить розв'язувати на множині $(t,x,y)\in(0,\infty)\times S\times S$. Тоді співвідношення (2.87) продовжить одержаний розв'язок на множину $(t,x,y)\in(0,\infty)\times S\times\mathbb{R}^d$, а (2.86) — на множину $(t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$

Спільний розв'язок рівнянь (2.86), (2.87) шукаємо у вигляді суми ряду

$$g^*(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g_k^*(t,x,y), \tag{2.88}$$

де $g_0^*(t,x,y)=\tilde g(t,x,y)$, а при $k\geq 1$

$$\begin{aligned} g_k^*(t,x,y)&=\int_0^t d\tau\int_S \tilde g(t-\tau,x,z)g_{k-1}^*(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z=\\ &=\int_0^t d\tau\int_S g_{k-1}^*(t-\tau,x,z)\tilde g(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Справедливість другої рівності доводиться індукцією по k з допомогою доведених нижче оцінок.

Співвідношення (2.29), нерівності (2.54), (2.39) та твердження Леми 1.4 приводять нас до оцінки

$$|\tilde g(t,x,y)|\leq C_T\frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

яка правильна при всіх $t\in(0,T]$, $x\in S$, $y\in S$ для кожного $T>0$ з деякою сталою $C_T>0$.

З допомогою індукції по k встановлюємо справедливість нерівностей для кожних $k\geq 0$, $T>0$

$$|g_k^*(t,x,y)|\leq R_k\frac{t^{(k+1)(1-1/\alpha)}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}},\quad t\in(0,T],\ x\in S,\ y\in S, \tag{2.89}$$

де числова послідовність $\{R_k:k\geq 0\}$ задається співвідношеннями $R_0=C_T$ та при $k\geq 1$ $R_k=K\left(B\left(1-\frac{1}{\alpha},1+k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)+B\left(2-\frac{1}{\alpha},k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)R_{k-1}$, в яких $C_T>0$, $K>0$ — деякі сталі (перша можливо залежить від T).

З оцінок (2.89) випливає, що ряд у співвідношенні (2.88) збігається абсолютно при $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$ та рівномірно по $(x, y) \in S \times S$ і локально рівномірно по $t > 0$. Його сума $(g^*(t, x, y))_{t>0, x\in S, y\in S}$ задовольняє рівняння (2.86), (2.87) на множині $(t, x, y) \in (0, \infty) \times S \times S$. Крім того, справджується оцінка

$$|g^*(t, x, y)| \le C_T \frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha-1}} \tag{2.90}$$

при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$, $y \in S$ для кожного $T > 0$ з деякою сталою $C_T > 0$. Рівності (2.86), (2.87) продовжують функцію g^* на множину $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ зі збереженням справедливості нерівності (2.90). Тут знову нам стала в нагоді Лема 1.4.

Для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}_d)$ покладемо

$$u^*(t, x, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^*(t, x, y)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.91}$$

З рівняння (2.86) випливає співвідношення

$$\begin{aligned} u^*(t, x, \varphi) =& \tilde{u}(t, x, \varphi) - \\ &- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) u^*(\tau, z, \varphi) r(z)\, d\sigma_z, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{2.92}$$

де $\tilde{u}(t, x, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t, x, y)\varphi(y)\, dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Функція $\tilde{u}$ задовольняє умови (i), (ii) та умову (iii) з функцією $r(x) \equiv 0$.

Позначимо інтеграл в правій частині (2.92) через $(K(t, x))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$. Для нього справджується представлення

$$K(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t - \tau, x, z) k(\tau, z, \varphi)\, d\sigma_z,$$

в якому

$$k(t, x, \varphi) = r(x) u^*(t, x, \varphi) + q(x) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S w(\tau, x, z) u^*(t - \tau, z, \varphi) r(z)\, d\sigma_z,$$

де функція w визначена в 2.2.1.2

Лема 2.14. *Функція* $(k(t,x,\varphi))_{t>0,x\in S}$ *при кожній* $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ *належить до класу* $\mathbb{U}$.

Доведення. Дійсно, з допомогою рівності (2.91) та безпосередніх обчислень приходимо до нерівності

$$|u^*(t,x,\varphi)|\le\|\varphi\|C_T\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1}}\,dy\le\hat{C}_T,$$

а вже звідси випливає, що $|r(x)u^*(t,x,\varphi)|\le\hat{C}_T\|r\|$, та внаслідок Леми 1.3 при $\theta=\alpha-1-\gamma$

$$\left|q(x)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S w(\tau,x,z)u^*(t-\tau,z,\varphi)\;r(z)\,d\sigma_z\right|\le$$
$$\le\|q\|\|r\|\hat{C}_T\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S\frac{d\sigma_z}{(\tau^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}\le\tilde{C}_T t^{\gamma/\alpha}$$

при всіх $t\in(0,T]$, $x\in S$ для кожного $T>0$ з деякими сталими $\hat{C}_T>0$, $\tilde{C}_T>0$. Неперервність функції k на $(0,\infty)\times S$ очевидна. $\square$

Використовуючи твердження теореми про стрибок, одержуємо

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}K(t,\cdot)(x\pm)=$$
$$=\mp r(x)u^*(t,x,\varphi)\mp q(x)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S w(\tau,x,z)u^*(t-\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)k(\tau,z,\varphi)\,d\sigma_z.$$

Тому, враховуючи (2.32), приходимо до співвідношення (при всіх $t>0$, $x\in S$)

$$\frac{1+q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}K(t,\cdot)(x+)-\frac{1-q(x)}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}K(t,\cdot)(x-)=$$

$$=-r(x)u^*(t,x,\varphi)-q(x)\int_0^t d\tau\int_S w(\tau,x,z)u^*(t-\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z+$$

$$+q(x)\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)k(\tau,z,\varphi)\,d\sigma_z=$$

$$=-r(x)u^*(t,x,\varphi)+q(x)\int_0^t d\tau\int_S u^*(t-\tau,z,\varphi)r(z)h(\tau,x,z)\,d\sigma_z=$$

$$=-r(x)u^*(t,x,\varphi),$$

де $h(\tau,x,z)=-w(\tau,x,z)+g^{\nu(x)}(\tau,x,z)+$

$$+\int_0^\tau d\rho\int_S g^{\nu(x)}(\tau-\rho,x,y)w(\rho,y,z)q(y)\,d\sigma_y\equiv 0.$$

Таким чином, функція $(u^*(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, задана співвідношенням (2.91), задовольняє умову (iii). Потенціал простого шару K задовольняє умову (i) та нульову початкову умову. Отже, ми одержали наступне твердження.

Теорема 2.15. *Функція* $(g^*(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$*, задана рівністю* (2.88)*, є фундаментальним розв'язком задачі* (i) — (iii).

2.2.6 Загальна третя початково-крайова задача з граничною умовою на гіперплощині.

Нехай тепер S — гіперплощина, що задається рівнянням $(x,\nu)=0$ з деяким ортом $\nu\in\mathbb{R}^d$.

2.2.6.1 Рівняння збурення.

Функція $\tilde{g}(t,x,y)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$ побудована в пункті 2.2.2.1. За аналогією до рівнянь (2.68) запишемо ці рівняння, замінивши функцію g на

$\tilde{g}$. Функцію, яка буде шукатися, позначатимемо через g^*. Взявши до уваги співвідношення (2.44) та той факт, що

$$\lim_{h\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tilde{g}(t,x,y)v_h(y)\,dy=\int\limits_S g(t,x,y)r(y)\,d\sigma_y,$$

де, як і вище, $v_h(x)=\int\limits_S g(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y$, $x\in\mathbb{R}^d$, одержимо наступну пару рівнянь

$$\begin{aligned} g^*(t,x,y)&=\tilde{g}(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \tilde{g}(t-\tau,x,z)g^*(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z,\\ g^*(t,x,y)&=\tilde{g}(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^*(t-\tau,x,z)\tilde{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \end{aligned}\tag{2.93}$$

При $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$, як доведено в пункті 2.2.2.1, маємо $\tilde{g}(t,x,y)=g(t,x,y)$, і перше рівняння в цьому випадку може бути записане наступним чином

$$g^*(t,x,y)=g(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g^*(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z.\tag{2.94}$$

Це приводить до рівності $g^*(t,x,y)=\hat{g}(t,x,y)$ при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$. Функція $\hat{g}$ побудована в пункті 2.2.4.1. З другого рівняння одержуємо наступну формулу для g^*

$$g^*(t,x,y)=\tilde{g}(t,x,y)-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z)\tilde{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z,\tag{2.95}$$

що справджується при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$. Вона дає представлення для функції g^* через $\tilde{g}$ та, побудовану вище, функцію $\hat{g}$. Дуальне представлення може бути одержане з (2.95) та другого рівняння в (2.68):

$$g^*(t,x,y)=\hat{g}(t,x,y)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z)g^{\nu}(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z.\tag{2.96}$$

Наслідком (2.96) є рівність $g^*(t,x,y\pm) = (1 \pm q(y))\hat{g}(t,x,y)$ правильна при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $y \in S$.

Зауважимо, що функція $\tilde{g}$ не може бути щільністю ймовірності переходу жодного процесу Маркова, оскільки її значення не є невід'ємними при всіх значеннях її аргументів. Але її можна розглядати такою для псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$ в розумінні [5] і, тому, функція g^* повинна бути пов'язана з цим псевдопроцесом за аналогією з (2.85) так, що

$$u^*(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^*(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}^*_x\left(\varphi(y(t))e^{-\eta^*_t(r)}\right), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де $\mathbb{E}^*_x$ позначає "математичне сподівання" відносно псевдопроцесу та $(\eta^*_t(r))_{t\geq 0}$ позначає деякий "адитивний функціонал від псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$". Зокрема,

$$\mathbb{E}^*_x e^{-\eta^*_t(r)} = \int_{\mathbb{R}^d} g^*(t,x,y)\,dy = 1 - \int_0^t d\tau \int_S \hat{g}(\tau,x,z)r(z)\,d\sigma_z,$$

як випливає з (2.95). Іншими словами, "функція розподілу" величини $\eta^*_t(r)$ є такою ж як і функція розподілу величини $\eta_t(r)$ (див. п. 2.2.4.2, с. 137).

2.2.6.2 Початково-крайова задача.

Для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та заданої функції $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$u^*(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g^*(t,x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Теорема 2.16. *Функція u^* є розв'язком початково-крайової задачі* (i) — (iii).

Доведення. Домноживши обидві сторони рівності (2.94) на $\varphi(y)$ та зінтегрувавши відносно $y \in \mathbb{R}^d$, одержимо наступне рівняння для функції u^*

$$u^*(t,x,\varphi) = \tilde{u}(t,x,\varphi) - \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)u^*(\tau,z,\varphi)r(z)\,d\sigma_z. \qquad (2.97)$$

Як було встановлено у пункті 2.2.2.1, функція $\tilde{u}$ задовольняє умови (i), (ii) та граничну умову (iii) з $r(x) \equiv 0$. Покладемо для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$

$$v(t, x, \varphi) = \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) u^*(\tau, z, \varphi) r(z)\, d\sigma_z.$$

Це потенціал простого шару. Він задовольняє умову (i) та початкову умову $v(0+, x, \varphi) \equiv 0$. Результати пункту 2.1.2.2 дозволяють стверджувати, що v має властивість

$$\mathbf{B}_\nu v(t, \cdot, \varphi)(x\pm) = \mp r(x) u^*(t, x, \varphi)$$

при всіх $t > 0$ та $x \in S$. Цим і завершується доведення теореми. $\square$

Зауваження 2.3. Функція g^*, визначена рівністю (2.95) або (2.96), є фундаментальним розв'язком задачі (i) — (iii).

2.3 Симетричні α-стійкі випадкові процеси з липучою мембраною на поверхні.

Нехай $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ стандартний процес Маркова в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, чия щільність ймовірності переходу g (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^d$) задається рівністю (1.9) де $c > 0$ та $\alpha \in (1, 2)$ фіксовані параметри.

Нехай S — задана поверхня в $\mathbb{R}^d$ одного з видів: обмежена замкнена поверхня поверхня, що належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деякою сталою $\gamma \in (0, 1)$ або гіперплощина. Одиничний вектор зовнішньої нормалі до S в точці $x \in S$ позначатиметься $\nu(x)$ (у випадку гіперплощини $\nu(x) = \nu$ — це одиничний вектор нормалі до однієї з її сторін).

Нехай задана неперервна функція $(p(x))_{x \in S}$ з додатними значеннями.

Нагадаємо, що $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ означає банахів простір всіх неперервних обмежених дійснозначних функцій на $\mathbb{R}^d$ з нормою $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$. Нехай $\mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$ означає підмножину $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, що містить гельдерові функції з яким-небудь порядком $0 < \theta < 1$.

Для даної $\varphi \in \mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$ розглянемо задачу побудови неперервної функції $(u(t,x))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що задовольняє

(i) рівняння $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x)$ в області $t>0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$;

(ii) початкову умову $u(0+,x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^d$;

(iii) граничну умову (рівняння на границі)
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2p(x)} \left[\mathbf{B}_{\nu(x)} u(t,\cdot)(x+) - \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t,\cdot)(x-)\right]$$
при всіх $t>0$ та $x \in S$.

Нагадаємо, що для функції $(f(y))_{y\in\mathbb{R}^d}$ символ $f(x+)$ (відповідно, $f(x-)$) для $x \in S$ означає границю значень $f(y)$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, що лежить в довільному конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною x такому, що $\mathcal{K} \subset \{y \in \mathbb{R}^d : (y, \nu(x)) > 0\} \cup \{x\}$ (відповідно, $\mathcal{K} \subset \{y \in \mathbb{R}^d : (y,\nu(x)) < 0\} \cup \{x\}$).

В граничному випадку $\alpha = 2$ (та $c = \frac{1}{2}$), наш процес є стандартним броунівським рухом, оператор $\mathbf{A}$ збігається з $\frac{1}{2}\Delta$ (Δ оператор Лапласа), а $\mathbf{B}_l$ — з $\frac{\partial}{\partial l}$ (похідна в напрямі l). Розв'язок задачі (i) — (iii), добре відомий (деякі результати такого типу можна знайти в книгах [16,21], а також в роботах [2,3,31] та багатьох інших).

Додатково розглянемо задачу побудови такої функції $(U(\lambda, x, \varphi))_{\lambda>0, x\in\mathbb{R}^d}$, яка є неперервною та задовольняє наступні рівності

(I) $\lambda U(\lambda,x,\varphi) - \varphi(x) = \mathbf{A}U(\lambda,\cdot,\varphi)(x)$ для всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$;

(II) $\lambda U(\lambda,x,\varphi) - \varphi(x) = \dfrac{1}{2p(x)} \left[\mathbf{B}_{\nu(x)} U(\lambda,\cdot,\varphi)(x+) - \mathbf{B}_{\nu(x)} U(\lambda,\cdot,\varphi)(x-)\right]$ для всіх $\lambda > 0$, $x \in S$.

Справедливість співвідношень (I) та (II) може розглядатися як підтвердження того, що функція $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$, для якої
$$U(\lambda,x,\varphi) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} u(t,x,\varphi)\,dt, \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

є розв'язком (в деякому сенсі) задачі (i) — (iii).

2.3.1 Перетворення Лапласа потенціалу простого шару.

Нагадаємо деякі раніше доведені факти, які будуть нам потрібні в цьому пункті. А також доведемо кілька нових тверджень.

2.3.1.1 Потенціал простого шару та його властивості.

Введемо деякі позначення для цього пункту. Для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ позначимо

$$u(t,x,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Для кожної неперервної дійснозначної функції $(\psi(t,x))_{t>0, x\in S}$, що задовольняє нерівність

$$|\psi(t,x)| \le Ct^{-\beta} \tag{2.98}$$

при всіх $t > 0$ та $x \in S$ з деякими сталими $C > 0$ та $\beta < 1$, покладемо

$$v(t,x,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Наступні властивості функції v доведені в пунктах 2.1.1 і 2.1.2.

1. Функція v неперервна в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ і задовольняє нерівність

   $$|v(t,x,\psi)| \le Ct^{1-\beta-1/\alpha} \tag{2.99}$$

   при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C > 0$.

2. Функція v задовольняє рівняння

   $$\frac{\partial v(t,x,\psi)}{\partial t} = \mathbf{A}v(t,\cdot,\psi)(x)$$

   в області $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$.

3. Виконуються наступні співвідношення

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} v(t,\cdot,\psi)(x\pm) = \mathbf{B}_{\nu(x)}^{(d.v.)} v(t,\cdot,\psi)(x) \mp \psi(t,x) \tag{2.100}$$

при всіх $t > 0$ та $x \in S$, де позначено

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}^{(d.v.)} v(t,\cdot,\psi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\, d\sigma_y.$$

та, як і раніше, $g^{\nu(x)}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu(x)} g(t,\cdot,y)(x)$.

Зауважимо, що при всіх $t > 0$, $x \in S$ справджується наступна оцінка

$$\left|\mathbf{B}_{\nu(x)}^{(d.v.)} v(t,\cdot,\psi)(x)\right| \le Ct^{-\beta+\gamma/\alpha}(1 \vee t^{1-\gamma/\alpha}) \tag{2.101}$$

з деякою сталою $C > 0$. Насправді, вона встановлена в доведенні Леми 2.1.

У випадку, коли S — гіперплощина рівність (2.100) має дещо простіший вигляд: $\mathbf{B}_{\nu(x)} v(t,\cdot,\psi)(x\pm) = \mp\psi(t,x)$.

2.3.1.2 Перетворення Лапласа.

Резольвента процесу $\mathbf{x(t)}$. Нехай $\varphi \in \mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$. Доведемо, що функція

$$U(\lambda,x,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t,x,\varphi)\, dt, \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{2.102}$$

визначена та задовольняє наступне рівняння

$$\lambda U(\lambda,x,\varphi) - \varphi(x) = \mathbf{A} U(\lambda,\cdot,\varphi)(x), \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.103}$$

Коректність визначення функції (2.102) випливає з очевидної нерівності $|u(t,x,\varphi)| \le \|\varphi\|$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Звідси ж одержуємо рівність

$$U(\lambda,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G(\lambda,x,y)\varphi(y)\, dy,$$

що справджується при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, де

$$G(\lambda, x, y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g(t, x, y)\, dt, \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d.$$

Нагадаємо, що справджується (див. пункт 1.2.2.6) рівність

$$\mathbf{A}u(t, \cdot, \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

при всіх $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Далі зауважимо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x)\varphi(x)\, dy = \varphi(x)\mathbf{A} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t, \cdot, y)\, dy\, (x) = \varphi(x)\mathbf{A}1 = 0.$$

Тоді враховуючи нерівність (1.11) та той факт, що $\varphi \in \mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$, одержуємо (без врахування виду додатних мультиплікативних сталих)

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}u(t, \cdot, \varphi)(x)| &\le \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{A}g(t, \cdot, y)(x)||\varphi(y) - \varphi(x)|\, dy \le \\ &\le const \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|y - x|^\theta}{(t^{1/\alpha} + |y - x|)^{d+\alpha}}\, dy = \\ = const \int\limits_0^\infty \frac{r^{d-1+\theta}}{(t^{1/\alpha} + r)^{d+\alpha}}\, dr &= const \int\limits_0^\infty \frac{r^{d-1+\theta}}{(1 + r)^{d+\alpha}}\, dr \cdot t^{\frac{1}{\alpha}(\theta - \alpha)} = \\ &= C \cdot t^{-1+\theta/\alpha}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

з деякою сталою $C > 0$, де $\theta \in (0, 1)$ порядок гельдеровості функції φ. Це означає, що інтеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{A}u(t, \cdot, \varphi)(x)\, dt$ визначений при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Взявши до уваги представлення (1.16) оператора $\mathbf{A}$ та нерівність (1.11) одержуємо, що можлива довільна зміна порядку інтегрування в правій частині наступної рівності

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x)\,dt =$$

$$= cq_\alpha \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\varphi(y)-\varphi(x))\,dy \tag{2.104}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (g(t,x+z,y)-g(t,x,y)-(z,\nabla g(t,\cdot,y)(x)))\frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}$$

Дійсно, виберемо деяке $\varepsilon > 0$ і розглянемо інтеграл в правій частині рівності (2.104), звузивши область інтегрування до множини $(t,y,z) \in [0,\infty) \times B_\varepsilon(x)^C \times \mathbb{R}^d$, де $B_\varepsilon(x)^C = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \geq \varepsilon\}$. При $\varepsilon \to 0+$ такий інтеграл збігається до інтеграла з (2.104). Зафіксуємо деякі $\varepsilon > 0$ та $\delta \in (0,\varepsilon)$ та розглянемо інтеграли

$$I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_{B_\varepsilon(x)^C} (\varphi(y)-\varphi(x))\,dy$$

$$\int\limits_{B_\delta(0)} (g(t,x+z,y)-g(t,x,y)-(z,\nabla g(t,\cdot,y)(x)))\frac{dz}{|z|^{d+\alpha}},$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_{B_\varepsilon(x)^C} (\varphi(y)-\varphi(x))\,dy$$

$$\int\limits_{B_\delta(0)^C} (g(t,x+z,y)-g(t,x,y)-(z,\nabla g(t,\cdot,y)(x)))\frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}.$$

В інтегралі I_1 підінтегральна функція оцінюється виразом (без врахування додатного сталого множника)

$$e^{-\lambda t}\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|y-\hat{x}|)^{d+\alpha+2}}\frac{1}{|z|^{d+\alpha-2}},$$

де $\hat{x} = x + \kappa z$, а $\kappa = \kappa_{t,y} \in (0,1)$. Оскільки $|y-\hat{x}| > |y-x| - \delta > \varepsilon - \delta$, то продовжуємо оцінку виразом

$$e^{-\lambda t}\frac{t}{(|y-x|-\delta)^{d+\alpha+2}}\frac{1}{|z|^{d+\alpha-2}}.$$

Ця функція інтегровна на множині інтегрування інтегралу I_1.

Розглянемо інтеграл I_2. Підінтегральна функція оцінюється наступним виразом (без врахування додатного сталого множника)

$$\left(\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|y-x-z|)^{d+\alpha}}+\frac{t}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}+\frac{t|z|}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha+1}}\right)\times$$
$$\times\frac{e^{-\lambda t}}{|z|^{d+\alpha}}=J_1+J_2+J_3.$$

При $(t,y,z)\in[0,\infty)\times B_\varepsilon(x)^C\times B_\delta(0)^C$ справджуються нерівності

$$J_2\le\frac{1}{|y-x|^{d+\alpha}}\frac{te^{-\lambda t}}{|z|^{d+\alpha}},\quad J_3\le\frac{1}{|y-x|^{d+\alpha+1}}\frac{te^{-\lambda t}}{|z|^{d+\alpha-1}},$$

праві частини яких інтегровні на згаданій множині. Інтеграл по цій множині від J_1 може бути записаний наступним чином

$$\int\limits_0^\infty te^{-\lambda t}\,dt\int\limits_{B_\varepsilon(x)^C}dy\int\limits_{B_\delta(0)^C}\frac{1}{(t^{1/\alpha}+|y-x-z|)^{d+\alpha}}\frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}.$$

Здійснивши в ньому заміну змінних, поклавши $z=y-x-t^{1/\alpha}v$ та $y-x=w$, одержимо інтеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_{B_\varepsilon(0)^C}dw\int\limits_D\frac{1}{(w-t^{1/\alpha}v)^{d+\alpha}}\frac{dv}{(1+|v|)^{d+\alpha}},$$

в якому $D=\{v\in\mathbb{R}^d:|w-t^{1/\alpha}v|\ge\delta\}$. А він, очевидно, збіжний.

Таким чином в інтегралі

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_{B_\varepsilon(x)^C}(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(g(t,x+z,y)-g(t,x,y)-(z,\nabla g(t,\cdot,y)(x)))\frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}$$

можлива довільна зміна порядку інтегрування. Перейшовши до границі при $\varepsilon\to0+$, те ж саме одержимо для інтеграла в правій частині рівності (2.104).

Отже, рівність

$$\mathbf{A}U(\lambda,\cdot,\varphi)(x)=\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x)\,dt$$

правильна при всіх $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та для кожної функції $\varphi\in\mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$.

Таким чином, справджується властивість (2.103) функції U, як наслідок тверджень наведених в 1.2.2.6.

Потенціал простого шару на обмеженій замкненій поверхні класу $\mathbf{H}^{1+\gamma}$. З нерівностей (2.99), (2.101) одержуємо, що функції $(v(t,x,\psi))_{t\geq 0,x\in\mathbb{R}^d}$ та $(\mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)}v(t,\cdot,\psi)(x))_{t>0,x\in S}$, допускають перетворення Лапласа за змінною t.

З нерівностей (1.11) та (2.98) випливає оцінка

$$\left|e^{-\lambda t}g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\right|\leq CN_0e^{-\lambda t}\frac{(t-\tau)\tau^{-\beta}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}$$

для всіх $t>0$, $0<\tau<t$, $y\in S$. Права частина цієї нерівності інтегровна, оскільки згідно Леми 1.3

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^{t}(t-\tau)\tau^{-\beta}\,d\tau\int\limits_S\frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}\,d\sigma_y\leq$$
$$\leq C\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^{t}(t-\tau)^{-1/\alpha}\tau^{-\beta}\,d\tau<\infty.$$

Так само (для всіх $t>0$, $0<\tau<t$, $y\in S$)

$$\left|e^{-\lambda t}\frac{(y-x,\nu(x))}{t-\tau}g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\right|\leq CN_0e^{-\lambda t}\frac{|(y-x,\nu(x))|\tau^{-\beta}}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}},$$

де права частина інтегровна, оскільки

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^{t}\tau^{-\beta}\,d\tau\int\limits_S\frac{|(y-x,\nu(x))|}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}}\,d\sigma_y\leq$$
$$\leq C\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^{t}(t-\tau)^{-1+\gamma/\alpha}\tau^{-\beta}\,d\tau<\infty.$$

Отже, міняючи порядок інтегрування у виразах для $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} v(t,x,\psi)\,dt$ та $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)} v(t,\cdot,\psi)(x)\,dt$, можемо записати наступні рівності ($\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$)

$$V(\lambda,x,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} v(t,x,\psi)\,dt = \int\limits_S G(\lambda,x,y)\Psi(\lambda,y)\,d\sigma_y,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)} V(\lambda,\cdot,\psi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)} v(t,\cdot,\psi)(x)\,dt = \\ = \int\limits_S G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)\Psi(\lambda,y)\,d\sigma_y,\end{aligned}$$

де $\Psi(\lambda,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt$ та $G^{\nu(x)}(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} g^{\nu(x)}(t,x,y)\,dt.$

Застосовуючи тепер перетворення Лапласа до обох частин рівності з 2 пункту 2.3.1.1, одержимо

$$\mathbf{A}V(\lambda,\cdot,\psi)(x) = \lambda V(\lambda,x,\psi), \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus S. \tag{2.105}$$

Властивість, аналогічну до сформульованої в 3 пункту 2.3.1.1, доведемо окремо. Метод доведення подібний до того, який було застосовано в доведенні Теореми 2.6. Але в цій ситуації накладатимемо додаткові обмеження на густину потенціалу простого шару. А саме, будемо припускати додатково, що функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ для кожного фіксованого $x \in S$ має скінченну границю при $t \to 0+$. З врахуванням компактності поверхні S це дозволяє стверджувати, що продовження функції ψ за неперервністю на кожну множину $(t,x) \in [0,R] \times S$ з $R > 0$ є рівномірно неперервним.

Теорема 2.17. *Нехай обмежена замкнена поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$, а функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0,x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються* *співвідношення*

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}V(\lambda,\cdot,\psi)(x\pm) = \int\limits_S G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)\Psi(\lambda,y)\,d\sigma_y \mp \Psi(\lambda,x), \tag{2.106}$$

при всіх $\lambda > 0$.

Доведення. Зафіксувавши деякі довільні $\lambda > 0$ та $x \in S$, візьмемо, як і в доведенні Теореми 2.6, $y = x + \delta\nu(x)$ з деяким досить малим $\delta \in \mathbb{R}$.

Рівності (2.106) можна записати наступним чином

$$\lim_{y\to x\pm}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z \mp \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt$$

Візьмемо деяке $R > 0$ і розглянемо інтеграли

$$I_1 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z,$$

$$I_2 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z,$$

$$I_3 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt.$$

Покажемо, що вибором $R > 0$ ці інтеграли можна зробити як завгодно малими, причому, I_1 одночасно для всіх досить малих $\delta \in \mathbb{R}$.

Існування перетворення Лапласа по t функцій $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ та $(\mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)}v(t,\cdot,\psi)(x))_{t>0,x\in S}$ доводить це для інтегралів I_2, I_3.

Розглянемо тепер

$$I_1 = \frac{2}{\alpha}\int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (z-y,\nu(x))g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z =$$

$$
= \frac{2}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S (z-x, \nu(x)) g(t-\tau, x, z) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z +
$$

$$
+ \frac{2}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S (z-x, \nu(x)) (g(t-\tau, y, z) - g(t-\tau, x, z)) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z -
$$

$$
- \frac{2}{\alpha} \delta \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau, y, z) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z = I_1' + I_1'' + I_1'''.
$$

Нерівність (2.101) показує, що $I_1' = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{B}_{\nu(x)}^{(d.v.)} v(t, \cdot, \psi)(x)\, dt$ можна зробити як завгодно малим вибором $R > 0$.

Як і доведенні Теореми 2.2 запишемо інтеграл I_1'' у вигляді суми

$$
I_1'' = \frac{2}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \left(\int\limits_0^{t-\rho} d\tau \int\limits_S d\sigma_z + \int\limits_{t-\rho}^t d\tau \int\limits_{S_{r_0/2}(x)} d\sigma_z + \int\limits_{t-\rho}^t d\tau \int\limits_{S \setminus S_{r_0/2}(x)} d\sigma_z \right) \times
$$

$$
\times \frac{1}{t-\tau} (z-x, \nu(x)) \left(g(t-\tau, y, z) - g(t-\tau, x, z) \right) \psi(\tau, z) = J_1 + J_2 + J_3
$$

з деяким $0 < \rho < R$.

Викладки, зроблені у згаданому доведенні (див. с. 83), дозволяють записати, що (за виконання умов теореми, що доводиться, $\beta = 0$)

$$
|J_2| \leq M e^{-\lambda R}, \quad |J_3| \leq M e^{-\lambda R}
$$

з деякою сталою $M > 0$. Тут вибрано $|\delta| < \frac{1}{2}\delta_0$, де δ_0 — стала з властивостей поверхні S (див. пункт 1.2.2.3). Таким чином J_2 та J_3 можуть бути зроблені як завгодно малими вибором $R > 0$.

Враховуючи рівномірну неперервність функції $(g(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ на множинах виду $(t, x, y) \in [t_0, \infty) \times K_1 \times K_2$, де K_1 і K_2 — довільні компакти в $\mathbb{R}^d$, а $t_0 > 0$ — довільна стала, можемо записати, що

$$
|J_1| \leq M \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t} (t-\rho)\, dt
$$

при всіх δ таких, що $|\delta| \le \hat{\delta}$ з деяким $\hat{\delta} > 0$. Таким чином, і J_1 можна зробити як завгодно малим вибором $R > 0$ відразу при всіх досить малих $\delta \in \mathbb{R}$.

Отже, I_1'' вибором $R > 0$ робиться як завгодно малим рівномірно по δ з деякого околу нуля.

Розглянемо тепер I_1''', записавши нерівність (враховуємо, що $|\psi(t,x)| \le C$ з деяким $C > 0$)

$$|I_1'''| \le \frac{2C|\delta|}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau, y, z)\, d\sigma_z = \frac{2C|\delta|}{\alpha} \left(J_1 + J_2 + J_3\right),$$

де

$$J_1 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{t-\rho}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_{r_0/2}(x)} g(t-\tau, y, z)\, d\sigma_z,$$

$$J_2 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_{r_0/2}(x)} g(t-\tau, y, z)\, d\sigma_z,$$

$$J_3 = \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S\setminus S_{r_0/2}(x)} g(t-\tau, y, z)\, d\sigma_z$$

з деяким $0 < \rho < R$.

Аналогічні, наведеним в доведенні Теореми 2.2 (див. с. 86), викладки дозволяють записати

$$J_1 \le M \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t} dt, \quad J_2 \le M \int\limits_R^\infty (t-\rho) e^{-\lambda t} dt, \quad J_3 \le M \int\limits_R^\infty t e^{-\lambda t} dt.$$

Отже, I_1''' також можна зробити як завгодно малим вибором $R > 0$ одночасно при всіх δ з деякого околу нуля.

Для доведення співвідношень (2.106) досить тепер довести, що справджується

$$\lim_{y\to x\pm}\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z =$$
$$=\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z \mp \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt, \tag{2.107}$$

де, як і вище, розуміємо $y\to x\pm$ як $y=x+\delta\nu(x)$ і $\delta\to 0\pm$.

Позначивши через $V_R(\lambda,x,\psi)=\int\limits_0^R e^{-\lambda t}v(t,x,\psi)\,dt$, можемо записати

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}V_R(\lambda,\cdot,\psi)(y)=\mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)}V_R(\lambda,\cdot,\psi)(x)+$$
$$+\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S (z-x,\nu(x))(g(t-\tau,y,z)-g(t-\tau,x,z))\psi(\tau,z)\,d\sigma_z -$$
$$-\frac{2}{\alpha}\delta\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z =$$
$$=\mathbf{B}^{(d.v.)}_{\nu(x)}V_R(\lambda,\cdot,\psi)(x)+I_1-I_2$$

при кожному $R>0$.

Знайдемо окремо границі I_1 та I_2 при $\delta\to 0\pm$.

Почнемо з I_1. Використовуючи нерівність (1.11), одержуємо оцінку (з деякою сталою $C>0$)

$$|I_1|\le C\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_S |z-x|\times$$
$$\times\left(\frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-y|)^{d+\alpha}}+\frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha}}\right)d\sigma_z.$$

Інтеграл в правій частині останньої нерівності подамо у вигляді суми інтегралів I_1' та I_1'' від тієї ж підінтегральної функції, перший по множині

$$\{(t,\tau,z): t\in[0,R], \tau\in(0,t), z\in S_{r_0/2}(x)\},$$

а другий — по множині

$$\{(t,\tau,z) : t\in[0,R], \tau\in(0,t), z\in(S\setminus S_{r_0/2}(x))\}$$

($S_{r_0/2}(x)$ визначено в пункті 1.2.2.3).

Очевидно, що для кожного $z\in S_{r_0/2}(x)$ при досить малих r_0 та $|\delta|$ виконуються нерівності $|z-y|\ge|\tilde z-x|$ та $|\tilde z-x|\le|z-x|\le K|\tilde z-x|$, де $\tilde z$ ортогональна проекція точки z на дотичну гіперплощину до поверхні S в точці x, $K>1$ деяка стала. Тоді

$$I_1'\le K\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_{r_0/2}(x)}\frac{|\tilde z-x|}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|\tilde z-x|)^{d+\alpha}}\,d\sigma_z.$$

Перетворимо внутрішній інтеграл з правої частини цієї нерівності, перейшовши до локальної системи координат з початком в точці x та вектором $\nu(x)$ в якості орта останньої осі. Таким чином, одержуємо оцінку ($\tilde K$ та $\hat K$ деякі додатні сталі)

$$I_1'\le\tilde K\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{|u|^{1+\gamma}du}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|u|)^{d+\alpha}}=$$

$$=\hat K\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\gamma/\alpha}}=\hat K\int\limits_0^R t^{\gamma/\alpha}e^{-\lambda t}\,dt,$$

яка означає, що I_1' може бути зроблено як завгодно малим вибором R.

Нехай тепер $|\delta|<\delta_0$ (число δ_0 визначається поверхнею S). Тоді при всіх $z\in S\setminus S_{r_0/2}(x)$, очевидно, виконується $|z-y|\ge|z-x|-|y-x|\ge\delta_0-|\delta|$, бо $\delta_0\le|z-x|\le\max\limits_{z\in S}|z-x|<\infty$, і тому ($M>0$ деяка стала)

$$I_1''\le M\int\limits_0^R e^{-\lambda t}t\,dt\to0,\quad R\to0+.$$

Отже, виберемо $R>0$ таким, щоб I_1 став досить малим.

Далі для фіксованого $x\in S$, кожного $0\le t\le R$ та наперед заданого $\varepsilon>0$ виберемо $\varkappa\in(0,r_0/2)$ і $0<\rho<R$ такі, що при всіх $\max(0,t-\rho)<$

$\tau < t$, $z \in S_\varkappa(x)$ справджується нерівність $|\psi(\tau,z) - \psi(t,x)| < \varepsilon$. Це можна зробити, оскільки функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in S}$, як зазначалося вище, рівномірно неперервна на множині $(t,x) \in [0,R] \times S$ з $R > 0$ таким, що виконуються всі згадані вище умови малості названих величин.

Розглянемо тепер вираз

$$I_2 = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z,$$

подавши його у вигляді суми: $I_2 = \sum\limits_{k=1}^4 I_2^{(k)}$, де $(a_+ = \max(0,a))$

$$I_2^{(1)} = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa(x)} g(t-\tau,y,z)\,d\sigma_z;$$

$$I_2^{(2)} = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa(x)} g(t-\tau,y,z)(\psi(\tau,z) - \psi(t,x))\,d\sigma_z;$$

$$I_2^{(3)} = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_0^{(t-\rho)_+} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa(x)} g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z =$$
$$= \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_\rho^R e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa(x)} g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z;$$

$$I_2^{(4)} = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\,dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S\setminus S_\varkappa(x)} g(t-\tau,y,z)\psi(\tau,z)\,d\sigma_z.$$

Дослідимо кожен з цих доданків.

При досить малому δ, принаймні $|\delta| < \hat{\varkappa} = \min(\varkappa, \delta_0)$, маємо $(C > 0$,

$\tilde{C} > 0$ деякі сталі)

$$|I_2^{(4)}| \leq C|\delta| \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S \setminus S_\varkappa(x)} \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-y|)^{d+\alpha}}\, d\sigma_z \leq$$

$$\leq \tilde{C} \frac{|\delta|}{(\hat{\varkappa} - |\delta|)^{d+\alpha}} \int\limits_0^R e^{-\lambda t} t\, dt.$$

Тому $I_2^{(4)} \to 0$, $\delta \to 0$.

Оскільки

$$|I_2^{(3)}| \leq C|\delta| \int\limits_\rho^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} d\tau \int\limits_{S_\varkappa(x)} \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-y|)^{d+\alpha}}\, d\sigma_z \leq$$

$$\leq \tilde{C}|\delta| \int\limits_\rho^R e^{-\lambda t}(t-\rho)\, dt,$$

то $I_2^{(3)} \to 0$, $\delta \to 0$.

Розглянемо найбільш цікавий доданок

$$I_2^{(1)} = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{\Pi_x} g(t-\tau, y, z)\, d\sigma_z +$$

$$+\frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \left(\int\limits_{S_\varkappa(x)} d\sigma_z - \int\limits_{\Pi_x} d\sigma_z \right) g(t-\tau, y, z) =$$

$$= J' + J'',$$

де Π_x — гіперплощина дотична до поверхні S в точці x.

Враховуючи рівність (1.5), одержуємо

$$J' = \frac{2}{\alpha}\delta \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^t \frac{d\tau}{t-\tau} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-c(t-\tau)r^\alpha} \cos(r\delta)\, dr$$

Інтегруючи частинами та міняючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{(t-\rho)_+}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-\tau)r^{\alpha}}\cos(r\delta)\,dr =$$
$$= \frac{c\alpha}{\pi\delta}\int\limits_{(t-\rho)_+}^{t}d\tau\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-\tau)r^{\alpha}}r^{\alpha-1}\sin(r\delta)\,dr =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi\delta}\int\limits_0^{\infty}\left(1-e^{-c(t-(t-\rho)_+)r^{\alpha}}\right)\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr =$$
$$= \frac{\alpha}{\pi\delta}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\delta-\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-(t-\rho)_+)r^{\alpha}}\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr\right).$$

Тому

$$J' = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R}e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\delta-\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-(t-\rho)_+)r^{\alpha}}\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr\right) =$$
$$= \Psi_R(\lambda,x)\operatorname{sign}\delta-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R}e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-(t-\rho)_+)r^{\alpha}}\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr,$$

де $\Psi_R(\lambda,x)=\int\limits_0^{R}e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt.$

Оскільки $\int\limits_0^{R}e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt\int\limits_0^{\infty}e^{-c(t-(t-\rho)_+)r^{\alpha}}\frac{\sin(r\delta)}{r}\,dr \to 0$ при $\delta\to 0$, то $J'\to\pm\Psi_R(\lambda,x)$ при $\delta\to 0\pm$.

Доведемо тепер, що J'' можна зробити як завгодно малим вибором δ. Для початку розглянемо

$$\delta \int\limits_0^{t-(t-\rho)_+} \frac{d\tau}{\tau} \left(\int\limits_{S_\varkappa(x)} d\sigma_z - \int\limits_{\Pi_x} d\sigma_z \right) g(\tau, y, z) =$$

$$= \delta \int\limits_0^{t-(t-\rho)_+} \frac{d\tau}{\tau} \left(\int\limits_{S_\varkappa(x)} d\sigma_z - \int\limits_{\Pi_\varkappa(x)} d\sigma_z \right) g(\tau, y, z) -$$

$$-\delta \int\limits_0^{t-(t-\rho)_+} \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_{\Pi_x \setminus \Pi_\varkappa(x)} g(\tau, y, z)\, d\sigma_z = J_1'' - J_2'',$$

де $\Pi_\varkappa(x)$ ортогональна проекція $S_\varkappa(x)$ на Π_x.

Враховуючи властивості поверхні S, легко зрозуміти, що існує така стала $\theta > 0$, що для кожного $z \in \Pi_x \setminus \Pi_\varkappa(x)$ виконується $|z| \geq \theta$. Тому ($C > 0$ деяка стала)

$$|J_2''| \leq C|\delta| \int\limits_\theta^\infty \frac{r^{d-2}\, dr}{(\delta^2 + r^2)^{(d+\alpha)/2}} = C \int\limits_{\theta/|\delta|}^\infty \frac{r^{d-2}\, dr}{(1 + r^2)^{(d+\alpha)/2}} \frac{1}{|\delta|^\alpha}$$

Звідси, використовуючи правило Лопіталя, одержуємо, що $J_2'' \to 0$ при $\delta \to 0$.

Для оцінки J_2' перейдемо до локальної системи координат з початком в точці x та ортом останньої осі $\nu(x)$. Оскільки

$$S_\varkappa(x) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = F_x(u^{<d>}), u^{<d>} \in D_x \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

$$\Pi_\varkappa(x) = \{u \in \mathbb{R}^d : u^d = 0, u^{<d>} \in D_x \subset \mathbb{R}^{d-1}\},$$

де D_x деяка обмежена замкнена множина, яка залежить тільки від особливостей поверхні S, то, перетворюючи поверхневі інтеграли на кратні, одержуємо

$$\int\limits_{S_\varkappa(x)} g(\tau, y, z)\, d\sigma_z - \int\limits_{\Pi_\varkappa(x)} g(\tau, y, z)\, d\sigma_z =$$

$$= \int\limits_{D_x} g(\tau, (0^{<d>}, \delta), (u^{<d>}, F_x(u^{<d>}))) \left(\sqrt{1 + (\nabla F_x(u^{<d>}))^2} - 1 \right) du^{<d>} +$$

$$+\int\limits_{D_x}\big(g(\tau,(0^{<d>},\delta),(u^{<d>},F_x(u^{<d>})))-g(\tau,(0^{<d>},\delta),(u^{<d>},0))\big)\,du^{<d>}=$$

$$=Q_1+Q_2.$$

Далі врахуємо належність поверхні S до класу $H^{1+\gamma}$, що приводить до нерівностей

$$\sqrt{1+(\nabla F_x(u^{<d>}))^2}-1\le(\nabla F_x(u^{<d>}))^2\le C|u^{<d>}|^{2\gamma},$$

$$|F_x(u^{<d>})|\le C|u^{<d>}|^{1+\gamma},$$

що справджуються при $u^{<d>}\in D_x$ з деякою сталою $C>0$. Тоді, використовуючи властивості поверхні S та нерівність (1.10), одержимо

$$|Q_1|\le K\int\limits_{D_x}\frac{\tau|v|^{2\gamma}\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+\sqrt{|v|^2+(F_x(v)-\delta)^2}\right)^{d+\alpha}}\le$$

$$\le K\int\limits_{D_x}\frac{\tau|v|^{2\gamma}\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+k_1\sqrt{|v|^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}},$$

$$|Q_2|\le K\int\limits_{D_x}\frac{\tau|v|^{1+\gamma}\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+\sqrt{|v|^2+(\theta F_x(v)-\delta)^2}\right)^{d+\alpha+1}}\le$$

$$\le K\int\limits_{D_x}\frac{\tau|v|^{\gamma}\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+k_2\sqrt{|v|^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}},$$

де $K>0$, $k_1>0$, $k_2>0$ деякі сталі, $\theta=\theta_{\tau,\delta}\in(0,1)$.

Таким чином, маємо

$$\left|\delta\int\limits_0^{t-(t-\rho)_+}\frac{d\tau}{\tau}\left(\int\limits_{S_\varkappa(x)}d\sigma_z-\int\limits_{\Pi_x}d\sigma_z\right)g(\tau,y,z)\right|\le$$

$$\le K|\delta|\int\limits_0^{t-(t-\rho)_+}\frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{D_x}\frac{\tau|v|^{\gamma}(1+|v|^{\gamma})\,dv}{\left(\tau^{1/\alpha}+k\sqrt{|v|^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}}\le$$

$$\le\hat{K}|\delta|\int\limits_0^{\rho}d\tau\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{r^{d-2+\gamma}\,dr}{\left(\tau^{1/\alpha}+k\sqrt{r^2+\delta^2}\right)^{d+\alpha}}=J,$$

де $\hat{K} > 0$, $\varepsilon > 0$ деякі сталі, $k = \min(k_1, k_2)$. Міняючи порядок інтегрування та зауважуючи, що при кожному $a > 0$ справджується рівність

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau^{1/\alpha} + a)^{d+\alpha}} = \alpha B(d, \alpha) a^{-d},$$

одержуємо оцінку

$$J \leq \tilde{K} |\delta| \int_0^\varepsilon \frac{r^{d-2+\gamma}\, dr}{\left(\sqrt{r^2 + \delta^2}\right)^d} \leq \tilde{K} \int_0^\infty \frac{r^{d-2+\gamma}\, dr}{\left(\sqrt{r^2 + 1}\right)^d} |\delta|^\gamma$$

з деякою сталою $\tilde{K} > 0$.

Отже, $J \to 0$, а разом з ним і $J_1'' \to 0$ при $\delta \to 0$. Це дає нам змогу стверджувати, що $\lim\limits_{\delta \to 0\pm} I_2^{(1)} = \pm \Psi_R(\lambda, x)$.

Існування границь $\lim\limits_{\delta \to 0\pm} I_2^{(1)}$ та рівномірна неперервність функції ψ приводить до того факту, що $I_2^{(2)} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Остаточно співвідношення (2.107) доведені, а разом з ними і (2.106).

□

Потенціал простого шару на гіперплошині. Нехай в цьому пункті S — гіперплощина в $\mathbb{R}^d$, яка задається рівнянням $(x, \nu) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ з деяким ортом $\nu \in \mathbb{R}^d$. Виберемо одну із сторін S зовнішньою.

Розглянемо потенціал простого шару

$$v(t, x, \psi) = \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y)\, d\sigma_y$$

з неперервною обмеженою густиною $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in S}$.

В даному випадку одиничний вектор (зовнішньої) нормалі до поверхні S сталий і збігається з вектором ν. При всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$ справджується рівність

$$\mathbf{B}_\nu v(t, \cdot, \psi)(x) = \int_0^t d\tau \int_S g^\nu(t - \tau, x, y) \psi(\tau, y)\, d\sigma_y,$$

в якій $g^{\nu}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu} g(t,\cdot,y)(x)$.

Пряме значення дії оператора $\mathbf{B}_{\nu}$ на потенціал простого шару v за аргументом x в точках поверхні S існує і дорівнює

$$\mathbf{B}_{\nu}^{(d.v.)} v(t,\cdot,\psi)(x) = 0, \quad t > 0,\ x \in S$$

Нагадаємо, що це наслідок рівності $g^{\nu}(t,x,y) = \dfrac{2}{\alpha}\dfrac{(y-x,\nu)}{t} g(t,x,y)$, яка справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Займемось тепер доведенням співвідношень аналогічних (2.106) для гіперплощини. Нехай тепер $d \geq 2$. Випадок $d = 1$ буде розглянуто далі.

Теорема 2.18. *Якщо функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються співвідношення*

$$\mathbf{B}_{\nu} V(\lambda,\cdot,\psi)(x\pm) = \mp \Psi(\lambda, x), \tag{2.108}$$

при всіх $\lambda > 0$, $x \in S$.

Доведення. Аналогічно до того, як доводилась Теорема 2.17, спочатку розглянемо при деякому $R > 0$ та фіксованих $\lambda > 0$, $x \in S$ вирази $I_1 = \int\limits_R^{\infty} e^{-\lambda t} \psi(t,x)\, dt$ та $I_2 = \int\limits_R^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{B}_{\nu} v(t,\cdot,\psi)(y)\, dt$ з $y = x + \delta\nu$.

Зрозуміло, що I_1 можна зробити як завгодно малим вибором R. Розглядаючи I_2, запишемо його у вигляді

$$I_2 = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_R^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau, y, z) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z.$$

Візьмемо деяке $\rho < R$ і розглянемо вирази

$$I_2' = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_R^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau, y, z) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z;$$

$$I_2'' = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_R^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_S g(t-\tau, y, z) \psi(\tau, z)\, d\sigma_z.$$

Тоді, враховуючи оцінки (1.10) та обмеженість функції ψ, запишемо

$$|I_2'| \leq \frac{2C|\delta|}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} d\tau \int\limits_S \frac{d\sigma_z}{((t-\tau)^{1/\alpha} + (|z-x|^2+\delta^2)^{1/2})^{d+\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{2C|\delta|}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} d\tau \int\limits_S \frac{d\sigma_z}{(\rho^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha}} \leq \rho^{-1-1/\alpha} \frac{2\hat{C}|\delta|}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}(t-\rho)\, dt.$$

Отже, I_2' вибором R можна зробити як завгодно малим.

Далі, використовуючи рівність (1.5), можемо записати

$$|I_2''| \leq \frac{2C|\delta|}{\alpha} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{t-\rho}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-c(t-\tau)r^\alpha} \cos(r\delta)\, dr =$$

$$= \frac{2Cc}{\pi} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{t-\rho}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty r^\alpha e^{-c(t-\tau)r^\alpha} \frac{\sin(r|\delta|)}{r}\, dr =$$

$$= \frac{2C}{\pi} \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t} \left(\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^\infty e^{-c\rho r^\alpha} \frac{\sin(r|\delta|)}{r}\, dr \right) dt.$$

Тобто I_2'' вибором R можна зробити як завгодно малим.

Тому для доведення (2.108) досить довести, що при кожному $R > 0$ справджуються співвідношення

$$\lim_{\delta\to 0\pm} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^\nu(t-\tau, x+\delta\nu, y)\psi(\tau, y)\, d\sigma_y = \\ = \pm \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt. \tag{2.109}$$

Запишемо інтеграл з лівої частини рівності (2.109) для фіксованих $\lambda > 0$, $x \in S$ та $\delta \in \mathbb{R}$ у вигляді суми $\sum\limits_{k=1}^{4} J_k$, в якій

$$J_1 = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa} g(t-\tau, x+\delta\nu, y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2 = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa} g(t-\tau, x+\delta\nu, y)(\psi(t,x) - \psi(\tau,y))\, d\sigma_y,$$

$$J_3 = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{(t-\rho)_+} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S_\varkappa} g(t-\tau, x+\delta\nu, y)\psi(\tau,y)\, d\sigma_y,$$

$$J_4 = -\frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{S\setminus S_\varkappa} g(t-\tau, x+\delta\nu, y)\psi(\tau,y)\, d\sigma_y,$$

а $a_+ = \max(0,a)$, $S_\varkappa = \{y \in S : |y-x| < \varkappa\}$ з деякими $\varkappa > 0$ та $\rho > 0$.

Зафіксувавши деяке досить мале $\varepsilon > 0$, виберемо $\varkappa > 0$ та $\rho > 0$ такими, щоб при всіх (τ, y) таких, що $|t-\tau| < \rho$ (яке б не було $t \in [0,R]$), $y \in S_\varkappa$, виконувалось $|\psi(\tau,y) - \psi(t,x)| < \varepsilon$.

З оцінок, одержаних при доведенні Теореми 2.3 (див. с. 98 і далі) випливає наступне:

$$|J_4| \le M|\delta| \int\limits_0^R e^{-\lambda t} t\, dt \to 0, \quad |J_3| \le M|\delta| \int\limits_0^R e^{-\lambda t}(t-\rho)_+\, dt \to 0$$

при $\delta \to 0\pm$. Крім того $I_1 = -\int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)(I' - I'')\, dt$, де

$$I' = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{t\wedge\rho} \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_S g(\tau, x+\delta\nu, y)\, d\sigma_y, \quad I'' = \frac{2\delta}{\alpha} \int\limits_0^{t\wedge\rho} \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_{S\setminus S_\varkappa} g(\tau, x+\delta\nu, y)\, d\sigma_y.$$

Оскільки (див. там же)

$$|I''| \le M|\delta|(t\wedge\rho) \quad \text{та} \quad I' = \operatorname{sign}\delta - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-c(t\wedge\rho)r^\alpha} \frac{\sin(r\delta)}{r}\, dr,$$

то $\lim\limits_{\delta\to 0\pm} I_1 = \mp \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t,x)\, dt$. А звідси вже випливає, що I_2 можна зробити як завгодно малим вибором $\varkappa > 0$, $\rho > 0$ та δ з деякого окола нуля.

Таким чином рівність (2.109) доведена. $\square$

Нехай тепер $d = 1$. В пункті 2.1.2.3 сформульовані властивості потенціалу простого шару у випадку $d = 1$ і, отже, $S = \{0\}$. Він задається формулою

$$v(t, x, \psi) = \int\limits_0^t g(t - \tau, x, 0)\psi(\tau)\, d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

в якій густина потенціалу $(\psi(t))_{t>0}$ — неперервна функція, що задовольняє нерівність $|\psi(t)| \le Ct^{-\beta}$ з деякими $C > 0$, $\beta < 1$.

Нерівність (2.17) показує, що потенціал простого шару допускає перетворення Лапласа за змінною t. Крім того, оскільки

$$|\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x)| \le \frac{2NC}{\alpha}|x| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |x|)^{1+\alpha}} \le \frac{2NC}{\alpha} \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{(1 + \tau^{1/\alpha})^{1+\alpha}},$$

то при кожному фіксованому $x \ne 0$ функція $(\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x))_{t>0}$ допускає перетворення Лапласа.

Теорема 2.19. *Якщо функція* $(\psi(t))_{t\ge0}$ *обмежена і неперервна на* $[0, \infty)$, *то справджуються співвідношення*

$$\lim_{x\to0\pm} 2c \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x)\, dt = \mp \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)\, dt. \tag{2.110}$$

при кожному $\lambda > 0$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що при фіксованому $\lambda > 0$ вибором $R > 0$ можна зробити як завгодно малими величини

$$2c \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x)\, dt, \quad \int\limits_R^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)\, dt,$$

причому в першому випадку рівномірно по x. Тому досить довести співвідношення

$$\lim_{x\to0\pm} 2c \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\mathbf{B}v(t, \cdot, \psi)(x)\, dt = \mp \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t)\, dt \tag{2.111}$$

при довільному $R > 0$.

Запишемо інтеграл з лівої частини рівності (2.111) при фіксованих $\lambda > 0$ та $x \neq 0$ у вигляді суми $\sum\limits_{k=1}^{3} J_k$, де

$$J_1 = -\frac{2x}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t} \psi(t)\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^{t} g(t-\tau, x, 0) \frac{d\tau}{t-\tau},$$

$$J_2 = -\frac{2x}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_{(t-\rho)_+}^{t} g(t-\tau, x, 0)(\psi(\tau) - \psi(t)) \frac{d\tau}{t-\tau},$$

$$J_3 = -\frac{2x}{\alpha} \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{(t-\rho)_+} g(t-\tau, x, 0)\psi(\tau) \frac{d\tau}{t-\tau},$$

з деяким $0 < \rho < R$.

Нехай вибрано досить мале $\varepsilon > 0$. Оскільки функція ψ рівномірно неперервна на кожному відрізку $[0, R]$, то для заданого $R > 0$ існує таке $0 < \delta < R$, що $|\psi(\tau) - \psi(t)| < \varepsilon$, якщо тільки виконується $(t-\rho)_+ \leq \tau \leq t \leq R$.

Далі досліджуємо вирази J_k, $k = 1, 2, 3$.

$$|J_3| \leq \frac{2NC}{\alpha} |x| \int\limits_\rho^R e^{-\lambda t}\, dt \int\limits_0^{t-\rho} \frac{d\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |x|)^{1+\alpha}} \leq$$

$$\leq 2NC|x| \int\limits_\rho^R e^{-\lambda t} (\rho^{-1/\alpha} - t^{-1/\alpha})\, dt \to 0, \quad |x| \to 0.$$

Враховуючи рівність (2.18), запишемо

$$J_1 = 2c \int\limits_0^R e^{-\lambda t} \psi(t)\, dt \int\limits_0^{(t\wedge\rho)} \mathbf{B} g(\tau, \cdot, 0)(x)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^R e^{-\lambda t} \psi(t) \left(-\operatorname{sign} x + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-c(t\wedge\rho)\xi^\alpha} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi \right) dt.$$

Тому існує $\lim\limits_{x\to 0\pm} I_1 = \mp \int\limits_0^R e^{-\lambda t}\psi(t)\,dt$. А звідси вже випливає, що I_2 можна зробити як завгодно малим вибором ρ та x.

Отже, рівність (2.111) доведена, а разом з нею доведено і твердження теореми. □

2.3.2 W-функціонал типу локального часу на поверхні.

Нехай в $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ задана поверхня S — гіперплощина, або обмежена замкнена поверхня класу $H^{1+\gamma}$, а $(p(x))_{x\in S}$ додатна неперервна функція (додатково обмежена у випадку гіперплощини). Розглянемо функцію

$$f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau, x, y) p(y)\, d\sigma_y \tag{2.112}$$

задану при всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$.

Як потенціал простого шару з обмеженою однорідною в часі густиною, функція $(f_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє нерівність (див. (2.99))

$$f_t(x) \leq Ct^{1-1/\alpha} \tag{2.113}$$

при всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C > 0$.

В пункті 2.2.3.1 ми мали нагоду довести, що існує W-функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ такий, що $\mathbb{E}_x\eta_t(p) = f_t(x)$.

Функціонал $\eta_t(\hat{p})$ з $\hat{p}(x) \equiv 1$ називається локальним часом на S процесу $(x(t))_{t\geq 0}$. Очевидно, що $\eta_t(p) = \int\limits_0^t p(x(s))\, d\eta_s(\hat{p})$.

Апроксимуємо тепер функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ деякими простішими функціоналами. Для кожного $h > 0$ визначимо функцію $(v_h(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, поклавши

$$v_h(x) = \int\limits_S g(h, x, y) p(y)\, d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

та задамо функціонали $(\eta_t^{(h)}(p))_{t\geq 0}$ рівністю $\eta_t^{(h)}(p) = \int\limits_0^t v_h(x(s))\, ds$, $t \geq 0$.

Функція v_h при фіксованому $h > 0$ неперервна та обмежена, отже визначений W-функціонал $(\eta_t^{(h)}(p))_{t\geq 0}$. Його характеристика задається виразом

$$f_t^{(h)}(x) = \mathbb{E}_x \eta_t^{(h)}(p) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau, x, y) v_h(y)\, dy = \\ = \int_h^{h+t} d\tau \int_S g(\tau, x, y) p(y)\, d\sigma_y. \tag{2.114}$$

Для фіксованих $h > 0$, $\lambda > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ та для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$Q_\lambda^{(h)}(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x(\varphi(x(t)) \exp\{-\lambda \eta_t^{(h)}(p)\}),$$

$$Q_\lambda(t, x, \varphi) = \mathbb{E}_x(\varphi(x(t)) \exp\{-\lambda \eta_t(p)\}).$$

Лема 2.20. *Справджується співвідношення* $\lim\limits_{h\to 0+} Q_\lambda^{(h)}(t, x, \varphi) = Q_\lambda(t, x, \varphi)$ *рівномірно відносно* $x \in \mathbb{R}^d$ *та локально рівномірно відносно* $t \in [0, \infty)$ *та* $\lambda > 0$.

Доведення. Використовуючи просту нерівність $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$, що справджується при всіх $a > 0$ та $b > 0$, можемо записати наступний ланцюжок нерівностей

$$|Q_\lambda^{(h)}(t, x, \varphi) - Q_\lambda(t, x, \varphi)| \leq \lambda \|\varphi\| \mathbb{E}_x |\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p)| \leq \\ \leq \lambda \|\varphi\| \left(\mathbb{E}_x (\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p))^2\right)^{1/2}.$$

Взявши до уваги рівності (2.112) та (2.114), одержуємо наступне співвідношення

$$\mathbb{E}_x(\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p)) = \int_t^{t+h} d\tau \int_S g(\tau, x, y) p(y)\, d\sigma_y - \int_0^h d\tau \int_S g(\tau, x, y) p(y)\, d\sigma_y.$$

Отже, використовуючи оцінку (2.113), можемо записати нерівність

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\mathbb{E}_x(\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p))| \leq \\ \leq C \left[h^{1-1/\alpha} + \sup_{0\leq t\leq T} \left((t+h)^{1-1/\alpha} - t^{1-1/\alpha}\right)\right],$$

що правильна при всіх $T > 0$ та $h > 0$. Позначимо через $q_T(h)$ вираз в правій частині цієї нерівності.

Відповідно до твердження Леми 6.5 з [16], справджується наступна нерівність

$$\mathbb{E}_x(\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p))^2 \leq 2(f_t^{(h)}(x) + f_t(x))q_T(h)$$

при всіх $t \in [0, T]$ та $x \in \mathbb{R}^d$. Оскільки для таких (t, x) маємо

$$f_t^{(h)}(x) \leq C(T+h)^{1-1/\alpha} \text{ та } f_t(x) \leq CT^{1-1/\alpha},$$

можемо стверджувати, що

$$\mathbb{E}_x(\eta_t^{(h)}(p) - \eta_t(p))^2 \leq 4C(T+h_0)^{1-1/\alpha}q_T(h)$$

при всіх $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $h \in (0, h_0]$ (з довільними фіксованими $T > 0$ та $h_0 > 0$).

Оскільки $q_T(h) \to 0$, при $h \to 0+$, для довільного фіксованого $T > 0$, то

$$\sup_{0<\lambda\leq\Lambda} \sup_{0\leq t\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |Q_\lambda^{(h)}(t, x, \varphi) - Q_\lambda(t, x, \varphi)| \to 0,$$

при $h \to 0+$, для кожних $T > 0$ та $\Lambda > 0$. □

Формула Фейнмана-Каца дозволяє нам записати наступне інтегральне рівняння для $Q_\lambda^{(h)}$

$$\begin{aligned} Q_\lambda^{(h)}(t, x, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y)\varphi(y)\, dy - \\ -\lambda \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, x, y)Q_\lambda^{(h)}(\tau, y, \varphi)v_h(y)\, dy, \end{aligned} \tag{2.115}$$

де $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Перевіримо, що справджується співвідношення

$$\lim_{h\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(y)v_h(y)\, dy = \int\limits_S \psi(y)p(y)\, d\sigma_y$$

для кожної функції $\psi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Дійсно, міняючи порядок інтегрування, одержуємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(z) v_h(z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(z) \int\limits_S g(h,z,y) p(y)\, d\sigma_y\, dz =$$

$$= \int\limits_S p(y) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(z) g(h,z,y)\, dz\, d\sigma_y = \int\limits_S p(y) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(z) g(h,y,z)\, dz\, d\sigma_y.$$

Але ж $\lim\limits_{h\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(z) g(h,y,z)\, dz = \psi(y)$ рівномірно по $y \in S$. Тому потрібна рівність встановлена.

Перейшовши до границі (див. доведену вище лему) при $h \to 0+$ в рівнянні (2.115), одержимо наступне рівнянні для $Q_\lambda(t,x,\varphi)$ $(t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d)$

$$Q_\lambda(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\, dy - \\ -\lambda \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y) Q_\lambda(\tau,y,\varphi) p(y)\, d\sigma_y. \tag{2.116}$$

Випадок $d = 1$ майже нічим не відрізняється від розглянутого вище. Лише треба врахувати, що $S = \{0\}$, $p(x) \equiv p \in (0,\infty)$ і

$$f_t(x) = p \int\limits_0^t g(\tau,x,0)\, d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тоді функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ є домноженим на p локальним часом процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ в нулі (початку координат).

Для функції

$$Q_\lambda(t,x,\varphi) = \mathbb{E}_x(\varphi(x(t)) \exp\{-\lambda \eta_t(p)\}),$$

де $\lambda > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$, заданої при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, справджується співвідношення

$$Q_\lambda(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\varphi(y)\, dy - \lambda p \int\limits_0^t g(t-\tau,x,0) Q_\lambda(\tau,0,\varphi)\, d\tau \tag{2.117}$$

2.3.3 Процес з липучою мембраною.

Розглянемо $(\hat{x}(t), \hat{\mathcal{M}}_t, \mathbb{P}_x)$ — стандартний процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, де $\hat{x}(t) = x(\zeta_t)$, $\hat{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_{\zeta_t}$, а $\zeta_t = \inf\{s \geq 0 : s + \eta_s(p) \geq t\}$.

Теорема 2.21. *Для кожної $\varphi \in \mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$ $(d \geq 2)$ функція*

$$\hat{U}(\lambda, x, \varphi) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \varphi(\hat{x}(t))\, dt, \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

є розв'язком задачі (I), (II).

Доведення. Зосередимось на випадку обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$. Для гіперплощини доведення нічим не відрізняється від наведеного нижче.

Дію резольвентного оператора процесу $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$ можна обчислити наступним чином (див. [21, Гл. II, §6])

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(\hat{x}(t))\, dt = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(x(\zeta_t))\, dt = \\
&= \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))} \varphi(x(t))\, dt + \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))} \varphi(x(t))\, d\eta_t(p),
\end{aligned} \tag{2.118}$$

де $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Перший доданок в правій частині (2.118) можна знайти з рівняння (2.116). Домноживши обидві частини цього рівняння на $e^{-\lambda t}$ та зінтегрувавши відносно t по $(0, \infty)$, одержимо рівняння

$$U_1(\lambda, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} G(\lambda, x, y) \varphi(y)\, dy - \lambda \int_S G(\lambda, x, y) U_1(\lambda, y, \varphi) p(y)\, d\sigma_y, \tag{2.119}$$

де $G(\lambda, x, y) = \int_0^\infty g(t, x, y) e^{-\lambda t}\, dt$ та

$$U_1(\lambda, x, \varphi) = \int_0^\infty Q_\lambda(t, x, \varphi) e^{-\lambda t}\, dt = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))} \varphi(x(t))\, dt.$$

Щоб обчислити другий доданок в правій частині (2.118), зауважимо, що

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))}\varphi(x(t))\,d\eta_t(p) = \lim_{h\to 0+} \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))}\varphi(x(t))v_h(x(t))\,dt,$$

де $v_h(x) = \int\limits_S g(h,x,y)p(y)\,d\sigma_y$, $h>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, як і вище.

Оскільки

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\eta_t(p))}\varphi(x(t))v_h(x(t))\,dt = U_1(\lambda,x,\varphi\cdot v_h),$$

то з (2.119) маємо наступне рівняння для $U_2(\lambda,x,\varphi) = \lim\limits_{h\to 0+} U_1(\lambda,x,\varphi\cdot v_h)$

$$U_2(\lambda,x,\varphi) = \int_S G(\lambda,x,y)\varphi(y)p(y)\,d\sigma_y - \lambda\int_S G(\lambda,x,y)U_2(\lambda,y,\varphi)p(y)\,d\sigma_y. \tag{2.120}$$

Покладемо тепер $\hat U(\lambda,x,\varphi) = U_1(\lambda,x,\varphi)+U_2(\lambda,x,\varphi)$. Тоді

$$\mathbb{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(\hat x(t))\,dt = \hat U(\lambda,x,\varphi).$$

З рівнянь (2.119), (2.120) (див., також, підпункт 2.3.1.2) випливає те, що функція $\hat U$ задовольняє рівняння $\mathbf{A}\hat U(\lambda,\cdot,\varphi)(x) = \lambda\hat U(\lambda,x,\varphi)-\varphi(x)$ в області $x\in\mathbb{R}^d\setminus S$ для кожного $\lambda>0$. Це збігається з (I).

Як наслідок з підпункту 2.3.1.2 (див. Теорему 2.17), маємо наступні співвідношення ($x\in S$, $\lambda>0$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\nu(x)}U_1(\lambda,\cdot,\varphi)(x\pm) &= \int_{\mathbb{R}^d} G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)\varphi(y)\,dy- \\
&- \lambda\int_S G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)U_1(\lambda,y,\varphi)p(y)\,d\sigma_y \pm \lambda p(x)U_1(\lambda,x,\varphi), \\
\mathbf{B}_{\nu(x)}U_2(\lambda,\cdot,\varphi)(x\pm) &= \int_S G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)\varphi(y)p(y)\,dy \mp p(x)\varphi(x)- \\
&- \lambda\int_S G^{\nu(x)}(\lambda,x,y)U_2(\lambda,y,\varphi)p(y)\,d\sigma_y \pm \lambda p(x)U_2(\lambda,x,\varphi).
\end{aligned}$$

Тоді функція $\hat{U}$ задовольняє співвідношення ($\lambda > 0$, $x \in S$)

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda, \cdot, \varphi)(x+) - \mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda, \cdot, \varphi)(x-) = 2p(x)(\lambda\hat{U}(\lambda, x, \varphi) - \varphi(x)),$$

тобто умову (II). Теорема доведена. □

У випадку $d = 1$ в доведенні теореми треба було б писати:

$$U_1(\lambda, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} G(\lambda, x, y)\varphi(y)\, dy - \lambda p G(\lambda, x, 0)U_1(\lambda, 0, \varphi);$$

$$U_2(\lambda, x, \varphi) = G(\lambda, x, 0)\varphi(0) - \lambda p G(\lambda, x, 0)U_2(\lambda, 0, \varphi).$$

Тоді

$$2c\mathbf{B}U_1(\lambda, \cdot, \varphi)(0\pm) = 2c \int_{\mathbb{R}} \mathbf{B}G(\lambda, \cdot, y)(0)\varphi(y)\, dy \pm \lambda p U_1(\lambda, 0, \varphi);$$

$$2c\mathbf{B}U_2(\lambda, \cdot, \varphi)(0\pm) = \mp p\varphi(0) \pm \lambda p U_2(\lambda, 0, \varphi).$$

Отже, для $\hat{U} = U_1 + U_2$ маємо співвідношення

$$\lambda\hat{U}(\lambda, 0, \varphi) - \varphi(0) = \frac{1}{2p} 2c \left[\mathbf{B}\hat{U}(\lambda, \cdot, \varphi)(0+) - \mathbf{B}\hat{U}(\lambda, \cdot, \varphi)(0-)\right],$$

яке збігається з умовою (II) у випадку $d = 1$ і $S = \{0\}$.

2.3.4 Деякі прикінцеві зауваження.

Легко зрозуміти, що справджується наступне співвідношення (див. позначення в 2.3.1.2)

$$\hat{U}(\lambda, x, \varphi) = U(\lambda, x, \varphi) + \lambda V(\lambda, x, \varphi \cdot p) - \lambda V(\lambda, x, \hat{u} \cdot p)$$

при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та кожній функції $\varphi \in \mathbb{H}_b(\mathbb{R}^d)$. Зауважимо, що функції $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, $(\varphi(x)p(x))_{x \in S}$ та $(\hat{u}(t, x, \varphi)p(x))_{t>0, x \in S}$ обмежені на своїх областях визначення.

Оскільки при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$ виконується

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}v(t,\cdot,\psi)(x) = \int\limits_S \mathbf{A}g(0+,\cdot,y)(x)\psi(t,y)\,d\sigma_y + \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \mathbf{A}^2 g(t-\tau,\cdot,y)(x)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y,$$

для кожної неперервної функції ψ, що задовольняє умову (2.98), використовуючи нерівності (1.11) та (1.12), можна одержати наступну оцінку

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}v(t,\cdot,\psi)(x)\right| \le Ct^{-\beta}(1+t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus S.$$

Тоді функція $\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}v(t,\cdot,\psi)(x)\right)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d\setminus S}$ допускає перетворення Лапласа за змінною t. Тепер вже ясно, що функції

$$(\lambda \mathbf{A}V(\lambda,\cdot,\varphi\cdot p)(x))_{\lambda>0}, \quad (\lambda \mathbf{A}V(\lambda,\cdot,\hat{u}\cdot p)(x))_{\lambda>0}$$

і, отже, $(\mathbf{A}\hat{U}(\lambda,x,\varphi))_{\lambda>0}$ є перетвореннями Лапласа при кожному $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$.

Взявши до уваги співвідношення (I), яке функція $\hat{U}$ задовольняє, приходимо до твердження, що функція $(\lambda\hat{U}(\lambda,x,\varphi) - \varphi(x))_{\lambda>0}$ є перетворенням Лапласа при кожному $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$. Це означає, що справджується умова (i). Умова (ii), очевидно, також справджується.

Висновки до розділу 2.

В цьому розділі розглядаються потенціали простого шаду для псевдодиференціального рівняння, пов'язаного із симетричним стійким випадковим процесом. Носієм потенціалу виступає обмежена замкнена досить гладка поверхня або ж гіперплощина.

Основним результатом цього розділу є доведення теореми про стрибок результату дії оператора $\mathbf{B}$ на потенціал простого шару в напрямі конормалі до поверхні-носія в точках цієї поверхні. Досліджені властивості потенціалу простого шару і названа теорема дозволили побудувати фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач. Розв'язки розглянутих задач є обмеженими при обмежених початкових умовах та мають напівгрупову властивість. Проте, тільки у випадку симетричної третьої початково-крайової задачі, її фундаментальний розв'язок є щільністю ймовірності переходу деякого процесу Маркова. Цей процес утворюється з вихідного симетричного стійкого процесу убиванням останнього з певною інтенсивністю на граничній поверхні.

Крім того, в цьому розділі доведено існування перетворення Лапласа за змінною часу потенціала простого шару та досліджені властивості такого перетворення. Зокрема, встановлена теорема про стрибок результату дії оператора $\mathbf{B}$ на зображення потенціалу простого шару в напрямі конормалі до поверхні-носія в точках цієї поверхні за умови обмеженої неперервної густини потенціалу. Це дало змогу побудувати випадковий процес, який моделює липучість даної поверхні. Такий процес побудовано з допомогою деякої випадкової заміни часу в симетричному стійкому випадковому процесі з допомогою функціоналу типу локального часу на поверхні.

Результати розділу 2 опубліковано в [61, 63–65, 68] та анонсовано в [80, 82, 84–89].

Розділ 3

Адитивне збурення симетричних α-стійких випадкових процесів.

В цьому розділі розглядатимемо збурення інфінітезимального оператора $\mathbf{A}$ симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою додавання до нього оператора виду $(a(\cdot), \mathbf{B})$, де a — деяка вимірна $\mathbb{R}^d$-значна функція на $\mathbb{R}^d$ (можливо і узагальнена). Позначимо через $\mathbf{B}_a$ оператор $(a, \mathbf{B})$ з деяким ненульовим вектором $a \in \mathbb{R}^d$. Зауважимо, що в розділі 2 через $\mathbf{B}_\nu$ позначався оператор $(2c\nu, \mathbf{B})$.

Таким чином, нас цікавить побудова напівгрупи перетворень простору $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, для якої дія її інфінітезимального оператора на функцію φ зводилась би до суми $\mathbf{A}\varphi + (a(\cdot), \mathbf{B}\varphi)$. З точки зору диференціальних рівнянь це означає, що ми маємо від задачі Коші

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} =& \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d;\\ u(0+,x) =& \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

розв'язком якої є напівгрупа $u(t,\cdot,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,\cdot,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, перейти до наступної задачі. Для заданої функції $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ розшукується така функція $(\hat{u}(t,x))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial \hat{u}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\hat{u}(t,\cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}\hat{u}(t,\cdot)(x))$$

в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та задовольняє початкову умову

$$\hat{u}(0+, x) = \varphi(x)$$

при всіх $x \in \mathbb{R}^d$.

Якщо припустити існування фундаментального розв'язку цієї задачі, тобто, такої функції $(\hat{g}(t, x, y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$, що

$$\hat{u}(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y)\varphi(y)\, dy$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ і це для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то маємо, так звані, рівняння збурення

$$\begin{aligned} \hat{g}(t, x, y) &= g(t, x, y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z)(a(z), \mathbf{B}\hat{g}(\tau, \cdot, y)(z))\, dz, \\ \hat{g}(t, x, y) &= g(t, x, y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t - \tau, x, z)(a(z), \mathbf{B}g(\tau, \cdot, y)(z))\, dz. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Напівгрупу перетворень простору $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, яка б відповідала операторові $\mathbf{A}\varphi + (a(\cdot), \mathbf{B}\varphi)$ в такий же спосіб, як напівгрупа $u(t, \cdot, \varphi)_{t>0}$ відповідає операторові $\mathbf{A}$, можна будувати наступним чином. Спочатку доводимо факт існування та єдиності розв'язку рівнянь збурення. Після цього слід перевірити, що цей розв'язок задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена (див. Твердження 1.2). Якщо виявиться, що функція $\hat{g}$ приймає лише невід'ємні значення і $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y)\, dy \leq 1$ при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$, то вона може розглядатись, як щільність ймовірності переходу деякого процесу Маркова в $\mathbb{R}^d$ (можливо обривного). Якщо ж функція $\hat{g}$ не є невід'ємною, але $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t, x, y)\, dy \equiv 1$, то вона породжує лише псевдопроцес (в сенсі робіт [5, 14, 15, 45]), на який можуть бути перенесені деякі поняття теорії випадкових процесів, наприклад, поняття локального часу. В наступних пунктах цього розділу слідуватимемо описаному плану.

Симетричні стійкі випадкові процеси (та деякі більш загальні процеси) збурювалися оператором виду $(a(x), \nabla)$ з більш чи менш сингулярною функцією $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ в багатьох публікаціях таких, як, наприклад, [12, 25, 30, 35, 91,93,105]. Особливістю результатів, що представляються тут, є використання оператора $\mathbf{B}$ замість ∇, як його аналога для всіх $\alpha \in (1,2)$.

3.1 Збурення з коефіцієнтом із $\mathbf{L_p}$.

3.1.1 Рівняння збурення.

Розглянемо перше з рівнянь (3.1). Шукатимемо його розв'язок у вигляді

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)|a(z)|\,dz, \tag{3.2}$$

де функція $V(t,x,y)$ задовольняє рівняння

$$V(t,x,y) = V_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)|a(z)|\,dz, \tag{3.3}$$

в якому

$$V_0(t,x,y) = (\mathbf{B}g(t,\cdot,y)(x), e(x)) = \frac{1}{c\,\alpha}\frac{(y-x,e(x))}{t}g(t,x,y). \tag{3.4}$$

Тут функція $(e(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ визначається рівністю $e(x) = \dfrac{1}{|a(x)|}a(x)$ для $x \in \mathbb{R}^d$ таких, що $|a(x)| \neq 0$ і довільним чином (зі збереженням вимірності) в іншому випадку.

Рівняння (3.3) розв'язується методом послідовних наближень, тобто його розв'язок може бути знайдений у вигляді

$$V(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,y), \tag{3.5}$$

де $V_0(t,x,y)$ визначається рівністю (3.4), а для $k \geq 1$ справджується наступне рекурентне співвідношення

$$V_k(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_{k-1}(\tau,z,y)|a(z)|\,dz.$$

Доведемо існування та дослідимо деякі властивості збурення (розв'язку рівнянь (3.1)) з функцією a, яка задовольняє певну умову інтегровності. Нагадаємо деякі нерівності, що будуть нам потрібні далі.

Перша з них вже неодноразово використовувалась і виглядає наступним чином

$$g(t,x,y) \le N \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}}, \tag{3.6}$$

де $N > 0$ деяка стала, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. В роботі [29] доведено, що

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha+k}} \frac{\tau^{\gamma/\alpha}}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+\alpha+l}}\,dz \le \\ \le C\left[B\left(\frac{\beta-k}{\alpha}, 1+\frac{\gamma}{\alpha}\right) t^{\frac{\beta+\gamma-k}{\alpha}} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha+l}} + \right. \\ \left. + B\left(1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma-l}{\alpha}\right) t^{\frac{\beta+\gamma-l}{\alpha}} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha+k}} \right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

для деяких сталих β, γ, k, l, які задовольняють нерівності: $-\alpha < k < \beta$, $-\alpha < l < \gamma$, з деякою сталою $C > 0$, що залежить лише від d, α, k та l. Тут $B(\cdot,\cdot)$ є бета-функцією Ейлера.

Крім того використовуватимемо стандартні позначення

$$\|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^p\,dx \right)^{1/p}, \quad \|a\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |a(x)|.$$

Теорема 3.1. *Нехай функція $(a(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ задовольняє умову: $a \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з деяким $p > d + \alpha$ (можливо, $p = \infty$).*

Збурення $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ існує та має наступні властивості:

- *задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,z)\hat{g}(s,z,y)\,dz = \hat{g}(t+s,x,y), \quad t > 0,\ s > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d;$$

- *як функція третього аргумента (при фіксованих перших двох) є абсолютно інтегровним і* $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1$.

Перш, ніж доводить цю теорему, доведемо деяке допоміжне твердження.

Лема 3.2. *Справджується наступна рівність*

$$\mathbf{B}\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,\cdot,z)V(\tau,z,y)|a(z)|\,dz\right)(x) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{B}g(t-\tau,\cdot,z)(x)V(\tau,z,y)|a(z)|\,dz.$$

Доведення. Пригадаємо наступне представлення дії оператора $\mathbf{B}$ на обмежену ліпшицеву функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$:

$$\mathbf{B}\phi(x) = \frac{q_\alpha}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\phi(x+u)-\phi(x)}{|u|^{d+\alpha}}\,u\,du, \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

де $q_\alpha = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((d+\alpha)/2)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi^{(d+1)/2}\Gamma((\alpha+1)/2)}$.

Поряд з оператором $\mathbf{B}$ розглянемо сім'ю операторів $\{\mathbf{B}^{(\varepsilon)} : \varepsilon > 0\}$, що діють на ліпшицеву обмежену функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ відповідно до такого правила

$$\mathbf{B}^{(\varepsilon)}\varphi(x) = \frac{q_\alpha}{\alpha}\int\limits_{|u|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x+u)-\varphi(x)}{|u|^{d+\alpha}}\,u\,du.$$

Ясно, що справджується співвідношення $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\mathbf{B}^{(\varepsilon)}\varphi(x) = \mathbf{B}\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ для всіх описаних вище функцій φ.

Нерівності (3.6), (3.10) дозволяють стверджувати, що для кожного $T>0$ при всіх $0<\tau<t\le T$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$, $z\in\mathbb{R}^d$, $u\in\mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$|(g(t-\tau,x+u,z)-g(t-\tau,x,z))V(\tau,z,y)|a(z)|| \le$$

$$\le \frac{NC_T|a(z)|}{|u|^{d+\alpha-1}}\left(\frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x-u|)^{d+\alpha}} + \frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha}}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+\alpha-1}}.$$

Спочатку розглянемо випадок скінченного p. Використовуючи нерівності Гельдера та Мінковського, при кожних $0 < t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^d$ можемо записати нерівність

$$I = \int_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} |(g(t-\tau, x+u, z) - g(t-\tau, x, z))V(\tau, z, y)|a(z)|| \, dz \le$$

$$\le C_T N \|a\|_p T^{1/p} \times$$

$$\times \left[\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(t-\tau)^q}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x-u|)^{(d+\alpha)q}} \frac{1}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{(d+\alpha-1)q}} \, dz \right)^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(t-\tau)^q}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{(d+\alpha)q}} \frac{1}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{(d+\alpha-1)q}} \, dz \right)^{1/q} \right],$$

в якій число q визначається співвідношенням $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Легко бачити, що інтеграли в правій частині цієї нерівності задовольняють умови застосування нерівності (3.7). Тому згідно з нею маємо, що

$$I \le K_T \left(\frac{t^{1-\frac{d+\alpha}{\alpha p}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha-1}} + \frac{t^{1-\frac{d+\alpha}{\alpha p}+\frac{1}{\alpha}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{1-\frac{d+\alpha}{\alpha p}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} + \frac{t^{1-\frac{d+\alpha}{\alpha p}+\frac{1}{\alpha}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \right) \le$$

$$\le \tilde{K}_T t^{1-\frac{d+\alpha}{\alpha p}} \left(\frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha-1}} + \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \right),$$

де $K_T > 0$ і $\tilde{K}_T > 0$ — деякі сталі.

Якщо ж $p = \infty$, то маємо

$$\left| \frac{u}{|u|^{d+\alpha}} (g(t-\tau, x+u, z) - g(t-\tau, x, z))V(\tau, z, y)|a(z)| \right|$$

$$\le \frac{N\|a\|_\infty}{|u|^{d+\alpha-1}} \left(\frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x-u|)^{d+\alpha}} + \frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha}} \right) \frac{1}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+\alpha-1}}.$$

Тому, використовуючи нерівність (3.7), одержимо

$$I \le K_T \left(\frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha-1}} + \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{t}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} + \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha}} \right) \le$$
$$\le \tilde{K}_T t \left(\frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x-u|)^{d+\alpha-1}} + \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \right)$$

з деякими сталими $K_T > 0$ і $\tilde{K}_T > 0$.

Звідси приходимо до висновку, що при кожних фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ функція

$$\left(g(t-\tau, x+u, z) - g(t-\tau, x, z))V(\tau, z, y)|a(z)| \frac{u}{|u|^{d+\alpha}} \right)_{u \in \mathbb{R}^d, \tau \in (0,t), z \in \mathbb{R}^d}$$

інтегровна на кожній множині $(u, \tau, z) \in \{|u| \ge \varepsilon\} \times (0; t) \times \mathbb{R}^d$ з $\varepsilon > 0$.

Таким чином, використовуючи теорему Фубіні, одержуємо при кожному $\varepsilon > 0$ наступну рівність

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}^{(\varepsilon)} \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau, \cdot, z)V(\tau, z, y)|a(z)|\, dz \right)(x) = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{B}^{(\varepsilon)} g(t-\tau, \cdot, z)(x)V(\tau, z, y)|a(z)|\, dz. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Нерівності (3.6), (3.7) та $|\mathbf{B}g(t, \cdot, y)(x)| \le \dfrac{const}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}$ з врахуванням (3.7) показують, що інтеграл $\displaystyle\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{B}g(t-\tau, \cdot, z)(x)V(\tau, z, y)|a(z)|\, dz$ існує. Для завершення доведення леми досить тепер перейти до границі при $\varepsilon \to 0+$ в рівності (3.8). □

Доведення Теореми 3.1. Формули (3.4), (3.6) та (3.7) дозволяють нам записати нерівність

$$|V_0(t, x, y)| \le \frac{N}{c\,\alpha} \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}. \tag{3.9}$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$ та $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ справджується наступна оцінка

$$|V_k(t,x,y)| \le \frac{N}{c\alpha} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1}} |V_{k-1}(\tau,z,y)||a(z)|\, dz.$$

Використовуючи нерівність (3.7) можна показати за індукцією по k, що функції V_k для $k = 0, 1, 2, \dots$ задовольняють нерівності (p скінченне)

$$|V_k(t,x,y)| \le \|a\|_p^k \left(\frac{N}{c\,\alpha}\right)^{k+1} C^{k\nu} R_k \frac{t^{k\frac{\rho}{\alpha}}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \le$$
$$\le \|a\|_p^k \left(\frac{N}{c\,\alpha}\right)^{k+1} C^{k\nu} R_k\, t^{(k\rho-d+1)\frac{1}{\alpha}-1},$$

де $\nu = 1 - \frac{1}{p}$, $\rho = 1 - \frac{d}{p}$, а числова послідовність $\{R_k : k \ge 0\}$ визначається рекурентним співвідношенням

$$R_k = R_{k-1} \left(B\left(\frac{p-d-\alpha}{\alpha(p-1)}, 1 + (k-1)\frac{p-d}{\alpha(p-1)}\right) + \right.$$
$$\left. + B\left(1, \frac{p-d-\alpha}{\alpha(p-1)} + (k-1)\frac{p-d}{\alpha(p-1)}\right)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

з $R_0 = 1$.

Якщо ж $p = \infty$, то

$$|V_k(t,x,y)| \le Q_k \frac{t^{k/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

де $Q_0 = \dfrac{N}{c\alpha}$, а при $k \ge 1$ виконується

$$Q_k = \frac{NC\|a\|_\infty}{c\alpha} Q_{k-1} \left[B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{k-1}{\alpha}\right) + B\left(1, \frac{k}{\alpha}\right)\right].$$

Таким чином, ряд в правій частині рівності (3.5) збігається рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та локально рівномірно по $t > 0$. Отже, функція V задана цією рівністю є розв'язком рівняння (3.3). Додатково одержуємо, що цей розв'язок задовольняє нерівність

$$|V(t,x,y)| \le C_T \frac{1}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \tag{3.10}$$

при всіх $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $0 < t \le T$, де C_T — деяка додатна стала, яка можливо залежить від $T > 0$.

Зауваження 3.1. Функція $V(t,x,y)$ є єдиним розв'язком рівняння (3.3) в класі функцій, що задовольняють нерівність (3.10).

Остаточно, оскільки справджується рівність

$$(\mathbf{B}\hat{g}(t,\cdot,y)(x), e(x)) = V(t,x,y),$$

то функція

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)|a(z)|\,dz, \tag{3.11}$$

є збуренням щільності ймовірності переходу симетричного α-стійкого випадкового процесу.

Доведемо, що функція $\hat{g}(t,x,y)$ задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\hat{g}(t+s,x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(s,x,z)\hat{g}(t,z,y)\,dz \tag{3.12}$$

для всіх $s>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$. Перш за все зауважимо, що функція $g(t,x,y)$ задовольняє рівняння (3.12).

Покладемо при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad u(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy,$$

$$W(t,x,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} V(t,x,y)\varphi(y)\,dy,$$

де $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Відзначимо, що функція $W(t,x,\varphi)$ є єдиним розв'язком наступного рівняння

$$W(t,x,\varphi) = W_0(t,x,\varphi) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z)W(\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz, \tag{3.13}$$

де $W_0(s,x,\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} V_0(s,x,y)\varphi(y)\,dy$.

Тоді функція $\hat{u}(t,x,\varphi)$ може бути задана рівністю (див. (3.11))

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)W(\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz.$$

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t+s,x,\varphi) = u(t+s,x,\varphi) + \int\limits_0^{t+s} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t+s-\tau,x,z)W(\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)u(t,y,\varphi)\,dy + \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)\,dy \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,y,z)W(\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz + \\
+ \int\limits_t^{s+t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t+s-\tau,x,z)W(\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)\hat{u}(t,y,\varphi)\,dy + \int\limits_0^s d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(s-\tau,x,z)W(t+\tau,z,\varphi)|a(z)|\,dz.
\end{aligned}$$

Таким чином, функція $(W_t(s,x,\varphi))_{s>0,x\in\mathbb{R}^d}$, яка при кожному значенні параметра $t>0$ та кожній функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ задається рівністю $W_t(s,x,\varphi) = W(t+s,x,\varphi)$, задовольняє рівняння (3.13), в якому функція φ замінена на $\hat{u}(t,\cdot,\varphi)$. Тоді $W(t+s,x,\varphi) = W(s,x,\hat{u}(t,\cdot,\varphi))$ і ми приходимо до рівності $\hat{u}(t+s,x,\varphi) = \hat{u}(s,x,\hat{u}(t,\cdot,\varphi))$ або, що те ж саме,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t+s,x,y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(s,x,z) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,z,y)\varphi(y)\,dy\,dz = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(s,x,z)\hat{g}(t,z,y)\,dz.
\end{aligned}$$

Отже, співвідношення (3.12) доведено, оскільки функція φ є довільною обмеженою неперервною функцією.

Далі, одержуємо, що $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1$ з рівностей (3.2) та (3.3), оскільки, очевидно, справджуються співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\,dy = 1 \quad \text{та} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} V_0(t,x,y)\,dy = \left(\mathbf{B}\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,\cdot,y)\,dy\,(x), e(x)\right) = 0$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, та єдиність розв'язку рівняння (3.3) приводить до тотожності $\int\limits_{\mathbb{R}^d} V(t,x,y)\,dy \equiv 0$. Цим і завершується доведення теореми. □

Зауваження 3.2. Сім'я операторів $(T_t)_{t>0}$ визначених на кожній обмеженій неперервній функції φ, заданій на $\mathbb{R}^d$, рівністю $T_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, є напівгрупою операторів з генератором $\mathbf{A} + (a(x), \mathbf{B})$. Але, не існує жодного процесу Маркова в $\mathbb{R}^d$, який відповідав би цій напівгрупі, оскільки вона не залишає інваріантною множину функцій з невід'ємними значеннями (див. далі пункт 3.2).

3.1.2 Задача Коші.

Спочатку додатково припустимо, що функція a є достатньо гладкою. Для спрощення вважатимемо, що $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (це простір всіх $\mathbb{R}^d$-значних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ функцій з компактним носієм). Тоді функція

$$\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\hat{g}(t,x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) g(t,x,y)\,dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y) \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(\tau,y,z)\varphi(z)\,dz|a(y)|\,dy$$

є єдиним (в класі функцій, що прямують до нуля на нескінченності) розв'язком задачі Коші (1.20) з правою частиною $f(t,x) = |a(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(t,x,z)\varphi(z)\,dz$ (див. [17, п. 4.2] або [29]).

Зауважимо, що $V(t,x,y) = (\mathbf{B}\hat{g}(t,\cdot,y)(x), e(x))$. Тоді

$$f(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{B}\hat{g}(t,\cdot,z)(x), a(x))\varphi(z)\,dz = (a(x), \mathbf{B}\hat{u}(t,\cdot)(x))$$

і функція $\hat{u}(t,x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}u(t,\cdot)(x)), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.14}$$

для довільної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$.

Наступне твердження дозволяє нам сконструювати узагальнений розв'язок цієї задачі.

Теорема 3.3. *Нехай задані функції $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, що задовольняють умови теореми 3.1. Позначимо через $\hat{g}$ та $\tilde{g}$ розв'язки рівнянь типу* (3.1), *в яких функція a замінена на $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, відповідно. Тоді справджується нерівність*

$$|\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y)| \le H_T \|\hat{a}-\tilde{a}\|_p \frac{t^{1-\frac{d}{\alpha p}}}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p > d+\alpha$ скінченне, чи

$$|\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y)| \le H_T \|\hat{a}-\tilde{a}\|_\infty \frac{t}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p=\infty$, на множині $(0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ для кожного $T>0$, де додатна стала H_T залежить тільки від c, α, $\|\hat{a}\|_p$, $\|\tilde{a}\|_p$, T.

Доведення. З (3.1) легко побачити, що

$$\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z) W(\tau,z,y)\, dz, \tag{3.15}$$

де $W(\tau,z,y) = \hat{V}(\tau,z,y)|\hat{a}(z)| - \tilde{V}(\tau,z,y)|\tilde{a}(z)|$ та функції $\hat{V}$ і $\tilde{V}$ є розв'язками рівняння (3.3) з функціями $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, відповідно. Взявши до уваги (3.3), для функції W можемо написати наступну рівність

$$\begin{aligned} W(t,x,y) = W_0(t,x,y) + |\hat{a}(x)| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \hat{V}_0(t-\tau,x,z) W(\tau,z,y)\, dz + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} W_0(t-\tau,x,z) \tilde{V}(\tau,z,y) |\tilde{a}(z)|\, dz, \end{aligned} \tag{3.16}$$

де $W_0(t,x,y) = (\mathbf{B}g(t,\cdot,y)(x), a(x) - \tilde{a}(x))$.

Оцінимо перший та третій доданки в правій частині рівності (3.16). Простим наслідком формул (3.4) та (3.9) є наступна нерівність

$$|W_0(t,x,y)| \le |\mathbf{B}g(t,\cdot,y)(x)||\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)| \le \frac{N}{c\alpha}\frac{|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}$$

для $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$. Використовуючи нерівності (3.7), (3.10) та попередню нерівність можна показати, що для $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in (0,T]$ та всіх $T > 0$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} W_0(t-\tau,x,z)\tilde{V}(\tau,z,y)|\tilde{a}(z)|\,dz\right| \le$$
$$\le K_T|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|\frac{t^{1/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

де K_T — деяка додатна стала, що можливо залежить від T.

Отже, можемо записати наступну нерівність

$$\begin{aligned}|W(t,x,y)| \le Q_T\frac{|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}+ \\ + \frac{N}{c\alpha}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W(\tau,z,y)|}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1}}\,dz,\end{aligned} \tag{3.17}$$

що справджується при $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in (0,T]$ для кожного $T > 0$, де $Q_T > 0$ деяка стала, можливо залежна від T.

Ітеруючи нерівність (3.17) одержимо при $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in (0,T]$ для кожного $T > 0$

$$|W(t,x,y)| \le \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t,x,y), \tag{3.18}$$

де $R_0(t,x,y) = Q_T\dfrac{|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}$ та для $k \ge 1$ виконується наступне рекурентне співвідношення

$$R_k(t,x,y) = \frac{N}{c\alpha}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{R_{k-1}(\tau,z,y)}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1}}\,dz.$$

У випадку скінченного p, використовуючи нерівність Гельдера та нерівність (3.7), індукцією по k можемо показати, що функції R_k при $k = 1, 2, \ldots$ задовольняють нерівності

$$
\begin{aligned}
0 \le R_k(t,x,y) \le Q_T \left(\frac{N}{c\alpha}\right)^k C^{k-1/p} \left(2B\left(1, \frac{p-d-\alpha}{\alpha(p-1)}\right)\right)^{1-1/p} \times \\
\times \left(B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{p-d}{\alpha p}\right) + B\left(1, 1 + \frac{2p-d}{\alpha p}\right)\right) \times \ldots \\
\times \left(B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{(k-1)p-d}{\alpha p}\right) + B\left(1, 1 + \frac{kp-d}{\alpha p}\right)\right) \times \\
\times \frac{t^{(kp-d)/(\alpha p)}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \|\hat{a} - \tilde{a}\|_p.
\end{aligned}
$$

Якщо ж $p = \infty$, то маємо

$$
\begin{aligned}
0 \le R_k(t,x,y) \le Q_T \left(\frac{N}{c\alpha}\right)^k C^{k} \left(2B\left(1, \frac{1}{\alpha}\right)\right) \times \\
\times \left(B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\alpha}\right) + B\left(1, 1 + \frac{2}{\alpha}\right)\right) \times \ldots \\
\times \left(B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{k-1}{\alpha}\right) + B\left(1, 1 + \frac{k}{\alpha}\right)\right) \times \\
\times \frac{t^{k/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \|\hat{a} - \tilde{a}\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Отже, ми робимо висновок, що ряд в нерівності (3.18) збігається рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та локально рівномірно по $t > 0$. Тому справджується наступна нерівність

$$
\begin{aligned}
|W(t,x,y)| \le M_T \frac{\|\hat{a} - \tilde{a}\|_p}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} t^{\frac{p-d}{\alpha p}} + Q_T \frac{|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \\
\le \tilde{M}_T \frac{\|\hat{a} - \tilde{a}\|_p + |\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}
\end{aligned}
$$

(у випадку скінченного p), чи, якщо $p = \infty$,

$$
\begin{aligned}
|W(t,x,y)| \le M_T \frac{\|\hat{a} - \tilde{a}\|_\infty}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} t^{1/\alpha} + Q_T \frac{|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)|}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \le \\
\le \tilde{M}_T \frac{\|\hat{a} - \tilde{a}\|_\infty}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}
\end{aligned}
$$

при $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in (0,T]$ для кожного $T > 0$, де M_T, Q_T, $\tilde{M}_T$ деякі додатні сталі, що можливо залежать від T.

Далі нескладні обчислення з використанням формул (3.6),(3.7), (3.15) та нерівності Гельдера (для випадку скінченного p) приводять до твердження теореми. $\square$

Наслідок 3.3.1. *Нехай $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ та $\hat{g}$, $\tilde{g}$ такі ж, як в Теоремі 3.1. Покладемо*

$$\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad \tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Тоді справджується наступна нерівність ($p > d + \alpha$ включно з $p = \infty$)

$$|\hat{u}(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \le L_T \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \|\hat{a} - \tilde{a}\|_p$$

при $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < t \le T$ для кожного $T > 0$. Тут L_T деяка додатна стала, що можливо залежить від T.

Тепер відмовимось від додаткового обмеження на функцію a. Нехай задана $\mathbb{R}^d$-значна функція $(a(x))_{\mathbb{R}^d}$, яка задовольняє умову $\|a\|_p < \infty$ для деякого $p > d + \alpha$. Тоді існує послідовність функцій $a_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ така, що $\|a_n - a\|_p \to 0$, якщо $n \to \infty$. Відповідно до твердження Наслідку 3.3.1, можемо визначити функцію $\hat{u}(t,x)$ рівністю $\hat{u}(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n(t,x)$, де $\hat{u}_n(t,x)$ є побудованим вище розв'язком задачі Коші (3.14) з функцією a_n в коефіцієнті. Твердження Теореми 3.3 означає, що

$$\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy,$$

де $\hat{g}(t,x,y)$ є збуренням (з функцією a) щільності ймовірності переходу симетричного α-стійкого процесу. Саме в цьому сенсі ми говоримо, що функція $\hat{u}(t,x)$ є узагальненим розв'язком задачі Коші (3.14).

3.2 Збурення зі сталим коефіцієнтом.

В пункті 3.1 побудовано функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, що є узагальненим фундаментальним розв'язком псевдодиференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}u(t,\cdot)(x)), \tag{3.19}$$

де функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ вимірна і обмежена. Серед його властивостей слід відзначити виконання рівності Колмогорова-Чепмена ($s>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$)

$$\hat{g}(s+t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(s,x,z)\hat{g}(t,z,y)\,dz \tag{3.20}$$

та правильну при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ рівність

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy = 1. \tag{3.21}$$

Відкритим залишалось питання про невід'ємність функції $\hat{g}(t,x,y)$. В даному пункті дамо деяку відповідь на нього.

Нижче ми побудуємо у явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (3.19) у випадку сталої функції a, покажемо, що в цій ситуації він не є невід'ємним при $\alpha \neq 2$.

3.2.1 Фундаментальний розв'язок відповідної задачі Коші.

Як і в пункті 3.1 розглянемо функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, яка задається рівністю

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + |a|\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)\,dz, \tag{3.22}$$

де $a\in\mathbb{R}^d$ довільний (відмінний від нульового) сталий вектор, а функція $(V(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є сумою ряду

$$V(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,y), \tag{3.23}$$

де ($\hat{a} = \dfrac{1}{|a|} a$ — орт вектора a)

$$V_0(t,x,y) = (\mathbf{B} g(t,\cdot,y)(x), \hat{a}), \tag{3.24}$$

а при $k \geq 1$

$$V_k(t,x,y) = |a| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_{k-1}(\tau,z,y)\, dz \tag{3.25}$$

В пункті 3.1 доведено, що справджуються оцінки

$$|V_0(t,x,y)| \leq \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}, \tag{3.26}$$

$$|V_k(t,x,y)| \leq M \frac{N^k}{k!} \frac{t^{k/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \prod_{n=1}^{k-1} \left(1 + \frac{n}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{n}{\alpha} \right) \right), \tag{3.27}$$

де N і M деякі додатні сталі, і ряд (3.23) збігається локально рівномірно по $t > 0$ та рівномірно по $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Крім того, функція (3.22) є фундаментальним розв'язком рівняння (3.19) і виконуються рівності (3.20), (3.21).

Далі нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 3.4. *Нехай $\varphi \in \mathbb{F}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^d)$ (див. пункт 1.2.1). Тоді для функції $f(x,y) = \varphi(x-y)$ справджується рівність $\mathbf{B} f(\cdot,y)(x) = -\mathbf{B} f(x,\cdot)(y)$.*

Доведення. Розглянемо при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_x(y) = f(x,y)$ та при фіксованому $y \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_y(x) = f(x,y)$.

Зауважимо, що ці функції належать до класу $\mathbb{F}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^d)$. Дійсно,

$$f_x(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,\lambda)} \Phi(-\lambda) e^{-i(x,\lambda)}\, d\lambda$$

і при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ функція $|\lambda|^{\alpha-1} |\Phi(-\lambda) e^{-i(x,\lambda)}| = |\lambda|^{\alpha-1} |\Phi(-\lambda)|$ інтегровна на $\mathbb{R}^d$. Аналогічно для функції $f_y(x)$.

Тоді за означенням оператора $\mathbf{B}$ матимемо

$$\mathbf{B}f(\cdot,y)(x) = \mathbf{B}f_y(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda e^{i(x-y,\lambda)}\varPhi(\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathbf{B}_y f(x,\cdot)(y) = \mathbf{B}f_x(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda e^{i(y-x,\lambda)}\varPhi(-\lambda)\,d\lambda.$$

Зробивши заміну змінної $\lambda = -\mu$ в інтегралі другої рівності, одержимо твердження леми. $\square$

Зауваження 3.3. Функція $g(t,x,y)$ як функція від (x,y) при фіксованому $t>0$ задовольняє умову леми 3.4. Крім того, $g(t,x,y) = g_t(x-y)$, причому $g_t \in \mathbb{F}_{k(\alpha-1)}$ з довільним $k \in \mathbb{N}$.

Лема 3.5. *Нехай* $\varphi \in \mathbb{F}_{m(\alpha-1)}(\mathbb{R}^d)$ *з деяким* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді для функції* $f(x,y) = \varphi(x-y)$ *мають місце рівності (нагадаємо, що* $\mathbf{B}_a = (a,\mathbf{B})$*)*

$$\mathbf{B}_a^k(\mathbf{B}_a^l f(\cdot,\cdot)(y))(x) = \mathbf{B}_a^l(\mathbf{B}_a^k f(\cdot,\cdot)(x))(y) = (-1)^l\mathbf{B}_a^{k+l}f(\cdot,y)(x),$$

при всіх $k\in\mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ *таких, що* $k+l \le m$.

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}^d$ і розглянемо функцію

$$f(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(y,\lambda)}\varPhi(-\lambda)e^{-i(x,\lambda)}\,d\lambda.$$

Тоді

$$\mathbf{B}_a^l f(x,\cdot)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(y-x,\lambda)}\varPhi(-\lambda)\,d\lambda =$$

$$= (-1)^l\int\limits_{\mathbb{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(x,\lambda)}\varPhi(\lambda)e^{-i(y,\lambda)}\,d\lambda.$$

Зафіксувавши тепер $y \in \mathbb{R}^d$, одержимо

$$\mathbf{B}_a^k(\mathbf{B}_a^l f(\cdot,\cdot)(y))(x) =$$

$$= (-1)^l\int\limits_{\mathbb{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^k(i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(y-x,\lambda)}\varPhi(-\lambda)\,d\lambda =$$

$$= (-1)^l\int\limits_{\mathbb{R}^d} (i|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^{k+l} e^{i(x-y,\lambda)}\varPhi(\lambda)\,d\lambda = (-1)^l\mathbf{B}_a^{k+l}f(\cdot,y)(x).$$

Аналогічно одержуємо такий же вираз і для $\mathbf{B}_a^l(\mathbf{B}_a^k f(\cdot,\cdot)(x))(y)$. Лему доведено. $\square$

Зауваження 3.4. До функції $g(t,x,y)$ можна застосовувати оператор $\mathbf{B}_a$ по кожній із змінних x та y довільну скінченну кількість раз в будь-якому порядку без зміни результату.

Основний результат цього пункту міститься в наступному твердженні.

Теорема 3.6. *Фундаментальний розв'язок рівняння* (3.19) *зі сталою функцією $a(x) = a \in \mathbb{R}^d$ задається формулою*

$$\hat{g}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ i(|\lambda|^{\alpha-2} t\, a + x - y, \lambda) - c\, t|\lambda|^\alpha \right\} d\lambda,$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Доведення. Скористаємось зображеннями (3.22) і (3.23).

Доведемо, за індукцією, що для всіх $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ справджується рівність

$$V_k(t,x,y) = (-1)^{k+1} |a|^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1} g(t,x,\cdot)(y), \tag{3.28}$$

де $\hat{a} = \frac{1}{|a|}\, a$.

При $k = 0$ рівність (3.28) правильна (див. також (3.24)).

Нехай вона правильна при деякому $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді, враховуючи (3.25), маємо

$$V_{k+1}(t,x,y) = |a| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_k(\tau,z,y)\, dz.$$

Нерівності (3.26) і (3.27) дозволяють стверджувати, що інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_k(\tau,z,y)\, dz \tag{3.29}$$

збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ та $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким чином, маємо рівність

$$V_{k+1}(t,x,y) = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int\limits_0^t \tau^k\, d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{B}_{\hat{a}} g(t-\tau,\cdot,z)(x) \mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1} g(\tau,z,\cdot)(y)\, dz.$$

Далі для зручності введемо позначення

$$\triangle_x^u \varphi(x) \overset{def}{=} \varphi(x+u) - \varphi(x), \quad \Box_x^u \varphi(x) \overset{def}{=} |\varphi(x+u)| + |\varphi(x)|.$$

Тоді можемо записати, поклавши $K = \dfrac{1}{\varkappa\alpha}$,

$$\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) = K^{k+1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, \hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \triangle_y^{u_j} g(\tau, z, y)\, du_1 \dots du_{k+1},$$

$$\mathbf{B}_{\hat{a}} g(t-\tau, \cdot, z)(x) = K \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, \hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \triangle_x^{u_0} g(t-\tau, x, z)\, du_0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} &V_{k+1}(t, x, y) = \\ &\quad = K^{k+2} \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int\limits_0^t \tau^k\, d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} dz \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, \hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \triangle_x^{u_0} g(t-\tau, x, z)\, du_0 \\ &\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, \hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \triangle_y^{u_j} g(\tau, z, y)\, du_1 \dots du_{k+1} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Підінтегральна функція в останній формулі може бути оцінена зверху за абсолютною величиною виразом

$$\begin{aligned} \tau^k \frac{1}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \Box_x^{u_0} \frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-1}} \times \\ \times \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \Box_y^{u_j} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |y-z|)^{d+\alpha-1}} \end{aligned}$$

Інтеграл від нього за (τ, z) по $(0, t) \times \mathbb{R}^d$ не перевищує (див. [29, Лема 5])

$$\begin{aligned} const \cdot t^{k+2+1/\alpha} \frac{1}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \times \\ \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{C \in C(k+1, j)} \left(t^{1/\alpha} + \left| y + \sum_{l \in C} u_l - x - u_0 \right| \right)^{-d-\alpha+1}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

де $C(k+1,j)$ множина комбінацій з $k+1$ перших натуральних чисел по j. Така функція інтегровна за $(u_0,u_1,\ldots,u_{k+1})$ по $D_\varepsilon = \prod\limits_{j=0}^{k+1}\{|u_j| \geq \varepsilon\}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Збіжність інтеграла (3.29) дозволяє перейти в інтегралі (3.31) по D_ε до границі при $\varepsilon \to 0+$. Причому, ми можемо попередньо змінити потрібним чином порядок інтегрування.

Отже, в інтегралі з рівності (3.30) можна змінити порядок інтегрування і, враховуючи лінійність різницевих операторів $\triangle^u$, одержати рівність

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t,x,y) &= \\ = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!}\int\limits_0^t \tau^k\,d\tau \mathbf{B}_{\hat{a}}&\left(\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1}\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,\cdot,z)g(\tau,z,\cdot)\,dz\,(y)\right)(x) = \\ &=\frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!}t^{k+1}\mathbf{B}_{\hat{a}}(\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1}g(t,\cdot,\cdot)(y))(x). \end{aligned}$$

З врахуванням тверджень Лем 3.4 і 3.5 маємо

$$V_{k+1}(t,x,y) = (-1)^{k+2}\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!}t^{k+1}\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+2}g(t,x,\cdot)(y).$$

Цим і завершується доведення рівностей (3.28). Крім того, з Леми 3.4 одержуємо, що при всіх $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ та $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$

$$V_k(t,x,y) = \frac{(|a|t)^k}{k!}\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1}g(t,\cdot,y)(x).$$

Тоді $V(t,x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(|a|t)^k}{k!}\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1}g(t,\cdot,y)(x)$ і

$$\begin{aligned} \hat{g}(t,x,y) =& g(t,x,y)+ \\ &+|a|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(|a|t)^k}{k!}\mathbf{B}_{\hat{a}}^{k+1}g(t,\cdot,y)(z)\,dz. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ряд в рівності (3.32) збігається рівномірно по $z \in \mathbb{R}^d$ і локально рівномірно по $\tau > 0$. Тому можливе почленне інтегрування цього ряду, після чого другий доданок правої частини рівності (3.32) прийме вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a|^{k+1}}{k!}\int\limits_0^t \tau^k\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)\mathbf{B}_{\hat a}^{k+1}g(\tau,\cdot,y)(z)\,dz =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|a|)^{k+1}}{k!}\int\limits_0^t \tau^k\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)\mathbf{B}_{\hat a}^{k+1}g(\tau,z,\cdot)(y)\,dz,$$

де враховано твердження Леми 3.4.

Аналогічні до наведених вище викладки дозволяють винести оператор $\mathbf{B}_{\hat a}^{k+1}$ по змінній y з-під інтеграла по z і одержати

$$\begin{aligned}\hat g(t,x,y) = g(t,x,y) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!}t^{k+1}\mathbf{B}_{\hat a}^{k+1}g(t,x,\cdot)(y) =\\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{B}_a^k g(t,\cdot,y)(x).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Врахувавши вигляд функції g, можемо записати

$$\mathbf{B}_a^k g(t,\cdot,y)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(i|\lambda|^{\alpha-2}(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^{\alpha}\}\,d\lambda$$

Отже,

$$\hat g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^{\alpha}\}\,d\lambda \tag{3.34}$$

Зауважимо, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k$ збігається локально рівномірно по λ на $\mathbb{R}^d$. Тому для кожного $r>0$ і $U_r=\{\lambda\in\mathbb{R}^d : |\lambda|\le r\}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{U_r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^{\alpha}\}\,d\lambda =\\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{U_r}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^{\alpha}\}\,d\lambda\end{aligned}\tag{3.35}$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{k!}\int\limits_{U_r}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^\alpha\}\,d\lambda\right|\le$$

$$\le\frac{(t|a|)^k}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\lambda|^{k(\alpha-1)}\exp\{-c\,t|\lambda|^\alpha\}\,d\lambda=R_k,$$

а останній інтеграл можна легко обчислити і одержати

$$R_k=\frac{(t|a|)^k}{k!}\frac{S_d}{\alpha}(c\,t)^{-\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right),$$

де S_d площа d-вимірної одиничної сфери, то ряд в правій частині рівності (3.35) збігається рівномірно по r на $(0,\infty)$, бо

$$\frac{R_{k+1}}{R_k}=\frac{|a|t}{k+1}(c\,t)^{1/\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\frac{d+(k+1)(\alpha-1)}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right)}\to0,\quad k\to\infty.$$

Перейшовши в рівності (3.35) до границі при $r\to\infty$, з врахуванням (3.34), одержимо

$$\hat g(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^\alpha\}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\{i(|\lambda|^{\alpha-2}t\,a+x-y,\lambda)-c\,t|\lambda|^\alpha\}\,d\lambda.$$

Теорема доведена. $\square$

3.2.2 Невід'ємність фундаментального розв'язку.

Явна формула для фундаментального розв'язку псевдодиференціального рівняння (3.19) зі сталою функцією $a(x)=a\in\mathbb{R}^d$ дозволяє зробити деякі висновки про його невід'ємність.

Розглянемо випадок $d=1$. Задавши деякі конкретні значення $c>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, можемо побудувати графіки функцій $\hat g(t,x,y)$, як функцій від y при різних значеннях $\alpha\in(1,2]$. На Рисунку 3.1 зображено

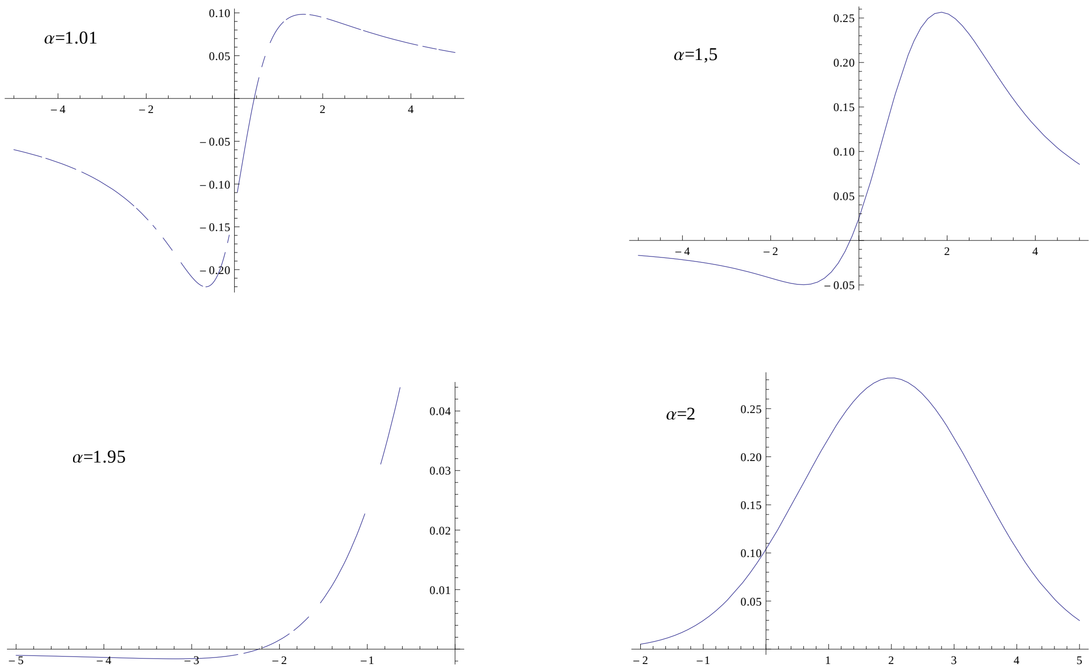

Рис. 3.1: Графіки функції $\hat{g}(t, x, y)$ при фіксованих (t, x).

такі графіки одержані з допомогою програмного середовища R (див. [101]). Ми взяли $c = 1/2$, $t = 1$, $x = 0$, $a = 2$.

Видно, що функція $\hat{g}(t, x, y)$ приймає від'ємні значення при $\alpha \in (1, 2)$ і тільки при $\alpha = 2$ маємо $\hat{g}(t, x, y) > 0$. Останній випадок відповідає дифузійному процесу зі сталим вектором переносу та одиничною дифузією. Такий процес утворюється адитивним збуренням вінерового процесу оператором (a, ∇), що як вище зазначалось є оператором $(a, \mathbf{B})$ при $\alpha = 2$.

3.3 Збурення з коефіцієнтом типу дельта-функції на поверхні.

3.3.1 Збурення з коефіцієнтом типу дельта-функції на обмеженій замкненій поверхні.

Нехай в просторі $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ задана деяка обмежена замкнена поверхня S класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$. Позначимо через $\nu(x)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в її точці x. Нехай $(q(x))_{x \in S}$ — деяка неперервна дійснозначна функція.

3.3.1.1 Збурення щільності ймовірності переходу.

Задамо функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z, \tag{3.36}$$

де функція $(w(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$w(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z, \tag{3.37}$$

в якому

$$g^{\nu(x)}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu(x)}g(t,\cdot,y)(x) = \frac{(y-x,\nu(x))}{c\alpha t}g(t,x,y). \tag{3.38}$$

В пункті 2.2.1 рівняння (3.37) розв'язане у вигляді суми ряду і його розв'язок для кожного $T>0$ при всіх $t\in(0,T]$, $x\in S$, $y\in S$ задовольняє оцінку $|w(t,x,y)| \le \dfrac{C_T}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}$ з деякою сталою $C_T>0$. При $(t,x,y)\in(0,T]\times S\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$ виконується $|w(t,x,y)| \le \dfrac{C_T}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}}$. Тут, як і вище, $\rho(y,S)$ — відстань від точки y до поверхні S. Крім того розв'язок рівняння (3.37) єдиний в класі функцій, що задовольняють останню оцінку.

Таким чином функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю (3.36) визначена коректно і справджуються оцінки (для кожного $T>0$)

$$|\hat{g}(t,x,y)| \le C_T\left(\frac{t^{1/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{1+\gamma}}+1\right)\frac{t^{1-1/\alpha}}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha-1-\gamma}}$$

при $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in S$;

$$|\hat{g}(t,x,y)| \le \frac{Nt}{(t^{1/\alpha}+|y-x|)^{d+\alpha}} + \frac{C_T t^{1-1/\alpha}}{(\rho(y,S))^{d+\alpha-1}}$$

при $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d\setminus S$ з деякими сталими $C_T>0$, $N>0$.

Крім того, функція $\tilde{w}(t,x,1) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} w(t,x,y)\,dy \equiv 0$, що випливає з рівняння

$$\tilde{w}(t,x,1) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,1)q(z)\,d\sigma_z,$$

яке задовольняє ця функція. Тут ми врахували, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\,dy = \mathbf{B}_{\nu(x)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,\cdot,y)(x)\,dy = \mathbf{B}_{\nu(x)} 1 \equiv 0.$$

Отже, справджується рівність $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy = 1$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Зауваження 3.5. Функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ можна було одержати як розв'язок рівняння ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z)\mathbf{B}_{\nu(z)} g(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z.$$

Тоді, враховуючи твердження Теореми 2.2, приходимо до висновку, що функція $\hat{g}(t,x,y)$ при фіксованих (t,x) має стрибки в кожній точці $y \in S$. А саме

$$\begin{aligned}
&\hat{g}(t,x,y\pm) = \\
&= g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \hat{g}(t-\tau,x,z)\mathbf{B}_{\nu(z)} g(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z \pm \hat{g}(t,x,y)q(y) = \\
&= \hat{g}(t,x,y)(1 \pm q(y)), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in S.
\end{aligned}$$

3.3.1.2 Напівгрупа операторів.

Визначимо сім'ю операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$ заданих на обмежених неперервних дійснозначних функціях φ на $\mathbb{R}^d$ рівністю

$$\hat{T}_t \varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.39}$$

Покажемо, що ця сім'я операторів утворює напівгрупу з генератором (в певному розумінні) $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S \mathbf{B}_{\nu(\cdot)}$, де $(\delta_S(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ узагальнена функція, що на множині неперервних з компактним носієм функцій ψ на $\mathbb{R}^d$ визначається співвідношенням

$$\langle \delta_S, \varphi \rangle = \int\limits_S \psi(x)\, d\sigma.$$

Причому вважатимемо, що узагальнена функція δ_S симетрична в тому сенсі, що її дія поширюється на функцію з компактним носієм $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, яка має розриви типу стрибків на поверхні S, за правилом

$$\langle \delta_S, \psi \rangle = \frac{1}{2}\int\limits_S \left(\psi(x+) + \psi(x-)\right)\, d\sigma.$$

Теорема 3.7. *Для кожного $t > 0$, оператор $\hat{T}_t$ визначений формулою (3.39) є лінійним обмеженим оператором на $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ та їх сукупність $(\hat{T}_t)_{t>0}$ утворює напівгрупу.*

Доведення. Покладемо

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\, dy \quad \text{та} \quad \hat{u}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\, dy.$$

Очевидно, що $|u(t,x,\varphi)| \le \|\varphi\|$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

З рівності (3.36) випливає, що

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z,$$

де $\tilde{w}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} w(t,x,y)\varphi(y)\, dy$, $t > 0$, $x \in S$.

З (3.37) маємо, що функція $\tilde{w}$ задовольняє рівняння

$$\tilde{w}(t,x,\varphi) = \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z, \quad (3.40)$$

З Теореми 2.2 слідує, що при всіх $t > 0$, $x \in S$

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x\pm) = \mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x) \mp \tilde{w}(t,x,\varphi)q(x) + \\ + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

А це має своїм наслідком рівність

$$\frac{1}{2}\left[\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x+) + \mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x-)\right] = \\ = \mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Тому при всіх $t > 0$, $x \in S$

$$\tilde{w}(t,x,\varphi) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x+) + \mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x-)\right] \qquad (3.41)$$

Рівняння (3.40) може бути розв'язане методом послідовних наближень:

$$\tilde{w}(t,x,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{w}_k(t,x,\varphi), \quad t > 0,\ x \in S,$$

де $\tilde{w}_0(t,x,\varphi) = \mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,x,\varphi)$, а при $k \geq 1$

$$\tilde{w}_k(t,x,\varphi) = \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)\tilde{w}_{k-1}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Встановити цей факт дозволяють наступні оцінки ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$|\tilde{w}_k(t,x,\varphi)| \leq \|\varphi\| R_k\, t^{-1+1/\alpha+k\gamma/\alpha}, \quad t > 0,\ x \in S,$$

де $R_0 = 1$ і $R_k = R_{k-1}CB\left(\frac{1}{\alpha} + (k-1)\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ при $k \geq 1$, а $C > 0$ — деяка стала. Щоб одержати ці оцінки досить використати рівність (3.38), оцінку функції g (див. нерівності (1.10)) та твердження Леми 1.4.

Звідси отримуємо, що для кожного $T > 0$ існує стала $C_T > 0$ така, що

$$|\tilde{w}(t,x,\varphi)| \leq C_T\|\varphi\| t^{-1+1/\alpha}, \quad t \in (0,T],\ x \in S. \qquad (3.42)$$

Крім того, легко зрозуміти, що розв'язок рівняння (3.40) єдиний в класі функцій, що задовольняють оцінку (3.42).

Тому при всіх $t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\hat{u}(t,x,\varphi)| \leq \|\varphi\| \left(1 + C_T\|q\| \int_0^t \tau^{-1+1/\alpha} d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)\, d\sigma_z\right) \leq$$
$$\leq \|\varphi\| \left(1 + C_T C\|q\| \int_0^t \tau^{-1+1/\alpha}(t-\tau)^{-1/\alpha} d\tau\right) =$$
$$= \|\varphi\| \left(1 + C_T C\|q\| B\left(\frac{1}{\alpha}, 1-\frac{1}{\alpha}\right)\right),$$

де $C > 0$ — деяка стала.

Таким чином, обмеженість оператора $\hat{T}_t$ при фіксованому $t > 0$ доведена.

Перевіримо напівгрупову властивість сім'ї операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$. Для цього візьмемо довільні $s > 0$, $t > 0$, функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ і розглянемо при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{T}_{s+t}\varphi(x) = u(s+t,x,\varphi) + \int_0^{s+t} d\tau \int_S g(s+t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)u(t,y,\varphi)\, dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y) \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,y,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z +$$
$$+ \int_t^{s+t} d\tau \int_S g(s+t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)\hat{u}(t,y,\varphi)\, dy + \int_0^s d\tau \int_S g(s-\tau,x,z)\tilde{w}(t+\tau,z,\varphi)q(z)\, d\sigma_z.$$

Звідси маємо, що при фіксованому $t > 0$ функція $\tilde{w}_t(s,x,\varphi) = \tilde{w}(t+s,x,\varphi)$,

$s > 0$, $x \in S$ задовольняє рівняння

$$\tilde{w}_t(s,x,\varphi) = \mathbf{B}_{\nu(x)} u(s,\cdot,\hat{u}(t,\cdot,\varphi))(x) + \\ + \int_0^s d\tau \int_S g^{\nu(x)}(s-\tau,x,z)\tilde{w}_t(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z,$$

що є рівнянням (3.40), в якому замість функції φ взята функція $\hat{u}(t,\cdot,\varphi)$. Через єдиність в класі функцій, що задовольняють оцінку (3.42), розв'язку рівняння (3.40) можемо стверджувати, що $\tilde{w}_t(s,x,\varphi) = \tilde{w}(s,x,\hat{u}(t,\cdot,\varphi))$. Тому $\hat{T}_{s+t}\varphi(x) = \hat{T}_s(\hat{T}_t\varphi)(x)$ і напівгрупова властивість сім'ї операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$ доведена. □

3.3.1.3 Генератор напівгрупи.

Відомо (див. п. 1.2.2.6), що функція $(u(t,x,\varphi))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d}$ з довільною функцією $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{3.43}$$

та початкову умову $u(0+,x,\varphi) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Покладемо для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$

$$v(t,x,\varphi) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z. \tag{3.44}$$

Враховуючи нерівність (3.42) та властивості потенціалу простого шару, можемо сформулювати наступне.

Твердження 3.8. *1. Для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$ функція (3.44) задовольняє рівняння з (3.43) та нульову початкову умову.*

2. Для $t > 0$ та $x \in S$ виконуються співвідношення

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} v(t,\cdot,\varphi)(x\pm) = \mp\frac{1}{2c}q(x)\tilde{w}(t,x,\varphi) + \\ + \int_0^t d\tau \int_S \mathbf{B}_{\nu(x)} g(t-\tau,\cdot,z)(x)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Для кожної неперервної з компактним носієм функції $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ розглянемо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,\varphi)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,dx\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S \mathbf{A}g(t-\tau,\cdot,z)(x)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,dx\int\limits_S g(\varepsilon,x,z)(x)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\mathbf{A}\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,\cdot,z)\tilde{w}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z\right)(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_S \psi(z)\tilde{w}(t,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Остання рівність тут є наслідком можливості занести оператор $\mathbf{A}$ під знаки інтегралів в потенціалі простого шару і того, що при всіх $x\in\mathbb{R}^d$ виконується $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(\varepsilon,x,z)\varphi(z)\,dz \to \varphi(x)$ при $\varepsilon\to 0+$ для кожної обмеженої неперервної функції φ.

Це означає, що

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,\varphi) = \mathbf{A}v(t,\cdot,\varphi)(x) + q(x)\delta_S(x)\tilde{w}(t,x,\varphi). \tag{3.45}$$

А враховуючи (3.41), рівність (3.45) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,\varphi) = \mathbf{A}v(t,\cdot,\varphi)(x) + (q(x)\delta_S(x)\nu(x), \mathbf{B}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x)).$$

Оскільки $\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) + v(t,x,\varphi)$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,x,\varphi) = \mathbf{A}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x) + (q(x)\delta_S(x)\nu(x), \mathbf{B}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x)).$$

Таким чином справджується твердження наступної теореми.

Теорема 3.9. *Оператор* $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S\mathbf{B}_{\nu(\cdot)}$ *є слабким генератором напівгрупи* $(\hat{T}_t)_{t>0}$.

3.3.2 Збурення з коефіцієнтом типу дельта-функції на гіперплощині.

Нехай $\nu \in \mathbb{R}^d$ — деякий одиничний вектор, а S — гіперплощина ортогональна до ν. Нехай $(q(x))_{x\in S}$ — деяка обмежена неперервна дійснозначна функція.

3.3.2.1 Збурення та його властивості.

Задамо функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z)g^\nu(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z, \tag{3.46}$$

де

$$g^\nu(\tau,z,y) = \mathbf{B}_\nu g(\tau,\cdot,y)(z) = \frac{1}{c\alpha}\frac{(y-z,\nu)}{\tau}g(\tau,z,y). \tag{3.47}$$

Остання рівність тут аналогічна до (1.21).

Зауваження 3.6. Функція $\hat{g}$ розглядалася в пункті 2.2.2.1. Там доведено, що вона є фундаментальним розв'язком деякої початково крайової задачі для псевдодиференціального рівняння $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x)$

Зауваження 3.7. При $\alpha = 2$ функція g є щільністю ймовірності переходу випадкового процесу $2cw(t)$, $t \geq 0$, де w — вінерів процес в $\mathbb{R}^d$. Тоді, при додатковому обмеженні $|q(x)| \leq 1$ для всіх $x \in S$, функція $\hat{g}$ визначена рівністю (3.46) є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова, траєкторії якого задовольняють стохастичне диференціальне рівняння (див. [94])

$$dx(t) = \nu q(x(t))\delta_S(x(t))dt + 2cdw(t).$$

У випадку $d = 1$ і $S = \{0\}$, $q(0) = q \in [-1,1]$ та додатково $c = 1/2$, функція $\hat{g}$ є щільністю ймовірності переходу, так званого, асиметричного вінерового процесу чи косого броунівського руху (skew Brownian motion)

$$\hat{g}(t,x,y) = (2\pi t)^{-1/2}\left[\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} + q\,\mathrm{sign}\,y\exp\left\{-\frac{(|y|+|x|)^2}{2t}\right\}\right],$$

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$ та $y \in \mathbb{R}^1$ (див. [22], [94]).

Розглянемо наш основний випадок $\alpha \in (1,2)$. Перш за все перевіримо, що функція $\hat{g}$ визначена коректно формулою (3.46). Для цього покажемо, що інтеграл в правій частині формули (3.46) існує.

Зауважимо, що, як випливає з (3.47), $g^\nu(t,z,y) = 0$, якщо $z \in S$ та $y \in S$ і інтеграл в правій частині (3.46) зникає. Таким чином досить розглядати випадок $(y,\nu) \neq 0$.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^d$, позначимо через $\tilde{x}$ його ортогональну проекцію на S: $\tilde{x} = x - \nu(x,\nu)$. Оскільки при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\int\limits_S g(t,x,z)e^{i(z,\xi)}\,d\sigma_z = \int\limits_S h_d^{ct,\alpha}(\tilde{x} - z + (x,\nu)\nu)e^{i(z,\tilde{\xi})}\,dz =$$
$$= e^{i(\tilde{x},\tilde{\xi})}\int\limits_S h_d^{ct,\alpha}(y + (x,\nu)\nu)e^{-i(y,\tilde{\xi})}\,dy,$$

то використовуючи формулу (1.5) одержимо

$$\int\limits_S g(t,x,z)e^{i(z,\xi)}\,d\sigma_z =$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{i(x,\tilde{\xi})}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left\{-i\rho(x,\nu) - ct(\rho^2 + |\tilde{\xi}|^2)^{\alpha/2}\right\}\,d\rho \tag{3.48}$$

при $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ та $t > 0$. З допомогою формули (3.47) та представлення (1.9) функції g, одержуємо наступне

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g^\nu(\tau,z,y)\,d\sigma_z = \frac{(y,\nu)}{c\alpha\tau}\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g(\tau,z,y)\,d\sigma_z =$$
$$= \frac{(y,\nu)}{c\alpha\tau(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y,\lambda)-c\tau|\lambda|^\alpha}\,d\lambda\int\limits_S g(t-\tau,x,z)e^{i(z,\lambda)}\,d\sigma_z.$$

Ввівши позначення $\eta = \tilde{\lambda}$, $r = (\nu,\lambda)$ та використовуючи рівність (3.48) матимемо

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g^\nu(\tau,z,y)\,d\sigma_z =$$
$$= \frac{(y,\nu)}{c\alpha\tau(2\pi)^{d+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} d\eta\int\limits_{\mathbb{R}^1} dr\int\limits_{\mathbb{R}^1}\exp\{-i(\tilde{y}-\tilde{x},\eta)-i\rho(x,\nu)-ir(y,\nu)- \tag{3.49}$$
$$-ca_{\tau,t}(\rho,r,\eta)\}\;d\rho,$$

де $a_{\tau,t}(\rho,r,\eta)=\tau(r^2+|\eta|^2)^{\frac{\alpha}{2}}+(t-\tau)(\rho^2+|\eta|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ для всіх $r\in\mathbb{R}^1$, $\rho\in\mathbb{R}^1$, $\eta\in\mathbb{R}^{d-1}$ та $0<\tau<t$.

Для фіксованих $\tau>0$ та $t>\tau$, функція $a_{\tau,t}$ аргументів $(\rho,r,\eta)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{d-1}$ є однорідною порядку α. Як легко бачити, її мінімальне значення на сфері

$$\{(\rho,r,\eta):\rho^2+r^2+|\eta|^2=1\}$$

дорівнює $\tau\wedge(t-\tau)$. Припустивши, що $\tau\in(0,t/2)$ та використовуючи заміну $\eta=\tau^{-1/\alpha}\xi$, $\rho=\tau^{-1/\alpha}\theta$ та $r=\tau^{-1/\alpha}\lambda$, можемо переписати праву частину рівності (3.49) наступним чином

$$\frac{(y,\nu)\tau^{-1-\frac{d+1}{\alpha}}}{c\alpha(2\pi)^{d+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^1} d\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^1}\exp\Big\{-i\tau^{-1/\alpha}[\lambda(y,\nu)+\theta(x,\nu)+(\tilde{y}-\tilde{x},\xi)]-$$
$$-\,c\hat{a}_{\tau,t}(\theta,\lambda,\xi)\Big\}\;d\theta,$$

де $\hat{a}_{\tau,t}(\theta,\lambda,\xi)=\dfrac{t-\tau}{\tau}(\theta^2+|\xi|^2)^{\alpha/2}+(\lambda^2+|\xi|^2)^{\alpha/2}$. Оскільки $\dfrac{t-\tau}{\tau}\ge 1$ при $\tau\in(0,t/2)$, то $\inf\hat{a}_{\tau,t}(\theta,\lambda,\xi)=1$, де інфімум береться по описаній вище сфері. Тому ми можемо застосувати до останнього інтегралу Лему 4.1 з [17] та одержати оцінку

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)|g^\nu(\tau,z,y)|\,d\sigma_z\le\frac{N|(y,\nu)|}{[\tau^{1/\alpha}+((x,\nu)^2+(y,\nu)^2+|\tilde{y}-\tilde{x}|^2)^{1/2}]^{d+\alpha+1}}$$

при всіх $\tau\in(0,t/2)$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$, де N деяка додатна стала, що залежить тільки від c та α. Подібні міркування для випадку $\tau\in(t/2,t)$ дозволяють записати нерівність

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)|g^\nu(\tau,z,y)|\,d\sigma_z \le$$
$$\le \frac{N|(y,\nu)|}{[(t-\tau)^{1/\alpha}+((x,\nu)^2+(y,\nu)^2+|\tilde y-\tilde x|^2)^{1/2}]^{d+\alpha+1}}$$

при всіх $\tau\in(t/2,t)$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$. Таким чином одержуємо оцінку

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g^\nu(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z\right| \le\\ &\le 2N\|q\||(y,\nu)|\int\limits_0^{t/2}\left[\tau^{1/\alpha}+((x,\nu)^2+(y,\nu)^2+|\tilde y-\tilde x|^2)^{1/2}\right]^{-d-\alpha-1}\,d\tau,\end{aligned} \tag{3.50}$$

де $\|q\|=\sup\limits_{z\in S}|q(z)|$. Якщо $(y,\nu)\ne 0$, то останній інтеграл скінченний і функція $\hat g$ коректно визначена.

Оскільки $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^\nu(t,x,y)\,dy=0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\hat g(t,x,y)\,dy=1,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Зауваження 3.8. З Теореми 2.3 випливає співвідношення (символ $\hat y\to y\pm$ означає, що $\hat y=y\pm\delta\nu$ для $y\in S$ та $\delta\to 0+$)

$$\lim_{\hat y\to y\pm}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S g(t-\tau,x,z)g^\nu(\tau,z,\hat y)q(z)\,d\sigma_z=\pm\frac{1}{2c}q(y)g(t,x,y)$$

для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$. Звідси одержуємо, що

$$\hat g(t,x,y\pm)=\left(1\pm\frac{1}{2c}q(y)\right)g(t,x,y)$$

при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in S$.

3.3.2.2 Напівгрупа операторів.

Визначимо сім'ю операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$ заданих на обмежених неперервних функціях φ на $\mathbb{R}^d$ рівністю

$$\hat{T}_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.51}$$

Покажемо, що ця сім'я операторів утворює напівгрупу з генератором (в певному розумінні) $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S\mathbf{B}_\nu$. Причому вважатимемо, що узагальнена функція δ_S симетрична в тому сенсі, що її дія поширюється на функцію з компактним носієм $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, яка має розриви типу стрибків на поверхні S, за правилом

$$\langle \delta_S, \psi \rangle = \frac{1}{2}\int\limits_S \left(\psi(x+) + \psi(x-)\right)\,d\sigma.$$

Розглядатимемо випадок $d \geq 2$. Випадок $d = 1$ був розглянутий в [42].

Теорема 3.10. *Для кожного $t > 0$, оператор $\hat{T}_t$ визначений формулою (3.51) є лінійним обмеженим оператором на $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ та їх сукупність $(\hat{T}_t)_{t>0}$ утворює напівгрупу.*

Доведення. Покладемо

$$u(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy$$

та

$$u^\nu(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^\nu(t,x,y)\varphi(y)\,dy$$

для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Оскільки g є щільністю ймовірності переходу, то

$$|u(t,x,\varphi)| \leq \|\varphi\|$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Функція $u^\nu(\tau,z,\varphi)$ для $\tau > 0$, $z \in S$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ може бути оцінена наступним чином (тут використовуємо формулу (3.47) та представлення (1.8))

$$|u^{\nu}(\tau,z,\varphi)| \le \frac{1}{c\alpha\tau}\|\varphi\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |(y,\nu)| g(\tau,z,y)\,dy = \frac{\|\varphi\|}{c\alpha\tau^{1-1/\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |(y,\nu)| h_d^{c,\alpha}(y)\,dy.$$

Добре відомо, що перший абсолютний момент розподілу $h_d^{c,\alpha}$ скінченний. Отже, існує стала $K>0$ така, що

$$|u^{\nu}(\tau,z,\varphi)| \le K\|\varphi\|\tau^{-1+1/\alpha} \tag{3.52}$$

при всіх $\tau>0$, $z\in S$ та $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Крім того, існує така стала (знову позначимо її через K), що

$$\int\limits_S g(t-\tau,x,z)\,d\sigma_z \le K(t-\tau)^{-1/\alpha}. \tag{3.53}$$

Як наслідок з (3.52) та (3.53), одержуємо наступну нерівність ($t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$)

$$\left| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)u^{\nu}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z \right| \le K\|\varphi\|\|q\|$$

де K додатна стала (ми можемо її вибрати такою ж, як в (3.52) та (3.53)). Оскільки

$$\hat{T}_t\varphi(x) = u(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)u^{\nu}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z,$$

то обмеженість оператора $\hat{T}_t$ для фіксованого $t>0$ доведена.

Перевіримо напівгрупову властивість сім'ї операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$. Для цього візьмемо довільні $t>0$, $s>0$, функцію $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ і розглянемо при фіксованому $x\in\mathbb{R}^d$

$$\hat{T}_{s+t}\varphi(x) = u(s+t,x,\varphi) + \int\limits_0^{s+t} d\tau \int\limits_S g(t+s-\tau,x,z)u^{\nu}(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)u(t,y,\varphi)\,dy+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)\,dy \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,y,z)u^\nu(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z+$$

$$+\int_t^{s+t} d\tau \int_S g(t+s-\tau,x,z)u^\nu(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(s,x,y)\hat{u}(t,y,\varphi)\,dy + \int_0^s d\tau \int_S g(s-\tau,x,z)u^\nu(t+\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z$$

Залишилось, таким чином, довести, що при всіх $\tau > 0$, $t > 0$, $z \in S$ справджується рівність

$$u^\nu(t+\tau,z,\varphi) = u^\nu(\tau,z,\hat{u}(t,\cdot,\varphi)). \tag{3.54}$$

Використовуючи рівняння Колмогорова-Чепмена, одержуємо

$$u^\nu(t+\tau,z,\varphi) = \mathbf{B}_\nu\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,\cdot,x)g(t,x,y)\,dx\right)(z) =$$

$$= \mathbf{B}_\nu\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,\cdot,x)u(t,x,\varphi)\,dx\right)(z) = u^\nu(\tau,z,u(t,\cdot,\varphi)).$$

Але, оскільки $g^\nu(t,z,y) = 0$ при всіх $t > 0$, $y \in S$, $z \in S$ і, тому,

$$u^\nu(\tau,z,\hat{u}(t,\cdot,\varphi)) - u^\nu(\tau,z,u(t,\cdot,\varphi)) = u^\nu(\tau,z,\hat{u}(t,\cdot,\varphi) - u(t,\cdot,\varphi)) =$$

$$= \mathbf{B}_\nu\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\tau,\cdot,x)\,dx \int_0^t d\rho \int_S g(t-\rho,x,y)u^\nu(\rho,y,\varphi)q(y)\,d\sigma_y\right)(z) =$$

$$= \mathbf{B}_\nu\left(\int_0^t d\rho \int_S g(t+\tau-\rho,\cdot,y)u^\nu(\rho,y,\varphi)q(y)\,d\sigma_y\right)(z) =$$

$$= \int_0^t d\rho \int_S g^\nu(t+\tau-\rho,z,y)u^\nu(\rho,y,\varphi)q(y)\,d\sigma_y = 0,$$

то рівність (3.54) доведена, а разом з нею доведена і напівгрупова властивість сім'ї операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$. $\square$

Наслідок 3.10.1. *Функція* $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ *задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена.*

3.3.2.3 Генератор напівгрупи.

Добре відомо, що функція $u(t,x,\varphi)$ (див. доведення Твердження 3.10) задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d \tag{3.55}$$

та початкову умову

$$u(0+,x,\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Покладемо тепер для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $\varphi\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$

$$v(t,x,\varphi) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)u^\nu(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Простим наслідком нерівності (3.52) та властивостей потенціалу простого шару є наступна пара тверджень.

Твердження. *Справджується наступне:*

1. *Для* $t>0$ *та* $x\in\mathbb{R}^d\setminus S$ *функція* v *задовольняє рівняння (3.55) та нульову початкову умову.*

2. *Для* $t>0$ *та* $x\in S$ *виконується*

$$v^\nu(t,x\pm,\varphi) = \mp\frac{1}{2c}q(x)u^\nu(t,x,\varphi),$$

де $v^\nu(t,x\pm,\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} v^\nu(t,x\pm\varepsilon\nu,\varphi)$ *та* $v^\nu(t,z,\varphi) = \mathbf{B}_\nu v(t,\cdot,\varphi)(z)$.

Зауваження 3.9. Легко бачити, що для неперервної з компактним носієм функції $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ справджується наступне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,dx\int\limits_S g(\varepsilon,x,z)u^\nu(t,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z = \int\limits_S \psi(z)u^\nu(t,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Це означає, що

$$\frac{\partial v(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}v(t,\cdot,\varphi)(x) + q(x)\delta_S(x)u^\nu(t,x,\varphi).$$

Дійсно, для кожної неперервної з компактним носієм функції $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ виконується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,\varphi)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx \int_0^t d\tau \int_S \mathbf{A}g(t-\tau,\cdot,z)(x)u^\nu(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z +$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx \int_S g(\varepsilon,x,z)u^\nu(t,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\mathbf{A}\left(\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,\cdot,z)u^\nu(\tau,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z\right)(x)\,dx +$$
$$+ \int_S \psi(z)u^\nu(t,z,\varphi)q(z)\,d\sigma_z.$$

Тепер зауважимо, що функція δ_S є симетричною і, тому,

$$\delta_S(x)v^\nu(t,x,\varphi) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Це означає, що функція

$$\hat{u}(t,x,\varphi) = u(t,x,\varphi) + v(t,x,\varphi), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \hat{u}(t,x,\varphi)}{\partial t} = \mathbf{A}\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x) + q(x)\delta_S(x)\mathbf{B}_\nu\hat{u}(t,\cdot,\varphi)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$$

та початкову умову

$$\hat{u}(0+,x,\varphi) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Інакше кажучи, оператор $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S\mathbf{B}_\nu$ є генератором напівгрупи $(\hat{T}_t)_{t>0}$.

Висновки до розділу 3.

Адитивні збурення інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою оператора $(a(\cdot), \mathbf{B})$, де векторний оператор $\mathbf{B}$ визначається своїм символом $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ а $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — деяка $\mathbb{R}^d$-значна функція, приводять до "псевдопроцесів". Відповідна напівгрупа операторів не залишає інваріантним конус невід'ємнмх функцій. Інфінітезимальний оператор збуреної напівгрупи має вигляд $\mathbf{A} + (a(\cdot)\mathbf{B})$. Зокрема, це встановлено у випадках обмеженої (в тому числі сталої), інтегровної в деякому степені $p > d + \alpha$, узагальненої виду $q(\cdot)\nu(\cdot)\delta_S$ функції $a(\cdot)$. Саме в цих випадках доведено існування такого збурення та відповідної напівгрупи лінійних обмежених операторів на просторі обмежених неперервних функцій. У випадку сталої функції $a(\cdot)$ знайдено явний вигляд (з точністю до квадратур) функції збурення та показано, що при $1 < \alpha < 2$ вона приймає значення різних знаків.

Результати розділу 3 опубліковані в [8, 59, 60, 62] та анонсовані в [78–81]. Для їх обгрунтування суттєво використано ідеї та методи з робіт [47–50]

Розділ 4

Одновимірні симетричні α-стійкі випадкові процеси.

4.1 Основні поняття та допоміжні результати

4.1.1 Деякі моменти зупинки.

В цьому розділі розглядаємо одновимірні симетричні α-стійкі випадкові процеси. Тобто $d = 1$ і функція g аргументів $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задається рівністю

$$g(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\cos\xi(y-x)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Позначимо через $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ стандартний процес Маркова (див. [16, Теорема 3.14]) в $\mathbb{R}$ такий, що $\mathbb{P}_x(x(t) \in \Gamma) = \int\limits_\Gamma g(t,x,y)\,dy$ для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (це позначення сім'ї борелевих підмножин $\mathbb{R}$). Цей процес є одновимірним симетричним α-стійким процесом з показником α. В частковому випадку $\alpha = 2$ маємо броунівський рух, а додатково беручи $c = 1/2$ — стандартний броунівський рух чи вінерів процес.

Розглянемо наступні моменти зупинки цього випадкового процесу

$$\tau^0 = \inf\{s \ge 0 : x(s) = 0\}, \quad \sigma = \inf\{s \ge 0 : x(s)\cdot x(0) \le 0\}$$

(як зазвичай, ми вважаємо, що $\inf\{\varnothing\} = \infty$). Одночасно розглянемо наступну функцію

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - g(t,-|x|,|y|) \tag{4.2}$$

задану при $t > 0$, $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Це щільність ймовірності переходу процесу Маркова $(x^*(t), \mathcal{M}_t^*, \tau^*, \mathbb{P}_x^*)$ у фазовому просторі $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ із σ-алгеброю $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ всіх борелевих підмножин $\mathbb{R}_0$. Тут τ^* є часом існування випадкового процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ або моментом часу, коли цей процес зникає з простору $\mathbb{R}_0$.

Той факт, що $\mathbb{P}_x^*(\tau^* < \infty) = 1$ при всіх $x \in \mathbb{R}_0$, випливає з результатів наступних обчислень

$$\mathbb{P}_x^*(\tau^* \leq t) = 1 - \int\limits_{\mathbb{R}} g^*(t,x,y)\,dy = 2\int\limits_0^\infty g(t,-|x|,y)\,dy = 2\mathbb{P}_0(x(t) > |x|) \geq$$
$$\geq \mathbb{P}_0\left(\sup_{0\leq\tau\leq t} x(\tau) > |x|\right)$$

при кожному $t > 0$. Останню нерівність тут можна знайти в [21, Гл. IV, §1]. Досить тепер спрямувати t до нескінченності та скористатись неперервністю ймовірності.

Добре відомо, що у випадку $\alpha = 2$ справджуються рівність $\tau^0 = \sigma$ $\mathbb{P}_x$-м.н. для кожного $x \in \mathbb{R}$, та співвідношення

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\sigma > t\}\right) = \mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\tau^0 > t\}\right) = \\ = \int\limits_\Gamma g^*(t,x,y)\,dy\end{aligned} \tag{4.3}$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

4.1.2 Локальний час симетричного стійкого процесу.

Повернемось до симетричного α-стійкого процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Його щільність ймовірності переходу g відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$ задається рівністю (4.1).

Розглянемо функцію $F_t(x) = \int\limits_0^t g(s,x,0)\,ds$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Існування інтегралу тут випливає з оцінки (1.10). Ця функція є W-функцією, що задовольняє умову $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} F_t(x) \to 0$ при $t \to 0+$. Теорема 6.6 з [16] стверджує, що в цьому випадку існує W-функціонал $(\eta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ такий, що $\mathbb{E}_x\eta_t = F_t(x)$ для всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}$. Цей функціонал називається локальним часом (в нулі) симетричного α-стійкого процесу (нагадаємо, що $\alpha \in (1,2]$).

Для кожного $h > 0$ покладемо $v_h(x) = g(h,x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ і розглянемо наступні функціонали $\eta_t^{(h)} = \int\limits_0^t v_h(x(s))\,ds$, $t \geq 0$. Функціонал $(\eta_t)_{t\geq 0}$ можна наблизити функціоналами $\eta_t^{(h)}$, при $h \to 0+$, в середньо квадратичному розумінні, тобто $\mathbb{E}_x(\eta_t^{(h)} - \eta_t)^2 \to 0$, якщо $h \to 0+$, для всіх $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}$. Цей факт випливає з такої очевидної нерівності

$$|\mathbb{E}_x\eta_t^{(h)} - \mathbb{E}_x\eta_t| = \left|\int\limits_t^{t+h} g(s,x,0)\,ds - \int\limits_0^h g(s,x,0)\,ds\right| \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\alpha-1} N \left[(t+h)^{1-\frac{1}{\alpha}} - t^{1-\frac{1}{\alpha}} + h^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]$$

та Теореми 6.4 з [16].

Для заданих параметрів $h > 0$, $\mu \geq 0$ та функції $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ покладемо $u_h^{(\mu)}(t,x,\varphi) = \mathbb{E}_x\left[\varphi(x(t))e^{-\mu\eta_t^{(h)}}\right]$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. З рівняння (1.23) випливає наступне рівняння для функції $u_h^{(\mu)}$:

$$u_h^{(\mu)}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy -$$

$$-\mu\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,y)u_h^{(\mu)}(t-s,y,\varphi)v_h(y)\,dy. \tag{4.4}$$

Очевидно, що

$$\lim_{h\to 0+} u_h^{(\mu)}(t,x,\varphi) = \mathbb{E}_x\left[\varphi(x(t))e^{-\mu\eta_t}\right]. \tag{4.5}$$

Щоб перейти до границі в (4.4) при $h \to 0+$, нам буде потрібен наступний допоміжний результат.

Нехай $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ вимірна комплекснозначна функція, яка задовольняє умову $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |\psi(t,x)| < \infty$ для кожного $T > 0$. Розглянемо її перетворення ψ_h, що задається рівністю $\psi_h(t,x) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,y)\psi(t-s,y)v_h(y)\,dy$, $h > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Лема 2.12 стверджує, що це перетворення компактне в наступному розумінні. Для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$ та $T > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що $|\psi_h(t',x') - \psi_h(t,x)| < \varepsilon$ для всіх $h > 0$, $t \in [0,T]$, $t' \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ та всіх $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ з властивістю $\sup\limits_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} |\psi(t,x)| \leq L$, якщо тільки справджується нерівність $|t'-t| + |x'-x| < \delta$.

Використовуючи це можна легко перейти до границі в (4.4) та одержати рівняння для функції $u^{(\mu)}(t,x,\varphi)$, що представляє праву частину рівності (4.5)

$$u^{(\mu)}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy - \mu\int\limits_0^t g(s,x,0)u^{(\mu)}(t-s,0,\varphi)\,ds.$$

Ясно, що $u^{(\mu)}(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g^{(\mu)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$, де $g^{(\mu)}$ є розв'язком наступного рівняння

$$g^{(\mu)}(t,x,y) = g(t,x,y) - \mu\int\limits_0^t g(s,x,0)g^{(\mu)}(t-s,0,y)\,ds. \tag{4.6}$$

Можна зрозуміти, що це насправді є рівнянням (1.23), в якому $v(x) = -\mu\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($\delta(\cdot)$ є дельта-функцією Дірака).

Застосувавши перетворення Лапласа до (4.6) та поклавши

$$G(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x,y)\,dt, \quad G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g^{(\mu)}(t,x,y)\,dt,$$

одержимо $G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = G(\lambda,x,y) - \mu G(\lambda,x,0)G^{(\mu)}(\lambda,0,y)$ при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Звідси маємо, що при $\lambda > 0$, $y \in \mathbb{R}$ виконується $G^{(\mu)}(\lambda,0,y) =$

$G(\lambda,0,y) - \mu G(\lambda,0,0)G^{(\mu)}(\lambda,0,y)$ або $G^{(\mu)}(\lambda,0,y) = \dfrac{G(\lambda,0,y)}{1+\mu G(\lambda,0,0)}$. Тому $G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = G(\lambda,x,y) - \mu\dfrac{G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)}{1+\mu G(\lambda,0,0)}$ або

$$\begin{aligned} G^{(\mu)}(\lambda,x,y) = G(\lambda,x,y) - \frac{G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)}{G(\lambda,0,0)} + \\ + [1+\mu G(\lambda,0,0)]^{-1}\,\frac{G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)}{G(\lambda,0,0)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Зауважимо, що ця формула приводить до наступної властивості локального часу $(\eta_t)_{t\geq 0}$

$$\mathbb{P}_0(\eta_t > 0) = 1, \quad t > 0. \tag{4.8}$$

Щоб довести це, спочатку врахуємо співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G^{(\mu)}(\lambda,x,y)\,dy = U^{(\mu)}(\lambda,x,1) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x e^{-\mu\eta_t}\,dt$$

та

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G(\lambda,x,y)\,dy = 1/\lambda.$$

Покладемо $x = 0$ в (4.7) та проінтегруємо обидві частини його по y. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_0 e^{-\mu\eta_t}\,dt = \frac{1}{\lambda(1+\mu G(\lambda,0,0))}.$$

Відправивши $\mu \to \infty$ та використавши лему Фату, матимемо

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{P}_0(\{\eta_t = 0\})\,dt = 0$$

і (4.8) доведена.

Іншим простим наслідком з (4.7) є наступна формула

$$\mathbb{E}_0(\eta_t)^k = \frac{k!}{\varkappa^k\Gamma(k(1-1/\alpha)+1)}\,t^{k(1-1/\alpha)},$$

яка правильна для $t > 0$ та $k = 0,1,2,\ldots$, де $\varkappa$ константа, що залежить лише від $c > 0$ та $\alpha \in (1,2]$; її точне значення наведено в пункті 4.1.1.

4.1.3 Загальні властивості симетричного стійкого процесу.

Розглянемо деякі основні властивості симетричного стійкого процесу. Деякі з них, зрештою, є переформулюваннями на випадок $d = 1$ відповідних фактів для такого процесу в $\mathbb{R}^d$. Але щоб мати актуальні для нашого випадку формули, коротко на них зупинемось.

Позначимо через $\mathbf{A}$ генератор процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, що задається щільністю ймовірності переходу (4.1). Добре відомо, що цей оператор діє на достатньо гладку та обмежену разом зі своїми похідними функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ відповідно до наступної формули

$$\mathbf{A}\varphi(x) = cq_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi'(x)y}{|y|^{\alpha+1}}\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $q_\alpha = \dfrac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}$. Тут досить щоб функція φ була скрізь диференційовною і її похідна задовольняла умову Ліпшиця.

Інша характеризація $\mathbf{A}$ така: він є псевдодиференціальним оператором, чий символ задається виразом $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}}$.

Далі ми використовуватимемо наступну факторизаційну властивість цього оператора $\mathbf{A} = c\mathbf{BD} = c\mathbf{DB}$, де $\mathbf{D}$ є диференціальним оператором першого порядку(його символ $(i\xi)_{\xi\in\mathbb{R}}$) та $\mathbf{B}$, що є псевдодиференціальним оператором з символом $(i|\xi|^{\alpha-1}\operatorname{sign}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}}$. Наступна формула

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \frac{q_\alpha}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x)}{|y|^\alpha} \operatorname{sign} y\, dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

справджується для кожної обмеженої ліпшицевої функції φ на $\mathbb{R}$.

Нескладно перевірити, що дія оператора $\mathbf{B}$ на функцію $(g(t,x,y))_{x\in\mathbb{R}}$ для фіксованих $t > 0$ та $y \in \mathbb{R}$ задається формулою

$$\mathbf{B}g(t,\cdot,y)(x) = \frac{1}{c\alpha}\frac{y-x}{t}g(t,x,y). \tag{4.9}$$

Наступна формула може бути отримана з результатів роботи [10] при всіх

$\alpha \in (0, 2]$

$$\lim_{t \to 0+} t^{-1} g(t, x, 0) = \frac{c}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \sin \frac{\pi\alpha}{2} |x|^{-\alpha-1}, \quad x \neq 0. \tag{4.10}$$

Ще одна формула (формула Рогозіна-Спіцера) встановлює зв'язок між функцією розподілу випадкової величини $\sup\limits_{0 \le s \le t} x(s)$ та функцією g (див. [102] та [21, Гл. IV]):

$$\begin{gathered} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^\infty e^{i\xi y} \, d\mathbb{P}_0 \left(\left\{ \sup_{0 \le s \le t} x(s) < y \right\} \right) \right] dt = \\ = \exp \left\{ \int_0^\infty (e^{i\xi y} - 1) \int_0^\infty t^{-1} g(t, 0, y) e^{-\lambda t} \, dt \, dy \right\}, \quad \lambda > 0, \ \xi \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Крім того зрозумілими є співвідношення

$$\begin{gathered} \mathbb{P}_0 \left(\left\{ \sup_{0 \le s \le t} x(s) < y \right\} \right) = \mathbb{P}_{-y} \left(\left\{ \sup_{0 \le s \le t} x(s) < 0 \right\} \right) = \\ = \mathbb{P}_{-y} \left(\{ \sigma > t \} \right) = \mathbb{P}_y \left(\{ \sigma > t \} \right) \end{gathered}$$

для $y > 0$ та $t > 0$.

4.2 Момент першого досягнення нуля.

Ми використовуватимемо поняття локального часу процесу $(x(t))_{t \ge 0}$ (див., наприклад, [4, 18]), щоб знайти функцію розподілу τ^0. Через це обмежуємося випадком $1 < \alpha \le 2$. Той факт, що в цьому випадку $\mathbb{P}_x(\tau^0 < \infty) \equiv 1$ добре відомий (див. [44]).

Спочатку доведемо наступне твердження.

Теорема 4.1. *При всіх $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda \tau^0} = \varkappa \lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda, x, 0) = \varkappa \lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda, 0, x), \tag{4.12}$$

в якій $\varkappa = c^{1/\alpha} \alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}$.

Доведення. Зауважимо, що

$$G(\lambda,0,0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (\lambda+c\xi^\alpha)^{-1}\,d\xi=\varkappa^{-1}\lambda^{1/\alpha-1},\quad \lambda>0,$$

де $\varkappa=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (1+c\xi^\alpha)^{-1}\,d\xi\right)^{-1}=c^{1/\alpha}\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}>0$ при $\alpha\in(1,2]$.

Проінтегруємо обидві сторони рівності (4.7) за змінною y. В результаті одержимо

$$\lim_{\mu\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\left[e^{-\mu\eta_t}\right]\,dt=\frac{1}{\lambda}\left[1-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}G(\lambda,x,0)\right].\tag{4.13}$$

Оскільки $\{\tau^0\geq t\}=\{\eta_t=0\}$, бо η_t — локальний час в нулі процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, то очевидно, що $\lim\limits_{\mu\to\infty}\mathbb{E}_x\left[e^{-\mu\eta_t}\right]=\mathbb{P}_x(\tau^0\geq t)$ для всіх $t>0$ та $x\in\mathbb{R}$. Тоді ліва частина (4.13) може бути записана наступним чином

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{P}_x(\tau^0\geq t)\,dt=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\mathbb{P}_x(\tau^0\geq t)\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,d_t\mathbb{P}_x(\tau^0\geq t)=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(1-\mathbb{E}_x e^{-\lambda\tau^0}\right).$$

Це доводить формулу (4.12). Друга рівність в (4.12) наслідок симетричності процесу $(x(t))_{t\geq 0}$. □

Зауважимо, що формула подібна до (4.12) може бути знайдена в літературі (див., наприклад, [6, Cor. II.18 та Th. II.19], [38], [103, Th. 43.3]). Перетворення Мелліна для τ^0 отримано в [36].

З (4.12) випливає, що для $(f^0(t,x))_{t>0}$ — щільності $\mathbb{P}_x$-розподілу ($x\in\mathbb{R}_0$) випадкової величини τ^0 справджується така рівність

$$f^0(t,x)=\frac{d}{dt}\mathbb{P}_x(\tau^0\leq t)=\varkappa\mathbf{D}^{1-\frac{1}{\alpha}}g(\cdot,x,0)(t),\tag{4.14}$$

де $\varkappa=c^{\frac{1}{\alpha}}\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}$ та $\mathbf{D}^\beta$ означає дробову похідну порядку $0<\beta<1$. Тут досить згадати, що для числа $\beta\in(0,1)$ дробова похідна порядку β від функції

$(f(t))_{t\geq 0}$ визначається наступним чином

$$\mathbf{D}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\beta} f(s)\, ds, \quad t > 0.$$

Позначимо через $F(\lambda)$ для $\lambda > 0$ перетворення Лапласа функції f: $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt$. Тоді за умови $f(0+) = 0$ матимемо $\int_0^\infty e^{-\lambda t} [\mathbf{D}^{\beta} f(t)]\, dt = \lambda^{\beta} F(\lambda)$, $\lambda > 0$. Оскільки $\mathbf{D}^{1-1/\alpha} g(\cdot, x, 0)(t)$ при всіх $t > 0$ та $x \neq 0$ існує і $g(0+, x, 0) = 0$ при $x \neq 0$, то можемо зробити висновок, що функція розподілу τ^0 має щільність відносно міри Лебега і

$$f^0(t,x) = \varkappa \mathbf{D}^{1-1/\alpha} g(\cdot, x, 0)(t),$$

а це і є формула (4.14).

Позначимо ймовірність переходу процесу $(x^0(t))_{t\geq 0}$ через $P^0(t,x,\Gamma)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

Теорема 4.2. *Рівність* $P^0(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma g_0(t,x,y)\, dy$ *справджується для всіх* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$, *де* g_0 *задається співвідношеннями*

$$\begin{aligned} g_0(t,x,y) &= g(t,x,y) - \int_0^t f^0(s,x) g(t-s,0,y)\, ds = \\ &= g(t,x,y) - \int_0^t g(s,x,0) f^0(t-s,y)\, ds \end{aligned} \tag{4.15}$$

для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $y \in \mathbb{R}_0$.

Доведення. Домножимо обидві частини рівності (4.7) на $\varphi(y)$ ($\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$) та проінтегруємо їх за змінною y по $\mathbb{R}$. Одержимо

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_{\mathbb{R}} G^{(\mu)}(\lambda,x,y)\varphi(y)\, dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left[G(\lambda,x,y) - \varkappa \lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda,x,0) G(\lambda,0,y) \right] dy.$$

Ліва частина цієї рівності може бути записана наступним чином

$$\lim_{\mu\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} G^{(\mu)}(\lambda,x,y)\varphi(y)\,dy = \lim_{\mu\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\mu\eta_t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(x(t))\,\mathbb{1}_{\{}\,\tau^0 > t\}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\mathbb{P}_x(\{x(t)\in dy\}\cap\{\tau^0 > t\})\right]\,dt.$$

Тоді рівність

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}P^0(t,x,\Gamma)\,dt = \int\limits_\Gamma \left[G(\lambda,x,y) - \varkappa\lambda^{1-1/\alpha}G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)\right]\,dy$$

справджується для всіх $\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}_0$ та $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$. Це означає, що резольвентне ядро процесу $(x^0(t))_{t\geq 0}$ задається виразом

$$G(\lambda,x,y) - \varkappa\lambda^{1-1/\alpha}G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)$$

для всіх $\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}_0$ та $y\in\mathbb{R}_0$, і це є перетворенням Лапласа функції g_0 заданої формулою (4.15). Теорема доведена. □

Деякі результати стосовно процесу аналогічного до $(x^0(t))_{t\geq 0}$ можна знайти в [90, 107].

Теорема 4.3. *Справджується наступна формула для ядра потенціалу процесу $(x^0(t))_{t\geq 0}$*

$$\int\limits_0^\infty g_0(t,x,y)\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left(|x|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1} - |y-x|^{\alpha-1}\right) \tag{4.16}$$

при $x\in\mathbb{R}_0$ та $y\in\mathbb{R}_0$.

Доведення. Очевидно, що

$$\int\limits_0^\infty g_0(t,x,y)\,dt = \lim_{\lambda\to 0+}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g_0(t,x,y)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}_0,\ y\in\mathbb{R}_0.$$

Тоді, враховуючи, що

$$G(\lambda,x,y)=\frac{1}{\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi(y-x)}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi$$

для $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}_0$ та $y\in\mathbb{R}_0$, маємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g_0(t,x,y)\,dt=G(\lambda,x,y)-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y)=$$

$$=\frac{1}{\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi(y-x)}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi-$$

$$-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}\left[\frac{1}{\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi x}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi\right]\left[\frac{1}{\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi y}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi x}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi y}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi(y-x)}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi-$$

$$-\frac{\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}}{\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi x}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi y}{\lambda+c\xi^\alpha}\,d\xi.$$

Отже,

$$\int\limits_0^\infty g_0(t,x,y)\,dt=\frac{1}{\pi c}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi x}{\xi^\alpha}\,d\xi+\frac{1}{\pi c}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi y}{\xi^\alpha}\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi c}\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi(y-x)}{\xi^\alpha}\,d\xi$$

і доведення завершується обчисленням інтегралу

$$\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos\xi z}{\xi^\alpha}\,d\xi=|z|^{\alpha-1}\frac{1}{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2},\quad z\in\mathbb{R}.$$

□

На завершення цього пункту сформулюємо ще один наслідок з (4.7) відносно випадкової функції $(\beta_t)_{t\geq0}$, що є оберненою функцією до функції $(\eta_t)_{t\geq0}$.

Цей результат відомий (див. [106], а також, [9, Th. 3.17]) і наводиться тут як один з прикладів застосування формули (4.7).

Покладемо $\beta_t = \max\{s \geq 0 : \eta_s = t\}$, $t \geq 0$.

Теорема 4.4. *Для $\lambda > 0$, $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda\beta_t} = \varkappa\lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda, x, 0) \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}.$$

Зокрема, $\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\beta_t} = \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}$, $\lambda > 0$, $t > 0$. *Іншими словами,* $(\beta_t)_{t\geq 0}$ *є одновимірним стійким процесом з показником* $1 - \dfrac{1}{\alpha}$ *за умови, що* $x(0) = 0$.

Доведення. Як випливає з результатів пункту 4.1.2, рівність

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu\eta_t} \varphi(x(t))\, dt = \int_{\mathbb{R}} G^{(\mu)}(\lambda, x, y)\varphi(y)\, dy$$

правильна для кожної $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$. Покладемо тут $\varphi(y) = v_h(y) = g(h, y, 0)$ при $y \in \mathbb{R}$ та $h > 0$ і отримаємо

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mu\eta_t}\, d\eta_t^{(h)} = \int_{\mathbb{R}} G^{(\mu)}(\lambda, x, y) v_h(y)\, dy. \tag{4.17}$$

Враховуючи, що

$$\int_{\mathbb{R}} G(\lambda, x, y) g(h, y, 0)\, dy = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} g(t, x, y) g(h, y, 0)\, dy\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t + h, x, y)\, dt \to G(\lambda, x, 0) \quad h \to 0+$$

та перейшовши до границі при $h \to 0+$ в рівності (4.17), одержимо рівність

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mu\eta_t}\, d\eta_t = \frac{G(\lambda, x, 0)}{1 + \mu G(\lambda, 0, 0)}$$

яка (якщо згадати, що $G(\lambda, 0, 0) = \varkappa^{-1}\lambda^{1/\alpha - 1}$) може бути переписана наступним чином

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} \mathbb{E}_x e^{-\lambda\beta_t}\, dt = \varkappa\lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda, x, 0) \left[\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} + \mu\right]^{-1}.$$

Перейшовши в цій рівності до оригіналів, матимемо твердження, що доводиться. $\square$

4.3 Процес $(x^*(t))_{t\geq 0}$.

Розглянемо функцію g^* визначену рівністю (4.2). Доведемо, що функція g^* задовольняє рівняння Колмогорова-Чермена та її значення невід'ємні.

Друге є простим наслідком одновершинності та симетричності відносно точки x функції $(g(t,x,y))_{y\in\mathbb{R}}$ при фіксованих $t>0$ та $x\in\mathbb{R}$.

Для доведення першого зауважимо, що процес $(x(t))_{t\geq 0}$ має властивість симетричності: $g(t,x,y)=g(t,-x,-y)$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$. Звідси відразу випливає, що $g^*(t,x,y)=0$ при всіх $t>0$ і таких $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, що $x\cdot y<0$. А отже, в останньому випадку маємо $\int\limits_{\mathbb{R}} g^*(s,x,z)g^*(t,z,y)\,dz=0=g^*(s+t,x,y)$ яким би не було $s>0$. Якщо ж $x>0$, $y>0$, то, враховуючи властивість симетричності, запишемо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g^*(s,x,z)g^*(t,z,y)\,dz=\int\limits_0^\infty g^*(s,x,z)g^*(t,z,y)\,dz=$$
$$=\int\limits_0^\infty g(s,x,z)g(t,z,y)\,dz-\int\limits_0^\infty g(s,x,z)g(t,-z,y)\,dz-$$
$$-\int\limits_0^\infty g(s,-x,z)g(t,z,y)\,dz+\int\limits_0^\infty g(s,-x,z)g(t,-z,y)\,dz$$

$$=\int\limits_0^\infty g(s,x,z)g(t,z,y)\,dz-\int\limits_0^\infty g(s,x,z)g(t,z,-y)\,dz-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^0 g(s,x,z)g(t,z,-y)\,dz+\int\limits_{-\infty}^0 g(s,x,z)g(t,z,y)\,dz=$$
$$=g(s+t,x,y)-g(s+t,-x,y)=g^*(s+t,x,y).$$

Випадок $x<0$, $y<0$ аналогічний розглянутому.

Враховуючи представлення (4.1), одержуємо

$$g^*(t,x,y) = \mathbb{1}_{\{x\cdot y>0\}}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\sin\xi x\sin\xi y\,d\xi, \tag{4.18}$$

$t>0$, $x\in\mathbb{R}_0$ та $y\in\mathbb{R}_0$.

Позначимо $(x^*(t),\mathcal{M}_t^*,\tau^*,\mathbb{P}_x^*)$ стандартний процес Маркова в $(\mathbb{R}_0,\mathcal{B}(\mathbb{R}_0))$ зі щільністю ймовірності переходу g^*.

Теорема 4.5. *Для $t>0$ та $x\in\mathbb{R}_0$ маємо*

$$\mathbb{P}_x^*(\tau^*\le t) = \int\limits_0^t \frac{2|x|}{\alpha s}g(s,x,0)\,ds.$$

Доведення. Той факт, що інтеграл у формулі, яка доводиться, існує, випливає з (4.10).

Очевидно, що при $t>0$ та $x\in\mathbb{R}_0$ справджується

$$\mathbb{P}_x^*(\tau^*>t) = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)\,dy = 2\int\limits_0^{|x|} g(t,z,0)\,dz. \tag{4.19}$$

Дійсно, враховуючи означення функції g^* та симетричність процесу $(x(t))_{t\ge0}$, маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g(t,x,y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}_0} g(t,-|x|,|y|)\,dy =$$

$$= 1 - \int\limits_{-\infty}^0 g(t,-|x|,-y)\,dy - \int\limits_0^\infty g(t,-|x|,y)\,dy =$$

$$= 1 - 2\int\limits_0^\infty g(t,-|x|,y)\,dy = 1 - 2\int\limits_0^\infty g(t,y+|x|,0)\,dy =$$

$$= 1 - 2\int\limits_{|x|}^\infty g(t,z,0)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{|x|} g(t,z,0)\,dy - \int\limits_{|x|}^\infty g(t,z,0)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-|x|} g(t,z,0)\,dy + \int\limits_{-|x|}^{|x|} g(t,z,0)\,dy - \int\limits_{|x|}^{\infty} g(t,z,0)\,dy = 2\int\limits_{0}^{|x|} g(t,z,0)\,dy.$$

Тоді $-\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}_x^*(\tau^* > t) = -2\int\limits_0^{|x|} \dfrac{\partial}{\partial t} g(t,z,0)\,dz = -2\int\limits_0^{|x|} \mathbf{A}g(t,\cdot,0)(z)\,dz$, оскільки $\dfrac{\partial}{\partial t}g(t,z,0) = \mathbf{A}g(t,\cdot,0)(z)$ для $t > 0$ та $z \in \mathbb{R}$. Тепер використаємо факторизаційну властивість оператора $\mathbf{A}$ (див. с. 226) та формулу (4.9). Тоді матимемо $f^*(t,x) = -2c\mathbf{B}g(t,\cdot,0)(z)\Big|_{z=0}^{z=|x|} = \dfrac{2|x|}{\alpha t} g(t,x,0)$, де враховано, що $g(t,|x|,0) = g(t,x,0)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Наступна теорема обґрунтовує відмінність розподілів випадкових величин σ та τ^* у випадку $1 < \alpha < 2$.

Теорема 4.6. *Функції розподілу випадкових величин σ та τ^* різні, якщо $1 < \alpha < 2$.*

Доведення. Припустимо протилежне, що ці функції збігаються одна з одною. Тоді при $t > 0$ та $x > 0$ можемо записати (див. доведення Теореми 4.5)

$$\begin{aligned} 2\int\limits_0^x g(t,z,0)\,dz = \mathbb{P}_x^*(\tau^* > t) = \mathbb{P}_x(\sigma > t) = \\ = \mathbb{P}_0\left(\left\{\sup_{0\le s\le t} x(s) < x\right\}\right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Отже, наступна рівність

$$\mathbb{P}_0\left(\left\{\sup_{0\le s\le t} x(s) \ge x\right\}\right) = 2\mathbb{P}_0(x(t) \ge x)$$

стане правильною при $t > 0$ та $x \ge 0$. Це співвідношення правильне при $\alpha = 2$, і хибне при $1 < \alpha < 2$. Щоб перевірити це, використаємо формулу Рогозіна-Спіцера — рівність (4.11). Ліва частина цієї рівності може бути записана у вигляді

$$Q_l(\xi,\lambda) = 2\lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int\limits_0^\infty e^{i\xi y} g(t,0,y)\,dy\right] dt,$$

якщо тільки рівність (4.20) правильна. Ми повинні довести, що ця функція відрізняється від тої, що записана в правій частині рівності (4.11)

$$Q_r(\xi,\lambda) = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{i\xi y}-1)\int_0^\infty t^{-1}g(t,0,y)e^{-\lambda t}\,dt\,dy\right\}.$$

Покажемо, що значення похідних $\left.\dfrac{\partial Q_l(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}$ та $\left.\dfrac{\partial Q_r(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}$ різні. Диференціюючи під знаком інтеграла, приходимо до рівностей

$$\left.\frac{\partial Q_r(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = i\int_0^\infty y\int_0^\infty t^{-1}g(t,0,y)e^{-\lambda t}\,dt\,dy,$$

$$\left.\frac{\partial Q_l(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 2\lambda i\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty yg(t,0,y)\,dy\,dt.$$

Тепер нескладно встановити наступні рівності

$$\left.\frac{\partial Q_l(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \frac{2}{\alpha}\frac{ic^{1/\alpha}}{\lambda^{1/\alpha}\sin(\pi/\alpha)} \text{ і } \left.\frac{\partial Q_r(\xi,\lambda)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \frac{ic^{1/\alpha}}{\lambda^{1/\alpha}\sin(\pi/\alpha)},$$

які показують, що ці похідні насправді різні при $\alpha < 2$.

Щоб перевірити ці рівності, обчислимо інтеграл $\int_0^\infty yg(t,0,y)\,dy$ при $t>0$. Інтегрування частинами приводить нас до рівності

$$\int_0^\infty yg(t,0,y)\,dy = \int_0^\infty dy\int_y^\infty g(t,0,z)\,dz, \quad t>0.$$

Тут взято до уваги, що $\lim\limits_{y\to\infty} y\int_y^\infty g(t,0,z)\,dz = 0$ як випливає з (4.10). Формула (4.1) та інтегральна теорема Фур'є (див. [11, Ch. 3]) приводять тепер до наступних рівностей ($t>0$, $y>0$)

$$\int_y^\infty g(t,0,z)\,dz = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\left[\frac{\sin(M\xi)}{\xi}-\frac{\sin(y\xi)}{\xi}\right]d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\frac{\sin(y\xi)}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[1-e^{-ct\xi^\alpha}\right]\frac{\sin(y\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Тому маємо

$$\int_0^\infty yg(t,0,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy \int_0^\infty \left[1-e^{-ct\xi^\alpha}\right]\frac{\sin(y\xi)}{\xi}\,d\xi =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-e^{-ct\xi^\alpha}}{\xi^2}\left[1-\cos(M\xi)\right]\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-e^{-ct\xi^\alpha}}{\xi^2}\,d\xi.$$

Останній інтеграл легко обчислюється. Остаточно, одержуємо рівність

$$\int_0^\infty yg(t,0,y)\,dy = \frac{c^{1/\alpha}t^{1/\alpha}}{\pi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right),$$

правильну при всіх додатних t. Таким чином, ми перевіряємо написані вище формули для $\left.\dfrac{\partial Q_l(\xi,\lambda)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$ та $\left.\dfrac{\partial Q_r(\xi,\lambda)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 4.1. Інший спосіб доведення Теореми 4.6 опирається на нерівність

$$\mathbb{P}_0\left(\left\{\sup_{0\le s\le t} x(s) > x\right\}\right) \le 2\mathbb{P}_0(x(t) > x), \quad t>0,\ x>0,$$

яка справджується при всіх $\alpha\in(0,2)$; якщо $\alpha=2$ ця нерівність перетворюється в рівність (див., наприклад, [21, Гл. IV, §1]). Наступні міркування показують, що ця нерівність у випадку $1<\alpha<2$ повинна бути строгою. Для $x>0$ покладемо $\sigma_x = \inf\{s\ge 0 : x(s) > x\}$. Тоді для $t>0$ та $x>0$ можемо записати

$$\mathbb{P}_0(x(t) > x) = \mathbb{P}_0(\{x(t) > x\}\cap\{\sigma_x \le t\}) =$$
$$= \mathbb{P}_0(\{x(t) - x(\sigma_x) > x - x(\sigma_x)\}\cap\{\sigma_x \le t\}).$$

Як випливає з результатів роботи [106], $x - x(\sigma_x) < 0$ $\mathbb{P}_0$-м.н. Отже, маємо строгу нерівність

$$\mathbb{P}_0(x(t) > x) > \mathbb{P}_0(\{x(t) - x(\sigma_x) > 0\}\cap\{\sigma_x \le t\}).$$

Взявши до уваги той факт, що процес $(x(t),\mathbb{P}_0)$ має стаціонарні незалежні прирости, ми приходимо до строгої нерівності

$$2\mathbb{P}_0(x(t) > x) > \mathbb{P}_0\left(\left\{\sup_{0\le s\le t} x(s) > x\right\}\right),$$

яка справджується при $t > 0$ та $x > 0$. За симетрією маємо

$$2\mathbb{P}_0(x(t) < x) > \mathbb{P}_0\left(\left\{\inf_{0\le s\le t} x(s) < x\right\}\right), \quad t > 0,\ x < 0.$$

Таким чином, при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$

$$\mathbb{P}^*_x(\tau^* \le t) = 1 - 2\mathbb{P}_0(0 \le x(t) \le |x|) = 1 - 2\mathbb{P}_0(-|x| \le x(t) \le |x|) =$$
$$= 2\mathbb{P}_0(x(t) > |x|) > \mathbb{P}_0\left(\sup_{0\le s\le t} x(s) > |x|\right) = \mathbb{P}_{-|x|}\left(\sup_{0\le s\le t} x(s) > 0\right).$$

Якщо $x < 0$, то $\mathbb{P}^*_x(\tau^* \le t) > \mathbb{P}_x\left(\sup\limits_{0\le s\le t} x(s) > 0\right) = \mathbb{P}_x(\sigma \le t)$. Аналогічно при $x > 0$ одержуємо $\mathbb{P}^*_x(\tau^* \le t) > \mathbb{P}_x(\sigma \le t)$. Отже, строга нерівність $\mathbb{P}^*_x(\tau^* \le t) > \mathbb{P}_x(\sigma \le t)$ справджується для всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$. Це означає, що час життя процесу $(x^*(t))_{t\ge 0}$ в деякому розумінні коротший, ніж момент зупинки σ. З іншого боку, той факт, що $\sigma < \tau^0$ $\mathbb{P}_x$-м.н. для кожного $x \in \mathbb{R}_0$ випливає з результатів роботи [106].

Тепер покажемо, що функція f^* може бути представлена у вигляді

$$f^*(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)v(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0, \tag{4.21}$$

з деякою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$. Випадки $1 < \alpha < 2$ та $\alpha = 2$ будемо розглядати окремо, оскільки функція v виявляється звичайною в першому випадку і узагальненою в другому.

Спочатку розглянемо випадок $1 < \alpha < 2$. Співвідношення (4.10) дозволяє зробити припущення якою повинна бути функція v.

Теорема 4.7. *Якщо $1 < \alpha < 2$, то представлення (4.21) справджується з функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$, яка визначається рівністю*

$$v(x) = \frac{2c}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha}. \tag{4.22}$$

Доведення. Так звана друга теорема про середнє значення (див. [19, т. 2, с. 600]) з інтегрального числення дозволяє перевірити наступну рівність при

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)\frac{dy}{|y|^\alpha} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\sin\xi|x| \left[\int\limits_0^\infty \frac{\sin\xi y}{y^\alpha}\,dy\right]\,d\xi.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\xi y}{y^\alpha}\,dy = -\xi^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}$ для $\xi > 0$, то можна записати (при $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)v(y)\,dy = \frac{2c}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\xi^{\alpha-1}\sin\xi|x|\,d\xi.$$

Далі інтегруємо частинами і одержуємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\xi^{\alpha-1}\sin\xi|x|\,d\xi = -\sin\xi|x|\frac{1}{\alpha ct}e^{-ct\xi^\alpha}\Big|_0^\infty + \frac{|x|}{\alpha ct}\int\limits_0^\infty e^{-ct\xi^\alpha}\cos\xi|x|\,d\xi =$$

$$= \frac{|x|}{\alpha ct}\pi g(t,|x|,0),$$

що згідно Теореми 4.5 означає справедливість формули (4.21). □

Якщо $\alpha = 2$, маємо $f^*(t,x) = \dfrac{|x|}{2\sqrt{c\pi t^3}}e^{-x^2/4ct}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$.

Зауваження 4.2. Формула для $f^*(t,x)$ може бути отримана з Теореми 4.5. Вона також випливає з рівності $f^*(t,x) = f^0(t,x)$, що справджується, якщо $\alpha = 2$.

Теорема 4.8. *Якщо $\alpha = 2$, то функція v в (4.21) є узагальненою функцією, чия дія на основну функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$, яка є достаттьо гладкою, такою, що задовольняє умови $\varphi(0-) = \varphi(0+) = 0$ та границі $\varphi'(0-)$ і $\varphi'(0+)$ існують, відповідно до наступного правила*

$$\langle v, \varphi\rangle = c\left(\varphi'(0+) - \varphi'(0-)\right). \tag{4.23}$$

Доведення. Для фіксованих $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$ функція $(g^*(t,x,y))_{y\in\mathbb{R}_0}$ задовольняє умови $g^*(t,x,0\pm) = 0$. Крім того, виконується

$$\frac{\partial g^*(t,x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0\pm} = \frac{x \pm |x|}{4c\sqrt{c\pi t^3}}e^{-x^2/4ct}.$$

Таким чином, $\langle v, g^*(t,x,\cdot)\rangle = \dfrac{|x|}{2\sqrt{c\pi t^3}} e^{-x^2/4ct} = f^*(t,x)$. Права частина формули (4.21) є символічним записом результату дії узагальненої функції v на функцію $g^*(t,x,\cdot)$ при кожних фіксованих $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$. Теорема доведена. $\square$

Наслідок 4.8.1. *Для кожного $\alpha \in (1,2]$ справджується наступне співвідношення*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,y) f^*(t,y)\, dy = f^*(s+t,x) \tag{4.24}$$

при $s > 0$, $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$.

Доведення. Якщо $1 < \alpha < 2$, то ліва частина рівності (4.24) може бути записана наступним чином

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,y) \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,y,z) v(z)\, dz\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s+t,x,z) v(z)\, dz$$

та (4.24) справджується.

Якщо $\alpha = 2$, то інтеграл в (4.21) є нічим іншим як символом, і ми не можемо використовувати наведені вище обчислення. Але є інший шлях одержати (4.24) для всіх $\alpha \in (1,2]$. Він опирається на наступне твердження (Лема 4.9).

Лема 4.9 з допомогою простих обчислень дозволяє довести (4.24) для кожного $\alpha \in (1,2]$. Ми пропускаємо ці обчислення. $\square$

Лема 4.9. *Для кожного $\alpha \in (1,2]$ формула*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,z) z g(t,z,y)\, dz = \frac{xt + ys}{s+t} g(s+t,x,y) \tag{4.25}$$

правильна при всіх $s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$.

Доведення. Доведення полягає в застосуванні оператора $\mathbf{B}$ до обох сторін рівняння Колмогорова-Чепмена записаного для функції g (заданої рівністю (4.1)) та використанні після цього формули (4.9). Отже, одержуємо набір еквівалентних рівностей

$$\mathbf{B}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,\cdot,z)g(t,z,y)\,dz\right)(x) = \mathbf{B}g(s+t,\cdot,y)(x),$$

$$\frac{1}{c\alpha s}\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,z)(z-x)g(t,z,y)\,dz = \frac{y-x}{c\alpha(s+t)}g(s+t,x,y),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,z)zg(t,z,y)\,dz - x\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,z)g(t,z,y)\,dz = \frac{s(y-x)}{s+t}g(s+t,x,y),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,x,z)zg(t,z,y)\,dz = \left(\frac{s(y-x)}{s+t}+x\right)g(s+t,x,y) = \frac{xt+ys}{s+t}g(s+t,x,y).$$

Що і потрібно було встановити. □

Розглянемо тепер функцію

$$F_t^*(x) = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}_0. \tag{4.26}$$

Застосування Наслідку 4.8.1, дозволяє легко перевірити, що ця функція є W-функцією для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ при кожному $\alpha \in (1,2]$.

Природно задатись тепер питанням, чи існує W-функціонал $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ такий, що $\mathbb{E}_x^*\zeta_t = F_t^*(x)$ при всіх $t>0$ та $x\in\mathbb{R}_0$.

Як випливає з (4.19),

$$F_t^*(x) = 2\int\limits_{|x|}^{\infty} g(t,z,0)\,dz, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}_0,$$

і, отже, ця функція має властивість $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0} F_t^*(x) = 1$, $t>0$. Таким чином, ми не можемо застосувати Теорему 6.6 з [16] (як це робилося в пункті 4.1.2), щоб відповісти на поставлене вище питання.

Тим не менш, ця відповідь позитивна у випадку $1<\alpha<2$, оскільки завдяки Теоремі 4.7 ми маємо

$$\mathbb{E}_x^*\int\limits_0^t v(x^*(s))\,ds = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds = F_t^*(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}_0, \tag{4.27}$$

і, отже, в цьому випадку $\zeta_t = \int\limits_0^t v(x^*(s))\,ds$ при $t \geq 0$.

Для випадку $\alpha = 2$, доведемо наступне.

Теорема 4.10. *У випадку $\alpha = 2$ не існує W-функціонала $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ такого, що*

$$\mathbb{E}_x^*\zeta_t = F_t^*(x) = \int\limits_0^t \frac{|x|}{2\sqrt{c\pi s^3}} e^{-x^2/4cs}\,ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0. \tag{4.28}$$

Доведення. Насамперед встановимо, що існування W-функціоналу $(\zeta_t)_{t\geq 0}$, який би задовольняв (4.28), приводить до наступної властивості функції $(F_t^*(x))_{t>0, x\in\mathbb{R}_0}$

$$\lim_{h\to 0+, \delta\to 0+} \mathbb{E}_x^* \int\limits_0^t \frac{1}{h} F_h^*(x^*(s)) F_\delta^*(x^*(s))\,ds = 0 \tag{4.29}$$

і тоді покажемо, що функція (4.26) не володіє цією властивістю.

Перша частина доведення є незначним уточненням підстав, що доводять необхідність у Теоремі 2 з [21, Гл. II, §6]. Нехай $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ є W-функціоналом від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ і виконується (4.28). Математичне сподівання в (4.29) може бути представлене наступним чином

$$\mathbb{E}_x^* \int\limits_0^t \frac{1}{h}\left(\mathbb{E}_{x^*(s)}^*\zeta_h\right) F_\delta^*(x^*(s))\,ds = \mathbb{E}_x^* \int\limits_0^t \frac{\zeta_{s+h} - \zeta_s}{h} F_\delta^*(x^*(s))\,ds.$$

Покладемо $\Delta_t(h,\delta) = \int\limits_0^t \frac{1}{h}(\zeta_{s+h} - \zeta_s) F_\delta^*(x^*(s))\,ds$. Взявши до уваги, що Δ_t залежить від δ монотонно та той факт, що (нагадаємо, що $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0} F_t^*(x) \equiv 1$) $\Delta_t(h,\delta) \leq \zeta_{t+h}$, приходимо до висновку, що достатньо довести співвідношення

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{h\to 0+}} \Delta_t(h,\delta) = 0. \tag{4.30}$$

Тепер зауважимо, що функція $(F^*_\delta(x^*(s)))_{s\geq 0}$ неперервна при фіксованому $\delta > 0$. Тому $\lim\limits_{h\to 0+} \int\limits_0^t \frac{1}{h}(\zeta_{s+h} - \zeta_s) F^*_\delta(x^*(s))\, ds = \int\limits_0^t F^*_\delta(x^*(s))\, d\zeta_s$. Співвідношення (4.30) тепер слідує з того, що $F^*_\delta(x) \downarrow 0$, якщо $\delta \downarrow 0$, для кожного $x \in \mathbb{R}_0$.

Щоб довести, що функція (4.26) не може задовольняти (4.29), зауважимо, що

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int\limits_{\mathbb{R}_0} \varphi(x) F^*_h(x)\, dx = c[\varphi'(0+) - \varphi'(0-)]$$

для кожної функції φ на $\mathbb{R}_0$, яка задовольняє умови Теореми 4.8. Але функція $(g^*(s,x,z)F^*_\delta(z))_{z\in\mathbb{R}_0}$ задовольняє ці умови. Таким чином, якщо $h \to 0+$, маємо

$$\mathbb{E}^*_x \int\limits_0^t \frac{1}{h} F^*_h(x^*(s)) F^*_\delta(x^*(s))\, ds = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} \frac{1}{h} F^*_h(z) g^*(s,x,z) F^*_\delta(z)\, dz \to$$

$$\to \int\limits_0^t c\left[F^*_\delta(0+)\, \frac{\partial g^*(s,x,z)}{\partial z}\bigg|_{z=0+} - F^*_\delta(0-)\, \frac{\partial g^*(s,x,z)}{\partial z}\bigg|_{z=0-}\right] ds =$$

$$= \int\limits_0^t f^*(s,x)\, ds = F^*_t(x),$$

оскільки $F^*_\delta(0+) = F^*_\delta(0-) = 1$. Ми щойно довели, що

$$\lim_{h\to 0+} \mathbb{E}^*_x \int\limits_0^t \frac{1}{h} F^*_h(x^*(s)) F^*_\delta(x^*(s))\, ds = F^*_t(x) > 0$$

для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$. Це означає, що (4.29) не виконується. Теорема доведена.

$\square$

Як показує наступна теорема, у випадку $\alpha = 2$ функція g та g^* пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8, хоча в строгому сенсі це не так, як випливає з попереднього.

Теорема 4.11. *У випадку $\alpha = 2$ функції g та g^* пов'язані співвідношеннями*

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z) g^*(t-s,z,y) v(z)\, dz, \tag{4.31}$$

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,z) g(t-s,z,y) v(z)\, dz \tag{4.32}$$

з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8.

Доведення. Для доведення співвідношення (4.31) достатньо встановити наступну рівність

$$g(t,-|x|,|y|) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z) g^*(t-s,z,y) v(z)\, dz \tag{4.33}$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $y \in \mathbb{R}_0$.

Перш за все зауважимо, що $g^*(t, 0\pm, y) \equiv 0$, бо функція $(g(t,0,y))_{y\in\mathbb{R}}$ парна при кожному $t > 0$. Таким чином, $g(s,x,0\pm) g^*(t-s, 0\pm, y) \equiv 0$.

Далі, $\dfrac{\partial}{\partial z} g(s,x,z) = \dfrac{x-z}{4\sqrt{\pi c^3 s^3}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4cs}}$, а оскільки при $0 < s < t$, $y \in \mathbb{R}_0$, $z \in \mathbb{R}_0$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial z} g^*(t-s,z,y) = \frac{1}{4\sqrt{\pi c^3 (t-s)^3}} \left[(y-z) e^{-\frac{(y-z)^2}{4c(t-s)}} + (|z|+|y|) \operatorname{sign} z e^{-\frac{(|z|+|y|)^2}{4c(t-s)}} \right],$$

то $\dfrac{\partial}{\partial z} [g(s,x,z) g^*(t-s,z,y)] \Big|_{z=0\pm} = g(s,x,0) \dfrac{y \pm |y|}{4c\sqrt{c\pi (t-s)^3}} e^{-\frac{y^2}{4c(t-s)}}$ і можемо написати

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z) g^*(t-s,z,y) v(z)\, dz = \frac{1}{2\sqrt{c\pi s}} e^{-\frac{x^2}{4cs}} \frac{|y|}{2\sqrt{c\pi (t-s)^3}} e^{-\frac{y^2}{4c(t-s)}}.$$

Щоб зінтегрувати за змінною s в межах від 0 до t вираз в правій частині останньої рівності застосуємо перетворення Лапласа і формулу для такого перетворення згортки. Маємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{1}{2\sqrt{c\pi s}} e^{-\frac{x^2}{4cs}}\, ds = \frac{1}{2\sqrt{c\lambda}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{c}}|x|},$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{|y|}{2\sqrt{c\pi s^3}}e^{-\frac{y^2}{4cs}}\,ds = e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{c}}|y|}.$$

Таким чином, перетворення Лапласа згортки даних функцій дорівнює $\dfrac{1}{2\sqrt{c\lambda}}e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{c}}(|x|+|y|)}$ і тому остаточно одержуємо

$$\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z)g^*(t-s,z,y)v(z)\,dz = \frac{1}{2\sqrt{c\pi t}}e^{-\frac{(|y|+|x|)^2}{4ct}} = g(t,-|x|,|y|).$$

Тобто (4.33) доведено. Співвідношення (4.32) доводиться так само. $\square$

Повернемось тепер до випадку $1<\alpha<2$. Покладемо $m(t) = 1\!\!\mathrm{I}_{\{\tau^*\le t\}} - \zeta_t$ для $t\ge 0$, де $\zeta_t = \displaystyle\int_0^t v(x^*(s))\,ds$.

Теорема 4.12. *Якщо* $1<\alpha<2$, *то процес* $(m(t))_{t\ge 0}$ *є* $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$*-мартингалом для кожного* $x\in\mathbb{R}_0$.

Іншими словами, W-функціонал $(\zeta_t)_{t\ge0}$ слугує компенсатором для точкового процесу $(1\!\!\mathrm{I}_{\{\tau^*\le t\}})_{t\ge 0}$.

Доведення. Формула (4.27) означає, що $\mathbb{E}_x^* m(t) = 0$ для кожних $t\ge 0$ та $x\in\mathbb{R}_0$. Тепер для $0\le s<t$ маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x^*(m(t)/\mathcal{M}_s^*) = 1\!\!\mathrm{I}_{\{\tau^*\le s\}} - \zeta_s + \mathbb{E}_x^*([1\!\!\mathrm{I}_{\{s<\tau^*\le t\}} - (\zeta_t-\zeta_s)]/\mathcal{M}_s^*) = \\ = m(s) + 1\!\!\mathrm{I}_{\{\tau^*>s\}}\,\mathbb{E}_{x^*(s)}^* m(t-s) = m(s).\end{aligned}$$

Теорема доведена. $\square$

У випадку $1<\alpha<2$ функції g та g^* не пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца. Як показує наступна теорема, зв'язок тут набагато складніший. Позначимо через $\Pi(dx)$ міру Леві процесу $(x(t))_{t\ge0}$. Добре відомо, що

$$\Pi(dx) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha-1}\,dx.$$

Нехай $\mathcal{L}$ означає оператор, що діє на функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ відповідно до формули

$$\mathcal{L}\varphi(x) = v(x)\varphi(x) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x) - \varphi(y - |x| \operatorname{sign} y)\, \mathbb{I}_{\{|y|>|x|\}}\right] \Pi(dy),$$

де $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначена рівністю (4.22).

Теорема 4.13. *Для кожних $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ та $x \in \mathbb{R}_0$ процес*

$$\varphi(x^*(t)) - \varphi(x^*(0)) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(x^*(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

є $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$-мартингалом.

Зауважимо, що це твердження досить близьке до тих, що доведені в [96], і доводиться за допомогою аналогічних методів.

Доведення. Для кожних $t > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ розглянемо розбиття $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Позначивши через $\Delta x_k^* = x^*(t_k) - x^*(t_{k-1})$, при всіх $x \in \mathbb{R}_0$ і $\theta \in \mathbb{R}$ запишемо

$$\mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t)} = e^{i\theta x} + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t_{k-1})} \mathbb{E}_{x^*(t_{k-1})} \left(e^{i\theta \Delta x_k^*} - 1\right).$$

Враховуючи, що $\Delta x_k^* \overset{d}{=} x^*(\Delta t_k) - x^*(0)$, де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, запишемо

$$\mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t)} = e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x \sum_{k=1}^n e^{i\theta x^*(t_{k-1})} \mathbb{E}_{x^*(t_{k-1})} \left(e^{i\theta(x^*(\Delta t_k) - x^*(0))} - 1\right). \tag{4.34}$$

Нехай $\max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta t_k \to 0$, при $n \to \infty$. Перепишемо рівність (4.34) у вигляді

$$\mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t)} = \\ = e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x \sum_{k=1}^n e^{i\theta x^*(t_{k-1})} \mathbb{E}_{x^*(t_{k-1})} \left(e^{i\theta(x^*(\Delta t_k) - x^*(0))} - 1 - i\theta(x^*(\Delta t_k) - x^*(0))\right) + \\ + i\theta \mathbb{E}_x \sum_{k=1}^n e^{i\theta x^*(t_{k-1})} \mathbb{E}_{x^*(t_{k-1})} (x^*(\Delta t_k) - x^*(0)).$$

Далі при всіх $x \in \mathbb{R}_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ і малих $h > 0$ розглянемо функцію

$$A_h^\alpha(x,\theta) = \frac{1}{h}\mathbb{E}_x\left(e^{i\theta(x^*(h)-x^*(0))} - 1 - i\theta(x^*(h) - x^*(0))\right)$$

і подамо її у вигляді $A_h^\alpha(x,\theta) = B_h^\alpha(x,\theta) - C_h^\alpha(x,\theta)$, де

$$B_h^\alpha(x,\theta) = \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta(y-x)} - 1 - i\theta(y-x)\right) g(h,-|x|,|y|)\,dy,$$

$$C_h^\alpha(x,\theta) = \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta(y-x)} - 1 - i\theta(y-x)\right) g(h,x,y)\,dy,$$

Крім того, розглянемо функцію

$$D_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}(y-x)g^*(h,x,y)\,dy = \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}}(x-y)g(h,x,y)\,dy.$$

Враховуючи симетричність процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, легко встановити, що $D_h(x) = \dfrac{2x}{h}\displaystyle\int\limits_{|x|}^{\infty} g(h,0,z)\,dz$.

Зауважимо тепер, що функція $F_t(x) = \displaystyle\int\limits_x^\infty g(t,0,z)\,dz$ при $t > 0$, $x > 0$ диференційовна по t і $\lim\limits_{t\to 0+} F_t(x) = 0$. Тому $\dfrac{1}{t}F_t(x) \sim \dfrac{\partial}{\partial t}F_t(x)$, $t \to 0+$.

Диференціювання під знаком інтеграла та властивості функції g (зокрема (4.9)) приводять до рівності

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(x) = \frac{x}{\alpha t}g(t,0,x), \quad t > 0,\ x > 0.$$

Враховуючи, що (див. формулу (4.10)) при кожному $x > 0$ справджується співвідношення $g(t,0,x) \sim k\dfrac{t}{x^{\alpha+1}}$, $t \to 0+$, де $k = \dfrac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}$, одержуємо при $x > 0$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}F_t(x) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{2}v(x).$$

Звідси отримуємо, що $D_h(x) = xv(x) + o(1)$, $h \to 0+$.

Оскільки $B_h(x,\theta) = -c|\theta|^\alpha + o(1) = \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta z} - 1 - i\theta z\right)\Pi(dz) + o(1)$ при $h \to 0+$, то досить вивчити поведінку функції $C_h^\alpha(x,\theta)$ при $h \to 0+$. Двічі інтегруючи частинами, одержуємо рівність

$$C_h^\alpha(x,\theta) = \frac{2}{h}\int\limits_0^\infty \left(e^{-i\theta x}\cos\theta y - 1 - i\theta x\right) g(h,-|x|,y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{h}\int\limits_{|x|}^\infty \left(e^{-i\theta x}\cos\theta(z-|x|) - 1 - i\theta x\right) g(h,0,z)\,dz =$$

$$= \frac{2}{h}\left(e^{-i\theta x} - 1 + i\theta x\right) F_h(|x|) - \frac{2}{h}\theta^2 e^{-i\theta x}\int\limits_{|x|}^\infty \cos\theta(z-|x|) G_h(z)\,dz,$$

де $G_t(x) = \int_x^\infty F_t(z)\,dz$, $x > 0$, $t > 0$.

Нескладно встановити, що $V(x) \overset{def}{=} \lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}G_t(x) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$, $x > 0$ та локально рівномірну по h збіжність інтегралу в останньому представленні функції $C_h^\alpha(x,\theta)$. Тому, враховуючи, що $V'(x) = -v(x)$ при $x > 0$, маємо

$$C_h^\alpha(x,\theta) = \left(e^{-i\theta x} - 1 + i\theta x\right) v(x) - \theta^2 e^{-i\theta x}\int\limits_{|x|}^\infty \cos\theta(z-|x|) V(z)\,dz + o(1) =$$

$$= \left(e^{-i\theta x} - 1 + i\theta x\right) v(x) - \theta e^{-i\theta x}\int\limits_{|x|}^\infty \sin\theta(z-|x|) v(z)\,dz + o(1), \quad h \to 0+\,.$$

Оскільки $v'(x) = -2\pi(x)$ при $x > 0$, де $\pi(x) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$, то інтеграл в правій частині останнього представлення функції $C_h^\alpha(x,\theta)$ після інтегрування частинами може бути записаний наступним чином

$$\int\limits_{|x|}^\infty \sin\theta(z-|x|) v(z)\,dz = \frac{1}{\theta}v(x) - \frac{2}{\theta}\int\limits_{|x|}^\infty \cos\theta(z-|x|)\pi(z)\,dz =$$

$$\frac{1}{\theta}v(x) - \frac{1}{\theta}\left[\int\limits_{|x|}^\infty e^{i\theta(z-|x|)}\pi(z)\,dz + \int\limits_{|x|}^\infty e^{i\theta(-z+|x|)}\pi(z)\,dz\right] =$$

$$= \frac{1}{\theta}v(x) - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta(z-|x|\operatorname{sign} z)}\,\mathbb{1}_{|z|>|x|}\,\pi(z)\,dz$$

Отже, $C_h^\alpha(x,\theta) = C^\alpha(x,\theta) + o(1)$, $h \to 0+$, де

$$C^\alpha(x,\theta) = (i\theta x - 1)v(x) + e^{-i\theta x}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta(z-|x|\operatorname{sign} z)}\,\mathbb{1}_{|z|>|x|}\,\Pi(dz).$$

Таким чином, одержимо

$$\mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t)} =$$

$$= e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta x^*(t_{k-1})}\left[A^\alpha_{\Delta t_k}(x^*(t_{k-1}),\theta) + i\theta D_{\Delta t_k}(x^*(t_{k-1}))\right]\Delta t_k =$$

$$= e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x\sum_{k=1}^{n}\Bigg(e^{i\theta x^*(t_{k-1})}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta z} - 1 - i\theta z\right)\Pi(dz) -$$

$$- (i\theta x^*(t_{k-1}) - 1)v(x^*(t_{k-1}))$$

$$- e^{-i\theta x^*(t_{k-1})}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta(z-|x^*(t_{k-1})|\operatorname{sign} z)}\,\mathbb{1}_{|z|>|x^*(t_{k-1})|}\,\Pi(dz) +$$

$$+ i\theta x^*(t_{k-1})v(x^*(t_{k-1}))\Bigg]\Delta t_k + o(\Delta t_k)\Bigg) =$$

$$= e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x\sum_{k=1}^{n}\Bigg(e^{i\theta x^*(t_{k-1})}\Bigg[v(x^*(t_{k-1})) + \int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta z} - 1 - i\theta z\right)\Pi(dz) -$$

$$- e^{-i\theta x^*(t_{k-1})}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta(z-|x^*(t_{k-1})|\operatorname{sign} z)}\,\mathbb{1}_{|z|>|x^*(t_{k-1})|}\,\Pi(dz)\Bigg]\Delta t_k + o(\Delta t_k)\Bigg).$$

Звідси випливає, що

$$\mathbb{E}_x e^{i\theta x^*(t)} =$$

$$= e^{i\theta x} + \mathbb{E}_x\int\limits_0^t\Bigg(v(x^*(\tau))e^{i\theta x^*(\tau)} + \int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta(z+x^*(\tau))} - e^{i\theta x^*(\tau)} - i\theta z e^{i\theta x^*(\tau)}\right)\Pi(dz) -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta(z-|x^*(\tau)|\operatorname{sign} z)}\,\mathbb{1}_{|z|>|x^*(\tau)|}\,\Pi(dz)\Bigg)\,d\tau.$$

А це означає, що справджується твердження, яке доводилось. $\square$

Зауваження 4.3. Хоч Теорема 4.13 стосується випадку $1 < \alpha < 2$, але вона залишається справидливою і при $0 < \alpha \leq 1$. Зокрема при $0 < \alpha < 1$ потрібно взяти

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varphi(x) =& v(x)\varphi(x)+\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y - |x| \operatorname{sign} y)\, \mathbb{1}_{\{|y|>|x|\}}\right] \Pi(dy),\end{aligned}$$

а при $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varphi(x) = v(x)\varphi(x)+&\\ +\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x)\, \mathbb{1}_{\{|y|<1\}} - \varphi(y - |x| \operatorname{sign} y)\, \mathbb{1}_{\{|y|>|x|\}}\right] \Pi(dy),&\end{aligned}$$

Доведення цього відрізняється від наведеного вище тільки окремими технічними моментами.

Завершимо цей пункт формулою, яка представляє ядро потенціалу для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$:

$$\int\limits_0^\infty g^*(t,x,y)\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)} \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, \mathbb{1}_{\{x\cdot y>0\}} \left(|x+y|^{\alpha-1} - |x-y|^{\alpha-1}\right).$$

Вона доводиться аналогічно до того, як була доведена формула (4.16).

Висновки до розділу 4.

Розглянуті моменти першого потрапляння в початок координат τ^0, першого виходу зі стартової півосі σ симетричного α-стійкого випадкового процесу $x(t)$ та випадкові процеси утворені з нього обривом в ці моменти часу, відповідно, $x^0(t)$ та x^σ. Крім того, розглядається процес Маркова $x^*(t)$ в $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ зі щільністю ймовірності переходу $g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - g(t,-|x|,|y|)$, де $g(t,x,y)$ —щільність ймовірності переходу випадкового процесу $x(t)$. З випадковим процесом $x^*(t)$ пов'язана випадкова величина τ^* — час існування цього процесу. Виявляється, що описані об'єкти мають суттєво різні властивості при $1 < \alpha < 2$ та $\alpha = 2$. Знайдені потенціали процесів $x^0(t)$ та $x^*(t)$ однакові тільки при $\alpha = 2$.

Випадок $\alpha = 2$. Випадкові величини τ^0 і σ однакові. І тому процеси $x^0(t)$ та $x^\sigma(t)$ збігаються. Більше того, $x^0(t)$ а, отже, і $x^\sigma(t)$ стохастично еквівалентні процесу $x^*(t)$. Ці процеси є ні чим іншим, як вінеровим процесом (стандартним броунівським рухом) в $\mathbb{R}$ зупиненим в момент обриву $\tau^0 = \sigma$. Щільності ймовірностей переходу $g(t,x,y)$ та $g^*(t,x,y)$ пов'язані між собою рівнянням типу Фейнмана-Каца (див. рівняння (1.23), (1.24), (4.31), (4.32)) з функцією v, що є узагальненою функцією (Теорема 4.8), хоча не існує W-функціонала від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ чия характеристика задавалась би виразом

$$\int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,y) v(y)\, dy = \int\limits_0^t f^*(s,x)\, ds$$

з цією функцією v. Тут $f^*(\cdot, x)$ — щільність розподілу τ^* за умови $\{x^*(0) = x\}$, $x \in \mathbb{R}_0$.

Випадок $1 < \alpha < 2$. Процеси $x^0(t)$, $x^\sigma(t)$ різні та жоден з них не є стохастично еквівалентним процесу $x^*(t)$. Моменти обриву τ^0, σ та τ^* пов'язані наступними нерівностями $\tau^* << \sigma < \tau^0$, в яких перша з них означає, що $\mathbb{P}^*_x(\tau^* \leq t) > \mathbb{P}_x(\sigma \leq t)$ для всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}_0$. Момент зупинки τ^* є непередбачуваним і процес $\left(\int\limits_0^t v(x^*(s))\, ds\right)_{t\geq 0}$ з $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ заданою рівністю (4.22) є компенсатором процесу $(\mathbb{1}_{\tau^*\leq t})_{t\geq 0}$. Нарешті, процес $(x^*(t), \mathcal{M}^*_t, \tau^*, \mathbb{P}^*_x)$ розв'язує деяку мартингальну задачу (Теорема 4.13).

Результати розділу 4 опубліковані в [66] та анонсовані в [83].

Розділ 5

Деякі задачі для симетричного стійкого випадкового процесу з показником $\alpha = 2$

Як неодноразово вже зазначалось α-стійкий випадковий процес з показником $\alpha = 2$ є нічим іншим, як процесом броунівського руху чи вінеровим процесом, якщо додатково взяти значення $c = \dfrac{1}{2}$. Броунівський рух є одним з найпростіших прикладів та джерелом дифузійних процесів. Цей розділ присвячений деяким задачам для дифузійних процесів.

5.1 Граничні теореми для деякої слабко збіжної послідовності дифузійних процесів

5.1.1 Основні припущення та допоміжні результати

Кожна пара неперервних обмежених функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та інтервалі $[0;\infty)$, відповідно, визначає еліптичний оператор $\mathfrak{L}$, який діє на двічі неперервно диференційовну функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ з дійсними значеннями за правилом

$$\mathfrak{L}\varphi(x) = a(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}b(x)\varphi''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай задана така пара функцій. Неперервний однорідний процес Маркова $(x(t))_{t\geq 0}$ у фазовому просторі $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ($\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борельових підмножин дійсної осі) з ймовірністю переходу $(P(t,x,\Gamma))_{t>0,x\in\mathbb{R},\Gamma\in\mathfrak{B}}$ зветься дифузійним з коефіцієнтом переносу $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та коефіцієнтом дифузії $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, якщо відповідний еліптичний оператор $\mathfrak{L}$ та ймовірність переходу P задовольняють співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)P(t,x,dy) = \varphi(x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}\varphi(y)P(\tau,x,dy) \tag{5.1}$$

при всіх $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$, якою б не була двічі неперервно диференційовна та обмежена разом зі своїми похідними функція $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$.

Зрозуміло, що рівність (5.1) в тих, чи інших випадках поширюється і на деякі необмежені функції.

5.1.1.1 Теорема існування та єдиності.

Відповідь на питання, якими мають бути задані функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, щоб існував єдиний дифузійний процес $(x(t))_{t\geq 0}$ в $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ з цими коефіцієнтами, дає наступне твердження (про достатні умови існування та єдиності дифузійного процесу), що є частковим випадком загальної теореми Струка-Варадана (див. [104]).

Нехай задані неперервні обмежені функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та (відкритому!) інтервалі $(0;\infty)$, відповідно. Тоді існує дифузійний процес $(x(t))_{t\geq 0}$ в $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, для якого функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є коефіцієнтом переносу, а функція $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є коефіцієнтом дифузії. Більше того, такий процес єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності. Це означає, що всі такі процеси мають одну й ту ж ймовірність переходу.

Позначимо через $\mathcal{B}$ сукупність всіх обмежених борельових функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з нормою $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$, а через $\mathcal{C}$ підпростір $\mathcal{B}$, що складається з усіх неперервних (обмежених) функцій.

Окрім твердження про існування та єдиність дифузійного процесу за сформульованих вище умов, Струк та Варадан довели, що він є феллеровим, тобто, що при фіксованих $t > 0$ та $\varphi \in \mathcal{C}$ функція $\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y) P(t, x, dy) \right)_{x \in \mathbb{R}}$ також належить до $\mathcal{C}$.

5.1.1.2 Щільність ймовірності переходу.

Якщо на додаток до вище сформульованих умов функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняють умову Гельдера, то ймовірність переходу P відповідного дифузійного процесу допускає зображення

$$P(t, x, \Gamma) = \int\limits_{\Gamma} g(t, x, y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \Gamma \in \mathfrak{B}, \Gamma$$

де функція g є фундаментальним розв'язком параболічного рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathfrak{L} u(t, \cdot)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Тепер припускатимемо, що справджуються наступні умови

1. $|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq L|x - y|^{\gamma}$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ з деякими сталими $L > 0$, $0 < \gamma < 1$;

2. $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$;

3. функція
$$A(x) = \int_0^x \frac{a(y)}{b(y)} dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$
обмежена на всій області визначення.

Метод параметрикс (див. [20]) дозволяє не лише побудувати фундаментальний розв'язок рівняння (5.2), а й дістати оцінки

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(t, x, y) \right| \leq K t^{-\frac{k+1}{2} - j} \exp\left\{ -\mu \frac{(y - x)^2}{t} \right\}, \tag{5.4}$$

що справджуються при $k = 0, 1$ та $j = 0, 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та $t \in (0; T]$, яким би не було $T < \infty$, з деякою сталою $\mu > 0$ та сталою $K > 0$, яка може залежати від T. За певних умов, як показують результати роботи [92], константу K можна вибрати незалежною від T, і тоді оцінка (5.4) виконується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$. При цьому жодних додаткових умов, окрім гладкості функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, в нашій ситуації (тобто, коли ці функції задовольняють сформульовані вище умови 2, 3) вимагати не треба.

Отже, надалі будемо вважати функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, що задовольняють умови 2, 3, достатньо гладкими, так що відповідний фундаментальний розв'язок рівняння (5.2) задовольняє нерівності (5.4) при $k = 0, 1$ та $j = 0, 1$ в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ з деякими додатними сталими $K > 0$ та $\mu > 0$.

Розглянемо такі визначені на $\mathbb{R}$ функції:

$$F(x) = \int_0^x e^{-2A(y)} dy, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(y)} \frac{dy}{b(y)}. \tag{5.5}$$

З умов 2, 3 випливає, що функції $F(x)$ та $H(x)$ мають обмежені похідні на $\mathbb{R}$, отже, є ліпшицевими на $\mathbb{R}$, тобто при всіх $x, y \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| + |H(x) - H(y)| \le C|x - y|$$

зі сталою

$$C = \max\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-2A(x)}, \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{2A(x)} \frac{1}{b(x)}\right). \tag{5.6}$$

5.1.1.3 Резольвента.

Фіксуємо пару неперервних періодичних функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови 2, 3, і нехай $P(t, x, \Gamma)$ ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$) — ймовірність переходу відповідного дифузійного процесу $(x(t))_{t\ge 0}$. Подальші твердження будуть стосуватись саме цього процесу, хоча більшість з них залишаються справедливими і за значно загальніших умов.

Для $\lambda > 0$ функція R_λ аргументів $x \in \mathbb{R}$ та $\Gamma \in \mathfrak{B}$, що визначається формулою $R_\lambda(x, \Gamma) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, \Gamma)\, dt$, зветься резольвентним ядром. При фіксованих $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ функція $R_\lambda(x, \cdot)$ є мірою на $\mathfrak{B}$. Ця функція породжує лінійний оператор $\mathbf{R}_\lambda : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, що діє на функцію $\varphi \in \mathcal{C}$ за правилом $\mathbf{R}_\lambda\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)R_\lambda(x, dy)$. Цей оператор зветься резольвентою процесу $(x(t))_{t\geq 0}$.

З формули (5.1) дістаємо рівність

$$\lambda\mathbf{R}_\lambda\varphi(x) = \varphi(x) + \mathbf{R}_\lambda\mathfrak{L}\varphi(x), \tag{5.7}$$

що справджується при всіх $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ для кожної двічі неперервно диференційовної функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$, обмеженої разом зі своїми похідними.

Виявляється, що ядро $R_\lambda(x,\cdot)$ є абсолютно неперервним відносно лебегової міри, тобто $R_\lambda(x,\Gamma) = \int\limits_\Gamma r_\lambda(x, y)dy$ при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\Gamma \in \mathfrak{B}$, і його щільність — ядро r_λ — допускає певне зображення, добре відоме в теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [43, 99]). Опишемо це зображення детальніше.

Визначимо функції $(v^{(k)}(x))_{x\in\mathbb{R}}$ для $k = 0, 1, \ldots$, поклавши $v^{(0)}(x) \equiv 1$, а при $k \geq 1$

$$v^{(k)}(x) = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^y v^{(k-1)}(z)\, dH(z)\right] dF(y), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Можна довести (див. [99]), що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k v^{(k)}(x)$ збігається локально рівномірно відносно $\lambda \in \mathbb{R}$ та $x \in \mathbb{R}$, і його сума, позначимо її через $v(x,\lambda)$, при додатних λ та $x \in \mathbb{R}$ допускає двосторонні оцінки

$$\operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_-}\right) \leq v(x,\lambda) \leq \operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_+}\right) \tag{5.9}$$

зі сталими $\mu_- > 0$ та $\mu_+ \geq \mu_-$, які визначаються рівностями

$$\mu_- = \inf_{x\in\mathbb{R}} F'(x) \inf_{x\in\mathbb{R}} H'(x), \quad \mu_+ = \sup_{x\in\mathbb{R}} F'(x) \sup_{x\in\mathbb{R}} H'(x) \tag{5.10}$$

Простим диференціюванням встановлюємо, що функція v при $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння

$$\mathfrak{L}v(x,\lambda) = \lambda v(x,\lambda). \tag{5.11}$$

Тепер для $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$v_-(x,\lambda) = v(x,\lambda) \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}, \quad v_+(x,\lambda) = v(x,\lambda) \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}. \tag{5.12}$$

Неважко перевірити, що це — пара лінійно незалежних розв'язків рівняння (5.11) і що вронскіан цієї пари, позначимо його через $W(x,\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, задається рівністю $W(x,\lambda) = c(\lambda)F'(x)$, де $c(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}$, $\lambda > 0$. Тепер для ядра r_λ можемо записати формулу (див. [99])

$$r_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2v_-(x,\lambda)v_+(y,\lambda)}{c(\lambda)b(y)} e^{2A(y)}, & \text{при } x \le y; \\ \dfrac{2v_-(y,\lambda)v_+(x,\lambda)}{c(\lambda)b(y)} e^{2A(y)}, & \text{при } x \ge y, \end{cases} \tag{5.13}$$

що справджується при всіх $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$.

5.1.2 Граничний розподіл локальних часів в нулі деякої послідовності дифузійних процесів

Слабка збіжність послідовності дифузійних процесів до граничного дифузійного процесу має своїм наслідком збіжність послідовності розподілів довільного функціоналу від цих процесів до розподілу цього ж функціоналу від граничного процесу, якщо тільки функціонал є неперервним в топології рівномірної збіжності (принцип інваріантності). Виявляється, що можна ґарантувати існування граничного розподілу для послідовності розподілів деякого функціоналу і в тому випадку, коли він не є неперервним в згаданій топології. При цьому граничний розподіл, взагалі кажучи, не збігається з розподілом цього функціоналу від граничного процесу (не виконується принцип інваріантності), і тому важливо прослідкувати, які з характеристик допграничних процесів входять в граничний розподіл. Важливим прикладом такого функціоналу є локальний час.

В цьому пункті доводиться гранична теорема для розподілів локальних часів в нулі дифузійних процесів, які слабко збігаються до граничного дифузійного процесу, причому не припускається, що дифузійні коефіцієнти граничного процесу є границями відповідних коефіцієнтів дограничних процесів. Зокрема, розглядається послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, для деяких функцій $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Скрізь в цьому пункті будемо вважати, що справджуються всі припущення сформульовані в п. 5.1.1.

Нерівності (5.4) дозволяють стверджувати, що для функції

$$f_t(x) = \int_0^t g(\tau, x, 0) d\tau$$

справджується нерівність $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_t(x) \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_0^t K\tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\mu\frac{x^2}{\tau}\right\} d\tau \leq 2K\sqrt{t}$ при всіх $t > 0$. Тому $\lim\limits_{t\downarrow 0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_t(x) = 0$ і, отже, існує W-функціонал $\eta_t = \eta_t(x(\cdot))$ такий, що $\mathbb{E}_x\eta_t = f_t(x)$, де $\mathbb{E}_x$ — символ математичного сподівання за мірою $\mathbb{P}_x$, яка є умовною ймовірністю при умові, що $x(0) = x$. При цьому $\eta_t = \lim\limits_{h\downarrow 0} \int\limits_0^t \frac{f_h(x(\tau))}{h} d\tau$ в середньому квадратичному за кожною мірою $\mathbb{P}_x$. Через те, що $\frac{f_h(x)}{h} \to \delta(x)$ при $h \downarrow 0$, де $(\delta(x))_{x\in\mathbb{R}}$ — Діракова δ-функція зосереджена в точці 0, можна символічно записати $\eta_t = \int\limits_0^t \delta(x(\tau))d\tau$. Такий функціонал зростає тільки в ті моменти часу, коли процес $x(t)$ перебуває в нулі, і він є локальним часом в нулі цього процесу.

Нехай $u_\theta(t, x) = \mathbb{E}_x e^{i\theta\eta_t}$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Відомо, що ця функція задовольняє рівняння

$$u_\theta(t, x) = 1 + i\theta \int_0^t g(\tau, x, 0) u_\theta(t - \tau, 0) d\tau. \tag{5.14}$$

Позначимо через $U_\theta(\lambda, x)$ перетворення Лапласа по t функції $u_\theta(t, x)$,

тобто, для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ покладемо $U_\theta(\lambda, x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u_\theta(t, x) dt$.
З (5.14) одержимо рівняння $U_\theta(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} + i\theta r_\lambda(x, 0) U_\theta(\lambda, 0)$, звідки маємо $U_\theta(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta r_\lambda(x,0)}{\lambda(1 - i\theta r_\lambda(0,0))}$.

5.1.2.1 Послідовності дифузійних процесів та їх локальних часів в нулі

Розглянемо послідовності функцій $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, де $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$ з функціями $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови 1 — 3 п. 5.1.1. Ці ж умови задовольняє кожна пара функцій $a_n(x)$ та $b_n(x)$. Причому послідовність функцій $A_n(x) = \int\limits_0^x \frac{a_n(y)}{b_n(y)} dy = A(nx)$ рівномірно обмежена на всій числовій осі $\mathbb{R}$. Зауважимо, що з (5.5) випливають рівності

$$F_n(x) = \int\limits_0^x e^{-2A_n(y)} dy = \frac{1}{n} F(nx), \;\; H_n(x) = \int\limits_0^x e^{2A_n(y)} \frac{dy}{b_n(y)} = \frac{1}{n} H(nx). \quad (5.15)$$

Ліпшицевість функцій $F(x)$ та $H(x)$ має своїм наслідком рівномірну відносно n ліпшицевість функцій $F_n(x)$ та $H_n(x)$, дійсно,

$$|F_n(x) - F_n(y)| + |H_n(x) - H_n(y)| \leq \frac{1}{n} C|nx - ny| = C|x - y|,$$

де додатна стала C задається рівністю (5.6). Крім того

$$\mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} F_n'(x) = \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} F'(x), \quad \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} H_n'(x) = \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} H'(x),$$

де extr означає inf чи sup одночасно.

Позначимо через $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та дифузії $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, відповідно. Щільність g_n ймовірності переходу процесу $x_n(t)$ задається рівністю $g_n(t, x, y) = ng(n^2 t, nx, ny)$, що є наслідком властивості автомодельності рівняння (5.2).

У представленні (5.13) щільності резольвентного ядра процесу $x_n(t)$ функції $v_n(x,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$, де $v_n^{(k)}$ будуються згідно (5.8) за функціями $F_n(x)$ та $H_n(x)$, задовольняють нерівності (5.9) рівномірно відносно $n \in \mathbb{N}$ з тими ж сталими μ_- та μ_+. Крім того, для функцій $v_n^{(k)}$ справджуються оцінки

$$\mu_-^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le v_n^{(k)}(x) \le \mu_+^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Це означає, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$ збігається рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ і локально рівномірно по $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $(\eta_t^{(n)})_{t\ge 0}$ — локальний час в нулі дифузійного процесу $x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $t > 0$ за умови, що $x_n(0) = x$ характеристична функція $u_\theta^{(n)}(t,x) = \mathbb{E}_x e^{i\theta\eta_t^{(n)}}$ має перетворення Лапласа

$$U_\theta^{(n)}(\lambda,x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta r_\lambda^{(n)}(x,0)}{\lambda(1 - i\theta r_\lambda^{(n)}(0,0))}. \tag{5.16}$$

Тут, оскільки $A_n(0) = 0$, $b_n(0) = b(0)$

$$r_\lambda^{(n)}(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2v_-^{(n)}(x,\lambda)v_+^{(n)}(0,\lambda)}{c^{(n)}(\lambda)b(0)}, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{2v_-^{(n)}(0,\lambda)v_+^{(n)}(x,\lambda)}{c^{(n)}(\lambda)b(0)}, & \text{при } x \ge 0, \end{cases} \tag{5.17}$$

де $v_-^{(n)}$, $v_+^{(n)}$, $c^{(n)}$ задаються формулами (5.12) записаними для процесу $x_n(t)$.

5.1.2.2 Гранична теорема

Припустимо надалі, що функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, як і раніше, задовольняють умови 1 — 3 п. 5.1.1 і, крім того, є такими, що існують скінченні границі

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}F(x) = \varkappa_F^-, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}F(x) = \varkappa_F^+;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}H(x) = \varkappa_H^-, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}H(x) = \varkappa_H^+.$$

Тоді на кожній півосі $\mathbb{R}^- = (-\infty;0)$, $\mathbb{R}^+ = (0;+\infty)$ функціональні послідовності $F_n(x)$ та $H_n(x)$ збігаються локально рівномірно і, враховуючи (5.15), маємо:

$$\text{при } x>0 \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x)=\varkappa_F^+ x, \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x)=\varkappa_H^+ x,$$
$$\text{а при } x<0 \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x)=\varkappa_F^- x, \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x)=\varkappa_H^- x.$$

Рівномірна відносно n ліпшицевість функцій $F_n(x)$ та $H_n(x)$ дозволяє стверджувати, що для кожної функціональної послідовності $(f_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $n\in\mathbb{N}$, яка локально рівномірно збігається при $n\to\infty$ до функції $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$, справджуються рівності:

при $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x f_n(y)dF_n(y)=\varkappa_F^+\int\limits_0^x f(y)dy, \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x f_n(y)dH_n(y)=\varkappa_H^+\int\limits_0^x f(y)dy;$$

при $x<0$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x f_n(y)dF_n(y)=\varkappa_F^-\int\limits_0^x f(y)dy, \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x f_n(y)dH_n(y)=\varkappa_H^-\int\limits_0^x f(y)dy.$$

Таким чином, у співвідношенні

$$v_n^{(k)}(x)=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^y v_n^{(k-1)}(z)dH_n(z)\right)dF_n(y), \quad k\ge 1$$

можемо перейти до границі і для $\hat{v}^{(k)}(x)=\lim\limits_{n\to\infty} v_n^{(k)}(x)$ одержати, що при $k\ge 1$

$$\hat{v}^{(k)}(x)=\varkappa^+\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^y \hat{v}^{(k-1)}(z)dz\right)dy, \text{ при } x>0;$$
$$\hat{v}^{(k)}(x)=\varkappa^-\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^y \hat{v}^{(k-1)}(z)dz\right)dy, \text{ при } x<0,$$

де $\varkappa^-=\varkappa_F^-\varkappa_H^-$, $\varkappa^+=\varkappa_F^+\varkappa_H^+$. Очевидно, що $\hat{v}^{(0)}(x)\equiv 1$.

Поклавши $\varkappa(x)=\varkappa^-+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa^+-\varkappa^-)$, де $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ — індикаторна функція додатної півосі, одержимо $\hat{v}^{(k)}(x)=\dfrac{(\varkappa(x))^k x^{2k}}{(2k)!}$ для всіх $k=0,1,2,\ldots$, $x\in\mathbb{R}$.

Рівномірна за n збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$ дозволяє записати

$$\hat{v}(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k \hat{v}^{(k)}(x) = \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}.$$

Враховуючи нерівності (5.9), які справджуються для $v_n(x,\lambda)$ рівномірно по n, одержимо при $x > 0$

$$\hat{v}_+(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_+^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda)\int\limits_x^{+\infty}\frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy = \frac{\varkappa_F^+}{\sqrt{2\lambda\varkappa^+}}e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa^+}}, \quad (5.18)$$

$$\hat{v}_-(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_-^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda)\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy + \int\limits_0^{x}\frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\sqrt{\frac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}}\operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa^+} + \sqrt{\frac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}}\operatorname{sh} x\sqrt{2\lambda\varkappa^+}\right),$$

а при $x < 0$

$$\hat{v}_+(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_+^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda)\left(\int\limits_{x}^{0}\frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\sqrt{\frac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}}\operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa^-} - \sqrt{\frac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}}\operatorname{sh} x\sqrt{2\lambda\varkappa^-}\right),$$

$$\hat{v}_-(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_-^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda)\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy = \frac{\varkappa_F^-}{\sqrt{2\lambda\varkappa^-}}e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa^-}}. \quad (5.19)$$

Крім того,

$$\hat{c}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} c^{(n)}(\lambda) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\sqrt{\frac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}} + \sqrt{\frac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}}\right). \quad (5.20)$$

Знайдемо тепер границю функціональної послідовності $(r_\lambda^{(n)}(x,0))_{n\in\mathbb{N}}$ при $n\to\infty$ для кожних $\lambda > 0$, $x\in\mathbb{R}$.

З рівностей (5.17) — (5.20) маємо

$$\hat{r}_\lambda(x,0) = \lim_{n\to\infty} r_\lambda^{(n)}(x,0) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{b(0)\left(\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}\right)}\dfrac{e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa^-}}}{\sqrt{2\lambda}}, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{b(0)\left(\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}\right)}\dfrac{e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa^+}}}{\sqrt{2\lambda}}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases} =$$
$$= \frac{\beta}{b(0)}\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-|x|\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}},$$

де $\beta = \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$.

Тому перейшовши в рівності (5.16) до границі при $n \to \infty$, одержимо

$$\hat{U}_\theta(\lambda,x) = \lim_{n\to\infty} U_\theta^{(n)}(\lambda,x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta\beta e^{-|x|\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}}}{\lambda\left(b(0)\sqrt{2\lambda}-i\theta\beta\right)}. \tag{5.21}$$

Врахуємо тепер, що функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є настільки гладкими, що відповідний фундаментальний розв'язок рівняння (5.2) задовольняє (5.4) при всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та $t > 0$ з деякими додатними сталими K та μ. Нагадаємо, що функції g_n також задовольняють ці ж нерівності рівномірно по n.

Наступні твердження дозволяють обґрунтовати той факт, що функція $\hat{U}_\theta(\lambda,x)$ є перетворенням Лапласа граничної функції послідовності характеристичних функцій $u_\theta^{(n)}(t,x)$.

Лема 5.1. *Нехай $(f_n(t))_{t\ge 0}$, $n \in \mathbb{N}$ послідовність рівномірно по n обмежених на $[0;+\infty)$ функцій, тобто $|f_n(t)| \le C$ для всіх $t \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$ з деякою додатною сталою C. Розглянемо функції $\Phi_n(t,x) = \int\limits_0^t g_n(\tau,x,0)f_n(t-\tau)d\tau$.*

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ яким би не було $T > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|\Phi_n(s,x) - \Phi_n(t,y)| < \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0;T]$, $t \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, якщо тільки $|s-t| + |x-y| < \delta$.

Доведення. Оскільки $\Phi_n(t,x) = \int\limits_0^t g_n(t-\tau,x,0)f_n(\tau)d\tau$, то взявши $0 < s \le t$, матимемо

$$\Phi_n(t,y) - \Phi_n(s,x) = \int\limits_0^s \left(g_n(t-\tau,y,0) - g_n(s-\tau,x,0)\right) f_n(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_s^t g_n(t-\tau,y,0)f_n(\tau)d\tau. \tag{5.22}$$

Нерівності (5.4) дозволяють оцінити другий інтеграл в сумі (5.22) величиною

$$CK \int\limits_s^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2CK\sqrt{t-s},$$

яку можна зробити як завгодно малою вибором малої різниці $t-s$.

Оцінюючи перший інтеграл у (5.22), розглянемо дві ситуації. В першій з них покладемо $x = y$. Тоді, подавши цей інтеграл у вигляді суми інтегралів від тієї ж функції на інтервалах $[s-\sigma; s]$ та $[0; s-\sigma]$ з деяким додатним $\sigma < s$, матимемо оцінки

$$\left| \int\limits_{s-\sigma}^s \left(g_n(t-\tau,x,0) - g_n(s-\tau,x,0)\right) f_n(\tau)d\tau \right| \le \\ \le CK \left(\int\limits_{s-\sigma}^s \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int\limits_{s-\sigma}^s \frac{d\tau}{\sqrt{s-\tau}} \right) \le 4CK\sqrt{\sigma},$$

$$\left| \int\limits_0^{s-\sigma} \left(g_n(t-\tau,x,0) - g_n(s-\tau,x,0)\right) f_n(\tau)d\tau \right| \le \\ \le CK|t-s| \int\limits_0^{s-\sigma} \frac{d\tau}{\sqrt{(t'-\tau)^3}} \le 2CK\sqrt{\sigma^{-1}}|t-s|.$$

Тут використано нерівності (5.4), а в другому випадку ще і теорему Лагранжа про скінчені прирости.

Отже, вибравши та зафіксувавши достатньо мале $\sigma > 0$, перший інтеграл у правій частині (5.22) може бути зроблений як завгодно малим з допомогою вибору малої різниці $t - s$.

Тепер нехай $s = t$. Тоді з нерівностей (5.4) маємо (тут $0 < \sigma < s$)

$$\left| \int\limits_{s-\sigma}^{s} \left(g_n(s-\tau, y, 0) - g_n(s-\tau, x, 0)\right) f_n(\tau) d\tau \right| \le 2CK \int\limits_{s-\sigma}^{s} \frac{d\tau}{\sqrt{s-\tau}} \le 4CK\sqrt{\sigma},$$

$$\left| \int\limits_{s-\sigma}^{s} \left(g_n(s-\tau, y, 0) - g_n(s-\tau, x, 0)\right) f_n(\tau) d\tau \right| \le CK|y-x| \int\limits_{0}^{s-\sigma} \frac{d\tau}{s-\tau} \le$$
$$\le CK|y-x| \ln \frac{T}{\sigma}.$$

В другому випадку знову застосована згадана теорема Лагранжа. Отже, і в цій ситуації вибравши та зафіксувавши достатньо мале $\sigma > 0$, перший інтеграл у правій частині (5.22) може бути зроблений як завгодно малим вибором близьких $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$.

Випадок $0 = s \le t$ простий, адже $\Phi_n(s, x)|_{s=0} = 0$ і

$$|\Phi_n(t, y)| = \left| \int\limits_{0}^{t} g_n(t-\tau, y, 0) f_n(\tau) d\tau \right| \le 2CK\sqrt{t},$$

що є малим, якщо t близьке до нуля. □

Лема 5.2. *При фіксованих $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $S > 0$ для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при всіх $s \ge S$, $t \ge S$, $n \in \mathbb{N}$*

$$|g_n(t, x, 0) - g_n(s, x, 0)| < \varepsilon,$$

якщо тільки $|t - s| < \delta$.

Доведення. З нерівностей (5.4) та теореми Лагранжа для деякого $\sigma \in (s; t)$ маємо

$$|g_n(t, x, 0) - g_n(s, x, 0)| \le K\sigma^{-3/2}|t-s| \le KS^{-3/2}|t-s|,$$

що доводить лему. □

В умовах Леми 5.1 для кожних $\theta > 0$, $T > 0$ та компактної множини $M \subset \mathbb{R}$ послідовність функцій $u_\theta^{(n)}(t,x)$ є рівномірно обмеженою (як послідовність характеристичних функцій) та одностайно неперервною, а отже і предкомпактною на множині зміни аргументів $t \in [0;T]$, $x \in M$ (теорема Арцела). Тому для кожних $\theta > 0$, $T > 0$ існує підпослідовність послідовності $u_\theta^{(n)}(t,x)$, яка рівномірно на множині $[0;T] \times M$ збігається до деякої функції $\hat{u}_\theta(t,x)$. Отже, користуючись діагональним методом, ми можемо побудувати таку підпослідовність $u_\theta^{(n_k)}(t,x)$, яка б рівномірно збігалася на кожній множині $[0;T]$, $T > 0$ до функції $\hat{u}_\theta(t,x)$ при фіксованих $\theta > 0$ та $x \in \mathbb{R}$. Аналогічно Лема 5.2 дозволяє з підпослідовності $g_{n_k}(t,x,0)$ вибрати рівномірно збіжну за аргументом t на кожному відрізку $[S;T]$ $(0 < S < T)$ підпослідовність. Легко переконатись, що інтеграл $\int\limits_0^t g_n(\tau,x,0)u_\theta^{(n)}(t-\tau,0)d\tau$ збігається рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ при кожному $x \in \mathbb{R}$. Тому, позначивши через $\hat{g}(t,x,0)$ границю побудованої підпослідовності щільностей ймовірностей переходу, можемо записати

$$\hat{u}_\theta(t,x) = 1 + i\theta \int\limits_0^t \hat{g}(\tau,x,0)\hat{u}_\theta(t-\tau,0)d\tau. \tag{5.23}$$

Зауважимо, що з нерівностей (5.4) випливає оцінка

$$|\hat{g}(t,x,y)| \le Kt^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\}$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ з тими ж сталими K і μ, що і в (5.4). При цьому, як легко бачити, рівняння (5.23) має єдиний обмежений розв'язок і, отже, вся послідовність $u_\theta^{(n)}(t,x)$ збігається при $n \to \infty$ до функції $\hat{u}_\theta(t,x)$.

Через рівномірну на множині зміни аргументів $\theta > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ збіжність інтегралу $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}u_\theta^{(n)}(t,x)dt$ маємо

$$\lim_{k\to\infty} U_\theta^{(n_k)}(\lambda,x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\hat{u}_\theta(t,x)dt = \hat{U}_\theta(\lambda,x).$$

Остання рівність є наслідком збіжності послідовності $U_\theta^{(n)}(\lambda, x)$. Таким чином, функція $\hat{U}_\theta(\lambda, x)$ є перетворенням Лапласа границі характеристичних функцій $u_\theta^{(n)}(t, x)$.

З рівності (5.21) одержимо, що

$$\hat{u}_\theta(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{|x|\sqrt{\frac{\varkappa(x)}{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy +$$

$$+ \exp\left\{-i\theta\frac{\beta}{b(0)}|x|\sqrt{\varkappa(x)} - \frac{1}{2}\theta^2\frac{\beta^2}{b(0)^2}t\right\}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x|\sqrt{\frac{\varkappa(x)}{t}}-i\theta\frac{\beta}{b(0)}\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Тоді при кожних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ функція розподілу $(F_{t,x}(y))_{y\in\mathbb{R}}$, для якої $\hat{u}_\theta(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta y} F_{t,x}(dy)$, має вигляд (5.24) наведений в наступній теоремі, що є основним результатом цього пункту.

Теорема 5.3. *Нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^+$, відповідно, обмежені гельдерові та $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$. Припустимо, що функція $A(x) = \int\limits_0^x \frac{a(y)}{b(y)} dy$ обмежена на $\mathbb{R}$ та існують границі*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{-2A(y)} dy = \varkappa_F^\pm, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{2A(y)} \frac{dy}{b(y)} = \varkappa_H^\pm.$$

Крім того, нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ настільки гладкі, що нерівності (5.4) справджуються при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ з $k + j \leq 1$ (див., наприклад, [92]).

Тоді послідовність локальних часів в нулі до моменту часу t дифузійних процесів на $\mathbb{R}$ з коефіцієнтами переносу $na(nx)$ та дифузії $b(nx)$, які стартують в точці x, збігається за розподілом при $n \to \infty$, для кожних $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$, до випадкової величини, розподіл якої задається функцією

$$F_{t,x}(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{\frac{y}{\beta}b(0)+|x|\sqrt{\varkappa(x)}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz, \tag{5.24}$$

де $\beta = \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+} + \sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$, *а* $\varkappa(x) = \varkappa_F^-\varkappa_H^- + 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa_F^+\varkappa_H^+ - \varkappa_F^-\varkappa_H^-)$.

5.1.2.3 Окремі випадки

Розглянемо симетричний випадок, тобто, $\varkappa_F^- = \varkappa_F^+ = \varkappa_F$ та $\varkappa_H^- = \varkappa_H^+ = \varkappa_H$. Тоді $\beta = \sqrt{\dfrac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$ і $\varkappa(x) = \varkappa_F\varkappa_H = \varkappa$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, граничний розподіл послідовності локальних часів в нулі, розглянутих вище дифузійних процесів, задається функцією

$$F_{t,x}(y) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\varkappa_H}{\varkappa_F}}b(0)y+|x|\sqrt{\varkappa}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz. \tag{5.25}$$

В цій ситуації розглянута послідовність дифузійних процесів слабко збігається при $n \to \infty$ до процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}w(t)\right)_{t\geq 0}$, де $(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес. Це твердження вперше було доведене Г.Л. Кулінічем в [33,34] (див. також [98]). Розподіл локального часу в нулі такого процесу задається функцією

$$\tilde{F}_{t,x}(y) = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}y+|x|\sqrt{\varkappa}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz. \tag{5.26}$$

Видно, що розподіли (5.25) та (5.26) мають один і той же атом при $y = 0$, який є ймовірністю того, що стартуючи з точки $x \in \mathbb{R}$, граничний процес до моменту часу $t > 0$ не досягне точки 0. Обидва розподіли однакові, якщо $b(0) = \frac{1}{\varkappa_H}$.

Ще один частковий випадок. Нехай поряд з умовами 1, 2 маємо збіжність інтегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a(x)|dx$ та існують скінченні границі

$$\lim_{x\to-\infty} b(x) = b(-\infty), \quad \lim_{x\to+\infty} b(x) = b(+\infty).$$

Зауважимо, що при цьому для всіх $x \in \mathbb{R}$ $|A(x)| \leq \dfrac{1}{\inf\limits_{y\in\mathbb{R}} b(y)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a(y)|dy$, тобто, виконується умова 3. Крім того функції $F(x)$ та $H(x)$ мають додатні похідні і, отже, зростають. Легко бачити, що при цьому $F(x) \to \pm\infty$ та $H(x) \to \pm\infty$, якщо $x \to \pm\infty$. Тоді, користуючись правилом Лопіталя, знайдемо границі

$$\varkappa_F^- = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} F(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2A(x)} = \exp\left\{ 2\int_{-\infty}^{0} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\};$$

$$\varkappa_F^+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} F(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2A(x)} = \exp\left\{ -2\int_{0}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\};$$

$$\varkappa_H^- = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} H(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2A(x)} \frac{1}{b(x)} = \exp\left\{ -2\int_{-\infty}^{0} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\} \frac{1}{b(-\infty)};$$

$$\varkappa_H^+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} H(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2A(x)} \frac{1}{b(x)} = \exp\left\{ 2\int_{0}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\} \frac{1}{b(+\infty)}.$$

Таким чином, $\varkappa_F^- \varkappa_H^- = \frac{1}{b(-\infty)}$, $\varkappa_F^+ \varkappa_H^+ = \frac{1}{b(+\infty)}$ і, отже,

$$\varkappa(x) = \frac{1}{b(-\infty)} + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \left(\frac{1}{b(+\infty)} - \frac{1}{b(-\infty)} \right). \tag{5.27}$$

Звідси ж

$$\beta = \frac{2\exp\left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{a(x)}{b(x)} dx - \int_{0}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}}{\exp\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\} \frac{1}{\sqrt{b(+\infty)}} + \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\} \frac{1}{\sqrt{b(-\infty)}}} \tag{5.28}$$

Граничний розподіл розглянутої послідовності локальних часів в нулі задається функцією (5.24) з параметрами, що визначаються рівностями (5.27) і (5.28).

5.1.3 Кількість перетинів довільного рівня послідовністю дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами

5.1.3.1 Вступ.

Нехай на дійсній осі $\mathbb{R}$, задані неперервні періодичні функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ зі спільним періодом. Найменший додатний період цих функцій позначимо через l. Припустимо, що ці функції задовольняють такі умови

$$\inf_{x\in[0,l)} b(x) > 0, \quad \int_0^l \frac{a(x)}{b(x)}\,dx = 0. \tag{5.29}$$

Зауважимо, що якщо пара неперервних періодичних функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задовольняє умови (5.29), то їй відповідає єдиний дифузійний процес у фазовому просторі $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. За цих умов функція A аргументу $x \in \mathbb{R}$, яка визначається рівністю $A(x) = \int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}\,dy$, також є періодичною, а отже, обмеженою. Якщо для $x \in \mathbb{R}$ покласти

$$F(x) = \int_0^x e^{-2A(y)}\,dy, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(y)}\,\frac{dy}{b(y)},$$

то ці функції будуть задовольняти умови $\frac{1}{x}F(x) \to \varkappa_F$, $\frac{1}{x}H(x) \to \varkappa_H$, коли $x \to \pm\infty$, де $\varkappa_F = \frac{1}{l}\int_0^l e^{-2A(y)}\,dy$, $\varkappa_H = \frac{1}{l}\int_0^l e^{2A(y)}\,\frac{dy}{b(y)}$. Очевидно, $\varkappa_F > 0$ та $\varkappa_H > 0$. Позначатимемо їх добуток через $\varkappa$.

Для натуральних n та $x \in \mathbb{R}$ покладемо $a_n(x) = na(nx)$ та $b_n(x) = b(nx)$ і розглянемо дифузійний процес $(x_n(t))_{t\geq 0}$ з коефіцієнтом переносу $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та коефіцієнтом дифузії $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$. Якщо виконуються умови (5.29), то, як вже зазначалося вище, послідовність дифузійних процесів $(x_n(\cdot))_{n\geq 1}$ слабко збігається до випадкового процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}w(t)\right)_{t\geq 0}$, де $(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес. Фіксуємо тепер деяке $r \in \mathbb{R}$ і позначимо через $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, m та n випадкову величину, яка приймає значення 1 у разі, якщо випадкові величини $x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)$ та $x_n\left(\frac{k}{m}\right)$ приймають значення по різні боки від точки r на дійсній осі, і значення 0 в протилежному випадку:

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m} - r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m} - r\right)\right) < 0; \\ 0, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m} - r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m} - r\right)\right) \geq 0. \end{cases}$$

Тоді випадкова величина

$$\nu_N^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(n,m)} \tag{5.30}$$

при натуральних N визначає кількість перетинів рівня r послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$, $\ldots$, $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

Нашим завданням в цьому пункті є знайти умови, за яких величини $\nu_N^{(n,m)}$ з певним нормуючим множником мають граничний розподіл, коли в деякий узгоджений спосіб числа n, m та N необмежено зростають.

Випадок $r = 0$ розглядався (за дещо загальніших умов) в роботах [1, 32]. Як ми побачимо, у випадку довільного $r \in \mathbb{R}$ ситуація значно складніша, а саме, слід розрізняти два випадки:

а) існують такі цілі числа p та q (їх можна вважати взаємно простими, причому $q > 0$), що $r = \frac{p}{q}l$;

б) число $\frac{r}{l}$ є ірраціональним.

У першому випадку множина натуральних чисел розбивається на q підпослідовностей $(n_k^{(i)})_{k\geq 1}$, $i = 0, 1, ..., q-1$, таких, що для кожного такого i маємо $rn_k^{(i)} = \frac{i}{q}l + m^{(i,k)}l$, де $m^{(i,k)}$ — ціле число. По кожній з таких підпослідовностей величини $\nu_N^{(n,m)}$ (N та m пов'язані з n) з певним нормуючим множником мають граничні розподіли. Всі ці розподіли — одного типу, але мають параметри, що відрізняються в різних розподілів. У випадку б) для кожного $\beta \in [0; l)$ існує підпослідовність $(n_k(\beta))_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел, для якої $\{\frac{r}{l} n_k(\beta)\}l \to \beta$ при $k \to \infty$, де $\{x\}$ означає дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$. І знову кожна така підпослідовність визначає граничний розподіл, подібний до тих, що описано вище. При доведенні цих теорем ми використовуємо метод роботи [1] з тією відмінністю, що в тут наші міркування ґрунтуються на традиційному (в теорії диференціальних рівнянь) зображенні резольвенти дифузійного процесу (див., наприклад, [43,99]) в той час як в [1] використано інше зображення згаданої резольвенти, яке ґрунтується на тому факті, що дифузійний процес є результатом двох трансформацій вінерового процесу: перетворення фазового простору та випадкової заміни часу.

Нижче буде також використана така властивість функції g: якими б не були $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$, справджується рівність

$$g(t, x, y) = g(t, x + l, y + l). \tag{5.31}$$

Для її доведення слід звернути увагу на ту обставину, що розв'язком рівняння (5.2) з початковою умовою $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ (вважаємо, що $\varphi \in \mathcal{C}$) поряд з функцією $\int\limits_{\mathbb{R}} g(t, x, y)\varphi(y)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$, є також функція

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(t, x + l, y)\varphi(y - l)\, dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

Єдиність обмеженого розв'язку такої задачі і приводить до (5.31).

5.1.3.2 Гранична теорема.

Послідовність процесів. Фіксуємо пару неперервних періодичних зі спільним періодом функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови (5.29) і є досить гладкими, так що щільність ймовірності переходу відповідного дифузійного процесу задовольняє нерівності (5.4) при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Як вже зазначалось вище, будуть розглядатися дифузійні процеси $(x_n(t))_{t\geq 0}$, що відповідають коефіцієнтам $a_n(x) = na(nx)$ та $b_n(x) = b(nx)$ для натуральних n та $x \in \mathbb{R}$.

Введені в пункті 5.1.1 об'єкти, пов'язані з процесом $x(t) = x_1(t)$, $t \geq 0$, будемо позначати тими ж літерами і наділяти їх індексом n (вгорі, чи внизу), якщо вони будуть асоціюватись з процесом $(x_n(t))_{t\geq 0}$. Так, наприклад, при

$x \in \mathbb{R}$ та $n = 1, 2, \ldots$ маємо

$$A_n(x) = \int\limits_0^x \frac{a_n(y)}{b_n(y)}\, dy = \int\limits_0^{nx} \frac{a(y)}{b(y)}\, dy = A(nx),$$

$$F_n(x) = \int\limits_0^x e^{-2A_n(y)}\, dy = \frac{1}{n} \int\limits_0^{nx} e^{-2A(y)}\, dy = \frac{1}{n} F(nx),$$

$$H_n(x) = \int\limits_0^x e^{2A_n(y)}\, \frac{dy}{b_n(y)} = \frac{1}{n} \int\limits_0^{nx} e^{2A(y)}\, \frac{dy}{b(y)} = \frac{1}{n} H(nx),$$

$$v_n^{(0)}(x) \equiv 1, \quad v_n^{(k)}(x) = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^y v_n^{(k-1)}(z)\, dH_n(z) \right] dF_n(y), \quad k \geq 1.$$

$$v_n(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$$

і т.п. Легко бачити, що сталі $\mu_-^{(n)}$ та $\mu_+^{(n)}$ не залежать від n і збігаються відповідно з μ_- та μ_+. Звідси випливає, що функція $(v_n(x, \lambda))_{x \in \mathbb{R}, \lambda > 0}$ задовольняє нерівності (5.9) при всіх $n = 1, 2, \ldots$. Це дозволяє стверджувати, що інтеграли типу $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dy}{v_n(y, \lambda)}$ збігаються рівномірно відносно $n = 1, 2, \ldots$. Неважко тепер бачити, що виконуються співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x, \lambda) = \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa}, \quad \lim_{n \to \infty} c_n(\lambda) = \frac{2\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}},$$

$$\lim_{n \to \infty} v_+^{(n)}(x, \lambda) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}} e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa}}, \quad \lim_{n \to \infty} v_-^{(n)}(x, \lambda) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}} e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa}},$$

причому, всі вони (за винятком другого) виконуються локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\hat{\mathcal{C}}$ підпростір $\mathcal{C}$, що складений з функцій φ, для яких $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$. Наведені вище співвідношення разом з такими

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \varkappa_F x, \quad \lim_{n \to \infty} H_n(x) = \varkappa_H x$$

(вони також виконуються локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$) показують, що для $\varphi \in \hat{\mathcal{C}}$ справджуються співвідношення (див. [99])

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_\lambda^{(n)}\varphi(x) = \hat{\mathbf{R}}_\lambda\varphi(x)$$

рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$ (при фіксованому $\lambda > 0$), де покладено

$$\hat{\mathbf{R}}_\lambda\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\varkappa}{2\lambda}} \exp\left\{-|y-x|\sqrt{2\lambda\varkappa}\right\} \varphi(y)\, dy$$

для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що $(\hat{\mathbf{R}}_\lambda)_{\lambda>0}$ — резольвента процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}w(t)\right)_{t\geq 0}$, в якому $(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес. Звернемо увагу на ту обставину, що за наших припущень послідовність ядер $r_\lambda^{(n)}$ не є збіжною, коли $n \to \infty$.

Щільність g_n ймовірності переходу процесу $(x_n(t))_{t\geq 0}$ визначається рівністю $g_n(t,x,y) = ng(n^2t, nx, ny)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, яким би не було $n = 1, 2, \ldots$, де g — щільність ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ (або ж $(x_1(t))_{t\geq 0}$). Неважко зрозуміти, що функція g_n при кожному $n = 1, 2, \ldots$ задовольняє нерівності (5.4) при $j = k = 0$ зі сталими K та μ , що не залежать від n.

Допоміжні результати. Фіксуємо деяке $r \in \mathbb{R}$ і покладемо $D_r^- = \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$ та $D_r^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > r\}$. Введені вище величини $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, n та m можна записати так

$$\xi_k^{(n,m)} = \mathbb{1}_{D_r^-}\left(x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\mathbb{1}_{D_r^+}\left(x_n\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \\ + \mathbb{1}_{D_r^+}\left(x_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\mathbb{1}_{D_r^-}\left(x_n\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Визначимо для натуральних n та m функцію $q^{(n,m)}$ аргументу $x \in \mathbb{R}$, поклавши

$$q^{(n,m)}(x) = \mathbb{1}_{D_r^-}(x)\int\limits_{D_r^+} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right) dy + \mathbb{1}_{D_r^+}(x)\int\limits_{D_r^-} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right) dy.$$

Очевидно, що $q^{(n,m)}(x) = \mathbb{E}_x \xi_1^{(n,m)}$. Важливість цих функцій для нас пояснюється відомою теоремою Скорохода (див. [100, Теорема 1]), наслідок з якої твердить, що величини $n^{-1}\nu_N^{(n,m)}$ мають граничний розподіл тоді і тільки тоді, коли він існує для величин

$$\eta_N^{(n,m)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N} q^{(n,m)}\left(x_n\left(\frac{k}{m}\right)\right), \tag{5.32}$$

причому обидва граничні розподіли (у разі їх існування) збігаються один з одним.

Нагадаємо, що величини $\nu_N^{(n,m)}$ визначаються рівністю (5.30) і є при натуральних N кількостями перетинів рівня r послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

Для $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ та натуральних n, m, N покладемо

$$u_N^{(n,m)}(x,\theta) = \mathbb{E}_x \exp\left\{i\theta\eta_N^{(n,m)}\right\}.$$

Ця функція задовольняє рівняння

$$u_N^{(n,m)}(x,\theta) = 1 + \sum_{k=0}^{N}\int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{-\frac{i\theta}{n}q^{(n,m)}(y)}\right)u_{N-k}^{(n,m)}(y,\theta)g_n\left(\frac{k}{m},x,y\right)dy.$$

В цій рівності (і далі) вважаємо, що $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)g_n(0,x,y)\,dy = \varphi(x)$.

Якщо покласти $u^{(n,m)}(t,x,\theta) = u_{[mt]}^{(n,m)}(x,\theta)$ для $t \geq 0$, де $[mt]$ — ціла частина числа mt, то попереднє рівняння можна записати так

$$\begin{aligned} u^{(n,m)}(t,x,\theta) = 1+ \\ +m\int_{\left[0,\frac{[mt]+1}{m}\right)} ds\int_{\mathbb{R}}\left(1 - e^{-\frac{i\theta}{n}q^{(n,m)}(y)}\right)u^{(n,m)}(s,y,\theta)g_n\left(\frac{[mt]-[ms]}{m},x,y\right)dy \end{aligned} \tag{5.33}$$

Поряд з цим розглянемо рівняння

$$\tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta) = 1 + i\theta\frac{m}{n}\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}} g_n(s,x,y)\,\tilde{u}^{(n,m)}(t-s,y,\theta)q^{(n,m)}(y)\,dy \tag{5.34}$$

в області $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (тут $\theta \in \mathbb{R}$ — параметр). Добре відомо, що єдиним обмеженим розв'язком рівняння (5.34) є функція

$$\tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta) = \mathbb{E}_x \exp\left\{ i\theta \frac{m}{n} \int\limits_0^t q^{(n,m)}(x_n(s))\, ds \right\}.$$

Сформулюємо тепер деякі допоміжні результати, які будуть мати своїм наслідком, зокрема, факт асимптотичного зближення функцій $u^{(n,m)}$ та $\tilde{u}^{(n,m)}$ при фіксованих $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\theta \in \mathbb{R}$, коли n та m необмежено зростають в такий спосіб, що $\frac{n^2}{m} \to \tau$ при $0 < \tau < \infty$.

Лема 5.4. *Для всіх натуральних m та n, що задовольняють нерівність $\frac{n^2}{m} \leq M$ з деякою сталою $M > 0$, справджується оцінка*

$$n \int\limits_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\, dx \leq \mu^{-1} K M^{1/2}, \tag{5.35}$$

де K та μ — сталі з нерівності (5.4).

Доведення. Враховуючи зв'язок між функціями g та g_n, можемо записати

$$n \int\limits_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\, dx =$$

$$= n \left(\int\limits_{-\infty}^{r} dx \int\limits_{r}^{\infty} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right)\, dy + \int\limits_{r}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{r} g_n\left(\frac{1}{m}, x, y\right)\, dy \right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{0}^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, x + nr, y + nr\right)\, dy + \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, x + nr, y + nr\right)\, dy.$$

Оцінка (5.4) тепер приводить до нерівності

$$n \int\limits_{\mathbb{R}} q^{(n,m)}(x)\, dx \leq K \frac{m^{1/2}}{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\mu \frac{m}{n^2}(y-x)^2}\, dy + \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mu \frac{m}{n^2}(y-x)^2}\, dy \right),$$

з якої (5.35) отримується простим обчисленням. □

Наступне твердження подібне до того, що його для випадку $r = 0$ доведено в [1].

Для обмеженої вимірної функції ψ на $[0;\infty) \times \mathbb{R}$ покладемо при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ і натуральних n та m

$$\Phi^{(n,m)}(t,x,\psi) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} g_n\,(s,x,y)\,\psi(t-s,y) n q^{(n,m)}(y)\,dy.$$

Лема 5.5. *Для кожного набору сталих $T > 0$, $L > 0$, $M > 0$ та $\varepsilon > 0$ відшукається таке $\rho > 0$, що $|\Phi^{(n,m)}(t,x,\psi) - \Phi^{(n,m)}(t',x',\psi)| < \varepsilon$ при всіх натуральних m та n, для яких $\frac{n^2}{m} \leq M$, а також всіх $t \in [0;T]$, $t' \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$ і функціях ψ з властивістю $\sup\limits_{s\geq 0, x\in\mathbb{R}} |\psi(s,x)| \leq L$, якщо тільки виконується нерівність $|t-t'| + |x-x'| \leq \rho$.*

Доведення. Для $0 \leq t < t'$ можемо записати

$$\begin{aligned} &\Phi^{(n,m)}(t',x,\psi) - \Phi^{(n,m)}(t,x,\psi) = \\ &\quad = \int\limits_t^{t'} ds \int\limits_{\mathbb{R}} g_n\,(t'-s,x,y)\,\psi(s,y) n q^{(n,m)}(y)\,dy + \\ &\quad + \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g_n\,(t'-s,x,y) - g_n\,(t-s,x,y)\right)\psi(s,y) n q^{(n,m)}(y)\,dy. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Якщо $0 \leq t < t' \leq T$, $x \in \mathbb{R}$, $\frac{n^2}{m} \leq M$, а ψ така, що $|\psi(s,y)| \leq L$ при всіх $(s,y) \in [0;\infty) \times \mathbb{R}$, то перший доданок в правій частині (5.36) оцінюється виразом

$$LK \int\limits_t^{t'} \frac{ds}{\sqrt{t'-s}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\mu \frac{(y-x)^2}{t'-s}\right\} n q^{(n,m)}(y)\,dy \leq \frac{2}{\mu} L K^2 M^{1/2} (t'-t)^{1/2},$$

що стає як завгодно малим, якщо $t'-t$ досить мале (тут використана Лема 5.4 і той факт, що функція g_n задовольняє (5.4) при всіх n).

Для оцінки другого доданку в правій частині (5.36) розіб'ємо інтервал інтегрування $[0;t]$ на два проміжки $[0;t-\gamma]$ та $[t-\gamma;t]$. Інтеграл по проміжку

$[t-\gamma;t]$ може бути зроблений малим за рахунок вибору γ, що випливає з такої оцінки (знову використовується (5.4) при $k=0$ та $j=0$)

$$\left|\int\limits_{t-\gamma}^{t} ds \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g_n\left(t'-s,x,y\right)-g_n\left(t-s,x,y\right)\right)\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)\,dy\right| \le$$

$$\le \mu_{-1}LK^2M^{1/2}\int\limits_{t-\gamma}^{t}((t'-s)^{-1/2}+(t-s)^{-1/2})ds \le \frac{4}{\mu}LK^2M^{1/2}\gamma^{1/2}.$$

Тепер інтеграл по проміжку $[0;t-\gamma]$ можна оцінити з використанням теореми Лагранжа про скінчені прирости та оцінки (5.4) при $k=0$ та $j=1$. Маємо

$$\left|\int\limits_{0}^{t-\gamma} ds \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g_n\left(t'-s,x,y\right)-g_n\left(t-s,x,y\right)\right)\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)\,dy\right| \le$$

$$\le \mu_{-1}LK^2M^{1/2}(t'-t)\int\limits_{0}^{t-\gamma}\frac{ds}{(t-s)^{3/2}} \le \frac{2}{\mu}LK^2M^{1/2}(t'-t)\gamma^{-1/2}.$$

Отже, другий доданок в правій частині (5.36) стає як завгодно малим, якщо спочатку вибрати $\gamma>0$ досить малим, а потім, зафіксувавши γ, вибрати різницю $t'-t$ досить малою.

Тепер для $x\in\mathbb{R}$ та $x'\in\mathbb{R}$ інтервал $[0;t]$ інтегрування в різниці

$$\Phi^{(n,m)}(t',x,\psi)-\Phi^{(n,m)}(t,x,\psi)=$$
$$=\int\limits_{0}^{t} ds \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g_n\left(t-s,x,y\right)-g_n\left(t-s,x',y\right)\right)\psi(s,y)nq^{(n,m)}(y)\,dy \tag{5.37}$$

знову розбиваємо на проміжки $[t-\gamma;t]$ та $[0;t-\gamma]$. З використанням оцінки (5.4) при $k=0$ та $j=0$ інтеграл по першому з них оцінюється виразом

$$2LK\int\limits_{t-\gamma}^{t}\frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int\limits_{\mathbb{R}} nq^{(n,m)}(y)\,dy \le \frac{4}{\mu}LK^2M^{1/2}\gamma^{1/2},$$

який стає малим, якщо γ досить мале. Інтеграл по проміжку $[0;t-\gamma]$ оцінюємо з використанням вже згаданої теореми Лагранжа та оцінки (5.4) при $k=1$

та $j = 0$. Дістаємо

$$\left| \int\limits_0^{t-\gamma} ds \int\limits_{\mathbb{R}} \left(g_n\left(t-s, x, y\right) - g_n\left(t-s, x', y\right) \right) \psi(s,y) n q^{(n,m)}(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq LK|x-x'| \int\limits_0^{t-\gamma} \frac{ds}{t-s} \int\limits_{\mathbb{R}} n q^{(n,m)}(y)\, dy \leq \mu^{-1} L K^2 M^{1/2} T \gamma^{-1} |x-x'|.$$

Отже, якщо спочатку вибрати $\gamma > 0$ досить малим, а потім для фіксованого γ вибрати $|x-x'|$ досить малим, то можна інтеграл (5.37) зробити як завгодно малим. Цим завершується доведення Леми 5.5. $\square$

Наслідок 5.5.1. *Якщо n та m необмежено зростають у такий спосіб, що $\frac{n^2}{m} \to \tau$, $0 < \tau < \infty$, то при фіксованих $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\theta \in \mathbb{R}$ різниця $u^{(n,m)}(t,x,\theta) - \tilde{u}^{(n,m)}(t,x,\theta)$ прямує до нуля.*

Лема 5.6. *В умовах Леми 5.4 при всіх $C > 0$ справджується оцінка*

$$\int\limits_{|x-r|>C} n q^{(n,m)}(x)\, dx \leq \mu^{-1} K M^{1/2} e^{-\mu m C^2}.$$

Доведення. Викладка, подібна до тієї, що використана при доведенні Леми 5.4, приводить до рівності

$$\int\limits_{|x-r|>C} n q^{(n,m)}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-nC} dx \int\limits_0^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, x+nr, y+nr\right) dy + \int\limits_{nC}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, x+nr, y+nr\right) dy.$$

Беручи до уваги нерівність (5.4) при $k = 0$ та $j = 0$, звідси знаходимо нерівність

$$\int\limits_{|x-r|>C} n q^{(n,m)}(x)\, dx \leq 2K \frac{m^{1/2}}{n} \int\limits_{-\infty}^{-nC} dx \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu \frac{m}{n^2}(y-x)^2}\, dy,$$

з якої і випливає твердження леми. $\square$

Розглянемо тепер такий інтеграл

$$U_\lambda^{(n,m)}(x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda^{(n)}(x,y)\varphi(y)nq^{(n,m)}(y)\,dy$$

при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ та натуральних n і m, для яких $\frac{n^2}{m} \le M$, де M — деяка додатна стала. Позначимо через β_n такі дійсні числа із $[0;l)$, що $\frac{nr-\beta_n}{l} \in \mathbb{Z}$. Тоді, враховуючи (5.31), можемо записати

$$U_\lambda^{(n,m)}(x,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} r_\lambda^{(n)}\left(x, r+\frac{y}{n}\right)\varphi\left(r+\frac{y}{n}\right)\,dy\int\limits_{0}^{\infty} g\left(\frac{n^2}{m}, y+\beta_n, z+\beta_n\right)\,dz+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty} r_\lambda^{(n)}\left(x, r+\frac{y}{n}\right)\varphi\left(r+\frac{y}{n}\right)\,dy\int\limits_{-\infty}^{0} g\left(\frac{n^2}{m}, y+\beta_n, z+\beta_n\right)\,dz.$$

Беручи до уваги періодичність функцій A та b, дістаємо рівності $A(y+nr) = A(y+\beta_n)$, $b(y+nr) = b(y+\beta_n)$. Тому ядро $r_\lambda^{(n)}$ в попередній формулі запишеться так

$$r_\lambda^{(n)}\left(x, r+\frac{y}{n}\right) = \begin{cases} \frac{2v_-^{(n)}(x,\lambda)v_+^{(n)}\left(r+\frac{y}{n},\lambda\right)}{c_n(\lambda)b(y+\beta_n)}e^{2A(y+\beta_n)}, & \text{якщо } x \le r+\frac{y}{n}; \\ \frac{2v_-^{(n)}\left(r+\frac{y}{n},\lambda\right)v_+^{(n)}(x,\lambda)}{c_n(\lambda)b(y+\beta_n)}e^{2A(y+\beta_n)}, & \text{якщо } x \ge r+\frac{y}{n} \end{cases}$$

Тепер можемо сформулювати твердження, яке безпосередньо випливає з наведених вище результатів.

Лема 5.7. *Якщо послідовності $(n_k)_{k\ge1}$ та $(m_k)_{k\ge1}$ необмежено зростають у такий спосіб, що $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$ для деякого $\tau \in (0;\infty)$, а величини β_{n_k} збігаються до деякого $\beta \in [0;l)$, то при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ виконується співвідношення*

$$\lim U_\lambda^{(n_k,m_k)}(x,\varphi) = \frac{\varkappa_F}{\sqrt{2\lambda\varkappa}}e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda\varkappa}}\varphi(r)\delta(\beta,\tau),$$

де $\delta(\beta,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\beta}\left(\int\limits_{\beta}^{\infty} g(\tau,y,z)\,dz\right)dH(y) + \int\limits_{\beta}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\beta} g(\tau,y,z)\,dz\right)dH(y).$

Основний результат. Дослідимо граничну поведінку величин $n^{-1}\nu^{(n,m)}_{[mt]}$. Для цього нам залишилось дослідити поведінку функції $\tilde{u}^{(n,m)}$, що є розв'язком рівняння (5.34), коли $\frac{n^2}{m} \to \tau$ для деякого $\tau \in (0;\infty)$.

Виберемо підпослідовності $(n_k)_{k\ge 1}$ та $(m_k)_{k\ge 1}$ так, як вказано в Лемі 5.7. З Леми 5.5 випливає, що з цих підпослідовностей можна вибрати в свою чергу підпослідовності $(\tilde{n}_k)_{k\ge 1}$ та $(\tilde{m}_k)_{k\ge 1}$ так, щоб функції $\tilde{u}^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}$ при $k \to \infty$ збігалися до деякої функції $\tilde{u}(t,x,\theta)$ локально рівномірно відносно $(t,x) \in [0;\infty) \times \mathbb{R}$ (тут θ — фіксоване число).

Покладемо $V^{(k)}_\lambda(x,\theta) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{u}^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}(t,x,\theta)\,dt$ для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ та $k = 1, 2, \ldots$. Тоді з рівняння (5.34) знаходимо

$$V^{(k)}_\lambda(x,\theta) = \frac{1}{\lambda} + i\theta\frac{\tilde{m}_k}{\tilde{n}_k^2}\int\limits_{\mathbb{R}} r^{(\tilde{n}_k)}_\lambda(x,y)V^{(k)}_\lambda(y,\theta)\tilde{n}_k q^{(\tilde{n}_k,\tilde{m}_k)}(y)\,dy.$$

Оскільки при $\lambda > 0$ та $\theta \in \mathbb{R}$ локально рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty} V^{(k)}_\lambda(x,\theta) = V_\lambda(x,\theta) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{u}(t,x,\theta)\,dt$, то з Леми 5.7 випливає таке рівняння для функції V_λ

$$V_\lambda(x,\theta) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{2\lambda\varkappa_H}}\delta(\beta,\tau)e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda\varkappa}}V_\lambda(r,\theta). \tag{5.38}$$

Але з цього рівняння функція V_λ визначається однозначно. Тому вся послідовність функцій $\tilde{u}^{(n_k,m_k)}$, а отже і $u^{(n_k,m_k)}$, збігається до функції $\tilde{u}$, яка має своїм перетворенням Лапласа функцію V_λ .

Неважко знайти розв'язок рівняння (5.38). Більше того, можна знайти відповідну функцію розподілу, тобто, функцію $F_{t,x}(y)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, для якої $\tilde{u}(t,x,\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta y}\,dF_{t,x}(y)$ при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $\theta \in \mathbb{R}$. Вона може бути записана так $F_{t,x}(y) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{y\gamma^{-1}+d(x)} e^{-\frac{z^2}{2t}}\,dz$, де покладено $\gamma = \frac{\delta(\beta,\tau)}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$, $d(x) = |x-r|\sqrt{\varkappa}$. Цим доведена така теорема.

Теорема 5.8. *Припустимо що підпослідовності* $(n_k)_{k\geq 1}$ *та* $(m_k)_{k\geq 1}$ *послідовності натуральних чисел вибрані так, що* $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$, *а* $\beta_{n_k} = \left\{\frac{r}{l} n_k\right\} l \to \beta$ *при* $k \to \infty$ *для деяких* $\tau \in (0;\infty)$ *та* $\beta \in [0;l)$. *Тоді при всіх* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *та* $y \in \mathbb{R}$ *справджується співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x \left(n_k^{-1} \nu_{[m_k t]}^{(n_k,m_k)} < y \right) = F_{t,x}(y).$$

5.2 Екстремальні задачі для вінерового процесу

5.2.1 Задача максимізації локального часу в нулі вінерового процесу

Задавши вінерів процес (стандартний броунів рух) на деякому ймовірнісному просторі, розглянемо множину всіх ймовірнісних мір на тому ж просторі, кожна з яких є результатом перетворення Гірсанова початкової міри. В цьому пункті побудуємо одну з таких мір, яка максимізує відповідним чином нормований локальний час процесу в нулі. Утворений процес виявляється немарківським. Для порівняння оптимального значення з іншими оцінюємо значення певної цільової функцій для деяких процесів Маркова такого типу.

5.2.1.1 Вступ

Нехай $(w(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ означає вінерів процес на дійсній прямій $\mathbb{R}$. Символ математичного сподівання відносно ймовірнісної міри $\mathbb{P}_x$ позначатиметься через $\mathbb{E}_x$, а позначення $\mathbb{P}$ і $\mathbb{E}$ буде викорристовуватись для $\mathbb{P}_0$ і $\mathbb{E}_0$ відповідно.

Відомо, що існує W-функціонал $(\eta_t)_{t\geq 0}$ від цього процесу такий, що його характеристика (функція $\mathbb{E}_x \eta_t$ для $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}$) задається рівністю (див [16, Гл. 6]) $\mathbb{E}_x \eta_t = \int\limits_0^t \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2s}\right\} \dfrac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Позначимо цю функцію через $h(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, і нагадаємо, що $\eta_t = \lim\limits_{\rho\to 0+} \int\limits_0^t \rho^{-1} h(\rho, w(s)) ds$, $t \geq 0$, (див. [16, Теорема 6.6]). Оскільки $\lim\limits_{\rho\to 0+}\rho^{-1}h(\rho,x)$ є дельта-функцією Дірака, природно записати цей функціонал у вигляді $\eta_t = \int\limits_0^t \delta(w(s))ds,\ t\geq 0.$

Зафіксуємо тепер довільний додатний момент часу t. Прогресивно вимірний процес $(\omega(s))_{s\in[0,t]}$ (відносно фільтрації $(\mathcal{M}_s)_{s\in[0,t]}$) називатиметься допустимою стратегією, якщо $\mathbb{P}\left(\int\limits_0^t \omega^2(s)ds<\infty\right)=1$ і $\mathbb{E}\mathcal{E}_t^0(\omega)=1$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2<\infty$, де $\mathcal{E}_s^0(\omega)=\exp\left\{\int\limits_0^s\omega(\tau)dw(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_0^s\omega^2(\tau)d\tau\right\}$ для $s\in[0,t]$ (тут перший інтеграл є інтегралом Іто). Випадковий процес $(\mathcal{E}_t^0(\omega))_{t\geq 0}$ часто називають стохастичною експонентою.

Визначимо цільову функцію рівністю

$$\Phi_t(\omega)=\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t^0(\omega)\eta_t\right]}{(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2)^{1/2}} \tag{5.39}$$

для деякої допустимої стратегії ω. Задача полягає у побудові такої допустимої стратегії, яка б максимізувала значення функції Φ_t.

Зауважимо, що $\Phi_t(\omega)\leq(\mathbb{E}[\eta_t]^2)^{1/2}=t^{1/2}$. Таким чином, допустима стратегія $(\omega_*(s))_{s\in[0,t]}$ є оптимальною, якщо виконується рівність $\Phi_t(\omega_*)=t^{1/2}$ (нагадаємо, що $t>0$ фіксоване і, очевидно, оптимальна стратегія залежить від t).

Формула (5.39) підказує, як будувати оптимальну стратегію. А саме, допустима стратегія $(\omega_*^{(t)}(s))_{s\in[0,t]}$ повинна бути такою, щоб виконувалась наступна рівність

$$\eta_t=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)}) \tag{5.40}$$

майже напевно відносно $\mathbb{P}$. В цьому випадку маємо

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)})]^2=\frac{\pi}{2t}\mathbb{E}[\eta_t]^2=\frac{\pi}{2}$$

і тому $\Phi_t(\omega_*^{(t)})=t^{1/2}$.

Називатимемо допустиму стратегію $(\omega(s))_{s\in[0,t]}$ марківською, якщо існує борелева функція $(a(s,x))_{(s,x)\in[0,t]\times\mathbb{R}}$ така, що $\omega(s)=a(s,w(s))$ при всіх $s\in[0,t]$ $\mathbb{P}$-м.н.

Нижче в цьому пункті буде розглянуто два приклади марківських стратегій, зокрема, з: а) $a(s,x)=-\rho x$; і б) $a(s,x)=-\rho\operatorname{sign}x$ для $(s,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$ (t припускається рівним 1), де ρ — додатний параметр. Відповідне значення цільової функції (як функції аргументу $\rho>0$) в обох цих випадках обчислюється точно. Більше того, можна знайти оптимальні значення ρ і $\Phi_1(\rho)$.

5.2.1.2 Деякі допоміжні результати

Локальний час. Позначимо через $g(t,x,y)$ для $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ щільність ймовірності переходу вінерового процесу

$$g(t,x,y)=(2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}.$$

Для $\lambda\geq 0$, визначимо функцію g_λ аргументів $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ наступним співвідношенням $\mathbb{E}_x[\exp\{-\lambda\eta_t\}\varphi(w(t))]=\int\limits_{\mathbb{R}}g_\lambda(t,x,y)\varphi(y)dy$, яке справджується при всіх $\lambda\geq 0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та кожній борелевій функції φ на $\mathbb{R}$.

Лема 5.9. *Справджується наступна рівність*

$$\begin{aligned}g_\lambda(t,x,y)=(2\pi t)^{-1/2}\left[\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(|y|+|x|)^2}{2t}\right\}\right]+\\+\int\limits_0^\infty\frac{\theta+|x|+|y|}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{(\theta+|x|+|y|)^2}{2t}-\lambda\theta\right\}d\theta\end{aligned}\tag{5.41}$$

при всіх $\lambda\geq 0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$.

Доведення. Для $\lambda\geq 0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ та Γ — борелевої підмножини $\mathbb{R}$, покладемо $P_\lambda(t,x,\Gamma)=\mathbb{E}_x[\exp\{-\lambda\eta_t\}\,\mathbb{1}_\Gamma(w(t))]$.

Як функція аргументу Γ, P_λ є мірою на σ-алгебрі всіх борелевих підмножин $\mathbb{R}$. Використовуючи апроксимацію функціоналу $(\eta_t)_{t\geq 0}$ функціоналами інтегрального типу (див. вище) та аргументи, що доводять формулу

Фейнмана-Каца, приходимо до висновку, що міра P_λ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега і її щільність $g_\lambda(t,x,y)$ ($t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$), є розв'язком кожного з наступної пари рівнянь

$$g_\lambda(t,x,y)=g(t,x,y)-\lambda\int\limits_0^t g(s,x,0)g_\lambda(t-s,0,y)ds,$$

$$g_\lambda(t,x,y)=g(t,x,y)-\lambda\int\limits_0^t g_\lambda(s,x,0)g(t-s,0,y)ds.$$

Легко перевірити, що функція задана рівністю (5.41) є розв'язком кожного з цих рівнянь. $\square$

Як наслідок Леми 5.9, одержуємо формулу

$$\mathbb{E}\exp\{-\lambda\eta_t\}=\int\limits_{\mathbb{R}} g_\lambda(t,0,y)dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2t}-\lambda\theta\right\}d\theta. \tag{5.42}$$

Поклавши тут $\lambda\to+\infty$, приходимо до співвідношення

$$\mathbb{P}(\eta_t>0)=1, \tag{5.43}$$

яке справджується для довільного $t>0$.

Використовуючи (5.42), можна обчислити моменти випадкової величини η_t, наприклад,

$$\mathbb{E}\eta_t=\sqrt{\frac{2t}{\pi}};\ \mathbb{E}(\eta_t)^2=t. \tag{5.44}$$

Формула Іто. Розглянемо функцію h визначену у вступі рівністю

$$h(t,x)=\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}},\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Зафіксуємо $t>0$ і покажемо, що деяка версія формули Іто може бути застосована до функції $(h(t-s,w(s)))_{s\in[0,t]}$.

Лема 5.10. *Для кожного $s \in [0,t]$, справджується наступна рівність*

$$h(t-s,w(s)) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} - \eta_s + \int_0^s h'_x(t-\tau,w(\tau))dw(\tau) \tag{5.45}$$

майже напевно відносно $\mathbb{P}$.

Доведення. Функція h диференційовна по x при $x \neq 0$ і

$$h'_x(t-s,x) = -\int_0^{t-s} \frac{x}{\sqrt{2\pi\tau^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau}\right\} d\tau = -\operatorname{sign} x + \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2/2(t-s)} e^{-\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Це приводить до співвідношення

$$h''_{xx}(t-s,x) = -2\delta(x) + \frac{2}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\}.$$

Оскільки $\dfrac{\partial}{\partial s} h(t-s,x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2(t-s)}\right\}$, то одержуємо рівність $\left(\dfrac{\partial}{\partial s} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) h(t-s,x) = -\delta(x)$.

Побудуємо тепер деяку апроксимацію функції h. А саме, для $\varepsilon > 0$, покладемо

$$h_\varepsilon(t-s,x) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s,y) \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon}\right\} \frac{dy}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} =$$

$$= \int_\varepsilon^{t-s+\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau}\right\} \frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}, \ s \in [0,t], \ x \in \mathbb{R}.$$

Функція h_ε є гладкою, і виконується рівність

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) h_\varepsilon(t-s,x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right\}.$$

За формулою Іто справджується співвідношення

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t-s,w(s)) = h_\varepsilon(t,0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^s \exp\left\{-\frac{w^2(\tau)}{2\varepsilon}\right\} d\tau + \\ + \int_0^s \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(t-\tau,w(\tau))dw(\tau) \quad \mathbb{P}\text{-м.н.} \end{aligned} \tag{5.46}$$

при всіх $s \in [0,t]$.

Щоб перейти до границі в рівності (5.46), при $\varepsilon \to 0+$, зауважимо, що справджується нерівність $|h_\varepsilon(t-s,x) - h(t-s,x)| \le 2\sqrt{\varepsilon}$ при всіх $(s,x) \in [0,t]\times\mathbb{R}$. Таким чином, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon(t-s,w(s)) = h(t-s,w(s))$ а також,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon(t,0) = h(t,0) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.$$

Далі, прості обчислення дають

$$\mathbb{E}_x \int_0^s \exp\left\{-\frac{w^2(\tau)}{2\varepsilon}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} = \int_\varepsilon^{s+\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}.$$

Це приводить до нерівності (для деякого $\rho > 0$)

$$\sup_{s\in[0,\rho]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_\varepsilon^{s+\varepsilon}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}} - h(s,x)\right| \le 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Таким чином, взявши до уваги твердження Теореми 6.4 з [16], можемо стверджувати, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\displaystyle\int_0^s \exp\left\{-\frac{w^2(\tau)}{2\varepsilon}\right\}d\tau = \eta_s$.

Залишається показати, що границя стохастичного інтеграла в (5.46), при $\varepsilon \to 0+$, збігається з інтегралом в (5.45). Щоб зробити це, спочатку зауважимо, що

$$\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(t-s,x) = -\operatorname{sign} x + \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2/2\varepsilon}^{\infty} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2/2(t-s+\varepsilon)} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left|\frac{\partial h_\varepsilon(t-s,x)}{\partial x} - h'_x(t-s,x)\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2/2\varepsilon}^{\infty} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2/2(t-s+\varepsilon)}^{x^2/2(t-s)} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Як легко побачити, при $\varepsilon \to 0+$, права частина цієї нерівності прямує до нуля рівномірно на $(s,x) \in [0,t]\times(\mathbb{R}\setminus[-\rho,\rho])$ для кожного $\rho > 0$. Врахувавши рівномірну по $\varepsilon > 0$ обмеженість функції $\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(t-s,x)\right)_{(s,x)\in[0,t]\times\mathbb{R}}$, можемо записати наступні оцінки

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\left[\int\limits_0^s \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(t-\tau,w(\tau))\,\mathbb{1}_{[-\rho,\rho]}(w(\tau))dw(\tau)\right]^2 \le$$

$$\le 4\int\limits_0^t \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(t-\tau,w(\tau))\right)^2 \mathbb{1}_{[-\rho,\rho]}(w(\tau))\right]d\tau \le$$

$$\le const\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\rho}^{\rho} e^{-y^2/2\tau}\frac{dy}{\sqrt{2\pi\tau}} \le const\cdot\sqrt{t}\rho.$$

Права частина тут стає як завгодно малою рівномірно по $\varepsilon > 0$ при досить малому ρ. Така ж нерівність справджується і для стохастичного інтеграла

$$\int\limits_0^s h'_x(t-\tau,w(\tau))\,\mathbb{1}_{[-\rho,\rho]}(w(\tau))dw(\tau).$$

Все це свідчить, що стохастичний інтеграл в (5.46) збігається до інтеграла в (5.45), при $\varepsilon \to 0+$. □

5.2.1.3 Оптимальна стратегія.

Для фіксованого $t > 0$, покладемо $\xi^{(t)}(s) = \mathbb{E}(\eta_t/\mathcal{M}_s),\ s \in [0,t]$. Ясно, що $\xi^{(t)}(0) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ і $\xi^{(t)}(t) = \eta_t$. Використовуючи марківську властивість вінерового процесу, одержимо

$$\xi^{(t)}(s) = \eta_s + \mathbb{E}_{w(s)}\eta_{t-s} = \eta_s + h(t-s,w(s)) \tag{5.47}$$

при $s \in [0,t]$. Оскільки функція $(h(t-s,x))_{(s,x)\in[0,t]\times\mathbb{R}}$ неперервна по (s,x), то можемо стверджувати, що процес $(\xi^{(t)}(s))_{s\in[0,t]}$ неперервний $\mathbb{P}$-м.н. Тепер, враховуючи (5.43) і той факт, що $h(t-s,x) > 0$ при всіх $s \in [0,t)$ та $x \in \mathbb{R}$, приходимо до висновку, що

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{s\in[0,t]}\xi^{(t)}(s) > 0\Big) = 1. \tag{5.48}$$

З (5.45) та (5.47) випливає, що

$$\xi^{(t)}(s) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \int\limits_0^s h'_x(t-\tau, w(\tau))dw(\tau) \tag{5.49}$$

для всіх $s \in [0,t]$. Покладемо

$$\omega_*^{(t)}(s) = [\xi^{(t)}(s)]^{-1} h'_x(t-s, w(s)),\ s \in [0,t], \tag{5.50}$$

і зауважимо, що $\mathbb{P}\left(\int\limits_0^t [\omega_*^{(t)}(s)]^2 ds < \infty\right) = 1$, бо $|h'_x(t-s,x)| \le 1$ при всіх $(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}$ та $\inf\limits_{s\in[0,t]} \xi^{(t)}(s) > 0$ $\mathbb{P}$-м.н. відповідно до (5.48).

Тепер можемо переписати (5.49) у вигляді ($s \in [0,t]$)

$$\xi^{(t)}(s) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \int\limits_0^s \xi^{(t)}(\tau)\omega_*^{(t)}(\tau)dw(\tau).$$

Як наслідок одержуємо $\xi^{(t)}(s) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\mathcal{E}_s^0(\omega_*^{(t)}),\ s \in [0,t]$. Зокрема,

$$\eta_t = \xi^{(t)}(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)}).$$

Звідси та з (5.44) випливає, що $\mathbb{E}\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)}) = 1,\ \mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)})]^2 = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, доведено, що стратегія $\omega_*^{(t)}$ є допустимою стратегією. Крім того, справджуються рівності

$$\mathbb{E}[\eta_t \mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)})] = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} \quad \text{та} \quad \left(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega_*^{(t)})]^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

і одержуємо $\Phi_t(\omega_*^{(t)}) = \sqrt{t}$. Отже, стратегія $\omega_*^{(t)}$ задана рівністю (5.50) оптимальна.

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 5.11. *Допустима стратегія* $(\omega_*^{(t)}(s))_{s\in[0,t]}$ *задана рівністю*

$$\omega_*^{(t)}(s) = h'_x(t-s, w(s)) \left[\sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \int\limits_0^s h'_x(t-\tau, w(\tau))dw(\tau)\right]^{-1}$$

максимізує цільову функцію

$$\Phi_t(\omega) = \frac{\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)\eta_t]}{\left(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2\right)^{1/2}}.$$

5.2.1.4 Деякі марківські стратегії.

Стратегія $\omega_*^{(t)}$, побудована в пункті 5.2.1.3, не є марківською. Тут розглянемо дві марківські стратегії та порівняємо їх з оптимальною. Для спрощення вважатимемо, що фіксоване значення $t > 0$ рівне 1.

Процес Орнштейна-Уленбека. Далі нам знадобиться одна формула для міри Орнштейна-Уленбека гільбертової кулі в просторі неперервних функцій.

Позначимо через $C[0,1]$ множину всіх дійснозначних неперервних функцій визначених на інтервалі $[0,1]$ і для $r > 0$ покладемо

$$B_r = \left\{ x(\cdot) \in C[0,1] : \, x(0) = 0, \, \int\limits_0^1 x^2(s)\, ds < r \right\}.$$

Це, так звана, гільбертова куля радіуса $\sqrt{r}$ в просторі неперервних функцій, що починаються в початку координат. Для $r > 0$ позначимо через $F(r)$ значення вінерової міри множини B_r.

Для фіксованого параметра $\rho > 0$ покладемо

$$x_\rho(t) = e^{-\rho t} \int\limits_0^t e^{\rho s}\, dw(s), \quad t \geq 0, \tag{5.51}$$

де інтеграл в правій частині рівності є вінеровим інтегралом, для якого справджується рівність

$$\int\limits_0^t e^{\rho s}\, dw(s) = e^{\rho t} w(t) - \rho \int\limits_0^t e^{\rho s} w(s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Випадковий процес, визначений рівністю (5.51), називається процесом Орнштейна-Уленбека, який стартує з початку координат ($x_\rho(0) = 0$).

Позначимо через $(K(s,t))_{s\geq 0,\, t\geq 0}$ кореляційну функцію цього процесу. Її можна легко обчислити, а саме,

$$K(s,t) = \frac{1}{\rho}\exp\{-\rho(s\vee t)\}\,\mathrm{sh}(\rho(s\wedge t)), \quad s\geq 0,\, t\geq 0.$$

Для $k=1,2,\dots$ позначимо через μ_k єдиний корінь рівняння $\operatorname{tg}\mu = -\mu/\rho$ на інтервалі $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi, k\pi\right)$ і покладемо

$$\lambda_k = \frac{1}{\rho^2+\mu_k^2}, \quad \varphi_k(t) = \frac{1}{\varkappa_k}\sin(\mu_k t), \quad t\in[0,1],$$

де $\varkappa_k^2 = \int\limits_0^1 \sin^2(\mu_k t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{\rho^2+\rho+\mu_k^2}{\rho^2+\mu_k^2}$.

Просто встановлюються наступні співвідношення

$$\int\limits_0^1 K(s,t)\varphi_k(t)\,dt = \lambda_k\varphi_k(s), \quad s\in[0,1], \quad k=1,2,\dots.$$

Більше того, можна перевірити, що функції $(\varphi_k(t))_{t\in[0,1]}$, $k=1,2,\dots$ утворюють ортонормальний базис у просторі $L_2[0,1]$.

Тепер можна стверджувати, що коефіцієнти Фур'є

$$\xi_k = \int\limits_0^1 x_\rho(t)\varphi_k(t)\,dt, \quad k=1,2,\dots,$$

процесу Орнштейна-Уленбека в цьому базисі утворюють послідовність незалежних нормально розподілених випадкових величин, для яких $\mathbb{E}\xi_k = 0$, $\mathbb{E}\xi_k^2 = \lambda_k$. Тоді, використовуючи тотожність Парсеваля, одержуємо

$$\int\limits_0^1 x_\rho^2(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2, \tag{5.52}$$

де ряд збігається майже напевно. Оскільки формула

$$\mathbb{E}\exp\left\{\theta\xi_k^2\right\} = (1-2\theta\lambda_k)^{-1/2} = \left(1-\frac{2\theta}{\rho^2+\mu_k^2}\right)^{-1/2}$$

справджується для кожного дійсного числа $\theta < 1/(2\lambda_k) = (\rho^2 + \mu_k^2)/2$, то з рівності (5.52) випливає наступне співвідношення

$$\mathbb{E}\exp\left\{\theta\int\limits_0^1 x_\rho^2(s)\,ds\right\} = \left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2\theta}{\rho^2+\mu_k^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{5.53}$$

при всіх $\theta < (\rho^2 + \mu_1^2)/2$.

Зауважимо, що μ_k при $k \geq 1$ залежать від ρ, таким чином, права частина (5.53) є функцією від $\rho > 0$ і $\theta < (\rho^2 + \mu_1^2)/2$; позначимо її через $\Phi(\rho, \theta)$.

Взявши логарифмічну похідну від Φ за аргументом θ,одержимо

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\Phi(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho^2+\mu_k^2-2\theta}. \tag{5.54}$$

Далі представимо ряд (5.54) у вигляді суми доданків, що є добутками коефіцієнтів Фур'є (в базисі $(\varphi_k)_{k\geq 1}$) деяких двох функцій.

Зауважимо, перш за все, що може бути легко обчислена первісна функції $\left(\operatorname{sh}(t\sqrt{\rho^2-2\theta})\sin\mu_k t\right)_{t\in\mathbb{R}}$. Цей факт і співвідношення $\rho\sin\mu_k + \mu_k\cos\mu_k = 0$ (див. означення чисел μ_k) мають своїм наслідком наступну рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{\rho^2-2\theta})}{V(\rho,\theta)}\varphi_k(t)\,dt = \frac{\sin\mu_k}{\varkappa_k(\rho^2+\mu_k-2\theta)}, \tag{5.55}$$

що справджується при $\rho > 0$, $\theta < \rho^2/2$ і $k = 1, 2, \ldots$, де покладено

$$V(\rho,\theta) = \sqrt{\rho^2-2\theta}\operatorname{ch}\sqrt{\rho^2-2\theta} + \rho\operatorname{sh}\sqrt{\rho^2-2\theta}.$$

Таким чином, залишається знайти функцію $(h(\rho,t))_{t\in[0,1]}$, яка задовольняє співвідношення $\int\limits_0^1 h(\rho,t)\varphi_k(t)\,dt = \dfrac{\varkappa_k}{\sin\mu_k}$ при всіх $\rho > 0$ і $k = 1, 2, \ldots$. Використовуючи рівність $\sin^2\mu_k = \mu_k^2/(\rho^2+\mu_k^2)$, перепишемо це співвідношення наступним чином $\int\limits_0^1 h(\rho,t)\sin\mu_k t\,dt = \dfrac{\varkappa_k^2}{\sin\mu_k} = \dfrac{\varkappa_k^2\sin\mu_k}{\mu_k^2}(\rho^2+\mu_k^2)$. Підставляючи в праву частину цього співвідношення замість $\varkappa_k$ його представлення в термінах ρ та μ_k (див. вище), приходимо до висновку, що функція h повинна задовольняти умову ($\rho > 0,\ k = 1, 2, \dots$)

$$\int_0^1 h(\rho, t) \sin \mu_k t \, dt = \frac{1}{2} \sin \mu_k + \frac{1}{2} \rho(\rho + 1) \frac{\sin \mu_k}{\mu_k^2}. \tag{5.56}$$

Ясно, що функція h повинна бути сумою двох функцій: h_1 і h_2 для яких

$$\int_0^1 h_1(\rho, t) \sin \mu_k t \, dt = \frac{1}{2} \sin \mu_k, \quad \int_0^1 h_2(\rho, t) \sin \mu_k t \, dt = \frac{1}{2} \rho(\rho + 1) \frac{\sin \mu_k}{\mu_k^2}$$

при всіх $\rho > 0$ і $k = 1, 2, \dots$. Перше з цих співвідношень означає, що h_1 збігається з домноженою на $1/2$ дельта-функцією Дірака $(\delta_1(t))_{t \in [0,1]}$ зосередженою в точці $t = 1$. Щоб знайти функцію h_2, обчислимо інтеграл (використовуючи співвідношення $\rho \sin \mu_k + \mu_k \cos \mu_k = 0$)

$$\int_0^1 t \sin \mu_k \, dt = -\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k + \frac{\sin \mu_k}{\mu_k^2} = (\rho + 1) \frac{\sin \mu_k}{\mu_k^2}.$$

Звідси випливає, що $h_2(\rho, t) = \rho t/2$ при $t \in [0, 1]$ і $\rho > 0$. Таким чином, маємо функцію h, яка задовольняє рівність (5.56) при всіх $\rho > 0$ і $k = 1, 2, \dots$, а саме $h(\rho, t) = \dfrac{1}{2} \delta_1(t) + \dfrac{1}{2} \rho t, \quad t \in [0, 1]$.

Зауважимо, що функція δ_1 не належить до $L_2[0, 1]$. Проте, можна записати тотожність Парсеваля як для неї так і для функції $\left(\dfrac{\operatorname{sh}(t\sqrt{\rho^2 - 2\theta})}{V(\rho, \theta)} \right)_{t \in [0,1]}$ оскільки коефіцієнти Фур'є останньої функції утворюють абсолютно збіжний ряд. Це наслідок формули (5.55) (нагадаємо, що $\mu_k \in \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi, k\pi \right)$. Отже, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2 + \mu_k^2 - 2\theta} = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{\rho^2 - 2\theta})}{V(\rho, \theta)} \left[\frac{1}{2} \delta_1(t) + \frac{1}{2} \rho t \right] dt. \tag{5.57}$$

Обчислюючи тут інтеграл, приходимо до рівності

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \Phi(\rho, \theta) =$$
$$= \frac{1}{2V(\rho, \theta)} \left[\frac{\rho^2 - \rho - 2\theta}{\rho^2 - 2\theta} \operatorname{sh} \sqrt{\rho^2 - 2\theta} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\theta}} \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 2\theta} \right].$$

Зауважимо, що вираз в правій стороні цієї формули збігається з похідною (за змінною θ) функції $\ln\left[e^{\rho/2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\rho^2-2\theta}+\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-2\theta}}\operatorname{sh}\sqrt{\rho^2-2\theta}\right)^{-1/2}\right]$, а оскільки значення цієї функції в точах з $\theta = 0$ дорівнює нулю, ми можемо написати остаточну формулу

$$\Phi(\rho,\theta) = e^{\rho/2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\rho^2-2\theta}+\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-2\theta}}\operatorname{sh}\sqrt{\rho^2-2\theta}\right)^{-1/2}, \tag{5.58}$$

яка справджується для всіх $\rho > 0$ і $\theta < \rho^2/2$.

Аргументи, що привели до (5.58), можуть бути застосовані також і у випадку $\theta \geq \rho^2/2$ і $\theta < (\rho^2+\mu_1^2)/2$; відповідна формула напишеться наступним чином

$$\Phi(\rho,\theta) = e^{\rho/2}\left(\cos\sqrt{2\theta-\rho^2}+\frac{\rho}{\sqrt{2\theta-\rho^2}}\sin\sqrt{2\theta-\rho^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.59}$$

Враховуючи, що при всіх $z \in \mathbb{C}$ справджуються співвідношення

$$\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z), \quad \cos(iz) = \operatorname{ch}(z),$$

формули (5.58) та (5.59) можемо записати у вигляді (5.58) при всіх $\rho > 0$, $\theta < (\rho^2+\mu_1^2)/2$.

Процес Орнштейна-Уленбека породжує в просторі $C[0,1]$ ймовірнісну міру, що зветься мірою Орнштейна-Уленбека. Якщо позначити через $F_\rho(r)$ значення цієї міри гільбертової кулі B_r для $r > 0$ (див. вище), то можемо написати наступну рівність

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\left\{\theta\int_0^1 x_\rho^2(s)\,ds\right\} &= \int_0^\infty e^{\theta r}\,dF_\rho(r) = \\ &= e^{\rho/2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\rho^2-2\theta}+\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-2\theta}}\operatorname{sh}\sqrt{\rho^2-2\theta}\right)^{-1/2},\end{aligned} \tag{5.60}$$

яка справджується при всіх $\theta < (\rho^2+\mu_1^2)/2$, $\rho > 0$. Це і є потрібна нам формула.

Зауважимо, що вінерів процес є граничним для процесів Орнштейна-Уленбека, при $\rho \to 0+$. Як легко бачити, перехід до границі при $\rho \to 0+$ у формулі (5.60) приводить до відомої формули Камерона-Мартіна (див. [13] а також [39, Ch. II, §12])

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \theta \int_0^1 w^2(s)\, ds \right\} = \frac{1}{\sqrt{\cos \sqrt{2\theta}}}, \quad \theta < \frac{\pi^2}{8}. \tag{5.61}$$

Повернемось до побудови марківської стратегії.

Розглянемо сім'ю випадкових процесів, які для $\rho > 0$ задаються рівностями $\omega_\rho(s) = -\rho w(s)$ при $s \in [0, 1]$. Позначимо $\Phi(\rho) = \Phi_1(\omega_\rho)$, де Φ_t задана рівністю (5.39). Застосовуючи теорему Гірсанова, можемо записати чисельник в (5.39) наступним чином

$$\mathbb{E} \int_0^1 \delta(x_\rho(s)) ds, \tag{5.62}$$

де $(x_\rho(s))_{s \geq 0}$ — описаний вище процес Орнштейна-Уленбека. Щільність ймовірності переходу g^ρ такого процеса задається рівністю

$$g^\rho(t, x, y) = (2\pi\sigma_\rho^2(t))^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(y - xe^{-\rho t})^2}{2\sigma_\rho^2(t)} \right\}$$

для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$, де $\sigma_\rho^2(t) = \dfrac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho}$, $t > 0$.

Математичне сподівання в (5.62) можна легко обчислити

$$\mathbb{E} \int_0^1 \delta(x_\rho(s)) ds = \int_0^1 g^\rho(s, 0, 0) ds = (\pi\rho)^{-1/2} \ln(e^\rho + \sqrt{e^{2\rho} - 1}).$$

Використовуючи наступне очевидне співвідношення

$$[\mathcal{E}_1^0(\omega_\rho)]^2 = \mathcal{E}_1^0(\omega_{2\rho}) \exp \left\{ \rho^2 \int_0^1 w^2(s) ds \right\}$$

та теорему Гірсанова, одержуємо наступну рівність

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_1^0(\omega_\rho)]^2 = \mathbb{E} \exp \left\{ \rho^2 \int_0^1 x_{2\rho}^2(s) ds \right\}.$$

З формули (5.60) тепер випливає співвідношення

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_1^0(\omega_\rho)]^2 = e^\rho \left(\operatorname{ch}\rho\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{sh}\rho\sqrt{2}\right)^{-1/2}.$$

Остаточно, одержуємо $\Phi(\rho) = \dfrac{\left(\rho\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{sh}\rho\sqrt{2}\,\right)^{1/4}\ln(e^\rho + \sqrt{e^{2\rho}-1})}{e^{\rho/2}\sqrt{\pi\rho}}$. Максимум цієї функції можна наближено обчислити і одержати

$$\max_{\rho>0}\Phi(\rho) = \Phi(\rho_*) \cong 0.84549, \quad \rho_* \cong 1.12552.$$

Зауважимо, що для оптимальної стратегії у нашому випадку ($t = 1$) ми мали б $\Phi_1(\omega_*) = 1$.

Ще один приклад марківської стратегії. Нехай ω_ρ задається рівністю $\omega_\rho(s) = -\rho\operatorname{sign} w(s)$ для $s \in [0,1]$, де ρ — додатний параметр. Як і вище, покладемо $\Phi(\rho) = \Phi_1(\omega_\rho)$ та зауважимо, що $\mathbb{E}[\mathcal{E}_1^0(\omega_\rho)]^2 = e^{\rho^2}$.

Чисельник в (5.39) може бути записаний в цьому випадку наступним чином

$$\mathbb{E}\int_0^1 \delta(y_\rho(s))ds, \tag{5.63}$$

де $(y_\rho(t))_{t\geq 0}$ вінерів процес з переносом $a_\rho(x) = -\rho\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Деякі нескладні обчислення приводять до наступного виразу для (5.63)

$$\mathbb{E}\int_0^1 \delta(y_\rho(s))ds = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\rho^2/2} + \frac{\rho^2+1}{2}\int_0^1 e^{-\rho^2 s/2}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Остаточна формула для Φ така

$$\Phi(\rho) = e^{-\rho^2/2}\left[\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\rho^2/2} + \frac{\rho^2+1}{2}\int_0^1 e^{-\rho^2 s/2}\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}\right].$$

Досліджуючи дану функцію на екстремум (з допомогою чисельних методів), одержуємо $\max_{\rho>0}\Phi(\rho) = \Phi(\rho_*) \cong 0.9567$, $\rho_* \cong 0.5743$, що ближче до оптимального значення, ніж в попередньому прикладі.

5.2.2 Задача мінімізації часу першого досягнення початку координат вінеровим процесом з переносом

В цьому пункті розглядається задача мінімізації моменту першого досягнення початку координат вінеровим процесом шляхом додавання деякого переносу.

5.2.2.1 Вступ

Нехай $(w(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ – вінерів процес в $\mathbb{R}$, для якого $\mathbb{P}_x(w(0) = x) = 1$. Розглянемо момент першого досягнення процесом початку координат: $\tau = \inf\{s \geq 0 : w(s) = 0\}$. Зауважимо, що τ є моментом зупинки відносно потоку $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$. Розподіл випадкової величини τ залежить від точки x і задається при $x \neq 0$ щільністю $p_x(t) = \dfrac{|x|}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2t}\right\}$, $t > 0$. Легко бачити, що випадкова величина τ не має скінченного математичного сподівання відносно міри $\mathbb{P}_x$ при $x \neq 0$.

Метою цього пункту є встановлення коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту τ. Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині V прогресивно вимірних процесів $(\omega(t), \mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, для яких $\mathbb{P}_x\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(s)\, ds < \infty\right) = 1$ та справджуються умови $\mathbb{E}_x\mathcal{E}_\tau^0(\omega) = 1$, $\mathbb{E}_x(\mathcal{E}_\tau^0(\omega))^2 < \infty$, де, як і вище,

$$\mathcal{E}_\tau^0(\omega) = \exp\left\{\int\limits_0^\tau \omega(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \omega^2(s)\, ds\right\}.$$

Елементи множини V називатимемо допустимими стратегіями.

5.2.2.2 Цільова функція та локальна оптимальна стратегія

Нехай функція $(f(t))_{t\geq 0}$ додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена. Цільовою функцією будемо називати функціонал

$$\Phi(\omega) = \mathbb{E}_x f(\tau)\mathcal{E}_\tau^0(\omega) \tag{5.64}$$

заданий на множині V допустимих стратегій. Очевидно, що при виконанні припущень щодо функції f справджуються нерівності $0 \le \Phi(\omega) \le C = \sup\limits_{t\ge 0} f(t)$ на всій множині V. Крім того, існує скінченна дисперсія $\mathbb{D}_x f(\tau)$ випадкової величини $f(\tau)$.

Нас цікавитиме існування та вигляд допустимої стратегії, на якій цільова функція досягала б свого мінімального значення на всьому V чи на певній його підмножині. Деяку відповідь на поставлене питання дає наступна теорема, що є основним твердженням цього параграфу. Подібна задача для локального часу вінерового процесу в нулі розглядалася в пункті 5.2.1, ідеї якого знайшли своє застосування і в нашій ситуації.

Теорема 5.12. *Нехай додатна неперервна строго монотонно зростаюча та обмежена функція $(f(t))_{t\ge 0}$ така, що існують сталі $u > 0$ та $r \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ і функція $(\rho(t))_{t>0}$, для яких при всіх $0 < t < u$, $s > 0$ виконується $f(s+t) - f(s) \le \rho(s)t^r$, причому функція ρ квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.*

Тоді існує допустима стратегія $\omega_*(t) = \dfrac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$, на якій функціонал Φ досягає свого мінімуму на множині $W = \{\omega \in V : \mathbb{E}_x(\mathcal{E}^0_\tau(\omega))^2 < K\}$. Тут $K = \dfrac{\mathbb{D}_x f(\tau)}{(C - \mathbb{E}_x f(\tau))^2} + 1$, $h(t, x) = C - \mathbb{E}_x f(t+\tau)$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, а $C = \sup\limits_{t\ge 0} f(t)$.

Зауваження 5.1. Очевидно, що множина W непорожня, бо $\mathcal{E}^0_\tau(0) \equiv 1$ і, отже, $0 \in W$. Відомо (див. [40, с. 244]), що стохастична експонента задовольняє рівняння $\mathcal{E}^0_t(\omega) = 1 + \int\limits_0^t \mathcal{E}^0_s(\omega)\omega(s)\,dw(s)$, за умови $\mathbb{P}\left(\int\limits_0^t \omega^2(s)\,ds < \infty\right) = 1$. Таким чином

$$(\mathcal{E}^0_t(\omega))^2 = 1 + 2\int\limits_0^t \mathcal{E}^0_s(\omega)\omega(s)\,dw(s) + \left(\int\limits_0^t \mathcal{E}^0_s(\omega)\omega(s)\,dw(s)\right)^2 =$$

$$= 2\mathcal{E}^0_t(\omega) - 1 + \left(\int\limits_0^t \mathcal{E}^0_s(\omega)\omega(s)\,dw(s)\right)^2 \ge 2\mathcal{E}^0_t(\omega) - 1$$

а оскільки $\mathbb{E}_x \mathcal{E}_t^0(\omega) = 1$, то матимемо $\mathbb{E}_x(\mathcal{E}_t^0(\omega))^2 \geq 1$. Звідси випливає, що $\mathbb{E}_x(\mathcal{E}_\tau^0(\omega))^2 \geq 1$.

Перш ніж доводити сформульовану теорему, розглянемо одне допоміжне твердження, яке, цікаве і саме по собі.

Лема 5.13. *Нехай додатна монотонно спадна при $t > 0$ функція $(g(t))_{t\geq 0}$ така, що існують сталі $u > 0$ та $r \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ і функція $(\rho(t))_{t>0}$, для яких при всіх $0 < t < u$, $s > 0$ справджується рівність $g(s+t) - g(s) \leq \rho(s)t^r$, причому функція ρ квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним. Тоді існує така допустима стратегія ω_0, що $g(\tau) = \mathcal{E}_\tau^0(\omega_0)\mathbb{E}_x g(\tau)$.*

Доведення. Розглянемо функцію $k(t, x) = \mathbb{E}_x g(t + \tau) = \int\limits_0^\infty g(t + s) p_x(s)\, ds$, задану при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, та довизначимо її за неперервністю в точках $(t, 0)$ при всіх $t \geq 0$. Ця функція диференційовна за обома змінними скрізь крім точок $(t, 0)$, причому

$$k'_t(t, x) = \int\limits_0^\infty g'(t + s) \frac{|x|}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds =$$

$$= -\int\limits_0^\infty g(t + s) \frac{(x^2 - 3s)|x|}{2s^3\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds,$$

$$k'_x(t, x) = \operatorname{sign} x \int\limits_0^\infty g(t + s) \left(1 - \frac{x^2}{s}\right) \frac{1}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds,$$

$$k''_{xx}(t, x) = \int\limits_0^\infty g(t + s) \frac{(x^2 - 3s)|x|}{s^3\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds.$$

Всі інтеграли в правих частинах цих рівностей збігаються локально рівномірно за та $t > 0$ та $x \neq 0$. Тому диференціювання інтегралу, що задає функцію k, по обох змінних допустиме. Легко бачити, що при всіх $t > 0$ та $x \neq 0$ справджується рівність

$$k'_t(t, x) + \frac{1}{2} k''_{xx}(t, x) = 0. \tag{5.65}$$

Зауваживши, що $k(0,x)=\mathbb{E}_x g(\tau)$ і $k(t,0)=g(t)$, розглянемо для фіксованого $x\neq 0$ випадковий процес $\xi_x(t)=\mathbb{E}_x(g(\tau)/\mathcal{M}_t)$, $t\geq 0$. Очевидно, що $\xi_x(0)=\mathbb{E}_x g(\tau)=k(0,x)$ та $\xi_x(\tau)=g(\tau)$.

Враховуючи, що на множині $\{\tau>t\}\in\mathcal{M}_t$ виконується рівність $\theta_t\tau=\tau-t$, де θ_t — оператор зсуву (див. [16, с. 120]), одержимо

$$\xi_x(t)=\mathbb{E}_x(g(\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}/\mathcal{M}_t)+\mathbb{E}_x(g(\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}/\mathcal{M}_t)=$$
$$=g(\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}+\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbb{E}_x(g(t+\theta_t\tau)/\mathcal{M}_t)=g(\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}+\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbb{E}_{w(t)}g(t+\tau)=$$
$$=k(\tau,w(\tau))\,\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}+k(t,w(t))\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}=k(t\wedge\tau,w(t\wedge\tau)).$$

Доведемо далі, що для обчислення стохастичного диференціалу випадкового процесу $\xi_x(t)$ може бути застосована формула Іто (див., наприклад, [40, с. 136]). Для цього досить довести, що $\mathbb{P}_x$-м.н. $\int\limits_0^\infty(\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,k'_x(t,w(t)))^2\,dt<\infty$.

Розглянемо наступне представлення

$$k'_x(t,x)=\operatorname{sign}x\int\limits_0^\infty(g(t)-g(t+s))\frac{x^2}{s^2\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds-$$
$$-\operatorname{sign}x\int\limits_0^\infty(g(t)-g(t+s))\frac{1}{s\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds=I_1-I_2$$

і оцінимо I_1 та I_2.

$$|I_1|\leq\int\limits_0^u\rho(t)s^r\frac{x^2}{s^2\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds+\int\limits_u^\infty g(t)\frac{x^2}{s^2\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds\leq$$
$$\leq\rho(t)\int\limits_0^u\frac{ds}{\sqrt{2\pi s^{3-2r}}}+g(t)\int\limits_u^\infty\frac{ds}{\sqrt{2\pi s^3}}\leq const(\rho(t)+g(t)).$$

Тут враховано очевидні при $s>0$ та $x\in\mathbb{R}$ нерівності

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}<1,\quad\frac{x^2}{s}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}<1,$$

а запис $const$ означає деяку додатну сталу. Аналогічно

$$|I_2| \le \int_0^u \rho(t)s^r \frac{1}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds + \int_u^\infty g(t)\frac{1}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds \le$$

$$\le \rho(t) \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\pi s^{3-2r}}} + g(t) \int_u^\infty \frac{ds}{\sqrt{2\pi s^3}} \le const(\rho(t) + g(t)).$$

Отже, $(k'_x(t,x))^2 \le const(\rho^2(t) + g^2(t))$ і тому

$$\int_0^\infty (\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\, k'_x(t, w(t)))^2\, dt \le const \int_0^\tau (\rho^2(t) + g^2(t))\, dt.$$

Оскільки $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$, функція ρ квадратично інтегровна в околі нуля, g обмежена, то $\int_0^\infty (\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\, k'_x(t, w(t)))^2\, dt < \infty$ $\mathbb{P}_x$-м.н. Далі, застосувавши до $\xi_x(t) = k(t \wedge \tau, w(t \wedge \tau))$ формулу Іто, з врахуванням (5.65), матимемо

$$\xi_x(t) = k(0, x) + \int_0^{t\wedge\tau} k'_x(s, w(s))\, dw(s) = k(0, x) + \int_0^t k'_x(s, w(s))\, \mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\, dw(s).$$

Зауважимо, що при $0 \le t < \tau$

$$\xi_x(t) = k(t, w(t)) = \int_0^\infty g(t+s)\frac{|w(t)|}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{w^2(t)}{2s}\right\} ds,$$

а при $t \ge \tau$ маємо $\xi_x(t) = k(\tau, w(\tau)) = k(\tau, 0) = g(\tau) > 0$. Крім того, при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ функція $\xi_x(t)$ $\mathbb{P}_x$-м.н. неперервна. Тому $\mathbb{P}_x$-м.н. $\inf\limits_{0\le t<\tau} \xi_x(t) > 0$ і можемо записати

$$\xi_x(t) = k(0, x) + \int_0^t k'_x(s, w(s))\, \mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\, dw(s) = \mathbb{E}_x g(\tau) + \int_0^t \hat\omega_0(s)\xi_x(s)\, dw(s),$$

де позначено $\hat\omega_0(s) = k'_x(s, w(s))\dfrac{\mathbb{1}_{\{\tau>s\}}}{\xi_x(s)} = \dfrac{k'_x(s, w(s))}{k(s, w(s))}\, \mathbb{1}_{\{\tau>s\}}$.

Покладемо $\omega_0(t) = \dfrac{k'_x(t, w(t))}{k(t, w(t))}$. Враховуючи, що на множині $\{\tau > t\}$

$$k(t, w(t)) = \mathbb{E}_{w(t)} g(t+\tau) = \mathbb{E}_x(g(\tau)/\mathcal{M}_t) > 0,$$

можемо стверджувати, що $(\omega_0(t))_{t\geq 0}$ є допустимою стратегією. Крім того, $\xi_x(t) = \mathcal{E}_t^0(\hat{\omega}_0)\mathbb{E}_x g(\tau) = \mathcal{E}_{t\wedge\tau}^0(\omega_0)\mathbb{E}_x g(\tau)$ і $g(\tau) = \xi_x(\tau) = \mathcal{E}_\tau^0(\omega_0)\mathbb{E}_x g(\tau)$, що і потрібно було довести. $\square$

Перейдемо тепер до доведення основного твердження цього пункту.

Доведення Теореми 5.12. Позначимо $\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega)\| = \left(\mathbb{E}_x(\mathcal{E}_\tau^0(\omega))^2\right)^{1/2}$ та розглянемо функціонал $\hat{\Phi}(\omega) = \dfrac{\mathbb{E}_x(C - f(\tau))\mathcal{E}_\tau^0(\omega)}{\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega)\|}$. Легко бачити, що

$$\Phi(\omega) = C - \hat{\Phi}(\omega)\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega)\|. \tag{5.66}$$

Далі, функція $C - f(t)$ задовольняє умови Леми 5.13. Тому існує така допустима стратегія $\omega_*(t) = \dfrac{h'_x(t, w(t))}{h(t, w(t))}$, де $h(t,x) = C - \mathbb{E}_x f(t+\tau)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, що $C - f(\tau) = \mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)(C - \mathbb{E}_x f(\tau))$ і, отже,

$$\hat{\Phi}(\omega) = (C - \mathbb{E}_x f(\tau))\frac{\mathbb{E}_x\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\mathcal{E}_\tau^0(\omega)}{\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega)\|}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*) = \dfrac{C - f(\tau)}{C - \mathbb{E}_x f(\tau)}$. Звідси $\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\|^2 = \dfrac{\mathbb{E}_x(C - f(\tau))^2}{(C - \mathbb{E}_x f(\tau))^2} = K$, а це дає підстави стверджувати, що $\omega_* \in W$, причому, для всіх $\omega \in W$

$$\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega)\| \leq \|\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\|. \tag{5.67}$$

Нерівність Коші, застосована до $\mathbb{E}_x\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\mathcal{E}_\tau^0(\omega)$, дозволяє записати:

$$\max_{\omega\in W}\hat{\Phi}(\omega) = \hat{\Phi}(\omega_*) = (C - \mathbb{E}_x f(\tau))\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\|.$$

З (5.66) і (5.67) випливає нерівність $\Phi(\omega) \geq C - \hat{\Phi}(\omega_*)\|\mathcal{E}_\tau^0(\omega_*)\| = \Phi(\omega_*)$ при всіх $\omega \in W$, яка доводить твердження теореми. $\square$

Нескладні обчислення приводять до рівності

$$\min_{\omega\in W}\Phi(\omega) = \mathbb{E}_x f(\tau) - \frac{\mathbb{D}_x f(\tau)}{C - \mathbb{E}_x f(\tau)}.$$

Цікавим є наступний приклад, в якому вдається знайти оптимальну стратегію в явному вигляді. Розглянемо функціонал (5.64) з функцією $f(t) =$

$1 - e^{-mt}$, де $m > 0$ — деяка стала. Оскільки при всіх $s > 0$, $t > 0$ справджується нерівність $e^{-ms}(1 - e^{-mt}) \le me^{-ms}t$, то умови Теореми 5.12 виконані і, отже, існує допустима стратегія, яка мінімізує функціонал (5.64) на множині W. Множина допустимих стратегій задається нерівністю $\mathbb{E}_x(\mathcal{E}_\tau^0(\omega))^2 \le e^{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{m}|x|}$. Оптимальна стратегія має вигляд $\omega_*(t) = -\sqrt{2m}\,\mathrm{sign}(w(t))$.

5.2.2.3 Глобальна ε-оптимальна стратегія

Поставимо питання про існування оптимальної, в сенсі мінімізації функціоналу Φ, стратегії на всій множині допустимих стратегій V. Зауважимо насамперед, що для кожної $\omega \in V$ справджується очевидна нерівність $\Phi(\omega) > 0$. Наступні обчислення показують, що можна одержати як завгодно мале додатне значення функціоналу Φ на V.

Розглянемо однопараметричну множину функцій $\{(\varphi_\lambda(x))_{x\in\mathbb{R}} : \lambda > 0\}$, в якій $\varphi_\lambda(x) = -\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(x)$, та відповідну множину допустимих стратегій $\omega_\lambda(t) = \varphi_\lambda(w(t))$. Формула Танака (див., наприклад, [46, с. 83]) дозволяє записати $\int\limits_0^\tau \mathrm{sign}(w(s))\,dw(s) = |w(\tau)| - |w(0)| - \eta(\tau) = -|w(0)|$, де $\eta(t)$ — локальний час в нулі вінерового процесу до моменту часу $t \ge 0$ і враховано, що $w(\tau) = 0$, $\eta(\tau) = 0$ $\mathbb{P}_x$-м.н. для кожного $x \in \mathbb{R}$. Звідси маємо

$$\mathcal{E}_\tau^0(\omega_\lambda) = \exp\left\{-\sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\tau \mathrm{sign}(w(s))\,dw(s) - \lambda\tau\right\} = \exp\left\{\sqrt{2\lambda}|w(0)| - \lambda\tau\right\}.$$

Виберемо деяке $\varepsilon > 0$ та знайдемо таке $\delta > 0$, що для всіх $0 \le t \le \delta$ справджується нерівність $f(t) \le \varepsilon$. Тоді, використовуючи рівність $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}p_x(t)\,dt =$

$e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}$, яку легко перевірити, запишемо

$$\Phi(\omega_\lambda) = \mathbb{E}_x f(\tau)\mathcal{E}^0_\tau(\omega_\lambda) = \mathbb{E}_x f(\tau)\exp\left\{\sqrt{2\lambda}|w(0)| - \lambda\tau\right\} =$$

$$= e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\mathbb{E}_x f(\tau)e^{-\lambda\tau} = e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}p_x(t)\,dt \le$$

$$\le \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int\limits_0^\delta e^{-\lambda t}p_x(t)\,dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\int\limits_\delta^\infty f(t)p_x(t)\,dt \le$$

$$\le \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}p_x(t)\,dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\int\limits_0^\infty f(t)p_x(t)\,dt =$$

$$= \varepsilon + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\mathbb{E}_x f(\tau).$$

Далі той факт, що $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta} = 0$ при кожних $x \in \mathbb{R}$ та $\delta > 0$, означає можливість зробити значення функціоналу Φ як завгодно малим вибором допустимої стратегії ω_λ з достатньо великим значенням $\lambda > 0$, якщо тільки $\mathbb{E}_x f(\tau) < \infty$.

Множину $V_\varepsilon \subset V$, $\varepsilon > 0$ назвемо ε-оптимальною стратегією для задачі мінімізації функціоналу Φ на множині допустимих стратегій V, якщо існує така допустима стратегія $\omega_* \in V_\varepsilon$, що $\Phi(\omega_*) \le \inf\limits_{\omega\in V}\Phi(\omega) + \varepsilon$.

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

Теорема 5.14. *Нехай функція $(f(t))_{t\ge0}$ зі значенням $f(0) = 0$ неперервна та невід'ємна. Нехай існує скінченне $\mathbb{E}_x f(\tau)$, де τ — момент першого досягнення вінеровим процесом $(w(t))_{t\ge0}$ початку координат. Тоді для задачі мінімізації функціоналу Φ, що задається рівністю (5.64), існує ε-оптимальна стратегія. Елементи цієї стратегії утворюють однопараметричну множину (при $\lambda > 0$) і задаються рівностями $\omega_\lambda(t) = -\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(w(t))$, $t > 0$.*

Висновки до розділу 5.

В цьому розділі встановлено деякі нові факти стосовно одновимірних дифузійних процесів, зокрема, вінерового процесу, що є симетричним α-стійким процесом зі значенням параметра $\alpha = 2$.

По перше, доведені теореми про граничні розподіли локальних часів в нулі та кількості перетинів деякого фіксованого рівня послідовністю дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$ з достатньо гладкими функціями $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, друга з яких приймає додатні відділені від нуля значення. Знайдені і самі ці розподіли. Встановлено, що, взагалі кажучи, згадані граничні розподіли відрізняються від розподілів відповідних функціоналів від граничного процесу.

По друге, розглянуті задачі про максимізацію локального часу в нулі та мінімізацію моменту першого потрапляння в нуль вінерового процесу шляхом додаванням переносу. В першому випадку побудовані, так звана, оптимальна статегія, яка виявилась немарківською, та деякі близькі до оптимальної марківські стратегії. В другій задачі побудована локальна (на деякому класі допустимих стратегій) оптимальна стратегія та вказана однопараметрична сім'я стратегій, які надають як завгодно близького до оптимального значення цільовій функції.

Результати розділу 5 опубліковані в [54–58,67] та анонсовані в [69,71–76]. Для їх обгрунтування суттєво використано ідеї та методи з робіт [7, 51–53].

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей симетричних α-стійких випадкових процесів при $1 < \alpha \leq 2$, їх перетворень та застосувань до теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Завданням першого розділу дисертації було закцентувати увагу на відомих результатах досліджень з даної тематики, та описати місце дисертаційної роботи у розв'язанні названих проблем.

Другий розділ дисертації присвячений побудові теорії потенціалу простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими $(1 < \alpha < 2)$ випадковими процесами в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Як і в класичній теорії потенціалу для параболічних рівнянь другого порядку, згадані потенціали використані для побудови фундаментальних розв'язків другої (типу Неймана) та третьої (змішаної) початково-крайових задач, а також для побудови розв'язків деяких інших задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Тут введено поняття потенціалу простого шару, вивчено його властивості та продемонстровано способи застосувань до розв'язання початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу. Оператор за просторовою змінною (позначений в роботі через $\mathbf{A}$) в такому рівнянні є інфінітезимальним оператором симетричного α-стійкого випадкового процесу. В якості носія потенціалу простого шару виступає або гіперплощина, або досить гладка обмежена замкнена поверхня. Центральним місцем розвинутої теорії потенціалу простого шару є терема про стрибок результату дії деякого оператора $\mathbf{B}$ такого, що $\mathbf{A} = c\ \mathbf{divB}$, $c > 0$, (назвемо його тут псевдоградєнтом) в напрямі нормалі до поверхні на потенціал простого шару в точках цієї поверхні.

Значну частину другого розділу займає розгляд другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу, пов'язаного із симетричним α-стійким випадковим процесом. В роботі поширено на випадок псевдодиференціальних рівнянь класичний метод розв'язання згаданих задач, який використовує потенціали простого шару та їх властивості, в першу чершу, теорему про стрибок. Розглянуто загальну третю початково-крайову задачу в багатовимірному просторі і, як часткові випадки, другу та симетричну третю задачу з гіперплощиною чи досить гладкою обмеженою замкненою поверхнею, на якій задається гранична умова. У випадку з гіперплощиною результати поширюються і на одновимірной випадок. З точки зору теорії випадкових процесів фундаментальні розв'язки таких задач будуються з використанням формули Фейнмана-Каца з W-функціоналом типу локального часу на поверхні від симетричного стійкого випадкового процесу, збуренням такого процесу оператором псевдоградієнта з множником типу дельта-функції на поверхні та їх комбінації.

З допомогою випадкової заміни часу в симетричному α-стійкому випадковому процесі побудовано стандартний процес Маркова, який описує поведінку першого в просторі з липучою мембраною. Одержані рівняння для резольвенти такого процесу як на поверхні, так і поза нею.

Третій розділ містить результати побудови та досліджень властивостей адитивних збурень інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу оператором $(a(\cdot), \mathbf{B})$, в якому векторнозначна функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ обмежена, чи інтегровна в деякому степені, чи узагальнена типу дельта-функції на поверхні. Як виявилось, результуюча напівгрупа лінійних обмежених операторів на просторі неперервних обмежених функцій не задає жодного випадкового процесу, оскільки не залишає інваріантним конус невід'ємних функцій. Такі об'єкти прийнято називати псевдопроцесами. Для них можна розглядати поняття пов'язані тільки зі скінченновимірними розподілами (зарядами).

В четвертому розділі досліджено деякі моменти зупинки для одновимірного симетричного α-стійкого випадкового процесу та процеси утворені з нього обривом в ці моменти. Мова йде про моменти першого потрапляння в початок координат та першого виходу з півосі. В граничному випадку $\alpha = 2$ (вінерів процес) ці моменти, як і процеси, однакові і відома їх щільність ймовірності переходу. Ця щільність породжує деякий процес Маркова і в загальному випадку, але він не є стохастично еквівалентним жодному з названих процесів, як і ці процеси виявились різними.

Завершальний (п'ятий) розділ дисертації присвячений деяким задачам для вінерового процесу (чи пов'язаних з ним працесів), що є симетричним α-стійким випадковим процесом порядку $\alpha = 2$. Знайдені граничні розподіли таких функціоналів, як локальний час в нулі та кількість перетинів певного рівня, від послідовності дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $na(nx)$ та коефіцієнтами дифузії $b(nx)$ з деякими функціями a і b. Така послідовність при певних умовах слабко збігається до граничного дифузійного процесу, причому дифузійні коефіцієнти граничного процесу не є границями відповідних коефіцієнтів дограничних процесів. Крім того, не виконується принцип інваріантності. Далі побудовані оптимальні стратегії — коефіцієнти переносу, які максимізують локальний час в нулі та мінімізують час першого попадання в нуль (в певних розуміннях) вінерового процесу з переносом.

Отримані результати дисертації можуть бути використані у теорії випадкових процесів, теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ.

Основні результати дисертації опубліковано у фахових наукових журналах і апробовано у провідних математичних центрах.

Список використаних джерел

[1] *Аль Фарах Х., Портенко М.* Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів/ Х. Аль Фарах, М.І. Портенко// Інститут математики НАН України. -Препринт 2007.6. -С. 1–24.

[2] *Aryasova O.V.* One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution/ O.V. Aryasova, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2005. -V. 11(27), № 3-4. -P. 14-28.

[3] *Aryasova O.V.* One example of a random change of time that transforms a generalized diffusion process into an ordinary one/ O.V. Aryasova, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2007. -V. 13(29), № 3. -P. 12-21.

[4] *Barlow M.T.* Necessary and sufficient conditions for the continuity of local time of levy processes/ M.T. Barlow// Annals of Probability. -1988. -V. 16, № 4. -P. 1389-1427.

[5] *Beghin L.* The distribution of the local time for "pseudoprocesses" and its connection with fractional diffusion equations/ L. Beghin, E. Orsingher// Stochastic Process. Appl. -2005. V. 115. -P. 1017-1040.

[6] *Bertoin J.* Lévy Processes/ J. Bertoin. -Cambridge: University Press, 1998.

[7] *Бігун Г.С.* Дифузії, породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2013. -Т. 5, №2. -С.180-186

[8] *Бігун Г.С.* Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдо-диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, Г.С. Бігун// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2015. №1(29). -С. 123-131.

[9] *Blumenthal R.M.* Markov Processes and Potential Theory/ R.M. Blumenthal, R.K. Getoor. -Academic Press: New York, 1968.

[10] *Blumenthal R.M.* Some theorems on stable processes/ R.M. Blumenthal, d R.K. Getoor// Transactions of the American Mathematical Society. -1960. -V. 93, № 2. -P. 263-273.

[11] *Bochner S.* Lectures on Fourier integrals/ S. Bochner. -Princeton: University Press, 1959.

[12] *Bogdan K.* Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators/ K. Bogdan, T. Jakubowski// Commun. Math. Phys. -2007. V. 271. -P. 179-198.

[13] *Cameron R. H., Martin W. R.* The Wiener's measure of Hilbert neighbourhood in the space of real continuous functions/ R. H. Cameron, W. R. Martin // Journal Mass. Inst. Technology. -1944. -V. 23. -P. 195-209.

[14] *Daletsky Yu.L.* Integration in function spaces/ Yu.L. Daletsky// in: R.V. Gamkrelidze (Ed.), Progress in Mathematics, vol. 4, 1969. -P. 87-132.

[15] *Daletsky Yu.L.* Generalized measures in function spaces/ Yu.L. Daletsky, S.V. Fomin// Theory Probab. Appl. -1965. -V. 10, № 2. -P. 304-316.

[16] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы/ Е.Б. Дынкин. -Москва: Физматгиз, 1963.

[17] *Eidelman S.D.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type/ S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen,

A. N. Kochubei// Operator theory: Adv. and Appl. V. 152, Birkhäuser Basel, 2004.

[18] *Eisenbaum N.* On local times of a symmetric stable process as a doubly indexed process/ N. Eisenbaum// Bernoulli. -2000. -V. 6, № 5. -P. 871-886.

[19] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т./ Г.М. Фихтенгольц. -Москва: Наука, 1966.

[20] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа/ Фридман А. -Москва: Мир, 1968.

[21] *Гихман И.И.* Теория случайных процессов, т. 2/ И.И. Гихман, А.В. Скороход. -Москва: Наука, 1975.

[22] *Harrison J. M.* On skew Brownian motion/ J.M. Harrison, L.A. Shepp// Annals of Probability. -1981. -V. 89. -P. 309-313.

[23] *Ибрагимов И.А., Чернин К.Е.* Об одновершинности устойчивых законов/ И.А. Ибрагимов, К.Е. Чернин// Теория вероятн. и ее примен. -1959. -Т. 4, вып. 4. -С. 453-456.

[24] *N. Jacob* A class of Feller semigroups generated by pseudodifferential operators/ N. Jacob// Mathematische Zeitschrift. -1994. -V. 215. -P. 151-166.

[25] *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes. In 3 vol./ N. Jacob. -London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005.

[26] *Jakubowski T.* Fundamental solution of the fractional diffusion equation with a singular drift/ T. Jakubowski// Journal of Mathematical Sciences. -2016. -V. 218, № 2.

[27] *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators/ T. Kato. -Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[28] *Knopova V.* Parametrix construction of the transition probability density of the solution to an SDE driven by α-stable noise/ V. Knopova, A. Kulik// Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist. -2018. -V. 54. -P. 100-140.

[29] *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы/ А.Н. Кочубей// Изв. АН СССР. Сер. матем. -1988. -Т. 52, № 5. -С. 909-934.

[30] *Komatsu T.* On the martingale problem for generators of stable processes with perturbations/ T. Komatsu// Osaka Journal Math. -1984. -V. 21, № 1. -P. 113-132.

[31] *Kopytko B.I.* On Feller semigroups associated with one-dimensional diffusion processes with membranes/ B.I. Kopytko, R. V. Shevchuk// Theory Stoch. Process. -2016. V. 21(37), № 1. -P. 31-44.

[32] *Kulik A.M.* A limit theorem for the number of sign changes for a sequence of one-dimensional diffusions/ A.M. Kulik// Theory Stoch. Process. -2008. -T. 14(30), № 2. -P. 79-92.

[33] *Кулинич Г.Л.* Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения/ Г.Л. Кулинич // Укр. мат. журн. -1968. -Т. 20, № 3. -С. 396-400.

[34] *Кулинич Г.Л.* Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения/ Г.Л. Кулинич // Теория вероятн. и её примен. -1968. -Т. XIII, № 3. -С. 502-506.

[35] *Kurenok V.P.* A note on L_2-estimates for stable integrals with drift/ V.P. Kurenok// Trans. Amer. Math. Soc. -2008. V. 300, № 2. -P. 925-938.

[36] *Kuznetsov A.* The hitting time of zero for a stable process/ A. Kuznetsov, A.E. Kyprianou, J.C. Pardo, A.R. Watson// Electron. J. Probab. -2014. -V. 19, № 30. -P. 1-26.

[37] *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа/ О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. -Москва: Наука, 1967.

[38] *Letemplier J.* Unimodality of Hitting Times for Stable Processes/ J. Letemplier, T. Simon// in *Séminaire de Probabilités XLVI.* C. Donati-Martin, A. Lejay, A. Rouault eds. Springer International Publishing, Cham. -2014. -P. 345-357.

[39] *Levy P.* Processus stochastiques et mouvement Brownien/ P. Levy. -Paris: Gauthier-Villars, 1965.

[40] *Липцер Р.Ш.* Статистика случайных процессов/ Р.Ш.Липцер, А.Н.Ширяев. -Москва: Наука, 1974.

[41] *Liskevich V.* Extra regularity for parabolic equations with drift terms/ V. Liskevich, S. Zhang Qi// Manuscripta Mathematica. -2004. V. 113, № 2. -P. 191-209.

[42] *Льобус Й.-У.* Про один клас збурень стійкого процесу/ Й.-У. Льобус, М.І. Портенко// Теорія ймовірностей і математична статистика. -1995. №52. -С. 102-111.

[43] *Mandl P.* Analytical treatment of one-dimensional Markov processes/ P. Mandl. -Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. -1968.

[44] *McKean H.P.* Sample functions of stable processes/ H.P. McKean// Annals of Mathematics. -1955. -V. 61, № 3. -P. 564-579.

[45] *Miyamoto M.* An extension of certain quasi-measure/ M. Miyamoto// Proc. Japan Acad. -1966. -V. 42. -P. 70-74.

[46] *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальние уравнения. Введе-ние в теорию и приложения; пер. с англ. / Б.Оксендаль. -Москва: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003.

[47] *Осипчук М.М.* Узагальнений дифузійний процес в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. Зб. наук. пр. АН України. Ін-т математики. -1994. -С. 210-221.

[48] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1995. -Т. 47, №9. -С. 1224-1230.

[49] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом/ М.М. Осипчук// Теорія ймовірностей та математична статистика. -1996. -Т. 54. -С. 122-128.

[50] *Осипчук М.М.* Щільність ймовірності переходу одного класу узагальнених дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1998. -Т. 50, № 10. -С. 1433-1437.

[51] *Осипчук М.М.* Дифузійні процеси та деякі способи їх побудови і застосувань/ М.М. Осипчук// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2008, № 1(1). -С. 31-36

[52] *Осипчук М.М.* Існування дифузійних процесів із заданими локальними характеристиками/ М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2009. -Т. 1, № 1. -С. 79-84.

[53] *Осипчук М.М.* Про граничний розподіл кількості перетинів послідовності рівнів деякою послідовністю дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2009. -Т. 1, № 2. -С. 191-196.

[54] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів довільного рівня послідовністю дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичні студії. -2010. -Т. 33, № 2. -С. 199-211.

[55] *Осипчук М. М.* Граничний розподіл локальних часів в нулі деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичний вісник НТШ. -2011. -Т. 8. -С. 168-185.

[56] *Osypchuk M.M.* An extremum problem for some class of Brownian motions with drifts/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Journal of Mathematical Sciences. -2011. -V. 179, № 1. -P. 164-173.

[57] *Осипчук М. М.* Про одну задачу оптимального управління вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2012. № 1(17). -С. 21-27.

[58] *Osypchuk M.M.* On Ornshtein-Uhlenbeck's measure of a Hilbert ball in the space of continuous functions/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 1. -P. 46-51.

[59] *Osypchuk M.M.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 2. -P. 42-51.

[60] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2015. -V. 7, № 1. -P. 101–107.

[61] *Осипчук М.М.* Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2015. -Т. 67, № 11. -С. 1512-1524.

[62] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems/ M.M. Osypchuk// Theory Stoch. Process. -2016. -V. 21, № 1. -P. 64-72.

[63] *Osypchuk M.M.* On constructing some membranes for a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Communications on Stochastic Analysis. -2017. -V. 11, № 1. -P. 11-20.

[64] *Осипчук М.М.* Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рів-

няння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2017. -Т. 69, № 10. -С. 1406-1421.

[65] *Osypchuk M.M.* On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. -2018. -V. 9, No. 4, -P. 811-835

[66] *Osypchuk M.M.* On some Markov processes related to a symmetric α-stable process / M. M. Osypchuk, M. I. Portenko // Stochastics. -2018. -V. 90, № 7. -P. 972-991.

[67] *Osypchuk M.M.* On the crossings number of a hyperplane by a stable random process/M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2018. -V. 10, № 2, -P. 346-351.

[68] *Osypchuk M.M.* On the distribution of a rotationally invariant α-stable process at the moment when it is hitting a given hyperplane/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. -2018. №12, -P. 14-20.

[69] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів певних рівнів деякою послідовністю одновимірних дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 22-28.03.2010). -Івано-Франківськ:ПрНУ. -2010. -С. 9.

[70] *Осипчук М.М.* Про перетворення Лапласа міри Орнштейна-Уленбека гільбертової кулі/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеук. наук. конф. "Прикладні задачі математики" (Яремчеб 13-15.10.2011). -Івано-Франківськ: ІФНТУНГ. -2011. -С. 82, 83.

[71] *Осипчук М.М.* Про граничний розподіл локальних часів деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-25.02.2011). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2011. -С. 16

[72] *Осипчук М.М.* Граничні теореми для однієї послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (Микуличин, 20-23.09.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 32

[73] *Осипчук М.М.* Оптимальне керування вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 23-26.02.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 23.

[74] *Осипчук М.М.* Дифузії породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 4.

[75] *Осипчук М.М.* Про щільність спільного розподілу значення процесу Маркова і його локального часу/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 26.

[76] *Осипчук М.М.* Породження вінеровим процесом багатовимірних дифузій/ Г.С. Бігун М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 8.

[77] *Осипчук М.М.* Про деякі методи оцінювання розв'язків параболічних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 5.

[78] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solution of pseudo-differential equations / M.M. Osypchuk// Stochastic Processes in

Abstract Spaces Intern. Conf. (Kyiv, 14-16.10.2015). -Kyiv:NTUU. -2015. -P. 42.

[79] *Osypchuk M.M.* On the solution of the Cauchy problem for one class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Intern. V. Skorobohatko mathematical conf. (Drogobych, 25-28.08.2015). -Lviv: LNU. -2015. -P. 121.

[80] *Осипчук М.М.* Фундаментальний розв'язок одного псевдодиференціального рівняння параболічного типу зі сталими коефіцієнтами/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Наук. конф. присв. 100-річчю від дня нар. К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1-4.07.2015). -Чернівці: ЧНУ. -2015. -С. 20, 21.

[81] *Осипчук М.М.* Збурення стійких процесів та псевдодиференціальні рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25.02-01.03.2015). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2015. -С. 52, 53.

[82] *Осипчук М.М.* Симетричний стійкий процес та задача про склеювання/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2016). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2016. -С. 43, 44.

[83] *Osypchuk M., Portenko M.* On some Markov processes related to a symmetric stable process/ M. Osypchuk, M. Portenko// "Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics"international workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin (Kyiv, 10-12.10.2016). -Kyiv: NTUU. -2016. -P. 41, 42.

[84] *Осипчук М.М.* Третя початково-крайова задача для псевдодиференціального рівняння пов'язаного із симетричним стійким випадковим процесом/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22-25.02.2017). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2017. -С. 43, 44.

[85] *Osypchuk M.M.* Jump theorem and its applications/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 17-19.10.2017). -Vinnytsia: DonNU. -2017. -P. 97, 98.

[86] *Osypchuk M.M.* On crossings numbers of a fixed hyperplane by some processes related to the rotationally invariant α-stable random process/M.M. Osypchuk// Intern. conf. Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 24-26.05.2018). -Kyiv: KNU. -2018. -P. 48.

[87] *Osypchuk M.M.* On some initial-boundary value problems for pseudo-differential equations related to a rotationally invariant α-stable stochastic process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 17-22.09.2018). -Kyiv: NTUU. -P. 69, 70.

[88] *Осипчук М.М.* Ймовірнісні представлення розв’язків деяких початково-крайових задач дл одного виду псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу/ М.М. Осипчук// VI Всеукр. наук. конф. імені Б.В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, Микуличин, 26-28.09.2018). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2018. -С. 42, 43.

[89] *Осипчук М.М.* Стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук// Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Мат. міжнар. наук. конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, (Чернівці, 17-19.09.2018). -Чернівці: ЧНУ. -2018. -С. 88.

[90] *Pantí H.* On Lévy processes conditioned to avoid zero /H. Pantí// Preprint: ArXiv e-prints, April 2013. http://adsabs.harvard.edu/abs/2013arXiv1304.3191P

[91] *Podolynny S.I.* On multidimentional stable processes with locally unbounded drift/ S.I. Podolynny, N.I. Portenko// Random Operators and Stochastic Equations. -1995. -V. 3, № 2. -P. 113-124.

[92] *Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д.* Асимптотическое поведение классических и обобщённых решений одномерных параболических уравнений второго порядка/ Ф.О. Порпер, С.Д. Эйдельман// Труды Моск. Матем. общества. -1978. -Т. 36. -С. 85–130.

[93] *Portenko N.I.* Some perturbations of drift-type for symmetric stable processes/ N.I. Portenko// Random Operators and Stochastic Equations. -1994. -V. 2, № 3. -P. 211-224.

[94] *Portenko N.I.* Generalized diffusion processes/ N.I. Portenko//. Translations of Mathematical Monographs, vol. 83, American Mathematical Society, 1990.

[95] *Portenko M.I.* Diffusion Processes in Media with Membranes/ M.I. Portenko. Vol. 10 of Proceedings of the Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences, 1995.

[96] *Portenko N.I.* One class of transformations of a symmetric stable process/ N.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -1997. -V. 3(19), № 3-4. -P. 373-387.

[97] *Portenko N.I.* On some perturbations of symmetric stable processes/ N.I. Portenko// Watanabe, S. (ed.) et al., Probability theory and mathematical statistics. Proceedings of the seventh Japan-Russia symposium, Tokyo, Japan, July 26-30, 1995. Singapore: World Scientific., 1996. -P. 414-422.

[98] *Портенко М.І.* Одна формула для резольвенти одновимірного дифузій-

ного процесу та її застосування до граничних теорем/ М.І. Портенко// Математика сьогодні. -2008. -С. 66-96.

[99] *Портенко М.І.* Про збіжність резольвент деякої послідовності дифузійних процесів/ М.І. Портенко, М.П. Сергієнко// Математика сьогодні. -2009. -С. 1-9.

[100] *Скороход А.В.* Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сум независимых случайных величин/ А.В. Скороход// Укр. мат. журн. -1961. -Т. 13, № 4. -С. 67-78.

[101] *R Core Team.* R: A language and environment for statistical computing/ R Core Team. -Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2018. https://www.R-project.org/

[102] *Rogozin B.A.* On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments/ B.A. Rogozin// Theory Probab. Appl. -1966. -V. 11, № 4. -P. 580-591.

[103] *Sato K.-I.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions/ K.-I. Sato. Vol. 68 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics/ K.-I. Sato. -Cambridge: University Press, 1999.

[104] *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes./ D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan. -Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.

[105] *Tanaka H.* Perturbation of drift-type for Levi processes/ H. Tanaka, M. Tsuchiya, S. Watanabe// Journal Math. Kyoto University. -1974. -V. 14, № 1. -P. 73-92.

[106] *Watanabe S.* On stable processes with boundary conditions/ S. Watanabe// J. Math. Soc. Japan. -1962. -V. 14, № 2. -P. 170-198.

[107] *Yano K.* On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes/ K. Yano, Y. Yano, M. Yor// in Séminaire de Probabilités XLII, C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault, C. Stricker eds. Springer Berlin Heidelberg. -2009. -P. 187-227.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Список праць, де опубліковані основні наукові результати дисертації

[1] *Osypchuk M.M.* On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. -2018. -V. 9, No. 4, -P. 811-835.

[2] *Osypchuk M.M.* On some Markov processes related to a symmetric α-stable process / M. M. Osypchuk, M. I. Portenko // Stochastics. -2018. -V. 90, № 7. -P. 972-991.

[3] *Osypchuk M.M.* On the crossings number of a hyperplane by a stable random process/M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2018. -V. 10, № 2, -P. 346-351.

[4] *Osypchuk M.M.* On the distribution of a rotationally invariant α-stable

process at the moment when it is hitting a given hyperplane/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. -2018. №12, -P. 14-20.

[5] *Осипчук М.М.* Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2017. -Т. 69, № 10. -С. 1406-1421.

[6] *Osypchuk M.M.* On constructing some membranes for a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Communications on Stochastic Analysis. -2017. -V. 11, № 1. -P. 11-20.

[7] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems/ M.M. Osypchuk// Theory Stoch. Process. -2016. -V. 21, № 1. -P. 64-72.

[8] *Осипчук М.М.* Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2015. -Т. 67, № 11. -С. 1512-1524.

[9] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2015. -V. 7, № 1. -P. 101–107.

[10] *Бігун Г.С.* Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдодиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, Г.С. Бігун// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2015. № 1(29). -С. 123-131.

[11] *Osypchuk M.M.* On Ornshtein-Uhlenbeck's measure of a Hilbert ball in the space of continuous functions/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 1. -P. 46-51.

[12] *Osypchuk M.M.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 2. -P. 42-51.

[13] *Бігун Г.С.* Дифузії, породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2013. -Т. 5, № 2. -С. 180-186.

[14] *Осипчук М. М.* Про одну задачу оптимального управління вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2012. № 1(17). -С. 21-27.

[15] *Osypchuk M.M.* An extremum problem for some class of Brownian motions with drifts/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Journal of Mathematical Sciences. -2011. -V. 179, № 1. -P. 164-173.

[16] *Осипчук М. М.* Граничний розподіл локальних часів в нулі деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичний вісник НТШ. -2011. -Т. 8. -С. 168-185.

[17] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів довільного рівня послідовністю дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичні студії. -2010. -Т. 33, № 2. -С. 199-211.

[18] *Осипчук М.М.* Щільність ймовірності переходу одного класу узагальнених дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1998. -Т. 50, № 10. -С. 1433-1437.

[19] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом/ М.М. Осипчук// Теорія ймовірностей та математична статистика. -1996. -Т. 54. -С. 122-128.

[20] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1995. -Т. 47, №9. -С. 1224-1230.

[21] *Осипчук М.М.* Узагальнений дифузійний процес в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. Зб. наук. пр. АН України. Ін-т математики. -1994. -С. 210-221.

Список праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[22] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів певних рівнів деякою послідовністю одновимірних дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-28.03.2010). -Івано-Франківськ:ПрНУ. -2010. -С. 9.

[23] *Осипчук М.М.* Про перетворення Лапласа міри Орнштейна-Уленбека гільбертової кулі/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеук. наук. конф. "Прикладні задачі математики" (Яремче, 13-15.10.2011). -Івано-Франківськ: ІФНТУНГ. -2011. -С. 82, 83.

[24] *Осипчук М.М.* Про граничний розподіл локальних часів деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-25.02.2011). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2011. -с. 16

[25] *Осипчук М.М.* Граничні теореми для однієї послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (Микуличин, 20-23.09.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 32

[26] *Осипчук М.М.* Оптимальне керування вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 23-26.02.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 23.

[27] *Осипчук М.М.* Дифузії породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 4.

[28] *Осипчук М.М.* Про щільність спільного розподілу значення процесу Маркова і його локального часу/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 26.

[29] *Осипчук М.М.* Породження вінеровим процесом багатовимірних дифузій/ Г.С. Бігун М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 8.

[30] *Осипчук М.М.* Про деякі методи оцінювання розв'язків параболічних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 5.

[31] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solution of pseudo-differential equations / M.M. Osypchuk// Stochastic Processes in Abstract Spaces Intern. Conf. (Kyiv, 14-16.10.2015). -Kyiv:NTUU. -2015. -P. 42.

[32] *Osypchuk M.M.* On the solution of the Cauchy problem for one class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Intern. V. Skorobohatko mathematical conf. (Drogobych, 25-28.08.2015). -Lviv: LNU. -2015. -P. 121.

[33] *Осипчук М.М.* Фундаментальний розв'язок одного псевдодиференціального рівняння параболічного типу зі сталими коефіцієнтами/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Наук. конф. присв. 100-річчю від

дня нар. К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1-4.07.2015). -Чернівці: ЧНУ. -2015. -С. 20, 21.

[34] *Осипчук М.М.* Збурення стійких процесів та псевдодиференціальні рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25.02-01.03.2015). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2015. -С. 52, 53.

[35] *Осипчук М.М.* Симетричний стійкий процес та задача про склеювання/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24-27.02.2016). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2016. -С. 43, 44.

[36] *Osypchuk M., Portenko M.* On some Markov processes related to a symmetric stable process/ M. Osypchuk, M. Portenko// "Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics"international workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin (Kyiv, 10-12.10.2016). -Kyiv: NTUU. -2016. -P. 41, 42.

[37] *Осипчук М.М.* Третя початково-крайова задача для псевдодиференціального рівняння пов’язаного із симетричним стійким випадковим процесом/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22-25.02.2017). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2017. -С. 43, 44.

[38] *Osypchuk M.M.* Jump theorem and its applications/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 17-19.10.2017). -Vinnytsia: DonNU. -2017. -P. 97, 98.

[39] *Osypchuk M.M.* On crossings numbers of a fixed hyperplane by some processes related to the rotationally invariant α-stable random process/M.M. Osyp-

chuk// Intern. conf. Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 24-26.05.2018). -Kyiv: KNU. -2018. -P. 48.

[40] *Osypchuk M.M.* On some initial-boundary value problems for pseudo-differential equations related to a rotationally invariant α-stable stochastic process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 17-22.09.2018). -Kyiv: NTUU. -P. 69, 70.

[41] *Осипчук М.М.* Ймовірнісні представлення розв'язків деяких початково-крайових задач дл одного виду псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу/ М.М. Осипчук// VI Всеукр. наук. конф. імені Б.В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, Микуличин, 26-28.09.2018). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2018. С. 42, 43.

[42] *Осипчук М.М.* Стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук// Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Мат. міжнар. наук. конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, (Чернівці, 17-19.09.2018). -Чернівці: ЧНУ. -2018. -С. 88.