ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**ДМИТРИШИН РОМАН ІВАНОВИЧ**

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

# ДЕЯКІ КЛАСИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ І КРАТНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Р. І. Дмитришин

Науковий консультант
**БОДНАР ДМИТРО ІЛЬКОВИЧ**,
доктор фізико-математичних наук,
професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2019

# АНОТАЦІЯ

*Дмитришин Р. І.* Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". — Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота пов'язана із класичними задачами дослідження збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, деякими питаннями відповідності, побудовою алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, а також застосуванням цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних.

Ці задачі відносяться до раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних — одного із основних розділів сучасної аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів. Основоположними в цій тематиці вважаються дослідження В. Я. Скоробогатька 60-х років XX-го століття, які присвячені гіллястим ланцюговим дробам — одним із багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Позаяк в основу побудови раціональних наближень аналітичної функції багатьох змінних покладено принцип відповідності між гіллястим ланцюговим дробом і формальним кратним степеневим рядом, який є її зображенням, то виявилося, що задача побудови гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів, не має однозначного розв'язку. У зв'язку з цим використовуються два підходи: накладання додаткових умов на елементи гіллястого ланцюгового дробу або модифікація структури гіллястого ланцюгового дробу.

У 1976 році Д. І. Боднаром введено до розгляду гіллясті ланцюгові дро-

би з нерівнозначними змінними, які за структурою є аналогами кратних степеневих рядів. З тих пір ці гіллясті ланцюгові дроби стали об'єктом досліджень фахівців з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, зокрема Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, В. Семашка, Т. М. Антонової, О. Е. Баран, М. М. Бубняк.

Другий розділ, перший із основних розділів дисертаційної роботи, присвячено дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці. Встановлено багатовимірне узагальнення класичної ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними із використанням виразу вигляду $q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})$, який суттєво враховує структуру досліджуваних об'єктів.

У підрозділах 2.2 і 2.3 встановлено ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких відповідно мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ і $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$. Усі ці ознаки збіжності є багатовимірними аналогами відповідних класичних результатів О. Перрона, А. Прінгсхайма, Е. Б. Ван Флека, Г. С. Волла і Дж. Ф. Пейдона для неперервних дробів.

Третій розділ присвячений зображенню аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. Розглянуто підхід, у якому формальне розвинення у функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними отримується за умови, що розвинення Лорана кожного його $n$-го підхідного дробу збігається із заданим формальним кратним рядом Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно, і $\nu_n$ прямує до нескінченності із ростом $n$. Функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, визначені у такий спосіб, названо відповідними до заданого формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$. У результаті досліджень описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (під функцією

багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат) розуміємо таку функцію багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$). Особливим випадком $R_n(\mathbf{z})$ може бути підхідний дріб функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними.

У підрозділі 3.2 проведено класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів, при цьому означено багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними, багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними, багатовимірний $\pi$-дріб з нерівнозначними змінними, багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними і багатовимірний $J$-дріб з нерівнозначними змінними.

У підрозділах 3.3–3.5 досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними і для їх особливого випадку — багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, а також для тісно пов'язаних між собою багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними.

Четвертий розділ присвячено методам побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Розглянуто підхід, у якому алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними отримано із використанням відповідних класичних алгоритмів. У результаті досліджень побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними і багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними, а також побудовано багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера і багатовимірний $g$-алгоритм Бауера. Для кожного алгоритму встановлено необхідні і достатні умови його існування. Крім цього, вста-

новлено необхідні і достатні умови існування багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду. У кожному із побудованих алгоритмів знайдено явні формули обчислення коефіцієнтів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними за коефіцієнтами заданих формальних кратних степеневих рядів.

П'ятий розділ присвячено дослідженню збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Розглянуто підходи, у яких для встановлення ознак збіжності використовується теорема про продовження збіжності із уже відомої малої області до більшої. Крім цього, розглянуто підхід, у якому для знаходження оцінок похибок наближень для функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними використовується парна частина іншого функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними.

У результаті досліджень в підрозділах 5.1 і 5.2 встановлено ознаки збіжності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними. Зокрема, доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових є областю збіжності багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей — областю збіжності оберненого до нього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними. Як наслідок із цих результатів встановлено ознаки збіжності для $S$-дробів. Крім цього, отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

У підрозділі 5.3 показано, що багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними. На основі цього доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обме-

жених областях із $\mathbb{C}^N$.

У підрозділі 5.4 доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними, а також доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$ і їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$, які є внутрішностями цих підмножин. Крім цього, доведено, що умовою збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Шостий розділ присвячено наближенню аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. У результаті досліджень побудовано розвинення деяких аналітичних функцій багатьох змінних, зображених формальними кратним степеневими рядами, у багатовимірні регулярні $C$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні $S$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні $g$-дроби з нерівнозначними змінними і багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними. Зокрема, побудовано зображення експоненціальної і степеневої функцій багатьох змінних багатовимірними регулярними $C$-дробами з нерівнозначними змінними. На числових прикладах показано ефективність побудованих наближень.

*Ключові слова:* гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, формальні кратні ряди Лорана, формальні кратні степеневі ряди, збіжність, абсолютна збіжність, рівномірна збіжність, відповідність, алгоритми побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, відповідних до формальних кратних степеневих рядів, оцінки похибок наближень, наближення аналітичних функцій багатьох

змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

*Dmytryshyn R. I.* Some classes of functional branched continued fractions with independent variables and multiple power series. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Public Higher Education Institution "Vasyl Stefanyk Precarpathian National University". — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is related to the classical problems of investigation of the convergence of certain classes of functional branched continued fractions with independent variables, to some questions of correspondence, to construction of algorithms for the expansion of given formal multiple power series into the functional branched continued fractions with independent variables, and to application of these branched continued fractions with independent variables to the approximation of some analytic multivariable functions.

These problems are related to rational approximations of analytic multivariable functions which is one of the main directions of the modern analytical theory of continued and branched continued fractions. V. Ya. Skorobogatko's researches of the 1960s, devoted to branched continued fractions, which are one of the multidimensional generalizations of continued fractions, are considered basic on this topic. Since the basis of constructing rational approximations of the analytic multivariable function is the principle of correspondence between a branched continued fraction and a formal multiple power series that is its representation, it was found that the problem of constructing branched continued fractions corresponding to given formal multiple power series has no clear solution. In this connection, two approaches are used: to overlay additional conditions on the elements of branched continued fraction or to variate constructions of the branched continued fraction.

In 1976 D. I. Bodnar introduced branched continued fractions with inde-

pendent variables, which by their structure, are the analogues of multiple power series. Since that time, these branched continued fractions with independent variables are a subject of research of the leading experts in the analytical theory of continued and branched continued fractions, in particular, D. I. Bodnar, Ch. Yo. Kuchminska, V. Semashko, T. M. Antonova, O. E. Baran, M. M. Bubnjak.

The second section, the first of the main sections of the thesis, is devoted to investigation of the convergence of branched continued fractions with independent variables, whose partial denominators are equal to units. The multidimensional generalization of the classical Worpitzky's criterion of convergence for a branched continued fractions with independent variables is established by the expression of the form $q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})$, which essentially takes into account the structure of the subject under investigation.

In subsections 2.2 and 2.3, an effective criterions of convergence are established for branched continued fractions with independent variables whose partial quotients are of the form $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ and $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, respectively. All these criterions of convergence are multidimensional analogs of the corresponding classical results of O. Perron, A. Pringsheim, E. B. Van Vleck, H. S. Wall and J. F. Paydon for continued fractions.

The third section is devoted to the representation of analytic multivariable functions by functional branched continued fractions with independent variables. We considered an approach in which formal expansion into a functional branched continued fraction with independent variables is obtained providing that Laurent's expansion of each its $n$-th approximant and given formal multiple Laurent series $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ agree for all homogeneous terms up to and including degree agree $(\nu_n - 1)$ and $\nu_n$ tends to infinity with growth $n$. Functional branched continued fractions with independent variables defined in this way are called corresponding to formal multiple Laurent series $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$. As a result of the research, we describe the general theory of correspondence for the sequences of multivariable functions $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ meromorphic at $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (a multivariable

function $R(\mathbf{z})$ meromorphic at $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (i. e., in an open polydisk containing the origin) we mean a multivariable function for which there exists a multiindex $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ such that $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ is a holomorphic at $\mathbf{z} = \mathbf{0}$). A special case of $R_n(\mathbf{z})$ may be an approximant of a functional branched continued fraction with independent variables.

In subsection 3.2, a classification of functional branched continued fractions with independent variables, which are multidimensional generalizations of the corresponding classes of functional continued fractions, is carried out. In this case, multidimensional $S$-fraction with independent variables, multidimensional $g$-fraction with independent variables, multidimensional $\pi$-fractions with independent variables, multidimensional associated fraction with independent variables and multidimensional $J$-fraction with independent variables are defined.

In subsections 3.3–3.5, the correspondence properties are investigated for the multidimensional regular $C$-fractions with independent variables and for their special case of multidimensional $g$-fractions with independent variables, as well as for closely connected multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional $J$-fractions with independent variables.

The fourth section is devoted to the methods of constructing of functional branched continued fractions with independent variables. An approach is considered in which algorithms for the expansion of given formal multiple power series into functional branched continued fractions with independent variables are obtained by the corresponding classical algorithms. As a result of the research, algorithms for the expansion of given formal multiple power series into a multidimensional regular $C$-fraction with independent variables and a multidimensional associated fraction with independent variables have been constructed. And also a multidimensional Rutishauser $qd$-algorithm and a multidimensional Bauer $g$-algorithm are constructed. For each algorithm the necessary and sufficient conditions for its existence are established. In addition, the necessary and sufficient conditions for the existence of a multidimensional $S$-fraction with independent variables corresponding to given formal multiple

power series are established. In each of the constructed algorithms, explicit formulas for calculating the coefficients of functional branched continued fractions with independent variables by the coefficients of given formal multiple power series are found.

The fifth section is devoted to investigation of the convergence of functional branched continued fractions with independent variables. For establishing the convergence criteria, we consider the approaches which using the convergence continuation theorem to extend the convergence, already known for a small domain, to a larger domain. In addition, an approach is considered in which the even part of other functional branched continued fraction with independent variables is used to find the truncation error bounds for the functional branched continued fraction with independent variables.

As a result of studies in sections 5.1 and 5.2, there are established criterions of convergence for multidimensional regular $C$-fractions with independent variables and multidimensional $S$-fractions with independent variables. In particular, it is proved that the union of the intersections of the parabolic and circular domains is the domain of convergence of the multidimensional $S$-fractions with independent variables, and the union of parabolic domains is the domain of convergence of the branched continued fractions with independent variables, reciprocal to it. As a consequence of these results, there are criterions of convergence for $S$-fractions. In addition, the truncation error bounds for the multidimensional $S$-fractions with independent variables are obtained in some constrained domains of $\mathbb{C}^N$.

It is shown in subsection 5.3 that a multidimensional $g$-fraction with independent variables is an even part of multidimensional $\pi$-fraction with independent variables. On the basis of this, it is proved that the union of parabolic domains is a domain of convergence of a multidimensional $g$-fraction with independent variables and its various modifications, and the truncation error bounds for these branched continued fractions with independent variables are obtained in some constrained domains of $\mathbb{C}^N$.

It was proved in subsection 5.4 that the circular and angular domains are domains of convergence of multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional $J$-fractions with independent variables. Also, the convergence of sequences of even and odd approximants of these branched continued fractions with independent variables are proved in some subsets of $\mathbb{C}^N$ and their uniform convergence are proved on compact subsets of domains of $\mathbb{C}^N$, which are the interiors of these subsets. In addition, it is proved that the divergent of the series composed of the coefficients of elements of multidimensional associated fractions with independent variables and multidimensional $J$-fractions with independent variables are a condition of convergence for these branched continued fractions with independent variables in some subsets of $\mathbb{C}^N$.

The sixth section is devoted to the approximation of analytic multivariable functions by functional branched continued fractions with independent variables. As a result of research, the expansions of some analytic multivariable functions, represented by formal multiple power series, into multidimensional regular $C$-fractions with independent variables, multidimensional $S$-fractions with independent variables, multidimensional $g$-fractions with independent variables and multidimensional associated fractions with independent variables are constructed. In particular, the represents of the exponential and power multivariable functions by multivariate regular $C$-fractions with independent variables are constructed. The numerical examples show the efficiency of constructed approximations.

*Key words:* branched continued fractions with independent variables, classes of functional branched continued fractions with independent variables, formal multiple Laurent series, formal multiple power series, convergence, absolutely convergence, uniform convergence, correspondence, algorithms of constructing functional branched continued fractions with independent variables that correspond to formal multiple power series, truncation error bounds, approximation of analytic multivariable functions by functional branched continued fractions with independent variables.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ


1. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 4. — С. 31–36.
2. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Mat. Stud. — 2001. — Vol. 15, No. 2. — P. 115–126.
3. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 164–165. — P. 265–284.
4. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 121–127.
5. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.
6. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. Львівського ун-ту, Сер. “Мех.-мат.”. — 2008. — Вип. 68. — С. 28–36.
7. Дмитришин Р. І. Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту, Сер. “Матем.”. — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.
8. Dmytryshyn R. I. The multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Carpathian Math. Publ. — 2009. — Vol. 1, № 2. — P. 145–151.
9. Дмитришин Р. І. Про розвинення деяких функцій у двовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 28–34. (Те саме: Dmytryshyn R. I. On the expansion of some functions in a two-dimensional $g$-fraction with independent variables // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 181, № 3. — P. 320–327.)

10. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Матем. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 69–77.
11. Дмитришин Р. І. Багатовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Карпатські матем. публ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 247–260.
12. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. — 2012. — Vol. 164, Iss. 12. — P. 1520–1539.
13. Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $qd$-алгоритму Рутисхаузера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 6–11. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Two-dimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 301–309.)
14. Дмитришин Р. І. Регулярний двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для подвійного степеневого ряду // Буковинський мат. журн. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 55–57.
15. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1175–1184. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1312–1323.)
16. Dmytryshyn R. I. A multidimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 230–238.
17. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2017. — Т. 5, № 3–4. — С. 71–76.
18. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. — 2017. — Vol. 47, No. 2. — P. 150–159.
19. Dmytryshyn R. I. On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2017.

— Vol. 9, № 2. — P. 120–127.

20. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2018. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–59.
21. Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $S$-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 58–64.
22. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional regular $C$-fractions with independent variables // Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. — 2018. — Vol. 26. — P. 18–24.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Междунар. конф. “VIII Белорусская математическая конференция” (Минск, Беларусь, 19–24 июня 2000 г.): тезисы докл. — В 2 ч.: ч. 1. — Минск, 2000. — С. 4.
2. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Дослідження збіжності різних типів гіллястих ланцюгових дробів // Конф. “Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці” (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.): тези доп. — Київ, 2001. — С. 7–8.
3. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence speed of multidimensional $g$-fraction in the some domain of the space $\mathbb{C}^N$ // International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, Belgium, 22–26 July, 2002): Abstracts of talks ICCAM-2002. — Leuven, 2002. — P. 35.
4. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions // Міжнар. школа-семінар “Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування”, присвячена 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоро-

богатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.): тези доп. — Ужгород, 2002. — С. 15–16.

5. Дмитришин Р. І. Про область збіжності багатовимірного $J$-дробу // III всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С. 32.
6. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // X міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ “Задруга”, 2004. — С. 368.
7. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables for double power series // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2005 (Rhodes, Greek, 16–20 September 2005): Proc. of ICNAAM 2005. — Weinheim: Wiley-VCH, 2005. — P. 156–159.
8. Дмитришин Р. І. Про ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. — С. 186–187.
9. Dmytryshyn R. I. One example of the two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables expansion for the double power series // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.): тези доп. — Львів, 2007. — С. 92.
10. Дмитришин Р. І. Про одиничну полікругову область збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Дванадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ “Задруга”, 2008. — С. 604.
11. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables // Тринадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня

2010 р.): матеріали конф. — В 2 т.: т. 2. — Київ: НТУУ “КПІ”, 2010. — С. 14.

12. Дмитришин Р. І. Про багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. з комплексного аналізу пам’яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.): тези доп. — Львів, 2010. — С. 91–92.
13. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.): тези доп. — Львів, 2011. — С. 65.
14. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with independent variables // Міжнар. конф. “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам’янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2012. — С. 121–122.
15. Дмитришин Р. І. Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними для ФПСР // Міжнар. матем. конф. “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2013. — С. 233.
16. Дмитришин Р. І. Двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для формального подвійного степеневого ряду // Міжнар. наук. конф. “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.): тези доп. — Дніпропетровськ, 2015. — С. 35.
17. Дмитришин Р. І. Про відповідність регулярного багатовимірного $C$-дробу з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. “Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 76–77.

18. Дмитришин Р. І. Про приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези доп. — Слов'янськ: ДДПУ, 2017. — С. 56.
19. Дмитришин Р. І. Про збіжність регулярних багатовимірних $C$-дробів з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 52–54.
20. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях", присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): матеріали конф. — Чернівці, 2018. — С. 166–167.
21. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Послідовність мероморфних функцій багатьох змінних відповідна до формального кратного ряду Лорана // VI всеукр. наук. конф. імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 9–11.
22. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність деяких класів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наук. праць у 3-х т. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. — Т. 1. — С. 25-27. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 26.12.2018).

# ЗМІСТ

ВСТУП . . . . . 21
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ І НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕНЬ В АНАЛІТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ І ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ . . . . . 32
1.1. Основні поняття і властивості неперервних дробів . . . . . 32
1.2. Відповідні неперервні дроби та алгоритми їх побудови . . . . . 37
1.3. Збіжність неперервних дробів . . . . . 49
1.4. Зображення деяких аналітичних функцій неперервними дробами . 57
1.5. Узагальнення неперервних дробів — гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними . . . . . 62
1.6. Напрямки досліджень гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними . . . . . 68
РОЗДІЛ 2. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ, ЧАСТИННІ ЗНАМЕННИКИ ЯКИХ ДОРІВНЮЮТЬ ОДИНИЦІ . . . . . 79
2.1. Багатовимірне узагальнення теореми Ворпіцького . . . . . 79
2.2. Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ . . . . . 87
2.3. Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ . 101
РОЗДІЛ 3. ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ . . . . . 110
3.1. Відповідність . . . . . 110
3.2. Класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними . . . . . 117
3.3. Відповідність багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними . . . . . 119

3.4. Відповідність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними 123
3.5. Відповідність багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними 126
РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ . . . 132
4.1. Побудова багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними . . . 132
4.2. Багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера . . . 144
4.3. Багатовимірний $g$-алгоритм Бауера . . . 160
4.4. Побудова багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними . . . 182
РОЗДІЛ 5. ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ . . . 202
5.1. Області збіжності багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними . . . 202
5.2. Збіжність багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними . . 212
5.3. Збіжність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними . . 232
5.4. Області і множини збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними . . . 252
РОЗДІЛ 6. НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ . . . 287
6.1. Експоненціальна функція . . . 287
6.2. Натуральний логарифм . . . 290
6.3. Степенева функція або загальна біноміальна функція . . . 294
6.4. Функція тангенс . . . 297
6.5. Функція арктангенс . . . 298
6.6. Гіпергеометрична функція . . . 301

ВИСНОВКИ . . . . . 304
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . . 307
ДОДАТКИ . . . . . 332

# ВСТУП

**Актуальність теми.** В аналітичній теорії неперервних дробів одним із найрозвинутіших є напрям, пов'язаний із наближенням аналітичних функцій однієї змінної неперервними дробами. Дослідження у цьому напрямку постійно проводяться протягом останніх двох століть і тісно пов'язані із іншими важливими теоріями, зокрема, апроксимацій Паде, ортогональних поліномів, діофантових рівнянь, диференціальних рівнянь. Перші результати щодо зображення аналітичних функцій однієї змінної неперервними дробами отримані Йо. Х. Ламбертом, Ж. Лагранжем, Л. Ойлером і К. Ф. Гаусом. Потім ці дослідження продовжувалися і розвивалися в роботах Ч. Гуттона, М. А. Штерна, Йо. Б. Х. Хейлерманна, Х. Ханкеля, Т. Мура, Ґ. Фробеніуса, Т. Йо. Стільтьєса, О. Перрона, Г. С. Волла, В. Б. Джоунса, В. Йо. Трона та ін.

Побудова раціональних наближень ґрунтується на принципі відповідності між підхідними дробами неперервного дробу і формальним рядом Лорана, яким зображується задана аналітична функція однієї змінної. Хоча основні ідеї відповідності належать К. Ф. Гаусу, загальна теорія описана в роботах В. Б. Джоунса і В. Йо. Трона.

У 60-х роках XX століття для побудови раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних В. Я. Скоробогатько запропонував багатовимірне узагальнення неперервних дробів — гіллясті ланцюгові дроби. Позаяк задача побудови гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів, не має однозначного розв'язку, то використовуються два підходи: накладання додаткових умов на елементи гіллястого ланцюгового дробу або модифікація структури гіллястого ланцюгового дробу. Реалізація другого підходу сприяла появі різних конструкцій так званих "двовимірних неперервних дробів", які стали об'єктами досліджень в роботах Х. Й. Кучмінської, М. О'Доногое, Дж. Мерфі, Б. Вердонк, А. Кайт, В. Семашка, О. М. Сусь, Т. М. Антонової та ін. Проте конструкції цих гіллястих ланцюгових дробів із збільшенням числа змінних

значно ускладнені.

У 1976 році Д. І. Боднаром уведено до розгляду гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, які за структурою є аналогами кратних степеневих рядів. Першим результатом їх дослідження є необхідні і достатні умови збіжності (двовимірний аналог ознаки збіжності Зайделя – Штерна) для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними із додатними елементами. Потім ці дослідження продовжувалися і розвивалися в роботах Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, В. Семашка, Т. М. Антонової, О. Є. Баран, М. М. Бубняк та ін.

У роботах Д. І. Боднара і О. Є. Баран побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Застосування гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до задач інтерполяції функцій двох змінних розглянуто у роботах Х. Й. Кучмінської, а у загальному випадку — О. Є. Баран.

Незважаючи на значні досягнення у напрямі наближення аналітичних функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами, ця тематика залишається однією із найважливіших в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів і такою, що має ще дуже багато відкритих задач, особливо щодо випадку трьох і більше змінних.

Однією з центральних задач є встановлення ознак збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. На даний час існує досить багато теорем, які містять лише достатні умови або дуже громіздкі умови, що ускладнює їх застосування. Тому пошук ефективних ознак збіжності складає великий науковий інтерес.

Особливої уваги потребує опис загальної теорії відповідності, а разом із ним і задачі класифікації функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та дослідження їх властивостей відповідності.

Добре відомо, що у порівнянні із степеневими рядами, функціональні неперервні дроби можуть мати ширші області збіжності й кращу швидкість

збіжності. Ці властивості притаманні також і функціональним гіллястим ланцюговим дробам з нерівнозначними змінними. Тому встановлення найширших областей збіжності і знаходження оцінок похибок наближень для функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є важливою науковою задачею.

З огляду на малу кількість робіт щодо застосувань гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, побудова ефективних алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними із явними формулами обчислення коефіцієнтів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними за коефіцієнтами заданих формальних кратних степеневих рядів і, як наслідок, побудова зображень аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії, функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними викликають безумовний науковий інтерес.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження виконувались у рамках науково-дослідних держбюджетних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) і "Проблеми нелінійного аналізу щодо продовження відображень, які належать до різних функціональних класів на топологічних і топологічних векторних просторах" (номер державної реєстрації 0118U000097) кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

**Мета і задачі дослідження.** Метою дослідження є означення деяких класів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, встановлення умов їх збіжності та оцінок похибок наближень для них, побудова алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними та застосування цих гіллястих ланцюгових дробів

з нерівнозначними змінними до наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних.

*Об'єктом дослідження* є функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

*Предметом дослідження* є властивості та ознаки збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, відповідність між ними і формальними кратними степеневими рядами, алгоритми побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та наближення ними аналітичних функцій багатьох змінних.

*Задачі дослідження*:

— встановити багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— встановити ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$;

— описати загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для кожного $n \geq 0$;

— провести класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— дослідити властивості відповідності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівно-

значними змінними;

— побудувати і дослідити багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера розвинення формального заданого кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними;

— встановити необхідні і достатні умови існування багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду;

— побудувати і дослідити багатовимірний $g$-алгоритм Бауера розвинення формального заданого кратного степеневого ряду у багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінним;

— дослідити збіжність багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними;

— отримати оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудувати і дослідити наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

**Методи дослідження.** У роботі використано методи математичного і комплексного аналізу, а також аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

— встановлено нове багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Вор-

піцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— встановлено нові ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$;

— описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ для кожного $n\geq 0$;

— проведено класифікацію функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів;

— досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними;

— побудовано новий алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— побудовано багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— встановлено нові необхідні і достатні умови існування багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду;

— побудовано багатовимірний $g$-алгоритм Бауера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний $g$-дріб з нерів-

нозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— побудовано алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму;

— доведено, що перетин параболічної і кругової областей є областю збіжності багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними, а параболічна область — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними;

— доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових областей є областю збіжності багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, і, як наслідки із цих результатів, отримано дві нові ознаки збіжності для $S$-дробів;

— отримано нові оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$;

— показано, що багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними;

— доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$;

— доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними;

— доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними у деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$ і їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$,

які є внутрішностями цих підмножин, а також доведено, що умовою збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними;

— побудовано наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними і показано ефективність цих наближень.

**Практичне значення отриманих результатів.** Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати можуть застосовуватися в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, а також можуть бути корисними для побудови і дослідження раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано автором самостійно. У статтях [26, 30, 91] Д. І. Боднару належать постановки задач та аналіз отриманих результатів. У спільній з О. С. Боднар праці [93] автору належать теореми 2–5 та наслідки 1 і 2.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

— Міжнародній конференції “VIII Білоруська математична конференція” (Мінськ, Білорусь, 19–24 червня 2000 р.);

— Конференції “Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці” (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.);

— Міжнародному конгресі з обчислювальної і прикладної математики (Левен, Бельгія, 22–26 липня, 2002 р.);

— Міжнародній школі-семінарі “Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування”, присвяченої 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоро-

богатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.);

— III всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.);

— X міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.);

— Міжнародній конференції з чисельного аналізу і прикладної математики 2005 (Родос, Греція, 16–20 вересня 2005 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.);

— Дванадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.);

— Тринадцятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.);

— Міжнародній конференції з комплексного аналізу пам’яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.);

— Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам’янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.);

— Міжнародній математичній конференції “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.);

— Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.);

— Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.);

— Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвяченій 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.);

— VI всеукраїнській науковій конференції імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.);

а також на:

— науковому семінарі з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2000-2018 рр., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д.ф.-м.н., с.н.с. Х. Й. Кучмінська);

— науково-навчальному семінарі “Теорія потенціалу та її застосування” у Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків,

д.ф.-м.н., проф. І. Е. Чижиков);

— науковому семінарі “Сучасний аналіз” у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 29 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук, д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко);

— науковому семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (Київ, 21 лютого 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Г. М. Торбін);

— науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 2 березня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. С. Романюк);

— науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (Івано-Франківськ, 5 вересня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк).

**Публікації.** Результати дисертації опубліковано у 44 друкованих працях, серед яких: 22 статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [26, 30, 42, 45, 47–49, 53, 55, 56, 58, 64, 65, 91, 93, 101, 102, 104, 106, 110–112], решта у матеріалах міжнародних наукових конференцій [27, 28, 31, 32, 46, 50–52, 54, 57, 59–63, 92, 103, 105, 107–109, 113]; 8 статей опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [45, 49, 64, 93, 102, 104, 110, 112].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 340 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 25 сторінок і містить 226 найменувань. Додатки займають 9 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

*Висловлюю щиру подяку моєму Вчителю Дмитру Ільковичу БОДНАРУ.*

# РОЗДІЛ 1

# ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ І НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕНЬ В АНАЛІТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ І ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У цьому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал про неперервні дроби та одне з їх багатовимірних узагальнень — гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними. Для деяких класів відповідних функціональних неперервних дробів розглянуто алгоритми їх побудови, ознаки збіжності та зображення ними деяких аналітичних функцій, заданих формальними степеневими рядами. Зроблено огляд результатів досліджень гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Усі поняття і твердження, які не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідного посилання на джерело.

## 1.1. Основні поняття і властивості неперервних дробів

Нехай $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, а символи $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ означають відповідно множини

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Нехай $\langle \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \rangle$ — впорядкована пара послідовностей комплексних чисел таких, що $a_k \neq 0$, $k \geq 1$, $\{s_k(w)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ і $\{S_k(w)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовності дробово-лінійних відображень

$$s_0(w) = b_0 + w,\ s_k(w) = \frac{a_k}{b_k + w},\ k \geq 1,$$

$$S_0(w) = s_0(w),\ S_k(w) = S_{k-1}(s_k(w)),\ k \geq 1,$$

і нехай $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність із розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}}$, визначена так:

$$f_k = S_k(0),\ k \geq 0.$$

Упорядковану пару $\langle\langle\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle,\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ [134, с. 474] (див. також [125, с. 10–11], [149, с. 17–18], [166, с. 5–6]) називають неперервним дробом і позначають символом (вперше, мабуть, запроваджений в 1743 році Е. Стоуном [211, с. 432–436])

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}. \tag{1.1}$$

Числа $a_k$ і $b_k$ називають відповідно $k$-ми частинними чисельниками і знаменниками неперервного дробу або його елементами, відношення $a_k/b_k$ — $k$-ю частинною ланкою, число $b_0$ — вільним членом. Величину

$$f_k=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots+\cfrac{a_k}{b_k}}},\ k\geq 1, \tag{1.2}$$

називають $k$-им підхідним дробом, при цьому $f_0=b_0$ — 0-им підхідним дробом.

Зауважимо, що по суті, як зазначено в книзі А. Кайт та ін. [125, с. 10], неперервний дріб — це відображення впорядкованої пари послідовностей $\langle\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ у послідовність $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Для зручності неперервний дріб $\langle\langle\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle,\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ позначатимемо символами

$$b_0+\frac{a_1}{b_1}\underset{+}{+}\frac{a_2}{b_2}\underset{+}{+}\frac{a_3}{b_3}\underset{+}{+}\dots \text{ або } b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}$$

(перший символ запропонований в 1820 році Дж. Ф. В. Гершелем [142, с. 148] “за прикладом” Г. Г. Бюрманна, другий — у 1888 році І. В. Слешинським [74]), а його $k$-ий підхідний дріб — відповідно через

$$f_k=b_0+\frac{a_1}{b_1}\underset{+}{+}\frac{a_2}{b_2}\underset{+}{+}\dots\underset{+}{+}\frac{a_k}{b_k} \text{ або } f_k=b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{k}\frac{a_n}{b_n}.$$

В аналітичній теорії неперервних дробів також розглядаються неперервні дроби, у яких обмеження відмінності від нуля частинних чисельників знімається. У зв’язку з цим вважатимемо, що підхідний дріб (1.2) не

має змісту [223, с. 14], якщо при його згортанні знизу-вверх без будь-яких скорочень у проміжних операціях отримаємо невизначеність 0/0.

Неперервний дріб (1.1) збігається [223, с. 16] (див. також перші роботи щодо визначення цього поняття [200, 201], [204, с. 274–276], [205, § 53], [206], [207], [210, с. 277–278]), якщо не більше, ніж скінченна кількість його підхідних дробів не має змісту, і послідовність його підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до скінченної границі $f$, тобто

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k},\ f \in \mathbb{C}.$$

У цьому випадку $f$ називають значенням неперервного дробу (1.1). Інакше неперервний дріб (1.1) розбігається.

Відомо (див. [204, с. 307, 482], [210, с. 280]), що на відміну від збіжного ряду чи збіжного добутку збіжність неперервного дробу (1.1) не завжди пов'язана зі збіжністю його залишків, тобто неперервних дробів вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \tag{1.3}$$

для $n \geq 2$.

Неперервний дріб (1.1) збігається безумовно [186], якщо для кожного $n \geq 1$ неперервний дріб (1.3) збігається; з іншої сторони, збігається умовно, якщо для $n = 1$ неперервний дріб (1.3) збігається і принаймні для одного $n \geq 2$ — розбігається.

Неперервний дріб (1.1) збігається абсолютно [159], якщо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$$

збігається.

Два неперервні дроби (1.1) і

$$d_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{d_k}, \tag{1.4}$$

де $d_{k-1} \in \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, із послідовностями підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ і $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ відповідно називають еквівалентними [200] (див. також [173, 174, 205]), якщо ці послідовності збігаються почленно, тобто $f_n = g_n$ для $n \geq 0$. У цьому випадку писатимемо

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \equiv d_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{d_k} \tag{1.5}$$

(див. [125, с. 15], [182, с. 5]).

Властивість еквівалентності (1.5) виконується тоді і лише тоді, коли існують ненульові сталі $\rho_k$, $k \geq 1$, такі, що

$$d_0 = b_0,\ c_1 = \rho_1 a_1,\ c_{k+1} = \rho_k \rho_{k+1} a_{k+1},\ d_k = \rho_k b_k,\ k \geq 1. \tag{1.6}$$

Перетворення неперервного дробу (1.1) в (1.2), означене співвідношеннями (1.6) при деяких $\rho_k$, $k \geq 1$, називають еквівалентним перетворенням [200] (див. також [125, с. 15–16], [149, с. 31–36], [182, § 2], [183, § 42], [223, с. 19–20]).

Неперервний дріб (1.4) називають парною (непарною) частиною [223, с. 20–21] неперервного дробу (1.1), якщо $g_n = f_{2n}$ ($g_n = f_{2n+1}$) для $n \geq 0$.

Парна частина неперервного дробу (1.1) існує тоді і лише тоді, коли $b_{2k} \neq 0$, $k \geq 1$. Непарна частина неперервного дробу (1.1) існує тоді і лише тоді, коли $b_{2k+1} \neq 0$, $k \geq 0$ [200] (див. також [149, с. 41–43], [182, § 4]), [183, § 43].

Зауважимо, що деякі особливі випадки зв'язку між послідовностями підхідних дробів двох неперервних дробів розглядалися Ж. Лагранжем [156, 157].

Можна розглядати неперервний дріб, елементи якого належать нормованому полю. З цією метою наведемо необхідні означення, дотримуючись тексту з книги В. Б. Джоунса і В. Йо. Трона [149, с. 20–22] (див. також [125, с. 27], [167, с. 242–244]).

Нехай $\mathbb{F}$ — деяке поле. Приєднаємо до $\mathbb{F}$ додатковий елемент, який називають нескінченністю, і позначимо його символом $\infty$. Через $\widehat{\mathbb{F}}$ позначимо розширене поле поля $\mathbb{F}$, тобто $\widehat{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Нехай 0 — нейтральний

елемент для додавання в $\mathbb{F}$. Операції додавання $(+)$ і множення $(\cdot)$ в $\widehat{\mathbb{F}}$ із участю $\infty$ визначимо у такий спосіб: для всіх $u \in \mathbb{F}$ і $v \in \mathbb{F}$ із $u \neq 0$

$$u \cdot \infty = \infty,\ \frac{u}{\infty} = 0,\ \frac{u}{0} = \infty,\ v + \infty = \infty.$$

Поле $\mathbb{F}$ називають нормованим, якщо для кожного $u \in \mathbb{F}$ визначене дійсне число, яке позначене через $\|u\|$, що має такі властивості: для всіх $u \in \mathbb{F}$ і $v \in \mathbb{F}$

$$\|u\| \geq 0, \tag{1.7}$$

$$\|u\| = 0 \text{ тоді і лише тоді, коли } u = 0, \tag{1.8}$$

$$\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \tag{1.9}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{1.10}$$

Число $\|u\|$ називають нормою $u$. Якщо $z \in \mathbb{C}$, то $\|z\| = |z|$.

Послідовність $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ із $\widehat{\mathbb{F}}$ збігається до $u \in \mathbb{F}$, якщо для досить великих $n$ $u_n \in \mathbb{F}$ і

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Послідовність $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ із $\widehat{\mathbb{F}}$ збігається до $\infty$, якщо для досить великих $n$ $1/u_n \in \mathbb{F}$ і

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{u_n} \right\| = 0.$$

Якщо послідовність $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ із $\widehat{\mathbb{F}}$ збігається до $u \in \widehat{\mathbb{F}}$, то це позначатимемо так:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Для границь виконуються ті самі властивості, що і для числових послідовностей.

Неперервний дріб над нормованим полем $\mathbb{F}$

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k},$$

де $b_{k-1} \in \mathbb{F}$, $a_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, можна означити так само, як і означений неперервний дріб над $\mathbb{C}$. Властивості, аналогічні властивостям, наведеним вище для неперервних дробів над $\mathbb{C}$, також виконуються і для неперервних дробів над нормованим полем $\mathbb{F}$ [125, с. 28].

## 1.2. Відповідні неперервні дроби та алгоритми їх побудови

Важливим застосування неперервних дробів є зображення аналітичних функцій комплексної змінної $z$ неперервними дробами

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}, \tag{1.11}$$

де $b_{k-1}(z)$, $a_k(z)$, $k \geq 1$, — поліноми від $z$ або $1/z$. При цьому суттєво використовується поняття відповідності. В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 148–160] запропонували розглядати відповідність як збіжність у нормованому полі. Наведемо необхідні означення, дотримуючись тексту з книги А. Кайт та ін. [125, с. 30–35] (див. також [149, с. 147–160], [167, с. 241–290]).

Спочатку дамо поняття відповідності в точці $z = 0$. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Вираз

$$L_0(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k, \tag{1.12}$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k \geq m$, і $c_m \neq 0$ або всі $c_k = 0$, називають формальним рядом Лорана в точці $z = 0$. Позначимо через символ 0 нейтральний елемент для операції додавання формальних рядів Лорана. Множина $\mathbb{L}_0$ усіх формальних рядів Лорана в точці $z = 0$ утворює поле над $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення. Якщо $m \geq 0$, то вираз (1.12) називають формальним степеневим рядом в точці $z = 0$.

Для всіх $L_0(z) \in \mathbb{L}_0$ означимо функцію $\lambda : \mathbb{L}_0 \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ так:

$$\lambda(L_0) = \begin{cases} m, \text{ якщо } L_0(z) = \displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k, \ c_m \neq 0, \\ \infty, \text{ якщо } L_0(z) \equiv 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

При цьому для будь-яких $L_0(z)$ і $P_0(z)$ із $\mathbb{L}_0$ виконуються такі співвідношення [149, с. 149]:

$$\lambda(L_0P_0) = \lambda(L_0) + \lambda(P_0), \tag{1.14}$$

$$\lambda(L_0/P_0) = \lambda(L_0) - \lambda(P_0), \text{ якщо } P_0(z) \not\equiv 0, \tag{1.15}$$

$$\lambda(L_0 \pm P_0) \geq \min(\lambda(L_0), \lambda(P_0)), \tag{1.16}$$

$$\lambda(L_0 \pm P_0) = \min(\lambda(L_0), \lambda(P_0)), \text{ якщо } \lambda(L_0) \neq \lambda(P_0). \tag{1.17}$$

Норму $\|\cdot\|$ для поля $\mathbb{L}_0$ означимо у такий спосіб:

$$\|L_0\| = 2^{-\lambda(L_0)} \text{ для } L_0(z) \in \mathbb{L}_0,$$

де $2^{-\infty} = 0$. Із співвідношень (1.14)–(1.17) випливає, що норма $\|\cdot\|$ задовольняє усі умови (1.7)–(1.10), при цьому в співвідношенні (1.9) виконується рівність.

Отже, $\mathbb{L}_0$ — нормоване поле і неперервний дріб вигляду (1.11) є визначеним, якщо елементи $b_{k-1}(z)$, $a_k(z)$, $k \geq 1$, належать $\mathbb{L}_0$ і $a_k(z) \neq 0$, $k \geq 1$. Підхідні дроби належать $\mathbb{L}_0$ або дорівнюють $\infty$.

Для функції $R(z)$, мероморфної в точці $z = 0$, позначимо її розвинення в формальний ряд Лорана в початку координат (таке, що збігається в деякому околі із виколотою точкою $z = 0$) через $\Lambda_0(R)$, тобто задамо відображення $\Lambda_0 : R(z) \to \Lambda_0(R)$.

Послідовність функцій $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в початку координат, є відповідною до формального ряду Лорана $L_0(z)$ в точці $z = 0$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L_0 - \Lambda_0(R_n)) = \infty.$$

Якщо послідовність $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального ряду Лорана $L_0(z)$, то порядок відповідності функції $R_n(z)$ визначають так:

$$\nu_n = \lambda(L_0 - \Lambda_0(R_n)).$$

У цьому випадку за означенням функції $\lambda$ в (1.13) випливає, що формальні ряди Лорана $L_0(z)$ і $\Lambda_0(R_n)$ збігаються почленно до члена зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно.

Неперервний дріб вигляду (1.11) називають відповідним до формального ряду Лорана $L_0(z)$ в точці $z = 0$, якщо послідовність його підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до $L_0(z)$ в точці $z = 0$. Послідовність функцій $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (неперервний дріб (1.11)) називають відповідною (-им) в точці $z = 0$ до функції $R(z)$, мероморфної в початку координат, якщо ця послідовність (цей неперервний дріб) є відповідною (-им) до формального ряду Лорана $\Lambda_0(R)$ в точці $z = 0$.

За допомогою норми $\|\cdot\|$ означимо функцію $\rho : \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, де $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множина невід'ємних дійсних чисел, так:

$$\rho(L_0, P_0) = \|L_0 - P_0\| \text{ для всіх } L_0(z) \in \mathbb{L}_0,\ P_0(z) \in \mathbb{L}_0.$$

При цьому для всіх $L_0(z) \in \mathbb{L}_0$, $P_0(z) \in \mathbb{L}_0$, $Q_0(z) \in \mathbb{L}_0$ виконуються такі властивості

$$\rho(L_0, P_0) = 0 \text{ тоді і лише тоді, коли } L_0(z) \equiv P_0(z),$$
$$\rho(L_0, P_0) = \rho(P_0, L_0),$$
$$\rho(L_0, P_0) + \rho(P_0, Q_0) \geq \rho(L_0, Q_0).$$

Отже, $\rho$ — метрика поля $\mathbb{L}_0$ і у термінах метрики $\rho$ твердження "послідовність $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального ряду Лорана $L_0(z)$" еквівалентне твердженню "послідовність $\{\Lambda_0(R_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до формального ряду Лорана $L_0(z)$ відносно метрики $\rho$" [149, с. 150–151].

Тепер наведемо поняття відповідності в точці $z = \infty$. Вираз

$$L_\infty(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_{-k} z^{-k},$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $c_{-k} \in \mathbb{C}$, $k \geq m$, і $c_{-m} \neq 0$ або всі $c_{-k} = 0$, називають формальним рядом Лорана в точці $z = \infty$. Множина $\mathbb{L}_\infty$ усіх формальних рядів Лорана в точці $z = \infty$ утворює поле над $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення.

Для всіх $L_\infty(z) \in \mathbb{L}_\infty$ означимо функцію $\lambda : \mathbb{L}_\infty \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ так:

$$\lambda(L_\infty) = \begin{cases} m, \text{ якщо } L_\infty(z) = \displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} c_{-k} z^{-k},\ c_{-m} \neq 0, \\ \infty, \text{ якщо } L_\infty(z) \equiv 0. \end{cases}$$

При цьому для будь-яких $L_\infty(z)$ і $P_\infty(z)$ із $\mathbb{L}_\infty$ виконуються співвідношення, аналогічні співвідношенням (1.14)–(1.17). Норму $\|\cdot\|$ для поля $\mathbb{L}_\infty$ означимо у такий спосіб:

$$\|L_\infty\| = 2^{-\lambda(L_\infty)} \text{ для } L_\infty(z) \in \mathbb{L}_\infty,$$

де $2^{-\infty} = 0$. При цьому норма $\|\cdot\|$ має усі ті самі властивості, що і норма для поля $\mathbb{L}_0$.

Отже, $\mathbb{L}_\infty$ — нормоване поле, і неперервний дріб вигляду (1.11) є визначеним, якщо елементи $b_{k-1}(z)$, $a_k(z)$, $k \geq 1$, належать $\mathbb{L}_\infty$ і $a_k(z) \neq 0$, $k \geq 1$. Підхідні дроби належать $\mathbb{L}_\infty$ або дорівнюють $\infty$.

Для функції $R(z)$, мероморфної в точці $z = \infty$, позначимо її розвинення в формальний ряд Лорана в точці $z = \infty$ (таке, що збігається зовні деякого замкненого околу в $\mathbb{C}$ точки $z = 0$, тобто в околі із виколотою точкою $z = \infty$) через $\Lambda_\infty(R)$, тобто задамо відображення $\Lambda_\infty : R(z) \to \Lambda_\infty(R)$.

Послідовність функцій $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $z = \infty$, є відповідною до формального ряду Лорана $L_\infty(z)$ в точці $z = \infty$, якщо послідовність функцій $\{R_n(1/\xi)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\xi = 0$, є відповідною до формального ряду Лорана $L_0(1/\xi)$, отриманому із $L_\infty(z)$ заміною $z$ на $1/\xi$.

Неперервний дріб (1.11) називають відповідним до формального ряду Лорана $L_\infty(z)$ в точці $z = \infty$, якщо послідовність його підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до $L_\infty(z)$ в точці $z = \infty$.

Послідовність функцій $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (неперервний дріб (1.11)) називають відповідною (-им) в точці $z = \infty$ до функції $R(z)$, мероморфної в нескінченності, якщо ця послідовність (цей неперервний дріб) є відповідною (-им) до формального ряду Лорана $\Lambda_\infty(R)$ в точці $z = \infty$.

Зауважимо, що метрику $\rho$ для поля $\mathbb{L}_\infty$ можна ввести подібно до метрики для поля $\mathbb{L}_0$ і у її термінах твердження "послідовність $\{R_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального ряду Лорана $L_\infty(z)$" еквівалентне твердженню "послідовність $\{\Lambda_\infty(R_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до формального ряду Лорана $L_\infty(z)$ відносно метрики $\rho$".

Відповідність між неперервним дробом (1.11) і формальним рядом Лорана $L_0(z)$ ($L_\infty(z)$) позначатимемо символом "$\sim$" (див. [167, с. 241], [183, с. 306]).

Неперервні дроби вигляду (1.11) також називатимемо функціональними неперервними дробами. Властивості відповідності неперервних дробів з поліноміальними елементами є тісно пов'язані зі степенем або виглядом цих поліномів (див., наприклад, [167, приклади 4 і 5, с. 250–251]). Тому в аналітичній теорії неперервних дробів розглядаються різні класи функціональних неперервних дробів із різними властивостями відповідності. Наведемо опис найвідоміших класів функціональних неперервних дробів. Власне, дослідженню їх багатовимірних узагальнень присвячена ця дисертаційна робота.

Неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1}, \tag{1.18}$$

де $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, називають регулярним $C$-дробом (див. [182, с. 119]). Якщо $a_k > 0$, $k \geq 1$, то неперервний дріб (1.18) називають $S$-дробом або дробом Стільтьєса [208, 209].

Неперервний дріб

$$\frac{s_0}{1} \underset{+}{} \frac{g_1 z}{1} \underset{+}{} \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{g_k(1-g_{k-1})z}{1}, \tag{1.19}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_k < 1$, $k \geq 1$, називають $g$-дробом (див. [76, 122, 217, 224]).

Неперервний дріб

$$\frac{\pi_0}{1+z} \underset{+}{} \frac{-z}{1} \underset{+}{} \frac{\pi_1}{1+z} \underset{+}{} \frac{-z}{1} \underset{+}{} \frac{\pi_2}{1+z} \underset{+}{} \cdots,$$

де $\pi_k > 0$, $k \geq 0$, називають $\pi$-дробом [122, 123]. Парною частиною $\pi$-дробу є $g$-дріб.

Неперервний дріб

$$\frac{p_1 z}{1+q_1 z} \underset{+}{} \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{-p_k z^2}{1+q_k z},$$

де $p_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$, називають приєднаним дробом або $A$-дробом (див. [70, с. 385], [183, с. 322-331]). Парною частиною регулярного $C$-дробу є приєднаний дріб, але не кожний приєднаний дріб є парною частиною деякого регулярного $C$-дробу. Зауважимо, що вперше зв'язок між цими дробами розглядався Йо. Б. Х. Хейлерманном [132].

Приєднаний дріб тісно пов'язаний із наступним функціональним неперервним дробом.

Неперервний дріб

$$\frac{c_1}{d_1 + z} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{-c_k^2}{d_k + z}, \tag{1.20}$$

де $c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$, називають $J$-дробом або дробом Якобі [146]. Якщо $d_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $l_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, то неперервний дріб (1.20) називають дійсним $J$-дробом.

Крім наведених існують і інші класи функціональних неперервних дробів: $C$-дроби [75, 77, 163], $T$-дроби [215], $M$-дроби [170, 171, 177], $PC$-дроби [147], $P$-дроби [168, 169], $\delta$-дроби [160] та ін.

Перші розвинення Л. Ойлера (див., наприклад, [116, с. 295–320]) та інших авторів у неперервні дроби заданих формальних степеневих рядів є рівноцінні неперервні дроби, тобто послідовності їх підхідних дробів і частинних сум збігаються почленно.

У 1802 році В. І. Вісковатов [220, 221] запропонував метод розвинення відношення двох формальних степеневих рядів у неперервний дріб. У результаті побудований за алгоритмом Вісковатова неперервний дріб, переважно характеризується ширшою множиною збіжності, ніж відповідний степеневий ряд.

Подальші дослідження зв'язку між формальним степеневим рядом і неперервним дробом знайшли відображення в роботах Ч. Гуттона [145, с. 203–209], М. А. Штерна [206], Йо. Б. Х. Хейлерманна [130, 131], Х. Ханкеля [126, 127], Т. Мура [175, 176], Ґ. Фробеніуса [117], Т. Йо. Стільтьєса [208]

та ін. Наведемо узагальнені їх результати для регулярного $C$-дробу

$$c_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1}, \tag{1.21}$$

де $c_0 \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$.

**Теорема 1.1** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 222]). *Кожний регулярний C-дріб* (1.21) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є відповідним до однозначно визначеного формального степеневого ряду*

$$L_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{1.22}$$

*де* $c_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$, *в точці* $z = 0$ *і порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(z)$ *дорівнює* $(n+1)$, $n \geq 0$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування відповідного регулярного $C$-дробу для заданого формального степеневого ряду (1.22). Ці умови формулюються за допомогою визначників Ханкеля $H_l^{(k)}$, $l \geq 0$, $k \geq 0$, пов'язаних з формальним степеневим рядом $L_0(z)$ і визначених так (див., наприклад, [133, с. 594]):

$$H_0^{(k)} = 1,\ H_l^{(k)} = \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+l-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{k+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+l+1} & c_{k+l} & \dots & c_{k+2l-2} \end{vmatrix},\ l \geq 1,\ k \geq 0. \tag{1.23}$$

**Теорема 1.2** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 223–224]). *Виконуються такі твердження:*

1) *якщо для заданого формального степеневого ряду* (1.22) *існує регулярний C-дріб* (1.21), *який є відповідним до* $L_0(z)$ *в точці* $z = 0$, *то*

$$H_l^{(1)} \neq 0,\ H_l^{(2)} \neq 0,\ l \geq 1, \tag{1.24}$$

*де* $H_l^{(1)}$, $H_l^{(2)} \neq 0$, $l \geq 1$, *означені в* (1.23), *і*

$$a_1 = H_1^{(1)},\ a_{2l} = -\frac{H_{l-1}^{(1)} H_l^{(2)}}{H_l^{(1)} H_{l-1}^{(2)}},\ a_{2l+1} = -\frac{H_{l+1}^{(1)} H_{l-1}^{(2)}}{H_l^{(1)} H_l^{(2)}},\ l \geq 1, \tag{1.25}$$

*де* $H_0^{(1)} = H_0^{(2)} = 1$;

2) *якщо виконуються співвідношення* (1.24), *то регулярний C-дріб* (1.21) *з коефіцієнтами* $a_k$, $k \geq 1$, *визначеними за формулами* (1.25), *є відповідним до формального степеневого ряду* (1.22) *в точці* $z = 0$.

Коефіцієнти $a_k$, $k \geq 1$, регулярного $C$-дробу (1.21) можна отримати із коефіцієнтів $c_k$, $k \geq 1$, формального степеневого ряду (1.22) за допомогою $qd$-алгоритму Рутісхаузера [191, 194, 196]. Зауважимо, що для цього також можна використовувати згаданий вище алгоритм Вісковатова (див., наприклад, [125, с. 112]).

Для заданого формального степеневого ряду (1.22) визначимо послідовності $\{d_0^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{d_l^{(k)}\}_{l\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0}$ і $\{q_l^{(k)}\}_{l\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0}$ так:

$$d_l^{(k)} = q_l^{(k+1)} - q_l^{(k)} + d_{l-1}^{(k+1)},\ q_{l+1}^{(k)} = \frac{d_l^{(k+1)}}{d_l^{(k)}} q_l^{(k+1)},\ l \geq 1,\ k \geq 0, \tag{1.26}$$

$$d_0^{(k+1)} = 0,\ q_1^{(k)} = \frac{c_{k+1}}{c_k},\ k \geq 0. \tag{1.27}$$

Вважатимемо, що жодне $d_l^{(k)}$ $(l \geq 1,\ k \geq 0)$ не перетворюється на нуль, так що послідовності $\{d_l^{(k)}\}_{l\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0}$ і $\{q_l^{(k)}\}_{l\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0}$ однозначно визначаються за формулами (1.26) і (1.27). Двовимірний масив

$$\begin{array}{ccccccc}
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
d_0^{(1)} & & d_1^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & \\
d_0^{(2)} & & d_1^{(1)} & & d_2^{(0)} & & \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & \\
d_0^{(3)} & \vdots & d_1^{(2)} & \vdots & d_2^{(1)} & \vdots & d_3^{(0)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

називають $qd$-таблицею. Співвідношення (1.26) називають правилами ромба, бо кожне з них пов'язує чотири елемента операціями додавання або множення, які утворюють (як відмічено в $qd$-таблиці) ромб. $qd$-алгоритм — це обчислювальна процедура за правилами ромба (1.26) з початковими умовами (1.27).

Формальний степеневий ряд (1.22) називають нормальним (див., наприклад, [133, с. 605]), якщо визначники Ханкеля (1.23), пов'язані з формальним степеневим рядом $L_0(z)$, задовольняють такі умови

$$H_l^{(k)} \neq 0,\ l \geq 1,\ k \geq 0.$$

**Теорема 1.3** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 228–230])**.** *Нехай* (1.22) *— нормальний формальний степеневий ряд. Тоді*

1) *існують числа* $d_l^{(k)}$, $q_l^{(k)}$, $l \geq 1$, $k \geq 0$, *qd-таблиці, пов'язаної із формальним степеневим рядом* $L_0(z)$, *що визначаються за правилами ромба* (1.26) *з початковими умовами* (1.27);

2) *регулярний C-дріб* (1.21), *де коефіцієнти* $a_l$, $l \geq 1$, *визначаються за формулами*

$$a_1 = c_1,\ a_{2l} = -q_l^{(1)},\ a_{2l+1} = -d_l^{(1)},\ l \geq 1,$$

*є відповідним до формального степеневого ряду* $L_0(z)$ *в точці* $z = 0$;

3) *регулярний C-дріб*

$$\frac{c_0}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1},$$

*де коефіцієнти* $a_l$, $l \geq 1$, *визначаються за формулами*

$$a_{2l-1} = -q_l^{(0)},\ a_{2l} = -d_l^{(0)},\ l \geq 1,$$

*є відповідним до формального степеневого ряду* $L_0(z)$ *в точці* $z = 0$.

$qd$-алгоритм є зручною чисельною процедурою знаходження коефіцієнтів регулярного $C$-дробу, відповідного до заданого нормального формального степеневого ряду (див., наприклад, [149, с. 231–233]). Також $qd$-алгоритм можна використовувати для обчислення нулів і полюсів деяких аналітичних функцій [133, § 7.9].

Позаяк $S$-дріб є особливим випадком регулярного $C$-дробу, то теореми 1.1–1.3 застосовуються до $S$-дробів. Крім цього, правильна така теорема:

**Теорема 1.4** (Дж. Бейкер і П. Грейвс-Морріс [85, с. 197–199]). *S-дріб* (1.21), *де* $c_0 \in \mathbb{R}$, $a_k > 0$, $k \geq 1$, *є відповідним до заданого формального степеневого ряду*

$$L_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(-z)^k,$$

*де* $c_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, *в точці* $z = 0$ *тоді і лише тоді, коли*

$$H_l^{(1)} > 0,\ H_l^{(2)} > 0 \text{ для } l \geq 1,$$

*де* $H_l^{(1)}$, $H_l^{(2)}$, $l \geq 1$, *— визначники Ханкеля* (1.23), *пов'язані з формальним степеневим рядом* $L_0(z)$.

Відповідність між $g$-дробом і формальним степеневим рядом досліджено Г. С. Воллом [224]. Послідовність дійсних чисел $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ називають абсолютно монотонною відповідною нескінченному розподілу мас [224], якщо існує дійсна і монотонно неспадна функція $\varphi(u)$ з нескінченним числом точок росту на проміжку $[0, 1]$ така, що

$$s_n = \int_0^1 u^n d\varphi(u),\ n \geq 0.$$

**Теорема 1.5** (Г. С. Волл [224, теорема 4.1]). *g-дріб* (1.19) *є відповідним до заданого формального степеневого ряду*

$$L_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(-z)^k,$$

*де* $s_0 > 0$, $s_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, *в точці* $z = 0$ *тоді і лише тоді, коли послідовність* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ *є абсолютно монотонною відповідною нескінченному розподілу мас.*

Коефіцієнти $g_l$, $l \geq 1$, $g$-дробу (1.19) можна обчислити за допомогою $g$-алгоритму Бауера [86, 87]. За цим алгоритмом коефіцієнти $g_l$, $l \geq 1$, є діагональні елементи $g_l^{(0)}$, $l \geq 1$, $g$-таблиці

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & g_1^{(0)} & & & & & \\
g_0^{(1)} & & g_2^{(0)} & & & & \\
 & g_1^{(1)} & & g_3^{(0)} & & & \\
g_0^{(2)} & & g_2^{(1)} & & g_4^{(0)} & & \\
 & g_1^{(2)} & & g_3^{(1)} & & g_5^{(0)} & \\
g_0^{(3)} & \vdots & g_2^{(2)} & \vdots & g_4^{(1)} & \vdots & g_6^{(0)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}
$$

елементи якої визначені правилами ромба

$$
(1-g_{2l+1}^{(k)})(1-g_{2l+2}^{(k)}) = (1-g_{2l}^{(k+1)})(1-g_{2l+1}^{(k+1)}),\ l \geq 1,\ k \geq 0,
$$
$$
g_{2l}^{(k)} g_{2l+1}^{(k)} = g_{2l-1}^{(k+1)} g_{2l}^{(k+1)},\ l \geq 1,\ k \geq 0,
$$

з початковими умовами

$$
g_0^{(k)} = 0,\ g_1^{(k)} = \frac{s_{k+1}}{s_k},\ k \geq 0.
$$

Як зазначалося вище, парною частиною регулярного $C$-дробу є приєднаний дріб. Проте існують приєднані дроби, які не можуть бути отримані як парна частина регулярного $C$-дробу [208] (див. також [224, с. 121–122]).

**Теорема 1.6** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 242])**.** *Кожний приєднаний дріб*

$$
c_0 + \frac{p_1 z}{1+q_1 z} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{-p_k z^2}{1+q_k z}, \tag{1.28}
$$

*де* $c_0 \in \mathbb{C}$, $p_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$, *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є відповідним до однозначно визначеного формального степеневого ряду* (1.22) *в точці* $z = 0$ *і порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(z)$ *дорівнює* $(2n+1)$, $n \geq 0$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування для заданого формального степеневого ряду відповідного приєднаного дробу.

**Теорема 1.7** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 244–245]). *Виконуються такі твердження:*

1) *якщо для заданого формального степеневого ряду* (1.22) *існує приєднаний дріб* (1.28), *який є відповідним до* $L_0(z)$ *в точці* $z = 0$, *то*

$$H_l^{(1)} \neq 0,\ l \geq 1, \tag{1.29}$$

*де* $H_l^{(1)}$, $l \geq 1$, *— визначник Ханкеля* (1.23), *пов'язаний з формальним степеневим рядом* $L_0(z)$, *і*

$$p_l = \frac{H_l^{(1)} H_{l-2}^{(1)}}{(H_{l-1}^{(1)})^2},\ q_l = \frac{\chi_{l-1}}{H_{l-1}^{(1)}} - \frac{\chi_l}{H_l^{(1)}},\ l \geq 1, \tag{1.30}$$

*де* $H_{-1}^{(1)} = H_0^{(1)} = 1$, $\chi_0 = 0$, $\chi_1 = c_2$,

$$\chi_l = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{l+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l+1} & c_{l+2} & \dots & c_{2l} \end{vmatrix},\ l \geq 2;$$

2) *якщо виконуються умови* (1.29), *то приєднаний дріб* (1.28) *з коефіцієнтами* $p_l$, $q_l$, $l \geq 1$, *визначеними за формулами* (1.30), *є відповідним до формального степеневого ряду* (1.22) *в точці* $z = 0$.

$J$-дріб можна отримати через його зв'язок із приєднаним дробом (див., наприклад, [149, с. 249]). Справді, якщо в приєднаному дробі (1.28) покладемо $z = 1/\xi$, знехтуємо вільним членом $c_0$, зробимо еквівалентне перетворення, покладаючи $\rho_k = \xi$, $k \geq 1$, і замінимо $\xi$ на $z$, то отримаємо $J$-дріб вигляду (1.20).

**Теорема 1.8** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 249–251]). *Кожний* $J$*-дріб* (1.20) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *є відповідним до формального ряду Лорана*

$$L_\infty(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$$

*в точці $z = \infty$ і порядок відповідності $n$-го підхідного дробу $f_n(z)$ дорівнює* $(2n+1)$, $n \geq 1$.

Неперервні дроби, зокрема $J$-дроби, тісно пов'язані з ортогональними поліноми (див., наприклад, книгу С. Хрущова [152]). Дослідженню властивостей і застосувань наведених вище алгоритмів присвячені роботи Х. Бандемера [84], І. Ґарґантіні і П. Хенріці [119], П. Хенріці [133, § 7.6], [135, 138–140], А. С. Хаусхолдера [144], Х. Рутісхаузера [192, 193, 195, 197, 198] та ін.

### 1.3. Збіжність неперервних дробів

Оскільки неперервний дріб — це нескінченний вираз, то важливо знати, чи неперервний дріб збігається і з якою швидкістю. Для функціональних неперервних дробів також важливо знати множини комплексної площини, де функціональні неперервні дроби збігаються.

При формулюванні та доведенні ознак збіжності для неперервних дробів суттєво використовуються поняття множин збіжності та множин значень. Ці поняття вперше з'явились в роботах А. Прінгсхайма [186, 187], В. Т. Скотта і Г. С. Волла [199], Е. Б. Ван Флека [217, 219], Ю. Ворпіцького [226] і згодом успішно використовувалися багатьма авторами. Наведемо необхідні означення, дотримуючись тексту з книги Л. Лоренцен і Х. Воделанда [167, с. 108–110] (див. також [149, гл. 4]).

Не обмежуючи загальності, в неперервному дробі (1.1) покладемо $b_0 = 0$. Послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ і $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ таких, що $\Omega_k \neq \emptyset$, $\Omega_k \subseteq \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $k \geq 1$, і $V_k \neq \emptyset$, $V_k \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, $k \geq 0$, називають відповідно послідовностями множин елементів і множин значень для неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}, \tag{1.31}$$

якщо

$$\frac{a_k}{b_k} \in V_{k-1}, \ \frac{a_k}{b_k + V_k} \subseteq V_{k-1} \text{ для } \langle a_k, b_k\rangle \in \Omega_k \ k \geq 1.$$

Послідовність множин елементів $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин збіжності для неперервного дробу (1.31), якщо із того, що $\langle a_k, b_k\rangle \in \Omega_k$, $k \geq 1$, випливає, що неперервний дріб (1.31) збігається. Послідовність множин збіжності $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин рівномірної збіжності для неперервного дробу (1.31) з послідовністю підхідних дробів $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, якщо існує послідовність додатних чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що залежить лише від послідовності $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, збігається до нуля і така, що

$$|f_{k+n} - f_k| \leq \lambda_k,\ k \geq 1,\ n \geq 0,$$

для кожної впорядкованої пари $\langle\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle$ такої, що $\langle a_k, b_k\rangle \in \Omega_k$, $k \geq 1$. Послідовність множин значень $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин збіжності (рівномірної збіжності) для неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}, \tag{1.32}$$

якщо послідовність множин $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, де $\Omega_k = E_k \times \{1\}$, $k \geq 1$, є послідовністю множин збіжності (рівномірної збіжності) для цього неперервного дробу.

Сформулюємо найвідомішу, мабуть, класичну теорему про збіжність неперервного дробу, отриману в 1865 році Ю. Ворпіцьким [226, § 20–29].

**Теорема 1.9.** *Нехай елементи* $a_k$, $k \geq 1$, *неперервного дробу* (1.32) *задовольнять нерівність*

$$|a_k| \leq \frac{1}{4},\ k \geq 1. \tag{1.33}$$

*Тоді*

1) *неперервний дріб* (1.32) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$|w| \leq \frac{1}{2}; \tag{1.34}$$

2) *стала* $1/4$ *в* (1.33) *і замкнений круг* (1.34) *є "найкращими", тобто сталу не можна збільшити, а замкнений круг звузити.*

Серед інших класичних результатів відмітимо теореми Зайделя – Штерна [201, 207], Слешинського – Прінгсхайма [75, 186] і Ван Флека [219] (див. також, наприклад, [149, гл. 4]).

Далі сформулюємо деякі ознаки збіжності для неперервних дробів з частинними ланками вигляду $\frac{(1-g_{k-1})g_k z_k}{1}$, які безпосередньо стосуються наших досліджень.

**Теорема 1.10** (Г. С. Волл [223, с. 45–46]). *Нехай $g_k$, $k \geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0 \leq g_k < 1$, $k \geq 1$, або $0 < g_k \leq 1$, $k \geq 1$, і ряд*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{g_k}{1 - g_k} \tag{1.35}$$

*збігається до $S$ або розбігається. Тоді*

1) *неперервний дріб*

$$\frac{g_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{(1 - g_{k-1})g_k z_k}{1} \tag{1.36}$$

*збігається рівномірно для $z_k$, $k \geq 2$, таких, що $|z_k| \leq 1$, $k \geq 2$;*

2) *значення неперервного дробу* (1.36) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу $|w| \leq 1 - 1/S$, якщо $0 \leq g_k < 1$, $k \geq 1$, причому значення цього неперервного дробу дорівнює $(1 - 1/S)$ для $z_k = -1$, $k \geq 2$;*

3) *значення неперервного дробу* (1.36) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$\left| w - \frac{1}{2 - g_1} \right| \leq \frac{1 - g_1}{2 - g_1},$$

*якщо $0 < g_k \leq 1$, $k \geq 1$.*

Зауважимо, що особливі випадки теореми 1.10 розглядалися у роботах І. В. Слешинського [76], Дж. Ф. Пейдона і Г. С. Волла [181], О. Перрона [183, с. 262–264] та А. Прінгсхайма [186].

Далі наведемо ознаки збіжності неперервного дробу

$$\frac{1}{1+} \frac{g_1 z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{(1 - g_{k-1})g_k z_k}{1}, \tag{1.37}$$

де $g_k$, $k \geq 1$, — дійсні сталі, $z_k$, $k \geq 1$, — комплексні змінні.

**Теорема 1.11** (Е. Б. Ван Флек [217]). *Нехай* $g_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 \leq g_k < 1$, $k \geq 1$, *і ряд* (1.35) *збігається до* $S$. *Тоді*

1) *неперервний дріб* (1.37) *збігається рівномірно для* $z_k$, $k \geq 1$, *таких, що* $|z_k| \leq 1$, $k \geq 1$;

2) *значення неперервного дробу* (1.37) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу* $|w| \leq S$, *причому значення цього неперервного дробу дорівнює* $S$ *для* $z_k = -1$, $k \geq 1$.

**Теорема 1.12** (Дж. Ф. Пейдон і Г. С. Волл [181]). *Нехай* $g_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 < g_k < 1$, $k \geq 1$, *і ряд* (1.35) *розбігається. Тоді неперервний дріб* (1.37) *збігається для* $z_k$, $k \geq 1$, *таких, що* $|z_k| \leq 1$, $k \geq 1$, *за умови, що* $z_k \neq -1$ *принаймні для одного* $k \geq 1$.

**Теорема 1.13** (Г. С. Волл [223, с. 49]). *Нехай* $g_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що* $0 \leq g_k < 1$, $k \geq 1$, *або* $0 < g_k \leq 1$, $k \geq 1$. *Тоді неперервний дріб* (1.37) *збігається рівномірно для* $z_k$, $k \geq 1$, *таких, що* $|z_1| \leq r$ *і* $|z_k| \leq 1$, $k \geq 2$, *для кожної сталої* $r$, $r < 1$.

У книзі Г. С. Волла [223, с. 79] означені так звані, ланцюгові послідовності, які суттєво використовуються нами при доведенні отриманих результатів.

Послідовність дійсних невід'ємних чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ називають ланцюговою послідовністю, якщо існує інша послідовність дійсних невід'ємних чисел $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ така, що $0 \leq g_n \leq 1$, $n \geq 0$, і

$$a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \ n \geq 1.$$

Числа $g_n$, $n \geq 0$, називають параметрами ланцюгової послідовності.

Дослідженню властивостей і застосувань ланцюгових послідовностей присвячені роботи Т. С. Чіхари [95], Дж. Дж. Денніса і Г. С. Волла [100], Т. Л. Хейдена і Е. П. Меркеса [128, 129], Дж. Ф. Пейдона і Г. С. Волла [181, с. 79], Х.-Йо. Рункеля [189, 190], Г. С. Волла [223, с. 79–90], Г. С. Волла і М. Ветцеля [225] та ін. Наведемо деякі властивості ланцюгових послідовностей необхідні для наших досліджень.

Для кожної ланцюгової послідовності $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ існують послідовності мінімальних $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ і максимальних $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ параметрів такі, що $m_n \le g_n \le M_n$, $n \ge 0$, для будь-яких інших значень параметрів цієї ланцюгової послідовності. Мінімальні та максимальні параметри відповідно визначаються у такий спосіб: $m_0 = 0$,

$$m_{n+1} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } m_n = 1, \\ a_{n+1}/(1-m_n), \text{ якщо } m_n < 1, \end{cases} \quad M_n = 1 - \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{1}, \ n \ge 0,$$

причому, якщо існує індекс $n+r$ такий, що $a_{n+r} = 0$, $r \ge 0$, то

$$M_n = 1 - \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r-1} \frac{a_{n+k}}{1}$$

[100, 225] (див. також [223, с. 80–82]).

**Лема 1.1** (Х.-Йо. Рункель [189, лема 7]). *Нехай $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ і $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ із $h_0 \ne g_0$ — послідовності параметрів ланцюгової послідовності $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такої, що $a_n > 0$ для $n \ge 1$. Тоді*

$$h_n = g_n \left( 1 - \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{g_k}{1-g_k}}{\dfrac{1-h_0}{g_0-h_0} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{r} \frac{g_k}{1-g_k}} \right) \text{ для } n \ge 2.$$

Також сформулюємо твердження, отримане В. Йо. Троном у статті [214, лема 1], яке використовуватимемо при доведенні наших результатів.

**Лема 1.2.** *Нехай $x > 0$ і $-\infty < u, v < +\infty$. Тоді*

$$\min_{-\infty<y<+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{u+iv}{x+iy}\right) = -\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2x}.$$

Далі розглянемо збіжність функціональних неперервних дробів в $\mathbb{C}$ відносно евклідової метрики $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \text{ для } z_1 \in \mathbb{C}, \ z_2 \in \mathbb{C}$$

(див., наприклад, [149, с. 151]).

Нехай $D$ — область в $\mathbb{C}$, тобто відкрита зв'язна множина. Послідовність $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ функцій, мероморфних в області $D$, збігається рівномірно (див. [149, с. 176]) на компактній підмножині $K$ області $D$, якщо

1) існує таке число $N_K \in \mathbb{N}_0$, що для всіх $n \geq N_K$ функція $f_n(z)$ є голоморфна в деякій області, що містить $K$, і

2) для заданого $\varepsilon > 0$ існує число $N_\varepsilon > N_K$ таке, що

$$\sup_{z\in K} |f_{n+k}(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ для } n \geq N_\varepsilon,\ k \geq 0.$$

Функціональний неперервний дріб (1.11) з послідовністю підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається рівномірно (див. [125, с. 52]) на компактній підмножині $K$ із області $D$, якщо послідовність $\{f_n(z)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє наведені вище умови 1) і 2).

Сформулюємо ознаки збіжності для розглянутих в підрозділі 1.2 класів функціональних неперервних дробів. Вважатимемо, що регулярний $C$-дріб (1.18) і всі його підхідні дроби дорівнюють нулю в точці $z = 0$. Найвідомішою, мабуть, ознакою збіжності для цього неперервного дробу є кардіоїдна теорема (див. роботи Дж. Ф. Пейдон і Г. С. Волл [181] та В. Лейтон і В. Йо. Трон [164]). Сформулюємо найзагальніший варіант цієї теореми.

**Теорема 1.14** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 134–135]). *Нехай коефіцієнти $a_k$, $k \geq 1$, регулярного $C$-дробу* (1.18) *задовольняють нерівність*

$$|a_k| - \mathrm{Re}\,(a_k) \leq r g_{k-1}(1 - g_k),\ k \geq 1,$$

*де $r$ — додатне число, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < \varepsilon < g_k < 1 - \varepsilon,\ k \geq 0,$$

*де $0 < \varepsilon < 1/2$. Тоді*

1) *парна і непарна частини регулярного $C$-дробу* (1.18) *збігаються до функцій, голоморфних для всіх $z$ в кордіоїдній області*

$$C_r = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |z| < \frac{1 + \cos(\arg(z))}{r} \right\},$$

*і рівномірно збігаються на кожній компактній підмножині області* $C_r$;

2) *регулярний C-дріб* (1.18) *збігається до функції, голоморфної в області* $C_r$, *тоді і лише тоді, коли принаймні один із рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{2n} a_k^{(-1)^{k-1}}\right|, \ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{2n-1} a_k^{(-1)^{k}}\right| \tag{1.38}$$

*розбігається;*

3) *якщо існує стала* $M > 0$ *така, що* $|a_k| \le M$, $k \ge 1$, *то регулярний C-дріб* (1.18) *збігається до функції, голоморфної в області* $C_r$.

Для $S$-дробів класичною ознакою збіжності є така теорема Стільтьєса:

**Теорема 1.15** (Т. Йо. Стільтьєс [208]). *Нехай* (1.18) — *S-дріб, тобто* $a_k > 0$, $k \ge 1$. *Тоді*

1) *парна і непарна частини S-дробу* (1.18) *збігаються до функцій, голоморфних для всіх* $z$ *у площині з розрізом*

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg(z)| < \pi\}, \tag{1.39}$$

*і рівномірно збігаються на кожній компактній підмножині області* $R$;

2) *S-дріб* (1.18) *збігається до функції, голоморфної в області* $R$, *тоді і лише тоді, коли принаймні один із двох рядів* (1.38) *розбігається;*

3) *якщо S-дріб* (1.18) *збігається в одній точці із* $R$, *то цей неперервний дріб збігається у всіх точках із* $R$ *до голоморфної функції;*

4) *якщо існує стала* $M > 0$ *така, що* $|a_k| \le M$, $k \ge 1$, *то S-дріб* (1.18) *збігається до функції, голоморфної в області* $R$.

Сформулюємо ознаку збіжності для $g$-дробу (1.19).

**Теорема 1.16** (Г. С. Волл [223, с. 116]). *g-дріб* (1.19) *збігається до функції, голоморфної в області*

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg(z+1)| < \pi\}, \tag{1.40}$$

*і рівномірно збігається на кожній компактній підмножині області* $G$.

Детальний огляд результатів, присвячений $J$-дробам, можна знайти в книзі Г. С. Волла [223, гл. 4, 5]. Зауважимо, що дійсні $J$-дроби, тобто $J$-дроби, елементи яких є поліноми з дійсними коефіцієнтами, також виникали у роботах П. Л. Чебишева [81, с. 101–102, 335–341], [82, с. 307–32], А. А. Маркова [70, с. 106–119, 292–374], К. А. Поссе [184].

Із теорією збіжності тісно пов'язаний аналіз похибок наближення. Наведемо необхідні означення (див., наприклад, [149, гл. 8]).

Якщо функціональний неперервний дріб (1.11) з послідовністю підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до функції $f(z)$ в області $D$, то різницю $(f(z) - f_n(z))$ називають похибкою наближення $n$-им підхідним дробом.

Для функціонального неперервного дробу (1.11) для $n \geq 0$ і для всіх $z \in D$ оцінки вигляду

$$|f(z) - f_n(z)| \leq C_n(z),$$

де $C_n(z) > 0$, $n \geq 0$, $C_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $z \in D$, і

$$|f(z) - f_n(z)| \leq C(z)|f_n - f_{n-1}|,$$

де $C(z) > 0$, називають відповідно апріорними та апостеріорними оцінками.

У роботі В. Б. Ґраґґа [122] доведено, що для $g$-дробу (1.19) з послідовністю підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, який збігається до функції $f(z)$, голоморфної в області (1.40), для кожного $z \in G$ і для $n \geq 1$ виконуються такі оцінки

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{s_0 K(z)}{\operatorname{Re}(\sqrt{1+z})} \left|\sqrt{1+z} - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right| \left|\frac{1-\sqrt{1+z}}{1+\sqrt{1+z}}\right|^{n-1},$$

$$|f(z) - f_n(z)| \leq K(z)|f_n(z) - f_{n-1}(z)|,$$

де $K(z) = \max\{1, \operatorname{tg}(|\arg(z)|/2)\}$ і взято головне значення кореня квадратного. Також у цій статті та у статті [123] В. Б. Ґраґґом отримано відповідно апостеріорні та апріорні оцінки похибок наближення для $\pi$-дробу.

Для $S$-дробу апостеріорні оцінки похибок наближення отримано у роботі П. Хенріці і П. Пфлюгера [137]: якщо (1.18) — $S$-дріб (тобто $a_k > 0$,

$k \geq 1$) з послідовністю підхідних дробів $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, який збігається до функції $f(z)$, голоморфної в області (1.39), то для кожного $z \in R$ і для $n \geq 1$ виконуються такі оцінки

$$|f(z) - f_n(z)| \leq$$
$$\leq \begin{cases} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|, \text{ якщо } |\arg(z)| \leq \pi/2, \\ \sec(|\arg(z) - \pi/2|)|f_n(z) - f_{n-1}(z)|, \text{ якщо } \pi/2 < |\arg(z)| < \pi. \end{cases}$$

Серед апріорних оцінок похибок наближень для $S$-дробу (1.18) виділимо таку оцінку

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{2a_1 r}{\cos(\alpha)} \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{1 + 4a_k r/\cos^2(\alpha)} - 1}{\sqrt{1 + 4a_k r/\cos^2(\alpha)} + 1}, \ n \geq 2,$$

де $z = re^{2i\alpha}$, $|\alpha| < \pi/2$, отриману в статтях В. Б. Ґраґґа і Д. Д. Ворнера [124] та В. Йо. Трона [212].

Оцінки похибок наближення для дійсного $J$-дробу і приєднаного дробу з дійсними коефіцієнтами можна отримати із результатів для $S$-дробу. Детальнішу інформацію про наведені вище та інші оцінки похибок наближення для функціональних неперервних дробів можна знайти у книзі А. Кайт та ін. [125, с. 129–147] (див. також [149, гл. 8]).

## 1.4. Зображення деяких аналітичних функцій неперервними дробами

Для багатьох аналітичних функцій відомі їхні зображення неперервними дробами. Часто дана функція може бути зображена декількома різними неперервними дробами, кожний із яких збігається взагалі кажучи, в різних областях. Тут і далі, запис

$$f(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}, \ z \in D,$$

означатиме, що неперервний діб збігається до $f(z)$ для всіх $z \in D$. Оскільки елементи $a_k(z)$, $b_k(z)$, $k \geq 1$, є поліномами, то підхідні дроби є раціональними функціями і, тому, їх послідовності не можуть збігатися до багатозначних функцій. Якщо $f(z)$ є багатозначна функція, то завжди братимемо її

головне значення. Наведемо деякі приклади зображення аналітичних функцій функціональними неперервними дробами.

Експоненціальна функція

$$\exp(z) = \exp(|z|)(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))),\ z \in \mathbb{C},$$

зображується регулярним $C$-дробом

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1} \underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_k z}{1},\ z \in \mathbb{C},$$

де

$$a_{2k} = \frac{-1}{2(2k-1)},\ a_{2k+1} = \frac{1}{2(2k+1)},\ k \geq 1,$$

(Ж. Лагранж [157]), і приєднаним дробом

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1 + q_1 z} \underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{p_k z^2}{1},\ z \in \mathbb{C},$$

де

$$q_1 = -\frac{1}{2},\ p_k = \frac{1}{4(2k-1)(2k-3)},\ k \geq 2,$$

(Л. Ойлер [114, § 30], Ж. Лагранж [157]).

Функція натурального логарифму

$$\mathrm{Ln}\,(1+z) = \ln(|1+z|) + i\mathrm{Arg}\,(1+z),\ -\pi < \mathrm{Arg}\,(1+z) \leq \pi,\ z \neq -1,$$

зображується $S$-дробом

$$\mathrm{Ln}\,(1+z) = \frac{z}{1} \underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_k z}{1},\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1],$$

де

$$a_{2k} = \frac{k}{2(2k-1)},\ a_{2k+1} = \frac{k}{2(2k+1)},\ k \geq 1,$$

(Йо. Х. Ламберт [158, с. 76], Ж. Лагранж [157]), і приєднаним дробом

$$\mathrm{Ln}\,(1+z) = \frac{z}{1 + q_1 z} \underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{p_k z^2}{1},\ -\pi < \mathrm{Arg}\left(1 - \frac{z^2}{(2+z)^2}\right) < \pi,$$

де

$$q_{k-1} = \frac{1}{2},\ p_k = \frac{-(k-1)^2}{4(2k-1)(2k-3)},\ k \geq 2,$$

(Ж. Лагранж [157]).

Степенева функція або загальна біноміальна функція

$$(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \mathrm{Ln}\,(1+z)),\ \pi < \mathrm{Im}\,(\mathrm{Ln}\,(z+1)) \leq \pi,$$

зображується такими регулярними $C$-дробами

$$(1+z)^\alpha = \frac{1}{1+} \frac{-\alpha z}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=3}^{\infty} \frac{a_k z}{1},\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1],$$

де $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$a_{2k} = \frac{k-1-\alpha}{2(2k-1)},\ a_{2k-1} = \frac{k-1+\alpha}{2(2k-3)},\ k \geq 2,$$

(К. Ф. Гаусс [120]),

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha z}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{a_k z}{1},\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1], \tag{1.41}$$

де $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$a_{2k} = \frac{k-\alpha}{2(2k-1)},\ a_{2k+1} = \frac{k+\alpha}{2(2k+1)},\ k \geq 1,$$

(Ж. Лагранж [157]), і приєднаним дробом

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha z}{1+q_1 z} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{p_k z^2}{1+q_k z},\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1],$$

де $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$q_1 = \frac{1-\alpha}{2},\ p_k = \frac{\alpha^2 - k^2}{4(2k-1)(2k+1)},\ q_k = \frac{1}{2},\ k \geq 2,$$

(Л. Ойлер [115]). Зауважимо, що особливий випадок зображення (1.41) розглянуто Йо. Х. Ламбертом [158, с. 94].

Тригонометрична функція $\mathrm{tg}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$, зображується приєднаним дробом

$$\mathrm{tg}(z) = \frac{z}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{p_k z^2}{1}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\},$$

де

$$p_k = \frac{1}{(2k-3)(2k-1)}, \ k \geq 2,$$

(Йо. Х. Ламберт [158, с. 162]).

Обернена тригонометрична функція

$$\mathrm{Arctg}\,(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \ -\pi < \mathrm{Arg}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \leq \pi, \ iz \neq \pm 1,$$

зображується приєднаним дробом

$$\mathrm{Arctg}\,(z) = \frac{z}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{p_k z^2}{1}, \ iz \notin (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

де

$$p_k = \frac{(k-1)^2}{(2k-3)(2k-1)}, \ k \geq 2,$$

(Йо. Х. Ламберт [158, с. 82], Ж. Лагранж [157]).

Багато спеціальних функцій в математиці, фізиці та інженерії є гіпергеометричними функціями або їх комбінаціями. Найвідоміша, мабуть, із цих функцій є гіпергеометрична функція Гауса [120]

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \ a, b \in \mathbb{C}, \ c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \ z \in \mathbb{C},$$

де $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)$, $k \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, — символ Похгамера.

Відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{F(a, b+1; c+1; z)}{F(a, b; c; z)}, \ a, b \in \mathbb{C}, \ c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \ z \in \mathbb{C},$$

зображується регулярним $C$-дробом або неперервним дробом Гауса [120]

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)} = \frac{1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\frac{a_k z}{1},\ a,b\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-,\ z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty),$$

де

$$a_{2k} = \frac{-(a+k-1)(c-b+k-1)}{(c+2k-2)(c+2k-1)},\ a_{2k+1} = \frac{-(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)},\ k\geq 1.$$

Якщо $b=0$ і $c$ замінити на $c-1$, то отримаємо таке зображення

$$F(a,1;c;z) = \frac{1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\frac{a_k z}{1},\ a,\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-,\ z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty),$$

де

$$a_{2k} = \frac{-(a+k-1)(c+k-2)}{(c+2k-3)(c+2k-2)},\ a_{2k+1} = \frac{-k(c-a+k-1)}{(c+2k-2)(c+2k-1)},\ k\geq 1.$$

Якщо $a$ і $c$ дійсні числа такі, що $0<a<c$,

$$g_{2k-1} = \frac{a+k-1}{c+2k-2},\ g_{2k} = \frac{k}{c+2k-1},\ k\geq 1,$$

і замінити $z$ на $-z$, то отримаємо $g$-дріб

$$F(a,1;c;-z) = \frac{1}{1}+\frac{g_1 z}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\frac{g_k(1-g_{k-1})z}{1},\ 0<a<c,\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1].$$

Г. С. Волл [223, теорема 74.1 і співвідношення (67.5)], [224] показав, що клас $\mathcal{W}$ всіх функцій, які зображуються $g$-дробами, можна охарактеризувати двома способами:

1) функція $f(z)\in\mathcal{W}$ тоді і лише тоді, коли $f(z)$ є нераціональна функція, голоморфна в області (1.40), яка набуває дійсних значень для дійсних $z$ і задовольняє умову $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1+z}f(z))>0$ для $z\in G$ (тут береться головне значення квадратного кореня);

2) функція $f(z)\in\mathcal{W}$ тоді і лише тоді, коли існує обмежена монотонно неспадна функція $\varphi(u)$ з нескінченним числом точок росту (див. означення на с. 46) в інтервалі $(0,1)$ така, що

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{1+zu},\ z\in G.$$

Більше прикладів зображення аналітичних функцій функціональними неперервними дробами можна знайти в книгах М. М. Пагірі [71, ч. 2], А. Н. Хованського [80, гл. 2 і 3], К. Брезінського [94, с. 193–212], А. Кайт та ін. [125, с. 193–400], В. Б. Джоунса і В. Йо. Трона [149, гл. 6] та Л. Лоренцен і Х. Воделанда [166, додаток А].

## 1.5. Узагальнення неперервних дробів — гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

У 60-х роках XX-го століття В. Я. Скоробогатьком запропоновано багатовимірне узагальнення неперервних дробів — гіллясті ланцюгові дроби (див. першу публікацію [72]) — у зв'язку з ідеєю побудови раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних. Особливі випадки цих дробів виникали і раніше, зокрема, у роботах І. Пратьє [185] і В. П. Терських [79]. Основи аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів викладено у книгах П. І. Боднарчука і В. Я. Скоробогатька [36], В. Я. Скоробогатька [73] та Д. І. Боднара [24].

Зауважимо (див., наприклад, [118], [143, с. 74]), що вперше, мабуть, узагальнення неперервного дробу запропоновано Катахіро Такебе (1664-1739) і Генкей Накане (1662–1733) у рукописі "Руйаку-дзюцу" (метод послідовних поділів), написаному в 1728 році. Огляд різних багатовимірних узагальнень неперервних дробів зроблено у статті Д. І. Боднара [18].

Як зазначалося у підрозділі 1.2, в основу побудови раціональних наближень аналітичної функції покладено принцип відповідності між неперервним дробом і формальним рядом Лорана, який є зображенням цієї функції. Задача побудови гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів не має однозначного розв'язку. Тому використовуються два підходи:

1) накладання додаткових умов на елементи гіллястого ланцюгового дробу [19, 25, 29, 35, 43, 44, 66];

2) модифікація структури гіллястого ланцюгового дробу [10, 40, 44, 67–

69, 96–99, 154, 155, 178, 179], [180, с. 96–149], [202, 203].

Серед модифікованих гіллястих ланцюгових дробів виділимо гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, які за структурою є аналогами кратних степеневих рядів. Зауважимо, що у випадку фіксованих значень елементів, тобто коли ці елементи є комплексними числами, їх також називають гіллястими ланцюговими дробами спеціального вигляду (див., наприклад, [37, с. 19]). Надалі для визначеності вживатимемо лише назву гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними незалежно від того, чи є елементи числами, чи функціями. Вперше ці дроби з'явилися у 1976 році в роботі Д. І. Боднара [33]. Наведемо основні поняття і властивості гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Нехай тут і далі $N$ — фіксоване натуральне число, $i(0) = 0$, $\mathcal{I}_0 = \{0\}$ і

$$\mathcal{I}_k = \{i(k) : i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k),\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ i_0 = N\},\ k \ge 1,$$

— множини мультиіндексів.

За Д. І. Боднаром [24, с. 15] для кожного $r \ge 1$ символ $\mathbf{u}^{(r)}$ означає вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{N+r-1}^{N-1}$ (тут і далі, $C_n^k$ — число сполучень з $n$ елементів по $k$, $k \le n$), з компонентами $u_{j(r)}$, $j(r) \in \mathcal{I}_r$, та для кожних $r \ge 1$, $k \ge 1$ і кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ символ $\mathbf{u}_{i(k)}^{(r)}$ — вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{i_k+r-1}^{i_k-1}$, з компонентами $u_{i(k),j(r)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le j_s \le j_{s-1}$, $1 \le s \le r$, $j_0 = i_k$, з таким порядком слідування компонент:

1) $u_{n(r)} \prec u_{m(r)}$ ($u_{i(k),n(r)} \prec u_{i(k),m(r)}$), якщо $n(r) \prec m(r)$;

2) $n(r) \prec m(r)$, якщо $n_1 < m_1$ або існує такий індекс $s$, $1 \le s < r$, що $n_p = m_p$, $1 \le p \le s$, і $n_{s+1} < m_{s+1}$.

Нехай $\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0} \rangle$ — упорядкована пара послідовностей комплексних чисел таких, що $a_{i(k)} \ne 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і, якщо для $k \ge 1$ існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$ такий, що $b_{i(k)} = 0$, то $b_{i(k-1),j} \ne 0$ для $1 \le j \le i_{k-1}$, $j \ne i_k$. Нехай $\{s_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)}^{(1)})\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$, де $\mathbf{w}_0^{(1)} = \mathbf{w}^{(1)}$, і $\{S_k(\mathbf{w}^{(k+1)})\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовності багатовимірних дробово-лінійних відображень

$$s_0(\mathbf{w}^{(1)}) = b_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_N,$$
$$\xi_{i(k)} = s_{i(k)}(\mathbf{w}^{(1)}_{i(k)}) = \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + w_{i(k),1} + w_{i(k),2} + \ldots + w_{i(k),i_k}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і

$$S_0(\mathbf{w}^{(1)}) = s_0(\mathbf{w}^{(1)}),\ S_k(\mathbf{w}^{(k+1)}) = S_{k-1}(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) \text{ для } k \geq 1.$$

Нехай $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність із розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}}$ визначена так:

$$f_k = S_k(\mathbf{0}^{(k+1)}) \text{ для } k \geq 0,$$

де $\mathbf{0}^{(k+1)} = (0, 0, \ldots, 0)$ — вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{N+k}^{N-1}$.

Упорядковану пару $\langle\langle\{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}\rangle, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ називають гіллястим ланцюговим дробом з нерівнозначними змінними [15, с. 67–69] (див. також [24, с. 15–17], [36, с. 45–51], [73, с. 64–68]) і позначають символом

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \ddots}}}. \tag{1.42}$$

Числа $a_{i(k)}$ і $b_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$ називають $k$-ми частинними чисельниками та знаменниками гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними відповідно або його елементами, відношення $a_{i(k)}/b_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$ — $k$-ми частинними ланками, число $b_0$ — вільним членом. Сукупність всіх $k$-их ланок утворює $k$-ий поверх гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними. Величину

$$f_k = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}} \tag{1.43}$$

називають $k$-им підхідним дробом, при цьому $f_0 = b_0$ — 0-им підхідним дробом.

Зауважимо, що по суті, так само, як і неперервний дріб, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними — це відображення впорядкованої пари послідовностей $\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}\rangle$ у послідовність $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Для зручності гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними $\langle\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}\rangle, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}\rangle$, продовжуючи аналогію із неперервним дробом (див. с. 33), позначатимемо символами

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{b_{i(3)}} + \ldots \text{ або } b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},$$

а його $k$-ий підхідний дріб — відповідно через

$$f_k = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \cdots + \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \text{ або}$$

$$f_k = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{k} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}}.$$

Так само, як і в одновимірному випадку, тут і далі, розглядаючи гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, допускатимемо і вироджені випадки, коли обмеження відмінності від нуля частинних чисельників і за певних умов частинних знаменників знімається. У зв'язку з цим вважатимемо, що для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $b \in \mathbb{C}$

$$\frac{a}{0} + \frac{b}{0} = \frac{0}{0},$$

і, що підхідний дріб (1.43) має зміст, якщо при його згортанні (див. опис алгоритму згортання гіллястого ланцюгового дробу, наприклад, в книзі Д. І. Боднара [24, с. 20–27]) знизу-вверх без будь-яких скорочень у проміжних операціях не отримаємо невизначеності $0/0$.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.42) збігається [2] (див. також [24, с. 46], [73, с. 72–73]), якщо не більше, ніж скінченна

кількість його підхідних дробів не має змісту, і послідовність його підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до скінченної границі $f$, тобто

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},\ f \in \mathbb{C}.$$

У цьому випадку $f$ називають значенням гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42). Інакше гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.42) розбігається.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.42) збігається абсолютно [2] (див. також [24, с. 48], [73, с. 73]), якщо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$$

збігається.

При встановленні ознак збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними суттєво використовується формула різниці двох його підхідних дробів, ідея побудови якої належить Д. І. Боднару [24, с. 28], [34].

Нехай $Q_{i(n)}^{(n)} = b_{i(n)}$ для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, $n \geq 1$, і

$$Q_{i(k)}^{(n)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}} + \sum_{i_{k+2}=1}^{i_{k+1}} \frac{a_{i(k+2)}}{b_{i(k+2)}} + \cdots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$. Тоді, за умови, що

$$Q_{i(k)}^{(n)} \neq 0 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1,$$

правильною є така формула [9] для $n \geq 1$ і $k \geq 1$

$$f_{n+k} - f_n = (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n+1} a_{i(r)}}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} Q_{i(r)}^{(n+k)} \prod\limits_{r=1}^{n} Q_{i(r)}^{(n)}}. \tag{1.44}$$

Для формулювання поняття еквівалентності наведемо означення фігурних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними [15, с. 70–71] (див. також [24, с. 18]).

Нехай $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots)$ — фіксований нескінченний мультиіндекс такий, що $1 \le i_k \le i_{k-1}$ для $k \ge 1$. Неперервний дріб

$$\frac{a_{i_1}}{b_{i_1}} + \frac{a_{i_1,i_2}}{b_{i_1,i_2}} + \frac{a_{i_1,i_2,i_3}}{b_{i_1,i_2,i_3}} + \cdots$$

називають $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots)$-гілкою гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42). Під довжиною скінченної гілки, тобто довжиною скінченного неперервного дробу, розуміємо кількість його поверхів. Характерною особливістю $k$-го підхідного дробу (1.43) є те, що всі його гілки скінченні і мають $k$ поверхів. Формально підхідні дроби гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42) можна конструювати так, щоб його різні гілки мали різну довжину. Підхідні дроби із такою властивістю називають фігурними підхідним дробами гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42).

Нехай $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність фігурних підхідних дробів, у якій кожний наступний утворюється додаванням чергової ланки у природному записі гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42), тобто

$$\tilde{f}_0 = b_0,\ \tilde{f}_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1},\ \tilde{f}_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2},\ \text{і т. д.},$$

$$\tilde{f}_N = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},\ \tilde{f}_{N+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}}} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},\ \text{і т. д.}$$

Цю послідовність назвемо послідовністю фігурних підхідних дробів з природним порядком слідування.

Два гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними (1.42) і

$$d_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{d_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}}, \tag{1.45}$$

де $d_0 \in \mathbb{C}$, $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і, якщо для $k \ge 1$ існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$ такий, що $d_{i(k)} = 0$, то $d_{i(k-1),j} \ne 0$

для $1 \leq j \leq i_{k-1}$, $j \neq i_k$, із послідовностями фігурних підхідних дробів з природним порядком слідування $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ і $\{\tilde{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ відповідно, називають еквівалентними [15, с. 73] (див. також [24, с. 29–31]), якщо ці послідовності збігаються почленно, тобто $\tilde{f}_n = \tilde{g}_n$, $n \geq 1$. У цьому випадку писатимемо

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \equiv d_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{d_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}}. \tag{1.46}$$

**Твердження 1.1** (О. Є. Баран [15, с. 73–74]). *Еквівалентність* (1.46) *виконується тоді і лише тоді, коли існують ненульові сталі* $\rho_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *такі, що*

$$d_0 = b_0,\ c_{i(1)} = \rho_{i(1)} a_{i(1)},\ c_{i(k+1)} = \rho_{i(k)} \rho_{i(k+1)} a_{i(k+1)},\ d_{i(k)} = \rho_{i(k)} b_{i(k)} \tag{1.47}$$

*для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Перетворення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42) в (1.45), означене рівняннями (1.47), називають еквівалентним перетворенням [2].

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.45) із послідовністю підхідних дробів $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ назвемо парною (непарною) частиною гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42) із послідовністю підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, якщо $g_n = f_{2n}$ ($g_n = f_{2n+1}$) для $n \geq 0$.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.45) називають мажорантою [2] гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42), якщо існують $n_0 > 0$ і $M > 0$ такі, що

$$|f_{n+k} - f_n| \leq M|g_{n+k} - g_n| \text{ для } n \geq n_0 \text{ і } k \geq 0.$$

## 1.6. Напрямки досліджень гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Теорія збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними розпочалася від згаданої вище роботи Д. І. Боднара [33], в якій у

випадку $N = 2$ встановлено необхідні і достатні умови збіжності (аналог теореми Зайделя – Штерна [201, 207]) гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{1.48}$$

з додатними елементами. Також у випадку $N = 2$ для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.48) з комплексними елементами В. Семашком [203] доведено аналог теореми фон Коха [222].

Подальші дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними пов'язані із узагальненням класичних теорем збіжності для неперервних дробів. Для формулювання результатів, які безпосередньо стосуються наших досліджень, за аналогією із одновимірним випадком (див. підрозділ 1.3) означимо поняття множин збіжності та множин значень для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Не обмежуючи загальності, в гіллястому ланцюговому дробі з нерівнозначними змінними (1.42) покладемо $b_0 = 0$. Послідовності множин

$$\{\Omega_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}} \text{ і } \{V_{i(k-1)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$$

таких, що $\Omega_{i(k)} \neq \emptyset$, $\Omega_{i(k)} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і $V_{i(k-1)} \neq \emptyset$, $V_{i(k-1)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, назвемо відповідно послідовностями множин елементів і множин значень для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1.49}$$

якщо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \in V_{i(k-1)} \text{ і } \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + V_{i(k)}} \subseteq V_{i(k-1)}$$

для $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)} \rangle \in \Omega_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Послідовність множин елементів $\{\Omega_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин збіжності [2] для

гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.49), якщо із того, що $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.49) збігається.

Послідовність множин збіжності $\{\Omega_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ назвемо послідовністю множин рівномірної збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.49) із послідовністю підхідних дробів $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, якщо існує послідовність додатних чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що залежить лише від послідовності $\{\Omega_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$, збігається до нуля і така, що

$$|f_{k+n} - f_k| \leq \lambda_k,\ k \geq 1,\ n \geq 0,$$

для кожної впорядкованої пари $\langle \{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}, \{b_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}\rangle$ такої, що $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Послідовність множин значень $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ назвемо послідовністю множин збіжності (рівномірної збіжності) для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1.50}$$

якщо послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$, де $\Omega_{i(k)} = E_{i(k)} \times \{1\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, є послідовністю множин збіжності (рівномірної збіжності) для цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними.

Сформулюємо багатовимірне узагальнення теореми Ворпіцького (теорема 1.9, с. 50), отримане у 1996 році О. Є. Баран [9].

**Теорема 1.17.** *Нехай елементи* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.50) *задовольняють нерівність*

$$|a_{i(k)}| \leq \frac{1}{4i_{k-1}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{1.51}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1.50) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу* (1.34)*;*

2) *сталі* $1/4, 1/8, \ldots, 1/(4N)$ *в* (1.51) *і замкнений круг* (1.34) *є "найкращими", тобто сталі не можна збільшити, а замкнений круг звузити.*

Абсолютну збіжність гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.50) також доведено Т. М. Антоновою і Д. І. Боднаром [2] за умови, що

$$|a_{i(k)}| \leq t_{i(k)} \left( 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)} \right) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \tag{1.52}$$

де $t_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — невід'ємні сталі такі, що

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)} < 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \tag{1.53}$$

і О. Є. Баран [14] за умов, що

$$|a_{i(1)}| \leq \frac{g_{i(1)}}{N}, \ |a_{i(k)}| \leq \frac{(1 - g_{i(k-1)}) g_{i(k)}}{i_{k-1}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2, \tag{1.54}$$

де $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k, \, k \in \mathbb{N}}$ — послідовність дійсних сталих таких, що $0 \leq g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, або $0 < g_{i(k)} \leq 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Зауважимо, що умова (1.51) випливає із умов (1.52) і (1.54), якщо відповідно покласти $t_{i(k)} = 1/(2i_{k-1})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. При цьому у другому випадку перша умова зводиться до вигляду $|a_{i(1)}| \leq 1/(2N)$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$. Х. Й. Кучмінською [153] за умови (1.51) доведено аналог теореми 1.9 в загальнішій формі, ніж в статті О. Є. Баран [9], а Т. М. Антоновою [6] за умови (1.52) досліджено значення радіусів кругів з центром у початку координат, які є множинами абсолютної збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.50).

Різні узагальнення теореми Слешинського – Прінгсхайма [75, 186] для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42) зроблено Т. М. Антоновою і Д. І. Боднаром [2] та О. Є. Баран [14]. У роботі [2] також доведено аналог теореми Ван Флека [219] для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.48) і встановлено достатню умову

збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.42) з додатними елементами. Для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.50) О. Є. Баран [12] встановлено аналог теорем Ланґе [160, 162], Трона [216] і узагальнено теореми Лейтона – Волла [165], Мак Лауліна – Вишінські [172] про спарені області збіжності для неперервних дробів. Узагальнення теореми Зайделя – Штерна [201, 207] для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.48) з додатними елементами зроблено Д. І. Боднаром і І. В. Біланик [88].

Тепер сформулюємо багатовимірний аналог теореми Джоунса – Трона [150] про параболічні області збіжності для неперервних дробів, отриманий Т. М. Антоновою [1] із використанням ідеї Д. І. Боднара доведення параболічної області збіжності для гіллястих ланцюгових дробів [24, теорема 3.22], який суттєво використовується в наших дослідженнях.

**Теорема 1.18.** *Нехай існують додатні сталі* $\varepsilon$, $\varepsilon < 1$, *і* $\varphi$, $\varphi < \pi/(2+2\varepsilon)$, *такі, що елементи* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.50) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *для всіх* $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k \geq 1$ *задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|a_{i(k)}| - \operatorname{Re}\left(a_{i(k)} e^{-i(\varphi_{i(k-1)}+\varphi_{i(k)})}\right)}{(1-\varepsilon)(\cos\varphi_{i(k)} - r_{i(k)})} \leq 2r_{i(k-1)},$$

*де* $\{\varphi_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *і* $\{r_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовності дійсних чисел таких, що* $|\varphi_{i(k)}| \leq \varphi$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, *і*

$$r_0 \geq 0,\ 0 \leq r_{i(k)} \leq (1-\varepsilon)\cos\varphi_{i(k)} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1.$$

*Тоді*

1) *значення підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.50) *скінченні й розміщені у півплощині*

$$\operatorname{Re}\left(\varpi e^{-i\varphi_0}\right) \geq 1 - r_0;$$

2) *існують скінченні границі послідовностей парних* $\{f_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *і непарних* $\{f_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.50);

3) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1.50) *збігається, якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\max_{i(k)\in\mathcal{I}_k}|a_{i(k)}|\Big)^{-1}$$

*розбігається.*

У згаданій вище статті Д. І. Боднар і І. В. Біланик [88] також досліджено параболічні області збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними оберненого до (1.50) із суттєвим використанням структури досліджуваного об'єкту.

Окремо відмітимо роботи Д. І. Боднара і М. М. Бубняк [20–23, 90] та М. М. Бубняк [37–39], присвячені дослідженню збіжності різних періодичних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Для формулювання подальших результатів введемо кілька стандартних позначень. Нехай $\widehat{\mathbb{C}}^N$ — розширений $N$-вимірний комплексний простір, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_N)$ означає елемент із $\mathbb{Z}^N$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)$ — елемент із $\widehat{\mathbb{C}}^N$, для $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^N$ і $\mathbf{z}\in\widehat{\mathbb{C}}^N$

$$|\mathbf{k}|=k_1+k_2+\ldots+k_N,\ \mathbf{z}^{\mathbf{k}}=z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_N^{k_N},$$

для $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^N$ і $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^N$ $\mathbf{k}\geq\mathbf{m}$ означає, що $k_r\geq m_r$, $1\leq r\leq N$, і нехай

$$\mathbf{0}=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N\text{ раз}}),\ \boldsymbol{\infty}=(\underbrace{\infty,\infty,\ldots,\infty}_{N\text{ раз}}).$$

Практичному застосуванню гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними присвячений напрям дослідження, який пов'язаний із розвиненням заданого формального кратного степеневого ряду

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})=\sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}}c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_N=0}^{\infty}c_{k_1,k_2,\ldots,k_N}z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_N^{k_N},\tag{1.55}$$

де $c_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}$, $\mathbf{k}\geq\mathbf{0}$, у гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$b_0(\mathbf{z})+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z})}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})},\tag{1.56}$$

де $b_0(\mathbf{z})$, $a_{i(k)}(\mathbf{z})$ і $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, є поліномами від $\mathbf{z}$. Цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними також називатимемо функціональним гіллястим ланцюговим дробом з нерівнозначними змінними.

Формальне розвинення у функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.56) отримується за умови, що розвинення Тейлора кожного його $n$-го підхідного дробу збігається із заданим формальним кратним степеневим рядом $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно, і $\nu_n$ прямує до нескінченності із ростом $n$.

Перше розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (1.55) у функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$a_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{1.57}$$

де $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, побудовано О. Є. Баран і Д. І. Боднаром [10] (див. також [15, с. 85-92] і [44]) із використанням ідеї побудови алгоритму, запропонованого в роботах [19, 35]. Ця сама ідея використана цими ж авторами в статті [44] (див. також [15, с. 92–100]) для побудови функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} b_{i(2)} z_{i_2}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{b_{i(3)} z_{i_2} z_{i_3}}{1 + \sum\limits_{i_4=1}^{i_3} b_{i(4)} z_{i_4}} + \cdots,$$

де $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, $b_{i(2k-1)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, до формального кратного степеневого ряду (1.55). У згаданих тут роботах також встановлено необхідні і достатні умови існування цих алгоритмів.

У випадку $N = 2$ гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними застосовано до задач інтерполяції функцій двох змінних в роботах

Х. Й. Кучмінської [67, 68] (див. також [73, с. 197]), а у загальному випадку — О. Є. Баран [15, с. 100–107], [16].

Окремим важливим напрямком досліджень функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є дослідження їх збіжності в $\mathbb{C}^N$ відносно евклідової метрики $d : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$d(\mathbf{z}', \mathbf{z}'') = |\mathbf{z}' - \mathbf{z}''| = \left( \sum_{k=1}^{N} |z'_k - z''_k|^2 \right)^{1/2} \text{ для } \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^N,\ \mathbf{z}'' \in \mathbb{C}^N,$$

де $\mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_N)$, $\mathbf{z}'' = (z''_1, z''_2, \ldots, z''_N)$, (див., наприклад, [83, с. 10]).

Нехай $D$ — область в $\mathbb{C}^N$, тобто відкрита зв'язна множина. Послідовність функцій багатьох змінних $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, мероморфних в області $D$, рівномірно обмежена (див., наприклад, [24, с. 61]) на компактній підмножині $K$ із $D$, якщо існують $N_K$ і $M_K$ такі, що

$$\sup_{\mathbf{z} \in K} |f_n(\mathbf{z})| \leq M_K \text{ для } n \geq N_K.$$

Сформулюємо узагальнення теореми про розширення збіжності [223, теорема 24.2], отримане Д. І. Боднаром в книзі [24, с. 66], яке використовуватимемо при доведенні наших результатів.

**Теорема 1.19.** *Нехай $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $D$, рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині цієї області, і збігається в кожній точці множини $E \subset D$, яка для точки $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_N^0)$ із $D$ є або околом (тобто відкритим полікругом), або дійсним околом, тобто на множині*

$$R(\mathbf{z}^0, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |\mathrm{Re}\,(\mathbf{z}) - \mathrm{Re}\,(\mathbf{z}^0)| < r,\ \mathrm{Im}\,(\mathbf{z}) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{z}^0)\},\ r > 0,$$

*або комплексним околом, тобто на множині*

$$S(\mathbf{z}^0, s) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \mathrm{Re}\,(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\,(\mathbf{z}^0),\ |\mathrm{Im}\,(\mathbf{z}) - \mathrm{Im}\,(\mathbf{z}^0)| < s\},\ s > 0.$$

*Тоді послідовність функцій багатьох змінних $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D$ до функції багатьох змінних, голоморфної в цій області.*

Наведемо також теорему Вейєрштрасса (див., наприклад, [83, теорема 8, с. 34], яку використовуватимемо при доведенні наших результатів.

**Теорема 1.20.** *Нехай* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області* $D$*, збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D$ *до функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$*. Тоді* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна в області* $D$ *і для кожного* $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$ *виконується співвідношення*

$$\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f_n(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} \to \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}},$$

*де* $\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_N^{k_N}$*, на кожній компактній підмножині області* $D$*.*

За аналогією із одновимірним випадком (див. с. 54) дамо означення рівномірної збіжності функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в $\mathbb{C}^N$ (див. також [24, с. 49]).

Послідовність функцій багатьох змінних $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в області $D$, збігається рівномірно на компактній підмножині $K$ області $D$, якщо

1) існує таке число $N_K \in \mathbb{N}_0$, що для всіх $n \geq N_K$ функція $f_n(\mathbf{z})$ є голоморфна в деякій області, що містить $K$, і

2) для заданого $\varepsilon > 0$ існує число $N_\varepsilon > N_K$ таке, що

$$\sup_{\mathbf{z}\in K} |f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| < \varepsilon \text{ для } n \geq N_\varepsilon,\ k \geq 0.$$

Функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.56) із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, збігається рівномірно на компактній підмножині $K$ із області $D$, якщо послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє наведені вище умови 1) і 2).

Для гіллястих ланцюгових дріб з нерівнозначними змінними, як і для неперервних дробів (див. с. 56), проводиться аналіз похибок наближення. Продовжуючи аналогію, дамо необхідні означення.

Якщо функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.56) із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається

до функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$ в області $D$, то різницю $(f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}))$ назвемо похибкою наближення $n$-им підхідним дробом.

Для функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.56) для $n \geq 0$ і для всіх $\mathbf{z} \in D$ оцінки вигляду

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq C_n(\mathbf{z}),$$

де $C_n(\mathbf{z}) > 0$, $n \geq 0$, $C_n(\mathbf{z}) \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $\mathbf{z} \in D$, назвемо апріорними оцінками.

Нехай тут і далі $\mathrm{Int}\,(D)$ — внутрішність зв'язної множини $D$ в $\mathbb{C}^N$.

Серед робіт про збіжність функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними вкотре відмітимо статтю Т. М. Антонові і Д. І. Боднара [2], у якій, зокрема, встановлено, такий результат:

**Теорема 1.21.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.57) *задовольняють нерівність* (1.52), *де* $\{t_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконується нерівність* (1.53). *Тоді для кожного* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$O = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| \leq 1,\ 1 \leq k \leq N\right\}$$

*гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1.57) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(O)$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(O)$.

Зауважимо, що теорема 1.21 залишиться правильна, якщо умову (1.52) замінити на (1.54), де $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ — послідовність дійсних сталих таких, що $0 \leq g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, або $0 < g_{i(k)} \leq 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Цей результат безпосередньо випливає із теореми 1 [14].

Наостанок сформулюємо теорему про збіжність функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (1.57), отриману О. Є. Баран у роботі [17]. Для цього задамо відображення

$$l : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_k \to \mathbb{N}$$

у такий спосіб

$$l(i(k)) = \sum_{r=1}^{k} \delta_{i_k, i_r},$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, і розглянемо підмножини

$$\mathcal{J}_1 = \{i(k) : \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \ l = 1\},$$
$$\mathcal{J}_2 = \{i(k) : \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2, \ l \text{ — парне}\},$$
$$\mathcal{J}_3 = \{i(k) : \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 3, \ l \text{ — непарне}\}.$$

**Теорема 1.22.** *Нехай $N \geq 2$ і існують додатні сталі $r$, $0 < r < 1/3$, $p$, $0 < p < (1-3r)/(1+r)$, $\alpha$ і $\beta$, $0 < \alpha \leq \beta$, такі, що коефіцієнти $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (1.57) *із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняють нерівності*

$$|a_{i(k)}| \leq \frac{p}{(i_{k-1}-1)\beta}, \ \text{якщо } i(k) \in \mathcal{J}_1,$$
$$|a_{i(k)}| \leq \frac{r}{\beta}, \ \text{якщо } i(k) \in \mathcal{J}_3,$$
$$|a_{i(k)}| \leq \frac{(2+p)(1+p+r)}{\alpha}, \ \text{якщо } i(k) \in \mathcal{J}_2.$$

*Тоді*

1) *для кожного $\mathbf{z}$ із множини*

$$D = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \alpha \leq |z_k| \leq \beta, \ 1 \leq k \leq N\right\}$$

*гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (1.57) *збігається до скінченного значення $f(\mathbf{z})$, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(D)$, *а $f(\mathbf{z})$ — голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(D)$;

2) *для кожного $\mathbf{z} \in D$ виконуються оцінки*

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \max_{1\leq k\leq N} \left(\frac{p}{r}\right)^k C_{N+n}^{N-1} \left(\frac{r(2+p)}{1-p-r}\right)^{(n+1)/2}, \ n \geq 1.$$

# РОЗДІЛ 2

# ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ, ЧАСТИННІ ЗНАМЕННИКИ ЯКИХ ДОРІВНЮЮТЬ ОДИНИЦІ

У цьому розділі досліджується збіжність (абсолютна збіжність, рівномірна збіжність) гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники (див. означення на с. 64) яких дорівнюють одиниці. Для формулювання і доведення результатів використовуватимемо позначення введені в підрозділі 1.5.

## 2.1. Багатовимірне узагальнення теореми Ворпіцького

Сформулюємо і доведемо теорему про ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{2.1}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, із послідовністю підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. В доведенні застосовуватимемо метод мажорант (див. означення на с. 68), в якому суттєво використовується формула різниці двох підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (див. формулу на с. 66). Цей метод запропонований і розвинутий в роботах Д. І. Боднара та його учнів.

**Теорема 2.1.** *Нехай елементи* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.1) *задовольняють нерівність*

$$|a_{i(k)}| \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{2.2}$$

*де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних сталих таких, що*

$$0 \le q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 0, \tag{2.3}$$

*або*

$$0 < q_{i(k)} \le 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 0. \tag{2.4}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.1) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$|z| \le 1 - q_0^N; \tag{2.5}$$

2) *якщо в нерівності* (2.2) $q_{i(k)} = 1/2$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 0$, *то замкнений круг*

$$|z| \le 1 - \frac{1}{2^N}$$

*є "найкращою" множиною значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.1) *і його підхідних дробів.*

**Доведення.** Покажемо, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} q_0^{i_1-1}(1-q_0)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})}{1} \tag{2.6}$$

із послідовністю підхідних дробів $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є мажорантою (див. с. 68) гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.1).

Нехай

$$Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{a_{i(r)}}{1},\ G_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{-q_{i(r)}^{i_r} q_{i(r-1)}^{i_r-1}(1-q_{i(r-1)})}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$ і $n \ge 2$. Тоді, очевидно, виконуються такі рекурентні співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}}, \tag{2.7}$$

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)})}{G_{i(k+1)}^{(n)}} \tag{2.8}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$ і $n \ge 2$, при цьому $Q_{i(n)}^{(n)} = G_{i(n)}^{(n)} = 1$ для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, $n \ge 1$.

Нехай $n$ — довільне натуральне число. За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, доведемо такі нерівності

$$|Q_{i(k)}^{(n)}| \ge G_{i(k)}^{(n)} \tag{2.9}$$

і

$$G_{i(k)}^{(n)} > q_{i(k)}^{i_k}, \tag{2.10}$$

якщо виконуються умови (2.3), або

$$G_{i(k)}^{(n)} \ge q_{i(k)}^{i_k}, \tag{2.11}$$

якщо виконуються умови (2.4).

Для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$ нерівності (2.9)–(2.11) очевидні. Припускаючи, що нерівності (2.9)–(2.11) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r+1 \le n$, доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$. Використовуючи співвідношення (2.7) і (2.8), для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$|Q_{i(r)}^{(n)}| \ge 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|a_{i(r+1)}|}{|Q_{i(r+1)}^{(n)}|} \ge 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{q_{i(r+1)}^{i_{r+1}} q_{i(r)}^{i_{r+1}-1}(1 - q_{i(r)})}{G_{i(r+1)}^{(n)}} = G_{i(r)}^{(n)}.$$

Оскільки за припущенням індукції із нерівностей (2.10) і (2.11) випливає, що $G_{i(r+1)}^{(n)} \ne 0$, то, враховуючи, що

$$\sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} q_{i(r)}^{i_{r+1}-1}(1 - q_{i(r)}) = 1 - q_{i(r)}^{i_r}$$

і замінюючи $q_{i(r+1)}^{i_{r+1}}$ на $G_{i(r+1)}^{(n)}$, отримуємо нерівності (2.10) і (2.11) для $k = r$ і для всіх $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Із нерівностей (2.9)–(2.11) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)} \neq 0$, $G^{(n)}_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$ і $n \geq 1$. Застосовуючи формулу (1.44) до різниць двох підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (2.1) і (2.6), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ маємо

$$|f_{n+k} - f_n| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n+1} |a_{i(r)}|}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} |Q^{(n+k)}_{i(r)}| \prod\limits_{r=1}^{n} |Q^{(n)}_{i(r)}|} \leq$$

$$\leq (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{-\prod\limits_{r=1}^{n+1} (-q^{i_r}_{i(r)} q^{i_r-1}_{i(r-1)} (1 - q_{i(r-1)}))}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} G^{(n+k)}_{i(r)} \prod\limits_{r=1}^{n} G^{(n)}_{i(r)}} = g_{n+k} - g_n. \quad (2.12)$$

Звідси випливає, що послідовність $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно зростає. Крім цього, на підставі нерівності (2.10) або (2.11) для $n \geq 1$ маємо

$$g_n = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q^{i_1}_{i(1)} q_0^{i_1-1} (1 - q_0)}{G^{(n)}_{i(1)}} \leq 1 - q_0^N,$$

тобто послідовність $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обмежена зверху. Тому, існує скінченна границя

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Далі, враховуючи співвідношення (2.12), для $k \geq 1$ отримуємо

$$\sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \leq \sum_{n=1}^{k} (g_{n+1} - g_n) = g_{k+1} - \sum_{i_1=1}^{N} q^{i_1}_{i(1)} q_0^{i_1-1} (1 - q_0).$$

Звідси при $k \to \infty$ випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.1) збігається абсолютно. Нарешті, використовуючи нерівності (2.2), (2.9) і (2.10) або (2.11), для $n \geq 1$ маємо

$$|f_n| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}|}{|Q^{(n)}_{i(1)}|} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q^{i_1}_{i(1)} q_0^{i_1-1} (1 - q_0)}{G^{(n)}_{i(1)}} \leq 1 - q_0^N.$$

Таким чином, замкнений круг (2.5) включає множину значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.1) і всіх його підхідних дробів.

Доведемо тепер твердження 2) цієї теореми. Нехай $c$ — довільне комплексне число таке, що $|c| < 1 - 2^{-N}$. Тоді, для підхідного дробу $f_1$ гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.1), де $a_{i(1)} = 2^{-i_1}c/(1-2^{-N})$, $i_1 \in \mathcal{I}_1$, і $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, — комплексні числа, що задовольняють нерівність (2.2), де $q_{i(k)} = 1/2$, $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 0$, отримаємо $f_1 = c$. Якщо $|c| = 1 - 2^{-N}$, то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.1), де $a_{i(1)} = 4^{-i_1}c/(1-2^{-N})$, $i_1 \in \mathcal{I}_1$, і $a_{i(k)} = -4^{-i_k}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2$, набуває значення $c$.

Справді, із вказаними вище значеннями елементів гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.1) еквівалентним перетворенням $\rho_{i(k)} = 2^{i_k-1}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1$, (див. с. 68) зведемо до вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\dfrac{2^{-i_1-1}c}{1-2^{-N}}}{2^{i_1-1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-2^{i_{k-1}-i_k-2}}{2^{i_k-1}}. \tag{2.13}$$

Покажемо, що значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.13) дорівнює $c$. Для цього досить довести, що

$$f^{(k)} = 2^{k-1} - \sum_{i_2=1}^{k} \frac{2^{k-i_2-2}}{2^{i_2-1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=3}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{-2^{i_{n-1}-i_n-2}}{2^{i_n-1}} = \frac{1}{2},\ 1 \leq k \leq N. \tag{2.14}$$

Співвідношення (2.14) доведемо за індукцією за $k$. При $k = 1$ маємо періодичний неперервний дріб

$$f^{(1)} = 1 + \frac{-1/4}{1} \mathop{+} \frac{-1/4}{1} \mathop{+} \cdots,$$

який запишемо у вигляді

$$f^{(1)} = 1 - \frac{1/4}{f^{(1)}}.$$

Звідси, за допомогою елементарних міркувань отримуємо, що $f^{(1)} = 1/2$.

При $k = 2$ маємо гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$f^{(2)} = 2 - \cfrac{1/2}{1 - \cfrac{1/4}{1 - \cfrac{1/4}{1 - \ddots}}} - \cfrac{1/4}{2 - \cfrac{1/2}{1 - \cfrac{1/4}{1 - \ddots}} - \cfrac{1/4}{2 - \cfrac{1/2}{1 - \ddots} - \cfrac{1/4}{1 - \ddots}}},$$

який запишемо у вигляді

$$f^{(2)} = 2 - \frac{1/2}{f^{(1)}} - \frac{1/4}{f^{(2)}}.$$

Оскільки $f^{(1)} = 1/2$, то очевидно, що $f^{(2)} = 1/2$.

Нехай (2.14) виконуються для $k = r - 1$, $2 \le r \le N$. Тоді для $k = r$ маємо

$$f^{(r)} = 2^{r-1} - \frac{2^{r-3}}{f^{(1)}} - \frac{2^{r-4}}{f^{(2)}} - \ldots - \frac{1}{f^{(r-2)}} - \frac{1/2}{f^{(r-1)}} - \frac{1/4}{f^{(r)}}. \tag{2.15}$$

Оскільки $f^{(k)} = 1/2$, $1 \le k \le r - 1$, $2 \le r \le N$, і

$$2^{r-1} - 2^{r-2} - 2^{r-3} - \ldots - 2^0 = 2^{r-1} - \frac{1 - 2^{r-1}}{-1} = 1,$$

то із (2.15) отримаємо $f^{(r)} = 1/2$. Звідси випливає, що значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.13) дорівнює $c$. Нарешті, із твердження 1.1 і означення еквівалентності (див. с. 68) випливає, що значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.1) також дорівнює $c$. ■

Зазначимо, що умова (1.51) теореми 1.17 не випливає із (2.2) при жодних допустимих значень $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 0$. Справді, припустимо, що існує послідовність дійсних чисел $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ така, що

$$0 \le q_{i(k)} \le 1 \text{ і } q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k - 1}(1 - q_{i(k-1)}) = \frac{1}{4i_{k-1}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1.$$

Тоді, зокрема, маємо

$$q_{i(k)}(1 - q_{i(k-1)}) = \frac{1}{4} \text{ для } i_1 = i_2 = i_3 = 2,\ i_r = 1,\ 4 \le r \le k,\ k \ge 5.$$

Оскільки $1/4, 1/4, 1/4, \ldots$ є ланцюговою послідовністю (див. означення на с. 52) з максимальними параметрами $M_k = 1/2$, $k \geq 0$, [223, с. 80], то, зрозуміло, що $0 \leq q_{2,2,2,1} \leq 1/2$. Тому із рівностей $q_{2,2,2,1}(1 - q_{2,2,2}) = 1/8$ і $q_{2,2,2}^2 q_{2,2}(1 - q_{2,2}) = 1/8$, які випливають із припущення, послідовно відповідно встановлюємо, що $0 \leq q_{2,2,2} \leq 3/4$ і $1/3 \leq q_{2,2} \leq 2/3$. Далі із рівності $q_{2,2}^2 q_2(1 - q_2) = 1/8$ отримуємо нерівність $q_2^2 - q_2 + 9/32 \leq 0$, яка, очевидно, немає розв'язку. Це означає, що припущення неправильне і, отже, теорема 2.1 не є узагальненням теореми 1.17, а є іншим, ніж ця теорема багатовимірним узагальненням ознаки збіжності Ворпіцького (див. теорему 1.9).

О. Є. Баран [14], як зазначалося вище, застосовано до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці, вираз вигляду $g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})$, а Т. М. Антоновою і Д. І. Боднаром [2] —

$$t_{i(k)}\left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right).$$

Ідея використання виразу вигляду $g_k(1 - g_{k-1})$ у дослідженнях збіжності неперервних дробів, мабуть, належить І. В. Слешинському [76].

Розглянемо тепер гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{2.16}$$

де $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, задовольнять умови (2.2) із обмеженнями (2.3) або (2.4). Позаяк за теоремою 2.1 значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними оберненого до (2.1) може дорівнювати $-1$, то без додаткових обмежень гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.16) може розбігатися.

**Теорема 2.2.** *Нехай елементи* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.16) *задовольняють не-*

*рівність* (2.2), *де* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, *— дійсні сталі, такі, що*

$$0 < q_0 \leq 1,\ 0 \leq q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{2.17}$$

*або*

$$0 < q_0 \leq 1,\ 0 < q_{i(k)} \leq 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{2.18}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.16) *збігається абсолютно, і його значення та значення його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$\left| z - \frac{1}{q_0^N(2-q_0^N)} \right| \leq \frac{1-q_0^N}{q_0^N(2-q_0^N)}; \tag{2.19}$$

2) *якщо в нерівності* (2.2) $q_{i(k)} = 1/2$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, *то замкнений круг*

$$\left| z - \frac{1}{2^{-N}(2-2^{-N})} \right| \leq \frac{1-2^{-N}}{2^{-N}(2-2^{-N})}$$

*є "найкращою" множиною значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.16) *і його підхідних дробів.*

**Доведення.** Міркуваннями, подібними до міркувань доведення твердження 1) теореми 2.1 отримуємо, що мажорантою гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.16) є гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-q_{i(1)}^{i_1} q_0^{i_1-1}(1-q_0)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})}{1},$$

підхідні дроби якого утворюють монотонно зростаючу і обмежену зверху послідовність. Звідси випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.16) збігається абсолютно.

Значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.16) запишемо у вигляді

$$z = \frac{1}{1+w}, \tag{2.20}$$

де

$$w = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}$$

і, на підставі твердження 1) теореми 2.1 $|w| \leq 1 - q_0^N$. Значення будь-якого підхідного дробу гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.16) також можна записати у вигляді (2.20). Тоді, для $k = 1$ $w = 0$, а для $k \geq 2$, використовуючи нерівності (2.2) і (2.17) або (2.18), маємо

$$|w| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}|}{|Q_{i(1)}^{(k-1)}|} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} q_0^{i_1-1}(1-q_0)}{G_{i(1)}^{(k-1)}} \leq 1 - q_0^N.$$

Таким чином,

$$\left| \frac{1-z}{z} \right| = |w| \leq 1 - q_0^N$$

і звідси, елементарними перетвореннями, отримуємо (2.19).

Для доведення твердження 2) цієї теореми досить зауважити, що на підставі доведення твердження 2) теореми 2.1 значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними

$$z = \frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\frac{2^{-i_1-1}c}{1-2^{-N}}}{2^{i_1-1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-2^{i_{k-1}-i_k-2}}{2^{i_k-1}} = \frac{1}{1+c}.$$

набуває всіх значень із (2.19), якщо $c$ брати із множини $|c| \leq 1 - 2^{-N}$. ■

## 2.2. Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$

У теоремі 1.17 гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними має частинні чисельники (див. означення на с. 64), які можна записати у вигляді $g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})z_{i(k)}$ із $g_{i(k)} = 1/2$ і $|z_{i(k)}| \leq 1/i_{k-1}$. Доведемо таку теорему:

**Теорема 2.3.** *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що*

$$0 \leq g_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{2.21}$$

*або*

$$0 < g_{i(k)} \leq 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{2.22}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{2.23}$$

*збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *таких, що*

$$|z_{i(k)}| \leq \frac{1}{i_{k-1}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1; \tag{2.24}$$

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.23) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу* $|z| \leq 1$.

**Доведення.** За схемою, викладеною в доведенні твердження 1) теореми 2.1, покажемо, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}/N}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})/i_{k-1}}{1} \tag{2.25}$$

із послідовністю підхідних дробів $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є мажорантою (див. с. 68) гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.23) із послідовністю підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Нехай

$$Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)}) z_{i(r)}}{1},$$

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{-g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})/i_{r-1}}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$ і $n \ge 2$. Тоді, очевидно, виконуються такі рекурентні співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1-g_{i(k)})z_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}}, \tag{2.26}$$

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1-g_{i(k)})/i_k}{G_{i(k+1)}^{(n)}} \tag{2.27}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$ і $n \ge 2$, при цьому $Q_{i(n)}^{(n)} = G_{i(n)}^{(n)} = 1$ для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, $n \ge 1$.

Нехай $n$ — довільне натуральне число. За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, доведемо такі нерівності

$$|Q_{i(k)}^{(n)}| \ge G_{i(k)}^{(n)} \tag{2.28}$$

і

$$G_{i(k)}^{(n)} > g_{i(k)}, \tag{2.29}$$

якщо виконуються умови (2.21), або

$$G_{i(k)}^{(n)} \ge g_{i(k)}, \tag{2.30}$$

якщо виконуються умови (2.22).

Для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$ нерівності (2.28)–(2.30) очевидні. Припускаючи, що нерівності (2.28)–(2.30) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r+1 \le n$, доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$. Використовуючи рекурентні співвідношення (2.26) і (2.27), для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$|Q_{i(r)}^{(n)}| \ge 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{g_{i(r+1)}(1-g_{i(r)})|z_{i(r+1)}|}{|Q_{i(r+1)}^{(n)}|} \ge$$

$$\ge 1 - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{g_{i(r+1)}(1-g_{i(r)})/i_r}{G_{i(r+1)}^{(n)}} = G_{i(r)}^{(n)}.$$

Оскільки за припущенням індукції із нерівностей (2.29) і (2.30) випливає, що $G^{(n)}_{i(r+1)} \neq 0$, то, замінюючи $g_{i(r+1)}$ на $G^{(n)}_{i(r+1)}$, отримуємо нерівності (2.29) і (2.30) для $k = r$ і для всіх $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Далі, із нерівностей (2.28)–(2.30) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)} \neq 0$, $G^{(n)}_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$ і $n \geq 1$. Застосовуючи формулу (1.44) до різниць двох підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (2.23) і (2.25), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ маємо

$$|f_{n+k} - f_n| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}| \prod\limits_{r=2}^{n+1} g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})|z_{i(r)}|}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} |Q^{(n+k)}_{i(r)}| \prod\limits_{r=1}^{n} |Q^{(n)}_{i(r)}|} \leq$$

$$\leq (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{(g_{i(1)}/N) \prod\limits_{r=2}^{n+1} (-g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})/i_{r-1})}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} G^{(n+k)}_{i(r)} \prod\limits_{r=1}^{n} G^{(n)}_{i(r)}} =$$

$$= h_{n+k} - h_n. \tag{2.31}$$

Звідси випливає, що послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ монотонно зростає. Крім цього, із нерівностей (2.29) або (2.30) для $n \geq 1$ отримуємо

$$h_n = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}/N}{G^{(n)}_{i(1)}} \leq 1,$$

тобто послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ обмежена зверху. Тому, існує скінченна границя

$$h = \lim_{n \to \infty} h_n.$$

Далі, враховуючи співвідношення (2.31), для $k \geq 1$ отримуємо

$$\sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \leq \sum_{n=1}^{k} (h_{n+1} - h_n) = h_{k+1} - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}}{N}.$$

Звідси при $k \to \infty$ випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (1.50) збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, що задовольняють нерівність (2.24).

Доведемо тепер твердження 2) цієї теореми. Використовуючи нерівності (2.28) і (2.29) або (2.30), для $n \geq 1$ отримуємо

$$|f_n| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{|Q_{i(1)}^{(n)}|} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}/N}{G_{i(1)}^{(n)}} \leq 1.$$

Таким чином, замкнений круг $|z| \leq 1$ включає множину значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.23) і всіх його підхідних дробів. ■

Зазначимо, що теорема 2.3 є багатовимірним аналогом теореми 1.10. Наступний результат є багатовимірним аналогом теореми 1.12. Для його доведення використовуватимемо ідеї Д. І. Боднара, викладені в доведенні теореми 3.20 [24, с. 108-109].

**Теорема 2.4.** *Нехай $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.21). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{2.32}$$

*збігається для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, що задовольняють нерівність* (2.24), *якщо існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, такий, що*

$$g_{i(k)} = 0 \text{ або } z_{i(k)} \neq -\frac{1}{i_{k-1}}.$$

**Доведення.** На підставі твердження 1) теореми 2.3 гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$Q_0 = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{2.33}$$

і

$$Q_{i(k)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{g_{i(n)}(1 - g_{i(n-1)})z_{i(n)}}{1}, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \tag{2.34}$$

збігаються, а на підставі твердження 2) цієї ж теореми виконується нерівність

$$|Q_0 - 1| \leq 1. \tag{2.35}$$

Доведемо справедливість нерівності

$$|Q_{i(k)} - 1| \leq 1 - g_{i(k)} \tag{2.36}$$

для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Нехай $n$ — фіксоване натуральне число. Тоді, враховуючи, що $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, задовольняють нерівності (2.21), і використовуючи співвідношення (2.26), (2.28) і (2.29), для довільного $k$ такого, що $1 \leq k \leq n-1$ і для довільного $i(k) \in \mathcal{I}_k$ маємо

$$|Q_{i(k)}^{(n)} - 1| \leq \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1 - g_{i(k)})|z_{i(k+1)}|}{|Q_{i(k+1)}^{(n)}|} < 1 - g_{i(k)}.$$

Звідси, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо нерівності (2.36).

Зрозуміло, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.32) розбігається, якщо

$$Q_0 = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} = 0.$$

Оскільки за умовою цієї теореми $|z_{i(1)}| \leq 1/N$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і на підставі нерівностей (2.28) і (2.29) $|Q_{i(1)}| \geq g_{i(1)}$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$, то рівність $Q_0 = 0$ рівносильна тому, що

$$|z_{i(1)}| = \frac{1}{N}, \ \frac{g_{i(1)}}{|Q_{i(1)}|} = 1, \ \frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -\frac{1}{N} \text{ для всіх } \ i(1) \in \mathcal{I}_1.$$

Звідси та із умов (2.36) випливає, що

$$Q_{i(1)} = g_{i(1)}, \ z_{i(1)} = -\frac{1}{N} \text{ для всіх } \ i(1) \in \mathcal{I}_1. \tag{2.37}$$

Тепер, оскільки

$$Q_{i(1)} = 1 + (1 - g_{i(1)}) \lim_{n\to\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(n)}},\ i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

то, враховуючи (2.21) і (2.37), для довільного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(n)}} = -1,$$

звідки, міркуваннями, подібними до вище наведених, маємо

$$Q_{i(2)} = g_{i(2)},\ z_{i(2)} = -\frac{1}{i_1} \text{ для всіх } \ i(2) \in \mathcal{I}_2.$$

Застосовуючи далі індукцію, отримаємо, що для розбіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.32) необхідно виконання таких умов

$$Q_{i(k)} = g_{i(k)},\ z_{i(k)} = -\frac{1}{i_{k-1}} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{2.38}$$

Тому, якщо існують $k \geq 1$ і $i(k) \in \mathcal{I}_k$, такі, що $z_{i(k)} \neq -1/i_{k-1}$, то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.32) збігається. Крім цього, оскільки $Q_0 \neq 0$ і $Q_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то умови (2.38) не виконуватимуться, якщо існують $k \geq 1$ і $i(k) \in \mathcal{I}_k$, такі, що $g_{i(k)} = 0$. Таким чином, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.32) збігається. ■

Наступні три теореми є також багатовимірними аналогами згаданої вище теореми 1.10.

**Теорема 2.5.** *Нехай $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, — дійсні сталі такі, що*

$$0 < g_0 \leq 1,\ 0 \leq g_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{2.39}$$

*або*

$$0 < g_0 \leq 1,\ 0 < g_{i(k)} \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{2.40}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i(1)}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1} \tag{2.41}$$

*збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.24);

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.41) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$\left|z-\frac{1}{2-g_0}\right|\leq\frac{1-g_0}{2-g_0}. \tag{2.42}$$

**Доведення.** Міркуваннями подібними до міркувань, викладених в доведенні твердження 1) теореми 2.3, отримуємо, що мажорантою гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.41) є гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{-g_{i(1)}(1-g_0)/N}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})/i_{k-1}}{1},$$

підхідні дроби якого утворюють монотонно зростаючу і обмежену зверху послідовність. Звідси випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.41) збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, що задовольняють умови (2.24).

Доведемо твердження 2) цієї теореми. Для цього значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.41) або значення будь-якого його підхідного дробу запишемо у вигляді

$$z=\frac{g_0}{1+(1-g_0)w},$$

де, на підставі твердження 2) теореми 2.3, $|w|\leq 1$. Тоді $|1-g_0/z|\leq 1-g_0$, звідки, елементарними перетвореннями, отримуємо (2.42). ■

Застосовуючи метод мажорант, доведемо таку теорему:

**Теорема 2.6.** *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.21) *або* (2.22). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.23) *збігається абсолютно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *таких, що*

$$\sum_{i_1=1}^{N} |z_{i(1)}| \leq 1, \ \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} |z_{i(k+1)}| \leq 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1, \tag{2.43}$$

*і, якщо, крім цього,*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-\nu_k}{\nu_k} = 0, \tag{2.44}$$

*де*

$$\nu_k = \min_{i(k)\in\mathcal{I}_k} g_{i(k)}, \ k \geq 1,$$

*то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.23) *збігається абсолютно і рівномірно.*

**Доведення.** Міркуваннями, викладеними в доведенні теореми 2.1, покажемо, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{1} \tag{2.45}$$

із послідовністю підхідних дробів $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є мажорантою гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.23) із послідовністю підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Нехай

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{-g_{i(r)}(1-g_{i(r-1)})|z_{i(r)}|}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$. Тоді, очевидно, виконується таке рекурентне співвідношення

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1-g_{i(k)})|z_{i(k+1)}|}{G_{i(k+1)}^{(n)}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$ і $n \geq 2$, при цьому $G^{(n)}_{i(n)} = 1$ для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, $n \geq 1$, і, за аналогією із (2.28)–(2.30) для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$ і $n \geq 1$ виконуються такі нерівності

$$|Q^{(n)}_{i(k)}| \geq G^{(n)}_{i(k)} \tag{2.46}$$

і

$$G^{(n)}_{i(k)} > g_{i(k)}, \tag{2.47}$$

якщо виконуються умови (2.21), або

$$G^{(n)}_{i(k)} \geq g_{i(k)}, \tag{2.48}$$

якщо виконуються умови (2.22).

Із нерівностей (2.46)–(2.48) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)} \neq 0$ і $G^{(n)}_{i(k)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$ і $n \geq 1$. Тому, застосовуючи формулу (1.44) до різниць двох підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (2.23) і (2.45), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ маємо

$$|f_{n+k} - f_n| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}| \prod\limits_{r=2}^{n+1} g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})|z_{i(r)}|}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} |Q^{(n+k)}_{i(r)}| \prod\limits_{r=1}^{n} |Q^{(n)}_{i(r)}|} \leq$$

$$\leq (-1)^n \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}| \prod\limits_{r=2}^{n+1} (-g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})|z_{i(r)}|)}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} G^{(n+k)}_{i(r)} \prod\limits_{r=1}^{n} G^{(n)}_{i(r)}} \leq h_{n+k} - h_n.$$

Звідси випливає, що послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотонно зростає, а на підставі нерівностей (2.47) або (2.48) маємо

$$h_n = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{G^{(n)}_{i(1)}} \leq 1, \ n \geq 1.$$

Тому існує скінченна границя

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Крім цього, із вище наведених міркувань для $k \geq 1$ отримуємо

$$\sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \leq \sum_{n=1}^{k} (h_{n+1} - h_n) = h_{k+1} - \sum_{i_1=1}^{N} g_{i(1)} |z_{i(1)}|.$$

Зрозуміло, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$$

збігається. Це означає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.23) збігається абсолютно.

Застосовуючи співвідношення (2.43) і (2.47) або (2.48) до формули різниці двох підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.45) і враховуючи, що для $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$,

$$\frac{1 - g_{i(k)}}{g_{i(k)}} \leq \frac{1 - \nu_k}{\nu_k}, \tag{2.49}$$

для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ отримаємо

$$|f_{n+k} - f_n| \leq h_{n+k} - h_n < \prod_{r=1}^{n} \frac{1 - \nu_r}{\nu_r}.$$

Звідси, враховуючи (2.44), випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.23) збігається абсолютно і рівномірно. ■

**Теорема 2.7.** *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.39) *або* (2.40). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.41) *збігається абсолютно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.43), *і, якщо, крім цього, виконується рівність* (2.44), *то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.41) *збігається абсолютно і рівномірно.*

**Доведення.** Міркуваннями подібними до міркувань, викладених в доведенні теореми 2.6, отримуємо, що мажорантою гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.41) є гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{-g_{i(1)}(1-g_0)|z_{i(1)}|}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{1}$$

із послідовністю підхідних дробів $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка монотонно зростає і обмежену зверху. Звідси випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.41) збігається абсолютно.

Оскільки $g_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, задовольняють умови (2.39) або (2.40) і $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, — (2.43), то виконуються нерівності (2.46) і (2.47) або (2.48). Тому, застосовуючи формулу (1.44) до різниць двох підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (2.41) і використовуючи нерівності (2.46) і (2.47) або (2.48), а також (2.49), для $n\geq 1$ і $k\geq 1$ отримаємо

$$h_{n+k}-h_n<\frac{1-g_0}{g_0}\prod_{r=1}^{n}\frac{1-\nu_r}{\nu_r}.$$

Звідси, враховуючи (2.44), випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.41) збігається абсолютно і рівномірно. ■

Для доведення наступної теореми із кожної множини мультиіндексів $\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, виділимо підмножини

$$\overline{\mathcal{I}}_1=\{i(1):\ i(1)\in\mathcal{I}_1,\ g_{i(1)}\neq 0\},$$
$$\overline{\mathcal{I}}_k=\{i(k):\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ i(k-1)\in\overline{\mathcal{I}}_{k-1},\ g_{i(k)}\neq 0\}\ \text{для}\ k\geq 2,$$

і, крім цього, із множини індексів $\mathcal{I}=\{1,2,\ldots,N\}$ — підмножини

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}=\{i_{k+1}:\ i_{k+1}\in\mathcal{I},\ g_{i(k+1)}\neq 0,\ i(k)\in\overline{\mathcal{I}}_k\}\ \text{для всіх}\ \ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 1.$$

Вважатимемо, що для $k\geq 2$ і для кожного $i(k-1)\in\overline{\mathcal{I}}_{k-1}$ множина $\overline{\mathcal{I}}_k$ порожня, якщо $g_{i(k)}=0$, $1\leq i_k\leq i_{k-1}$, а також, що для $k\geq 1$ підмножина $\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}$ порожня, якщо $i(k)\notin\overline{\mathcal{I}}_k$ або $g_{i(k+1)}=0$, $1\leq i_{k+1}\leq i_k$.

**Теорема 2.8.** *Нехай* $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.21). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.32) *збігається для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.43), *якщо виконується одна із умов:*

1)

$$\sum_{i_1 \in \overline{\mathcal{I}}_1} z_{i(1)} \neq -1 \text{ або } \sum_{i_1=1}^{N} g_{i(1)} = 0;$$

2) *існує мультиіндекс* $i(k) \in \overline{\mathcal{I}}_k$, $k \geq 1$, *такий, що*

$$\sum_{i_{k+1} \in \widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}} z_{i(k+1)} \neq -1 \text{ або } \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} g_{i(k+1)} = 0.$$

**Доведення.** На підставі теореми 2.6 гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними (2.33) і (2.34) збігаються і виконуються нерівності (2.46) і (2.47). Міркуваннями подібними до міркувань, викладених в доведенні теореми 2.4, отримаємо нерівності (2.35) і (2.36).

Зрозуміло, що для розбіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.32) необхідно, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{n \to \infty} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} = 0.$$

Тому гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.32) збігається, якщо $g_{i(1)} = 0$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$. Нехай $\overline{\mathcal{I}}_1 \neq \emptyset$. Тоді, використовуючи нерівності нерівності (2.46) і (2.47), маємо

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i_1 \in \overline{\mathcal{I}}_1} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} = \sum_{i_1 \in \overline{\mathcal{I}}_1} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1. \tag{2.50}$$

Оскільки

$$\sum_{i_1=1}^{N} |z_{i(1)}| \leq 1 \text{ і } |Q_{i(1)}| \geq g_{i(1)}, \ i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

то

$$\sum_{i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1}|z_{i(1)}|=1 \text{ і } \frac{g_{i(1)}}{|Q_{i(1)}|}=1 \text{ для всіх } \ i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1. \tag{2.51}$$

Із співвідношень (2.36), (2.50) і (2.51) випливає, що

$$Q_{i(1)}=g_{i(1)} \text{ для всіх } i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1,\ \sum_{i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1} z_{i(1)}=-1.$$

Тепер оскільки

$$Q_{i(1)}=1+(1-g_{i(1)})\lim_{n\to\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(n)}},\ i(1)\in\mathcal{I}_1,$$

то для довільного $i(1)\in\overline{\mathcal{I}}_1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(n)}}=-1.$$

Тому гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.32) збігається, якщо існує індекс $i_k\in\overline{\mathcal{I}}_1$ такий, що множина $\widetilde{\mathcal{I}}_{i_k}$ порожня. Нехай $\widetilde{\mathcal{I}}_{i(1)}\neq\emptyset$ для всіх $i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1$. Тоді, для розбіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.32) необхідно, щоб

$$\sum_{i_2\in\widetilde{\mathcal{I}}_{i(1)}}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}}=-1 \text{ для всіх } i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1,$$

звідки, міркуваннями подібними вище, маємо

$$Q_{i(2)}=g_{i(2)} \text{ для всіх } \ i(2)\in\overline{\mathcal{I}}_2,\ \sum_{i_2\in\widetilde{\mathcal{I}}_{i(1)}} z_{i(2)}=-1 \text{ для всіх } i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1.$$

Застосовуючи далі індукцію за умов, що $\overline{\mathcal{I}}_1\neq\emptyset$ і $\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k)}\neq\emptyset$ для всіх $i(k)\in\overline{\mathcal{I}}_k$ і $k\geq 1$ отримуємо, що для розбіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.32) необхідно виконання таких умов

$$\sum_{i_1\in\overline{\mathcal{I}}_1} z_{i(1)}=-1,\ \sum_{i_k\in\widetilde{\mathcal{I}}_{i(k-1)}} z_{i(k)}=-1 \text{ для всіх } i(k-1)\in\overline{\mathcal{I}}_{k-1},\ k\geq 2.$$

Тому, виконання умови 1) або 2) цієї теореми забезпечує збіжність гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.32). ■

Зазначимо, що теорема 2.8 є багатовимірним аналогом теореми 1.12. Отримані у цьому підрозділі ознаки збіжності можна застосувати до дослідження збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними загального вигляду (див. с. 64), якщо його еквівалентним перетворенням звести до гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, частинні знаменники якого дорівнюють одиниці.

## 2.3. Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$

У підрозділі 2.1 гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними мають частинні чисельники (див. с. 64), які можна записати у вигляді $q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}$ із $0 \le q_{i(k)} \le 1$ і $|z_{i(k)}| \le 1$. Дослідимо збіжність гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінним із цими елементами. Для цього введемо такі множини мультиіндексів

$$\widehat{\mathcal{I}}_r = \{i(k) : \, i(k) \in \mathcal{I}_k, \, r \le i_p \le i_{p-1}, \, 1 \le p \le k, \, k \ge 1, \, i_0 = N\}, \, 1 \le r \le N.$$

**Теорема 2.9.** *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 0$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.3) *або* (2.4). *Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{q_0^N}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} q_0^{i_1-1}(1-q_0)z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1} \tag{2.52}$$

*збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *таких, що*

$$|z_{i(k)}| \le 1 \text{ для всіх } \; i(k) \in \mathcal{I}_k, \; k \ge 1; \tag{2.53}$$

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.52) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$|z| \le \prod_{r=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{S_r}\right), \tag{2.54}$$

*де*

$$S_r = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{\substack{0 \le k \le n \\ i_p = r,\ 1 \le p \le k}} \frac{q_{i(k)}}{1 - q_{i(k)}}. \tag{2.55}$$

**Доведення.** Твердження 1) цієї теореми є наслідком твердження 1) теореми 2.2. Доведемо твердження 2).

Нехай

$$F_0^{(r)} = 1 + \frac{q_r(1-q_0)z_r^{(r-1)}}{1} + \frac{q_{r,r}(1-q_r)z_{r,r}^{(r-1)}}{1} + \\ + \frac{q_{r,r,r}(1-q_{r,r})z_{r,r,r}^{(r-1)}}{1} + \ldots,\ 1 \le r \le N,$$

$$F_{i(k)}^{(r)} = 1 + \frac{q_{i(k),r}(1-q_{i(k)})z_{i(k),r}^{(r-1)}}{1} + \frac{q_{i(k),r,r}(1-q_{i(k),r})z_{i(k),r,r}^{(r-1)}}{1} + \\ + \frac{q_{i(k),r,r,r}(1-q_{i(k),r,r})z_{i(k),r,r,r}^{(r-1)}}{1} + \ldots,\ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1},\ 1 \le r \le N-1,$$

де

$$z_{i(k)}^{(0)} = z_{i(k)} \text{ для } i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_1$$

$$z_{i(k)}^{(r)} = \frac{q_{i(k)}q_{i(k-1)}}{F_{i(k)}^{(r)}F_{i(k-1)}^{(r)}} z_{i(k)}^{(r-1)} \text{ для } i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1},\ 1 \le r \le N-1.$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.52) запишемо у вигляді

$$\frac{q_0^N}{F_0^{(1)}F_0^{(2)}\ldots F_0^{(N)}}. \tag{2.56}$$

Справді, процес еквівалентних перетворень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.52) проведемо покроково.

Крок 1. Оскільки за умов (2.53) і (2.3) або (2.4) на підставі твердження 3) теореми 1.10 $F_0^{(1)} \neq 0$ і $F_{i(k)}^{(1)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2$, то еквівалентним перетворенням $\rho_0^{(1)} = 1/F_0^{(1)}$, $\rho_{i(k)}^{(1)} = 1/F_{i(k)}^{(1)}$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_1$, де $F_{i(k)}^{(1)} = 1$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_1 \backslash \widehat{\mathcal{I}}_2$, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.52) зведемо до вигляду

$$\frac{q_0^N/F_0^{(1)}}{1} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1-1} q_0^{i_1-2}(1-q_0) z_{i(1)}^{(1)}}{1} + \\ + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k-1} q_{i(k-1)}^{i_k-2}(1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}^{(1)}}{1}. \tag{2.57}$$

Крок 2. За умов (2.53) і (2.3) або (2.4) згідно з твердженням 2) теореми 1.10 значення неперервних дробів $q_0/F_0^{(1)}$, $q_{i(k)}/F_{i(k)}^{(1)}$, $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2$, та їх підхідних дробів $F_0^{(1)n}$, $F_{i(k)}^{(1)n}$, $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2$, $n \geq 1$, належать замкненому кругу $|z| \leq 1$, тобто, зокрема, виконуються такі нерівності

$$\frac{q_0}{|F_0^{(1)n}|} \leq 1, \ \frac{q_{i(k)}}{|F_{i(k)}^{(1)n}|} \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2, \ n \geq 1. \tag{2.58}$$

Тому, використовуючи нерівності (2.58), для довільних $n \geq 1$ і $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2$ за умов (2.53) і (2.3) або (2.4) маємо

$$|z_{i(k)}^{(1)n}| = \frac{q_{i(k-1)} q_{i(k)}}{|F_{i(k-1)}^{(1)n} F_{i(k)}^{(1)n}|} |z_{i(k)}| \leq 1,$$

звідки випливає, що

$$|z_{i(k)}^{(1)}| = \lim_{n\to\infty} |z_{i(k)}^{(1)n}| \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2. \tag{2.59}$$

Позаяк за умов (2.59) і (2.3) або (2.4) на підставі твердження 3) теореми 1.10 $F_0^{(2)} \neq 0$ і $F_{i(k)}^{(2)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_3$, то еквівалентним перетворенням

$$\rho_0^{(2)} = \frac{1}{F_0^{(2)}}, \ \rho_{i(k)}^{(2)} = \frac{1}{F_{i(k)}^{(2)}} \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2,$$

де $F^{(2)}_{i(k)} = 1$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_2 \backslash \widehat{\mathcal{I}}_3$, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.57) зведемо до вигляду

$$\frac{q_0^N/(F_0^{(1)}F_0^{(2)})}{1} + \sum_{i_1=3}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1-2} q_0^{i_1-3}(1-q_0) z_{i(1)}^{(2)}}{1} + \\ + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=3}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k-2} q_{i(k-1)}^{i_k-3}(1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}^{(2)}}{1}. \tag{2.60}$$

Продовжуючи далі процес згортання гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.60), подібно до того, як на другому кроці, на $(N-1)$-у кроці отримуємо, що

$$|z_{i(k)}^{(r)}| \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1}, \ 1 \leq r \leq N-2, \tag{2.61}$$

і, що за умов (2.61) і (2.3) або (2.4) для кожного $1 \leq r \leq N-1$ значення неперервних дробів $q_0/F_0^{(r)}$, $q_0/F_{i(k)}^{(r)}$, $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1}$, та їх підхідних дробів $F_0^{(r)n}$, $F_{i(k)}^{(r)n}$, $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1}$, $n \geq 1$, належать замкненому кругу $|z| \leq 1$, тобто, зокрема, виконуються такі нерівності

$$\frac{q_0}{|F_0^{(r)n}|} \leq 1, \ \frac{q_{i(k)}}{|F_{i(k)}^{(r)n}|} \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1}, \ n \geq 1, \tag{2.62}$$

а також, що $F_0^{(r)} \neq 0$ і $F_{i(k)}^{(r)} \neq 0$ для всіх $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_{r+1}$. Крім цього, отримуємо гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.52) у вигляді

$$\frac{q_0^N/(F_0^{(1)}F_0^{(2)}\dots F_0^{(N-1)})}{1} + \frac{q_N(1-q_0)z_N^{(N-1)}}{1} + \frac{q_{N,N}(1-q_N)z_{N,N}^{(N-1)}}{1} + \dots$$

або те саме, що у вигляді (2.56).

Використовуючи тепер нерівності (2.62), для довільних $n \geq 1$ і $i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_N$ за умов (2.61) і (2.3) або (2.4) маємо

$$|z_{i(k)}^{(N-1)n}| = \frac{q_{i(k-1)}q_{i(k)}}{|F_{i(k-1)}^{(N-1)n} F_{i(k)}^{(N-1)n}|} |z_{i(k)}^{(N-2)}| \leq 1, \tag{2.63}$$

Із співвідношення (2.63) випливає, що

$$|z_{i(k)}^{(N-1)}| = \lim_{n\to\infty} \left|z_{i(k)}^{(N-1)n}\right| \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \widehat{\mathcal{I}}_N.$$

Таким чином, за умов цієї теореми на підставі викладених вище міркувань і твердження 2) теореми 1.10 для кожного $1 \le r \le N$ значення неперервного дробу $q_0/F_0^{(r)}$ та його підхідних дробів належать замкненому кругу

$$|z| \le 1 - \frac{1}{S_r},$$

де $S_r$ означене в (2.55). Нарешті, звідси і з огляду на запис гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.52) у вигляді (2.56), зрозуміло, що його значення і значення його підхідних дробів належать замкненому кругу (2.54). ■

Зазначимо, що теорема 2.9 є багатовимірним аналогом теореми 1.10. Наступний результат є багатовимірним аналогом теореми 1.11.

**Теорема 2.10.** *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *— дійсні сталі такі, що*

$$0 \le q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1, \tag{2.64}$$

*або*

$$0 < q_{i(k)} \le 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1, \tag{2.65}$$

*і нехай*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right) < 1, \tag{2.66}$$

*де*

$$S_r^{(i_1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ i_p = r,\ 2 \le p \le k}} \frac{q_{i(k)}}{1 - q_{i(k)}},\ 1 \le r \le i_1,\ i_1 \in \mathcal{I}_1. \tag{2.67}$$

*Тоді*

1) *гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k - 1} (1 - q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{2.68}$$

*збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.53);

2) *значення гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними* (2.68) *і його підхідних дробів належать замкненому кругу*

$$|z| \leq \left(1 - \sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right)\right)^{-1}.$$

**Доведення.** На підставі теореми 2.9 гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$\frac{q_{i(1)}^{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1}, \ i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

збігаються абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, що задовольняють нерівність (2.53), значення цих дробів та їх підхідних дробів належать відповідно замкнутим кругам

$$|z| \leq \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right), \ i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

де $S_r^{(i_1)}$, $1 \leq r \leq i_1$, $i_1 \in \mathcal{I}_1$, визначаються за формулами (2.67). Тому, для доведення твердження 2) цієї теореми досить зауважити, що за умови (2.66) модулі значень гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.68) і його підхідних дробів є не більші, ніж

$$\frac{1}{1} - \sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right) < 1.$$

Із наведених вище міркувань також випливає, що гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.68) збігається абсолютно і рівномірно для $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, що задовольняють нерівність (2.53). ■

Наступна теорема є наслідком теореми 2.10 і багатовимірним аналогом теореми 1.13.

**Теорема 2.11.** *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.64) *або* (2.65) *і нехай*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \prod_{r=1}^{i_1} \left(1 - \frac{1}{S_r^{(i_1)}}\right) = 1,$$

*де* $S_r^{(i_1)}$, $1 \leq r \leq i_1$, $i_1 \in \mathcal{I}_1$, *означені в* (2.67). *Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.68) *збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.53) *і таких, що* $|z_{i_1}| \leq l$ *принаймні для одного індексу* $i_1$ *із* $\mathcal{I}_1$ *для кожної сталої* $l$, $l < 1$.

Міркуваннями, подібними до міркувань при встановленні ознак збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (2.68), отримуємо такі ознаки збіжності.

**Теорема 2.12.** *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.64) *або* (2.65) *і нехай*

$$\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)} < 1.$$

*Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{i(1)}^{i_1+1} z_{i(1)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1} (1 - q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1} \tag{2.69}$$

*збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (2.53).

**Теорема 2.13.** *Нехай* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— дійсні сталі такі, що виконуються нерівності* (2.64) *або* (2.65) *і нехай*

$$\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)} = 1.$$

*Тоді гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (2.69) *збігається абсолютно і рівномірно для* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють*

*нерівність* (2.53) *і таких, що* $|z_{i_1}| \leq l$ *принаймні для одного індексу* $i_1$ *із* $\mathcal{I}_1$ *для кожної сталої* $l$, $l < 1$.

Зазначимо, що теореми 2.9–2.13 можна застосувати до дослідження збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними вигляду

$$\frac{a_0}{b_0} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{2.70}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$ і $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 0$, якщо його еквівалентним перетворенням звести до гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, частинні знаменники якого дорівнюють одиниці. Наприклад, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (2.70) збігається абсолютно і рівномірно, якщо існують дійсні сталі $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, такі, що

$$0 < q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 0,$$

і

$$\left| \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} b_{i(k-1)}} \right| \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k - 1} (1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1.$$

**Висновки до розділу 2.** Цей розділ присвячено дослідженню збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці.

У результаті проведених досліджень отримано багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, які є багатовимірними аналогами відповідних класичних результатів О. Перрона, А. Прінгсхайма, Е. Б. Ван Флека, Г. С. Волла і Дж. Ф. Пейдона для неперервних дробів.

Відзначимо, що вираз вигляду $q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})$, який суттєво враховує структуру досліджуваних об'єктів, застосовано до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними вперше.

Отримані ознаки збіжності можуть застосовуватися до дослідження збіжності інших гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в таких працях: [30, 47, 58, 104].

# РОЗДІЛ 3

# ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІДПОВІДНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Важливим застосуванням гіллястих ланцюгових дробів є зображення аналітичних функцій багатьох змінних (формальних кратних рядів Лорана) функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. При цьому суттєву роль відіграє поняття відповідності. У цьому розділі, крім стандартних позначень, також використовуватимемо позначення введені в підрозділі 1.6 (див. с. 73). У підрозділі 3.1 описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (під функцією багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат) розуміємо таку функцію багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$). У підрозділі 3.2 означено деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. У підрозділах 3.3–3.5 досліджуються властивості відповідності для деяких функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

## 3.1. Відповідність

Відповідність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних відіграє суттєву роль в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. За аналогією із одновимірним випадком (див. означення на початку підрозділу 1.2) визначимо поняття відповідності в точках $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ і $\mathbf{z}=\boldsymbol{\infty}$ із $\widehat{\mathbb{C}}^N$.

Спочатку дамо поняття відповідності в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. За П. Хенріці [141] вираз

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{m}} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1=m_1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2}^{\infty}\ldots\sum_{k_N=m_N}^{\infty} c_{k_1,k_2,\ldots,k_N} z_1^{k_1} z_2^{k_2}\ldots z_N^{k_N}, \tag{3.1}$$

де $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$, $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$, і $c_{\mathbf{m}} \neq 0$ або всі $c_{\mathbf{k}} = 0$, назвемо формальним кратним рядом Лорана в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Позначимо через символ $\mathbf{0}$ нейтральний елемент для операції додавання формальних кратних рядів Лорана. Множина $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ усіх формальних кратних рядів Лорана в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ утворює поле над $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення (див., наприклад, [136, 141]). Якщо $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$, то вираз (3.1) називається також формальним кратним степеневим рядом в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Для всіх $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ означимо функцію $\lambda : \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ так:

$$\lambda(L_{\mathbf{0}}) = \begin{cases} |\mathbf{m}|, \text{ якщо } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum\limits_{\mathbf{k}\geq\mathbf{m}} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ c_{\mathbf{m}} \neq 0, \\ \\ \infty, \text{ якщо } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

При цьому для будь-яких $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ із $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ виконуються такі співвідношення:

$$\lambda(L_{\mathbf{0}}P_{\mathbf{0}}) = \lambda(L_{\mathbf{0}}) + \lambda(P_{\mathbf{0}}), \tag{3.3}$$

$$\lambda(L_{\mathbf{0}}/P_{\mathbf{0}}) = \lambda(L_{\mathbf{0}}) - \lambda(P_{\mathbf{0}}), \text{ якщо } P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \not\equiv 0, \tag{3.4}$$

$$\lambda(L_{\mathbf{0}} \pm P_{\mathbf{0}}) \geq \min(\lambda(L_{\mathbf{0}}), \lambda(P_{\mathbf{0}})), \tag{3.5}$$

$$\lambda(L_{\mathbf{0}} \pm P_{\mathbf{0}}) = \min(\lambda(L_{\mathbf{0}}), \lambda(P_{\mathbf{0}})), \text{ якщо } \lambda(L_{\mathbf{0}}) \neq \lambda(P_{\mathbf{0}}). \tag{3.6}$$

Справді, у випадку $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0$ і (або) $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0$ співвідношення (3.3)–(3.6) очевидні. Нехай $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \not\equiv 0$, тобто в (3.1) $c_{\mathbf{m}} \neq 0$, і

$$P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{q}} d_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

де $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^N$, $d_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{q}$, і $d_{\mathbf{q}} \neq 0$. Тоді формальні кратні ряди Лорана (3.1) і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді [136]

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = c_{\mathbf{m}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}(1 + Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})),\ P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = d_{\mathbf{q}}\mathbf{z}^{\mathbf{q}}(1 + R_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})),$$

де $Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $R_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ — формальні кратні ряди Лорана з додатними степенями однорідних поліномів. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = c_{\mathbf{m}}d_{\mathbf{q}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}+\mathbf{q}}(1+Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}))(1+R_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})),$$
$$\frac{L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})}{P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})} = \frac{c_{\mathbf{m}}}{d_{\mathbf{q}}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}-\mathbf{q}}(1+Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}))\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n R_{\mathbf{0}}^n(\mathbf{z})\right),$$
$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \pm P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = c_{\mathbf{m}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}(1+Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})) \pm d_{\mathbf{q}}\mathbf{z}^{\mathbf{q}}(1+R_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})),$$

де $R_{\mathbf{0}}^n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$ — формальні кратні ряди Лорана з додатними степенями однорідних поліномів. Нарешті, застосовуючи $\lambda$ до $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$, $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})/P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \pm P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$, отримуємо (3.3)–(3.6).

Норму $\|\cdot\|$ для поля $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ означимо у такий спосіб:

$$\|L_{\mathbf{0}}\| = 2^{-\lambda(L_{\mathbf{0}})} \text{ для } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N,$$

де $2^{-\infty} = 0$. Із співвідношень (3.3)–(3.6) випливає, що норма $\|\cdot\|$ має такі властивості: для всіх $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ із $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$

$$\|L_{\mathbf{0}}\| \geq 0, \tag{3.7}$$
$$\|L_{\mathbf{0}}\| = 0 \text{ тоді і лише тоді, коли } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0, \tag{3.8}$$
$$\|L_{\mathbf{0}}P_{\mathbf{0}}\| = \|L_{\mathbf{0}}\| \cdot \|P_{\mathbf{0}}\|, \tag{3.9}$$
$$\|L_{\mathbf{0}} + P_{\mathbf{0}}\| \leq \|L_{\mathbf{0}}\| + \|P_{\mathbf{0}}\|. \tag{3.10}$$

Дійсно, для будь-якого $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ співвідношення (3.7), (3.8) і для будь-яких $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ із $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ таких, що $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0$ і (або) $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \equiv 0$ співвідношення (3.9), (3.10) є очевидними. Нехай $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \not\equiv 0$ і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \not\equiv 0$, де $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ і $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$. Тоді із рівності (3.3) маємо

$$\|L_{\mathbf{0}}P_{\mathbf{0}}\| = 2^{-\lambda(L_{\mathbf{0}}P_{\mathbf{0}})} = 2^{-\lambda(L_{\mathbf{0}})-\lambda(P_{\mathbf{0}})} = \|L_{\mathbf{0}}\| \cdot \|P_{\mathbf{0}}\|,$$

а із співвідношень (3.5) і (3.6) відповідно отримуємо

$$\|L_{\mathbf{0}} + P_{\mathbf{0}}\| = 2^{-\lambda(L_{\mathbf{0}}+P_{\mathbf{0}})} = 2^{-\min(\lambda(L_{\mathbf{0}}),\lambda(P_{\mathbf{0}}))} \leq$$
$$\leq 2^{-\lambda(L_{\mathbf{0}})} + 2^{-\lambda(P_{\mathbf{0}})} = \|L_{\mathbf{0}}\| + \|P_{\mathbf{0}}\|.$$

Отже, $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ — нормоване поле і функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z})} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}, \tag{3.11}$$

є визначеним, якщо елементи $b_0(\mathbf{z})$, $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, належать $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$, $a_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і, якщо для $k \geq 1$ існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$ такий що $b_{i(k)}(\mathbf{z}) = 0$, то $b_{i(k-1),j}(\mathbf{z}) \neq 0$ для $1 \leq j \leq i_{k-1}$ і $j \neq i_k$. Підхідні дроби цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними належать $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ або дорівнюють $\infty$.

Нехай $R(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних мероморфна в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ така, що існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ — голоморфна в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат) (див., наприклад, [121]). Для функції багатьох змінних $R(\mathbf{z})$ позначимо її розвинення в формальний кратний ряд Лорана (3.1) в початку координат (таке, що збігається у відкритому полікрузі із виколотою точкою $\mathbf{z} = \mathbf{0}$) через $\Lambda_{\mathbf{0}}(R)$, тобто задамо відображення $\Lambda_{\mathbf{0}} : R(\mathbf{z}) \to \Lambda_{\mathbf{0}}(R)$.

Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в початку координат, є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L_{\mathbf{0}} - \Lambda_{\mathbf{0}}(R_n)) = \infty.$$

Якщо послідовність $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$, то порядок відповідності функції багатьох змінних $R_n(\mathbf{z})$ визначимо так:

$$\nu_n = \lambda(L_{\mathbf{0}} - \Lambda_{\mathbf{0}}(R_n)).$$

У цьому випадку за означенням функції $\lambda$ в (3.2) випливає, що формальні кратні ряди Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $\Lambda_{\mathbf{0}}(R_n)$ збігаються почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно.

Функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.11) назвемо відповідним до формального кратного ряду Лорана

$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$, якщо послідовність його підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$.

Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.11)) назвемо відповідною (-им) в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ до функції $R(\mathbf{z})$, мероморфної в початку координат, якщо ця послідовність (цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними) є відповідною (-им) до формального кратного ряду Лорана $\Lambda_{\mathbf{0}}(R)$ в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$.

За допомогою норми $\|\cdot\|$ означимо функцію $\rho:\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N\times\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ так:

$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})=\|L_{\mathbf{0}}-P_{\mathbf{0}}\| \text{ для всіх } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\in\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N,\ P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\in\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N.$$

При цьому для всіх $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\in\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$, $P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\in\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$, $Q_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\in\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ виконуються такі умови

$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})=0 \text{ тоді і лише тоді, коли } L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\equiv P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}),$$
$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})=\rho(P_{\mathbf{0}},L_{\mathbf{0}}),$$
$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})+\rho(P_{\mathbf{0}},Q_{\mathbf{0}})\geq\rho(L_{\mathbf{0}},Q_{\mathbf{0}}).$$

Справді, перша властивість очевидна. Із рівності (3.9) і означень норми $\|\cdot\|$ та відображення $\lambda$ в $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ маємо

$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})=\|L_{\mathbf{0}}-P_{\mathbf{0}}\|=\|(-1)(P_{\mathbf{0}}-L_{\mathbf{0}})\|=\|(-1)\|\cdot\|P_{\mathbf{0}}-L_{\mathbf{0}}\|=$$
$$=2^{-\lambda(-1)}\|P_{\mathbf{0}}-L_{\mathbf{0}}\|=2^0\|P_{\mathbf{0}}-L_{\mathbf{0}}\|=\|P_{\mathbf{0}}-L_{\mathbf{0}}\|=\rho(P_{\mathbf{0}},L_{\mathbf{0}}),$$

а із нерівності (3.10) отримуємо

$$\rho(L_{\mathbf{0}},P_{\mathbf{0}})+\rho(P_{\mathbf{0}},Q_{\mathbf{0}})=\|L_{\mathbf{0}}-P_{\mathbf{0}}\|+\|P_{\mathbf{0}}-Q_{\mathbf{0}}\|\geq$$
$$\geq\|(L_{\mathbf{0}}-P_{\mathbf{0}})+(P_{\mathbf{0}}-Q_{\mathbf{0}})\|=\|L_{\mathbf{0}}-Q_{\mathbf{0}}\|=\rho(L_{\mathbf{0}},Q_{\mathbf{0}}).$$

Отже, $\rho$ — метрика поля $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ і у термінах метрики $\rho$ твердження "послідовність $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$" еквівалентне твердженню "послідовність $\{\Lambda_{\mathbf{0}}(R_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ відносно метрики $\rho$".

Тепер дамо поняття відповідності в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$. Вираз

$$L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{m}} c_{-\mathbf{k}} z^{-\mathbf{k}},$$

де $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^N$, $c_{-\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$, і $c_{-\mathbf{m}} \neq 0$ або всі $c_{-\mathbf{k}} = 0$, назвемо формальним кратним рядом Лорана в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$. Подібно до $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$ множина $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ усіх формальних кратних рядів Лорана в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$ утворює поле над $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення.

Для всіх $L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ означимо функцію $\lambda : \mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ так:

$$\lambda(L_{\boldsymbol{\infty}}) = \begin{cases} |\mathbf{m}|, \text{ якщо } L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) = \sum\limits_{\mathbf{k} \geq \mathbf{m}} c_{-\mathbf{k}} z^{-\mathbf{k}}, \ c_{-\mathbf{m}} \neq 0, \\ \infty, \text{ якщо } L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) \equiv 0. \end{cases}$$

При цьому, подібним чином, для будь-яких $L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z})$ і $P_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z})$ із $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ виконуються співвідношення, аналогічні співвідношенням (3.3)–(3.6). Норму $\| \cdot \|$ для поля $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ означимо у такий спосіб:

$$\|L_{\boldsymbol{\infty}}\| = 2^{-\lambda(L_{\boldsymbol{\infty}})} \text{ для } L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) \in \mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N,$$

де $2^{-\infty} = 0$. Продовжуючи аналогію, подібним чином, норма $\| \cdot \|$ має усі ті самі властивості, що і норма для поля $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^N$.

Отже, $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ — нормоване поле, і функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.11) є визначеним, якщо елементи $b_0(\mathbf{z})$, $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, належать $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$, $a_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і, якщо для $k \geq 1$ існує мультиіндекс $i(k) \in \mathcal{I}_k$ такий що $b_{i(k)}(\mathbf{z}) = 0$, то $b_{i(k-1),j}(\mathbf{z}) \neq 0$ для $1 \leq j \leq i_{k-1}$ і $j \neq i_k$. Підхідні дроби цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними належать $\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^N$ або дорівнюють $\infty$.

Нехай функція багатьох змінних $R(\mathbf{z})$ мероморфна в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, тобто існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфна в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$ (див. означення голоморфності в $\widehat{\mathbb{C}}^N$, наприклад, в [41, с. 29–31]). Для функції багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфної в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, позначимо її розвинення в формальний кратний ряд Лорана в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$

(таке, що збігається зовні деякого замкненого околу в $\mathbb{C}^N$ точки $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, тобто в околі із виколотою точкою $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$) через $\Lambda_\infty(R)$, тобто задамо відображення $\Lambda_\infty : R(\mathbf{z}) \to \Lambda_\infty(R)$.

Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_\infty(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, якщо послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{1}/\boldsymbol{\xi})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_\mathbf{0}(\mathbf{1}/\boldsymbol{\xi})$, отриманому із $L_\infty(\mathbf{z})$ заміною $z_k$ на $1/\xi_k$, $1 \le k \le N$.

Функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.11) назвемо відповідним до формального кратного ряду Лорана $L_\infty(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, якщо послідовність його підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до $L_\infty(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$.

Послідовність функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.11)) назвемо відповідною (-им) в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$ до функції багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфної в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, якщо ця послідовність (цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними) є відповідною (-им) до формального кратного ряду Лорана $\Lambda_\infty(R)$ в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$.

Метрику $\rho$ для поля $\mathbb{L}^N_\infty$ можна ввести подібно до метрики для поля $\mathbb{L}^N_\mathbf{0}$, і у її термінах твердження "послідовність $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є відповідною до формального кратного ряду Лорана $L_\infty(\mathbf{z})$" еквівалентне твердженню "послідовність $\{\Lambda_\infty(R_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається до формального кратного ряду Лорана $L_\infty(z)$ відносно метрики $\rho$".

За аналогією відповідність в точці $\mathbf{z} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, можна означити, розглядаючи $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{a}$. Відповідність між функціональним гіллястим ланцюговим дробом з нерівнозначними змінними (3.11) і формальним кратним рядом Лорана $L_\mathbf{0}(\mathbf{z})$ ($L_\infty(\mathbf{z})$) позначатимемо символом "$\sim$".

Зрозуміло, що властивості, аналогічні властивостям, наведеним вище для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними над полем $\mathbb{C}$, також мають місце і для функціональних гіллястих ланцюгових дробів

з нерівнозначними змінними над нормованим полем $\mathbb{L}_{\mathbf{0}}^{N}$ ($\mathbb{L}_{\boldsymbol{\infty}}^{N}$).

## 3.2. Класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Проведемо класифікацію деяких функціональних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{3.12}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, називають багатовимірним регулярним $C$-дробом з нерівнозначними змінними [15, с. 40]. Як зазначалося вище, гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними вигляду (3.12) розглядалися в роботах Д. І. Боднара та його учнів. Якщо $a_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то гіллястий ланцюговий дріб (3.12) назвемо багатовимірним $S$-дробом з нерівнозначними змінними або багатовимірним дробом Стільтьєса з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}, \tag{3.13}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, назвемо багатовимірним $g$-дробом з нерівнозначними змінними. Характерною особливістю багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними є те, що коефіцієнти частинних чисельників кожної його гілки (див. означення на с. 67), починаючи з другого поверху, формують ланцюгові послідовності (див. с. 52).

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{\pi_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} z_{i_1}} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-z_{i_1}}{1} + \frac{\pi_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{-z_{i_2}}{1} + \frac{\pi_{i(2)}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}} + \cdots,$$

де $\pi_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, назвемо багатовимірним $\pi$-дробом з нерівнозначними змінними. Цей гіллястий ланцюговий дріб є суто технічним у наших дослідженнях. У підрозділі 5.3 покажемо, що парною частиною (див. означення на с. 68) багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними є багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними. Також цю властивість використовуватимемо для дослідження збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}},$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, назвемо багатовимірним приєднаним дробом з нерівнозначними змінними. На відміну від одновимірного випадку (див. с. 42) багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними жодним чином не пов'язаний із багатовимірним приєднаним дробом з нерівнозначними змінними.

Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{d_{i(1)} + z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}}{d_{i(k)} + z_{i_k}}, \tag{3.14}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, назвемо багатовимірним $J$-дробом з нерівнозначними змінними або багатовимірним дробом Якобі з нерівнозначними змінними. Якщо $c_{i(k)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{R}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (3.14) назвемо багатовимірним дійсним $J$-дробом з нерівнозначними змінними. У підрозділі 3.5 покажемо, що багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними тісно пов'язаний із багатовимірним $J$-дробом з нерівнозначними змінними.

Зазначимо, що означені вище класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів, розглянутих у підрозділі 1.2 (див. с. 41).

### 3.3. Відповідність багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними

Розглянемо багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{3.15}$$

де $b_0 \in \mathbb{C}$, $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Нехай

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1,\ i(n) \in \mathcal{I}_n \text{ і } n \geq 1,$$

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{a_{i(r)} z_{i_r}}{1},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 1 \leq k \leq n-1,\ n \geq 2.$$

Тоді підхідні дроби багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (3.15) запишемо у вигляді $f_0(\mathbf{z}) \equiv b_0$ і

$$f_n(\mathbf{z}) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \text{ для } n \geq 1.$$

**Теорема 3.1.** *Кожний багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (3.15) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *є відповідним до однозначно визначеного формального кратного степеневого ряду*

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{3.16}$$

*де* $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. *Порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(\mathbf{z})$ *дорівнює* $(n+1)$, $n \geq 0$, *і тому формальний кратний ряд Тейлора в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *для* $f_n(\mathbf{z})$ *збігається із* $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ *почленно до всіх однорідних членів зі степенем* $n$ *включно, тобто*

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}| \geq n+1} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ n \geq 0, \tag{3.17}$$

*де* $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|\mathbf{k}| \geq n+1$, $n \geq 0$.

**Доведення.** Оскільки для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, $n \ge 1$, виконується рівність $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{0}) = 1$, то для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, $n \ge 1$, скінченний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними $1/Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ зображується формальних кратним степеневим рядом вигляду (3.16). Тому, кожний $n$-ий підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (3.15) є функцією багатьох змінних, голоморфною в початку координат, і, отже, нехай для кожного $n \ge 1$ формальний кратний степеневий ряд

$$\Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

де $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \ge \mathbf{0}$, $n \ge 0$, є розвиненням $n$-го підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Позаяк

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \not\equiv 0 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ 1 \le k \le n, \ n \ge 1,$$

то, застосовуючи формулу (1.44), до різниці двох підхідних дробів багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (3.15), для $n \ge 1$ і $k \ge 1$ в околі початку координат отримаємо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{(-1)^n \prod\limits_{r=1}^{n+1} a_{i(r)} z_{i_r}}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} Q_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} Q_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{3.18}$$

Із формули (3.18) для довільних $n \ge 1$ і $k \ge 1$ в околі точки $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ маємо

$$\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \ge n+1} (\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Звідси випливає, що для кожних $n \ge 1$ і $k \ge 1$ порядок відповідності

$$\nu_n = \lambda(\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n)) = n + 1$$

і, очевидно, прямує монотонно до $\infty$ при $n \to \infty$.

Таким чином, для кожних $n \geq 1$, $k \geq 1$ і для кожного $0 \leq |\mathbf{k}| \leq n$ виконується рівність $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}$. Багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (3.15) є відповідним в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ до формального кратного степеневого ряду (3.16), де $c_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)}$ для всіх $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, оскільки

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq n+1} (\gamma_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

для кожного $n \geq 1$. Звідси, маємо

$$\nu_n = \lambda(L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n)) = n + 1,$$

тобто порядок відповідності $n$-го підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ дорівнює $(n+1)$ і формальний кратний степеневий ряд (3.17) є формальним кратним рядом Тейлора для $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Далі доведемо єдиність формального кратного степеневого ряду (3.16). Припустимо, що багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (3.15) також є відповідним в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ до заданого формального кратного степеневого ряду

$$P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} \beta_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Оскільки для довільного $n \geq 1$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для різниці $(P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n))$ отримуємо

$$P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq n+1} (\beta_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

то $\beta_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|)}$ для всіх $\mathbf{k}$ таких, що $0 \leq |\mathbf{k}| \leq n$ і $n \geq 1$. Звідси випливає однозначна визначеність формального кратного степеневого ряду $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$. ■

Зазначимо, що теорема 3.1 є узагальненням теореми 1.1. О. Є. Баран і Д. І. Боднаром [10] доведено однозначну визначеність багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (3.15), відповідного в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ до заданого формального кратного степеневого ряду (3.16).

**Теорема 3.2.** *Нехай багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (3.15) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D$, *яка містить початок координат, до функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$, *голоморфної в* $D$. *Тоді сума формального кратного степеневого ряду* (3.16), *відповідного до багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (3.15) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, *збігається зі значенням цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області* $D$.

**Доведення.** Позаяк послідовність підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}$ багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (3.15) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D$ до функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$, голоморфної в $D$, то на підставі теореми 1.20 для кожного $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$ маємо

$$\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f_n(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} \to \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}}$$

на кожній компактній підмножині області $D$. Крім цього, згідно з теоремою 3.1 формальне розвинення кожного підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, у ряд Тейлора в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ збігається з формальним кратним степеневим рядом (3.16) почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(n-1)$ включно. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \left.\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f_n(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}}\right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \mathbf{k}! c_{\mathbf{k}},$$

де $\mathbf{k}! = k_1! k_2! \ldots k_N!$.

Таким чином,

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{k}!} \left.\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}}\right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

для всіх $\mathbf{z} \in D$. ■

**Зауваження 3.1.** *Область збіжності* $D$ *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (3.15) *у теоремі* 3.2 *може бути*

*більшою, ніж область збіжності кратного степеневого ряду* (3.16). *Тоді цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними є аналітичним продовженням функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$ *на* $D$.

## 3.4. Відповідність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними

У цьому підрозділі дослідимо властивості відповідності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (3.13).

Нехай

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1,\ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 0,$$

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{g_{i(r)}(1-g_{i(r-1)})z_{i_r}}{1},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 0 \leq k \leq n-1,\ n \geq 1,$$

при цьому $g_0 = 0$. Тоді, очевидно, виконується рекурентне співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1-g_{i(k)})z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{3.19}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$. Таким чином, $n$-ий підхідний дріб багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (3.13) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{Q_0^{(n-1)}(\mathbf{z})},\ n \geq 1.$$

**Теорема 3.3.** *Кожний багатовимірний* $g$*-дріб з нерівнозначними змінними* (3.13) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *є відповідним до однозначно визначеного формального кратного степеневого ряду*

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}, \tag{3.20}$$

*де* $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. *Порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(\mathbf{z})$ *дорівнює* $n$, $n \geq 1$, *і тому формальний кратний ряд Тейлора*

*в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *для* $f_n(\mathbf{z})$ *збігається із* $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ *почленно до всіх однорідних членів зі степенем* $(n-1)$ *включно, тобто*

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n-1} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}|\geq n} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},\ n \geq 1, \tag{3.21}$$

*де* $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{k}| \geq n$, $n \geq 1$.

**Доведення.** Позаяк для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, виконується рівність $Q_{i(k)}^{(n-1)}(\mathbf{0}) = 1$, то для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними $1/Q_{i(k)}^{(n-1)}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ зображується формальних кратним степеневим рядом вигляду (3.20). Тому, кожний $n$-ий підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (3.13) є функцією багатьох змінних, голоморфною в початку координат, і, отже, нехай для $n \geq 1$ формальний кратний степеневий ряд

$$\Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{\mathbf{k}\geq \mathbf{0}} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$$

є розвиненням підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Оскільки

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \not\equiv 0 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ 0 \leq k \leq n,\ n \geq 0,$$

то, застосовуючи формулу (1.44), до різниці до різниці двох підхідних дробів багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (3.13), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ в околі початку координат знаходимо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{(-1)^n s_0 \prod\limits_{r=1}^{n} g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)}) z_{i_r}}{\prod\limits_{r=0}^{n} Q_{i(r)}^{(n+k-1)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=0}^{n-1} Q_{i(r)}^{(n-1)}(\mathbf{z})}.$$

Із цієї формули для довільних $n \geq 1$ і $k \geq 1$ в околі точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ маємо

$$\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}|\geq n} (\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)})(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}.$$

Звідси випливає, що для кожних $n \geq 1$ і $k \geq 1$ порядок відповідності

$$\nu_n = \lambda(\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n)) = n$$

і прямує монотонно до $\infty$ при $n \to \infty$.

Отже, для кожних $n \geq 1$, $k \geq 1$ і для кожного $0 \leq |\mathbf{k}| \leq n-1$ виконується рівність $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}$. Багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (3.13) є відповідним до формального кратного степеневого ряду (3.20), де $s_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|+1)}$ для всіх $\mathbf{k}$ таких, що $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, оскільки

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq n} (\gamma_{\mathbf{k}}^{(|\mathbf{k}|+1)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)})(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$$

для кожного $n \geq 1$. Звідси випливає, що порядок відповідності $n$-го підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ дорівнює $n$, і формальний кратний степеневий ряд (3.21) є формальним кратним рядом Тейлора для $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Наостанок міркуваннями, подібними до міркувань, викладених в доведенні теореми 3.1, отримуємо однозначну визначеність формального кратного степеневого ряду (3.20). ■

Застосовуючи міркування викрадені в доведенні теореми 3.2, отримуємо такий результат:

**Теорема 3.4.** *Нехай багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними* (3.13) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D$, яка містить початок координат, до функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$, голоморфної в $D$. Тоді сума формального кратного степеневого ряду* (3.20)*, відповідного до багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними* (3.13) *в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, збігається зі значенням цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області $D$.*

Зауваження, подібне до зауваження 3.1, є правильним і до теореми 3.4, тобто, якщо область збіжності $D$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (3.13) є більшою, ніж область збіжності кратного степеневого ряду (3.20), то цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними є аналітичним продовженням функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$ на $D$.

### 3.5. Відповідність багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними

Розглянемо багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними вигляду

$$q_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{3.22}$$

де $q_0 \in \mathrm{C}$, $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Нехай

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + q_{i(n)} z_{i_n},\ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 1,$$

і

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + q_{i(k)} z_{i_k} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{r-1},i_r}} p_{i(r)} z_{i_{r-1}} z_{i_r}}{1 + q_{i(r)} z_{i_r}},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$. Тоді підхідні дроби приєднаного двовимірного дробу з нерівнозначними змінними (3.22) запишемо у вигляді $f_0(\mathbf{z}) \equiv q_0$ і

$$f_n(\mathbf{z}) = q_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \text{ для } n \geq 1.$$

Правильне таке багатовимірне узагальнення теореми 1.6:

**Теорема 3.5.** *Кожний багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (3.22) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *є відповідним до однозначно визначеного формального кратного степеневого ряду* (3.16) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. *Порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(\mathbf{z})$ *дорівнює* $(2n+1)$, $n \geq 0$, *і тому формальний кратний ряд Тейлора в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *для* $f_n(\mathbf{z})$ *збігається із* $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ *почленно до всіх однорідних членів зі степенем* $2n$ *включно, тобто*

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2n} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}| \geq 2n+1} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ n \geq 0, \tag{3.23}$$

*де* $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|\mathbf{k}| \geq 2n+1$, $n \geq 0$.

**Доведення.** Оскільки для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, виконується рівність $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{0}) = 1$, то для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, скінченний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними $1/Q_{i(p)}^{(n)}(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ зображується формальних кратним степеневим рядом вигляду (3.16). Тому, кожний $n$-ий підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, є функцією багатьох змінних, голоморфною в початку координаті, і, отже, нехай для кожного $n \geq 1$ формальний кратний степеневий ряд

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

є розвиненням підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Позаяк

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \not\equiv 0 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ 1 \leq k \leq n \text{ і } n \geq 1,$$

то, застосовуючи формулу (1.44) до різниці двох підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (3.22), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ в околі початку координат отримаємо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{(-1)^n p_{i(1)} z_{i_1} \prod\limits_{r=2}^{n+1} (-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} Q_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} Q_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})}$$

Із цієї формули для довільних $n \geq 1$ і $k \geq 1$ в околі точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ маємо

$$\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 2n+1} (\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)})(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}.$$

Звідси випливає, що для кожних $n \geq 1$ і $k \geq 1$ порядок відповідності

$$\nu_n = \lambda(\Lambda_{\mathbf{0}}(f_{n+k}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n)) = 2n+1$$

і прямує монотонно до $\infty$ при $n \to \infty$.

Отже, для кожних $n \geq 1$, $k \geq 1$ і для кожного $0 \leq |\mathbf{k}| \leq 2n$ виконується рівність $\gamma_{\mathbf{k}}^{(n+k)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)}$. Багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (3.22) є відповідним до формального кратного степеневого ряду (3.16), де $c_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)}$ (тут квадратні дужки означають цілу частину числа) для всіх $\mathbf{k}$ таких, що $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, оскільки

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 2n+1} (\gamma_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

для кожного $n \geq 1$. Звідси випливає, що порядок відповідності $n$-го підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ дорівнює $(2n+1)$ і формальний кратний степеневий ряд (3.23) є формальним кратним рядом Тейлора для $f_n(\mathbf{z})$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Доведемо тепер однозначну визначеність формального кратного степеневого ряду (3.16). Припустимо, що багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (3.22) також є відповідним до формального кратного степеневого ряду

$$P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} \beta_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$$

в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Оскільки для довільного $n \geq 1$ в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для різниці $(P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n))$ отримуємо

$$P_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) - \Lambda_{\mathbf{0}}(f_n) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 2n+1} (\beta_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)} - \gamma_{\mathbf{k}}^{(n)})(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},$$

то $\beta_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)} = \gamma_{\mathbf{k}}^{([|\mathbf{k}|/2]+1)}$ для всіх $\mathbf{k}$ таких, що $0 \leq |\mathbf{k}| \leq n$ і $n \geq 1$. Звідси випливає єдиність формального кратного степеневого ряду $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$. ■

Міркуваннями, подібними до міркувань, викладених у доведенні теореми 3.2, отримуємо такий результат:

**Теорема 3.6.** *Нехай багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (3.22) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D$, яка містить початок координат, до функції багатьох змінних $f(\mathbf{z})$, голоморфної в $D$. Тоді сума формального кратного*

*степеневого ряду* (3.16)*, відповідного до багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (3.22) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$*, збігається зі значенням цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області* $D$*.*

Зауваження, подібне до зауваження 3.1, є правильним і до теореми 3.6.

Далі покажемо взаємозв'язок між багатовимірними приєднаними дробами з нерівнозначними змінними і багатовимірними $J$-дріб з нерівнозначними змінними.

У багатовимірному приєднаному дробі з нерівнозначними змінними (3.22) покладемо $z_i = 1/\xi_i$, $1 \le i \le N$, знехтуємо першим членом, що дорівнює $q_0$, і проведемо перетворення еквівалентності (див. с. 68), покладаючи $\rho_{i(k)} = \xi_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. У результаті отримаємо багатовимірний $J$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i_1}}{q_{i_1} + \xi_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)}}{q_{i(k)} + \xi_{i_k}},$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Таким чином, на підставі наведених вище міркувань, поняття відповідності в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$ (див. с. 115) і теореми 3.5 отримуємо таке узагальнення теореми 1.8.

**Теорема 3.7.** *Кожний багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (3.14) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *є відповідним до формального кратного ряду Лорана*

$$L_{\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\ge\mathbf{0}} c_{-\mathbf{k}} z^{-\mathbf{k}}, \tag{3.24}$$

*де* $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \ge \mathbf{0}$, *в точці* $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$*. Порядок відповідності* $n$*-го підхідного дробу* $f_n(\mathbf{z})$ *дорівнює* $(2n+1)$, $n \ge 1$, *і тому формальний кратний ряд Лорана в точці* $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$ *для* $f_n(\mathbf{z})$ *збігається із* $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ *почленно до всіх*

*однорідних членів зі степенем* $2n$ *включно, тобто*

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2n} c_{-\mathbf{k}}\mathbf{z}^{-\mathbf{k}} + \sum_{|\mathbf{k}|\geq 2n+1} \gamma_{-\mathbf{k}}^{(n)}\mathbf{z}^{-\mathbf{k}},\ n \geq 1,$$

*де* $\gamma_{-\mathbf{k}}^{(n)} \in \mathbb{C}$, $|\mathbf{k}| \geq 2n+1$, $n \geq 1$.

На підставі наведених вище міркувань і тверджень правильна наступна теорема:

**Теорема 3.8.** *Нехай багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (3.14) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D$, *яка містить точку* $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, *до функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$, *голоморфної в* $D$. *Тоді сума формального кратного ряду Лорана* (3.24), *відповідного до багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (3.14) *в точці* $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$, *збігається зі значенням цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними в області* $D$.

**Зауваження 3.2.** *Область збіжності* $D$ *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (3.14) *у теоремі* 3.8 *може бути більшою, ніж область збіжності кратного ряду Лорана* (3.24). *Тоді цей гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними є аналітичним продовженням функції багатьох змінних* $f(\mathbf{z})$ *на* $D$.

Наостанок зауважимо, що не завжди існує багатовимірний $J$-дріб з нерівнозначними змінними відповідний до формального кратного ряду Лорана в точці $\mathbf{z} = \boldsymbol{\infty}$. Необхідні і достатні умови на коефіцієнти формального кратного ряду Лорана дамо в наступному розділі для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними.

**Висновки до розділу 3.** Цей розділ присвячений зображенню аналітичних функцій функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними. Розглянуто підхід, у якому формальне розвинення у функціональний гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними

змінними отримується за умови, що розвинення Лорана кожного його $n$-го підхідного дробу збігається із заданим формальним кратним рядом Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(\nu_n - 1)$ включно, і $\nu_n$ прямує до нескінченності із ростом $n$. Функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, визначені у такий спосіб, назвемо відповідними до заданого формального кратного ряду Лорана $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$.

У результаті досліджень описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (під функцією багатьох змінних $R(\mathbf{z})$, мероморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат) розуміємо таку функцію багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$). Особливим випадком $R_n(\mathbf{z})$ може бути підхідний дріб функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними. Означено деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів. Крім цього, досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними і для їх особливого випадку — багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, а також для тісно пов'язаних між собою багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними.

Відзначимо, що багатовимірні $g$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні $\pi$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і багатовимірні $J$-дроби з нерівнозначними змінними розглядаються вперше.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в таких працях: [28, 49, 65, 107, 111, 112].

# РОЗДІЛ 4

# МЕТОДИ ПОБУДОВИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У цьому розділі будуються та досліджуються алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у відповідні функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними.

## 4.1. Побудова багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними

Встановимо необхідні й достатні умови того, що для заданого формального кратного степеневого ряду

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{4.1}$$

де $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, $c_{\mathbf{0}} = c_0$, існує відповідний багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}z_{i_k}}{1}, \tag{4.2}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. З цією метою на основі класичного алгоритму, наведеного в підрозділі 1.2, побудуємо алгоритм розвинення формального кратного степеневого ряду (4.1) у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.2). Відмітимо, що в згаданому вище алгоритмі О. Є. Баран і Д. І. Боднара [10] використана інша ідея для його побудови.

Нехай $N \geq 2$, $e_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $e_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \ldots, \delta_{k,N})$ — мультиіндекс, де $1 \leq k \leq N$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Введемо множини мультиіндексів

$$\mathcal{E}_0 = \{e_0\},\ \mathcal{E}_k = \{e_{i(k)} :\ e_{i(k)} = e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I}_k\},\ k \geq 1,$$

і задамо відображення $\varphi : \mathcal{I}_k \to \mathcal{E}_k$ так $\varphi(i(k)) = e_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Очевидно, що $\varphi$ є бієктивне відображення.

Нехай $b_{e_{i(k)}} = a_{i(k)}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.2) запишемо у вигляді

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1}, \tag{4.3}$$

де $b_{e_{i(k)}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$.

Побудову багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3) проводитимемо покроково, виділивши чотири основних кроки.

Крок 1. Нехай $c_{e_{i_1}} \neq 0$ для $2 \leq i_1 \leq N$. Тоді $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = c_0 + P_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_0}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1} z_1^n, \ R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \geq \mathbf{0} \\ k_j=0,\, i_1+1 \leq j \leq N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \ 2 \leq i_1 \leq N.$$

Крок 2. Нехай тепер $H_{e_1}(n) \neq 0$ і $H_{2e_1}(n) \neq 0$ для $n \geq 1$, де

$$H_{le_1}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_1} & c_{(l+1)e_1} & \cdots & c_{(l+n-1)e_1} \\ c_{(l+1)e_1} & c_{(l+2)e_1} & \cdots & c_{(l+n)e_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{(l+n-1)e_1} & c_{(l+n)e_1} & \cdots & c_{(l+2n-2)e_1} \end{vmatrix}, \ l = 1, 2,$$

(зауважимо, що тут $H_{e_1}(n)$ і $H_{2e_1}(n)$ є визначники Ханкеля (порядку $n$) пов'язані з формальним степеневим рядом $P_{e_0}(z_1)$). Тоді на підставі теореми 1.2 маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1} z_1^n \sim \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{ne_1} z_1}{1} = F_{e_0}(z_1),$$

де коефіцієнти $b_{ne_1}$, $n \geq 1$, обчислюються за формулами:

$$b_{e_1} = H_{e_1}(1),\ b_{2ne_1} = -\frac{H_{e_1}(n-1)H_{2e_1}(n)}{H_{e_1}(n)H_{2e_1}(n-1)},\ n \geq 1,$$

$$b_{(2n+1)e_1} = -\frac{H_{e_1}(n+1)H_{2e_1}(n-1)}{H_{e_1}(n)H_{2e_1}(n)},\ n \geq 1,$$

при цьому $H_{e_1}(0) = H_{2e_1}(0) = 1$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 3. Нехай $H_{e_{i_1}}(n) \neq 0$ і $H_{2e_{i_1}}(n) \neq 0$ для $2 \leq i_1 \leq N$ і $n \geq 1$, де

$$H_{le_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_{i_1}} & c_{(l+1)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+n-1)e_{i_1}} \\ c_{(l+1)e_{i_1}} & c_{(l+2)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+n)e_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{(l+n-1)e_{i_1}} & c_{(l+n)e_{i_1}} & \cdots & c_{(l+2n-2)e_{i_1}} \end{vmatrix},\ l = 1, 2. \tag{4.4}$$

Тоді згідно з теоремою 1.2 для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i_1}} z_{i_1}^n \sim \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{e_{ni_1}} z_{i_1}}{1},$$

де коефіцієнти $b'_{ne_{i_1}}$, $n \geq 1$, обчислюються за такими формулами:

$$b'_{e_{i_1}} = H_{e_{i_1}}(1),\ b'_{2ne_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n-1)H_{2e_{i_1}}(n)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n-1)},\ n \geq 1,$$

$$b'_{(2n+1)e_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n+1)H_{2e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n)},\ n \geq 1,$$

при цьому $H_{e_{i_1}}(0) = H_{2e_{i_1}}(0) = 1$. Оскільки $c_{e_{i_1}} = b'_{e_{i_1}}$, $2 \leq i_1 \leq N$, то покладемо $b_{e_{i_1}} = b'_{e_{i_1}}$, $2 \leq i_1 \leq N$. Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} b_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 4. Нехай для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \geq \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_1+1 \leq j \leq N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{4.5}$$

є оберненим до $R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}}$, $k_j = 0,\ i_1 + 1 \leq j \leq N,\ |\mathbf{k}| \geq 1$ формального кратного степеневого ряду (4.5) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i_1}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}}, \tag{4.6}$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i_1}} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})}.$$

Надалі для побудови багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3) використовуватимемо ідеї, викладені у кроках 1–4.

Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \leq i_1 \leq N$. Нехай $c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} \neq 0$ для $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$. Тоді для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ запишемо

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = 1 + P_{e_{i_1}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i_1}}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}^{e_{i_1}} z_1^n,\ R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\mathbf{k}|\geq 0 \\ k_j=0,\ i_2+1\leq j\leq N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ 2 \leq i_2 \leq i_1.$$

Тому

$$L(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + P_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Тепер застосуємо крок 2 до кожного формального степеневого ряду $P_{e_{i_1}}(z_1)$, де $2 \leq i_1 \leq N$. Нехай $H_{e_1}^{e_{i_1}}(n) \neq 0$ і $H_{2e_1}^{e_{i_1}}(n) \neq 0$ для $2 \leq i_1 \leq N$ і

$n \geq 1$, де

$$H_{le_1}^{e_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_1}^{e_{i_1}} & c_{(l+1)e_1}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+n-1)e_1}^{e_{i_1}} \\ c_{(l+1)e_1}^{e_{i_1}} & c_{(l+2)e_1}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+n)e_1}^{e_{i_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(l+n-1)e_1}^{e_{i_1}} & c_{(l+n)e_1}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+2n-2)e_1}^{e_{i_1}} \end{vmatrix}, \ l = 1, 2.$$

Тоді на підставі теореми 1.2 для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}^{e_{i_1}} z_1^n \sim \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i_1}+ne_1} z_1}{1} = F_{e_{i_1}}(z_1),$$

де коефіцієнти $b_{e_{i_1}+ne_1}$, $n \geq 1$, обчислюються за такими формулами:

$$b_{e_{i_1}+e_1} = H_{e_1}^{e_{i_1}}(1), \ b_{e_{i_1}+2ne_1} = -\frac{H_{e_1}^{e_{i_1}}(n-1) H_{2e_1}^{e_{i_1}}(n)}{H_{e_1}^{e_{i_1}}(n) H_{2e_1}^{e_{i_1}}(n-1)}, \ n \geq 1,$$

$$b_{e_{i_1}+(2n+1)e_1} = -\frac{H_{e_1}^{e_{i_1}}(n+1) H_{2e_1}^{e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_1}^{e_{i_1}}(n) H_{2e_1}^{e_{i_1}}(n)}, \ n \geq 1,$$

при цьому $H_{e_1}^{e_{i_1}}(0) = H_{2e_1}^{e_{i_1}}(0) = 1$. Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Далі застосуємо крок 3. Нехай $H_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}(n) \neq 0$, $H_{2e_{i_2}}^{e_{i_1}}(n) \neq 0$ для $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$, $2 \leq i_1 \leq N$ і $n \geq 1$, де

$$H_{le_{i_2}}^{e_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_{i_2}}^{e_{i_1}} & c_{(l+1)e_{i_2}}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+n-1)e_{i_2}}^{e_{i_1}} \\ c_{(l+1)e_{i_2}}^{e_{i_1}} & c_{(l+2)e_{i_2}}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+n)e_{i_2}}^{e_{i_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(l+n-1)e_{i_2}}^{e_{i_1}} & c_{(l+n)e_{i_2}}^{e_{i_1}} & \dots & c_{(l+2n-2)e_{i_2}}^{e_{i_1}} \end{vmatrix}, \ l = 1, 2.$$

Тоді згідно з теоремою 1.2 для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$ і $2 \leq i_1 \leq N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2}^n \sim \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{e_{i_1}+ne_{i_2}} z_{i_2}}{1},$$

де коефіцієнти $b'_{e_{i_1}+ne_{i_2}}$, $n \geq 1$, обчислюються за такими формулами:

$$b'_{e_{i(2)}} = H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(1),\ b'_{e_{i_1}+2ne_{i_2}} = -\frac{H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(n-1)H^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}(n)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(n)H^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}(n-1)},\ n \geq 1,$$

$$b'_{e_{i_1}+(2n+1)e_{i_2}} = -\frac{H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(n+1)H^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}(n-1)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(n)H^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}(n)},\ n \geq 1,$$

при цьому $H^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(0) = H^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}(0) = 1$. Оскільки

$$c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}} = -\frac{c_{e_{i_1,i_2}}}{c_{e_{i_1}}} = b'_{e_{i(2)}},\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}} = -\frac{c_{2e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}} = b'_{2e_{i_1}},$$

де $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$, $2 \leq i_1 \leq N$, то покладемо

$$b_{e_{i(2)}} = b'_{e_{i(2)}},\ b_{2e_{i_1}} = b'_{2e_{i_1}},$$

де $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$, $2 \leq i_1 \leq N$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} b_{e_{i(2)}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Нарешті, застосовуючи крок 4 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$, запишемо

$$L(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{b_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})},$$

де для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \geq \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_2+1 \leq j \leq N}} c^{e_{i(2)}}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

з коефіцієнтами, обчисленими за рекурентною формулою

$$c^{e_{i(2)}}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c^{e_{i(2)}}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} \frac{c^{e_{i_1}}_{\mathbf{r}+e_{i_2}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}},$$

де $c^{e_{i(2)}}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $c^{e_{i(2)}}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$, є оберненим до $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$.

Подальша побудова багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінами (4.3) полягає у поступовому застосуванні кроків 1–4 до всіх формальних кратних степеневих рядів, які знаходяться в знаменниках кінцевих частинних ланках скінченних гілок гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами (див. с. 67). У результаті, обчисливши коефіцієнти

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}},\ |\mathbf{k}| \geq 1,\ k_j = 0,\ i_1 + 1 \leq j \leq N,\ 2 \leq i_1 \leq N,$$

за рекурентною формулою (4.6) і коефіцієнти

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}},\ |\mathbf{k}| \geq 1,\ k_j = 0,\ i_k + 1 \leq j \leq N,\ k \geq 2,\ 2 \leq i_p \leq i_{p-1},\ 1 \leq p \leq k,$$

за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(k)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}}{c_{e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}}, \tag{4.7}$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(k)}} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$, за умов, що для кожного $1 \leq i_1 \leq N$ і $n \geq 1$ виконуються нерівності

$$H_{e_{i_1}}(n) \neq 0,\ H_{2e_{i_1}}(n) \neq 0, \tag{4.8}$$

де $H_{e_{i_1}}(n)$ і $H_{2e_{i_1}}(n)$ визначаються за формулами (4.4), і за умов, що для кожних $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і $n \geq 1$ виконуються такі нерівності

$$H_{e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n) \neq 0,\ H_{2e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n) \neq 0, \tag{4.9}$$

де

$$H_{le_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n) = \begin{vmatrix} c_{le_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{(l+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \cdots & c_{(l+n-1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ c_{(l+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{(l+2)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \cdots & c_{(l+n)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{(l+n-1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{(l+n)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \cdots & c_{(l+2n-2)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \end{vmatrix},\ l = 1, 2, \tag{4.10}$$

для формального кратного степеневого ряду (4.1) отримаємо багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.3), де коефіцієнти $b_{e_{i(k)}}$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, обчислюються за такими формулами:

$$b_{e_{i_1}} = H_{e_{i_1}}(1),\ b_{2ne_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n-1)H_{2e_{i_1}}(n)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n-1)}, \tag{4.11}$$

$$b_{(2n+1)e_{i_1}} = -\frac{H_{e_{i_1}}(n+1)H_{2e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_{i_1}}(n)H_{2e_{i_1}}(n)}, \tag{4.12}$$

де $1 \leq i_1 \leq N$, $n \geq 1$, $H_{e_{i_1}}(0) = H_{2e_{i_1}}(0) = 1$, $H_{e_{i_1}}(n)$ і $H_{2e_{i_1}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулами (4.4);

$$b_{e_{i(k+1)}} = H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(1),\ b_{e_{i(k)}+2ne_{i_{k+1}}} = -\frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n-1)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n-1)}, \tag{4.13}$$

$$b_{e_{i(k)}+(2n+1)e_{i_{k+1}}} = -\frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n+1)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n-1)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)}, \tag{4.14}$$

де $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(0) = H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(0) = 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)$ і $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулами (4.10).

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3) за умови, що задані коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.1).

Покажемо, що багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.3), побудований за описаним вище алгоритмом, є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Для цього досить довести, що порядок відповідності $\nu_n$ прямує монотонно до $\infty$ при $n \to \infty$. Доведення проведемо за індукцією за $n$.

Нехай $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність підхідних дробів багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3). Очевидно, що $\nu_0 = 1$ при $n = 0$. Використовуючи співвідношення (4.4), (4.6), (4.7) і (4.10)–(4.14) згортатимемо підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$ для кожного $n \geq 1$.

При $n = 1$ маємо

$$f_1(\mathbf{z}) = c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} b_{e_{i_1}} z_{i_1} = c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1}.$$

Оскільки

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} - \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{k}|\geq 2} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

то $f_1(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$, і порядок відповідності $\nu_1 = 2$.

Згідно з наведеними вище міркуваннями для $e_0$ і для всіх $e_{i(k)}$ таких, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ і $k \geq 1$ неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}(z_1) = \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i(k)}+le_1} z_1}{1}$$

є відповідним до формального степеневого ряду

$$P_{e_{i(k)}}(z_1) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{le_1}^{e_{i(k)}} z_1^l$$

в початку координат, і порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Звідси випливає, що для $e_0$ і для кожного $e_{i(k)}$ такого, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і для $n \geq 2$ скінченний неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{n} \frac{b_{e_{i(k)}+le_1} z_1}{1}$$

зображується формальним степеневим рядом вигляду

$$P_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = \sum_{l=1}^{n} c_{le_1}^{e_{i(k)}} z_1^l + O(z_1^{n+1}),$$

де $c_{le_1}^{e_{i(0)}} = c_{le_1}^{e_0} = c_{le_1}$, $1 \leq l \leq n$, $n \geq 2$, і символ $O(z_1^p)$ означає формальний степеневий ряд, чий найменший степінь членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 3$.

Тоді при $n = 2$ запишемо

$$f_2(\mathbf{z}) = c_0 + F_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} b_{e_{i(2)}} z_{i_2} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_2} + O(\mathbf{z}^2) \right) =$$

$$= c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i(2)}} z_{i_2} \right) + O(\mathbf{z}^3) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3),$$

де символ $O(\mathbf{z}^p)$ означає формальний кратний степеневий ряд, чий найменший степінь однорідних членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 2$. Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3) - \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = O'(\mathbf{z}^3),$$

де символ $O'(\mathbf{z}^p)$ означає формальний степеневий ряд, чий найменший степінь однорідних членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 3$, то $f_2(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $\nu_2 = 3$.

Нехай тепер $n$ — довільне натуральне число таке, що $n \geq 3$. Тоді

$$f_n(\mathbf{z}) = c_0 + F_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + F_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{b_{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-2}}}{1 + F_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}} \frac{b_{e_{i(n-1)}} z_{i_{n-1}}}{1} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} b_{e_{i(n)}} z_{i_n} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}} z_{i_{n-2}}}{1 + P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}} \frac{c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-1}}}{1} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} c_{e_{i_n}}^{e_{i(n-1)}} z_{i_n} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}} \frac{c_{e_{i_{n-3}}}^{e_{i(n-4)}} z_{i_{n-3}}}{1 + P_{e_{i(n-3)}}^{(3)}(z_1)} + \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}} z_{i_{n-2}}}{1 + P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)} +$$

$$+\sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}} c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-1}} \left(1+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-2)}}}{c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}}} z_{i_n} + O(\mathbf{z}^2)\right) =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1+P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+\sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}} \frac{c_{e_{i_{n-3}}}^{e_{i(n-4)}} z_{i_{n-3}}}{1+P_{e_{i(n-3)}}^{(3)}(z_1)} + \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}} z_{i_{n-2}}}{1} +$$

$$+\left(\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-1}} + \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} z_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-2)}} z_{i_n}\right) + O(\mathbf{z}^3)\right)$$

Продовжуючи цей процес, подібно до вище наведених міркувань, на останньому кроці отримуємо

$$f_n(\mathbf{z}) = c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1+P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} +$$

$$+\sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} \left(1+\sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} z_{i_3} + \sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3} \left(\sum_{i_4=1}^{i_3} \frac{c_{e_{i_2,i_3,i_4}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} z_{i_4}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. +\sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3} \left(\ldots \left(\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} z_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{e_{i(n)}-e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} z_{i_n}\right) \ldots\right)\right) + O(\mathbf{z}^{n-1})\right) =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \left(\sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left(\sum_{i_3=1}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i_1}} z_{i_3}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. +\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left(\sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3} \left(\ldots \left(\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} z_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} c_{e_{i(n)}-e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_n}\right) \ldots\right)\right)\right) + O(\mathbf{z}^n)\right).$$

Звідси маємо

$$f_n(\mathbf{z}) = c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) +$$

$$+\sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} \left(1+\sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_2} + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left(\sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{e_{i(3)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_3}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. +\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left(\ldots \left(\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} z_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{e_{i(n)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_n}\right) \ldots\right)\right) + O(\mathbf{z}^n)\right) =$$

$$= 1 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i(2)}} z_{i_2} \right) + \ldots +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left( \ldots \left( \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} z_{i_{n-1}} \left( \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} c_{e_{i(n)}} z_{i_n} \right) \ldots \right) \right) \right) + O(\mathbf{z}^{n+1}) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^{n+1}).$$

Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^{n+1}) - \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = O'(\mathbf{z}^{n+1}),$$

то $f_n(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $\nu_n = n + 1$.

Із довільності $n$ випливає, що $f_n(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ для всіх $n \geq 1$, і порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Це означає, що розвинення кожного підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з формальним кратним степеневим рядом $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $n$ включно. Нарешті, позаяк

$$\lim_{n \to +\infty} \nu_n = \lim_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty,$$

то багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.3) є відповідними до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Отже, доведена така теорема:

**Теорема 4.1.** *Багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними* (4.2) *є відповідними до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.1) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожних* $1 \leq i_1 \leq N$ *і* $n \geq 1$ *виконуються нерівності* (4.8) *і для кожних* $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ *і* $n \geq 1$ *— нерівності* (4.9).

Зазначимо, що теорема 4.1 є багатовимірним узагальненням теореми 1.2. На підставі міркувань, наведених на початку цього підрозділу, коефіцієнти багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінни-

ми (4.2) відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ можна обчислювати за формулами (4.11)–(4.14).

## 4.2. Багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера

У цьому підрозділі на основі класичного $qd$-алгоритму Рутісхаузера (див. с. 44) побудуємо алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (4.1) у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{c_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{4.15}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Для цього спочатку сформулюємо і доведемо допоміжну лему, яку використовуватимемо тут і в наступному підрозділі.

**Лема 4.1.** *Нехай*

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

*— формальний степеневий ряд такий, що $P(z) \sim 1/F(z)$ в точці $z = 0$, де*

$$F(z) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1}.$$

*Тоді $P'(z) \sim F(z)$ в точці $z = 0$, де*

$$P'(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k$$

*— формальний степеневий ряд, обернений до $P(z)$.*

**Доведення.** Нехай $n$ — довільне натуральне число таке, що $n \geq 2$. Нехай $f_n(z)$ — $n$-й підхідний дріб неперервного дробу $1/F(z)$ і

$$f_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} z^k = P_n(z), \ \frac{1}{f_n(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(n)} z^k = P'_n(z)$$

— розвинення у формальні степеневі ряди підхідних дробів неперервних дробів $1/F(z)$ і $F(z)$ відповідно.

За означенням відповідності (див. с. 39) між неперервним дробом і формальним степеневим рядом маємо $\gamma_k^{(n)} = c_k$ для $1 \le k \le n-1$. Оскільки $f_n(z)(1/f_n(z)) \equiv 1$, то $P_n(z)P_n'(z) \equiv 1$ в деякому околі точки $z = 0$. Позаяк формальний степеневий ряд $P'(z)$ є оберненим до $P(z)$, то $\beta_k^{(n)} = d_k$, якщо $1 \le k \le n-1$. Нарешті, із довільності $n$ випливає, що $P'(z) \sim F(z)$ в точці $z = 0$. ■

Для зручності багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.15), так само, як і (4.2), запишемо у вигляді

$$\frac{c_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1}, \tag{4.16}$$

де $b_{e_{i(k)}} = a_{i(k)}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. Крім цього, також накладемо умову, що $N \ge 2$, і побудову багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.16) проводитимемо покроково, виділивши чотири основних кроки.

Крок 1. Нехай $c_0 \ne 0$ і

$$R_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} \frac{c_{\mathbf{k}}}{c_0} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Позначимо через

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}}^{e_0} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{4.17}$$

формальний кратний степеневий ряд, обернений до $R_{e_0}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_0}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, формального кратного степеневого ряду (4.17) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_0} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_0} \frac{c_{\mathbf{r}}}{c_0}, \tag{4.18}$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_0} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_0} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \frac{c_0}{R'_{e_0}(\mathbf{z})}.$$

Крок 2. За умови, що $c_{e_{i_1}}^{e_0} \neq 0$ для $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд (4.17) запишемо у вигляді

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = P_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}}^{e_0} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_0}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}^{e_0} z_1^n, \ R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\ge\mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_1+1\le j\le N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_1}}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \frac{c_0}{P_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}}^{e_0} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 3. Нехай

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1} z_1^n$$

— нормальний формальний степеневий ряд (див. с. 45). Тоді на підставі твердження 1) теореми 1.3 існують числа $q_{le_1}^{(n)}$, $d_{le_1}^{(n)}$, $l \ge 1$, $n \ge 0$, $qd$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & q_{e_1}^{(0)} & & & & & \\
d_{e_0}^{(1)} & & d_{e_1}^{(0)} & & & & \\
 & q_{e_1}^{(1)} & & q_{2e_1}^{(0)} & & & \\
d_{e_0}^{(2)} & & d_{e_1}^{(1)} & & d_{2e_1}^{(0)} & & \\
 & q_{e_1}^{(2)} & & q_{2e_1}^{(1)} & & q_{3e_1}^{(0)} & \\
d_{e_0}^{(3)} & \vdots & d_{e_1}^{(2)} & \vdots & d_{2e_1}^{(1)} & \vdots & d_{3e_1}^{(0)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d_{le_1}^{(n)} = q_{le_1}^{(n+1)} - q_{le_1}^{(n)} + d_{(l-1)e_1}^{(n+1)},\ l \geq 1,\ n \geq 0,$$
$$q_{(l+1)e_1}^{(n)} = \frac{d_{le_1}^{(n+1)}}{d_{le_1}^{(n)}} q_{le_1}^{(n+1)},\ l \geq 1,\ n \geq 0,$$

з початковими умовами

$$q_{e_1}^{(0)} = \frac{c_{e_1}}{c_0},\ d_{e_0}^{(n)} = 0,\ q_{e_1}^{(n)} = \frac{c_{(n+1)e_1}}{c_{ne_1}},\ n \geq 1.$$

Крім цього, згідно з твердження 3) цієї ж теореми

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{ne_1}}{c_0} z_1^{m_1} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{ne_1} z_1}{1},$$

де $b_{(2l-1)e_1} = -q_{le_1}^{(0)}$, $b_{2le_1} = -d_{le_1}^{(0)}$, $l \geq 1$. Тепер, оскільки формальний степеневий ряд $P_{e_0}(z_1)$ є оберненим до

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{ne_1}}{c_0} z_1^n,$$

то згідно з лемою 4.1

$$P_{e_0}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{ne_1} z_1}{1} = F_{e_0}(z_1).$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}}^{e_0} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 4. Нехай для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ формальний степеневий ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i_1}} z_{i_1}^n$$

є нормальним. Тоді на підставі теореми 1.3 для кожного $2 \leq i_1 \leq N$, існують числа $q_{le_{i_1}}^{(n)}$, $d_{le_{i_1}}^{(n)}$, $l \geq 1$, $n \geq 0$, $qd$-таблиці

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & q_{e_{i_1}}^{(0)} & & & & & \\
d_{e_0}^{(1)} & & d_{e_{i_1}}^{(0)} & & & & \\
 & q_{e_{i_1}}^{(1)} & & q_{2e_{i_1}}^{(0)} & & & \\
d_{e_0}^{(2)} & & d_{e_{i_1}}^{(1)} & & d_{2e_{i_1}}^{(0)} & & \\
 & q_{e_{i_1}}^{(2)} & & q_{2e_{i_1}}^{(1)} & & q_{3e_{i_1}}^{(0)} & \\
d_{e_0}^{(3)} & \vdots & d_{e_{i_1}}^{(2)} & \vdots & d_{2e_{i_1}}^{(1)} & \vdots & d_{3e_{i_1}}^{(0)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}
, \tag{4.19}
$$

які визначаються за правилами ромба

$$
d_{le_{i_1}}^{(n)} = q_{le_{i_1}}^{(n+1)} - q_{le_{i_1}}^{(n)} + d_{(l-1)e_{i_1}}^{(n+1)},\ l \geq 1,\ n \geq 0, \tag{4.20}
$$

$$
q_{(l+1)e_{i_1}}^{(n)} = \frac{d_{le_{i_1}}^{(n+1)}}{d_{le_{i_1}}^{(n)}} q_{le_{i_1}}^{(n+1)},\ l \geq 1,\ n \geq 0, \tag{4.21}
$$

з початковими умовами

$$
d_{e_0}^{(n+1)} = 0,\ q_{e_{i_1}}^{(n)} = \frac{c_{(n+1)e_{i_1}}}{c_{ne_{i_1}}},\ n \geq 0, \tag{4.22}
$$

і для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{ne_{i_1}} z_{i_1}^n}{c_0} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{ne_{i_1}} z_{i_1}}{1},
$$

де $b'_{(2l-1)e_{i_1}} = -q_{le_{i_1}}^{(0)}$, $b'_{2le_{i_1}} = -d_{le_{i_1}}^{(0)}$, $l \geq 1$. Оскільки

$$
c_{e_{i_1}}^{e_0} = -\frac{c_{e_{i_1}}}{c_0} = -q_{e_{i_1}}^{(0)} = b'_{e_{i_1}},\ 1 \leq i_1 \leq N,
$$

то покладемо $b_{e_{i_1}} = b'_{e_{i_1}}$, $1 \leq i_1 \leq N$. Таким чином,

$$
L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} b_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).
$$

Надалі для побудови багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.16) використовуватимемо ідеї, викладені у кроках 1–4.

Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_1 \le N$. Нехай для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\ge\mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_1+1\le j\le N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{4.23}$$

є оберненим до $R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що всі коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.23) однозначно визначаються за такою рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i_1}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_1}}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}},$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i_1}} = 1$, при цьому, $c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})}.$$

Застосуємо крок 2 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_1 \le N$. Нехай $c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} \ne 0$ для $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Тоді для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд (4.23) запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = P_{e_{i_1}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i_1}}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}^{e_{i_1}} z_1^n,\ R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\ge\mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_2+1\le j\le N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ 2 \le i_2 \le i_1.$$

Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{P_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 3. Нехай для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0} z_1^n$$

є нормальним. Тоді на підставі твердження 1) теореми 1.3 для кожного $2 \le i_1 \le N$ існують числа $q_{e_{i_1}+le_1}^{(n)}$, $d_{e_{i_1}+le_1}^{(n)}$, $l \ge 1$, $n \ge 0$, $qd$-таблиці

$$\begin{array}{cccccccc}
 & q_{e_{i_1}+e_1}^{(0)} & & & & & & \\
d_{e_{i_1}}^{(1)} & & d_{e_{i_1}+e_1}^{(0)} & & & & & \\
 & q_{e_{i_1}+e_1}^{(1)} & & q_{e_{i_1}+2e_1}^{(0)} & & & & \\
d_{e_{i_1}}^{(2)} & & d_{e_{i_1}+e_1}^{(1)} & & d_{e_{i_1}+2e_1}^{(0)} & & & \\
 & q_{e_{i_1}+e_1}^{(2)} & & q_{e_{i_1}+2e_1}^{(1)} & & q_{e_{i_1}+3e_1}^{(0)} & & \\
d_{e_{i_1}}^{(3)} & \vdots & d_{e_{i_1}+e_1}^{(2)} & \vdots & d_{e_{i_1}+2e_1}^{(1)} & \vdots & d_{e_{i_1}+3e_1}^{(0)} & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d_{e_{i_1}+le_1}^{(n)} = q_{e_{i_1}+le_1}^{(n+1)} - q_{e_{i_1}+le_1}^{(n)} + d_{e_{i_1}+(l-1)e_1}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

$$q_{e_{i_1}+(l+1)e_1}^{(n)} = \frac{d_{e_{i_1}+le_1}^{(n+1)}}{d_{e_{i_1}+le_1}^{(n)}} q_{e_{i_1}+le_1}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

з початковими умовами

$$d_{e_{i_1}}^{(n+1)} = 0,\ q_{e_{i_1}+e_1}^{(n)} = \frac{c_{e_{i_1}+(n+1)e_1}^{e_0}}{c_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}},\ n \ge 0.$$

Крім цього, згідно з твердження 3) цієї ж теореми для кожного $2 \le i_1 \le N$ маємо

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} z_1^{m_1} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i_1}+ne_1} z_1}{1},$$

де $b_{e_{i_1}+(2l-1)e_1} = -q_{e_{i_1}+le_1}^{(0)}$, $b_{e_{i_1}+2le_1} = -d_{e_{i_1}+le_1}^{(0)}$, $l \ge 1$. Тепер, оскільки для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд $P_{e_{i_1}}(z_1)$ є оберненим до

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} z_1^n,$$

то згідно з лемою 4.1 для кожного $2 \le i_1 \le N$ маємо

$$P_{e_{i_1}}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i_1}+ne_1} z_1}{1} = F_{e_{i_1}}(z_1).$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 4. Нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{e_{i_1}+ne_{i_2}}^{e_0} z_{i_2}^n$$

є нормальним. Тоді на підставі теореми 1.3 для кожних $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують числа $q_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n)}$, $d_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n)}$, $l \ge 1$, $n \ge 0$, $qd$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & q_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(0)} & & & & & & & \\
d_{e_{i_1}}^{(1)} & & d_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(0)} & & & & & & \\
 & q_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(1)} & & q_{e_{i_1}+2e_{i_2}}^{(0)} & & & & & \\
d_{e_{i_1}}^{(2)} & & d_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(1)} & & d_{e_{i_1}+2e_{i_2}}^{(0)} & & & & \\
 & q_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(2)} & & q_{e_{i_1}+2e_{i_2}}^{(1)} & & q_{e_{i_1}+3e_{i_2}}^{(0)} & & & \\
d_{e_{i_1}}^{(3)} & \vdots & d_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(2)} & \vdots & d_{e_{i_1}+2e_{i_2}}^{(1)} & \vdots & d_{e_{i_1}+3e_{i_2}}^{(0)} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n)} = q_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n+1)} - q_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n)} + d_{e_{i_1}+(l-1)e_{i_2}}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

$$q_{e_{i_1}+(l+1)e_{i_2}}^{(n)} = \frac{d_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n+1)}}{d_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n)}} q_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

з початковими умовами

$$d_{e_{i_1}}^{(n+1)} = 0,\ q_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(n)} = \frac{c_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}}^{e_0}}{c_{e_{i_1}+ne_{i_2}}^{e_0}},\ n \ge 0,$$

і для кожних $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $2 \le i_1 \le N$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{e_{i_1}+ne_{i_2}}^{e_0} z_{i_2}^n}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{e_{i_1}+ne_{i_2}} z_{i_2}}{1},$$

де $b'_{e_{i_1}+(2l-1)e_{i_2}} = -q_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(0)}$, $b'_{e_{i_1}+2le_{i_2}} = -d_{e_{i_1}+le_{i_2}}^{(0)}$, $l \ge 1$. Оскільки

$$c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} = -\frac{c_{e_{i_1,i_2}}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} = -q_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{(0)} = b'_{e_{i_1}+e_{i_2}},$$

$$c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} = -\frac{c_{2e_{i_1}}^{e_0}}{c_{e_{i_1}}^{e_0}} = -\frac{c_0 c_{2e_{i_1}} - c_{e_{i_1}}^2}{c_0 c_{e_{i_1}}} = -d_{e_{i_1}}^{(0)} = b'_{2e_{i_1}},$$

де $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $2 \le i_1 \le N$, то покладемо

$$b_{e_{i(2)}} = b'_{e_{i(2)}},\ b_{2e_{i_1}} = b'_{2e_{i_1}},\ 2 \le i_2 \le i_1 - 1,\ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} b_{e_{i(2)}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Продовжимо побудову багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.16), подібно до вище наведених міркувань. Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \ge \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_2+1 \le j \le N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

є оберненим до $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$. Усі коефіцієнти формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$ однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(2)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}},$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(2)}} = 1$, при цьому, $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{b_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})}.$$

Застосуємо крок 2 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай $c_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} \ne 0$ для $2 \le i_3 \le i_2$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Тоді для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = P_{e_{i(2)}}(z_1) + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_1}^{e_{i(2)}} z_1^n, \ R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\ge\mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_3+1\le j\le N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_3}}^{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \ 2 \le i_3 \le i_2.$$

Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{b_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{P_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Далі застосуємо крок 3. Нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{e_{i_2}+ne_1}^{e_{i_1}} z_1^n$$

є нормальним. Тоді на підставі теореми 1.3 для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують числа $q_{e_{i(2)}+le_1}^{(n)}$, $d_{e_{i(2)}+le_1}^{(n)}$, $l \ge 1$, $n \ge 0$, $qd$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & q_{e_{i(2)}+e_1}^{(0)} & & & & & \\
d_{e_{i(2)}}^{(1)} & & d_{e_{i(2)}+e_1}^{(0)} & & & & \\
 & q_{e_{i(2)}+e_1}^{(1)} & & q_{e_{i(2)}+2e_1}^{(0)} & & & \\
d_{e_{i(2)}}^{(2)} & & d_{e_{i(2)}+e_1}^{(1)} & & d_{e_{i(2)}+2e_1}^{(0)} & & \\
 & q_{e_{i(2)}+e_1}^{(2)} & & q_{e_{i(2)}+2e_1}^{(1)} & & q_{e_{i(2)}+3e_1}^{(0)} & \\
d_{e_{i(2)}}^{(3)} & \vdots & d_{e_{i(2)}+e_1}^{(2)} & \vdots & d_{e_{i(2)}+2e_1}^{(1)} & \vdots & d_{e_{i(2)}+3e_1}^{(0)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d^{(n)}_{e_{i(2)}+le_1} = q^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_1} - q^{(n)}_{e_{i(2)}+le_1} + d^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(l-1)e_1},\ l \geq 1,\ n \geq 0,$$

$$q^{(n)}_{e_{i(2)}+(l+1)e_1} = \frac{d^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_1}}{d^{(n)}_{e_{i(2)}+le_1}} q^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_1},\ l \geq 1,\ n \geq 0,$$

з початковими умовами

$$d^{(n+1)}_{e_{i(2)}} = 0,\ q^{(n)}_{e_{i(2)}+e_1} = \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_1}},\ n \geq 0,$$

і, крім цього,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_1}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} z_1^{m_1} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i(2)}+ne_1} z_1}{1},$$

де $b_{e_{i(2)}+(2l-1)e_1} = -q^{(0)}_{e_{i(2)}+le_1}$, $b_{e_{i(2)}+2le_1} = -d^{(0)}_{e_{i(2)}+le_1}$, $l \geq 1$. Тепер, оскільки для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ формальний степеневий ряд $P_{e_{i(2)}}(z_1)$ є оберненим до

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_1}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} z_1^n,$$

то згідно з лемою 4.1 для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b_{e_{i(2)}+ne_1} z_1}{1} = F_{e_{i(2)}}(z_1).$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{b_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_3}} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Нарешті, застосуємо крок 4. Нехай для кожних $2 \leq i_3 \leq i_2 - 1$, $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ формальний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} z_{i_3}^n$$

є нормальним. Тоді на підставі теореми 1.3 для кожних $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують числа $q^{(n)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $d^{(n)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $l \ge 1$, $n \ge 0$, $qd$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & q^{(0)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & & & & & & \\
d^{(1)}_{e_{i(2)}} & & d^{(0)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & & & & & \\
 & q^{(1)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & q^{(0)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & & & & & \\
d^{(2)}_{e_{i(2)}} & & d^{(1)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & d^{(0)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & & & & \\
 & q^{(2)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & q^{(1)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & & q^{(0)}_{e_{i(2)}+3e_{i_3}} & & & \\
d^{(3)}_{e_{i(2)}} & \vdots & d^{(2)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & \vdots & d^{(1)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & \vdots & d^{(0)}_{e_{i(2)}+3e_{i_3}} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array},$$

які визначаються за правилами ромба

$$d^{(n)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}} = q^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}} - q^{(n)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}} + d^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(l-1)e_{i_3}},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

$$q^{(n)}_{e_{i(2)}+(l+1)e_{i_3}} = \frac{d^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}}{d^{(n)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}} q^{(n+1)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}},\ l \ge 1,\ n \ge 0,$$

з початковими умовами

$$d^{(n+1)}_{e_{i(2)}} = 0,\ q^{(n)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} = \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}}},\ n \ge 0,$$

і, крім цього,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} z^n_{i_3}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} \sim \frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{b'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} z_{i_3}}{1},$$

де $b'_{e_{i(2)}+(2l-1)e_{i_3}} = -q^{(0)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $b'_{e_{i(2)}+2le_{i_3}} = -d^{(0)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $l \ge 1$. Оскільки

$$c^{e_{i(2)}}_{e_{i_3}} = -\frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} = -q^{(0)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} = b'_{e_{i(2)}+e_{i_3}},$$

де $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$,

$$c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}} = -\frac{c^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} = -\frac{c^{e_0}_{e_{i_1}} c^{e_0}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} - (c^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}})^2}{c^{e_0}_{e_{i_1}} c^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}}} = -d^{(0)}_{e_{i_1}+e_{i_2}} = b'_{e_{i_1}+2e_{i_2}},$$

де $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $3 \le i_1 \le N$ (зауважимо, що коефіцієнт $c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}}$ можливий лише у випаду коли $N \ge 3$ і, зрозуміло, поява цього коефіцієнта тут і подібних інших на наступних кроках залежить від числа $N$),

$$c_{e_{i_1}}^{2e_{i_1}} = -\frac{c_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}} = -\frac{c_{e_{i_1}}^{e_0} c_{3e_{i_1}}^{e_0} - (c_{2e_{i_1}}^{e_0})^2}{c_{e_{i_1}}^{e_0} c_{2e_{i_1}}^{e_0}} = -\frac{c_0(c_{e_{i_1}} c_{3e_{i_1}} - c_{2e_{i_1}}^2)}{c_{e_{i_1}}(c_0 c_{2e_{i_1}} - c_{e_{i_1}}^2)} = -q_{2e_{i_1}}^{(0)} = b'_{3e_{i_1}},$$

де $2 \le i_1 \le N$, то покладемо

$$b_{e_{i(3)}} = b'_{e_{i(3)}},\ 2 \le i_3 \le i_2 - 1,\ 2 \le i_2 \le i_1,\ 2 \le i_1 \le N,$$
$$b_{e_{i_1}+2e_{i_2}} = b'_{e_{i_1}+2e_{i_2}},\ 2 \le i_2 \le i_1 - 1,\ 3 \le i_1 \le N,$$
$$b_{3e_{i_1}} = b'_{3e_{i_1}},\ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{c_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{b_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{b_{e_{i(2)}} z_{i_2}}{F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} b_{e_{i(3)}} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Зрозуміло, що подальша побудова багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінами (4.16) полягає у поступовому застосуванні кроків 1–4 до всіх формальних кратних степеневих рядів, які знаходяться в чисельниках кінцевих частинних ланках скінченних гілок гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами. У результаті, обчисливши коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_0}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, за рекурентною формулою (4.18) і коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_k + 1 \le j \le N$, $k \ge 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(k)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}}{c_{e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}},$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(k)}} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$, за умов, що для кожного $1 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i_1}} z_{i_1}^n \tag{4.24}$$

є нормальним, і за умов, що для кожних $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ і $k \ge 1$ формальний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k-1)}} z_{i_{k+1}}^n \tag{4.25}$$

є нормальним, для формального кратного степеневого ряду (4.1) отримаємо багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.16), де коефіцієнти $b_{e_{i(k)}}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \ge 1$, обчислюються за такими формулами:

$$b_{(2l-1)e_{i_1}} = -q_{le_{i_1}}^{(0)},\ b_{2le_{i_1}} = -d_{le_{i_1}}^{(0)},\ 1 \le i_1 \le N,\ l \ge 1,$$

де числа $q_{le_{i_1}}^{(0)}$, $d_{le_{i_1}}^{(0)}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $qd$-таблиці (4.19), які визначаються за правилами ромба (4.20) і (4.21) з початковими умовами (4.22);

$$b_{e_{i(k)}+(2l-1)e_{i_{k+1}}} = -q_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(0)},\ b_{e_{i(k)}+2le_{i_{k+1}}} = -d_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(0)},$$

де $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $k \ge 1$, $l \ge 1$, і де числа $q_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(0)}$, $d_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(0)}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $qd$-таблиці

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(0)} & & & & \\
d_{e_{i(k)}}^{(1)} & & d_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(0)} & & & \\
 & q_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(1)} & & q_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}}^{(0)} & & \\
d_{e_{i(k)}}^{(2)} & & d_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(1)} & & d_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}}^{(0)} & \\
\vdots & q_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(2)} & \vdots & q_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}}^{(1)} & \vdots & q_{e_{i(k)}+3e_{i_{k+1}}}^{(0)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}, \tag{4.26}$$

які визначаються за правилами ромба

$$d_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n)} = q_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n+1)} - q_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n)} + d_{e_{i(k)}+(l-1)e_{i_{k+1}}}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0, \tag{4.27}$$

$$q_{e_{i(k)}+(l+1)e_{i_{k+1}}}^{(n)} = \frac{d_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n+1)}}{d_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n)}} q_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}^{(n+1)},\ l \ge 1,\ n \ge 0, \tag{4.28}$$

з початковими умовами

$$d_{e_{i(k)}}^{(n+1)} = 0,\ q_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}^{(n)} = \frac{c_{e_{i(k)}+(n+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k-1)}}}{c_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k-1)}}},\ n \geq 0. \tag{4.29}$$

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.16) за умови, що задані коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.1). Зрозуміло, що цей алгоритм є багатовимірним узагальненням $qd$-алгоритму Рутісхаузера.

Міркуваннями подібними до міркувань, викладених в доведенні теореми 4.1 у підрозділі 4.1, отримаємо, що багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.16), побудований за багатовимірним $qd$-алгоритмом Рутісхаузера, є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Таким чином, правильна така теорема:

**Теорема 4.2.** *Багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (4.15) *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.1) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожного* $1 \leq i_1 \leq N$ *формальний степеневий ряд* (4.24) *і для кожних* $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ *і* $k \geq 1$ *формальний степеневий ряд* (4.25) *є нормальними.*

Зазначимо, що із теореми 1.2, твердження 2) теореми 1.3, формул (4.11)–(4.14) і побудованого вище багатовимірного $qd$-алгоритму Рутісхаузера випливає, що коефіцієнти $b_{e_{i(k)}}$, $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3), відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, можна обчислювати за формулами

$$b_{e_{i_1}} = c_{e_{i_1}},\ b_{2le_{i_1}} = -q_{le_{i_1}}^{(1)},\ b_{(2l+1)e_{i_1}} = -d_{le_{i_1}}^{(1)},\ 1 \leq i_1 \leq N,\ l \geq 1, \tag{4.30}$$

де числа $q_{le_{i_1}}^{(1)}$, $d_{le_{i_1}}^{(1)}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами $qd$-таблиці (4.19), які визначаються за правилами ромба (4.20) і (4.21) з початковими умовами

(4.22), і за формулами

$$b_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} = -q^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}, \tag{4.31}$$

$$b_{e_{i(k)}+2le_{i_{k+1}}} = -q^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}},\ b_{e_{i(k)}+(2l+1)e_{i_{k+1}}} = -d^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}, \tag{4.32}$$

де $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $k \ge 1$, $l \ge 1$, і де числа $q^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}}$ і $q^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $d^{(1)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $qd$-таблиці (4.26), що визначаються за правилами ромба (4.27) і (4.28) з початковими умовами (4.29). Крім цього, на підставі теореми 4.1 багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (4.2), коефіцієнти якого обчислені за формулами (4.30)–(4.32), є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Отже, правильна така теорема:

**Теорема 4.3.** *Багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними* (4.1) *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.1) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожного* $1 \le i_1 \le N$ *формальний степеневий ряд* (4.24) *і для кожних* $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ *і* $k \ge 1$ *формальний степеневий ряд* (4.25) *є нормальними.*

Позаяк багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними є особливим випадком багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними, то теореми 4.1–4.3 застосовуються до багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними. Крім цього, комбінуючи теореми 1.2 і 1.4 в доведенні теореми 4.1 отримуємо такий результат:

**Теорема 4.4.** *Багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними* (4.2), *де* $c_0 \in \mathbb{R}$, $a_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду*

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},$$

*де* $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$, $c_{\mathbf{0}} = c_0$, *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожних* $1 \leq i_1 \leq N$ *і* $n \geq 1$ *виконуються нерівності*

$$H_{e_{i_1}}(n) > 0,\ H_{2e_{i_1}}(n) > 0,$$

*де* $H_{e_{i_1}}(n)$ *і* $H_{2e_{i_1}}(n)$ *визначаються за формулами* (4.4), *і для кожних* $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ *і* $n \geq 1$ *— нерівності*

$$H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n) > 0,\ H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n) > 0,$$

*де* $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_{k+1}}}(n)$ *і* $H^{e_{i(k)}}_{2e_{i_{k+1}}}(n)$ *визначаються за формулами* (4.10).

## 4.3. Багатовимірний $g$-алгоритм Бауера

Як зазначалося вище, особливим випадком багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними є багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}, \tag{4.33}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. У цьому підрозділі побудуємо багатовимірний $g$-алгоритм Бауера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} s_{\mathbf{k}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}, \tag{4.34}$$

де $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k} \geq 0$, $s_{\mathbf{0}} = s_0$, у багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (4.33).

Нехай $N \geq 2$. Для зручності опису побудови алгоритму багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (4.33) запишемо у вигляді

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{q_{e_{i(k)}}(1 - q_{e_{i(k-1)}}) z_{i_k}}{1}, \tag{4.35}$$

де $q_{e_{i(k)}} = g_{i(k)}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{I}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Побудову багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (4.35) проводитимемо покроково.

Крок 1. Нехай

$$R_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} \frac{s_{\mathbf{k}}}{s_0}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}.$$

Позначимо через

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} s^{e_0}_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} \tag{4.36}$$

формальний кратний степеневий ряд, обернений до $R_{e_0}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що коефіцієнти $s^{e_0}_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \geq 1$, формального кратного степеневого ряду (4.36) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$s^{e_0}_{\mathbf{k}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} s^{e_0}_{\mathbf{k}-\mathbf{r}} \frac{s_{\mathbf{r}}}{s_0}, \tag{4.37}$$

де $s^{e_0}_{\mathbf{0}} = 1$, при цьому $s^{e_0}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{R'_{e_0}(\mathbf{z})}.$$

Крок 2. Формальний кратний степеневий ряд (4.36) за умови, що $s^{e_0}_{e_{i_1}} \neq 0$ для $2 \leq i_1 \leq N$ запишемо у вигляді

$$R'_{e_0}(\mathbf{z}) = P_{e_0}(z_1) - \sum_{i_1=2}^{N} s^{e_0}_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_0}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{e_0}_{e_1}(-z_1)^n,$$

$$R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\geq\mathbf{0} \\ k_j=0,\, i_1+1\leq j\leq N}} \frac{s^{e_0}_{\mathbf{k}+e_{i_1}}}{s^{e_0}_{e_{i_1}}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},\ 2 \leq i_1 \leq N.$$

Тоді

$$L_0(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{P_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} (-s_{e_{i_1}}^{e_0}) z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 3. Нехай послідовність дійсних чисел

$$s_0, s_{e_1}, s_{2e_1}, s_{3e_1}, \ldots$$

є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас (див. означення с. 46). Тоді згідно з теоремою 1.5 існують дійсні числа $q_{le_1}$, $l \geq 1$, такі, що $0 < q_{le_1} < 1$, $l \geq 1$, і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{ne_1}}{s_0} (-z_1)^n \sim \frac{1}{1} + \frac{q_{e_1} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q_{ne_1}(1 - q_{(n-1)e_1}) z_1}{1}.$$

Звідси, на підставі леми 4.1

$$P_{e_0}(z_1) \sim 1 + \frac{q_{e_1} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q_{ne_1}(1 - q_{(n-1)e_1}) z_1}{1} = F_{e_0}(z_1),$$

оскільки формальний степеневий ряд $P_{e_0}(z_1)$ є оберненим до

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{ne_1}}{s_0} (-z_1)^n.$$

Коефіцієнти неперервного $g$-дробу $F_{e_0}(z_1)$, відповідного до формального степеневого ряду $P_{e_0}(z_1)$ в початку координат, можна обчислити, використовуючи $g$-алгоритм Бауера (див. с. 46). За цим алгоритмом дійсні числа $q_{ne_1}$, $n \geq 1$, є діагональними елементами $g_{ne_1}^{(0)}$, $n \geq 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & g_{e_1}^{(0)} & & & & & \\
g_{e_0}^{(1)} & & g_{2e_1}^{(0)} & & & & \\
 & g_{e_1}^{(1)} & & g_{3e_1}^{(0)} & & & \\
g_{e_0}^{(2)} & & g_{2e_1}^{(1)} & & g_{4e_1}^{(0)} & & \\
\vdots & g_{e_1}^{(2)} & \vdots & g_{3e_1}^{(1)} & \vdots & g_{5e_1}^{(0)} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array},$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1-g^{(n)}_{(2l+1)e_1})(1-g^{(n)}_{(2l+2)e_1}) = (1-g^{(n+1)}_{2le_1})(1-g^{(n+1)}_{(2l+1)e_1}),$$
$$g^{(n)}_{(2l+2)e_1}g^{(n)}_{(2l+3)e_1} = g^{(n+1)}_{(2l+1)e_1}g^{(n+1)}_{(2l+2)e_1},$$

де $l \geq 0$, $n \geq 0$, з початковими умовами

$$g^{(0)}_{e_1} = \frac{s_{e_1}}{s_0},\ g^{(n)}_{e_0} = 0,\ g^{(n)}_{e_1} = \frac{s_{(n+1)e_1}}{s_{ne_1}},\ n \geq 1.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N}(-s^{e_0}_{e_{i_1}})z_{i_1}R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 4. Нехай для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ послідовність дійсних чисел

$$s_0, s_{e_{i_1}}, s_{2e_{i_1}}, s_{3e_{i_1}}, \ldots \tag{4.38}$$

є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді згідно з теоремою 1.5 для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ існують дійсні числа $q'_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$ такі, що $0 < q'_{le_{i_1}} < 1$, $l \geq 1$ і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{ne_{i_1}}}{s_0}(-z_{i_1})^n \sim \frac{1}{1}+\frac{q'_{e_{i_1}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{q'_{ne_{i_1}}(1-q'_{(n-1)e_{i_1}})z_{i_1}}{1},$$

де дійсні числа $q'_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i_1}} & & & & & \\
g^{(1)}_{e_0} & & g^{(0)}_{2e_{i_1}} & & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i_1}} & & g^{(0)}_{3e_{i_1}} & & & \\
g^{(2)}_{e_0} & & g^{(1)}_{2e_{i_1}} & & g^{(0)}_{4e_{i_1}} & & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i_1}} & \vdots & g^{(1)}_{3e_{i_1}} & \vdots & g^{(0)}_{5e_{i_1}} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}, \tag{4.39}$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1-g^{(n)}_{(2l+1)e_{i_1}})(1-g^{(n)}_{(2l+2)e_{i_1}}) = (1-g^{(n+1)}_{2le_{i_1}})(1-g^{(n+1)}_{(2l+1)e_{i_1}}), \tag{4.40}$$
$$g^{(n)}_{(2l+2)e_{i_1}}g^{(n)}_{(2l+3)e_{i_1}} = g^{(n+1)}_{(2l+1)e_{i_1}}g^{(n+1)}_{(2l+2)e_{i_1}}, \tag{4.41}$$

де $l \geq 0$, $n \geq 0$, з початковими умовами

$$g_{e_{i_1}}^{(0)} = \frac{s_{e_{i_1}}}{s_0},\ g_{e_0}^{(n)} = 0,\ g_{e_{i_1}}^{(n)} = \frac{s_{(n+1)e_{i_1}}}{s_{ne_{i_1}}},\ n \geq 1. \tag{4.42}$$

Оскільки

$$-s_{e_{i_1}}^{e_0} = \frac{s_{e_{i_1}}}{s_0} = g_{e_{i_1}}^{(0)} = q'_{e_{i_1}},\ 2 \leq i_1 \leq N,$$

то покладемо $q_{e_{i_1}} = q'_{e_{i_1}}$, $2 \leq i_1 \leq N$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} q_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Далі, для побудови багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (4.35) використовуватимемо ідеї, викладені у кроках 1–4. Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \leq i_1 \leq N$. Нехай для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \geq \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_1+1 \leq j \leq N}} s_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} \tag{4.43}$$

є оберненим до $R_{e_l}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що всі коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.43) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$s_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} s_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i_1}} \frac{s_{\mathbf{r}+e_{i_1}}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}},$$

де $s_{\mathbf{0}}^{e_{i_1}} = 1$, при цьому, $s_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \leq j \leq N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})}.$$

Застосуємо крок 2 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \leq i_1 \leq N$. Нехай $s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} \neq 0$ для $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$. Тоді для

кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд (4.43) запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = P_{e_{i_1}}(z_1) - \sum_{i_2=2}^{i_1} s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i_1}}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_{ne_1}^{e_{i_1}} (-z_1)^n,$$

$$R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\ge\mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_2+1\le j\le N}} \frac{s_{\mathbf{k}+e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},\ 2 \le i_2 \le i_1.$$

Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{P_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} (-s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}) z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 3. Нехай для кожного $2 \le i_1 \le N$ послідовність дійсних чисел $\{s_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді на підставі теореми 1.5 для кожного $2 \le i_1 \le N$ існують дійсні числа $q'_{e_{i_1}+le_1}$, $l \ge 1$, такі, що $0 < q'_{e_{i_1}+le_1} < 1$, $l \ge 1$, і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}} (-z_1)^n \sim \frac{1}{1} + \frac{q'_{e_{i_1}+e_1} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q'_{e_{i_1}+ne_1}(1 - q'_{e_{i_1}+(n-1)e_1}) z_1}{1}.$$

Оскільки для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд $P_{e_{i_1}}(z_1)$ є оберненим до

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{e_{i_1}+ne_1}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}} (-z_1)^n,$$

то згідно з лемою 4.1 для кожного $2 \le i_1 \le N$

$$P_{e_{i_1}}(z_1) \sim 1 + \frac{q'_{e_{i_1}+e_1} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q'_{e_{i_1}+ne_1}(1 - q'_{e_{i_1}+(n-1)e_1}) z_1}{1},$$

де дійсні числа $q'_{e_{i_1}+le_1}$, $l \ge 1$, є діагональні елементи $g^{(0)}_{e_{i_1}+le_1}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i_1}+e_1} & & & & & \\
g^{(1)}_{e_{i_1}} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+2e_1} & & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i_1}+e_1} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+3e_1} & & & \\
g^{(2)}_{e_{i_1}} & & g^{(1)}_{e_{i_1}+2e_1} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+4e_1} & & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i_1}+e_1} & \vdots & g^{(1)}_{e_{i_1}+3e_1} & \vdots & g^{(0)}_{e_{i_1}+5e_1} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array},$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1-g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_1})(1-g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_1}) = (1-g^{(n+1)}_{e_{i_1}+2le_1})(1-g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_1}),$$
$$g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_1} g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+3)e_1} = g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_1} g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_1},$$

де $l \geq 0$, $n \geq 0$, з початковими умовами

$$g^{(n+1)}_{e_{i_1}} = 0,\ g^{(n)}_{e_{i_1}+e_1} = \frac{s^{e_0}_{e_{i_1}+(n+1)e_1}}{s^{e_0}_{e_{i_1}+ne_1}},\ n \geq 0.$$

Тепер для того, щоб коефіцієнти частинних чисельників кожної гілки гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами формували ланцюгові послідовності (див. с. 52) накладемо додаткові умови (тому надалі крок 3 замінимо на $3'$). Нехай для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ виконуються такі нерівності

$$0 < q_{e_{i_1}} \leq M^{e_1}_{e_{i_1}} < 1,$$

де

$$M^{e_1}_{e_{i_1}} = 1 + \frac{-q'_{e_{i_1}+e_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{-q'_{e_{i_1}+ne_1}(1-q'_{e_{i_1}+(n-1)e_1})}{1}$$

— 0-ий максимальний параметр ланцюгової послідовності

$$q'_{e_{i_1}+e_1}, q'_{e_{i_1}+2e_1}(1-q'_{e_{i_1}+e_1}), q'_{e_{i_1}+3e_1}(1-q'_{e_{i_1}+2e_1}), \ldots.$$

Тоді на підставі означення ланцюгової послідовності та її властивостей для кожного $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$P_{e_{i_1}}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{q_{e_{i_1}+ne_1}(1-q_{e_{i_1}+(n-1)e_1})z_1}{1} = F_{e_{i_1}}(z_1),$$

де

$$q_{e_{i_1}+e_1} = \frac{q'_{e_{i_1}+e_1}}{1-q_{e_{i_1}}}$$

і оскільки $q_{e_{i_1}} \neq 0$, то згідно з лемою 1.1 дійсні числа $q_{e_{i_1}+ne_1}$ для $n \geq 2$ визначаються за такою формулою

$$q_{e_{i_1}+ne_1} = q'_{e_{i_1}+ne_1}\left(1 - \frac{\displaystyle\prod_{r=1}^{n-1}\frac{q'_{e_{i_1}+re_1}}{1-q'_{e_{i_1}+re_1}}}{\displaystyle\frac{1-q_{e_{i_1}}}{-q_{e_{i_1}}} + \sum_{m=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{m}\frac{q'_{e_{i_1}+re_1}}{1-q'_{e_{i_1}+re_1}}}\right).$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N}\frac{q_{e_{i_1}}z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1}(-s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}})z_{i_2}R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 4. Нехай для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ послідовність $\{s_{e_{i_1}+ne_{i_2}}^{e_0}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді на підставі теореми 1.5 для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1-1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ існують дійсні числа $q'_{e_{i_1}+le_{i_2}}$, $l \geq 1$, такі, що $0 < q'_{e_{i_1}+le_{i_2}} < 1$, $l \geq 1$, і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{e_{i_1}+ne_{i_2}}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}}(-z_{i_2})^n \sim \frac{1}{1}+\frac{q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}z_{i_2}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{q'_{e_{i_1}+ne_{i_2}}(1-q'_{e_{i_1}+(n-1)e_{i_2}})z_{i_2}}{1},$$

де дійсні числа $q'_{e_{i_1}+le_{i_2}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{e_{i_1}+le_{i_2}}$, $l \geq 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{cccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i_1}+e_{i_2}} & & & & \\
g^{(1)}_{e_{i_1}} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i_1}+e_{i_2}} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+3e_{i_2}} & & \\
g^{(2)}_{e_{i_1}} & & g^{(1)}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & & g^{(0)}_{e_{i_1}+4e_{i_2}} & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i_1}+e_{i_2}} & \vdots & g^{(1)}_{e_{i_1}+3e_{i_2}} & \vdots & g^{(0)}_{e_{i_1}+5e_{i_2}} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array},$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1-g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_{i_2}})(1-g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_{i_2}})=(1-g^{(n+1)}_{e_{i_1}+2le_{i_2}})(1-g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_{i_2}}),$$
$$g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_{i_2}}g^{(n)}_{e_{i_1}+(2l+3)e_{i_2}}=g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+1)e_{i_2}}g^{(n+1)}_{e_{i_1}+(2l+2)e_{i_2}},$$

де $l\geq 0$, $n\geq 0$, з початковими умовами

$$g^{(n+1)}_{e_{i_1}}=0,\ g^{(n)}_{e_{i_1}+e_{i_2}}=\frac{s^{e_0}_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}}}{s^{e_0}_{e_{i_1}+ne_{i_2}}},\ n\geq 0.$$

Із тією самою метою, що і на попередньому кроці, тобто щоб коефіцієнти частинних чисельників кожної гілки гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами формували ланцюгові послідовності, накладемо додаткові умови (тому надалі крок 4 замінимо на $4'$). Нехай для кожних $2\leq i_2\leq i_1-1$ і $2\leq i_1\leq N$ виконуються такі нерівності

$$0<q_{e_{i_1}}\leq M^{e_{i_2}}_{e_{i_1}}<1,$$

де

$$M^{e_{i_2}}_{e_{i_1}}=1+\frac{-q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{-q'_{e_{i_1}+ne_{e_2}}(1-q'_{e_{i_1}+(n-1)e_{i_2}})}{1}$$

— 0-ий максимальний параметр ланцюгової послідовності

$$q'_{e_{i_1}+e_{i_2}},q'_{e_{i_1}+2e_{i_2}}(1-q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}),q'_{e_{i_1}+3e_{i_2}}(1-q'_{e_{i_1}+2e_{i_2}}),\ldots.$$

Тоді на підставі означення ланцюгової послідовності та її властивостей для кожних $2\leq i_2\leq i_1-1$ і $2\leq i_1\leq N$ маємо

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{e_0}_{e_{i_1}+ne_{i_2}}}{s^{e_0}_{e_{i_1}}}(-z_{i_2})^n\sim$$
$$\sim\frac{1}{1}+\frac{q''_{e_{i_1}+e_{i_2}}(1-q_{e_{i_1}})z_{i_2}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{q''_{e_{i_1}+ne_{i_2}}(1-q''_{e_{i_1}+(n-1)e_{i_2}})z_{i_2}}{1},$$

де

$$q''_{e_{i_1}+e_{i_2}}=\frac{q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}}{1-q_{e_{i_1}}}$$

і оскільки $q_{e_{i_1}} \neq 0$, то згідно з лемою 1.1 дійсні числа $q''_{e_{i_1}+ne_2}$ для $n \geq 2$ визначаються за такою формулою

$$q''_{e_{i_1}+ne_{i_2}} = q'_{e_{i_1}+ne_{e_2}} \left( 1 - \frac{\prod\limits_{r=1}^{n-1} \frac{q'_{e_{i_1}+re_{i_2}}}{1-q'_{e_{i_1}+re_{i_2}}}}{\frac{1-q_{e_{i_1}}}{-q_{e_{i_1}}} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} \prod\limits_{r=1}^{m} \frac{q'_{e_{i_1}+re_{i_2}}}{1-q'_{e_{i_1}+re_{i_2}}}} \right).$$

Тепер оскільки

$$\frac{-s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{1-q_{e_{i_1}}} = \frac{s_{e_{i_1}+e_{i_2}}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}(1-q_{e_{i_1}})} = \frac{q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}}{1-q_{e_{i_1}}} = q''_{e_{i_1}+e_{i_2}},$$

$$\frac{-s_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{1-q_{e_{i_1}}} = \frac{s_{e_{i_1}+e_{i_1}}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}(1+s_{e_{i_1}}^{e_0})} = \frac{s_0 s_{2e_{i_1}} - s_{e_{i_1}}^2}{s_{e_{i_1}}(s_0 - s_{e_{i_1}})} = g_{2e_{i_1}}^{(0)} = q'_{2e_{i_1}},$$

де $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$ і $2 \leq i_1 \leq N$, то покладемо

$$q_{e_{i(2)}} = q''_{e_{i(2)}},\ q_{2e_{i_1}} = q'_{2e_{i_1}},\ 2 \leq i_2 \leq i_1 - 1,\ 2 \leq i_1 \leq N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} q_{i(2)}(1-q_{i_1}) z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Продовжимо побудову багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (4.35), подібно до вище викладених міркувань. Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$. Нехай для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \geq \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_2+1 \leq j \leq N}} s_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}$$

є оберненим до $R_{e(2)}(\mathbf{z})$. Усі коефіцієнти формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$ однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$s_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} s_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(2)}} \frac{s_{\mathbf{r}+e_{i_2}}^{e_{i_1}}}{s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}},$$

де $s_{\mathbf{0}}^{e_{i(2)}} = 1$, при цьому, $s_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$. Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{q_{i(2)}(1-q_{i_1}) z_{i_2}}{R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})}.$$

Застосуємо крок 2 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай $s_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} \ne 0$ для $2 \le i_3 \le i_2$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Тоді для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$ запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = P_{e_{i(2)}}(z_1) - \sum_{i_3=2}^{i_2} s_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_{ne_1}^{e_{i(2)}} (-z_1)^n,$$

$$R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \ge \mathbf{0} \\ k_j=0,\ i_3+1 \le j \le N}} \frac{s_{\mathbf{k}+e_{i_3}}^{e_{i(2)}}}{s_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},\ 2 \le i_3 \le i_2.$$

Тому

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{q_{i(2)}(1-q_{i_1}) z_{i_2}}{P_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} (-s_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}}) z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Далі застосуємо крок $3'$. Нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ послідовність дійсних чисел $\{s_{e_{i_2}+ne_1}^{e_{i_1}}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді на підставі теореми 1.5 для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують дійсні числа $q'_{e_{i(2)}+le_1}$, $l \ge 1$, такі, що $0 < q'_{e_{i(2)}+le_1} < 1$, $l \ge 1$, і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{e_{i_2}+ne_1}^{e_{i_1}}}{s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}} (-z_1)^n \sim$$

$$\sim \frac{1}{1}+\frac{q'_{e_{i(2)}+e_1}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{q'_{e_{i(2)}+ne_1}(1-q'_{e_{i(2)}+(n-1)e_1})z_1}{1}.$$

Оскільки для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний степеневий ряд $P_{e_{i(2)}}(z_1)$ є оберненим до

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_1}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}}(-z_1)^n,$$

то згідно з лемою 4.1 для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) \sim 1+\frac{q'_{e_{i(2)}+e_1}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty}\frac{q'_{e_{i(2)}+ne_1}(1-q'_{e_{i(2)}+(n-1)e_1})z_1}{1},$$

де дійсні числа $q'_{e_{i(2)}+le_1}$, $l \ge 1$, є діагональні елементи $g^{(0)}_{e_{i(2)}+le_1}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i(2)}+e_1} & & & & & \\
g^{(1)}_{e_{i(2)}} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+2e_1} & & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i(2)}+e_1} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+3e_1} & & & \\
g^{(2)}_{e_{i(2)}} & & g^{(1)}_{e_{i(2)}+2e_1} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+4e_1} & & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i(2)}+e_1} & \vdots & g^{(1)}_{e_{i(2)}+3e_1} & \vdots & g^{(0)}_{e_{i(2)}+5e_1} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array},$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1-g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_1})(1-g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_1}) = (1-g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+2le_1})(1-g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_1}),$$
$$g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_1}g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+3)e_1} = g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_1}g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_1},$$

де $l \ge 0$, $n \ge 0$, з початковими умовами

$$g^{(n+1)}_{e_{i(2)}} = 0,\ g^{(n)}_{e_{i(2)}+e_1} = \frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_1}},\ n \ge 0.$$

Тепер нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ виконуються нерівності

$$0 < q_{e_{i(2)}} \le M^{e_1}_{e_{i(2)}} < 1,$$

де

$$M_{e_{i(2)}}^{e_1} = 1 + \frac{-q'_{e_{i(2)}+e_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{-q'_{e_{i(2)}+ne_1}(1 - q'_{e_{i(2)}+(n-1)e_1})}{1}$$

— 0-ий максимальний параметр ланцюгової послідовності

$$q'_{e_{i(2)}+e_1}, q'_{e_{i(2)}+2e_1}(1 - q'_{e_{i(2)}+e_1}), q'_{e_{i(2)}+3e_1}(1 - q'_{e_{i(2)}+2e_1}), \ldots.$$

Тоді на підставі означення ланцюгової послідовності та її властивостей для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ маємо

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) \sim 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{q_{e_{i(2)}+ne_1}(1 - q_{e_{i(2)}+(n-1)e_1})z_1}{1} = F_{e_{i(2)}}(z_1),$$

де

$$q_{e_{i(2)}+e_1} = \frac{q'_{e_{i(2)}+e_1}}{1 - q_{e_{i(2)}}}$$

і оскільки $q_{e_{i(2)}} \neq 0$, то згідно з лемою 1.1 дійсні числа $q_{e_{i(2)}+ne_1}$ для $n \geq 2$ визначаються за формулою

$$q_{e_{i(2)}+ne_1} = q'_{e_{i(2)}+ne_1} \left( 1 - \frac{\prod\limits_{r=1}^{n-1} \frac{q'_{e_{i(2)}+re_1}}{1 - q'_{e_{i(2)}+re_1}}}{\frac{1 - q_{e_{i(2)}}}{-q_{e_{i(2)}}} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} \prod\limits_{r=1}^{m} \frac{q'_{e_{i(2)}+re_1}}{1 - q'_{e_{i(2)}+re_1}}} \right).$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{q_{i(2)}(1 - q_{i_1})z_{i_2}}{F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} (-s_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}}) z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Нарешті, застосуємо крок $4'$. Нехай для кожних $2 \leq i_3 \leq i_2 - 1$, $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ послідовність $\{s_{e_{i_2}+ne_{i_3}}^{e_{i_1}}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас. Тоді на підставі теореми 1.5 для

кожних $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують дійсні числа $q'_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $l \ge 1$, такі, що $0 < q'_{e_{i(2)}+le_{i_3}} < 1$, $l \ge 1$, і

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}} (-z_{i_3})^n \sim$$
$$\sim \frac{1}{1} + \frac{q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}} z_{i_3}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} (1 - g'_{e_{i(2)}+(n-1)e_{i_3}}) z_{i_3}}{1},$$

де дійсні числа $q'_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{e_{i(2)}+le_{i_3}}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & & & & & & \\
g^{(1)}_{e_{i(2)}} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & & & & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+3e_{i_3}} & & & & & \\
g^{(2)}_{e_{i(2)}} & & g^{(1)}_{e_{i(2)}+2e_{i_3}} & & g^{(0)}_{e_{i(2)}+4e_{i_3}} & & & & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} & \vdots & g^{(1)}_{e_{i(2)}+3e_{i_3}} & \vdots & g^{(0)}_{e_{i(2)}+5e_{i_3}} & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots &
\end{array},$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$(1 - g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_{i_3}})(1 - g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_{i_3}}) = (1 - g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+2le_{i_3}})(1 - g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_{i_3}}),$$
$$g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_{i_3}} g^{(n)}_{e_{i(2)}+(2l+3)e_{i_3}} = g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+1)e_{i_3}} g^{(n+1)}_{e_{i(2)}+(2l+2)e_{i_3}},$$

де $l \ge 0$, $n \ge 0$, з початковими умовами

$$g^{(n+1)}_{e_{i(2)}} = 0, \ g^{(n)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}} = \frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}}}, \ n \ge 0.$$

Нехай для кожних $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ виконуються такі нерівності

$$0 < q_{e_{i(2)}} \le M^{e_{i_3}}_{e_{i(2)}} < 1,$$

де

$$M^{e_{i_3}}_{e_{i(2)}} = 1 + \frac{-q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{-q'_{e_{i(2)}+ne_{e_3}} (1 - q'_{e_{i(2)}+(n-1)e_{i_3}})}{1}$$

— 0-ий максимальний параметр ланцюгової послідовності

$$q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}}, q'_{e_{i(2)}+2e_{i_3}}(1-q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}}), q'_{e_{i(2)}+3e_{i_3}}(1-q'_{e_{i(2)}+2e_{i_3}}), \ldots.$$

Тоді на підставі означення ланцюгової послідовності та її властивостей для кожних $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ маємо

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}}}{s^{e_{i_3}}_{e_{i_2}}}(-z_{i_3})^n \sim$$

$$\sim \frac{1}{1+} \frac{q''_{e_{i(2)}+e_{i_2}}(1-q_{e_{i(2)}})z_{i_3}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{q''_{e_{i(2)}+ne_{i_3}}(1-q''_{e_{i(2)}+(n-1)e_{i_3}})z_{i_3}}{1},$$

де

$$q''_{e_{i(2)}+e_{i_3}} = \frac{q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}}}{1-q_{e_{i(2)}}}$$

і оскільки $q_{e_{i(2)}} \ne 0$, то згідно з лемою 1.1 дійсні числа $q''_{e_{i(2)}+ne_3}$ для $n \ge 2$ визначаються за такою формулою

$$q''_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} = q'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} \left( 1 - \frac{\prod\limits_{r=1}^{n-1} \frac{q'_{e_{i(2)}+re_{i_3}}}{1-q'_{e_{i(2)}+re_{i_3}}}}{\frac{1-q_{e_{i(2)}}}{-q_{e_{i(2)}}} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} \prod\limits_{r=1}^{m} \frac{q'_{e_{i(2)}+re_{i_3}}}{1-q'_{e_{i(2)}+re_{i_3}}}} \right).$$

Оскільки

$$\frac{-s^{e_{i(2)}}_{e_{i_3}}}{1-q_{e_{i(2)}}} = \frac{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(1-q_{e_{i(2)}})} = \frac{g^{(0)}_{e_{i(2)}+e_{i_3}}}{1-q_{e_{i(2)}}} = \frac{q'_{e_{i(2)}+e_{i_3}}}{1-q_{e_{i(2)}}} = q''_{e_{i(2)}+e_{i_3}},$$

де $2 \le i_3 \le i_2 - 1$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$,

$$\frac{-s^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}}}{1-q_{e_{i(2)}}} = \frac{s^{e_{i_1}}_{2e_{i_2}}}{s^{e_{i_1}}_{e_{i_2}}(1-q''_{e_{i(2)}})} =$$

$$= \frac{(1+s^{e_0}_{e_{i_1}})(s^{e_0}_{e_{i_1}} s^{e_0}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} - (s^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}})^2)}{s^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(s^{e_0}_{e_{i_1}}(1+s^{e_0}_{e_{i_1}}) - s^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}})} = g^{(0)}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} \frac{(1+s^{e_0}_{e_{i_1}})(s^{e_0}_{e_{i_1}} - s^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}})}{s^{e_0}_{e_{i_1}}(1+s^{e_0}_{e_{i_1}}) - s^{e_0}_{e_{i_1}+e_{i_2}}} =$$

$$= q'_{e_{i_1}+2e_{i_2}} \frac{(1-q'_{e_{i_1}})(1-q'_{e_{i_1}+e_{i_2}})}{1-q'_{e_{i_1}}-q'_{e_{i_1}+e_{i_2}}} = q''_{e_{i_1}+2e_{i_2}},$$

де $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $3 \le i_1 \le N$ (зазначимо, що так само, як і в багатовимірному $qd$-алгоритмі Рутісхаузера, коефіцієнт $s_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}}$ можливий лише у випаду коли $N \ge 3$ і, зрозуміло, поява цього коефіцієнта тут і подібних інших на наступних кроках залежить від числа $N$),

$$\frac{-s_{e_{i_1}}^{2e_{i_1}}}{1-q_{2e_{i_1}}} = \frac{s_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{s_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}(1-q'_{2e_{i_1}})} = \frac{(1+s_{e_{i_1}}^{e_0})(s_{e_{i_1}}^{e_0}s_{3e_{i_1}}^{e_0} - (s_{2e_{i_1}}^{e_0})^2)}{s_{2e_{i_1}}^{e_0}(s_{e_{i_1}}^{e_0}(1+s_{e_{i_1}}^{e_0}) - s_{2e_{i_1}}^{e_0})} =$$
$$= \frac{(s_0 - s_{e_{i_1}})(s_{e_{i_1}}s_{3e_{i_1}} - s_{2e_{i_1}}^2)}{(s_0 s_{2e_{i_1}} - s_{e_{i_1}}^2)(s_{e_{i_1}} - s_{2e_{i_1}})} = g_{3e_{i_1}}^{(0)} = q'_{3e_{i_1}},$$

де $2 \le i_1 \le N$, то покладемо

$$q_{e_{i(3)}} = q''_{e_{i(3)}},\ 2 \le i_3 \le i_2 - 1,\ 2 \le i_2 \le i_1,\ 2 \le i_1 \le N,$$
$$q_{e_{i_1}+2e_{i_2}} = q''_{e_{i_1}+2e_{i_2}},\ 2 \le i_2 \le i_1 - 1,\ 3 \le i_1 \le N,$$
$$q_{3e_{i_1}} = q'_{3e_{i_1}},\ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim \frac{s_0}{F_{e_0}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{q_{i(2)}(1-q_{i_1}) z_{i_2}}{F_{e_{i(2)}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_3=2}^{i_2} q_{e_{i(3)}}(1-q_{e_{i(2)}}) z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Зрозуміло, що подальша побудова багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінами (4.35) полягає у поступовому застосуванні кроків 1, 2, $3'$ і $4'$ до всіх формальних кратних степеневих рядів, що знаходяться в чисельниках кінцевих частинних ланках скінченних гілок гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами. У результаті, обчисливши коефіцієнти $s_{\mathbf{k}}^{e_0}$, $\mathbf{k} \ge 0$, за рекурентною формулою (4.37) і коефіцієнти $s_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0,\ i_k + 1 \le j \le N$, $k \ge 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, за рекурентною формулою

$$s_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} s_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(k)}} \frac{s_{\mathbf{r}+e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}}{s_{e_{i_k}}^{e_{i(k-1)}}}, \tag{4.44}$$

де $s_0^{e_{i(k)}} = 1$, при цьому $s_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$, за умов, що для кожного $1 \le i_1 \le N$ послідовність (4.38) є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас, і для кожних $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ і $k \ge 1$ послідовність

$$\{s^{e_{i(k-1)}}_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{4.45}$$

є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас, і, крім цього, для $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ і $k \ge 1$ виконуються такі нерівності

$$0 < q_{e_{i(k)}} \le M^{e_{k+1}}_{e_{i(k)}} < 1, \tag{4.46}$$

де

$$M^{e_{k+1}}_{e_{i(k)}} = 1 + \frac{-q'_{e_{i(k+1)}}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{-q'_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}}(1 - q'_{e_{i(k)}+(n-1)e_{i_{k+1}}})}{1},$$

де дійсні числа $q'_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці

$$\begin{array}{cccccc}
 & g^{(0)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & & & \\
g^{(1)}_{e_{i(k)}} & & g^{(0)}_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}} & & & \\
 & g^{(1)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & & g^{(0)}_{e_{i(k)}+3e_{i_{k+1}}} & & \\
g^{(2)}_{e_{i(k)}} & & g^{(1)}_{e_{i(k)}+2e_{i_{k+1}}} & & g^{(0)}_{e_{i(k)}+4e_{i_{k+1}}} & \\
\vdots & g^{(2)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} & \vdots & g^{(1)}_{e_{i(k)}+3e_{i_{k+1}}} & \vdots & g^{(0)}_{e_{i(k)}+5e_{i_{k+1}}} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}, \tag{4.47}$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$\frac{1 - g^{(n)}_{e_{i(k)}+(2l+1)e_{i_{k+1}}}}{1 - g^{(n+1)}_{e_{i(k)}+(2l+1)e_{i_{k+1}}}} = \frac{1 - g^{(n+1)}_{e_{i(k)}+2le_{i_{k+1}}}}{1 - g^{(n)}_{e_{i(k)}+(2l+2)e_{i_{k+1}}}}, \tag{4.48}$$

$$g^{(n)}_{e_{i(k)}+(2l+2)e_{i_{k+1}}} g^{(n)}_{e_{i(k)}+(2l+3)e_{i_{k+1}}} = g^{(n+1)}_{e_{i(k)}+(2l+1)e_{i_{k+1}}} g^{(n+1)}_{(e_{i(k)}+(2l+2)e_{i_{k+1}}}, \tag{4.49}$$

де $l \ge 0$, $n \ge 0$, з початковими умовами

$$g^{(n+1)}_{e_{i(k)}} = 0,\ g^{(n)}_{e_{i(k)}+e_{i_{k+1}}} = \frac{s^{e_{i(k-1)}}_{e_{i(k)}+(n+1)e_{i_{k+1}}}}{s^{e_{i(k-1)}}_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}}},\ n \ge 0, \tag{4.50}$$

для формального кратного степеневого ряду (4.34) отримаємо багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (4.35), де дійсні числа $q_{e_{i(k)}}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, обчислюються у такий спосіб: для кожного $1 \leq i_1 \leq N$ дійні числа $q_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{le_{i_1}}$, $l \geq 1$, $g$-таблиці (4.39) елементи якої визначаються за правилами ромба (4.40) і (4.41) з початковими умовами (4.42); для кожних $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ і $k \geq 1$ дійсні числа $q_{e_{i(k)}+le_{e_{k+1}}}$, $l \geq 1$, обчислюються за формулами

$$q_{e_{i(k)}+e_{e_{k+1}}} = \frac{q'_{e_{i(k)}+e_{e_{k+1}}}}{1 - q_{e_{i(k)}}}, \tag{4.51}$$

$$q_{e_{i(k)}+ne_{e_{k+1}}} = q'_{e_{i(k)}+ne_{e_{k+1}}} \left( 1 - \frac{\displaystyle\prod_{r=1}^{n-1} \frac{q'_{e_{i(k)}+re_{e_{k+1}}}}{1 - q'_{e_{i(k)}+re_{e_{k+1}}}}}{\dfrac{1 - q_{e_{i(k)}}}{-q_{e_{i(k)}}} + \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} \prod_{r=1}^{m} \frac{q'_{e_{i(k)}+re_{e_{k+1}}}}{1 - q'_{e_{i(k)}+re_{e_{k+1}}}}} \right), \tag{4.52}$$

де дійсні числа $q'_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \geq 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{e_{i(k)}+le_{i_{k+1}}}$, $l \geq 1$, $g$-таблиці (4.47), елементи якої визначаються за правилами ромба (4.48) і (4.49) з початковими умовами (4.50).

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (4.35) за умови, що задані коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.34). Зрозуміло, що цей алгоритм є багатовимірним узагальненням $g$-алгоритму Бауера.

Далі покажемо, що багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (4.35), побудований за багатовимірним $g$-алгоритмом Бауера, є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.34) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Для цього досить довести, що порядок відповідності $\nu_n$ прямує монотонно до $\infty$ при $n \to \infty$. Доведення проведемо за індукцією за $n$.

Нехай $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — послідовність підхідних дробів багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (4.35). Використовуючи співвідношення (4.37), (4.40)–(4.42), (4.44) і (4.48)–(4.52), згортатимемо підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$ для кожного $n \geq 1$.

При $n = 1$ маємо $f_1(\mathbf{z}) = s_0$. Оскільки

$$s_0 - \left(\sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}\right) = \sum_{|\mathbf{k}|\geq 1} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}},$$

то $f_1(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і порядок відповідності $\nu_1 = 1$.

При $n = 2$ запишемо

$$f_2(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} q_{e_{i_1}} z_{i_1} = \frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} (-s_{e_{i_1}}^{e_0}) z_{i_1} = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{1} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2),$$

де символ $O(\mathbf{z}^p)$ — означає формальний кратний степеневий ряд, чий найменший степінь однорідних членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 2$. Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{1} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} + \mathrm{O}(\mathbf{z}^2) - \left(\sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}\right) = \mathrm{O}'(\mathbf{z}^2),$$

де символ $\mathrm{O}'(\mathbf{z}^p)$ означає те саме, що і символ $O(\mathbf{z}^p)$, то $g_2(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $\nu_2 = 2$.

Згідно з описаним вище багатовимірним $g$-алгоритмом Бауера для $e_0$ і для всіх $e_{i(k)}$ таких, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ і $k \geq 1$ неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \frac{q_{e_{i(k)}+le_1}(1 - q_{e_{i(k)}+(l-1)e_1}) z_1}{1}$$

(тут і далі $q_{e_0} = 0$) є відповідним до формального степеневого ряду

$$P_{e_{i(k)}}(z_1) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} s_{le_1}^{e_{i(k)}} (-z_1)^l$$

в початку координат, і порядок відповідності $\nu_n = n + 1$. Тому, для $e_0$ і для кожного $e_{i(k)}$ такого, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і для $n \geq 2$ скінченний неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{n} \frac{q_{e_{i(k)}+le_1}(1 - q_{e_{i(k)}+(l-1)e_1}) z_1}{1}$$

зображується формальним степеневим рядом вигляду

$$P_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = 1 + \sum_{l=1}^{n} s_{le_1}^{e_{i(k)}} (-z_1)^l + O(z_1^{n+1}),$$

де символ $O(z_1^p)$ означає формальний степеневий ряд, чий найменший степінь членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 3$.

Тоді при $n = 3$ маємо

$$f_3(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{F_{e_0}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} q_{e_{i(2)}}(1 - q_{e_{i_1}}) z_{i_2} =$$

$$= \frac{s_0}{P_{e_0}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{-s_{e_{i_1}}^{e_0} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} (-s_{e_{i_2}}^{e_{i_1}}) z_{i_2} =$$

$$= \frac{s_0}{P_{e_0}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} (-s_{e_{i_1}}^{e_0}) z_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{-s_{e_{i(2)}}^{e_0}}{s_{e_{i_1}}^{e_0}} + O(\mathbf{z}^2) \right) =$$

$$= \frac{s_0}{1} + \left( \sum_{i_1=1}^{N} (-s_{e_{i_1}}^{e_0}) z_{i_1} + \sum_{i_1=2}^{N} z_{i_1} \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} s_{e_{i(2)}}^{e_0} \right) + O(\mathbf{z}^3) \right) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} s_{\mathbf{k}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3),$$

Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} s_{\mathbf{k}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3) - \left( \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} s_{\mathbf{k}} (-\mathbf{z})^{\mathbf{k}} \right) = O'(\mathbf{z}^3),$$

то $f_3(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і $\nu_3 = 3$.

Далі, нехай $n$ — довільне натуральне число таке, що $n \geq 4$. Тоді

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{F_{e_0}^{(n-1)}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{q_{e_{i_1}} z_{i_1}}{F_{e_{i_1}}^{(n-2)}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{q_{e_{i(2)}}(1 - q_{e_{i_1}}) z_{i_2}}{F_{e_{i(2)}}^{(n-3)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}} \frac{q_{e_{i(n-3)}}(1 - q_{e_{i(n-4)}}) z_{i_{n-3}}}{F_{e_{i(n-3)}}^{(2)}(z_1)} + \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{q_{e_{i(n-2)}}(1 - q_{e_{i(n-3)}}) z_{i_{n-2}}}{1} +$$

$$+ \sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}} q_{e_{i(n-1)}}(1 - q_{e_{i(n-2)}}) z_{i_{n-1}} =$$

$$= \frac{s_0}{P_{e_0}^{(n-1)}(z_1)} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{-s_{e_{i_1}}^{e_0} z_{i_1}}{P_{e_{i_1}}^{(n-2)}(z_1)} + \cdots + \sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}} \frac{-s_{e_{i_{n-3}}}^{e_{i(n-4)}} z_{i_{n-3}}}{P_{e_{i(n-3)}}^{(2)}(z_1)} +$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}\frac{-s_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-2}}}{1}+\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}}(-s_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}})z_{i_{n-1}}=$$

$$=\frac{s_0}{P_{e_0}^{(n-1)}(z_1)}+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{-s_{e_{i_1}}^{e_0}z_{i_1}}{P_{e_{i_1}}^{(n-2)}(z_1)}+\cdots+\sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}}\frac{-s_{e_{i_{n-3}}}^{e_{i(n-4)}}z_{i_{n-3}}}{P_{e_{i(n-3)}}^{(2)}(z_1)}+$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}(-s_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}})z_{i_{n-2}}\left(1+\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}}\frac{-s_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-3)}}}{s_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}}z_{i_{n-1}}+O(\mathbf{z}^2)\right)=$$

$$=\frac{s_0}{P_{e_0}^{(n-1)}(z_1)}+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{-s_{e_{i_1}}^{e_0}z_{i_1}}{P_{e_{i_1}}^{(n-2)}(z_1)}+\cdots+\sum_{i_{n-3}=2}^{i_{n-4}}\frac{-s_{e_{i_{n-3}}}^{e_{i(n-4)}}z_{i_{n-3}}}{P_{e_{i(n-3)}}^{(2)}(z_1)}+$$

$$+\left(\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}(-s_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}})z_{i_{n-2}}+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}z_{i_{n-2}}\left(\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}}s_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-1}}\right)+O(\mathbf{z}^3)\right)$$

Продовжуючи цей процес, на останньому кроці отримаємо

$$f_n(\mathbf{z})=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n-1}s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}+O(\mathbf{z}^n).$$

Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{n-1}s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}+O(\mathbf{z}^n)-\left(\sum_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}}s_{\mathbf{k}}(-\mathbf{z})^{\mathbf{k}}\right)=O'(\mathbf{z}^n),$$

то $f_n(\mathbf{z})\sim L(\mathbf{z})$ і $\nu_n=n$.

Із довільності $n$ випливає, що $f_n(\mathbf{z})\sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ для всіх $n\geq 1$ і порядок відповідності $\nu_n=n$. Це означає, що розвинення кожного підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з формальним кратним степеневим рядом $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів зі степенем $(n-1)$ включно. Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty}\nu_n=\lim_{n\to+\infty}n-1=+\infty,$$

то багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (4.35) є відповідними до формального кратного степеневого ряду (4.34) в точці $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. Таким чином, доведена така теорема:

**Теорема 4.5.** *Багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними* (4.33) *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.34) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожного* $1 \le i_1 \le N$ *послідовність* (4.38) *є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас, і для кожних* $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ *і* $k \ge 1$ *послідовність* (4.45) *є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас, і, крім цього, виконуються нерівності* (4.46) *для* $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ *і* $k \ge 1$.

Зазначимо, що із побудованого вище багатовимірного $g$-алгоритму Бауера випливає, що дійсні числа $q_{e_{i(k)}}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \ge 1$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{q_{e_{i(k)}}(1 - \delta_{i_k, i_{k-1}} q_{e_{i(k-1)}}) z_{i_k}}{1}, \tag{4.53}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду (4.34) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, можна обчислювати так: для кожного $1 \le i_1 \le N$ дійні числа $q_{le_{i_1}}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{le_{i_1}}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці (4.39), елементи якої визначаються за правилами ромба (4.40) і (4.41) з початковими умовами (4.42); для кожних $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$ і $k \ge 1$ дійсні числа $q_{e_{i(k)} + le_{e_{k+1}}}$, $l \ge 1$, є діагональними елементами $g^{(0)}_{e_{i(k)} + le_{i_{k+1}}}$, $l \ge 1$, $g$-таблиці (4.47), елементи якої визначаються за правилами ромба (4.48) і (4.49) з початковими умовами (4.50). Крім цього, на підставі теореми 4.4 багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (4.53), коефіцієнти якого обчислені вище описаним способом, є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.34) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Таким чином, правильна така теорема:

**Теорема 4.6.** *Багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - \delta_{i_k, i_{k-1}} g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1},$$

*де* $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ *— символ Кронекера, є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.34) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожного* $1 \leq i_1 \leq N$ *послідовність* (4.38) *є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас, і для кожних* $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ *і* $k \geq 1$ *послідовність* (4.45) *є абсолютно монотонна, відповідна нескінченному розподілу мас.*

## 4.4. Побудова багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

У цьому підрозділі побудуємо і дослідимо алгоритм розвинення заданого формального кратного степеневого ряду (4.1) у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{4.54}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Нехай $N \geq 2$. Позначимо $a_{e_{i(k)}} = p_{i(k)}$, $b_{e_{i(k)}} = q_{i(k)}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (4.54) запишемо у вигляді

$$c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i(1)}} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} a_{e_{i(k)}} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}, \tag{4.55}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Побудову багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (4.55) проводитимемо міркуваннями, подібними до міркувань, застосованих в підрозділі 4.1 до побудови багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (4.3).

Крок 1. Нехай $c_{\mathbf{k}} \neq 0$ для $|\mathbf{k}| = 1$. Тоді формальний кратний степеневий ряд (4.1) запишемо у вигляді

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = c_0 + P_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_0}(z_1)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{ne_1}z_1^n,\ R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})=\sum_{\substack{|\mathbf{k}|\geq 0\\ k_j=0,\ i_1+1\leq j\leq N}}\frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ 2\leq i_1\leq N.$$

Крок 2. Нехай $H_{e_1}(n)\neq 0$ для $n\geq 1$, де

$$H_{e_1}(n)=\begin{vmatrix} c_{e_1} & c_{2e_1} & \dots & c_{ne_1}\\ c_{2e_1} & c_{3e_1} & \dots & c_{(n+1)e_1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{ne_1} & c_{(n+1)e_1} & \dots & c_{(2n-1)e_1}\end{vmatrix}. \tag{4.56}$$

Тоді згідно з теоремою 1.7 існують числа $a_{ne_1}$ і $b_{ne_1}$, $n\geq 1$, такі, що $a_{ne_1}\neq 0$ для $n\geq 1$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{ne_1}z_1^n\sim\frac{a_{e_1}z_1}{1+b_{e_1}z_1}+\mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty}\frac{-a_{le_1}z_1^2}{1+b_{le_1}z_1}=F_{e_0}(z_1),$$

де коефіцієнти неперервного дробу $F_{e_0}(z_1)$ обчислюються за формулами

$$a_{ne_1}=\frac{H_{e_1}(n)H_{e_1}(n-2)}{(H_{e_1}(n-1))^2},\ b_{ne_1}=\frac{\chi_{e_1}(n-1)}{H_{e_1}(n-1)}-\frac{\chi_{e_1}(n)}{H_{e_1}(n)},\ n\geq 1,$$

де $H_{e_1}(-1)=H_{e_1}(0)=1$, $H_{e_1}(n)$ для $n\geq 1$ визначаються за формулою (4.56), $\chi_{e_1}(0)=0$, $\chi_{e_1}(1)=c_{2e_1}$ і

$$\chi_{e_1}(n)=\begin{vmatrix} c_{e_1} & c_{2e_1} & \dots & c_{(n-1)e_1} & c_{(n+1)e_1}\\ c_{2e_1} & c_{3e_1} & \dots & c_{ne_{i_1}} & c_{(n+2)e_1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{ne_1} & c_{(n+1)e_1} & \dots & c_{(2n-2)e_1} & c_{2ne_1}\end{vmatrix}\ \text{для } n\geq 2.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})\sim c_0+F_{e_0}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N}c_{e_{i_1}}z_{i_1}R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 3. Нехай $H_{e_{i_1}}(n)\neq 0$ для $2\leq i_1\leq N$ і $n\geq 1$, де

$$H_{e_{i_1}}(n)=\begin{vmatrix} c_{e_{i_1}} & c_{2e_{i_1}} & \dots & c_{ne_{i_1}}\\ c_{e_{2e_{i_1}}} & c_{3e_{i_1}} & \dots & c_{(n+1)e_{i_1}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{ne_{i_1}} & c_{(n+1)e_{i_1}} & \dots & c_{(2n-1)e_{i_1}}\end{vmatrix}. \tag{4.57}$$

Тоді на підставі теореми 1.7 для кожного $2 \le i_1 \le N$ існують числа $a'_{ne_{i_1}}$ і $b'_{ne_{i_1}}$, $n \ge 1$, такі, що $a'_{ne_{i_1}} \ne 0$ для $n \ge 1$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{ne_{i_1}} z_{i_1}^n \sim \frac{a'_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b'_{e_{i_1}} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a'_{le_{i_1}} z_{i_1}^2}{1 + b'_{le_{i_1}} z_{i_1}},$$

де коефіцієнти неперервного дробу праворуч обчислюються за формулами

$$a'_{ne_{i_1}} = \frac{H_{e_{i_1}}(n) H_{e_{i_1}}(n-2)}{(H_{e_{i_1}}(n-1))^2},\ b'_{ne_{i_1}} = \frac{\chi_{e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_{i_1}}(n-1)} - \frac{\chi_{e_{i_1}}(n)}{H_{e_{i_1}}(n)},\ n \ge 1,$$

де $H_{e_{i_1}}(-1) = H_{e_{i_1}}(0) = 1$, $H_{e_{i_1}}(n)$ для $n \ge 1$ визначаються за формулою (4.57), $\chi_{e_{i_1}}(0) = 0$, $\chi_{e_{i_1}}(1) = c_{2e_{i_1}}$ і

$$\chi_{e_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{e_{i_1}} & c_{2e_{i_1}} & \dots & c_{(n-1)e_{i_1}} & c_{(n+1)e_{i_1}} \\ c_{2e_{i_1}} & c_{3e_{i_1}} & \dots & c_{ne_{i_1}} & c_{(n+2)e_{i_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{ne_{i_1}} & c_{(n+1)e_{i_1}} & \dots & c_{(2n-2)e_{i_1}} & c_{2ne_{i_1}} \end{vmatrix} \text{ для } n \ge 2. \tag{4.58}$$

Оскільки $c_{e_{i_1}} = a'_{e_{i_1}}$, $2 \le i_1 \le N$, то покладемо $a_{e_{i_1}} = a'_{e_{i_1}}$, $2 \le i_1 \le N$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} a_{e_{i_1}} z_{i_1} R_{e_{i_1}}(\mathbf{z}).$$

Крок 4. Нехай для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\mathbf{k}| \ge 0 \\ k_j = 0,\ i_1+1 \le j \le N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{4.59}$$

є оберненим до $R_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_1 + 1 \le j \le N$, формального кратного степеневого ряду (4.59) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i_1}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}}, \tag{4.60}$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i_1}} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}} = 0$, якщо існує індекс $j$, $1 \le j \le N$, такий, що $k_j < 0$. Тоді

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})}.$$

Далі, для побудови багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (4.55) використовуватимемо ідеї, викладені у кроках 1–4. Застосуємо крок 1 до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_1 \le N$. Нехай $c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} \ne 0$ для $1 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Крім цього, для формування частинних знаменників гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами накладемо додаткові умови (тому надалі крок 1 замінимо на $1'$). Нехай

$$c_{ne_{i_2}}^{e_{i_1}} = 0 \text{ для } 1 \le i_2 \le i_1 - 1,\ 2 \le i_1 \le N \text{ і } n \ge 1.$$

Тоді для кожного $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд (4.59) запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i_1}}(\mathbf{z}) = 1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i_1}}(z_1) + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i_1}}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{e_{i_1}+ne_1}^{e_{i_1}} z_1^n,\ R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\mathbf{k}|\ge 0 \\ k_j=0,\ i_2+1\le j\le N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i(2)}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ 2 \le i_2 \le i_1.$$

Оскільки

$$c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} = -\frac{c_{2e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}} = b'_{e_{i_1}},\ 2 \le i_1 \le N,$$

то покладемо $b_{e_{i_1}} = b'_{e_{i_1}}$, $2 \le i_1 \le N$. Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо тепер крок 2 до кожного формального степеневого ряду $P_{e_{i_1}}(z_1)$, де $2 \le i_1 \le N$. Нехай $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n) \ne 0$ для $2 \le i_1 \le N$ і $n \ge 1$, де

$$H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_1} \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(2n-1)e_1} \end{vmatrix}. \tag{4.61}$$

Тоді згідно з теоремою 1.7 для кожного $2 \le i_1 \le N$ існують числа $a_{e_{i_1}+ne_1}$ і $b_{e_{i_1}+ne_1}$, $n \ge 1$, такі, що $a_{e_{i_1}+ne_1} \ne 0$ для $n \ge 1$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_1} z_1^n \sim \frac{a_{e_{i_1}+e_1} z_1}{1 + b_{e_{i_1}+e_1} z_1} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a_{e_{i_1}+le_1} z_1^2}{1 + b_{e_{i_1}+le_1} z_1} = F_{e_{i_1}}(z_1),$$

де коефіцієнти неперервного дробу $F_{e_{i_1}}(z_1)$ обчислюються за формулами

$$a_{e_{i_1}+ne_1} = \frac{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n) H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n-2)}{(H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n-1))^2}, \ n \ge 1,$$

$$b_{e_{i_1}+ne_1} = \frac{\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n-1)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n)}, \ n \ge 1,$$

де $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(-1) = H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(0) = 1$, $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n)$ для $n \ge 1$ визначаються за формулою (4.61), $\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(0) = 0$, $\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(1) = c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_1}$ і

$$\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n-1)e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_1} \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+2)e_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_1} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(2n-2)e_1} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2ne_1} \end{vmatrix} \text{ для } n \ge 2.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 3. Нехай $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n) \ne 0$ для $2 \le i_2 \le i_1 - 1$, $2 \le i_1 \le N$

і $n \geq 1$, де

$$H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_{i_2}} \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(2n-1)e_{i_2}} \end{vmatrix}. \tag{4.62}$$

Тоді на підставі теореми 1.7 для кожних $2 \leq i_2 \leq i_1 - 1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ існують числа $a'_{e_{i_1}+ne_{i_2}}$ і $b'_{e_{i_1}+ne_{i_2}}$, $n \geq 1$, такі, що $a'_{e_{i_1}+ne_{i_2}} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_{i_2}} z^n_{i_2} \sim \frac{a'_{e_{i_1}+e_{i_2}} z_{i_2}}{1 + b'_{e_{i_1}+e_{i_2}} z_{i_2}} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a'_{e_{i_1}+le_{i_2}} z^2_{i_2}}{1 + b'_{e_{i_1}+le_{i_2}} z_{i_2}},$$

де коефіцієнти неперервного дробу праворуч обчислюються за формулами

$$a'_{e_{i_1}+ne_{i_2}} = \frac{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n) H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n-2)}{(H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n-1))^2}, \ n \geq 1,$$

$$b'_{e_{i_1}+ne_{i_2}} = \frac{\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n-1)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n)}{H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n)}, \ n \geq 1,$$

де $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(-1) = H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(0) = 1$, $H^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулою (4.62), $\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(0) = 0$, $\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(1) = c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}}$ і

$$\chi^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n-1)e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}} \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+2)e_{i_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+ne_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(n+1)e_{i_2}} & \dots & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+(2n-2)e_{i_2}} & c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2ne_{i_2}} \end{vmatrix}$$

для $n \geq 2$. Оскільки

$$c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}} = a'_{e_{i(2)}}, \ 2 \leq i_2 \leq i_1 - 1, \ 2 \leq i_1 \leq N,$$

$$c^{e_{i_1}}_{2e_{i_1}} = -\frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}} c_{2e_{i_1}} + c_{3e_{i_2}}}{c_{e_{i_1}}} = -\frac{c_{3e_{i_1}} c_{e_{i_1}} - (c_{2e_{i_1}})^2}{(c_{e_{i_1}})^2} = -a'_{2e_{i_1}}, \ 2 \leq i_1 \leq N,$$

то покладемо

$$a_{e_{i(2)}} = a'_{e_{i(2)}}, \ a_{2e_{i_1}} = a'_{2e_{i_1}}, \ 2 \leq i_2 \leq i_1 - 1, \ 2 \leq i_1 \leq N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) +$$
$$+ \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} (-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2} R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}),$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Застосуємо крок 4 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\mathbf{k}| \ge 0 \\ k_j = 0,\ i_2+1 \le j \le N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \tag{4.63}$$

є оберненим до $R_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$. Зазначимо, що коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_k + 1 \le j \le N$, формального кратного степеневого ряду (4.63) однозначно визначаються за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(2)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i(2)}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}},$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(2)}} = 1$, причому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(2)}} = 0$, якщо існує індекс $j$, $1 \le j \le N$, такий, що $k_j < 0$. Тоді

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})}.$$

Продовжимо побудову приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (4.55) подібними вище міркуваннями. Застосуємо крок $1'$ до кожного формального кратного степеневого ряду $R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай $c_{e_{i_2}+e_{i_3}}^{e_{i(2)}} \ne 0$ для $1 \le i_3 \le i_2$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$, і, нехай

$$c_{ne_{i_3}}^{e_{i(2)}} = 0 \text{ для } 1 \le i_3 \le i_2 - 1,\ 2 \le i_2 \le i_1,\ 2 \le i_1 \le N \text{ і } n \ge 1.$$

Тоді для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд (4.63) за умов запишемо у вигляді

$$R'_{e_{i(2)}}(\mathbf{z}) = 1 + c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}(z_1) + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}),$$

де

$$P_{e_{i(2)}}(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{e_{i_2}+ne_1}^{e_{i(2)}} z_1^n, \ R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{|\mathbf{k}|\ge 0 \\ k_j=0,\, i_3+1\le j\le N}} \frac{c_{\mathbf{k}+e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Оскільки

$$c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} = -\frac{c_{e_{i_2}+e_{i(2)}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}} = b'_{e_{i(2)}},$$

де $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $2 \le i_1 \le N$,

$$c_{e_{i_1}}^{2e_{i_1}} = -\frac{c_{3e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{c_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}}} = -\frac{c_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}} c_{2e_{i_1}} + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} c_{3e_{i_1}} + c_{4e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} c_{2e_{i_1}} + c_{3e_{i_1}}} =$$
$$= \frac{c_{2e_{i_1}}}{c_{e_{i_1}}} - \frac{c_{4e_{i_1}} c_{e_{i_1}} - c_{3e_{i_1}} c_{2e_{i_1}}}{c_{3e_{i_1}} c_{e_{i_1}} - (c_{2e_{i_1}})^2} = b'_{2e_{i_1}},$$

де $2 \le i_1 \le N$, то покладемо

$$b_{e_{i(2)}} = b'_{e_{i(2)}}, \ b_{2e_{i_1}} = b'_{2e_{i_1}}, \ 2 \le i_2 \le i_1 - 1, \ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 2 до кожного формального степеневого ряду $P_{e_{i(2)}}(z_1)$, де $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$. Нехай $H_{e_{i_2}+e_1}^{e_{i(2)}}(n) \ne 0$ для $2 \le i_2 \le i_1$, $2 \le i_1 \le N$ і $n \ge 1$, де

$$H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_1} \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+3e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(2n-1)e_1} \end{vmatrix}. \tag{4.64}$$

Тоді згідно з теоремою 1.7 для кожних $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ існують числа $a_{e_{i(2)}+ne_1}$ і $b_{e_{i(2)}+ne_1}$, $n \ge 1$, такі, що $a_{e_{i(2)}+ne_1} \ne 0$ для $n \ge 1$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_1} z_1^n \sim \frac{a_{e_{i(2)}+e_1} z_1}{1 + b_{e_{i(2)}+e_1} z_1} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a_{e_{i(2)}+le_1} z_1^2}{1 + b_{e_{i(2)}+le_1} z_1} = F_{e_{i(2)}}(z_1),$$

де коефіцієнти неперервного дробу $F_{e_{i(2)}}(z_1)$ обчислюються за формулами

$$a_{e_{i(2)}+ne_1} = \frac{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n) H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n-2)}{(H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n-1))^2}, \ n \ge 1,$$

$$b_{e_{i(2)}+ne_1} = \frac{\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n-1)}{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n)}{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n)}, \ n \ge 1,$$

де $H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(-1) = H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(0) = 1$, $H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n)$ для $n \ge 1$ визначаються за формулою (4.64), $\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(0) = 0$, $\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(1) = c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_1}$ і

$$\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n-1)e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1} \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+3e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+2)e_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_1} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(2n-2)e_1} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2ne_1} \end{vmatrix} \text{ для } n \ge 2.$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$

$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2,i_3}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Застосуємо крок 3. Нехай $H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n) \neq 0$ для $2 \leq i_3 \leq i_2-1$, $2 \leq i_2 \leq i_1$, $2 \leq i_1 \leq N$ і $n \geq 1$, де

$$H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+3e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(2n-1)e_{i_3}} \end{vmatrix}. \tag{4.65}$$

Тоді на підставі теореми 1.7 для кожних $2 \leq i_3 \leq i_2 - 1$ $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$ існують числа $a'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}}$ і $b'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}}$, $n \geq 1$, такі, що $a'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} \neq 0$, $n \geq 1$, і

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} z^n_{i_3} \sim \frac{a'_{e_{i(3)}} z_{i_3}}{1 + b'_{e_{i(3)}} z_{i_3}} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a'_{e_{i(2)}+le_{i_3}} z^2_{i_3}}{1 + b'_{e_{i(2)}+le_{i_3}} z_{i_3}},$$

де коефіцієнти неперервного дробу праворуч обчислюються за формулами

$$a'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} = \frac{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n) H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n-2)}{(H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n-1))^2}, \ n \geq 1,$$

$$b'_{e_{i(2)}+ne_{i_3}} = \frac{\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n-1)}{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n)}{H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n)}, \ n \geq 1,$$

де $H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(-1) = H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(0) = 1$, $H^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n)$ для $n \geq 1$ визначаються за формулою (4.65), $\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(0) = 0$, $\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(1) = c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}$ і

$$\chi^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}}(n) = \begin{vmatrix} c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n-1)e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}} \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+3e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+2)e_{i_3}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+ne_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(n+1)e_{i_3}} & \dots & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+(2n-2)e_{i_3}} & c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+2ne_{i_3}} \end{vmatrix}$$

для $n \geq 2$. Оскільки

$$c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}+e_{i_3}} = a'_{e_{i(3)}},$$

де $2 \leq i_3 \leq i_2 - 1$, $2 \leq i_2 \leq i_1$ і $2 \leq i_1 \leq N$,

$$c^{e_{i(2)}}_{2e_{i_2}} = -c^{e_{i(2)}}_{e_{i_2}} \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}}} - \frac{c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_{i_2}}}{c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}}} = -\frac{(c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+2e_{i_2}})^2 - c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}} c^{e_{i_1}}_{e_{i_1}+3e_{i_2}}}{(c^{e_{i_1}}_{e_{i(2)}})^2} = -a'_{e_{i_1}+2e_{i_2}}$$

де $2 \le i_2 \le i_1 - 1$ і $3 \le i_1 \le N$ (зауважимо, що коефіцієнт $c_{2e_{i_2}}^{e_{i(2)}}$ можливий лише у випаду коли $N \ge 3$ і, зрозуміло, поява цього коефіцієнта тут і подібних інших на наступних кроках залежить від числа $N$),

$$c_{2e_{i_1}}^{2e_{i_1}} = \frac{(c_{3e_{i_1}}^{e_{i_1}})^2 - c_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}} c_{4e_{i_1}}^{e_{i_1}}}{(c_{2e_{i_1}}^{e_{i_1}})^2} =$$

$$= -\frac{c_{e_{i_1}}(c_{e_{i_1}} c_{3e_{i_1}} c_{5e_{i_1}} + 2c_{2e_{i_1}} c_{3e_{i_1}} c_{4e_{i_1}} - c_{3e_{i_1}}^3 - c_{e_{i_1}} c_{4e_{i_1}}^2 - c_{2e_{i_1}}^2 c_{5e_{i_1}})}{(c_{e_{i_1}} c_{3e_{i_1}} - c_{2e_{i_1}}^2)^2} = -a'_{3e_{i_1}},$$

де $2 \le i_1 \le N$, то покладемо

$$a_{e_{i(3)}} = a'_{e_{i(3)}},\ 2 \le i_3 \le i_2 - 1,\ 2 \le i_2 \le i_1,\ 2 \le i_1 \le N,$$
$$a_{e_{i_1}+2e_{i_2}} = a'_{e_{i_1}+2e_{i_2}},\ 2 \le i_3 \le i_2 - 1,\ 3 \le i_1 \le N,$$
$$a_{3e_{i_1}} = a'_{3e_{i_1}},\ 2 \le i_1 \le N.$$

Таким чином, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} (-1)^{\delta_{i_2,i_3}} a_{e_{i(3)}} z_{i_2} z_{i_3} R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}).$$

Нарешті, застосовуючи крок 4 до кожного формального кратного степеневого ряду $R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z})$, де $2 \le i_3 \le i_3$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$, запишемо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim c_0 + F_{e_0}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}(z_1)} +$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} F_{e_{i(2)}}(z_1)} + \sum_{i_3=2}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}} a_{e_{i(3)}} z_{i_2} z_{i_3}}{R'_{e_{i(3)}}(\mathbf{z})}.$$

де для кожних $2 \le i_3 \le i_3$, $2 \le i_2 \le i_1$ і $2 \le i_1 \le N$ формальний кратний степеневий ряд

$$R'_{e_{i(3)}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \ge \mathbf{0} \\ k_j = 0,\ i_3+1 \le j \le N}} c_{\mathbf{k}}^{e_{i(3)}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

з коефіцієнтами, обчисленими за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(3)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(3)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i(2)}}},$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(3)}} = 1$, при цьому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(3)}} = 0$, якщо існує індекс $j$ такий, що $1 \le j \le N$ і $k_j < 0$, є оберненим до $R_{e_{i(3)}}(\mathbf{z})$.

Зрозуміло, що подальша побудова багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінами (4.55) полягає у поступовому застосуванні кроків $1'$, 2, 3 і 4 до всіх формальних кратних степеневих рядів, що знаходяться у знаменниках кінцевих частинних ланок скінченних гілок гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінами. У результаті, обчисливши коефіцієнти коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_{i_1}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_1 + 1 \le j \le N$, $2 \le i_1 \le N$, за рекурентною формулою (4.60) і коефіцієнти $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}}$, $|\mathbf{k}| \ge 1$, $k_j = 0$, $i_k + 1 \le j \le N$, $k \ge 2$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, за рекурентною формулою

$$c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = -\sum_{|\mathbf{r}|=1}^{|\mathbf{k}|} c_{\mathbf{k}-\mathbf{r}}^{e_{i(k)}} \frac{c_{\mathbf{r}+e_{i_{k-1},i_k}}^{e_{i(k-1)}}}{c_{e_{i_{k-1},i_k}}^{e_{i(k-1)}}}, \tag{4.66}$$

де $c_{\mathbf{0}}^{e_{i(k)}} = 1$, причому $c_{\mathbf{k}}^{e_{i(k)}} = 0$, якщо існує індекс $j$, $1 \le j \le N$, такий, що $k_j < 0$, за умов, що для кожного $1 \le i_1 \le N$ і $n \ge 1$ виконується нерівність

$$H_{e_{i_1}}(n) \ne 0, \tag{4.67}$$

де $H_{e_{i_1}}(n)$ визначається за формулою (4.57), і за умов, що для кожних $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ і $n \ge 1$ виконуються такі нерівності

$$c_{ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} = 0, \; H_{e_{i_k,i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n) \ne 0, \tag{4.68}$$

де $H_{e_{i_k,i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n)$ визначається за формулою

$$H_{e_{i_k,i_{k+1}}}^{e_{i(k)}}(n) = \begin{vmatrix} c_{e_{i_k,i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \dots & c_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ c_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+3e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \dots & c_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & c_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} & \dots & c_{e_{i_k}+(2n-1)e_{i_{k+1}}}^{e_{i(k)}} \end{vmatrix}, \tag{4.69}$$

для формального кратного степеневого ряду (4.1) отримаємо багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (4.55), де коефіцієнти $a_{e_{i(k)}}$ і $b_{e_{i(k)}}$ для всіх $e_{i(k)} \in \mathcal{E}_k$, $k \geq 1$, обчислюються за такими формулами:

$$a_{ne_{i_1}} = \frac{H_{e_{i_1}}(n)H_{e_{i_1}}(n-2)}{(H_{e_{i_1}}(n-1))^2},\ b_{ne_{i_1}} = \frac{\chi_{e_{i_1}}(n-1)}{H_{e_{i_1}}(n-1)} - \frac{\chi_{e_{i_1}}(n)}{H_{e_{i_1}}(n)}, \tag{4.70}$$

де $1 \leq i_1 \leq N$, $n \geq 1$, $H_{e_{i_1}}(-1) = H_{e_{i_1}}(0) = 1$, $H_{e_{i_1}}(n)$ для $n \geq 1$ визначається за формулою (4.57), $\chi_{e_{i_1}}(0) = 0$, $\chi_{e_{i_1}}(1) = c_{2e_{i_1}}$ і

$$\chi_{e_{i_1}}(n) = \begin{vmatrix} c_{e_{i_1}} & c_{2e_{i_1}} & \dots & c_{(n-1)e_{i_1}} & c_{(n+1)e_{i_1}} \\ c_{2e_{i_1}} & c_{3e_{i_1}} & \dots & c_{ne_{i_1}} & c_{(n+2)e_{i_1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{ne_{i_1}} & c_{(n+1)e_{i_1}} & \dots & c_{(2n-2)e_{i_1}} & c_{2ne_{i_1}} \end{vmatrix} \text{ для } n \geq 2; \tag{4.71}$$

$$a_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}} = \frac{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-2)}{(H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1))^2}, \tag{4.72}$$

$$b_{e_{i(k)}+ne_{i_{k+1}}} = \frac{\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n-1)} - \frac{\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)}{H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)}, \tag{4.73}$$

де $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(-1) = H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(0) = 1$, $H^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n)$ для $n \geq 1$ визначається за формулою (4.69), $\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(0) = 0$, $\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(1) = c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}}$ і

$$\chi^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}}(n) =$$

$$= \begin{vmatrix} c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k,i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}} & \dots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n-1)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}} \\ c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+3e_{i_{k+1}}} & \dots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+2)e_{i_{k+1}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+ne_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(n+1)e_{i_{k+1}}} & \dots & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+(2n-2)e_{i_{k+1}}} & c^{e_{i(k)}}_{e_{i_k}+2ne_{i_{k+1}}} \end{vmatrix} \tag{4.74}$$

для $n \geq 2$.

Таким чином, побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (4.55) за умови, що задані коефіцієнти формального кратного степеневого ряду (4.1).

Далі доведемо, що багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (4.55), побудований за описаним вище алгоритмом, є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Застосовуючи міркування, викладені в підрозділі 4.1 (див. с. 139–143), доведення проведемо за індукцією за $n$.

Нехай $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (4.55). Очевидно, що $\nu_0 = 1$ при $n = 0$. Використовуючи співвідношення (4.57), (4.58), (4.60) і (4.66)–(4.74), згортатимемо підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$ для кожного $n \geq 1$.

Згідно з описаним вище алгоритмом для $e_0$ і для всіх $e_{i(k)}$ таких, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$ і $k \geq 1$ неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}(z_1) = \frac{a_{e_{i(k)}+le_1} z_1}{1 + b_{e_{i(k)}+e_1} z_1} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{\infty} \frac{-a_{e_{i(k)}+le_1} z_1^2}{1 + b_{e_{i(k)}+le_1} z_1}$$

є відповідним до формального степеневого ряду

$$P_{e_{i(k)}}(z_1) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{e_{i_k}+le_1}^{e_{i(k)}} z_1^l$$

в початку координат, і порядок відповідності $\nu_n = 2n+1$. Звідси випливає, що для $e_0$ і для кожного $e_{i(k)}$ такого, що $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ і для $n \geq 2$ скінченний неперервний дріб

$$F_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = \frac{a_{e_{i(k)}+e_1} z_1}{1 + b_{e_{i(k)}+e_1} z_1} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=2}^{n} \frac{-a_{e_{i(k)}+le_1} z_1^2}{1 + b_{e_{i(k)}+le_1} z_1}$$

зображується формальним степеневим рядом вигляду

$$P_{e_{i(k)}}^{(n)}(z_1) = \sum_{l=1}^{2n} c_{e_{i_k}+le_1}^{e_{i(k)}} z_1^l + O(z_1^{2n+1}),$$

де $c_{le_1}^{e_0} = c_{le_1}$ для $1 \leq l \leq 2n$ і $n \geq 1$, символ $O(z_1^p)$ означає формальний степеневий ряд, чий найменший степінь членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 3$.

Тоді, при $n = 1$ маємо

$$f_1(\mathbf{z}) = c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1}} =$$

$$= c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1}} = c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} =$$

$$= c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_2} + O(\mathbf{z}^2) \right) =$$

$$= c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i(2)}} z_{i_2} \right) + O(\mathbf{z}^3) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3),$$

де символ $O(\mathbf{z}^p)$ означає формальний степеневий ряд, чий найменший степінь однорідних членів є не менший, ніж $p$, $p \geq 2$. Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^3) - \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = O'(\mathbf{z}^3),$$

то $f_1(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$, і порядок відповідності $\nu_1 = 3$.

При $n = 2$ маємо

$$f_2(\mathbf{z}) = c_0 + F_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2}} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} z_{i_2}} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} c_{e_{i_3}}^{e_{i(2)}} z_{i_3} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1}} +$$

$$+ \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2} \left( 1 + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{e_{i(2)}+e_{i_3}}^{e_{i_1}}}{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}} z_{i_3} + O(\mathbf{z}^2) \right) \right) =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1} + \left( \sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2} + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left( \sum_{i_3=1}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i_1}} z_{i_3} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left( \sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3} \left( \sum_{i_4=1}^{i_3} c_{e_{i(4)}-e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_4} \right) \right) + O(\mathbf{z}^3) \right) =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(2)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}} z_{i_1} \left( 1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left( \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{e_{i(3)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_3} \right) + \sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2} \left( \sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3} \left( \sum_{i_4=1}^{i_3} \frac{c_{e_{i(4)}}}{c_{e_{i_1}}} z_{i_4} \right) \right) + O(\mathbf{z}^4) \right) =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{4} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^5).$$

Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{4} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} + O(\mathbf{z}^5) - \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = O'(\mathbf{z}^5),$$

то $f_2(\mathbf{z}) \sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і порядок відповідності $\nu_2 = 5$.

Далі, нехай $n$ — довільне натуральне число таке, що $n \geq 3$. Тоді

$$f_n(\mathbf{z}) = c_0 + F_{e_0}^{(n)}(z_1) +$$

$$+ \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + b_{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} F_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)} + \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} a_{e_{i(2)}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + b_{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} F_{e_{i(2)}}^{(n-2)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{n-2},i_{n-3}}} a_{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-3}} z_{i_{n-2}}}{1 + b_{e_{i(n-2)}} z_{i_{n-2}} + z_{i_{n-2}} F_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)} +$$

$$+ \sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{n-2},i_{n-1}}} a_{e_{i(n-1)}} z_{i_{n-2}} z_{i_{n-1}}}{1 + b_{e_{i(n-1)}} z_{i_{n-1}}} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{n-1},i_n}} a_{e_{i(n)}} z_{i_{n-1}} z_{i_n}}{1 + b_{e_{i(n)}} z_{i_n}} =$$

$$= c_0 + P_{e_0}^{(n)}(z_1) + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{c_{e_{i_1}} z_{i_1}}{1 + c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_1} + z_{i_1} P_{e_{i-1}}^{(n-1)}(z_1)} +$$

$$+ \sum_{i_2=2}^{i_1} \frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}} z_{i_1} z_{i_2}}{1 + c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}} z_{i_2} + z_{i_2} P_{e_{i(2)}}^{(n-2)}(z_1)} + \cdots +$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}\frac{c_{e_{i_{n-3},i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-3}}z_{i_{n-2}}}{1+c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}+z_{i_{n-2}}P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)}+\sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}}\frac{c_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}z_{i_{n-1}}}{1+c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}}+$$

$$+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}\frac{c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}z_{i_n}}{1+c_{e_{i_n}}^{e_{i(n)}}z_{i_n}}=c_0+P_{e_0}^{(n)}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{c_{e_{i_1}}z_{i_1}}{1+c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}z_{i_1}+z_{i_1}P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)}+$$

$$+\sum_{i_2=2}^{i_1}\frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}z_{i_1}z_{i_2}}{1+c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}}z_{i_2}+z_{i_2}P_{e_{i(2)}}^{(n-2)}(z_1)}+\cdots+$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}\frac{c_{e_{i_{n-3},i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-3}}z_{i_{n-2}}}{1+c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}+z_{i_{n-2}}P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)}+$$

$$+\sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}}\frac{c_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}z_{i_{n-1}}}{1+c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}}+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}\frac{c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}z_{i_n}}{1}+\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}c_{e_{i_{n+1}}}^{e_{i(n)}}z_{i_{n+1}}=$$

$$=c_0+P_{e_0}^{(n)}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{c_{e_{i_1}}z_{i_1}}{1+c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}z_{i_1}+z_{i_1}P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)}+$$

$$+\sum_{i_2=2}^{i_1}\frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}z_{i_1}z_{i_2}}{1+c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}}z_{i_2}+z_{i_2}P_{e_{i(2)}}^{(n-2)}(z_1)}+\cdots+$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}\frac{c_{e_{i_{n-3},i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-3}}z_{i_{n-2}}}{1+c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}+z_{i_{n-2}}P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)}+\sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}}\frac{c_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}z_{i_{n-1}}}{1+c_{e_{i_{n-1}}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}}+$$

$$+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n-1}}z_{i_n}\left(1+\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}\frac{c_{e_{i_{n-1},i_n,i_{n+1}}}^{e_{i(n-1)}}}{c_{e_{i_{n-1},i_n}}^{e_{i(n-1)}}}z_{i_{n+1}}+O(\mathbf{z}^2)\right)=$$

$$=c_0+P_{e_0}^{(n)}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{c_{e_{i_1}}z_{i_1}}{1+c_{e_{i_1}}^{e_{i_1}}z_{i_1}+z_{i_1}P_{e_{i_1}}^{(n-1)}(z_1)}+$$

$$+\sum_{i_2=2}^{i_1}\frac{c_{e_{i(2)}}^{e_{i_1}}z_{i_1}z_{i_2}}{1+c_{e_{i_2}}^{e_{i(2)}}z_{i_2}+z_{i_2}P_{e_{i(2)}}^{(n-2)}(z_1)}+\cdots+$$

$$+\sum_{i_{n-2}=2}^{i_{n-3}}\frac{c_{e_{i_{n-3},i_{n-2}}}^{e_{i(n-3)}}z_{i_{n-3}}z_{i_{n-2}}}{1+c_{e_{i_{n-2}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}+z_{i_{n-2}}P_{e_{i(n-2)}}^{(2)}(z_1)}+\sum_{i_{n-1}=2}^{i_{n-2}}\frac{c_{e_{i_{n-2},i_{n-1}}}^{e_{i(n-2)}}z_{i_{n-2}}z_{i_{n-1}}}{1}+$$

$$+\left(\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}c_{e_{i_n}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_n}+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}z_{i_n}\left(\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}c_{e_{i_n,i_{n+1}}}^{e_{i(n-1)}}z_{i_{n+1}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} z_{i_n}\left(\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} z_{i_{n+1}}\left(\sum_{i_{n+2}=1}^{i_{n+1}} c_{e_{i_n,i_{n+1},i_{n+2}}}^{e_{i(n-1)}} z_{i_{n+2}}\right)\right)+O(\mathbf{z}^3)\Bigg).$$

Продовжуючи цей процес, подібно до вище наведених міркувань, на останньому кроці отримуємо

$$f_n(\mathbf{z})=c_0+P_{e_0}^{(n)}(z_1)+\sum_{i_1=2}^{N}\frac{c_{e_{i_1}}z_{i_1}}{1}+$$
$$+\left(\sum_{i_2=1}^{i_1} c_{e_{i_2}}^{e_{i_1}} z_{i_2}+\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}\left(\sum_{i_3=1}^{i_2} c_{e_{i_2,i_3}}^{e_{i_1}} z_{i_3}\right)+\ldots+\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}\left(\ldots\left(\sum_{i_{2n-1}=1}^{i_{2n-2}} z_{i_{2n-1}}\left(\sum_{i_{2n}=1}^{i_{2n-1}} c_{e_{i(2n)}-e_{i_1}}^{e_{i_1}} z_{i_{2n}}\right)\right)\ldots\right)\right)+O(\mathbf{z}^{2n-1})\right)$$

Звідси маємо

$$f_n(\mathbf{z})=c_0+P_{e_0}^{(n)}(z_1)+$$
$$+\sum_{i_1=2}^{N} c_{e_{i_1}}z_{i_1}\left(1+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{c_{e_{i(2)}}}{c_{e_{i_1}}}z_{i_2}+\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}\left(\sum_{i_3=1}^{i_2}\frac{c_{e_{i(3)}}}{c_{e_{i_1}}}z_{i_3}\right)+\ldots+\sum_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}\left(\ldots\left(\sum_{i_{2n-1}=1}^{i_{2n-2}} z_{i_{2n-1}}\left(\sum_{i_{2n}=1}^{i_{2n-1}}\frac{c_{e_{i(2n)}}}{c_{e_{i_1}}}z_{i_{2n}}\right)\right)\ldots\right)\right)+O(\mathbf{z}^{2n})\right)=$$
$$=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2n} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}+O(\mathbf{z}^{2n+1}),$$

Оскільки

$$\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{2n} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}+O(\mathbf{z}^{2n+1})-\sum_{\mathbf{k}\geq 0} c_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=O'(\mathbf{z}^{2n+1}),$$

то $f_n(\mathbf{z})\sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ і порядок відповідності $\nu_n=2n+1$.

Із довільності $n$ випливає, що $f_n(\mathbf{z})\sim L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ для всіх $n\geq 1$ і порядок відповідності $\nu_n=2n+1$. Це означає, що розвинення кожного підхідного дробу $f_n(\mathbf{z})$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з формальним кратним степеневим рядом $L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z})$ почленно до всіх однорідних членів

зі степенем $2n$ включно. Нарешті, позаяк

$$\lim_{n\to+\infty} \nu_n = \lim_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty,$$

то багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (4.55) є відповідним до формального кратного степеневого ряду (4.1) в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Таким чином, доведена така теорема:

**Теорема 4.7.** *Багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (4.54) *є відповідним до заданого формального кратного степеневого ряду* (4.1) *в точці* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *тоді і лише тоді, коли для кожних* $1 \le i_1 \le N$ *і* $n \ge 1$ *виконуються умови* (4.67) *і для кожних* $1 \le i_{k+1} \le i_k - 1$, $2 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ *і* $n \ge 1$ *— умови* (4.68).

**Висновки до розділу 4.** Цей розділ присвячено методам побудови функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Розглянуто підхід, у якому алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними отримано із використанням відповідних класичних алгоритмів.

У результаті досліджень побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними і багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними, а також побудовано багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера і багатовимірний $g$-алгоритм Бауера. Для кожного алгоритму встановлено необхідні і достатні умови його існування. Крім цього, встановлено необхідні і достатні умови існування багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду.

Усі отримані результати є багатовимірними узагальненнями відповідних класичних результатів для неперервних дробів.

Відмітимо, що побудовані алгоритми надають зручну чисельну процедуру обчислення коефіцієнтів функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними за коефіцієнтами заданих формальних кратних степеневих рядів.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в таких працях: [26, 42, 45, 49, 65, 101, 107, 110, 112, 113].

# РОЗДІЛ 5

# ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У цьому розділі досліджується збіжність гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, елементи яких є комплекснозначні функції багатьох змінних.

## 5.1. Області збіжності багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними

Дослідимо збіжність багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{5.1}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

Нехай

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1, \ i(n) \in \mathcal{I}_n, \ n \geq 1, \tag{5.2}$$

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{a_{i(r)} z_{i_r}}{1}, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ 1 \leq k \leq n-1, \ n \geq 2. \tag{5.3}$$

Тоді, очевидно, виконується рекурентне співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{5.4}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$, і, отже, $n$-ий підхідний дріб багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (5.1) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \ n \geq 1.$$

Крім цього, нехай (тут і далі) $l(N) = (l_1, l_2, \ldots, l_N)$.

Доведемо таку теорему:

**Теорема 5.1.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.1) *лежать на промені* $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, $-\pi < \varphi < \pi$, *і задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{l_{i_{k+1}} |a_{i(k+1)}|}{g_{i(k)}(1 - g_{i(k+1)})} \leq 1 + \cos(\varphi) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.5}$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < g_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.6}$$

*Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.1) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N),M} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k) < l_k,\ |z_k| < M,\ 1 \leq k \leq N \right\} \tag{5.7}$$

*для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{l(N),M}$.

**Доведення.** Нехай $n$ — довільне натуральне число і $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $P_{l(N),M}$. За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ доведемо такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi/2}) > (1 - g_{i(k)}) \cos(\varphi/2) > 0, \tag{5.8}$$

де $1 \leq k \leq n$.

Нерівності (5.8) для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, враховуючи (5.2), очевидні. Припустимо, що нерівності (5.8) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r + 1 \leq n$. Доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Використовуючи співвідношення (5.4) і те, що $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2} = e^{-i\varphi/2} + \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|a_{i(r+1)}|z_{i_{r+1}}}{Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}}. \tag{5.9}$$

Із нерівності (5.5) випливає, що

$$|a_{i(r+1)}| \leq g_{i(r)}(1 - g_{i(r+1)})\frac{1 + \cos(\varphi)}{l_{i_{r+1}}} < \frac{2}{l_{i_{r+1}}} \tag{5.10}$$

для всіх індексів $i_{r+1}$ таких, що $1 \leq i_{r+1} \leq i_r$. Нехай

$$u = \mathrm{Re}\,(|a_{i(r+1)}|z_{i_{r+1}}),\ v = \mathrm{Im}\,(|a_{i(r+1)}|z_{i_{r+1}}),$$
$$x = \mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}),\ y = \mathrm{Im}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}).$$

Тоді, комбінуючи нерівність із (5.7) і нерівності (5.10), елементарними перетвореннями отримуємо $v^2 \leq 4u + 4$. Застосовуючи послідовно лему 1.2, нерівність із (5.7), припущення індукції та нерівність (5.5) до співвідношення (5.9) і враховуючи нерівність (5.6), маємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}) \geq \cos(\varphi/2) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|a_{i(r+1)}|(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2})} >$$

$$> \cos(\varphi/2) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|a_{i(r+1)}|l_{i_{r+1}}}{2(1 - g_{i(r+1)})\cos(\varphi/2)} \geq \cos(\varphi/2) - g_{i(r)}\cos(\varphi/2) =$$

$$= (1 - g_{i(r)})\cos(\varphi/2) > 0.$$

Із нерівностей (5.8) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N),M}$. Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (5.1) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $P_{l(N),M}$.

Нехай

$$A = \max_{1 \leq i_1 \leq N} |a_{i(1)}| \tag{5.11}$$

$$P_{l(N),M,\sigma} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k) < \sigma l_k, |z_k| < \sigma M, 1 \leq k \leq N\right\}, \tag{5.12}$$

де $0 < \sigma < 1$. Тоді, використовуючи нерівності (5.8), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),M,\sigma}$, $P_{l(N),M,\sigma} \subset P_{l(N),M}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2})} < \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\sigma AM}{\cos(\varphi/2)(1-g_{i(1)})} = C(P_{l(N),M,\sigma}),$$

де стала $C(P_{l(N),M,\sigma})$ залежить лише від області (5.12). Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),M,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_{l(N),M}$. Покриємо $K$ областями вигляду (5.12). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),M,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(P_{l(N),M,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.7).

Далі, нехай $b = \min\{1/A, l_1, l_2, \ldots, l_N, 8MN\}$, де $A$ означене в (5.11), і нехай

$$\Delta_R = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N :\ 0 < z_k < R < \frac{b}{8N},\ 1 \leq k \leq N\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < b/(8N)$, зокрема, $\Delta_{b/(16N)} \subset P_{l(N),M}$. Тоді для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$, і для довільного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ маємо

$$|a_{i(1)}z_{i_1}| < AR < \frac{Ab}{8N} < \frac{1}{2N},$$

а для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 2$ отримаємо

$$|a_{i(k)}z_{i_k}| < \frac{2R}{l_{i_k}} < \frac{b}{4Nl_{i_k}} \leq \frac{1}{4i_{k-1}}.$$

Тому, згідно з теоремою 2.3, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $z_{i(1)} = 2a_{i(1)}z_{i_1}$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $z_{i(k)} = 4a_{i(k)}z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (5.1) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$. Нарешті, на підставі теореми 1.19

багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (5.1) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N),M}$ до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Застосовуючи міркування, викладені в доведенні теореми 5.1, доведемо тепер таку теорему:

**Теорема 5.2.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.1) *лежать на промені* $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, $-\pi < \varphi < \pi$, *і задовольняють нерівність*

$$l_{i_k}|a_{i(k)}| \leq g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})(1 + \cos(\varphi)) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \quad (5.13)$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.6). *Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.1) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D_{l(N),M} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k)}{l_k} < 1,\ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < M \right\} \quad (5.14)$$

*для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N),M}$.

**Доведення.** Нехай $n$ — довільне натуральне число і $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $D_{l(N),M}$. За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ доведемо нерівності (5.8), де $1 \leq k \leq n$.

Нерівності (5.8) для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, враховуючи (5.2), очевидні. Припустимо, що нерівності (5.8) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r + 1 \leq n$. Доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Із нерівності (5.13) випливає правильність нерівностей (5.10) для всіх індексів $i_{r+1}$ таких, що $1 \leq i_{r+1} \leq i_r$. Застосовуючи послідовно лему 1.2,

нерівність (5.13), припущення індукції та нерівність із (5.14) до співвідношення (5.9) і враховуючи нерівність (5.6), отримаємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}) \geq \cos(\varphi/2) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|a_{i(r+1)}|(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2})} >$$

$$> \cos(\varphi/2) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{g_{i(r)}(1+\cos(\varphi))(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}))}{2l_{i_{r+1}}\cos(\varphi/2)} \geq$$

$$\geq \cos(\varphi/2) - g_{i(r)}\cos(\varphi/2) = (1 - g_{i(r)})\cos(\varphi/2) > 0.$$

Із нерівностей (5.8) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in D_{l(N),M}$. Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (5.1) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $D_{l(N),M}$.

Нехай

$$D_{l(N),M,\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k)}{l_k} < \sigma,\ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < \sigma M \right\}, \qquad (5.15)$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи позначення (5.11) і нерівності (5.8), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in D_{l(N),M,\sigma}$, $D_{l(N),M,\sigma} \subset D_{l(N),M}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2})} < \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\sigma A M}{\cos(\varphi/2)(1 - g_{i(1)})} = C(D_{l(N),M,\sigma}),$$

де стала $C(D_{l(N),M,\sigma})$ залежить лише від області (5.15). Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $D_{l(N),M,\sigma}$.

Тепер нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $D_{l(N),M}$. Покриємо $K$ областями вигляду (5.15). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $D_{l(N),M,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(D_{l(N),M,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.14).

Далі, нехай

$$l = \min_{1\le k\le N} l_k,\ b = \min\left\{\frac{1}{A}, l, 8M\right\},$$

де $A$ означене в (5.11), і нехай

$$\Delta_R = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N_{\ge 0} :\ \sum_{k=1}^{N} z_k < R < \frac{b}{8}\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < b/8$, зокрема, $\Delta_{b/16} \subset D_{l(N),M}$. Тоді, для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$, маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} |a_{i(1)} z_{i_1}| < AR < \frac{Ab}{8} < \frac{1}{2}$$

і, крім цього, для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \ge 1$ отримаємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} |a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}| < \frac{2R}{l} < \frac{b}{4l} \le \frac{1}{4}.$$

Нарешті, згідно з теоремою 2.6, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $z_{i(1)} = 2a_{i(1)} z_{i_1}$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $z_{i(k)} = 4a_{i(k)} z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (5.1) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$. Тому, на підставі теореми 1.19 багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (5.1) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D_{l(N),M}$ до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Далі дослідимо збіжність багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{5.16}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$.

До позначень (5.2) і (5.3) додамо ще такі позначення

$$Q_0^{(0)}(\mathbf{z}) \equiv 1,\ Q_0^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1} \text{ для } n \geq 1,$$

і, таким чином, $n$-ий підхідний дріб багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (5.16) запишемо у вигляді $f_n(\mathbf{z}) = 1/Q_0^{(n-1)}(\mathbf{z})$, $n \geq 1$.

**Теорема 5.3.** *Нехай коефіцієнти $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.16) *лежать на промені $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $-\pi < \varphi < \pi$, і задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{l_{i_k} |a_{i(k)}|}{(1 - g_{i(k)})(1 + \cos(\varphi))} \leq g_{i(k-1)} \text{ для всіх } i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1},\ k \geq 1, \quad (5.17)$$

*де $l_k$, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}_0}$ — послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < g_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 0. \quad (5.18)$$

*Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.16) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N)} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k) < l_k,\ 1 \leq k \leq N\}, \quad (5.19)$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$.*

**Доведення.** Міркуваннями, подібними до міркувань в доведенні нерівностей (5.8), отримуємо такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi/2}) > (1 - g_{i(k)}) \cos(\varphi/2) > 0 \quad (5.20)$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N)}$. Із нерівностей (5.20) випливає, що $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, і

для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N)}$. Це означає, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними (5.16) формують послідовність, голоморфних функцій багатьох змінних в області $P_{l(N)}$.

Нехай

$$P_{l(N),\sigma} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |z_k| - \mathrm{Re}(z_k) < \sigma l_k, \ 1 \leq k \leq N\}, \ 0 < \sigma < 1. \quad (5.21)$$

Використовуючи нерівності (5.20), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),\sigma}$, $P_{l(N),\sigma} \subset P_{l(N)}$, отримуємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,(Q_0^{(n-1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2})} < \frac{1}{(1-g_0)\cos(\varphi/2)} = C(P_{l(N),\sigma}),$$

де $C(P_{l(N),\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області (5.21). Таким чином, послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_{l(N)}$. Покриємо $K$ областями вигляду (5.21). Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(P_{l(N),\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.19).

Далі, нехай

$$l = \min_{1\leq k\leq N} l_k, \ \Delta_R = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \ 0 < z_k < R < \frac{l}{8N}, \ 1 \leq k \leq N\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset P_{l(N)}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < l/(8N)$, зокрема, $\Delta_{l/(16N)} \subset P_{l(N)}$. Тоді із нерівностей (5.17) і (5.18) для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$, і для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 1$ маємо

$$|a_{i(k)}z_{i_k}| < \frac{2R}{l_{i_k}} < \frac{1}{4N} \leq \frac{1}{4i_{k-1}}.$$

Нарешті, згідно з теоремою 2.5, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$, і $z_{i(k)} = 4a_{i(k)}z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, багатовимірний регулярний $C$-дріб

з нерівнозначними змінними (5.16) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$. Тому, на підставі теореми 1.19 багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (5.16) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$ до голоморфної функції багатьох змінних у цій області. ■

Міркуваннями, подібними до міркувань в доведеннях теорем 5.2 і 5.3, із використанням леми 1.2, теорем 1.19 і 2.7 отримуємо такий результат:

**Теорема 5.4.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.16) *лежать на промені* $\varphi = \arg(a_{i(k)})$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $-\pi < \varphi < \pi$, *і задовольняють нерівність*

$$l_{i_k}|a_{i(k)}| \leq g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})(1 + \cos(\varphi)) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.18). *Тоді багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.16) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D_{l(N)} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k)}{l_k} < 1 \right\},$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N)}$.

Наостанок в цьому підрозділі сформулюємо дві ознаки збіжності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними. Їх доведення є простим застосуванням відповідно теорем 2.1 і 2.2.

**Теорема 5.5.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.1) *задовольняють нерівність*

$$|a_{i(k)}| \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.22}$$

*де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 \le q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 0, \tag{5.23}$$

*або*

$$0 < q_{i(k)} \le 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 0. \tag{5.24}$$

*Тоді для кожного* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$O = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| \le 1,\ 1 \le k \le N\right\} \tag{5.25}$$

*багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.1) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(O)$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(O)$.

**Теорема 5.6.** *Нехай коефіцієнти* $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *багатовимірного регулярного C-дробу з нерівнозначними змінними* (5.16) *задовольняють нерівність* (5.22), *де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.23) *або* (5.24). *Тоді для кожного* $\mathbf{z}$ *із множини* (5.25) *багатовимірний регулярний C-дріб з нерівнозначними змінними* (5.16) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(O)$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(O)$.

## 5.2. Збіжність багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними

У цьому підрозділі розглянемо багатовимірні $S$-дроби з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1} \tag{5.26}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, і

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{5.27}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Для доведення результатів використовуватимемо такі позначення:

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1, \ i(n) \in \mathcal{I}_n, \ n \geq 0, \tag{5.28}$$

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{c_{i(r)} z_{i_r}}{1}, \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ 0 \leq k \leq n-1, \ n \geq 1. \tag{5.29}$$

Тоді, очевидно, виконується рекурентне співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{c_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{5.30}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$.

Встановимо ознаки збіжності для багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26). Нехай

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}$$

— $n$-ий підхідний дріб цього гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, $n \geq 1$.

**Теорема 5.7.** *Нехай коефіцієнти $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними* (5.26) *задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1 \text{ для всіх } i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}, \ k \geq 2, \tag{5.31}$$

*де $l_k$, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа. Тоді багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними* (5.26) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N),M} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} P_{l(N),M,\alpha}, \tag{5.32}$$

*де*

$$P_{l(N),M,\alpha} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2}, \ |z_k| < M, \ 1 \le k \le N \right\}, \qquad (5.33)$$

*для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* (5.32).

**Доведення.** Нехай $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$, $n$ — довільне натуральне число, і нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із (5.32). За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ доведемо такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) > \frac{\cos(\alpha)}{2} > 0, \qquad (5.34)$$

де $1 \le k \le n$.

Нерівності (5.34) для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, враховуючи (5.28), очевидні. Припустимо, що нерівності (5.34) виконуються для $k = r + 1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r + 1 \le n$. Доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Використовуючи співвідношення (5.30), для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha} + \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{c_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}}{Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}}. \qquad (5.35)$$

Із (5.31) і нерівності із (5.33) випливає, що

$$|c_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}| - \mathrm{Re}\,(c_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}) < \frac{\cos^2(\alpha)}{2}, \ |z_{i_{r+1}}| < M \qquad (5.36)$$

для всіх індексів $i_{r+1}$ таких, що $1 \le i_{r+1} \le i_r$. Нехай

$$u = \mathrm{Re}\,(c_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}), \ v = \mathrm{Im}\,(c_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}),$$
$$x = \mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}), \ y = \mathrm{Im}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}).$$

Тоді елементарними перетвореннями отримуємо $v^2 \leq 4u+4$. Застосовуючи послідовно лему 1.2, нерівність із (5.33), припущення індукції та нерівність (5.31) до співвідношення (5.35), отримаємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \geq \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{c_{i(r+1)}(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} >$$

$$> \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{c_{i(r+1)}l_{i_{r+1}}\cos(\alpha)}{2} \geq \frac{\cos(\alpha)}{2} > 0.$$

Із нерівностей (5.34) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z}$ із області (5.32). Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $P_{l(N),M}$.

Нехай знову $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і, крім цього, нехай

$$P_{l(N),M,\alpha,\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{\sigma}{2}, \ |z_k| < \sigma M, \ 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Покладемо

$$C = \max_{1 \leq i_1 \leq N} c_{i(1)}. \tag{5.37}$$

Тоді, використовуючи нерівності (5.34), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),M,\alpha,\sigma}$, $P_{l(N),M,\alpha,\sigma} \subset P_{l(N),M}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| = \left| \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}z_{i_1}}{Q^{(n)}_{i(1)}} \right| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}|z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} < \frac{2\sigma CMN}{\cos(\alpha)} = C(P_{l(N),M,\alpha,\sigma}),$$

де $C(P_{l(N),M,\alpha,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{l(N),M,\alpha,\sigma}$. Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),M,\alpha,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області (5.32). Покриємо $K$ областями вигляду $P_{l(N),M,\alpha,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),M,\alpha_r,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1 \leq r \leq m} C(P_{l(N),M,\alpha_r,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.32).

Нехай

$$b = \min\left\{\frac{1}{C}, l_1, l_2, \ldots, l_N, 2MN\right\},$$

де $C$ означене в (5.37), і нехай

$$\Delta_R = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \ 0 < z_k < R < \frac{b}{4N}, \ 1 \leq k \leq N\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < b/(4N)$, зокрема, $\Delta_{b/(8N)} \subset P_{l(N),M}$. Тоді для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$, і для довільного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ маємо

$$|c_{i(1)} z_{i_1}| < CR < \frac{Cb}{4N} < \frac{1}{2N},$$

а для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 2$ отримаємо

$$|c_{i(k)} z_{i_k}| < \frac{R}{l_{i_k}} < \frac{b}{4Nl_{i_k}} \leq \frac{1}{4i_{k-1}}.$$

Згідно з теоремою 2.3, де де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $z_{i(1)} = 2c_{i(1)} z_{i_1}$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $z_{i(k)} = 4c_{i(k)} z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N),M}$. Тому, на підставі теореми 1.19 багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N),M}$ до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Використовуючи ідеї, викладені в доведенні теореми 5.7, доведемо таку теорему:

**Теорема 5.8.** *Нехай коефіцієнти $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними* (5.26) *задовольняють нерівність*

$$c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1 \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2, \tag{5.38}$$

*де* $l_k$, $1 \le k \le N$, *— додатні числа. Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.26) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D_{l(N),M} = \bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} D_{l(N),M,\alpha}, \tag{5.39}$$

*де*

$$D_{l(N),M,\alpha} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2},\ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < M \right\}, \tag{5.40}$$

*для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N),M}$.

**Доведення.** Нехай $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$, $n$ — довільне натуральне число і нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із області (5.39). За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ покажемо правильність нерівностей (5.34), де $1 \le k \le n$.

Нерівності (5.34) для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, враховуючи (5.28), очевидні. Припустимо, що нерівності (5.34) виконуються для $k = r + 1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r + 1 \le n$. Доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Із умови (5.38) і означення області (5.40) випливає правильність нерівностей (5.36) для всіх індексів $i_{r+1}$ таких, що $1 \le i_{r+1} \le i_r$. Застосовуючи послідовно лему 1.2, нерівність (5.38), припущення індукції та нерівність із (5.40) до співвідношення (5.35), отримаємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \ge \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{c_{i(r+1)}(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} >$$

$$> \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha})}{l_{i_{r+1}} \cos(\alpha)} \ge \frac{\cos(\alpha)}{2} > 0.$$

Із нерівностей (5.34) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \ne 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, $n \ge 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in D_{l(N),M}$. Таким чином, підхідні дроби

$f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $D_{l(N),M}$.

Нехай далі $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і, крім цього, нехай

$$D_{l(N),M,\alpha,\sigma} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{\sigma}{2},\ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < \sigma M,\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Тоді, використовуючи нерівність (5.34), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in D_{l(N),M,\alpha,\sigma}$, $D_{l(N),M,\alpha,\sigma} \subset D_{l(N),M}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}|z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} < \frac{2\sigma CM}{\cos(\alpha)} = C(D_{l(N),M,\alpha,\sigma}),$$

де $C$ означене в (5.37), $C(D_{l(N),M,\alpha,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $D_{l(N),M,\alpha,\sigma}$. Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $D_{l(N),M,\alpha,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $D_{l(N),M}$. Покриємо $K$ областями вигляду $D_{l(N),M,\alpha,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $D_{l(N),M,\alpha_r,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(D_{l(N),M,\alpha_r,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.39).

Нехай

$$l = \min_{1\leq k\leq N} l_k,\ b = \min\left\{\frac{1}{C}, l, 2MN\right\},$$

де $C$ означене в (5.37), і нехай

$$\Delta_R = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N : \sum_{k=1}^{N} z_k < R < \frac{b}{4} \right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < b/4$, зокрема, $\Delta_{b/8} \subset D_{l(N),M}$. Тоді для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$, маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} |c_{i(1)} z_{i_1}| < CR < \frac{Cb}{4} < \frac{1}{2}$$

і, крім цього, для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 1$ отримаємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} |c_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}| < \frac{R}{l} < \frac{b}{4l} \leq \frac{1}{4}.$$

Тому, згідно з теоремою 2.6, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $z_{i(1)} = 2c_{i(1)} z_{i_1}$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $z_{i(k)} = 4c_{i(k)} z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N),M}$. Нарешті, на підставі теореми 1.19 багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $D_{l(N),M}$ до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

При $N = 1$ для $S$-дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k z}{1}, \tag{5.41}$$

де $c_k > 0$ для $k \geq 1$, із теореми 5.7 (або теореми 5.8) безпосередньо отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.1.** *Нехай коефіцієнти $c_k$, $k \geq 2$, $S$-дробу* (5.41) *задовольняють нерівність $c_k l \leq 1$ для $k \geq 2$, де $l$ — додатне число. Тоді $S$-дріб* (5.41) *збігається до функції, голоморфної в області*

$$H_{l,M} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg\left(z + \frac{l}{4}\right) \right| < \pi,\ |z| < M \right\}$$

*для кожної сталої $M > 0$, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $H_{l,M}$.*

Відмітимо, що з огляду на твердження теореми 1.15 наслідок 5.1 є новою ознакою збіжності для $S$-дробів.

Тепер встановимо ознаки збіжності для гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.27).

**Теорема 5.9.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (5.27) *задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1 \text{ для всіх } i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1},\ k \geq 1, \tag{5.42}$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа. Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.27) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N)} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} P_{l(N),\alpha}, \tag{5.43}$$

*де*

$$P_{l(N),\alpha} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2},\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_{l(N)}$.

**Доведення.** Нехай $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$, $f_n(\mathbf{z}) = 1/Q_0^{(n-1)}$, де $Q_0^{(n-1)}$, $n \geq 1$, означені в (5.28) і (5.29), — $n$-ий підхідний дріб багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.27), $n \geq 1$. Міркуваннями, подібними до міркувань в доведенні нерівності (5.34), отримуємо такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) e^{-i\alpha}) > \frac{\cos(\alpha)}{2} > 0 \tag{5.44}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N)}$. Із нерівностей (5.44) випливає, що $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, і для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N)}$. Це означає, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.27) формують послідовність голоморфних функцій багатьох змінних в області (5.43).

Нехай $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і нехай

$$P_{l(N),\alpha,\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{\sigma}{2}, \ 1 \le k \le N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи нерівність (5.44), для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),\alpha,\sigma}$, $D_{l(N),\alpha,\sigma} \subset P_{l(N)}$, отримуємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,(Q_0^{(n-1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} < \frac{2}{\cos(\alpha)} = C(P_{l(N),\alpha,\sigma}),$$

де $C(P_{l(N),\alpha,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{l(N),\alpha,\sigma}$. Таким чином, послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),\alpha,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_{l(N)}$. Покриємо $K$ областями вигляду $P_{l(N),\alpha,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),\alpha_r,\sigma_r}$, $1 \le r \le m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\le r\le} C(P_{l(N),\alpha_r,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \le C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.43).

Далі, нехай

$$l = \min_{1\le k\le N} l_k, \ \Delta_R = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \ 0 < z_k < R < \frac{l}{4N}, \ 1 \le k \le N \right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset P_{l(N)}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < l/(4N)$, зокрема, $\Delta_{l/(8N)} \subset P_{l(N)}$. Тоді із нерівності (5.42) для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$, і для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \ge 1$ маємо

$$|c_{i(k)} z_{i_k}| < \frac{R}{l_{i_k}} < \frac{1}{4N} \le \frac{1}{4i_{k-1}}.$$

Нарешті, згідно з теоремою 2.5, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 0$, і $z_{i(k)} = 4a_{i(k)} z_{i_k}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.27) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$. Тому, на підставі теореми 1.19 багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.27) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (5.43) до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Міркуваннями, подібними до міркувань в доведеннях теорем 5.8 і 5.9, із використанням леми 1.2, теорем 1.19 і 2.7 отримуємо такий результат:

**Теорема 5.10.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (5.27) *задовольняють нерівність*

$$c_{i(k)} l_{i_k} \leq 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.45}$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа. Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.27) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D_{l(N)} = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} D_{l(N),\alpha},$$

*де*

$$D_{l(N),\alpha} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \operatorname{Re}\left(z_k e^{-2i\alpha}\right)}{l_k \cos^2(\alpha)} < \frac{1}{2} \right\}, \tag{5.46}$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N)}$.

При $N = 1$ для $S$-дробу

$$\frac{1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k z}{1}, \tag{5.47}$$

де $c_k > 0$ для $k \geq 1$, із теореми 5.9 (або теореми 5.10) безпосередньо отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.2.** *Нехай коефіцієнти* $c_k$, $k \geq 1$, *S-дробу* (5.47) *задовольняють нерівність* $c_k l \leq 1$ *для* $k \geq 1$, *де* $l$ *— додатне число. Тоді S-дріб* (5.47) *збігається до функції, голоморфної в області*

$$H_l = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg\left(z + \frac{l}{4}\right) \right| < \pi \right\},$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $H_l$.

Відмітимо, що з огляду на твердження теореми 1.15 наслідок 5.2 так само, як і наслідок 5.1, є новою ознакою збіжності для $S$-дробів. Крім цього, відмітимо, що області збіжності в теоремах 5.7–5.10 для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними є в певному сенсі найширшими.

Продовжимо далі досліджувати області збіжності багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними за особливих умов на його коефіцієнти. Застосовуючи міркування, подібні до міркувань у доведенні теореми 5.7 разом із лемою 1.2, теоремами 1.19 і 2.1, отримуємо такий результат:

**Теорема 5.11.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (5.26) *задовольняють нерівність*

$$c_{i(k)} \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2,$$

*де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.48}$$

*Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.26) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_M = \bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} P_{M,\alpha},$$

*де*

$$P_{M,\alpha} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}) < 2\cos^2(\alpha),\ |z_k| < M,\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

*для кожної сталої* $M > 0$, *при цьому збігається рівномірною на кожній компактній підмножині області* $P_M$.

Крім цього, міркуваннями, подібними до міркувань в доведенні теореми 5.9, із використанням леми 1.2, теореми 1.19 і відповідно теорем 2.9 і 2.12 отримуємо наступні два результати:

**Теорема 5.12.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (5.27) *задовольняють нерівність*

$$c_{i(k)} \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

*де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 0.$$

*Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.27) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D = \bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} D_\alpha, \tag{5.49}$$

*де*

$$D_\alpha = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}) < 2\cos^2(\alpha),\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

*при цьому збігається рівномірною на кожній компактній підмножині області* $D$.

**Теорема 5.13.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними* (5.27) *задовольняють нерівності*

$$c_{i(1)} \leq q_{i(1)}^{i_1+1} \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1,$$
$$c_{i(k)} \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2,$$

*де* $\{q_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.48) *і*

$$\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)} < 1.$$

*Тоді багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.27) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* (5.49), *при цьому збігається рівномірною на кожній компактній підмножині цієї області.*

Наостанок у цьому підрозділі встановимо оцінки похибок наближень (див. с. 77) для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними. З цією метою наведемо такі два допоміжні твердження:

**Теорема 5.14** (В. Б. Джоунс і В. Йо. Трон [149, с. 48])**.** *Періодичний неперервний дріб*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1},$$

*де* $a_k = a$ *для* $k \geq 1$, *збігається для всіх ненульових комплексних чисел* $a$, *крім* $a = -1/4 + c$, *де* $c$ *— дійсне від'ємне число, і для* $a = -1/4 + c$, *де* $c = |c|e^{i\gamma}$, $-\pi < \gamma < \pi$, *його значення дорівнює*

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{|c|}e^{i\gamma/2}.$$

**Лема 5.1** (Т. М. Антонова [8], О. Є. Баран [15, с. 67])**.** *Для довільного натурального* $N$ *виконується рівність*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} 1 = C_{N+n}^{N-1}$$

*для кожного* $n \in \mathbb{N}_0$.

Тепер доведемо таке твердження:

**Теорема 5.15.** *Багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.26) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *і коефіцієнтами* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *що задовольняють нерівність* (5.45), *збігається до функції* $f(\mathbf{z})$ *в області*

$$\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} \left( D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha} \right), \tag{5.50}$$

*де* $D_{l(N),\alpha}$ *— область означена в* (5.46),

$$O_{l(N),\alpha} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{|z_k|}{l_k \cos^2(\alpha)} < \right.$$
$$\left. < \left( \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} - \sum_{r=1}^{k} \frac{|z_r| - \mathrm{Re}\,(z_r e^{-2i\alpha})}{2 l_r \cos^2(\alpha)} \right)^{1/2} \right)^2, \ 1 \leq k \leq N \right\}, \tag{5.51}$$

*і для кожного* $\mathbf{z} \in (D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha})$ *виконуються оцінки*

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq$$

$$\leq \cos^2(\alpha) \sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n+1 \\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}} \prod_{r=1}^{N} \frac{\left(\dfrac{|z_r|}{l_r \cos^2(\alpha)}\right)^{n_r}}{\left(\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} - \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{2l_k \cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^{2n_r}} \tag{5.52}$$

*для* $n \geq 1$ *і для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**Доведення.** Нехай $\alpha$ — довільне число з інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha}$. Оцінимо модуль різниці підхідних дробів $|f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})|$ багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26) для $n \geq 1$ і $k \geq 1$.

Для кожного натурального $m$ такого, шо $1 \leq m \leq N$ розглянемо періодичний неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{-c_k^{(m)}}{1}, \tag{5.53}$$

де

$$c_k^{(m)} = \sum_{p=1}^{m} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2l_p \cos^2(\alpha)}, \ k \geq 1. \tag{5.54}$$

Нехай $G_n^{(n)}(m) = 1$, $n \geq 1$, і

$$G_k^{(n)}(m) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \frac{-c_r^{(m)}}{1}, \ 1 \leq k \leq n-1, \ n \geq 2.$$

Тоді, очевидно, виконується рекурентне співвідношення

$$G_k^{(n)}(m) = 1 - \frac{c_{k+1}^{(m)}}{G_{k+1}^{(n)}(m)} \text{ для всіх } 1 \leq k \leq n-1, \ n \geq 2, \tag{5.55}$$

і тому $n$-ий підхідний дріб $g_n(\mathbf{z})$ періодичного неперервного дробу (5.53) запишемо у вигляді

$$g_n(m) = -\frac{c_1^{(m)}}{G_1^{(n)}(m)}, \ n \geq 1.$$

Нехай $n$ — довільне натуральне число. За індукцією за $k$ покажемо правильність нерівності

$$G_k^{(n)}(m) > 1/2, \tag{5.56}$$

де $1 \le k \le n$.

При $k = n$ нерівність (5.56) очевидні. Припустимо, що нерівності (5.56) виконуються для $k = r + 1$ таких, що $r \le n - 1$. Тоді, застосовуючи до співвідношення (5.55) нерівність із (5.46) і припущення індукції, для $k = r$ маємо

$$G_r^{(n)}(m) = 1 - \frac{c_{r+1}^{(m)}}{G_{r+1}^{(n)}(m)} > 1 - \sum_{p=1}^{m} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{l_p \cos^2(\alpha)} > \frac{1}{2}.$$

Зазначимо, що із означення (5.54), співвідношення (5.55) і вище викладених міркувань, випливає, що $G_k^{(n)}(m) \ge G_k^{(n)}(m+1)$ для всіх $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$, $1 \le m \le N - 1$, $N \ge 2$.

Нехай тепер $n$ — довільне натуральне число таке, що $n \ge 2$. За індукцією за $k$ покажемо, що для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ виконуються такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \ge \cos(\alpha)\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \frac{-c_r^{(i_k)}}{1}\right) > 0, \tag{5.57}$$

де $1 \le k \le n - 1$.

Застосовуючи послідовно лему 1.2, нерівності (5.45) і (5.56) до співвідношення (5.30) і враховуючи (5.46) та (5.54), для $k = n - 1$ маємо

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{c_{i(n)} z_{i_n} e^{-2i\alpha}}{Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}}\right) \ge$$

$$\ge \cos(\alpha) - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{|z_{i_n}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_n} e^{-2i\alpha})}{2 l_{i_n} \mathrm{Re}\,(Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \ge$$

$$\ge \cos(\alpha)\left(1 - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{|z_{i_n}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_n} e^{-2i\alpha})}{2 l_{i_n} \cos^2(\alpha)}\right) \ge \cos(\alpha)\left(1 - \frac{c_n^{(i_{n-1})}}{1}\right) > 0.$$

Нехай нерівності (5.57) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r \leq n-2$. Тоді для $k = r$ і для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ отримуємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \geq \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha})}{2l_{i_{r+1}}\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \geq$$

$$\geq \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{\dfrac{|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha})}{2l_{i_{r+1}}\cos(\alpha)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=r+2}^{n} \frac{-c_p^{(i_{r+1})}}{1} \geq$$

$$\geq \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{\dfrac{|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}}e^{-2i\alpha})}{2l_{i_{r+1}}\cos(\alpha)}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=r+2}^{n} \frac{-c_p^{(i_r)}}{1} =$$

$$= \cos(\alpha)\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=r+1}^{n} \frac{-c_p^{(i_r)}}{1}\right) = \cos(\alpha)\left(1 - \frac{c_{r+1}^{(i_r)}}{G^n_{r+1}(i_r)}\right) > 0.$$

Із нерівностей (5.56) випливає, що $G_k^{(n)}(m) \neq 0$ для $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ і $1 \leq m \leq N$. Нехай знову $m$ — довільне натуральне число таке, шо $1 \leq m \leq N$. Застосовуючи формулу (1.44) при $N = 1$ до різниці двох підхідних дробів періодичного неперервного дробу (5.53), для $n \geq 1$ і $k \geq 1$ знаходимо

$$g_{n+k}(m) - g_n(m) = \frac{-\prod\limits_{r=1}^{n+1} c_r^{(m)}(\mathbf{z})}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} G_r^{(n+k)}(m) \prod\limits_{r=1}^{n} G_r^{(n)}(m)}.$$

Звідси та із співвідношень (5.54) і (5.56) випливає, що $g_{n+k}(m) < g_n(m)$ для $n \geq 1$ і $k \geq 1$, тобто послідовність $\{g_n(m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно спадає. На підставі теореми 5.14 періодичний неперервний дріб (5.53) збігається, і його значення дорівнює

$$-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \sum_{p=1}^{m} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}.$$

Таким чином, враховуючи нерівності (5.57) отримуємо

$$\mathrm{Re}\,(Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \geq \cos(\alpha)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum_{p=1}^{i_k}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right) \quad (5.58)$$

для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $1\leq k\leq n-1$, $n\geq 2$.

Далі, із нерівності (5.57) випливає, що $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\neq 0$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $1\leq k\leq n$ і $n\geq 1$. Знову застосовуючи формулу (1.44) до різниці двох підхідних дробів тепер уже багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26), для $n\geq 1$ і $k\geq 1$ знаходимо

$$f_{n+k}(\mathbf{z})-f_n(\mathbf{z})=\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}\frac{(-1)^n\prod\limits_{r=1}^{n+1}c_{i(r)}z_{i_r}}{\prod\limits_{r=1}^{n+1}Q_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z})\prod\limits_{r=1}^{n}Q_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})}.$$

Нехай $n$, $k$ і $r$ — довільні натуральні числа такі, що $n\geq 2$, $k\geq 1$ і $1\leq r\leq n-1$. Тоді, використовуючи нерівності (5.45) і (5.58), для довільного мультиіндексу $i(r)\in\mathcal{I}_r$ отримуємо

$$\left|\frac{c_{i(r)}z_{i_r}}{Q_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z})Q_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})}\right|\leq\frac{\dfrac{|z_{i_r}|}{l_{i_r}\cos^2(\alpha)}}{\left(\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{i_r}\dfrac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^2}.$$

Тому, застосовуючи ці нерівності, а також нерівності (5.45), (5.58) і співвідношення (5.28) до оцінки модуля різниці двох підхідних дробів багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними (5.26), для $n\geq 1$ і $k\geq 1$ маємо

$$|f_{n+k}(\mathbf{z})-f_n(\mathbf{z})|\leq$$

$$\leq\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}\frac{\dfrac{|z_{i_n}|}{l_{i_n}\cos(\alpha)}}{\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{i_n}\dfrac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{|z_{i_{n+1}}|}{l_{i_{n+1}}\cos(\alpha)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{i_{n+1}}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_pe^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{n-1}\frac{\dfrac{|z_{i_r}|}{l_{i_r}\cos^2(\alpha)}}{\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{i_r}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_pe^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^2}\leq$$

$$\leq\cos^2(\alpha)\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\dots\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n}\prod_{r=1}^{n+1}\frac{\dfrac{|z_{i_r}|}{l_{i_r}\cos^2(\alpha)}}{\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{i_r}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_pe^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^2}.$$

або те саме, що

$$|f_{n+k}(\mathbf{z})-f_n(\mathbf{z})|\leq$$

$$\leq\cos^2(\alpha)\sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n+1\\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}}\prod_{r=1}^{N}\frac{\left(\dfrac{|z_r|}{l_r\cos^2(\alpha)}\right)^{n_r}}{\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{r}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_pe^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^{2n_r}}.$$

Звідси, прямуючи до границі при $k\to\infty$, отримуємо оцінки (5.52).

Нехай

$$\frac{1}{L(\mathbf{z})}=\max_{1\leq k\leq N}\frac{\dfrac{|z_k|}{l_k\cos^2(\alpha)}}{\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{r=1}^{k}\frac{|z_r|-\mathrm{Re}\,(z_re^{-2i\alpha})}{2l_r\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^2}. \tag{5.59}$$

Тоді із нерівності в означенні області (5.51) випливає, що $L(\mathbf{z})>1$ для всіх $\mathbf{z}\in D_{l(N),\alpha}\bigcap O_{l(N),\alpha}$, а на підставі леми 5.1 для кожного $\mathbf{z}\in D_{l(N),\alpha}\bigcap O_{l(N),\alpha}$ отримаємо

$$\sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n+1\\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}}\prod_{r=1}^{N}\frac{\left(\dfrac{|z_r|}{l_r\cos^2(\alpha)}\right)^{n_r}}{\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\sum\limits_{p=1}^{r}\frac{|z_p|-\mathrm{Re}\,(z_pe^{-2i\alpha})}{2l_p\cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^{2n_r}}\leq\frac{C_{N+n}^{N-1}}{L^{n+1}(\mathbf{z})}=$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \frac{N+k}{(k+1)L(\mathbf{z})} = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{(k+1)L(\mathbf{z}) - N - k}{(k+1)L(\mathbf{z})}\right).$$

Звідси, оскільки ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)L(\mathbf{z}) - N - k}{(k+1)L(\mathbf{z})}$$

розбігається, випливає, що вираз в правій частині нерівності (5.52) прямує до нуля при $n \to \infty$ і, отже, багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається в області $D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha}$. Нарешті, із довільності $\alpha$ випливає, що багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними (5.26) збігається в області (5.50). ■

**Зауваження 5.1.** *На підставі леми* 5.1*, за умов теореми* 5.15*, нерівність* (5.52) *для кожного* $\mathbf{z} \in (D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha})$*, де* $D_{l(N),\alpha}$*,* $O_{l(N),\alpha}$ *означені відповідно в* (5.46) *і* (5.51)*, можна записати у вигляді*

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \cos^2(\alpha) \frac{C_{N+n}^{N-1}}{L^{n+1}(\mathbf{z})}$$

*для* $n \geq 1$ *і для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$*, де* $1/L(\mathbf{z})$ *означене в* (5.59)*. Зрозуміло, що вираз в правій частині цієї нерівності прямує до нуля при* $n \to \infty$*.*

Міркуваннями, подібними до міркувань в доведені теореми 5.15, із використанням теореми 5.14 отримуємо такий результат:

**Теорема 5.16.** *Багатовимірний S-дріб з нерівнозначними змінними* (5.27) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *і коефіцієнтами* $c_{i(k)}$*,* $i(k) \in \mathcal{I}_k$*,* $k \geq 1$*, що задовольняють нерівність* (5.45)*, збігається до функції* $h(\mathbf{z})$ *в області* (5.50) *і для кожного* $\mathbf{z} \in (D_{l(N),\alpha} \bigcap O_{l(N),\alpha})$*, де* $D_{l(N),\alpha}$*,* $O_{l(N),\alpha}$ *означені відповідно в* (5.46) *і* (5.51)*, виконуються оцінки*

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \cos^2(\alpha) \sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n \\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}} \prod_{r=1}^{N} \frac{\left(\dfrac{|z_r|}{l_r \cos^2(\alpha)}\right)^{n_r}}{\left(\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} - \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dfrac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{2l_k \cos^2(\alpha)}\right)^{1/2}\right)^{2n_r}}$$

*для* $n \geq 2$ *і для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Зауваження, подібне до зауваження 5.1, є правильним і до теореми 5.16. Крім цього, зауважимо, що із встановлених оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів в теоремах 4.1 і 4.2 [15, с. 108–112] маємо оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними відповідно за умов $c_{i(k)}|z_{i_k}| \leq t(1-t)/i_{k-1}$ і $c_{i(k)}|z_{i_k}| \leq t(1-t)/N$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, де $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, $t$ — дійсна стала така, що $0 \leq t \leq 1/2$, а в теоремі 3 [8], зокрема, для $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ за умов

$$\sum_{i_1=1}^{N} c_{i(1)} z_{i_1} \geq t(t-1), \quad \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} c_{i(k+1)} z_{i_{k+1}} \geq t(t-1) \text{ і } c_{i(k)} z_{i_k} \leq \rho(1-t)^2,$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, де $t$ — дійсна стала така, що $0 < t < 1/2$, $\rho$ — дійсна стала така, що $0 < \rho < 1$. З огляду на це, в теоремах 5.15 і 5.16 маємо оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними за інших умов на їх елементи, зокрема, для $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ за таких

$$\sum_{i_1=1}^{N} c_{i(1)} z_{i_1} > -\frac{1}{4}, \quad \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} c_{i(k+1)} z_{i_{k+1}} > -\frac{1}{4} \text{ і } c_{i(k)} z_{i_k} < 1$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$.

## 5.3. Збіжність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними

Розглянемо багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}, \tag{5.60}$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$ і багатовимірний $\pi$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{\pi_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} z_{i_1}} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-z_{i_1}}{1} + \frac{\pi_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{-z_{i_2}}{1} + \frac{\pi_{i(2)}}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} z_{i_3}} + \ldots, \tag{5.61}$$

де $\pi_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 0$.

Для доведення результатів цього підрозділу сформулюємо і доведемо допоміжну лему, при цьому використовуватимемо позначення, введені у підрозділі 1.5 (див. с. 63).

**Лема 5.2.** *Парною частиною гіллястого ланцюгового дробу*

$$\frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \frac{b_{i(2)}}{1} + \ldots, \tag{5.62}$$

*де* $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *є гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними вигляду*

$$\frac{a_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} a_{i(1)}} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-a_{i(1)} b_{i(1)}}{1 + b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} a_{i(2)}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{-a_{i(2)} b_{i(2)}}{1 + b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} a_{i(3)}} + \ldots. \tag{5.63}$$

**Доведення.** Нехай $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовності підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів (5.62) і (5.63) відповідно. Покажемо, що $g_n = f_{2n}$ для $n \geq 1$. Для цього розглянемо такі послідовності багатовимірних дробово-лінійних відображень:

$$\{u_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)})\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0},\ \{v_{i(k)}(\mathbf{w}^{(1)}_{i(k)})\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0},$$
$$\{U_k(\mathbf{w}^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}_0},\ \{V_k(\mathbf{w}^{(k+1)})\}_{k\in\mathbb{N}_0},$$

де

$$u_0(w_0) = a_0 w_0,\ v_0(\mathbf{w}^{(1)}_0) = v_0(\mathbf{w}^{(1)}) = \frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} w_{i(1)},$$

$$\xi_{i(k)} = u_{i(k)}(w_{i(k)}) = \frac{1}{1 + b_{i(k)} w_{i(k)}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

$$\eta_{i(k)} = v_{i(k)}(\mathbf{w}^{(1)}_{i(k)}) = \frac{1}{1} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} a_{i(k+1)} w_{i(k+1)} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$

і

$$U_0(\mathbf{w}^{(0)}) = U_0(w_0) = u_0(w_0),\ V_0(\mathbf{w}^{(1)}) = U_0(v_0(\mathbf{w}^{(1)})),$$
$$U_k(\mathbf{w}^{(k)}) = V_{k-1}(\boldsymbol{\xi}^{(k)}),\ V_k(\mathbf{w}^{(k+1)}) = U_k(\boldsymbol{\eta}^{(k)}) \text{ для } k \geq 1.$$

Для кожного $n \geq 0$ знайдемо явні вирази для $U_n(\mathbf{1}^{(n)})$ і $V_n(\mathbf{1}^{(n+1)})$, де $\mathbf{1}^{(0)} = 1$, $\mathbf{1}^{(k)} = (11\ldots1)$ — вектор із $\mathbb{C}^p$, де $p = C_{N+k}^{N-1}$, для $k \geq 1$. Маємо

$$U_0(\mathbf{1}^{(0)}) = U_0(1) = a_0,\ V_0(\mathbf{1}^{(1)}) = \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)}.$$

Для $n = 1$ знаходимо

$$U_1(\mathbf{w}^{(1)}) = V_0(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) = u_0(v_0(u_1(w_1), u_2(w_2), \ldots, u_N(w_N))),$$
$$V_1(\mathbf{w}^{(2)}) = U_1(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) = u_0(v_0(u_1(v_1(\mathbf{w}_1^{(1)})), u_2(v_2(\mathbf{w}_2^{(1)})), \ldots, u_N(v_N(\mathbf{w}_N^{(1)})))).$$

Тому

$$U_1(\mathbf{1}^{(1)}) = u_0(v_0(u_1(1), u_2(1), \ldots, u_N(1))) = \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1},$$
$$V_1(\mathbf{1}^{(2)}) = u_0(v_0(u_1(v_1(1)), u_2(v_2(1,1)), \ldots, u_N(v_N(\mathbf{1}^{(1)})))) =$$
$$= \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1}.$$

Застосовуючи далі вказані вище міркування, для довільного $k \geq 1$ отримуємо

$$U_k(\mathbf{1}^{(k)}) = \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \frac{b_{i(2)}}{1} + \cdots + \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1} + \frac{b_{i(k)}}{1},$$
$$V_k(\mathbf{1}^{(k+1)}) = \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \frac{b_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \frac{b_{i(2)}}{1} + \cdots + \frac{b_{i(k)}}{1} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{1}.$$

Таким чином, $U_n(\mathbf{1}^{(n)}) = f_{2n+1}$ і $V_n(\mathbf{1}^{(n+1)}) = f_{2n+2}$ для всіх $n \geq 0$.

Нехай

$$s_0(\mathbf{w}^{(1)}) = u_0(v_0(\mathbf{w}^{(1)})),$$
$$\zeta_{i(k)} = s_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)}^{(1)}) = u_{i(k)}(v_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)}^{(1)})) \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1,$$
$$S_0(\mathbf{w}^{(1)}) = s_0(\mathbf{w}^{(1)}),\ S_k(\mathbf{w}^{(k+1)}) = S_{k-1}(\boldsymbol{\zeta}^{(k)}) \text{ для } k \geq 1.$$

Тоді із наведених вище міркувань випливає, що

$$S_n(\mathbf{1}^{(n+1)}) = V_n(\mathbf{1}^{(n+1)}) = f_{2n+2} \text{ для } n \geq 0.$$

Нарешті, позаяк за означенням

$$s_0(\mathbf{w}^{(1)}) = u_0(v_0(\mathbf{w}^{(1)})) = \frac{a_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} a_{i(1)} w_{i(1)}$$

і для довільного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 1$ отримуємо

$$s_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)}^{(1)}) = u_{i(k)}(v_{i(k)}(\mathbf{w}_{i(k)}^{(1)})) =$$

$$= \frac{1}{1+} \frac{b_{i(k)}}{1} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} a_{i(k+1)} w_{i(k+1)} = 1 - \frac{b_{i(k)}}{1 + b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} a_{i(k+1)} w_{i(k+1)}},$$

то за означенням підхідного дробу гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (див. с. 64) маємо $S_n(\mathbf{1}^{(n+1)}) = g_{n+1}$ для $n \geq 0$.

Отже, $g_n = f_{2n}$ для $n \geq 1$. ■

Яз зазначалося вище, клас $\pi$-дробів уведено до розгляду В. Б. Ґраґґом [122, 123] у зв'язку з дослідженням швидкості збіжності $g$-дробів. Ним встановлено, що парною частиною $\pi$-дробу є $g$-дріб. Ця властивість виконується і для їх узагальнень, тобто правильна така теорема:

**Теорема 5.17.** *Парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними* (5.61) *є багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними* (5.60), *де $s_0 = \pi_0$ і*

$$g_{i(k)} = \frac{\pi_{i(k)}}{1 + \pi_{i(k)}} \text{ для всіх } \quad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.64}$$

**Доведення.** Еквівалентним перетворенням

$$\rho_{i(2k)} = \left(1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} z_{i_{k+1}}\right)^{-1}, \ \rho_{i(2k+1)} = 1 \text{ для всіх } \quad i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 0,$$

багатовимірний $\pi$-дріб з нерівнозначними змінними (5.61) зведемо до вигляду

$$\frac{\dfrac{\pi_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} z_{i_1}}}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-\dfrac{z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} z_{i_1}}}{1} + \frac{\dfrac{\pi_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} z_{i_2}}}{1} +$$

$$+\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{-\dfrac{z_{i_2}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}z_{i_2}}}{1}+\frac{\dfrac{\pi_{i(2)}}{1+\sum\limits_{i_3=1}^{i_2}z_{i_3}}}{1}+\cdots. \tag{5.65}$$

На підставі леми 5.2 парною частиною гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.65) є такий гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{\dfrac{\pi_0}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}z_{i_1}}}{1-\sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{z_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}z_{i_1}}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-\dfrac{z_{i_k}\pi_{i(k)}}{\left(1+\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}z_{i_k}\right)\left(1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}\right)}}{1+\dfrac{\pi_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}}-\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}\dfrac{z_{i_{k+1}}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}}}$$

або

$$\frac{\dfrac{\pi_0}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}z_{i_1}}}{\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}z_{i_1}}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-\dfrac{z_{i_k}\pi_{i(k)}}{\left(1+\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}z_{i_k}\right)\left(1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}\right)}}{\dfrac{1+\pi_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}}}. \tag{5.66}$$

Нарешті, застосовуючи еквівалентне перетворення

$$\rho_0=1+\sum_{i_1=1}^{N}z_{i_1},\ \rho_{i(k)}=\frac{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k}z_{i_{k+1}}}{1+\pi_{i(k)}}\ \text{для всіх}\ \ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 1,$$

до гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.66), отримуємо багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60), де $s_0=\pi_0$, а $g_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, визначаються за формулами (5.64). ■

Тепер дослідимо збіжність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними. Для цього введемо такі позначення:

$$F_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} z_{i_{n+1}},\ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 0, \tag{5.67}$$

$$F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} z_{i_{k+1}} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{-z_{i_{k+1}}}{1} +$$

$$+ \frac{\pi_{i(k+1)}}{1 + \sum\limits_{i_{k+2}=1}^{i_{k+1}} z_{i_{k+2}}} + \cdots + \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} \frac{-z_{i_{n-1}}}{1} + \frac{\pi_{i(n-1)}}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{i_{n-1}} z_{i_n}} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{-z_{i_n}}{1}, \tag{5.68}$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, і

$$G_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1 \ \ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 1, \tag{5.69}$$

$$G_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \frac{\pi_{i(k)}}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} z_{i_{k+1}}} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{-z_{i_{k+1}}}{1} + \cdots + \frac{\pi_{i(n-1)}}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{i_{n-1}} z_{i_n}} + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{-z_{i_n}}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$. Тоді виконуються рекурентні співвідношення

$$F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} z_{i_{k+1}} - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{z_{i_{k+1}}}{G_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{5.70}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, і

$$G_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \frac{\pi_{i(k)}}{F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{5.71}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$.

Доведемо таку теорему:

**Теорема 5.18.** *Багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними* (5.60) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} P_\alpha, \tag{5.72}$$

*де*

$$P_\alpha = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{\cos^2(\alpha)} < 2 \right\}, \tag{5.73}$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P$.*

**Доведення.** Оскільки згідно з теоремою 5.17 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними (5.61), то $\pi_0 = s_0$ і

$$\pi_{i(k)} = \frac{g_{i(k)}}{1 - g_{i(k)}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.74}$$

Крім цього, $n$-ий підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{F_0^{(n)}(\mathbf{z})},\ n \geq 1, \tag{5.75}$$

де $F_0^{(n)}(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, означені в (5.68).

Нехай $n$ — довільне натуральне число, $\alpha$ — довільне число з інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із (5.73). За індукцією за $k$ покажемо, що для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ виконуються такі нерівності

$$\mathrm{Re}\,(F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) e^{-i\alpha}) \geq D_{i_k,k}^{(n)}(\mathbf{z}) \cos(\alpha) > 0, \tag{5.76}$$

де $0 \leq k \leq n-1$, $D_{i_{m-1},m-1}^{(m)}(\mathbf{z}) \equiv 1$ для $m \geq 1$,

$$D_{i_k,q}^{(m)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=q+1}^{m-1} \frac{-\mu_r \displaystyle\sum_{p=1}^{i_k} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}}{1 + \mu_r} \text{ для } k \leq q \leq m-2,\ m \geq 2,$$

і де на підставі співвідношення (5.64)

$$\mu_r = \max_{i(r) \in \mathcal{I}_r} \pi_{i(r)} = \max_{i(r) \in \mathcal{I}_r} \frac{g_{i(r)}}{1 - g_{i(r)}} \text{ для } r \geq 1. \tag{5.77}$$

Зазначимо, що із нерівності в (5.73), співвідношення (5.77) і викладених в доведенні нерівності (5.56) міркувань, випливає, що $D^{(m)}_{i_k,k}(\mathbf{z}) \geq D^{(m)}_{i_{k-1},k}(\mathbf{z})$ для всіх $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$, $m \geq 1$.

Оскільки для $k = n-1$ із співвідношень (5.69) і (5.70)

$$F^{(n)}_{i(n-1)}(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} z_{i_n} - \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{z_{i_n}}{G^{(n)}_{i(n)}(\mathbf{z})} = 1,$$

то

$$\mathrm{Re}\,(F^{(n)}_{i(n-1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) = \cos(\alpha) > 0.$$

Припустимо, що нерівності (5.76) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r \leq n-2$. Доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$.

Використовуючи співвідношення (5.70) і (5.71), для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$F^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha}\left(1 + \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} z_{i_{r+1}} - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{z_{i_{r+1}}}{G^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})}\right) =$$

$$= e^{-i\alpha} + \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{\pi_{i(r+1)} z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}}{(\pi_{i(r+1)} + F^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z}))e^{-i\alpha}}. \tag{5.78}$$

Нехай

$$u = \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}),\ v = \mathrm{Im}\,(z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}),$$
$$x = \mathrm{Re}\,((\pi_{i(r+1)} + F^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z}))e^{-i\alpha}),\ y = \mathrm{Im}\,((\pi_{i(r+1)} + F^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z}))e^{-i\alpha}).$$

Тоді із нерівності в (5.73) випливає, $v^2 \leq 4u+4$. Тому, застосовуючи лему 1.2 і припущення індукції до співвідношення (5.78), отримаємо

$$\mathrm{Re}\,(F^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}) \geq \cos(\alpha) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{\pi_{i(r+1)}(|z_{i_{r+1}}| - \mathrm{Re}\,(z_{i_{r+1}} e^{-2i\alpha}))}{2(\pi_{i(r+1)}\cos(\alpha) + \mathrm{Re}\,(F^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha}))} \geq$$

$$\geq \cos(\alpha) - \frac{\mu_{r+1} \sum_{p=1}^{i_r} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos(\alpha)}}{\mu_{r+1} + D^{(n)}_{i_{r+1},r+1}(\mathbf{z})} \geq$$

$$\geq \cos(\alpha) - \frac{\mu_{r+1}\sum\limits_{p=1}^{i_r}\dfrac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos(\alpha)}}{\mu_{r+1} + D^{(n)}_{i_r,r+1}(\mathbf{z})} = D^{(n)}_{i_r,r}(\mathbf{z})\cos(\alpha) > 0.$$

Із нерівностей (5.76) випливає, що $F^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, і для всіх $\mathbf{z} \in P$. Це означає, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області (5.72).

Еквівалентним перетворенням $\rho_n = 1/(1+\mu_n)$ для $n \geq 1$, неперервний дріб $D^{(\infty)}_{N,0}(\mathbf{z})$ зведемо до вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{-\dfrac{\mu_n}{1+\mu_n}\left(1 - \dfrac{\mu_{n-1}}{1+\mu_{n-1}}\right)\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}}{1}, \tag{5.79}$$

де $\mu_0 = 0$. На підставі теорем 1.10 неперервний дріб

$$\frac{\dfrac{\mu_1}{1+\mu_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{n=2}^{\infty} \frac{-\dfrac{\mu_n}{1+\mu_n}\left(1 - \dfrac{\mu_{n-1}}{1+\mu_{n-1}}\right)\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}}{1}$$

збігається, значення цього неперервного дробу і його підхідних дробів не більше, ніж $1 - 1/S_1$, де

$$S_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{k}\mu_r. \tag{5.80}$$

Нехай знову $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і, крім цього, нехай

$$P_{\alpha,\sigma} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{\cos^2(\alpha)} < 2\sigma\right\}, \tag{5.81}$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи нерівності (5.76) і викладені вище міркування, для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{\alpha,\sigma}$, $P_{\alpha,\sigma} \subset P$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{s_0}{\mathrm{Re}\,(F^{(n)}_0(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \leq$$

$$\leq \frac{s_0}{D_{N,0}^{(n)}(\mathbf{z})\cos(\alpha)} \leq \frac{s_0}{\left(1-\left(1-\dfrac{1}{S_1}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k|-\mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}\right)\cos(\alpha)} \leq$$

$$\leq \frac{s_0 S_1}{(S_1+(1-S_1)\sigma)\cos(\alpha)} = C(P_{\alpha,\sigma}),$$

де $C(P_{\alpha,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{\alpha,\sigma}$, Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в (5.81).

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області (5.72). Покриємо $K$ областями вигляду (5.81), виберемо з цього покриття скінченне підпокриття $P_{\alpha_r,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(P_{\alpha_r,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.72).

Згідно з теоремою 2.8 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається в області

$$\Delta_R = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| < R < 1\right\}.$$

Очевидно, що $\Delta_R \subset P$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < 1$, зокрема, $\Delta_{1/2} \subset P$. Тому на підставі теореми 1.19 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (5.72). ■

Відмітимо, що при $N = 1$ область (5.72) запишеться у вигляді (1.40), що є областю збіжності $g$-дробу (див. теорему 1.16). Тому припускаємо, що область збіжності (5.72) в теоремі 5.18 для багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) є в певному сенсі найширшою.

У наступних двох теоремах дослідимо збіжність деяких модифікованих багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними.

**Теорема 5.19.** *Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}, \tag{5.82}$$

*де* $0<g_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 0$, *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* (5.72), *при цьому збігається рівномірною на кожній компактній підмножині цієї області.*

**Доведення.** За допомогою формул (див. с. 53)

$$m_{i(k)}=\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})}{1-m_{i(k-1)}} \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\geq 1, \tag{5.83}$$

де $m_0=0$, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (5.82) зведемо до вигляду

$$\frac{g_0}{1}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{m_{i(1)}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{m_{i(k)}(1-m_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}.$$

Тому твердження цієї теореми випливає із теореми 5.18. ■

**Теорема 5.20.** *Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними*

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}, \tag{5.84}$$

*де* $0<g_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\geq 1$, *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P\bigcap O_M, \tag{5.85}$$

*де* $P$ *означене в* (5.72),

$$O_M=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N:\ \sum_{k=1}^{N}|z_k|<M\right\},$$

*для кожної сталої* $M>0$, *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* (5.85).

**Доведення.** За допомогою формул

$$m_{i(k)} = \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})}{1 - m_{i(k-1)}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \tag{5.86}$$

де $m_{i(1)} = 0$, $1 \leq i_1 \leq N$, гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (5.85) зведемо до вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{m_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=3}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{m_{i(k)}(1 - m_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}. \tag{5.87}$$

Нехай $f_n(\mathbf{z})$ — $n$-ий підхідний дріб гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.87), $n \geq 1$. Оскільки згідно з теоремою 5.17 для кожного $1 \leq i_1 \leq N$ багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{g_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{m_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=3}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{m_{i(k)}(1 - m_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}$$

є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними вигляду (5.61), то для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z}$ із (5.85) маємо

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{F_{i(1)}^{(n+1)}(\mathbf{z})},$$

де $F_{i(1)}^{(n+1)}(\mathbf{z})$, $i(1) \in \mathcal{I}_1$, $n \geq 1$ означені в (5.68) із

$$\pi_{i(k)} = \frac{m_{i(k)}}{1 - m_{i(k)}} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2. \tag{5.88}$$

Із доведення теореми 5.18 випливає, що для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, і для кожного $\mathbf{z} \in (P \bigcap O_M)$, виконуються нерівності (5.76) з

$$\mu_r = \max_{i(r) \in \mathcal{I}_r} \pi_{i(r)} \text{ для } r \geq 2, \tag{5.89}$$

де $\pi_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, означені в (5.88). Із нерівностей (5.76) випливає, що $F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z} \in (P \bigcap O_M)$. Це означає, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.87) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області (5.85).

Нехай $\alpha$ — довільне число із інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і нехай

$$O_{M,\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| < \sigma M \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи нерівності (5.76) і викладені в доведенні теореми 5.18 міркування, для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in (P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma})$, де $P_{\alpha,\sigma}$ означене в (5.81), $(P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma}) \subset (P \bigcap O_M)$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(F_{i(1)}^{(n+1)}(\mathbf{z})e^{-i\alpha})} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|z_{i_1}|M}{D_{i_1,1}^{(n+1)}(\mathbf{z})\cos(\alpha)} \leq$$
$$\leq \frac{\sigma M S_2}{(S_2 + (1 - S_2)\sigma)\cos(\alpha)} = C\left(P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma}\right),$$

де

$$S_2 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{r=2}^{k} \mu_r,$$

$\mu_r$, $r \geq 2$, означені в (5.89), $C(P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma}$. Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{\alpha,\sigma} \bigcap O_{M,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області (5.72). Покриємо $K$ областями вигляду (5.81), виберемо з цього покриття скінченне підпокриття $P_{\alpha_r,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq j\leq m} C(P_{\alpha_j,\sigma_j}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.72).

Згідно з теоремою 2.6 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається в області

$$\Delta_R = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| < R < R' \right\},$$

де $R' = \min\{1, M\}$. Очевидно, що $\Delta_R \subset (P \bigcap O_M)$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < R'$, зокрема, $\Delta_{R'/2} \subset (P \bigcap O_M)$. Тому на підставі теореми 1.19 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (5.72). ■

Далі встановимо оцінки похибок наближень для багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними.

**Теорема 5.21.** *Багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними* (5.60) *із послідовністю підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції $f(z)$ в області*

$$\bigcup_{\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)} (P_\alpha \bigcap O_\alpha), \tag{5.90}$$

*де $P_\alpha$ означене в* (5.73),

$$O_\alpha = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \\ |z_k| < 4\cos^2(\alpha) - 2T\sum_{r=1}^{k}(|z_r| - \mathrm{Re}\,(z_r e^{-2i\alpha})),\ 1 \le k \le N\Big\}, \tag{5.91}$$

*де*

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(1 - \left(1 + \sum_{k=n}^{\infty}\prod_{r=n}^{k}\mu_r\right)^{-1}\right), \tag{5.92}$$

*$\mu_r$, $r \ge 1$, означені в* (5.77), *і для кожного $\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$ виконуються оцінки*

$$|f(z) - f_n(z)| \le \frac{16 s_0 \cos(\alpha)\sum_{k=1}^{N}|z_k|}{\left(2\cos^2(\alpha) - T\sum_{k=1}^{N}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^2} \times \\ \times \sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n-1\\ \mathbf{n}\ge\mathbf{0}}}\prod_{r=1}^{N}\frac{|z_r|^{n_r}}{\left(4\cos^2(\alpha) - 2T\sum_{k=1}^{r}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^{n_r}} \tag{5.93}$$

*для $n \ge 2$ і для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.*

**Доведення.** Для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ оцінимо модуль різниці підхідних дробів $|f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})|$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) для $n \geq 2$ і $k \geq 1$.

Оскільки згідно з теоремою 5.17 багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними (5.61), то $\pi_0 = s_0$ і виконується співвідношення (5.74). Крім цього, враховуючи позначення (5.68), для кожного $n \geq 1$ $n$-ий підхідний дріб $f_n(\mathbf{z})$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) запишемо у вигляді (5.75).

Із доведення теореми 5.18 випливає, що для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 1$, і для кожного $\mathbf{z}$ із (5.90) виконуються нерівності (5.76). Із нерівностей (5.67), (5.69), (5.71) і (5.76) випливає, що $F_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ і $G_{i(k+1)}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, і для всіх $\mathbf{z}$ із (5.90).

Використовуючи методику встановлення формули (1.44) (див., наприклад, [9]) і співвідношення (5.67)–(5.70), знайдемо формулу різниці двох підхідних дробів $(f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}))$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60). Для $n \geq 2$ і $k \geq 1$ на перших двох кроках маємо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})} - \frac{s_0}{F_0^{(n)}(\mathbf{z})} = -\frac{s_0(F_0^{(n+k)}(\mathbf{z}) - F_0^{(n)}(\mathbf{z}))}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(n)}(\mathbf{z})} =$$

$$= -\frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(n)}(\mathbf{z})}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\frac{z_{i_1}}{G_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})} - \sum_{i_1=1}^{N}\frac{z_{i_1}}{G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}\right) =$$

$$= \frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(n)}(\mathbf{z})}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{z_{i_1}(G_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}))}{G_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})} =$$

$$= \frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(k)}(\mathbf{z})}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{z_{i_1}}{G_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}\left(\frac{\pi_{i(1)}}{F_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})} - \frac{\pi_{i(1)}}{F_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}\right) =$$

$$= -\frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(k)}(\mathbf{z})}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{z_{i_1}\pi_{i(1)}(F_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - F_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}))}{G_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})F_{i(1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})F_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}.$$

Нехай $r$ — довільне натуральне число таке, що $0 \leq r \leq n-2$, $n \geq 2$.

Тоді для $n \geq 2$ і $k \geq 1$ отримаємо

$$F_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - F_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z}) = \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{z_{i_{r+1}}}{G_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})} - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{z_{i_{r+1}}}{G_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} =$$

$$= \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{z_{i_{r+1}}(G_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - G_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z}))}{G_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} =$$

$$= \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{z_{i_{r+1}}\pi_{i(r+1)}(F_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - F_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z}))}{G_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z})F_{i(r+1)}^{(n+k)}(\mathbf{z})F_{i(r+1)}^{(n)}(\mathbf{z})}. \tag{5.94}$$

Застосовуючи рекурентне співвідношення (5.94) і враховуючи, що

$$F_{i(n-1)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) - F_{i(n-1)}^{(n)}(\mathbf{z}) = -\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{z_{i_n}\pi_{i(n)}}{G_{i(n)}^{(n+k)}(\mathbf{z})F_{i(n)}^{(n+k)}(\mathbf{z})},$$

на $(2n-1)$-му кроці знаходимо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) =$$

$$= \frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(n)}(\mathbf{z})} \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n} z_{i_r}\pi_{i(r)}}{\prod\limits_{r=1}^{n} F_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z})G_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n-1} F_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})G_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z})}.$$

Звідси, використовуючи рекурентні співвідношення (5.71), отримуємо

$$f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = \frac{s_0}{F_0^{(n+k)}(\mathbf{z})F_0^{(n)}(\mathbf{z})} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n} z_{i_r}\pi_{i(r)}}{\prod\limits_{r=1}^{n}(\pi_{i(r)} + F_{i(r)}^{(n+k)}(\mathbf{z})) \prod\limits_{r=1}^{n-1}(\pi_{i(r)} + F_{i(r)}^{(n)}(\mathbf{z}))}. \tag{5.95}$$

Зауважимо, що для $x > 0$, $a_1 > 0$ і $a_2 > 0$

$$\max_{x>0} \frac{x}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2}. \tag{5.96}$$

Дійсно, максимальне значення виразу

$$f(x) = \frac{x}{(x+a_1)(x+a_2)}$$

досягається при $x = \sqrt{a_1 a_2}$, оскільки $f'(x) = 0$ при $x = \sqrt{a_1 a_2}$ і

$$f''(\sqrt{a_1 a_2}) < 0, \ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Нехай $\alpha$ — довільне число з інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ і нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $P_\alpha \bigcap O_\alpha$. Застосовуючи співвідношення (5.77), оцінки (5.76) і (5.96) до формули (5.95), маємо

$$|f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \le \frac{s_0}{D_{N,0}^{(n+k)} D_{N,0}^{(n)} \cos^{2n+1}(\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\mu_n \prod\limits_{r=1}^{n} |z_{i_r}|}{(\mu_n + D_{i_n,n}^{(n+k)}) \prod\limits_{r=1}^{n-1} \left(\sqrt{D_{i_r,r}^{(n+k)}} + \sqrt{D_{i_r,r}^{(n)}}\right)^2}.$$

Зазначимо, що із співвідношень (5.77), нерівності в означенні області (5.73) і викладених в доведенні теореми 5.18 міркувань, випливає, що для кожного $r \ge 0$, $1 \le i_n \le i_{n-1}$, $n \ge 1$, елементи неперервного дробу $D_{i_r,r}^{(\infty)}$ задовольняють умови теорем 1.10–1.12. Тому, на підставі цих теорем для кожного $r \ge 0$, $1 \le i_n \le i_{n-1}$, $n \ge 1$, неперервний дріб $D_{i_r,r}^{(\infty)}$ збігається безумовно (див. означення на с. 34), послідовність його підхідних дробів монотонно спадає і, крім цього, значення цього неперервного дробу і його підхідних дробів не менше, ніж

$$1 - T \sum_{p=1}^{i_r} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)},$$

де $T$ означене в (5.92). Таким чином,

$$|f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \le \frac{s_0}{\left(1 - T \sum\limits_{p=1}^{N} \frac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}\right)^2 \cos^3(\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{\mu_n |z_{i_n}|}{\mu_n + 1 - T \sum\limits_{p=1}^{i_n} \dfrac{|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha})}{2\cos^2(\alpha)}} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{n-1} \frac{|z_{i_r}|}{4\cos^2(\alpha) - 2T \sum\limits_{p=1}^{i_r} (|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha}))} \leq$$

$$\leq \frac{16 s_0 \cos(\alpha) \sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|}{\left(2\cos^2(\alpha) - T \sum\limits_{k=1}^{N} (|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^2} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{|z_{i_r}|}{4\cos^2(\alpha) - 2T \sum\limits_{p=1}^{i_r} (|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha}))}$$

або те саме, що

$$|f_{n+k}(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{16 s_0 \cos(\alpha) \sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|}{\left(2\cos^2(\alpha) - T \sum\limits_{k=1}^{N} (|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n-1 \\ \mathbf{n}\geq \mathbf{0}}} \prod_{r=1}^{N} \frac{|z_r|^{n_r}}{\left(4\cos^2(\alpha) - 2T \sum\limits_{p=1}^{r} (|z_p| - \mathrm{Re}\,(z_p e^{-2i\alpha}))\right)^{n_r}}.$$

Звідси, прямуючи до границі при $k \to \infty$, отримуємо оцінки (5.93).

Нехай

$$\frac{1}{L(\mathbf{z})} = \max_{1\leq k\leq N} \frac{|z_k|}{4\cos^2(\alpha) - 2T \sum\limits_{r=1}^{k} (|z_r| - \mathrm{Re}\,(z_r e^{-2i\alpha}))}. \tag{5.97}$$

Тоді із нерівності в означенні області (5.91) випливає, що $L(\mathbf{z}) > 1$ для всіх

$\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$, а на підставі леми 5.1 для кожного $\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$ отримаємо

$$\sum_{\substack{|\mathbf{n}|=n-1\\ \mathbf{n}\geq\mathbf{0}}} \prod_{r=1}^{N} \frac{|z_r|^{n_r}}{\left(4\cos^2(\alpha) - 2T\sum\limits_{k=1}^{r}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^{n_r}} \leq \frac{C_{N+n-2}^{N-1}}{L^{n-1}(\mathbf{z})} =$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{N+k-2}{(k-1)L(\mathbf{z})} = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{(k-1)L(\mathbf{z}) - N - k + 2}{(k-1)L(\mathbf{z})}\right).$$

Звідси, оскільки ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)L(\mathbf{z}) - N - k + 2}{(k-1)L(\mathbf{z})}$$

розбігається, випливає, що вираз в правій частині нерівності (5.93) прямує до нуля при $n \to \infty$ і, отже, багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається в області $P_\alpha \bigcap O_\alpha$. Нарешті, із довільності $\alpha$ випливає, що багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними (5.60) збігається в області (5.90). ■

З огляду на зауваження 5.1 маємо таке зауваження:

**Зауваження 5.2.** *За умов теореми* 5.21 *нерівність* (5.93) *для кожного* $\mathbf{z} \in (P_\alpha \bigcap O_\alpha)$, *де* $P_\alpha$, $O_\alpha$ *означені відповідно в* (5.73) *і* (5.91), *можна записати у вигляді*

$$|f(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z})| \leq \frac{16 s_0 C_{N+n-2}^{N-1}\cos(\alpha)\sum\limits_{k=1}^{N}|z_k|}{L^{n-1}(\mathbf{z})\left(2\cos^2(\alpha) - T\sum\limits_{k=1}^{N}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^2}$$

*для* $n \geq 2$ *і для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, *де* $1/L(\mathbf{z})$ *означене в* (5.97). *Зрозуміло, що вираз в правій частині цієї нерівності прямує до нуля при* $n \to \infty$.

Зазначимо, що у випадку коли коефіцієнти $g_{i(k)}$ багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними (5.60) такі, що ряд (5.80), де $\mu_r$, $r \geq 1$,

означені в (5.77), розбігається і $z_k = z/N$, $1 \le k \le N$, $\cos(\alpha) = 1$, то в теоремі 5.21 область $O_\alpha$ запишемо у вигляді

$$\left(x - \frac{8N}{1+4N}\right)^2 + \frac{(1+2N)^2}{1+4N} y^2 < 16N^2 \left(\frac{1+2N}{1+4N}\right)^2,$$

де $x = \mathrm{Re}\,(z)$, $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Це внутрішність еліпса з центром у точці

$$\left(\frac{8N}{1+4N}, 0\right) \text{ і півосями } 4N\frac{1+2N}{1+4N} \text{ і } \frac{4N}{\sqrt{1+4N}}.$$

$O_\alpha \subset P_\alpha$ лише при $N = 1$.

Наступні дві теореми про швидкість збіжності модифікованих багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними (5.81) і (5.84) отримуємо міркуваннями подібними до міркувань доведення теореми 5.21.

**Теорема 5.22.** *Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (5.81) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *збігається до функції* $f(z)$ *в області* (5.90), *де* $P_\alpha$, $O_\alpha$ *означені відповідно в* (5.73) *і* (5.91), $T$ *означене в* (5.92) *із*

$$\mu_r = \max_{i(r)\in\mathcal{I}_r} \frac{m_{i(r)}}{1 - m_{i(r)}},\ r \ge 1,$$

*де* $m_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *визначені в* (5.83), *і для кожного* $\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$ *виконуються оцінки* (5.93), *де* $s_0 = g_0$, *для* $n \ge 2$ *і для кожного* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**Теорема 5.23.** *Гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними* (5.84) *із послідовністю підхідних дробів* $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *збігається до функції* $f(z)$ *в області* (5.90), *де* $P_\alpha$, $O_\alpha$ *означені відповідно в* (5.73) *і* (5.91), *де*

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \prod_{r=n+1}^{k} \mu_r\right)^{-1}\right),\ \mu_r = \max_{i(r)\in\mathcal{I}_r} \frac{m_{i(r)}}{1 - m_{i(r)}},\ r \ge 2,$$

$m_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, *визначені в* (5.86), *і для кожного* $\mathbf{z} \in P_\alpha \bigcap O_\alpha$

*виконуються оцінки*

$$|f(z)-f_n(z)| \le \sum_{p=1}^{N} \frac{16\cos(\alpha) g_p |z_p| \sum\limits_{k=1}^{N} |z_k|}{\left(2\cos^2(\alpha) - T\sum\limits_{k=1}^{p}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n_p+n_{p+1}+\ldots+n_N=n-1 \\ \mathbf{n}\ge\mathbf{0}}} \prod_{r=p}^{N} \frac{|z_r|^{n_r}}{\left(4\cos^2(\alpha) - 2T\sum\limits_{k=1}^{r}(|z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k e^{-2i\alpha}))\right)^{n_r}}$$

для $n \ge 2$ і для кожного $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Зауваження, подібні до зауваження 5.2, є правильним і до теорем 5.22 і 5.23.

## 5.4. Області і множини збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними

У цьому підрозділі дослідимо збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1+q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1+q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{5.98}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, і, як зазначалося вище, тісно пов'язаного із ним багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{d_{i(1)} + z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1_{i(k)})^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}}{d_{i(k)} + z_{i_k}}, \tag{5.99}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. З цією метою введемо такі позначення:

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + q_{i(n)} z_{i_n},\ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \ge 1, \tag{5.100}$$

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + q_{i(k)}z_{i_k} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{r-1},i_r}} p_{i(r)} z_{i_{r-1}} z_{i_r}}{1 + q_{i(r)} z_{i_r}},$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$. Тоді, очевидно, виконується рекурентне співвідношення

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + q_{i(k)}z_{i_k} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{(-1)^{\delta_{i_k,i_{k+1}}} p_{i(k+1)} z_{i_k} z_{i_{k+1}}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(\mathbf{z})} \tag{5.101}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$, і, таким чином, $n$-ий підхідний дріб багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.98) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \ n \ge 1.$$

Доведемо таку теорему:

**Теорема 5.24.** *Нехай коефіцієнти $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.98) *задовольняють нерівність*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\left((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)}\right)}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})} \le \frac{1}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 2, \tag{5.102}$$

*де $l_k$, $1 \le k \le N$, — додатні числа, $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}}$ — послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < g_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 1, \tag{5.103}$$

*а коефіцієнти $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, — нерівність*

$$\mathrm{Re}\,(q_{i(k)}) \ge 0 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 1. \tag{5.104}$$

*Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.98) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P_{l(N)} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < 2, \ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2}, \ 1 \le k \le N \right\}, \tag{5.105}$$

*якщо існує стала $M > 0$ така, що*

$$|p_{i(k)}| \leq M \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.106}$$

*при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$.*

**Доведення.** Покладемо

$$z_k = |z_k| e^{i\varphi_k},\ 1 \leq k \leq N. \tag{5.107}$$

Нехай $n$ — довільне натуральне число і $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із (5.105). За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, доведемо нерівності

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi_{i_k}}) \geq (1 - g_{i(k)}) \cos(\varphi_{i_k}) > 0, \tag{5.108}$$

де $1 \leq k \leq n$.

Нерівності (5.108) для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}_n$, враховуючи (5.100), очевидні. Припускаючи, що нерівності (5.108) виконуються для $k = r + 1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r \leq n - 1$, доведемо їх для $k = r$ і для кожного $i(r) \in \mathcal{I}_r$. Використовуючи співвідношення (5.101) і (5.107), для довільного мультиіндексу $i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi_{i_r}} = e^{-i\varphi_{i_r}} + |z_{i_r}| q_{i(r)} + \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{(-1)^{\delta_{i_r, i_{r+1}}} p_{i(r+1)} |z_{i_r}| |z_{i_{r+1}}|}{Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z}) e^{-i\varphi_{i_{r+1}}}}. \tag{5.109}$$

Із нерівності (5.102) випливає, що

$$\frac{|p_{i(r+1)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r, i_{r+1}}} p_{i(r+1)})}{l_{i_r} l_{i_{r+1}} g_{i(r)} (1 - g_{i(r+1)})} \leq \frac{1}{2} \tag{5.110}$$

для всіх індексів $i_{r+1}$ таких, що $1 \leq i_{r+1} \leq i_r$. Крім цього, із нерівностей (5.103) і (5.105) для довільного індексу $i_{r+1}$ такого, що $1 \leq i_{r+1} \leq i_r$, маємо

$$|z_{i_r}| |z_{i_{r+1}}| l_{i_r} l_{i_{r+1}} g_{i(r)} (1 - g_{i(r+1)}) < 4. \tag{5.111}$$

Нехай

$$u = \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}} p_{i(r+1)}|z_{i_r}||z_{i_{r+1}}|),\ v = \mathrm{Im}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}} p_{i(r+1)}|z_{i_r}||z_{i_{r+1}}|),$$
$$x = \mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_{r+1}}}),\ y = \mathrm{Im}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_{r+1}}}).$$

Тоді, комбінуючи нерівності (5.110) і (5.111), елементарними перетвореннями отримуємо $v^2 \le 4u+4$. Застосовуючи послідовно лему 1.2, нерівність (5.104), припущення індукції і нерівності (5.102) до співвідношення (5.109), а також враховуючи нерівність (5.103), маємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_r}}) \ge$$
$$\ge \cos(\varphi_{i_r}) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|z_{i_r}||z_{i_{r+1}}|(|p_{i(r+1)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}} p_{i(r+1)}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_{r+1}}})} \ge$$
$$\ge \cos(\varphi_{i_r}) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{2(|p_{i(r+1)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}} p_{i(r+1)}))\cos(\varphi_{i_r})}{l_{i_r} l_{i_{r+1}}(1-g_{i(r+1)})} \ge$$
$$\ge \cos(\varphi_{i_r}) - g_{i(r)}\cos(\varphi_{i_r}) = (1-g_{i(r)})\cos(\varphi_{i_r}) > 0.$$

Із нерівностей (5.108) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \ne 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n$, $n \ge 1$, і для всіх $\mathbf{z}$ із (5.105). Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.98) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $P_{l(N)}$.

Нехай

$$P_{l(N),\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \frac{l_k|z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < 2\sigma,\ |\arg(z_k)| < \frac{\sigma\pi}{2},\ 1 \le k \le N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи нерівності (5.106) і (5.108), для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),\sigma}$, $P_{l(N),\sigma} \subset P_{l(N)}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_1}})} < \sum_{i_1=1}^{N} \frac{2M\sigma}{l_{i_1}(1-g_{i(1)})} = C(P_{l(N),\sigma}),$$

де $C(P_{l(N),\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{l(N),\sigma}$. Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_{l(N)}$. Покриємо $K$ областями вигляду $P_{l(N),\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),\sigma_r}$, $1 \le r \le m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\le r\le m} C(P_{l(N),\sigma_r}).$$

Тоді для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \le C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.105).

Еквівалентним перетворенням

$$\rho_{i(k)} = \frac{1}{1+q_{i(k)}z_{i_k}} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1,$$

багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.98) зведемо до вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\dfrac{p_{i(1)}z_{i_1}}{1+q_{i(1)}z_{i_1}}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\dfrac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{(1+q_{i(k-1)}z_{i_{k-1}})(1+q_{i(k)}z_{i_k})}}{1}. \tag{5.112}$$

Нехай

$$L = \max_{1\le k\le N} l_k. \tag{5.113}$$

Тоді, із нерівності (5.106) випливає, що існує додатна стала $M'$ така, що $\sqrt{M'} > \max\{1, M, L/(2N)\}$ і, отже, область

$$\Delta_R = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N :\ 0 < z_k < R < \frac{1}{2N\sqrt{M'}},\ 1 \le k \le N \right\}$$

міститься в $P_{l(N)}$ для кожного $R$ такого, що

$$0 < R < \frac{1}{2N\sqrt{M'}},$$

зокрема, $\Delta_{1/(4N\sqrt{M'})} \subset P_{l(N)}$. Тоді, використовуючи нерівності (5.104) і (5.106), для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$, і для довільного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ маємо

$$\left| \frac{p_{i(1)}z_{i_1}}{1+q_{i(1)}z_{i_1}} \right| \le \frac{M}{2N\sqrt{M'}} < \frac{1}{2N},$$

а для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 2$ отримаємо

$$\left| \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{(1+q_{i(k-1)} z_{i_{k-1}})(1+q_{i(k)} z_{i_k})} \right| \leq \frac{M}{4N^2 M'} < \frac{1}{4i_{k-1}}.$$

Тому, згідно з теоремою 2.3, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $z_{i(1)} = 2p_{i(1)} z_{i_1}/(1+q_{i(1)} z_{i_1})$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і

$$z_{i(k)} = \frac{4(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{(1+q_{i(k-1)} z_{i_{k-1}})(1+q_{i(k)} z_{i_k})} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2,$$

гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (5.112) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$. Крім цього, із означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1 випливає, що багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.98) також збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset P_{l(N)}$. Нарешті, на підставі теореми 1.19 багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.98) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$ до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Позаяк існує зв'язок між функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними (5.98) і (5.99), то збіжність багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.99) дослідимо за допомогою еквівалентного багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} \xi_{i_1}}{1+d_{i(1)} \xi_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)} \xi_{i_{k-1}} \xi_{i_k}}{1+d_{i(k)} \xi_{i_k}}, \tag{5.114}$$

де $\xi_k = 1/z_k$, $1 \leq k \leq N$.

Згідно з теоремою 5.24 багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.114) збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області

$$P_{l(N)} = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{l_k |\xi_k|}{\cos(\arg(\xi_k))} < 2, \ |\arg(\xi_k)| < \frac{\pi}{2}, \ 1 \leq k \leq N \right\}, \tag{5.115}$$

якщо виконується нерівність

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}\left((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}\right)}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})} \leq \frac{1}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \tag{5.116}$$

де $l_k$, $1 \leq k \leq N$, — додатні числа, $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ — послідовність дійсних чисел таких, що задовольняють нерівність (5.103), а також нерівність

$$\mathrm{Re}\,(d_{i(k)}) \geq 0 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.117}$$

і, крім цього, існує стала $M > 0$ така, що

$$|c_{i(k)}| \leq M \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.118}$$

при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{l(N)}$.

Враховуючи, що $\xi_k = 1/z_k$, $1 \leq k \leq N$, із нерівностей (5.115) знаходимо

$$\left|\frac{1}{z_k}\right| < \frac{2}{l_k} \cos\left(\arg\left(\frac{1}{z_k}\right)\right),\ \left|\arg\left(\frac{1}{z_k}\right)\right| < \frac{\pi}{2},\ 1 \leq k \leq N,$$

або $\mathrm{Re}\,(z_k) > l_k/2$, $1 \leq k \leq N$.

Отже, як наслідок із теореми 5.24 отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.3.** *Нехай коефіцієнти $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.99) *для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 1$ задовольняють нерівність* (5.116)*, а коефіцієнти $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, — нерівність* (5.117)*. Тоді багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.99) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$R_{l(N)} = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \mathrm{Re}\,(z_k) > \frac{l_k}{2},\ 1 \leq k \leq N\right\},$$

*якщо існує стала $M > 0$ така, що виконується нерівність* (5.118)*, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $R_{l(N)}$.*

Застосуванням теореми 5.24 є наступний результат:

**Теорема 5.25.** *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.98) *задовольняють нерівність* $(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *а коефіцієнти* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— нерівність* (5.104). *Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.98) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$P = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |\arg z_k| < \frac{\pi}{2}, \ 1 \leq k \leq N \right\}, \tag{5.119}$$

*якщо існує стала* $M > 0$ *така, що виконується нерівність* (5.106), *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* (5.119).

**Доведення.** Якщо $g_{i(k)} = 1/2$ і $(-1)^{\delta_{i_k,i_{k+1}}} p_{i(k+1)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, то, очевидно, нерівність (5.102) виконується для всіх $l_k > 0$, $1 \leq k \leq N$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області (5.119). Тоді виконуються включення $K \subseteq P_{l(N)} \subseteq P$ для деяких досить малих $l_1, l_2, \ldots, l_N$ для яких множина $P_{l(N)}$ є область (5.105). Таким чином, ця теорема є безпосереднім наслідком теореми 5.24. ■

Враховуючи наведені вище міркування, із теореми 5.25 отримуємо такий наслідок:

**Наслідок 5.4.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.99) *задовольняють нерівність* $(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)} > 0$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *а коефіцієнти* $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— нерівність* (5.117). *Тоді багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.99) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* (5.119), *якщо існує стала* $M > 0$ *така, що виконується нерівність* (5.118), *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* (5.119).

Тепер доведемо наступну теорему:

**Теорема 5.26.** *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.98) *задовольняють нерівність*

$$\frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\left((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)}\right)}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})} \leq \frac{1}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \tag{5.120}$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконується нерівність* (5.103), *а коефіцієнти* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— нерівність* (5.104). *Тоді багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.98) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$D_{l(N)} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2},\ 1 \leq k \leq N \right\}, \tag{5.121}$$

*якщо існує стала* $M > 0$ *така, що виконується нерівність* (5.106), *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N)}$.

**Доведення.** Так само, як в доведенні теореми 5.24 покладемо $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, $1 \leq k \leq N$. Нехай $n$ — довільне натуральне число і $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із області (5.121). За індукцією за $k$ для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$ доведемо нерівності (5.108).

Нерівності (5.108) при $k = n$, враховуючи (5.100), очевидні. Припустимо, що нерівності (5.108) виконуються для $k = r+1$ і для всіх $i(r+1) \in \mathcal{I}_{r+1}$ таких, що $r + 1 \leq n$. Тоді, послідовно застосовуючи лему 1.2 на підставі міркувань, викладених в доведенні теореми 5.24, нерівності (5.104), (5.120), припущення індукції і нерівності (5.121) до співвідношення (5.109), а також враховуючи нерівність (5.103), для $k = r$ і для довільного мультиіндексу

$i(r) \in \mathcal{I}_r$ маємо

$$\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_r}}) \geq$$
$$\geq \cos(\varphi_{i_r}) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{|z_{i_r}||z_{i_{r+1}}|(|p_{i(r+1)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}}p_{i(r+1)}))}{2\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(r+1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_{r+1}}})} \geq$$
$$\geq \cos(\varphi_{i_r}) - \sum_{i_{r+1}=1}^{i_r} \frac{2(|p_{i(r+1)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_r,i_{r+1}}}p_{i(r+1)}))\cos(\varphi_{i_r})}{l_{i_r}l_{i_{r+1}}(1-g_{i(r+1)})} \geq$$
$$\geq \cos(\varphi_{i_r}) - g_{i(r)}\cos(\varphi_{i_r}) = (1-g_{i(r)})\cos(\varphi_{i_r}) > 0.$$

Із нерівностей (5.108) випливає, що $Q^{(n)}_{i(k)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, і для всіх $\mathbf{z}$ із (5.105). Це означає, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.98) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $D_{l(N)}$.

Нехай

$$D_{l(N),\sigma} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k|z_k|}{2\cos(\arg(z_k))} < \sigma,\ |\arg(z_k)| < \frac{\sigma\pi}{2},\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Використовуючи нерівності (5.106), (5.108) і (5.118), для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in D_{l(N),\sigma}$, $D_{l(N),\sigma} \subseteq D_{l(N)}$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_1}})} < \sum_{i_1=1}^{N} \frac{M|z_{i_1}|}{(1-g_{i(1)})\cos(\varphi_{i_1})} <$$
$$< \frac{2\sigma M}{l(1-g_{i(1)})} = C(D_{l(N),\sigma}),$$

де $l = \min\{l_1, l_2, \ldots, l_N\}$, $C(D_{l(N),\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $D_{l(N),\sigma}$. Таким чином, послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $D_{l(N),\sigma}$.

Тепер нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $D_{l(N)}$. Покриємо $K$ областями вигляду $D_{l(N),\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $D_{l(N),\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(D_{l(N),\sigma_r}).$$

Тоді для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області (5.121).

Із нерівності (5.106) випливає, що існує стала $M'$ така, що $\sqrt{M'} > \max\{1, M, L/2\}$, де $L$ означене в (5.113), і, отже, область

$$\Delta_R = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \ 0 < \sum_{k=1}^{N} z_k < R < \frac{1}{2\sqrt{M'}}, \ \mathbf{z} > \mathbf{0} \right\}$$

міститься в $D_{l(N)}$ для кожного $R$ такого, що $0 < R < 1/(2\sqrt{M'})$, зокрема, $\Delta_{1/(4\sqrt{M'})} \subset D_{l(N)}$. Тоді, використовуючи нерівності (5.104) і (5.106), для довільного $\mathbf{z} \in \Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N)}$, маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \left| \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} \right| \leq \frac{M}{2\sqrt{M'}} < \frac{1}{2},$$

а для довільних $i(k) \in \mathcal{I}_k$ і $k \geq 1$ отримаємо

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \left| \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{(1 + q_{i(k-1)} z_{i_{k-1}})(1 + q_{i(k)} z_{i_k})} \right| \leq \frac{M}{4M'} < \frac{1}{4}, \quad i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 1,$$

Тому, згідно з теоремою 2.6, де $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $z_{i(1)} = 2p_{i(1)} z_{i_1}/(1 + q_{i(1)} z_{i_1})$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і

$$z_{i(k)} = \frac{4(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{(1 + q_{i(k-1)} z_{i_{k-1}})(1 + q_{i(k)} z_{i_k})} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \geq 2,$$

гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними (5.112) збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N)}$. Крім цього, із означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1 випливає, що багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.98) також збігається в області $\Delta_R$, $\Delta_R \subset D_{l(N)}$. Нарешті, на підставі теореми 1.19 багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (5.98) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області (5.121) до голоморфної функції багатьох змінних в цій області. ■

Міркуваннями, подібними до міркувань при отриманні наслідку 5.3, отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.5.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.99) *задовольняють нерівність*

$$\frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}\left((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}\right)}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})} \leq \frac{1}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2,$$

*де* $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконується нерівність* (5.103), *а коефіцієнти* $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *— нерівність* (5.117). *Тоді багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.99) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області*

$$G_{l(N)} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(z_k)} < 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2},\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

*якщо існує стала* $M > 0$ *така, що виконується нерівність* (5.118), *при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $D_{l(N)}$.

Далі розглядатимемо особливі випадки гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (5.98) і (5.99). Спочатку дослідимо збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1}, \tag{5.122}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, і відповідно багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)}}{z_{i_k}}, \tag{5.123}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Нехай

$$Q_{i(n)}^{(n)}(\mathbf{z}) \equiv 1,\ i(n) \in \mathcal{I}_n,\ n \geq 1, \tag{5.124}$$

і

$$Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{r-1},i_r}} p_{i(r)} z_{i_{r-1}} z_{i_r}}{1}, \tag{5.125}$$

де $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$. Тоді $n$-ий підхідний дріб багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) запишемо у вигляді

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)} z_{i_1}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \ n \ge 1.$$

**Теорема 5.27.** *Нехай коефіцієнти $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)})}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon, \tag{5.126}$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \le \frac{1-\varepsilon}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 2, \tag{5.127}$$

*де $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \le k \le N$, — додатні числа, $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}_0}$ — послідовність дійсних чисел таких, що*

$$g_0 \ge 0 \text{ і } 0 \le g_{i(k)} \le 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 1. \tag{5.128}$$

*Тоді*

1) *для всіх $\mathbf{z}$ із множини*

$$P_{l(N),\varepsilon} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} \le 2, \ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \le k \le N \right\} \tag{5.129}$$

*послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігаються відповідно до скінченних значень $g(\mathbf{z})$ і $h(\mathbf{z})$, при цьому збігаються рівномірно на*

*кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$, $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$*;*

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon}$ *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( \max_{i(k)\in\mathcal{I}_k} |p_{i(k)}| \Big)^{-1} \tag{5.130}$$

*розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$.

**Доведення.** Покладемо $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, $1 \le k \le N$, і виберемо

$$r_0 = g_0 \text{ і } r_{i(k)} = g_{i(k)} \cos(\varphi_{i_k}) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 1. \tag{5.131}$$

Нехай $\mathbf{z}$ — довільна фіксована точка із $P_{l(N),\varepsilon}$. Тоді із нерівності (5.126) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)} z_{i_1}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)} z_{i_1} e^{-i\varphi_{i_1}})}{|z_{i_1}| l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon,$$

а із (5.127) для довільного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, отримуємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k} e^{-i(\varphi_{i_{k-1}} + \varphi_{i_k})})}{|z_{i_{k-1}}| |z_{i_k}| l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \le \frac{1-\varepsilon}{2}$$

або

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)} z_{i_1}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)} z_{i_1} e^{-i\varphi_{i_1}})}{\dfrac{|z_{i_1}| l_{i_1}}{\cos(\varphi_{i_1})} r_0 (\cos(\varphi_{i_1}) - r_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon \tag{5.132}$$

і відповідно

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k} e^{-i(\varphi_{i_{k-1}} + \varphi_{i_k})})}{\dfrac{|z_{i_k}| |z_{i_{k-1}}| l_{i_{k-1}} l_{i_k}}{\cos(\varphi_{i_{k-1}}) \cos(\varphi_{i_k})} r_{i(k-1)} (\cos(\varphi_{i_k}) - r_{i(k)})} \le \frac{1-\varepsilon}{2}. \tag{5.133}$$

Із співвідношень (5.129) і (5.131) випливає, що

$$|z_k|l_k \leq 2\cos(\varphi_k),\ 1 \leq k \leq N. \tag{5.134}$$

Томі із нерівності (5.132) отримуємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}z_{i_1}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)}z_{i_1}e^{-i\varphi_{i_1}})}{r_0(\cos(\varphi_{i_1}) - r_{i(1)})} \leq 2(1-\varepsilon) \tag{5.135}$$

а із нерівності (5.133) маємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}e^{-i(\varphi_{i_{k-1}}+\varphi_{i_k})})}{r_{i(k-1)}(\cos(\varphi_{i_k}) - r_{i(k)})} \leq$$

$$\leq 2(1-\varepsilon) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.136}$$

Крім цього, із нерівностей (5.128) випливає, що

$$0 \leq r_{i(k)} \leq (1-\varepsilon)\cos(\varphi_{i_k}) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.137}$$

Таким чином, елементи багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) задовольняють умови теореми 1.18, де $\varphi_0 = 0$, коли $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon}$. Згідно з твердженням 2) цієї теореми послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon}$. Крім цього, із твердження 1) теореми 1.18 випливає, що для кожного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ значення скінченних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, (див. (5.124) і (5.125)) є скінченні й розміщені у півплощині

$$V_{i(1)}(\varphi_{i_1}, r_{i(1)}) = \left\{\varpi :\ \mathrm{Re}\,(\varpi e^{-i\varphi_{i_1}}) \geq \cos(\varphi_{i_1}) - r_{i(1)}\right\}. \tag{5.138}$$

Звідси та із нерівностей (5.137) випливає, що $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $z \in \mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$ і для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$, $n \geq 1$. Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$.

Нехай

$$P_{l(N),\varepsilon,\sigma} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \frac{l_k|z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < \frac{2}{1+\sigma}, \ |\arg(z_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \le k \le N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$, і нехай

$$P = \max_{1 \le i_1 \le N} |p_{i(1)}|. \tag{5.139}$$

Тоді, використовуючи нерівності (5.129) і (5.138), для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon,\sigma}$, $P_{l(N),\varepsilon,\sigma} \subseteq \mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\left(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_1}}\right)} < \sum_{i_1=1}^{N} \frac{2P\cos(\varphi_{i_1})}{(1+\sigma)l_{i_1}(\cos(\varphi_{i_1}) - r_{i(1)})} \le$$
$$\le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{2P}{(1+\sigma)l_{i_1}(1-g_{i(1)})} \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{2P}{\varepsilon}(1+\sigma)l_{i_1} = C(P_{l(N),\varepsilon,\sigma}),$$

де $C(P_{l(N),\varepsilon,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $P_{l(N),\varepsilon,\sigma}$. Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена в $P_{l(N),\varepsilon,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$. Покриємо $K$ областями вигляду $P_{l(N),\varepsilon,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),\varepsilon,\sigma_r}$, $1 \le r \le m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1 \le r \le m} C(P_{l(N),\varepsilon,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \le C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$. Тому, на підставі теореми 1.19 послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$ до голоморфних функцій багатьох змінних в цій області. Таким чином, доведено твердження 1) цієї теореми. Твердження 2) безпосередньо випливає із твердження 3) теореми 1.18. ■

Подібно до наслідку 5.3 із теореми 5.27 отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.6.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}| - \mathrm{Re}\,(c_{i(1)})}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \leq 1 - \varepsilon,$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2,$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128). *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$R_{l(N),\varepsilon} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \mathrm{Re}\,(z_k) \geq \frac{l_k}{2},\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N \right\}$$

*послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$, $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$*;*

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in P_{l(N),\varepsilon}$ *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( \max_{i(k)\in\mathcal{I}_k} |c_{i(k)}| \Big)^{-1} \tag{5.140}$$

*розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$.

Застосуванням теореми 5.27 є наступний результат:

**Теорема 5.28.** *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *задовольняють нерівності*

$$p_{i(1)} > 0 \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1 \text{ і } (-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} > 0 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2.$$

*Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області*

$$P_\varepsilon = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \le k \le N \right\}, \tag{5.141}$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_\varepsilon$*;*

2) *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* (5.141), *якщо ряд* (5.130) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_\varepsilon$.

**Доведення.** Якщо $g_0 = 1/2$, $g_{i(k)} = 1/2$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, $p_{i(1)} > 0$ для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, то, очевидно, що нерівності (5.126) і (5.125) виконуються для всіх $l_k > 0$, $1 \le k \le N$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_\varepsilon$. Тоді виконуються включення $K \subseteq \mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon}) \subseteq P_\varepsilon$ для деяких досить малих $l_1, l_2, \ldots, l_N$ для яких множина $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),\varepsilon})$ є внутрішність множини (5.129). Таким чином, ця теорема є безпосереднім наслідком теореми 5.27. ■

Із теореми 5.28 отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.7.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *задовольняють нерівності*

$$c_{i(1)} > 0 \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1 \text{ і } (-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)} > 0 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 2.$$

*Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області* (5.141), *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_\varepsilon$*;*

2) *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області* (5.141), *якщо ряд* (5.140) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $P_\varepsilon$.

Тепер доведемо наступну теорему:

**Теорема 5.29.** *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *задовольняють нерівності*

$$\frac{|p_{i(1)}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)})}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \leq 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1, \tag{5.142}$$

$$\frac{|p_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \tag{5.143}$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128). *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$D_{l(N),\varepsilon} = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k |z_k|}{\cos(\arg(z_k))} \leq 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N\Big\} \tag{5.144}$$

*послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$, $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$;

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in D_{l(N),\varepsilon}$ *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.122) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд* (5.130) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$.

**Доведення.** Позначимо $z_k = |z_k|e^{i\varphi_k}$, $1 \le k \le N$, і виберемо $r_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 0$, так само, як і в (5.131). Тоді із нерівностей (5.142) і (5.144) випливає, що

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}z_{i_1}| - \mathrm{Re}\,(p_{i(1)}z_{i_1}e^{-i\varphi_{i_1}})}{g_0(1-g_{i(1)})\cos(\varphi_{i_1})} \le 2(1-\varepsilon)$$

або те саме, що (5.135). Крім цього, із нерівностей (5.143) і (5.144) для довільного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, отримуємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}e^{-i(\varphi_{i_{k-1}}+\varphi_{i_k})})}{|z_{i_{k-1}}|l_{i_{k-1}}g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})\cos(\varphi_{i_k})} \le 1-\varepsilon$$

або

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{i(k)}z_{i_{k-1}}z_{i_k}e^{-i(\varphi_{i_{k-1}}+\varphi_{i_k})})}{|z_{i_{k-1}}|l_{i_{k-1}}\dfrac{r_{i(k-1)}}{\cos(\varphi_{i_{k-1}})}(\cos(\varphi_{i_k}) - r_{i(k)})} \le 1-\varepsilon. \quad (5.145)$$

Далі, із позначень (5.131) і співвідношень (5.144) випливає, що виконується нерівність (5.134). Враховуючи (5.134), із нерівності (5.145) випливає (5.136). Крім цього, із нерівності (5.128) випливає, що також виконується нерівність (5.137).

Таким чином, елементи багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) задовольняють умови теореми 1.18, де $\varphi_{i(0)} = 0$, коли $\mathbf{z} \in D_{l(N),\varepsilon}$. Згідно з твердженням 2) цієї теореми послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in D_{l(N),\varepsilon}$. Крім цього, із твердження 1) теореми 1.18 випливає, що для кожного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ значення скінченних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, (див. (5.124) і (5.125)) є скінченні й розміщені у півплощині (5.138). Звідси та із нерівності (5.137) випливає, що $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \ne 0$ для всіх $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$ і для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $n \ge 1$. Таким чином, підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$.

Нехай

$$D_{l(N),\varepsilon,\sigma} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k|z_k|}{\cos(\arg(z_k))} < 2\sigma,\ |\arg(z_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \le k \le N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Тоді, використовуючи співвідношення (5.127), (5.131) і (5.138), для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in D_{l(N),\varepsilon,\sigma}$, $D_{l(N),\varepsilon,\sigma} \subseteq \mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$, отримаємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|p_{i(1)}||z_{i_1}|}{\mathrm{Re}\,(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i_1}})} \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{P|z_{i_1}|}{\cos(\varphi_{i_1}) - r_{i(1)}} \le \frac{2\sigma P}{\varepsilon l} = C(D_{l(N),\varepsilon,\sigma}),$$

де $P$ означене в (5.139), $l = \min\{l_1, l_2, \ldots, l_N\}$, $C(D_{l(N),\varepsilon,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $D_{l(N),\varepsilon,\sigma}$. Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є рівномірно обмежена в $D_{l(N),\varepsilon,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$. Покриємо $K$ областями вигляду $D_{l(N),\varepsilon,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $D_{l(N),\varepsilon,\sigma_r}$, $1 \le r \le m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1 \le r \le m} C(D_{l(N),\varepsilon,\sigma_r}).$$

Тоді для $n \ge 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in K$ отримаємо $|f_n(\mathbf{z})| \le C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$. Тому, на підставі теореми 1.19 послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.122) збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$ до голоморфних функцій багатьох змінних в цій області. Таким чином, доведено твердження 1) цієї теореми. Твердження 2) безпосередньо випливає із твердження 3) теореми 1.18. ■

Подібно до наслідку 5.5 із теореми 5.29 отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.8.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *задовольняють не-*

*рівності*

$$\frac{|c_{i(1)}| - \mathrm{Re}\,(c_{i(1)})}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

$$\frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}\,((-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} c_{i(k)})}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \le \frac{1-\varepsilon}{2} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 2,$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \le k \le N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128). *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$G_{l(N),\varepsilon} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(z_k)} \le 2,\ |\arg(z_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \le k \le N \right\}$$

*послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$, $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$*;*

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in D_{l(N),\varepsilon}$ *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.123) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд* (5.140) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),\varepsilon})$.

Наостанок у цьому підрозділі дослідимо збіжність багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)} + z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-c_{i(k)}^2}{d_{i(k)} + z_{i_k}}, \tag{5.146}$$

де $c_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)}^2 z_{i_1}}{1 + q_{i(1)} z_{i_1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-p_{i(k)}^2 z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1 + q_{i(k)} z_{i_k}}, \tag{5.147}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q_{i(k)} \in \mathbb{C}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$.

**Теорема 5.30.** *Нехай коефіцієнти* $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(1)}))^2}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \leq 1 - \varepsilon, \tag{5.148}$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(k)}))^2}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \leq 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 2, \tag{5.149}$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \leq k \leq N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128), *а коефіцієнти* $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *такі, що*

$$\mathrm{Re}\,(d_{i(k)}) = 0,\ \mathrm{Im}\,(d_{i(k)}) \geq 0 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1. \tag{5.150}$$

*Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$P_{l(N),d,\varepsilon} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} :\ \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(d - iz_k)} \leq 1,\ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N \right\}, \tag{5.151}$$

*де*

$$d = \inf_{i(k) \in \mathcal{I}_k,\, k \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\,(d_{i(k)}), \tag{5.152}$$

*послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$;

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \max_{i(k) \in \mathcal{I}_k} |c_{i(k)}^2| \right)^{-1} \tag{5.153}$$

*розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

**Доведення.** Еквівалентним перетворенням

$$\rho_{i(k)} = \frac{1}{d_{i(k)} + z_{i_k}} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.154}$$

багатовимірний $J$-дріб з нерівнозначними змінними (5.146) зведемо до вигляду

$$i\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\dfrac{ic_{i(1)}^2}{d_{i(1)} + z_{i_1}}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\dfrac{-c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}}{1} \tag{5.155}$$

Покладемо

$$\frac{i}{d_{i(k)} + z_{i_k}} = \frac{e^{i\varphi_{i(k)}}}{|d_{i(k)} + z_{i_k}|} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.156}$$

і виберемо

$$p_0 = g_0,\ p_{i(k)} = g_{i(k)} \cos(\varphi_{i(k)}) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \geq 1, \tag{5.157}$$

Тоді із нерівності (5.148) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|\dfrac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)} + z_{i_1}}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{ic_{i(1)}^2 e^{-i\varphi_{i(1)}}}{d_{i(1)} + z_{i_1}}\right)}{\dfrac{l_{i_1}}{|d_{i(1)} + z_{i_1}|} g_0(1 - g_{i(1)})} \leq 2(1-\varepsilon),$$

а із нерівності (5.149) для довільного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$, отримаємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left|\dfrac{c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{-c_{i(k)}^2 e^{-i(\varphi_{i(k-1)} + \varphi_{i(k)})}}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}\right)}{\dfrac{l_{i_{k-1}} l_{i_k}}{|d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}}||d_{i(k)} + z_{i_k}|} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})} \leq$$
$$\leq 2(1-\varepsilon),$$

або

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|\dfrac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)}+z_{i_1}}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{ic_{i(1)}^2 e^{-i\varphi_{i(1)}}}{d_{i(1)}+z_{i_1}}\right)}{\dfrac{l_{i_1}}{|d_{i(1)}+z_{i_1}|}p_0\left(1-\dfrac{p_{i(1)}}{\cos(\varphi_{i(1)})}\right)} \le 2(1-\varepsilon), \tag{5.158}$$

і відповідно

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left|\dfrac{c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)}+z_{i_{k-1}})(d_{i(k)}+z_{i_k})}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{-c_{i(k)}^2 e^{-i(\varphi_{i(k-1)}+\varphi_{i(k)})}}{(d_{i(k-1)}+z_{i_{k-1}})(d_{i(k)}+z_{i_k})}\right)}{\dfrac{l_{i_{k-1}}l_{i_k}}{|d_{i(k-1)}+z_{i_{k-1}}||d_{i(k)}+z_{i_k}|}\dfrac{p_{i(k-1)}}{\cos(\varphi_{i(k-1)})}\left(1-\dfrac{p_{i(k)}}{\cos(\varphi_{i(k)})}\right)} \le$$
$$\le 2(1-\varepsilon). \tag{5.159}$$

Із нерівностей (5.128) випливає, що

$$0 \le p_{i(k)} \le (1-\varepsilon)\cos\varphi_{i(k)} \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 1. \tag{5.160}$$

Тому для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ і для довільного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, отримуємо

$$\frac{l_{i_k}}{|d_{i(k)}+z_{i_k}|} = \frac{l_{i_k}}{|\mathrm{Im}\,(d_{i(k)}) - iz_{i_k}|} \le \frac{l_{i_k}}{|d-iz_{i_k}|} \le$$
$$\le \cos(\arg(d-iz_{i_k})) \le \cos(\varphi_{i(k)}). \tag{5.161}$$

На підставі (5.160) і (5.161), нерівності (5.158) і (5.159) запишемо відповідно у вигляді

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|\dfrac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)}+z_{i_1}}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{ic_{i(1)}^2 e^{-i\varphi_{i(1)}}}{d_{i(1)}+z_{i_1}}\right)}{p_0(\cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(1)})} \le 2(1-\varepsilon), \tag{5.162}$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left|\dfrac{c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)}+z_{i_{k-1}})(d_{i(k)}+z_{i_k})}\right| - \mathrm{Re}\left(\dfrac{-c_{i(k)}^2 e^{-i(\varphi_{i(k-1)}+\varphi_{i(k)})}}{(d_{i(k-1)}+z_{i_{k-1}})(d_{i(k)}+z_{i_k})}\right)}{p_{i(k-1)}(\cos(\varphi_{i(k)}) - p_{i(k)})} \le$$
$$\le 2(1-\varepsilon) \text{ для всіх } \ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k \ge 2. \tag{5.163}$$

Отже, елементи багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.155) задовольняють умови теореми 1.18, де $\varphi_0 = 0$, коли $\mathbf{z} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$.

Із твердження 2) теореми 1.18 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.155), а отже, і багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.146) (на підставі означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1 на с. 68) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in P_{l(N),d,\varepsilon}$ і, крім цього, із твердження 1) цієї теореми заключаємо, що для кожного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ значення скінченних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

$$Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\dfrac{-c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}}{1}, \ n \geq 2, \tag{5.164}$$

є скінченні й розміщені у півплощині

$$V_{i(1)}(\varphi_{i(1)}, p_{i(1)}) = \{w : \ \mathrm{Re}(we^{-i\varphi_{i(1)}}) \geq \cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(1)}\}, \tag{5.165}$$

Звідси та із нерівностей (5.160) випливає, що $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $\mathbf{z} \in \mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$ і для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $n \geq 1$, при цьому $Q_{i(1)}^{(1)}(\mathbf{z}) \equiv 1$. Зрозуміло, що підхідні дроби

$$f_n(\mathbf{z}) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\dfrac{-c_{i(1)}^2}{d_{i(1)} + z_{i_1}}}{Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})}, \quad n \geq 1, \tag{5.166}$$

гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.155) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$.

Нехай

$$P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma} = \left\{ \mathbf{z} : \ \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(d - iz_k)} < \sigma, \ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$, і нехай

$$C = \max_{1 \leq i_1 \leq N} |c_{i(1)}^2|. \tag{5.167}$$

Оскільки

$$|\varphi_{i(1)}| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)} \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

то із нерівностей (5.160) і (5.165) для $n \geq 1$ і для довільного $\mathbf{z} \in P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$, $P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma} \subseteq \mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$, маємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|\dfrac{c_{i(1)}^2}{\mathrm{Im}\,(d_{i(1)}) - iz_{i_1}}\right|}{\mathrm{Re}\,(Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi_{i(1)}})} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{C}{(\cos(\varphi_{i(1)}) - p_{i(k)})|d - iz_{i_1}|} \leq$$

$$\leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{C}{\varepsilon\cos(\arg(d - iz_{i_1}))|d - iz_{i_1}|} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\sigma C}{\varepsilon l_{i_1}} = C(P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}),$$

де стала $C(P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma})$ залежить лише від області $P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$. Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в області $P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$. Покриємо $K$ областями вигляду $P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$, і покладемо

$$C(K) = \max_{1\leq r\leq m} C(P_{l(N),d,\varepsilon,\sigma_r}).$$

Тоді для довільного $\mathbf{z} \in K$ і для $n \geq 1$ маємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$. Тому, згідно з теоремою 1.19 послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.155), а отже, і багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.146) (на підставі означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1 на с. 68) збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$ до голоморфних функцій багатьох змінних в цій області. Тим самим, доведено твердження 1) цієї теореми. Нарешті, твердження 2) отримуємо із твердження 3) теореми 1.18. ■

Збіжність багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними (5.147) дослідимо за допомогою еквівалентного багатовимірного $J$-

дробу з нерівнозначними змінними

$$-\sum_{i_1=1}^{N}\frac{p_{i(1)}^2}{q_{i(1)}+\xi_{i_1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{-p_{i(k)}^2}{q_{i(k)}+\xi_{i_k}},$$

де $\xi_k=1/z_k$, $1\le k\le N$. Нехай коефіцієнти $p_{i(k)}$, $q_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, цього багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними задовольняють умови теореми 5.30. Тоді множину (5.151) запишемо у вигляді

$$P_{l(N),q,\varepsilon}=$$
$$=\left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^N:\ \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(q-i\xi_k)}\le 1,\ |\arg(q-i\xi_k)|<\frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1\le k\le N\right\},$$

де $0<\varepsilon<1$,

$$q=\inf_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\in\mathbb{N}}\mathrm{Im}\,(q_{i(k)}). \tag{5.168}$$

Отже, як наслідок із теореми 5.30 отримуємо такий результат:

**Наслідок 5.9.** *Нехай коефіцієнти $p_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_1=1}^{N}\frac{(\mathrm{Im}\,(p_{i(1)}))^2}{l_{i_1}g_0(1-g_{i(1)})}\le 1-\varepsilon,$$

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{(\mathrm{Im}\,(p_{i(k)}))^2}{l_{i_{k-1}}l_{i_k}g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})}\le 1-\varepsilon \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 2,$$

*де $0<\varepsilon<1$, $l_k$, $1\le k\le N$, — додатні числа, $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128), *а коефіцієнти $q_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, такі, що*

$$\mathrm{Re}\,(q_{i(k)})=0,\ \mathrm{Im}\,(q_{i(k)})\ge 0 \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 1. \tag{5.169}$$

*Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$P_{l(N),q,\varepsilon}=$$
$$=\left\{z\in\mathbb{C}^N:\ \mathrm{Re}\left(q-\frac{i}{z_k}\right)\ge l_k,\ \left|\arg\left(q-\frac{i}{z_k}\right)\right|<\frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1\le k\le N\right\},$$

*де $q$ означене в* (5.168), *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігаються відповідно до скінченних значень $g(\mathbf{z})$ і $h(\mathbf{z})$, при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),q,\varepsilon})$, *а $g(\mathbf{z})$ і $h(\mathbf{z})$ — голоморфні функції багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),q,\varepsilon})$*;*

2) *для кожного $\mathbf{z} \in P_{l(N),q,\varepsilon}$ багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігається до скінченного значення $f(\mathbf{z})$, якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \max_{i(k)\in\mathcal{I}_k} |p_{i(k)}^2| \right)^{-1} \tag{5.170}$$

*розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),q,\varepsilon})$, *а $f(\mathbf{z})$ — голоморфна функція багатьох змінних в* $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),q,\varepsilon})$.

Застосуванням теореми 5.30 є такий результат:

**Теорема 5.31.** *Нехай коефіцієнти $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *такі, що виконуються співвідношення* (5.150), *а $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$. Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області*

$$P_{d,\varepsilon} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \leq k \leq N \right\},$$

*де $0 < \varepsilon < 1$, $d$ означене в* (5.152), *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{d,\varepsilon}$;*

2) *багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області $P_{d,\varepsilon}$, якщо ряд* (5.153) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{d,\varepsilon}$.*

**Доведення.** Якщо всі $c_{i(k)} > 0$, то нерівності (5.148) і (5.149) виконуються для кожного $l_k > 0$, $1 \le k \le N$. Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $P_{d,\varepsilon}$. Тоді правильні такі включення: $K \subseteq \mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon}) \subseteq P_{d,\varepsilon}$ для деяких досить малих $l_k$, $1 \le k \le N$, для яких $\mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$ є внутрішність множини (5.151). Тому ця теорема є наслідком теореми 5.30. ■

Із теореми 5.31 отримуємо такий наслідок:

**Наслідок 5.10.** *Нехай коефіцієнти $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *такі, що виконуються співвідношення* (5.169), *а $p_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$. Тоді*

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігаються до функцій багатьох змінних, голоморфних в області*

$$P_{q,\varepsilon} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \left| \arg\left( q - \frac{i}{z_k} \right) \right| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}, \ 1 \le k \le N \right\},$$

*де $0 < \varepsilon < 1$, $q$ означене в* (5.168), *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{q,\varepsilon}$;*

2) *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігається до функції багатьох змінних, голоморфної в області $P_{q,\varepsilon}$, якщо ряд* (5.170) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області $P_{q,\varepsilon}$.*

Правильна така теорема:

**Теорема 5.32.** *Нехай коефіцієнти $c_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *задовольняють нерівності*

$$\frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(1)}))^2}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \le 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1, \tag{5.171}$$

$$\frac{(\mathrm{Im}\,(c_{i(k)}))^2}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)} (1 - g_{i(k)})} \le 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{I}_k, \ k \ge 2, \tag{5.172}$$

*де* $0 < \varepsilon < 1$, $l_k$, $1 \le k \le N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128), *а* $d_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, *такі, що виконуються співвідношення* (5.150). *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$D_{l(N),d,\varepsilon} = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\operatorname{Re}(d - iz_k)} \le 1,\ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \le k \le N\Big\}, \tag{5.173}$$

*де* $d$ *означене в* (5.152), *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного* $J$*-дробу з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(D_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(D_{l(N),d,\varepsilon})$*;*

2) *для кожного* $\mathbf{z} \in \operatorname{Int}(D_{l(N),d,\varepsilon})$ *багатовимірний* $J$*-дріб з нерівнозначними змінними* (5.146) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд* (5.153) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(D_{l(N),d,\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(D_{l(N),d,\varepsilon})$.

**Доведення.** Так само, як і в доведенні теореми 5.30, багатовимірний $J$-дріб з нерівнозначними змінними (5.146) еквівалентним перетворенням (5.154) зведемо до вигляду (5.155). Нехай також виконуються співвідношення (5.156) і (5.157). Тоді із нерівностей (5.171) і (5.173) маємо

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|\dfrac{c_{i(1)}^2}{d_{i(1)} + z_{i_1}}\right| - \operatorname{Re}\left(\dfrac{ic_{i(1)}^2 e^{-i\varphi_{i(1)}}}{d_{i(1)} + z_{i_1}}\right)}{g_0(1 - g_{i(1)})\cos(\varphi_{i(1)})} \le 2(1-\varepsilon),$$

звідки безпосередньо отримуємо (5.162). Із нерівностей (5.172) і (5.173) для довільного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 2$, маємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left|\dfrac{c_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}\right| - \operatorname{Re}\left(\dfrac{-c_{i(k)}^2 e^{-i\varphi_{i(k)}}}{(d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(d_{i(k)} + z_{i_k})}\right)}{\dfrac{l_{i_{k-1}}}{|d_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}}|} g_{i(k-1)}(1 - g_{i(k)})\cos(\varphi_{i(k)})} \le$$

$$\leq 2(1-\varepsilon). \tag{5.174}$$

Очевидно, що із (5.128) випливає нерівність (5.160). Тому для кожного $\mathbf{z} \in D_{l(N),d,\delta}$ і для кожного $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, виконуються нерівності (5.161). Тоді, застосовуючи (5.161) до нерівності (5.174), отримуємо (5.163).

Таким чином, елементи багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.155) задовольняють умови теореми 1.18, де $\varphi_{i(0)} = 0$, коли $\mathbf{z} \in D_{l(N),d,\varepsilon}$.

Згідно з твердженням 2) теореми 1.18 послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу (5.155), а отже, і багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.146) (на підставі означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in D_{l(N),d,\delta}$ і, крім цього, із твердження 1) цієї теореми заключаємо, що для кожного $i(1) \in \mathcal{I}_1$ значення скінченних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $n \geq 2$, (див. (5.164)) скінченні й розміщені у півплощинах (5.165). Звідси та із нерівностей (5.160) випливає, що $Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) \neq 0$ для всіх $\mathbf{z} \in \mathrm{Int}\,(P_{l(N),d,\varepsilon})$ і для всіх $i(1) \in \mathcal{I}_1$ і $n \geq 1$, при цьому $Q_{i(1)}^{(1)}(\mathbf{z}) \equiv 1$. Зрозуміло, що підхідні дроби $f_n(\mathbf{z})$, $n \geq 1$, (див. (5.166)) багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.146) формують послідовність функцій багатьох змінних, голоморфних в області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),d,\varepsilon})$.

Нехай

$$D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma} =$$
$$= \left\{ \mathbf{z} : \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{\mathrm{Re}\,(d - iz_k)} < \sigma,\ |\arg(d - iz_k)| < \frac{\sigma\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1 \leq k \leq N \right\},$$

де $0 < \sigma < 1$. Оскільки

$$|\varphi_{i(1)}| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)} \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

то, використовуючи нерівності (5.160) і (5.165), для $n \geq 1$ і для довільного

$\mathbf{z} \in D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$, $D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma} \subseteq \mathrm{Int}\,(D_{l(N),d,\varepsilon})$ маємо

$$|f_n(\mathbf{z})| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}^2|}{|\mathrm{Im}\,(d_{i(1)}) - iz_{i_1}|} \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{C}{|d - iz_{i_1}|} \leq \frac{\sigma C}{\varepsilon l} =$$
$$= M(D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}),$$

де $C$ означене в (5.167), $M(D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma})$ — стала, яка залежить лише від області $D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$. Це означає, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена в $D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$.

Нехай $K$ — довільна компактна підмножина області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),d,\varepsilon})$. Покриємо $K$ областями вигляду $D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma}$. Із цього покриття виберемо скінченне підпокриття $D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma_r}$, $1 \leq r \leq m$. Нехай

$$C(K) = \max_{1 \leq r \leq m} C(D_{l(N),d,\varepsilon,\sigma_r}).$$

Тоді для довільного $\mathbf{z} \in K$ і для $n \geq 1$ маємо $|f_n(\mathbf{z})| \leq C(K)$, тобто послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),d,\varepsilon})$. Тому, згідно з теоремою 1.19 послідовності парних і непарних підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (5.155), а отже, і багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними (5.146) (на підставі означення еквівалентності двох гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і твердження 1.1) збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathrm{Int}\,(D_{l(N),d,\varepsilon})$ до голоморфних функцій багатьох змінних в цій області. Тим самим, доведено твердження 1) цієї теореми. Нарешті, твердження 2) отримуємо із твердження 3) теореми 1.18. ■

Із теореми 5.32 отримуємо такий наслідок:

**Наслідок 5.11.** *Нехай коефіцієнти* $p_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, *багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *задовольняють нерівності*

$$\frac{(\mathrm{Im}\,(p_{i(1)}))^2}{l_{i_1} g_0 (1 - g_{i(1)})} \leq 1 - \varepsilon \text{ для всіх } i(1) \in \mathcal{I}_1,$$

$$\frac{(\operatorname{Im}(p_{i(k)}))^2}{l_{i_{k-1}} l_{i_k} g_{i(k-1)}(1-g_{i(k)})} \le 1-\varepsilon \text{ для всіх } i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k\ge 2,$$

*де* $0<\varepsilon<1$, $l_k$, $1\le k\le N$, *— додатні числа,* $\{g_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}_k,\, k\in\mathbb{N}_0}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що виконуються нерівності* (5.128), *а* $q_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k\ge 1$, *такі, що виконуються співвідношення* (5.169). *Тоді*

1) *для всіх* $\mathbf{z}$ *із множини*

$$D_{l(N),q,\varepsilon} = \Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N}\frac{l_k}{\operatorname{Re}(q-i/z_k)}\le 1,\ \left|\arg\left(q-\frac{i}{z_k}\right)\right| < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)},\ 1\le k\le N\Big\},$$

*де* $q$ *означене в* (5.168), *послідовності парних і непарних підхідних дробів багатовимірного приєднаного дробу з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігаються відповідно до скінченних значень* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$, *при цьому збігаються рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(D_{l(N),q,\varepsilon})$, *а* $g(\mathbf{z})$ *і* $h(\mathbf{z})$ *— голоморфні функції багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(D_{l(N),q,\varepsilon})$;

2) *для кожного* $\mathbf{z}\in\operatorname{Int}(D_{l(N),q,\varepsilon})$ *багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними* (5.147) *збігається до скінченного значення* $f(\mathbf{z})$, *якщо ряд* (5.170) *розбігається, при цьому збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області* $\operatorname{Int}(D_{l(N),q,\varepsilon})$, *а* $f(\mathbf{z})$ *— голоморфна функція багатьох змінних в* $\operatorname{Int}(D_{l(N),q,\varepsilon})$.

**Висновки до розділу 5.** Цей розділ присвячено дослідженню збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Розглянуто підходи, у яких для встановлення ознак збіжності використовується теорема про продовження збіжності із уже відомої малої області до більшої. Крім цього, розглянуто підхід, у якому для знаходження оцінок швидкості збіжності функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними використовується парна частина іншого функціонального гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними.

У результаті досліджень встановлено ознаки збіжності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними. Як наслідок із цих результатів встановлено ознаки збіжності для $S$-дробу. Крім цього, отримано оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$. Показано, що багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними є парною частиною багатовимірного $\pi$-дробу з нерівнозначними змінними. На основі цього досліджено області збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$. Встановлено ознаки збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для тісно пов'язаних з ними багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними.

Відмітимо, що збіжність багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними досліджується вперше.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в таких працях: [32, 47, 48, 53, 55, 56, 58, 91–93, 102, 104, 106, 110].

# РОЗДІЛ 6

# НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

У цьому розділі розглядається наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними за допомогою алгоритмів, побудованих в четвертому розділі цієї дисертації.

## 6.1. Експоненціальна функція

Експоненціальна функція трьох змінних

$$\exp(z_1 + z_2 + z_3) \tag{6.1}$$

зображується формальним потрійним степеневим рядом

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2 + z_3)^k}{k!}, \tag{6.2}$$

де $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$. Застосовуючи алгоритм із підрозділу 4.1, побудуємо розвинення формального потрійного степеневого ряду (6.2) у тривимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними.

Крок 1.1. Маємо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} + z_2 \left(1 + z_1 + \frac{z_2}{2} + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_2^2}{6} + \dots\right) +$$
$$+ z_3 \left(1 + z_1 + z_2 + \frac{z_3}{2} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2} + \frac{(z_1 + z_2) z_3}{2} + \frac{z_3^2}{6} + \dots\right).$$

Кроки 1.2 і 1.3. Із формул (4.11) і (4.12) отримуємо

$$b_{1,0,0} = b_{0,1,0} = b_{0,0,1} = 1,$$
$$b_{2k,0,0} = b_{0,2k,0} = b_{0,0,2k} = \frac{1}{2-4k},\ k \geq 1,$$
$$b_{2k+1,0,0} = b_{0,2k+1,0} = b_{0,0,2k+1} = \frac{1}{4k+2},\ k \geq 1.$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim K(z_1) + z_2\left(1 + z_1 + \frac{z_2}{2} + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_2^2}{6} + \dots\right) +$$
$$+ z_3\left(1 + z_1 + z_2 + \frac{z_3}{2} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2} + \frac{(z_1+z_2)z_3}{2} + \frac{z_3^2}{6} + \dots\right),$$

де

$$K(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z_1}{1},\ a_{2k} = \frac{1}{2-4k},\ a_{2k+1} = \frac{1}{2+4k},\ k \geq 1. \qquad (6.3)$$

Крок 1.4. Із рекурентної формули (4.6) знаходимо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim K(z_1) + \frac{z_2}{1 - z_1 - \frac{z_2}{2} + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{z_2^2}{12} + \dots} +$$
$$+ \frac{z_3}{1 - z_1 - z_2 - \frac{z_3}{2} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2} + \frac{(z_1+z_2)z_3}{2} + \frac{z_3^2}{12} + \dots}.$$

Крок 2.1. Маємо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim K(z_1) + \frac{z_2}{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} \frac{(-z_1)^{k_1}}{k_1!} - \frac{z_2}{2}\left(1 - z_1 - \frac{z_2}{6} + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1 z_2}{6} + \dots\right)} +$$
$$+ \frac{z_3}{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} \frac{(-z_1)^{k_1}}{k_1!} - z_2\left(1 - z_1 - \frac{z_2}{2} + \dots\right) - \frac{z_3}{2}\left(1 - z_1 - z_2 - \frac{z_3}{6} + \dots\right)}.$$

Кроки 2.2 і 2.3. Із формул (4.13) і (4.14) отримуємо

$$b_{1,1,0} = b_{1,0,1} = b_{0,1,1} = -1,$$
$$b_{2k,1,0} = b_{2k,0,1} = b_{0,2k,1} = -\frac{1}{2-4k},\ k \geq 1,$$
$$b_{2k+1,1,0} = b_{2k+1,0,1} = b_{0,2k+1,1} = -\frac{1}{2+4k},\ k \geq 1.$$

Таким чином,

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim K(z_1) + \frac{z_2}{K(-z_1) - \frac{z_2}{2}\left(1 - z_1 - \frac{z_2}{6} + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1 z_2}{6} + \ldots\right)} +$$
$$+ \frac{z_3}{K(-z_1) - z_2\left(1 - z_1 - \frac{z_2}{2} + \ldots\right) - \frac{z_3}{2}\left(1 - z_1 - z_2 - \frac{z_3}{6} + \ldots\right)}.$$

Крок 2.4. Із рекурентної формули (4.7) знаходимо

$$L_{\mathbf{0}}(\mathbf{z}) \sim K(z_1) + \frac{z_2}{K(-z_1) + \frac{-z_2/2}{1 + z_1 + \frac{z_2}{6} + \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1 z_2}{6} + \frac{z_2^3}{36} + \ldots}} +$$
$$+ \frac{z_3}{K(-z_1) + \frac{-z_2}{1 + z_1 + \frac{z_2}{2} + \ldots} + \frac{-z_3/2}{1 + z_1 + z_2 + \frac{z_3}{6} + \ldots}}.$$

Продовжуючи процес побудови, отримуємо тривимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$K(z_1) + \frac{z_2}{K(-z_1) + \frac{a_2 z_2}{K(z_1) + \ddots}} + \frac{z_3}{K(-z_1) + \frac{-z_2}{K(z_1) + \ddots} + \frac{a_2 z_3}{K(z_1) + \ddots}}, \quad (6.4)$$

де $K(z_1)$ і $a_k$, $k \geq 2$, визначаються за формулами (6.3), який згідно з теоремою 4.1 є відповідним до заданого формального потрійного степеневого ряду (6.2) в початку координат.

Результати обчислення відносних похибок наближення функції трьох змінних (6.1) 10-ми частинними сумами і 10-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$, $z_2$ і $z_3$ наведено у таблиці 6.1.

Такими ж міркуваннями, як і вище, для функції багатьох змінних

$$\exp(z_1 + z_2 + \ldots + z_N)$$

отримуємо відповідний багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1},$$

*Таблиця 6.1*

**Відносні похибки наближення функції** $\exp(z_1+z_2+z_3)$ **10-ми частинними сумами і 10-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2, z_3)$ | (6.1) | (6.2) | (6.4) |
|---|---|---|---|
| (-0.3,-0.1,-0.5) | $4.0657 \cdot 10^{-1}$ | $1.8 \cdot 10^{-8}$ | $2.51 \cdot 10^{-10}$ |
| (-0.1,-0.1,-0.1) | $7.4082 \cdot 10^{-1}$ | $5.83 \cdot 10^{-14}$ | $2.1 \cdot 10^{-15}$ |
| (0.3,0.4,0.2) | 2.4596 | $3.45 \cdot 10^{-9}$ | $3.61 \cdot 10^{-10}$ |
| (1.1,1.2,1.5) | $4.4701 \cdot 10^{1}$ | $1.93 \cdot 10^{-3}$ | $3.52 \cdot 10^{-5}$ |
| (1.5,1.3,1.1) | $4.9402 \cdot 10^{1}$ | $2.35 \cdot 10^{-3}$ | $4.13 \cdot 10^{-3}$ |
| (1.2,0,4.2) | $2.2141 \cdot 10^{2}$ | $2.25 \cdot 10^{-2}$ | $4.58 \cdot 10^{-4}$ |
| (3.1,3.1,3.1) | $1.0938 \cdot 10^{4}$ | $3.3 \cdot 10^{-1}$ | $8.9 \cdot 10^{-1}$ |

де

$$b_{e_{i(1)}} = 1,\ b_{2ne_{i(1)}} = \frac{1}{2-4n},\ b_{(2n+1)e_{i(1)}} = \frac{1}{2+4n}$$

для $i(1) \in \mathcal{I}_1$, $n \geq 1$, і

$$b_{e_{i(k+1)}} = (-1)^k,\ b_{e_{i(k)}+2ne_{i_{k+1}}} = \frac{(-1)^k}{2-4n},\ b_{e_{i(k)}+(2n+1)e_{i_{k+1}}} = \frac{(-1)^k}{2+4n}$$

для $2 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i_{k+1} \leq i_k - 1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$.

Зазначимо, що О. Є. Баран і Д. І. Боднаром у роботі [10] отримано розвинення функції $\exp(z_1+z_2)$ у відповідний двовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними таке саме, що й вище у випадку $N=2$.

## 6.2. Натуральний логарифм

У цьому підрозділі розглянемо наближення аналітичних функцій двох змінних, вирази яких містять натуральний логарифм, функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Функція двох змінних

$$\frac{\mathrm{Ln}\left(1+\dfrac{z_2}{z_1^2}\mathrm{Ln}^{\,2}(1+z_1)\right)}{\dfrac{z_2}{z_1}\mathrm{Ln}\,(1+z_1)} \tag{6.5}$$

зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k+1}\right)^{2l+1}\frac{(-z_2)^l}{l+1}. \tag{6.6}$$

Застосовуючи багатовимірний $g$-алгоритм Бауера, побудований в підрозділі 4.3, до формального подвійного степеневого ряду (6.6), отримуємо $g$-таблицю

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1/2 & & & & & & & \\
0 & & 1/3 & & & & & & \\
 & 2/3 & & 1/2 & & & & & \\
0 & & 1/4 & & 2/5 & & & & \\
 & 3/4 & & 3/5 & & 1/2 & & & \\
0 & & 1/5 & & 1/3 & & 3/7 & & \\
\vdots & 5/6 & \vdots & 4/5 & \vdots & 4/7 & \vdots & 1/2 & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}. \tag{6.7}$$

Тому згідно з теоремою 4.6 двовимірний $S$-діб з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1}+\sum_{i_1=1}^{2}\frac{g_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{e_{i(k)}}(1-\delta_{i_k,i_{k-1}}g_{e_{i(k-1)}})z_{i_k}}{1}, \tag{6.8}$$

де

$$g_{(2k-l)e_1+le_2}=g_{(2k-1)e_2}=\frac{1}{2},\ g_{2ke_1+le_2}=g_{2ke_2}=\frac{k}{1+2k},\ k\geq 1,\ l\geq 0,$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.6) в початку координат.

У таблиці 6.2 наведено результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.5) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$.

Тепер розглянемо функцію двох змінних

$$\frac{\mathrm{Ln}\left(1+\dfrac{4z_2}{z_1^2}\mathrm{Ln}^{\,2}\left(1+\dfrac{z_1}{2}\right)\right)}{\dfrac{2z_2}{z_1}\mathrm{Ln}\left(1+\dfrac{z_1}{2}\right)}, \tag{6.9}$$

*Таблиця 6.2*

**Відносні похибки наближення функції $(z_1/(z_2\mathrm{Ln}\,(1+z_1)))\mathrm{Ln}\,(1+(z_2/z_1^2)\mathrm{Ln}^{\,2}(1+z_1))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.5) | (6.6) | (6.8) |
|---|---|---|---|
| (-0.5,-0.5) | 4.6769 | $4.17 \cdot 10^{-1}$ | $1.87 \cdot 10^{-1}$ |
| (-0.3,0.3) | $9.9113 \cdot 10^{-1}$ | $9.73 \cdot 10^{-3}$ | $2.22 \cdot 10^{-6}$ |
| (0.2,-0.2) | $9.9697 \cdot 10^{-1}$ | $4.38 \cdot 10^{-4}$ | $5.61 \cdot 10^{-8}$ |
| (1,1) | $5.6604 \cdot 10^{-1}$ | 5.58 | $6.55 \cdot 10^{-4}$ |
| (4,4) | $2.9478 \cdot 10^{-1}$ | $3.88 \cdot 10^{4}$ | $2.3 \cdot 10^{-2}$ |
| (10,10) | $1.8944 \cdot 10^{-1}$ | $3.69 \cdot 10^{6}$ | $1.06 \cdot 10^{-1}$ |
| (50,50) | $6.8519 \cdot 10^{-2}$ | $3.39 \cdot 10^{10}$ | $8.14 \cdot 10^{-1}$ |

яка зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{2^k(k+1)}\right)^{2l+1}\frac{(-z_2)^l}{l+1}. \tag{6.10}$$

Застосовуючи багатовимірний $g$-алгоритм Бауера, побудований в підрозділі 4.3, до формального подвійного степеневого ряду (6.10) отримуємо $g$-таблицю (6.7) і таку $g$-таблицю

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1/4 & & & & & & & & & \\
0 & & 1/9 & & & & & & & & \\
 & 1/3 & & 3/16 & & & & & & & \\
0 & & 1/16 & & 8/65 & & & & & & \\
 & 3/8 & & 6/25 & & 13/76 & & & & & \\
0 & & 1/25 & & 5/57 & & 19/147 & & & & \\
\vdots & 2/5 & \vdots & 5/18 & \vdots & 19/91 & \vdots & 21/128 & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & &
\end{array}.$$

Таким чином, на підставі теореми 4.5 двовимірний $g$-діб з нерівнозначними

*Таблиця 6.3*

**Відносні похибки наближення функції $(z_1/(2z_2\mathrm{Ln}\,(1+z_1/2)))\mathrm{Ln}\,(1+(4z_2/z_1^2)\mathrm{Ln}^{\,2}(1+z_1/2))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.9) | (6.10) | (6.11) |
|---|---|---|---|
| (-0.01,-0.01) | 1.0076 | $4.39 \cdot 10^{-9}$ | $4.31 \cdot 10^{-13}$ |
| (0.5,-0.8) | 1.4205 | $1.64 \cdot 10^{-2}$ | $1.02 \cdot 10^{-3}$ |
| (-0.2,0.6) | $8.0747 \cdot 10^{-1}$ | $4.64 \cdot 10^{-3}$ | $4.14 \cdot 10^{-5}$ |
| (2,2) | $4.8576 \cdot 10^{-1}$ | $6.46 \cdot 10^{1}$ | $1.7 \cdot 10^{-3}$ |
| (5,0.7) | $4.6163 \cdot 10^{-1}$ | $8.92 \cdot 10^{1}$ | $5.5 \cdot 10^{-3}$ |
| (15,15) | $1.8646 \cdot 10^{-1}$ | $6.1 \cdot 10^{6}$ | $7.96 \cdot 10^{-2}$ |
| (30,30) | $1.2724 \cdot 10^{-1}$ | $2.95 \cdot 10^{8}$ | $2.04 \cdot 10^{-1}$ |

змінними

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{4}z_1}{1+\cfrac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)z_1}{1+\ddots}}+\cfrac{\frac{1}{2}z_2}{1+\cfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)z_1}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)z_2}{1+\ddots}}} \tag{6.11}$$

є відповідний до формального подвійного степеневого ряду (6.10) в початку координат.

Результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.9) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$ наведено у таблиці 6.3.

Далі розглянемо функцію двох змінних

$$1+\mathrm{Ln}\left(1+z_1+\frac{z_2(1+z_1)}{1+z_2\mathrm{Ln}\,(1+z_1)}\right), \tag{6.12}$$

яка зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k}-$$

$$-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-z_2)^l}{l}\left(\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k}\right)^l-\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{k}\right)^l\right). \tag{6.13}$$

Застосовуючи алгоритм, побудований в підрозділі 4.4, до формального подвійного степеневого ряду (6.13) отримуємо двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{2}\frac{p_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1+q_{e_{i(1)}}z_{i_1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{e_{i(k)}}z_{i_{k-1}}z_{i_k}}{1+q_{e_{i(k)}}z_{i_k}}, \tag{6.14}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,

$$p_{e_1+le_2}=p_{e_2}=1,\ q_{ke_1+le_2}=\frac{1}{2},\ k\geq 0,\ l\geq 0,\ k+l\geq 1,$$
$$p_{(k+2)e_1+le_2}=\frac{(k+1)^2}{4(2k+1)(2k+3)},\ k\geq 0,\ l\geq 0,$$
$$p_{(l+2)e_2}=\frac{(l+1)^2}{4(2l+1)(2l+3)},\ l\geq 0.$$

Тому згідно з теоремою 4.7 двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (6.14) є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.13) в початку координат.

У таблиці 6.4 наведено результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.12) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$.

## 6.3. Степенева функція або загальна біноміальна функція

Функція трьох змінних

$$\frac{(1+z_1)^{-\alpha}(1+z_2(1+z_1)^{2\alpha})^{-\beta}}{(1+z_3(1+z_1)^{2\alpha}(1+z_2(1+z_1)^{2\alpha})^{2\beta})^{\gamma}}, \tag{6.15}$$

де $\alpha\notin\mathbb{Z}$, $\beta\notin\mathbb{Z}$, $\gamma\notin\mathbb{Z}$, зображується формальним потрійним степеневим рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}(-z_1)^k\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2\alpha)_k}{k!}(-z_1)^k\right)^{2l}\frac{(\beta)_l}{l!}(-z_2)^l\times$$

*Таблиця 6.4*

**Відносні похибки наближення функції $1+\mathrm{Ln}\,(1+z_1+(z_2(1+z_1))/(1+z_2\mathrm{Ln}\,(1+z_1)))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.12) | (6.13) | (6.14) |
|---|---|---|---|
| (-0.1,-0.1) | $7.9044 \cdot 10^{-1}$ | $7.08 \cdot 10^{-5}$ | $2.81 \cdot 10^{-15}$ |
| (0.3,-0.2) | 1.0253 | $3.88 \cdot 10^{-4}$ | $2.93 \cdot 10^{-11}$ |
| (-0.4,0.4) | $8.9645 \cdot 10^{-1}$ | $1.45 \cdot 10^{-2}$ | $2.62 \cdot 10^{-8}$ |
| (1.5,1.5) | 2.4059 | 6.28 | $1.17 \cdot 10^{-6}$ |
| (4,0.4) | 2.8272 | $6.42 \cdot 10^{1}$ | $3.54 \cdot 10^{-5}$ |
| (15,15) | 4.0743 | $1.78 \cdot 10^{8}$ | $3.75 \cdot 10^{-3}$ |
| (30,30) | 4.6874 | $3.73 \cdot 10^{10}$ | $1.84 \cdot 10^{-2}$ |

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2\alpha)_k}{k!}(-z_1)^k\right)^{2l+1}\frac{(-2\beta)_l}{l!}(-z_2)^l\right)^{2r}\frac{(\gamma)_r}{r!}(-z_3)^r, \quad (6.16)$$

де

$$(a)_0 = 1,\ (a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1),\ a \in \mathbb{C},\ k \geq 1,$$

— символ Похгаммера. Застосовуючи алгоритм, побудований в підрозділі 4.1, до формального потрійного степеневого ряду (6.16), отримуємо тривимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{3}\frac{b_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{b_{e_{i(k)}}z_{i_k}}{1}, \quad (6.17)$$

де

$$b_{e_1+le_2+re_3} = -\alpha,\ b_{e_2+le_3} = -\beta,\ b_{e_3} = -\gamma,\ l \geq 0,\ r \geq 0,$$

$$b_{ke_1+le_2+re_3} = \frac{[k/2]([k/2]+(-1)^k\alpha)}{(k-1)k},\ k \geq 2,\ l \geq 0,\ r \geq 0,$$

$$b_{le_2+re_3} = \frac{[l/2]([l/2]+(-1)^l\beta)}{(l-1)l},\ l \geq 2,\ r \geq 0,$$

$$b_{re_3} = \frac{[r/2]([r/2]+(-1)^r\gamma)}{(r-1)r},\ r \geq 2,$$

*Таблиця 6.5*

**Відносні похибки наближення функції**
$(1+z_1)^{-\alpha}(1+z_2(1+z_1)^{2\alpha})^{-\beta}(1+z_3(1+z_1)^{2\alpha}(1+z_2(1+z_1)^{2\alpha})^{2\beta})^{-\gamma}$ **10-ми частинними сумами і 10-ми підхідними дробами для** $\alpha=\beta=\gamma=-1/2$.

| $(z_1, z_2, z_3)$ | (6.15) | (6.16) | (6.17) |
|---|---|---|---|
| (-0.1,-0.3,-0.2) | $6.3246 \cdot 10^{-1}$ | $9.79 \cdot 10^{-5}$ | $9.46 \cdot 10^{-10}$ |
| (0.2,-0.5,0.7) | 1.1832 | $2.1 \cdot 10^{-7}$ | $1.6 \cdot 10^{-9}$ |
| (0.5,0.2,0.4) | 1.4491 | $8.06 \cdot 10^{-3}$ | $1.14 \cdot 10^{-10}$ |
| (1.4,0.8,0.7) | 1.9748 | $1.41 \cdot 10^{2}$ | $2.32 \cdot 10^{-7}$ |
| (2,3,1) | 2.6458 | $1.77 \cdot 10^{5}$ | $4.05 \cdot 10^{-6}$ |
| (11,12,13) | 6.0828 | $5.4 \cdot 10^{12}$ | $4.65 \cdot 10^{-3}$ |
| (30,30,30) | 9.5394 | $3.35 \cdot 10^{16}$ | $4.58 \cdot 10^{-2}$ |

(тут квадратні дужки означають цілу частину числа). Таким чином, на підставі теореми 4.1 тривимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними (6.17) є відповідним до формального потрійного степеневого ряду (6.16) у початку координат.

Зазначимо, що при $\alpha=\beta=\gamma=-1/2$ функцію трьох змінних (6.15) запишемо у вигляді $(1+z_1+z_2+z_3)^{1/2}$. Результати обчислення відносних похибок наближення цієї функції трьох змінних 10-ми частинними сумами і 10-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$, $z_2$ і $z_3$ наведено у таблиці 6.5.

Застосовуючи алгоритм, побудований в підрозділі 4.1, до

$$(1+z_1+z_2+\ldots+z_N)^{1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1/2)_k}{k!}\Big(-\sum_{l=1}^{N}z_l\Big)^k$$

отримуємо відповідний багатовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{e_{i(k)}}z_{i_k}}{1},$$

де $c_{i(1)} = 1/2$, $i(1) \in \mathcal{I}_1$, $c_{i(k)} = 1/2^{1+\delta_{i_{k-1},i_k}}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \geq 2$.

### 6.4. Функція тангенс

Розглянемо функцію двох змінних

$$1 + \operatorname{tg}(z_1) + \operatorname{tg}\left(\frac{z_2}{1 + z_2 \operatorname{tg}(z_1)}\right), \tag{6.18}$$

яка зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_1^{2k-1} + \sum_{r=1}^{\infty} c_r \left( z_2 \sum_{l=0}^{\infty} \left( - z_2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_1^{2k-1} \right)^l \right)^{2r-1}, \tag{6.19}$$

де

$$c_n = \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!},\ n \geq 1,$$

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{n+1} B_{n-k},\ n \geq 1,\ B_0 = 1,$$

— числа Бернуллі. Застосовуючи алгоритм, побудований в підрозділі 4.4, до формального подвійного степеневого ряду (6.19), отримуємо двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$1 + \sum_{i_1=1}^{2} \frac{p_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{e_{i(k)}} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1}, \tag{6.20}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,

$$p_{e_1+le_2} = p_{e_2} = 1,\ k \geq 0,\ l \geq 0,\ k+l \geq 1,$$

$$p_{(k+2)e_1+le_2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ k \geq 0,\ l \geq 0,$$

$$p_{(l+2)e_2} = \frac{1}{(2l+1)(2l+3)},\ l \geq 0.$$

Тому згідно з теоремою 4.7 двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (6.20) є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.19) в початку координат.

*Таблиця 6.6*

**Відносні похибки наближення функції $1+\mathrm{tg}(z_1)+\mathrm{tg}(z_2/(1+z_2\,\mathrm{tg}(z_1)))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.18) | (6.19) | (6.20) |
|---|---|---|---|
| (-1.5,-1.5) | $-1.3169\cdot 10^{1}$ | $2.10\cdot 10^{-1}$ | $8.64\cdot 10^{-5}$ |
| (-0.85,-0.85) | $-5.9938\cdot 10^{-1}$ | $2.78\cdot 10^{-1}$ | $1.7\cdot 10^{-5}$ |
| (-0.15,-0.15) | $7.0113\cdot 10^{-1}$ | $7\cdot 10^{-5}$ | $1.05\cdot 10^{-12}$ |
| (0.1,-0.1) | $9.9898\cdot 10^{-1}$ | $6.92\cdot 10^{-6}$ | $1.1\cdot 10^{-14}$ |
| (0.25,0.25) | 1.4948 | $4\cdot 10^{-4}$ | $1.14\cdot 10^{-10}$ |
| (0.5,0.5) | 1.9505 | $7.75\cdot 10^{-3}$ | $8.14\cdot 10^{-8}$ |
| (1,1) | 2.9697 | $1.42\cdot 10^{-1}$ | $9.07\cdot 10^{-6}$ |

У таблиці 6.6 наведено результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.18) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$.

## 6.5. Функція арктангенс

У цьому підрозділі розглянемо наближення аналітичних функцій двох змінних, вирази яких містять функцію арктангенс, функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Функція двох змінних

$$1+\sqrt{z_1}\mathrm{Arctg}\,(\sqrt{z_1})+\sqrt{z_2}\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{z_2}}{1+\sqrt{z_1}\mathrm{Arctg}\,(\sqrt{z_1})}\right) \tag{6.21}$$

зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{2k-1}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-z_2)^r}{2r-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z_1)^k}{2k-1}\right)^{l}\right)^{2r-1}. \tag{6.22}$$

Застосовуючи багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера, побудований в підрозділі 4.2, до формального подвійного степеневого ряду (6.22), отри-

муємо $qd$-таблицю

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & \\
0 & & -\frac{2^2}{1\cdot 3} & & & & & & \\
 & -\frac{1}{3} & & -\frac{1^2}{3\cdot 5} & & & & & \\
0 & & -\frac{2^2}{3\cdot 5} & & -\frac{4^2}{5\cdot 7} & & & & \\
 & -\frac{3}{5} & & -\frac{3^2}{5\cdot 7} & & -\frac{3^2}{7\cdot 9} & & & \\
0 & & -\frac{2^2}{5\cdot 7} & & -\frac{4^2}{7\cdot 9} & & -\frac{6^2}{9\cdot 11} & & \\
\vdots & -\frac{5}{7} & \vdots & -\frac{5^2}{7\cdot 9} & \vdots & -\frac{5^2}{9\cdot 11} & \vdots & -\frac{5^2}{11\cdot 13} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}.
$$

Тому згідно з теоремою 4.3 двовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними

$$
1+\sum_{i_1=1}^{2}\frac{c_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{e_{i(k)}}z_{i_k}}{1}, \tag{6.23}
$$

де

$$
c_{e_2}=c_{e_1+le_2}=1,\ k\geq 0,\ l\geq 0,\ k+l\geq 1,
$$

$$
c_{(k+2)e_1+le_2}=\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)},\ c_{(l+2)e_2}=\frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)},\ k\geq 0,\ l\geq 0,
$$

є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.22) в початку координат.

Результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.21) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$ наведено у таблиці 6.7.

Тепер розглянемо функцію двох змінних

$$
1+\mathrm{Arctg}\,(z_1)+\mathrm{Arctg}\left(\frac{z_2}{1+z_2\mathrm{Arctg}\,(z_1)}\right), \tag{6.24}
$$

яка зображується формальним подвійним степеневим рядом

$$
1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}z_1^{2k-1}+
$$

*Таблиця 6.7*

**Відносні похибки наближення функції $1+\sqrt{z_1}\mathrm{Arctg}\,(\sqrt{z_1})+\sqrt{z_2}\mathrm{Arctg}\,(\sqrt{z_2}/(1+\sqrt{z_1}\mathrm{Arctg}\,(\sqrt{z_1})))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.21) | (6.22) | (6.23) |
|---|---|---|---|
| (0.1,0.1) | 1.1856 | $3.85\cdot 10^{-4}$ | $1.49\cdot 10^{-8}$ |
| (0.3,0.3) | 1.4968 | $2.77\cdot 10^{-3}$ | $2.92\cdot 10^{-6}$ |
| (0.8,0.8) | 2.0964 | $3.01\cdot 10^{-1}$ | $1.43\cdot 10^{-4}$ |
| (1.1,0.1) | 1.9023 | $1.71\cdot 10^{-1}$ | $1.74\cdot 10^{-4}$ |
| (2,2) | 3.1169 | $2.95\cdot 10^{1}$ | $2.66\cdot 10^{-3}$ |
| (10,10) | 6.7825 | $5.38\cdot 10^{4}$ | $8.57\cdot 10^{-2}$ |
| (30,30) | $1.1716\cdot 10^{1}$ | $7.92\cdot 10^{6}$ | $3.63\cdot 10^{-1}$ |

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{2r-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}z_2^{2r+l-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}z_1^{2k-1}\right)^l\right)^{2r-1}. \qquad (6.25)$$

Застосовуючи алгоритм, побудований в підрозділі 4.4, до формального подвійного степеневого ряду (6.25), отримуємо двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними

$$1+\sum_{i_1=1}^{2}\frac{p_{e_{i(1)}}z_{i_1}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{(-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}}p_{e_{i(k)}}z_{i_{k-1}}z_{i_k}}{1}, \qquad (6.26)$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,

$$p_{e_1+le_2}=p_{e_2}=1,\ k\geq 0,\ l\geq 0,\ k+l\geq 1,$$
$$p_{(k+2)e_1+le_2}=\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)},\ k\geq 0,\ l\geq 0,$$
$$p_{(l+2)e_2}=\frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)},\ l\geq 0.$$

Таким чином, на підставі теореми 4.7 двовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінними (6.26) є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.25) в початку координат.

*Таблиця 6.8*

**Відносні похибки наближення функції $1 + \mathrm{Arctg}\,(z_1) + \mathrm{Arctg}\,(z_2/(1 + z_2\mathrm{Arctg}\,(z_1)))$ 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами.**

| $(z_1, z_2)$ | (6.24) | (6.25) | (6.26) |
|---|---|---|---|
| (-0.1,-0.1) | $8.0164 \cdot 10^{-1}$ | $7.99 \cdot 10^{-6}$ | $1.49 \cdot 10^{-2}$ |
| (0.1,0.1) | 1.1984 | $5.35 \cdot 10^{-6}$ | $6.68 \cdot 10^{-3}$ |
| (0.5,0.5) | 1.8492 | $4.01 \cdot 10^{-3}$ | $3.05 \cdot 10^{-2}$ |
| (0.8,0.8) | 2.1539 | $8.96 \cdot 10^{-2}$ | $1.54 \cdot 10^{-2}$ |
| (1,1) | 2.296 | $9.16 \cdot 10^{-1}$ | $6.91 \cdot 10^{-4}$ |
| (1.2,1.2) | 2.4054 | 5.33 | $1.83 \cdot 10^{-2}$ |
| (2,2) | 2.6637 | $6.12 \cdot 10^{2}$ | $9.44 \cdot 10^{-2}$ |

У таблиці 6.8 наведено результати обчислення відносних похибок наближення функції двох змінних (6.24) 5-ми частинними сумами і 5-ми підхідними дробами для різних значень $z_1$ і $z_2$.

## 6.6. Гіпергеометрична функція

У цьому підрозділі розглянемо наближення деяких суперпозицій гіпергеометричних функцій Гауса функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

Застосовуючи багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера, побудований в підрозділі 4.3, до формального подвійного степеневого ряду

$$F(a,1,c;z_1)F(b,1,d;z_2(F(a,1,c;z_1))^2) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b)_l}{(d)_l} z_2^l \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z_1^k \right)^{2l+1}, \tag{6.27}$$

де

$$(\alpha)_0 = 1,\ (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1),\ a \in \mathbb{C},\ k \geq 1,$$

— символ Похгаммера, $a$, $b$, $c$ і $d$ — дійсні сталі такі, що $c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $d \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, для кожного $l \geq 0$ для елементів $q^{(n)}_{ke_1+le_2}$, $d^{(n)}_{ke_1+le_2}$, $k \geq 1$, $n \geq 0$, $qd$-таблиці отримуємо вирази

$$q^{(n)}_{e_1+le_2} = \frac{a+n}{c+n},\ n \geq 0, \tag{6.28}$$

$$q^{(n)}_{ke_1+le_2} = \frac{(a+n+k-1)(c+n+k-2)}{(c+n+2k-3)(c+n+2k-2)},\ k \geq 2,\ n \geq 0, \tag{6.29}$$

$$d^{(n)}_{ke_1+le_2} = \frac{k(c-a+k-1)}{(c+n+2k-2)(c+n+2k-1)},\ k \geq 1,\ n \geq 0, \tag{6.30}$$

а для елементів $q^{(n)}_{le_2}$, $d^{(n)}_{le_2}$, $l \geq 1$, $n \geq 0$, $qd$-таблиці — вирази

$$q^{(n)}_{e_2} = \frac{b+n}{d+n},\ n \geq 0, \tag{6.31}$$

$$q^{(n)}_{le_2} = \frac{(b+n+k-1)(d+n+k-2)}{(d+n+2k-3)(d+n+2k-2)},\ l \geq 2,\ n \geq 0, \tag{6.32}$$

$$d^{(n)}_{le_2} = \frac{k(d-b+k-1)}{(d+n+2k-2)(d+n+2k-1)},\ l \geq 1,\ n \geq 0. \tag{6.33}$$

Тому згідно з теоремою 4.2 двовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{2} \frac{b_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{b_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1},$$

де

$$b_{(2k-l)e_1+le_2} = -q^{(0)}_{ke_1+le_2},\ b_{2ke_1+le_2} = -d^{(0)}_{ke_1+le_2},\ k \geq 1,\ l \geq 0,$$
$$b_{(2l-1)e_2} = -q^{(0)}_{le_2},\ b_{2le_2} = -d^{(0)}_{le_2},\ l \geq 1,$$

є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.27) в початку координат.

Наостанок зазначимо, що для формального подвійного степеневого ряду

$$F(a,1,c;-z_1)F(b,1,d;-z_2(F(a,1,c;-z_1))^2) =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b)_l}{(d)_l}(-z_2)^l \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}(-z_1)^k \right)^{2l+1}, \tag{6.34}$$

де

$$(\alpha)_0 = 1,\ (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1),\ a \in \mathbb{C},\ k \geq 1,$$

— символ Похгаммера, $a$, $b$, $c$ і $d$ — дійсні сталі такі, що $0 < a < c$ і $0 < b < d$, виконуються умови теореми 4.4 і, отже, двовимірний $S$-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{2} \frac{c_{e_{i(1)}} z_{i_1}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{e_{i(k)}} z_{i_k}}{1},$$

де

$$c_{(2k-l)e_1+le_2} = q^{(0)}_{ke_1+le_2},\ b_{2ke_1+le_2} = d^{(0)}_{ke_1+le_2},\ k \geq 1,\ l \geq 0,$$
$$b_{(2l-1)e_2} = q^{(0)}_{le_2},\ b_{2le_2} = d^{(0)}_{le_2},\ l \geq 1,$$

$q^{(0)}_{ke_1+le_2}$, $d^{(0)}_{ke_1+le_2}$, $k \geq 1$, $l \geq 0$, визначаються за формулами (6.28)–(6.30), $q^{(0)}_{le_2}$, $d^{(0)}_{le_2}$, $l \geq 1$, — за формулами (6.31)–(6.33), є відповідним до формального подвійного степеневого ряду (6.34) в початку координат.

**Висновки до розділу 6.** Цей розділ присвячено наближенню деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними.

У результаті досліджень побудовано розвинення деяких аналітичних функцій багатьох змінних, зображених формальними кратним степеневими рядами, у багатовимірні регулярні $C$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні $S$-дроби з нерівнозначними змінними, багатовимірні $g$-дроби з нерівнозначними змінними і багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними. Обчислені відносні похибки наближень $n$-ми частинними сумами і $n$-ми підхідними дробами показують ефективність побудованих розвинень.

Результати, наведені в цьому розділі, опубліковані в таких працях: [26, 45, 49, 64, 65, 103, 110, 112].

# ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класичним задачам дослідження збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, деяким питанням відповідності, побудові алгоритмів розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, а також застосуванню цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними до наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Встановлено нове багатовимірне узагальнення ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і нові ефективні ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$, а також вигляд $\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

2. Описано загальну теорію відповідності для послідовностей функцій багатьох змінних $\{R_n(\mathbf{z})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, мероморфних в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (тобто у відкритому полікрузі, який містить початок координат), де $R_n(\mathbf{z})$ — функція багатьох змінних, для якої існує мультиіндекс $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^N$ такий, що $R_n(\mathbf{z})\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ є голоморфною в точці $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ для кожного $n \geq 0$.

Означено класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, які є багатовимірними узагальненнями відповідних класів функціональних неперервних дробів.

Досліджено властивості відповідності для багатовимірних регулярних $C$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних $g$-дробів з нерівнозначними змінними, для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і для багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними.

3. Побудовано алгоритми розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними і у багатовимірний приєднаний дріб з нерівнозначними змінни-

ми та встановлено необхідні і достатні умови існування цих алгоритмів. Побудовано багатовимірний $qd$-алгоритм Рутісхаузера розвинення заданого формального кратного степеневого ряду у відповідний багатовимірний регулярний $C$-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму.

Встановлено нові необхідні і достатні умови існування багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, відповідного до заданого формального кратного степеневого ряду.

Побудовано багатовимірний $g$-алгоритм Бауера розвинення формального кратного степеневого ряду у багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними та встановлено необхідні і достатні умови існування цього алгоритму.

4. Доведено, що перетин параболічної і кругової областей є областю збіжності багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними, а параболічна область — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного регулярного $C$-дробу з нерівнозначними змінними.

Доведено, що об'єднання перетинів параболічних і кругових областей є областю збіжності багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, а об'єднання параболічних областей — областю збіжності оберненого до нього багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними, і, як наслідки із цих результатів, отримано дві нові ознаки збіжності для $S$-дробів.

Отримано нові оцінки похибок наближень для багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

Доведено, що об'єднання параболічних областей є областю збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними і різних його модифікацій та отримано оцінки похибок наближень для цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

Доведено, що кругові і кутові області є областями збіжності багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних

$J$-дробів з нерівнозначними змінними.

Доведено збіжність послідовностей парних і непарних підхідних дробів багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними в деяких підмножинах із $\mathbb{C}^N$ і їх рівномірну збіжність на компактних підмножинах областей із $\mathbb{C}^N$, які є внутрішностями цих підмножин, а також доведено, що умовою збіжності для багатовимірних приєднаних дробів з нерівнозначними змінними і багатовимірних $J$-дробів з нерівнозначними змінними в підмножинах із $\mathbb{C}^N$ є розбіжність рядів, складених із коефіцієнтів елементів цих гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними.

5. Побудовано наближення деяких аналітичних функцій багатьох змінних функціональними гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними і показано ефективність цих наближень.

Результати дисертаційної роботи є внеском в аналітичну теорію неперервних та гіллястих ланцюгових дробів. Встановлені ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці, та запропоновані підходи до дослідження збіжності функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними можна використати для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду, а побудовані алгоритми розвинення заданих формальних кратних степеневих рядів у функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними можна застосувати до наближення аналітичних функцій багатьох змінних, які виникають у прикладних задачах математики, фізики та інженерії.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Антонова Т. М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 7–12.
2. Антонова Т. М., Боднар Д. І. Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту матем. НАН України. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2000. — Т. 31. — С. 19–32.
3. Антонова Т. М., Гладун В. Р. Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 4. — С. 27–35.
4. Антонова Т. М. Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 1. — С. 11–15.
5. Антонова Т. М. Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 7–15.
6. Антонова Т. М. Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпатські матем. публ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 165–174.
7. Антонова Т. М., Сусь О. М. Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 3. — С. 94–101.
8. Антонова Т. М. Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волинський матем. вісн. — 1999. — Вип. 6. — С. 3–8.
9. Баран О. Є. Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. по-

ля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 35–38. (Те саме: Baran O. E. An analog of the Vorpits'kii convergence criterion for branched continued fractions of special form // J. Math. Sci. — 1998. — Vol. 90, Iss. 5. — P. 2348–2351.)

10. Баран О. Є., Боднар Д. І. Розвинення кратного степеневого ряду у багатовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними // Волинський матем. вісн. — 1999. — Вип. 6. — С. 15–20.
11. Баран О. Є. Деякі властивості спарених множин значень та спарених множин елементів для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Матем. вісн. НТШ. — 2012. — Т. 9. — С. 5–14.
12. Баран О. Є. Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 7–14.
13. Баран О. Є. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпатські матем. публ. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 4–13.
14. Баран О. Є. Деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка", Сер. "Прикл. матем.". — 1998. — № 341. — С. 18-23.
15. Баран О. Є. Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. — 166 с.
16. Баран О. Є. Оцінки швидкості збіжності інтерполяційного процесу на основі гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 27–32.
17. Баран О. Є. Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 4. — С. 73–80. (Те саме: Baran O. E. Twin circular domains of convergence of branched continued fractions with inequivalent variables // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 174, Iss. 2. — P. 209–218.)

18. Боднар Д. І. Багатовимірні узагальнення неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 32–39.

19. Боднар Д. І. Багатовимірні $C$-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 39–46.

20. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 54–67.

21. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі параболічні області збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. — 2012. — Т. 9. — С. 4–8.

22. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 24–32. (Те саме: Bodnar D. I., Bubnyak M. M. Estimates of the rate of pointwise and uniform convergence for one-periodic branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 289–300.)

23. Боднар Д. І., Бубняк М. М. Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Матем. вісн. НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 5–16.

24. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наук. думка, 1986. — 176 с.

25. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Алгоритм розвинення кратного степеневого ряду в багатовимірний $g$-дріб // V міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16–18 травня 1996 р.): тези доп. — Київ, 1996. — С. 38.

26. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.

27. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Дослідження збіжності різних типів гіллястих ланцюгових дробів // Конф. “Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці” (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.): тези доп. — Київ, 2001. — С. 7–8.

28. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Послідовність мероморфних функцій багатьох змінних відповідна до формального кратного ряду Лорана // VI всеукр. наук. конф. імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 9–11.

29. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про багатовимірне узагальнення $g$-дробів // Доп. НАН України. — 1997. — № 12. — С. 11–17.

30. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. Львівського ун-ту, Сер. “Мех.-мат.”. — 2008. — Вип. 68. — С. 28–36.

31. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): матеріали конф. — Чернівці, 2018. — С. 166–167.

32. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність деяких класів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наук. праць у 3-х т. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. — Т. 1. — С. 25-27. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 26.12.2018).

33. Боднар Д. И. Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей // Цепные дроби и их применения. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976. — С. 41–44.

34. Боднар Д. И., Олексив И. Я. О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Укр. мат. журн. — 1976. — Т. 28, № 3. — С. 373–377.

35. Боднар Д. И. Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 474–482.

36. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — Київ: Наук. думка, 1974. — 272 с.

37. Бубняк М. М. Множини збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2016. — 151 с.

38. Бубняк М. М. Ознаки збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 54–66.

39. Бубняк М. М. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Карпатські матем. публ. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 187–195.

40. Возна С. М., Кучмінська Х. Й. Відповідність між формальним подвійним степеневим рядом і двовимірним неперервним $g$-дробом // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2004. — Т. 1, № 4. — С. 130–142.

41. Гольдберг А. А., Чижиков І. Е. Вступ до теорії функцій багатьох комплексних змінних: навч. посіб. — Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. — Ч. 1. — 82 с.

42. Дмитришин Р. І. Багатовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Карпатські матем. публ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 247–260.

43. Дмитришин Р. І. Багатовимірний $g$-дріб, відповідний до формального $N$-кратного степеневого ряду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 3. — С. 21–23.

44. Дмитришин Р. І., Баран О. Є. Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту матем. НАН України. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2000. — Т. 31. — С. 82–92.

45. Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $qd$-алгоритму Рутисхаузера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 6–11. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Two-dimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 301–309.)

46. Дмитришин Р. І. Двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для формального подвійного степеневого ряду // Міжнар. наук. конф. "Теорія наближень і її застосування", з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.): тези доп. — Дніпропетровськ, 2015. — С. 35.

47. Дмитришин Р. І. Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту, Сер. "Матем.". — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.

48. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2018. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–59.

49. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1175–1184. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1312–1323.)

50. Дмитришин Р. І. Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними для ФПСР // Міжнар. матем. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойлен-

ка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2013. — С. 233.

51. Дмитришин Р. І. Про багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.): тези доп. — Львів, 2010. — С. 91–92.

52. Дмитришин Р. І. Про відповідність регулярного багатовимірного $C$-дробу з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 76–77.

53. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Матем. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 69–77.

54. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.): тези доп. — Львів, 2011. — С. 65.

55. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2017. — Т. 5, № 3–4. — С. 71–76.

56. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 121–127.

57. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // X міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2004. — С. 368.

58. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 4. — С. 31–36.

59. Дмитришин Р. І. Про збіжність регулярних багатовимірних $C$-дробів з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 52–54.

60. Дмитришин Р. І. Про область збіжності багатовимірного $J$-дробу // III всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С. 32.

61. Дмитришин Р. І. Про одиничну полікругову область збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Дванадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2008. — С. 604.

62. Дмитришин Р. І. Про ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. — С. 186–187.

63. Дмитришин Р. І. Про приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези доп. — Слов'янськ: ДДПУ, 2017. — С. 56.

64. Дмитришин Р. І. Про розвинення деяких функцій у двовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 28–34. (Те саме: Dmytryshyn R. I. On

the expansion of some functions in a two-dimensional $g$-fraction with independent variables // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 181, № 3. — P. 320–327.)

65. Дмитришин Р. І. Регулярний двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для подвійного степеневого ряду // Буковинський мат. журн. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 55–57.
66. Дмитришин Р. І. Розвинення багатовимірного $C$-дробу з дійсними коефіцієнтами у кратний степеневий ряд // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 3. — С. 11–15.
67. Кучминская Х. И. Аппроксимация и интерполяция функций цепными и ветвящимися цепными дробями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — Львов, 1978. — 143 с.
68. Кучмінська Х. Й. Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН Укр. РСР, Сер. А. Фіз.-мат. і тех. наук. — 1978. — № 7. — С. 614–618.
69. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.
70. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. — Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948. — 411 с.
71. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород: Ґражда, 2016. — 412 с.
72. Скоробогатько В. Я. та ін. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування // II наук. конф. молодих математиків України. — Київ: Наук. думка, 1966. — С. 561–565.
73. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. — Москва: Наука, 1983. — 312 с.
74. Слешинськiй И. В. Доказательство существованія нѣкоторых предѣловъ // Записки мат. отдѣл. Новороссійскаго об-ва естествоиспытателей. — 1888. — Т. VIII. — С. 129–137.

75. Слешинскій И. В. Дополненіе къ замѣткѣ о сходимости непрерывныхъ дробей // Матем. сб. — 1889. — Т. 14, № 3. — С. 436–438.

76. Слешинскій И. В. Къ вопросу о сходимости непрерывныхъ дробей // Там же. — С. 337-–343.

77. Слешинськiй И. В. О сходимости непрерывныхъ дробей // Записки мат. отдѣл. Новороссiйскаго об-ва естествоиспытателей. — 1888. — Т. VIII. — С. 97–127.

78. Слешинськiй И. В. О сходимости непрерывныхъ дробей // Записки мат. отдѣл. Новороссiйскаго об-ва естествоиспытателей. — 1889. — Т. X. — С. 201–256.

79. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: в 2 т. Т. 2: Сложные системы (разветвленные, кольцевые и с распределенными массами). — Ленинград: Судпромгиз, 1955. — 332 с.

80. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обращений к вопросам приближенного анализа. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 203 с.

81. Чебышев П. Л. Полное собрание соченений: в 5 т. Т. 2: Метематический анализ. — Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1947. — 520 с.

82. Чебышев П. Л. Полное собрание соченений: в 5 т. Т. 3: Метематический анализ. — Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1948. — 414 с.

83. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ: в II ч. Ч. II: Функции нескольких переменных: учеб. пособие. — изд. 2-е. — Москва: Наука, 1976. — 400 с.

84. Bandemer H. Über die Konvergenz des Quotienten-Differenzen-Algorithmus von Rutishauser für Eigenwertprobleme gewisser linearer Operatoren // Math. Nachr. — 1964. — Vol. 27, Iss. 5-6. — P. 353–375.

85. Baker G. A., Jr., Graves-Morris P. Padé Approximants. — 2nd ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. — xiv+746 p. — (Series “Encyclopedia of Mathematics and its Applications”: vol. 59).

86. Bauer F. L. The $g$-algorithm // J. Soc. Indust. Appl. Math. — 1960. — Vol. 8, No. 1. — P. 1–17.

87. Bauer F. L. The $g$-algorithm // Math. Inst. Tech. Hochsch. München: Technical Report. — March 1958. — 22 p.

88. Bodnar D. I., Bilanyk I. B. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 13–21.

89. Bodnar D. I., Bubniak M. M. On convergence (2,1,...,1)-periodic branched continued fraction of the special form // Carpathian Math. Publ. — 2015. — Vol. 7, No. 2. — P. 148–154.

90. Bodnar D. I., Bubniak M. M. The convergence of 1-periodic branched continued fraction of the special form in parabolic regions // J. Math. Syst. Sci. — 2014. — Vol. 4, № 4. — P. 269–274.

91. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Mat. Stud. — 2001. — Vol. 15, No. 2. — P. 115–126.

92. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence speed of multidimensional $g$-fraction in the some domain of the space $\mathbb{C}^N$ // International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, Belgium, 22–26 July, 2002): Abstracts of talks ICCAM-2002. — Leuven, 2002. — P. 35.

93. Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $S$-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 58–64.

94. Brezinski C. History of Continued Fractions and Padé Approximants. — Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona: Springer-Verlag, 1991. — 551 p. — (Series "Springer Series in Computational Mathematics": in 12 vol.; vol. 12).

95. Chihara T. S. The parameters of a chain sequence // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 108, No 3. — P. 775–780.

96. Cuyt A. A. M. The QD-algorithm and multivariate Padé-approximants // Numer. Math. — 1983. — Vol. 42, No. 3. — P. 259–269.

97. Cuyt A. A multivariate QD-like algorithm // BIT. — 1988. — Vol. 28, Iss. 1. — P. 98–112.

98. Cuyt A., Verdonk B. A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximants // Appl. Numer. Math. — 1988. — Vol. 4, Iss. 2–4. — P. 263–271.

99. Cuyt A., Verdonk B. Multivariate reciprocal differences for branched Thiele continued fraction expansions // J. Comput. Appl. Math. — 1988. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 145–160.

100. Dennis J. J., Wall H. S. The limit-circle case for a positive definite $J$-fraction // Duke Math. J. — 1945. — Vol. 12, No. 2. — P. 255–273.

101. Dmytryshyn R. I. A multidimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 230–238.

102. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. — 2017. — Vol. 47, No. 2. — P. 150–159.

103. Dmytryshyn R. I. One example of the two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables expansion for the double power series // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.): тези доп. — Львів, 2007. — С. 92.

104. Dmytryshyn R. I. On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2017. — Vol. 9, № 2. — P. 120–127.

105. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Междунар. конф. “VIII Белорусская математическая конференция” (Минск, Беларусь, 19–24 июня 2000 г.): тезисы докл. — В 2 ч.: ч. 1. — Минск, 2000. — С. 4.

106. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional regular $C$-fractions with independent variables // Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. — 2018. — Vol. 26. — P. 18–24.

107. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with independent variables // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2012. — С. 121–122.

108. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables // Тринадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.): матеріали конф. — В 2 т.: т. 2. — Київ: НТУУ "КПІ", 2010. — С. 14.

109. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions // Міжнар. школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", присвячена 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.): тези доп. — Ужгород, 2002. — С. 15–16.

110. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 164–165. — P. 265–284.

111. Dmytryshyn R. I. The multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Carpathian Math. Publ. — 2009. — Vol. 1, № 2. — P. 145–151.

112. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. — 2012. — Vol. 164, Iss. 12. — P. 1520–1539.

113. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables for double power series // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2005 (Rhodes, Greek, 16–20 September 2005): Proc. of ICNAAM 2005. — Weinheim: Wiley-VCH, 2005. — P. 156–159.

114. Euler L. De Fractionibus continuis: Dissertatio // Comment. Acad. Sci. Imp. Petropolitanae: (MDCCXXXVII). — Petropoli: Typis Acad., MDCCXLIV. — Tom. IX. — P. 98–137.

115. Eulero L. Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange potestates binomiales expressit: conventui exhibuit die 20 Mart. 1780 // Mém. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg. Hist. Acad.: (1813-1814). — St. Pétersbourg: Impr. Acad. Imp. Sci., 1818. — Tom. VI. — P. 3–11.

116. Eulero L. Introductio an analysin infinitorum: in 2 tom. Tom. 1. — Lausannae: M.-M. Bousquet & Socios, MDCCXLVIII. — xvi+320 p.

117. Frobenius G. Über Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // J. Reine Angew. Math. — 1881. — Bd. 90 — S. 1–17.

118. Fujiwara M. A problem of Diophantine approximations in the old Japanese mathematics // Proc. Acad. Tokyo. — 1939. — Vol. 15, No. 4. — P. 101–104.

119. Gargantini I., Henrici P. A continued fraction algorithm for the computation of higher transcendental functions in the complex plane // Math. Comp. — 1967. — Vol. 21. — P. 18–29.

120. Gauss C. F. Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+3)}x^3$+etc // Commentat. Soc. Reg. Sci. Gott. Recent.: (MDCCCXI-XIII), Cl. Math.: (MDCCCXII). — Gottingae: H. Dieterich, MDCCCXIII. — Vol. II. — P. 3–46.

121. Good I. J. Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. — 1960. — Vol. 56, Iss. 4. — P. 367–380.

122. Gragg W. B. Truncation error bounds for $g$-fractions // Numer. Math. — 1968. — Vol. 11, No. 5. — P. 370–379.

123. Gragg W. B. Truncation error bounds for $\pi$-fractions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76, No. 5. — P. 1091–1094.

124. Gragg W. B., Warner D. D. Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. — 1983. — Vol. 20, Iss. 6. — P. 1187–1197.

125. Handbook of Continued Fractions for Special Functions / Cuyt A. A. M. et al. — Dordrecht: Springer, 2008. — xvi+431 p.

126. Hankel H. Üeber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche // Berichte über die Verhandlungen d. Königl.-Sächsischen Gesellschaft d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Kl. — 1862. — Bd. 14. — S. 17–22.

127. Hankel H. Über die Transformation von Reihen in Kettenbrüche // Z. Math. Phys. — 1862. — Bd. 7. — S. 338–343.

128. Hayden T. L., Merkes E. P. Chain sequences and univalance // Illinois J. Math. — 1964. — Vol. 8, Iss. 3. — P. 523–528.

129. Hayden T. L., Merkes E. P. Two applications of chain sequences to univalence // Wisconsin Univ-Madison Math. Res. Cent.: MRC Tech. Summary Rep. ♯378. — 1963. — 36 p.

130. Heilermann J. B. H. De transformatione serierum in fractiones continuas: Dr. Phil. Diss. — Münster: Königl. Theolog. und Philosoph. Akad., 1845. — 26 s.

131. Heilermann J. B. H. Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche // J. Reine Angew. Math. — 1846. — Bd. 33 — S. 174–188.

132. Heilermann J. B. H. Zusammenhang unter den Koeffizienten zweier gleicher Kettenbrüche von verschiedener Form // Z. Math. Phys. — 1860. — Bd. 5. — S. 362–363.

133. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis: in 2 vol. Vol. 1: Power series, Integration, Conformal sapping, Location of zeros. — New York; London; Sydney; Toronto: Wiley-Interscience publ., 1974. — xviii+682 p.

134. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis: in 2 vol. Vol. 2: Special functions, Integral transforms, Asymptotics, Continued fractions. — New York; London; Sydney; Toronto: Wiley-Interscience publ., 1977. — x+662 p.

135. Henrici P. Bounds for eigenvalues of certain tridiagonal matrices // J. Soc. Indust. Appl. Math. — 1963. — Vol. 11. — P. 281–290.

136. Henrici P. Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen // Jber. d. Dt. Math.-Verein. — 1984. — Bd. 86. — S. 115–134.

137. Henrici P., Pfluger P. Truncation error estimates for Stieltjes fractions // Numer. Math. — 1966. — Vol. 9, No. 2. — P. 120–138.

138. Henrici P. Some applications of the quotient-difference algorithm // Experimental Arithmetic, High Speed Computing and Mathematics: Proc. Symposium Appl. Math. — Providence, R.I.: Amer. Math. Soc, 1963. — Vol. XV. — P. 159–183.

139. Henrici P. The quotient-difference algorithm // Further contributions to the solution of simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues: Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. — Washington, D.C.: U.S. Govt. Print. Off., 1958. — Vol. 49. — P. 23–46.

140. Henrici P. The quotient-difference algorithm // Mathematical Methods for Digital Computers / ed. A. Ralston, H. S. Wilf. — New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967. — Vol. 11. — P. 35–62.

141. Henrici P. Topics in computational complex analysis, IV: The Lagrange-Bürmann formula for systems of formal power series // Computational Aspects of Complex Analysis (Harz, Germany, July 26 – August 6, 1982): Proc. of the NATO Advanced Study Ins. held at Braunlage. — Springer: Dordrecht, 1983. — Vol. 102. — S. 193–216.

142. Herschel J. W. A Collection of Examples of the Applications of the Calculus of Finite Differences. — Cambridge: J. Smith etc., 1820. — vi+171 p.

143. Horiuchi A. Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo (1600-1868). Une étude des travaux de Seki Takakazu (?-1708) et de Takebe Katahiro (1664-1739). — Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1994. — 409 p.

144. Householder A. S. The Pade table, the Frobenius identities, and the *qd*-algorithm // Linear Algebra Appl. — 1971. — Vol. 4. — P. 161–174.

145. Hutton Ch. Tracts on mathematical and philosophical subjects, comprising among numerous important articles, the theory of bridges, with several plans of recent improvement; also the results of numerous experiments on the force of gunpowder, with applications to the modern practice of artillery: in 3 vol. Vol. 1. — London: F. C. and J. Rivington etc., 1812. — xii+485 p.

146. Jacobi C. G. J. Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algébre // J. Reine Angew. Math. — 1831. — Bd. 7. — S. 41–43.

147. Jones W. B., Njastad 0., Thron W. J. Perron-Caratheodory continued fraction // Rational Approx. and its Appl. in Math. and Phys.: Lecture Notes in Math. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. — Vol. 1237. — P. 188–206.

148. Jones W. B., Thron W. J. A posteriori bounds for the truncation error of continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. — 1971. — Vol. 8, Iss. 4. — P. 693–705.

149. Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. — London; Amsterdam; Don Mills; Ontario; Sydney; Tokyo: Addison-Wesley Pub. Co., Inc, 1980. — xxviii+428 p. — (Series "Encyclopedia of Mathematics and its Applications": in 12 vol.; vol. 11).

150. Jones W. B., Thron W. J. Convergence of continued fractions // Canad. J. Math. — 1968. — Vol. 20. — P. 1037–1055.

151. Jones W. B., Thron W. J. Sequences of meromorphic functions corresponding to a formal Laurent series // SIAM J. Math. Anal. — 1979. — Vol. 10, No. 1. — P. 1–17.

152. Khrushchev S. Orthogonal Polynomials and Continued Fractions. From Euler's Point of View. — Cambridge; New York; Melbourne; Madrid; Cape Town; Singapore; São Paulo; Delhi: Cambridge University Press, 2008. — xvi+478 p. — (Series "Encyclopedia of Mathematics and its Applications": in 158 vol.; vol. 122).

153. Kuchminska Ch. Yo. A Worpitzky boundary theorem for branched continued fractions of the special form // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 272–278.

154. Kuchminskaya Kh. On approximation of function by twodimensional continued fractions // Rational Approx. and its Appl. in Math. and Phys.: Lecture Notes in Math. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. — Vol. 1237. — P. 207–216.

155. Kuchminskaya Kh., Siemaszko W. Rational approximation and interpolation of functions by branched continued fractions // Ibid. — P. 24–40.

156. La Grange M. Sur les fractions continues // Eléments d'Algébre par M. Léonard Euler, traduits de l'allemand, avec des notes et des additions. Tome second. De l'analyse indéterminée. — Lyon: Ch. J.-M. Bruyset; Pere & Fils, MDCCLXXIV. — P. 379–344.

157. La Grange M. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral: lu le 18 Juillet 1776 // Nouveaux Mém. de l'Acad. Royale des Sci. et Belles-Lettres: (MDCCLXXVI). — Berlin: Imprimé chez G. J. Decker; Imprimeur du Roi, MDCCLXXIX. — P. 236–264.

158. Lambert J. H. Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung: 3 bd. in 4 theil. Bd. 2 in 2 theil. — Berlin: Im Verlag der Buchhandlung der Realschule, 1770. — a8+b4+815 s.

159. Lane R. E., Wall H. S. Continued fractions with absolutely convergent even and odd parts // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 67, No. 2. — P. 368–380.

160. Lange L. J. $\delta$-fraction expansions of analytic functions // SIAM J. Math. Anal. — 1983. — Vol. 14, Iss. 2. — P. 323–368.

161. Lange L. J. On a family of twin convergence regions for continued fractions // Illinois J. Math. — 1966. — Vol. 10, Iss. 1. — P. 97–108.

162. Lange L. J. Strip convergence regions for continued fractions // Continued fractions and orthogonal functions, theory and appl.: Lecture Notes in Pure and Appl. Math. — Marcel: Dekker, 1994. — Vol. 154. — P. 211–231.

163. Leighton W., Scott W. T. A general continued fraction expansion // Bull. Amer. Math. Soc. — 1939. — Vol. 45, No. 8. — P. 596–605.

164. Leighton W., Thron W. J. Continued fractions with complex elements // Duke Math. J. — 1942. — Vol. 9, No. 4. — P. 763–772.

165. Leighton W., Wall H. S. On the transformation and convergence of continued fractions // Amer. J. Math. — 1936. — Vol. 58, No. 2. — P. 267–281.

166. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Vol. 1: Convergence Theory. — 2d ed.— Amsterdam: Atlantis Press; World Scientific, 2008. — xii+308 p. — (Series "Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science": in 29 vol.; vol. 1).

167. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Applications. — 1st ed.— Amsterdam; London; New York; Tokyo: North-Holland, 1992. — xvi+606 p. — (Series "Studies in Computational Mathematics": in 16 vol.; vol. 3).

168. Magnus A. Certain continued fractions associated with the Padé table // Math. Z. — 1962. — Bd. 78. — S. 361–374.

169. Magnus A. Expansion of power series into $P$-fractions // Math. Z. — 1962. — Bd. 80, Heft. 1. — S. 209-216.

170. McCabe J. H. A formal extension of the Padé table to include two point Padé quotients // IMA J. Appl. Math. — 1975. — Vol. 15, Iss. 2. — P. 363–372.

171. McCabe J. H., Murphy J. A. Continued fractions which correspond to power series expansions at two points // IMA J. Appl. Math. — 1976. — Vol. 17, Iss. 2. — P. 233–247.

172. Mc Laughlin J., Wyshinski N. J. A convergence theorem for continued fractions of the form $K_{n=1}^{\infty} a_n/1$ // J. Comp. Appl. Math. — 2005. — Vol. 179, Iss. 1–2. — P. 255–262.

173. Möbius A. F. Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts // J. Reine Angew. Math. — 1830. Bd. 6. — S. 215–243.

174. Möbius A. F. Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern // J. Reine Angew. Math. — 1830. — Bd. 5. — S. 113–132.

175. Muir T. New general formulae for the transformation of infinite series into continued fractions // Trans. Royal Soc. Edinburgh. — MDCCCLXXVI. — Vol. XXVII. — P. 467-–471.

176. Muir T. On the transformation of Gauss' hypergeometric series into a continued fraction // Proc. London Math. Soc. — 1876. — Vol. 1–7, Iss. 1. — P. 112–118.

177. Murphy J. A. Certain rational function approximations to $(1 + x^2)^{-1/2}$ // IMA J. Appl. Math. — 1971. — Vol. 7, Iss. 2. — P. 138–150.

178. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A class of algorithms for obtaining rational approximants to functions defined by power series // J. Appl. Math. Phys. — 1977. — Vol. 28, Iss. 6. — P. 1121—1131.

179. Murphy J. A., O'Donohoe M. R. A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction // J. Comput. Appl. Math. — 1978. — Vol. 4, Iss. 3. — P. 181–190.

180. O'Donohoe M. Applications of continued fractions in one and more variables: Ph. D. Thesis. — Brunel: Brunel University, 1974. — 178 c.

181. Paydon J. F., Wall H. S. The continued fraction as a sequence of linear transformations // Duke Math. J. — 1942. — Vol. 9, No. 2 — P. 360–372.

182. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd. II: Analytisch-funktinentheoretische Kettenbrüche. — 3e aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1957. — vi+316 s.

183. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. — Leipzig; Berlin: Druck und verlag von B. G. Teubner, 1913. — xii+520 s. — (Reihe “B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen”: in 64 bd.; bd. 36)

184. Possé C. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. — St. Pétersbourg: Impr. Acad. Imp. Sci., 1886. — viii+175 p.

185. Pratje I. Iteration der Joukowski-Abbildung und ihre Streckenkomplexe // Mitt. aus dem Math. Seminar der Univ. Giessen. — Giessen: Selbstverlag des Math. Seminars, 1954. — Heft 48. — 54 s.

186. Pringsheim A. Über die Convergenz unendlicher Kettenbrüche // Sitzungsber. d. Math.-Phys. Cl. d. Königl. Bayer. Akad. d. Wiss. zu München. — 1899. — Bd. XXVIII, Jahrg. 1898. — S. 295–324.

187. Pringsheim A. Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche. — München, 1910. — 52 s. — (Series “Sitzungsber. Königl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl. Jg. 1910”: in 15. abh.; Abh. 6).

188. Rogers L. J. On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions // Proc. London Math. Soc. — 1907. — Vol. 2–4, Iss. 1. — P. 72–89.

189. Runckel H.-J. Bounded analytic functions in the unit disk and the behaviour of certain analytic continued fractions near the singular line // J. Reine Angew. Math. — 1976. — Bd. 281. — S. 97–125.

190. Runckel H.-J. Continuity on the boundary and analytic continuation of continued fractions // Math. Z. — 1976. — Bd. 148, Heft. 2. — S. 189–205.

191. Rutishauser H. Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Z. Angew. Math. Phis. — 1954. — Vol. 5, Iss. 6. — P 496–508.

192. Rutishauser H. Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Z. Angew. Math. Phys. — 1955. — Vol. 6, Iss. 5. — P. 387–401.

193. Rutishauser H. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus. — Basel; Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1957. — 74 s. — (Reihe “Mitt. Inst. f. angew. Math. ETH Zürich”: in 8 nr.; Nr. 7).

194. Rutishauser H. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Z. Angew. Math. Phys. — 1954. — Vol. 5, Iss. 3. — P. 233–251.

195. Rutishauser H. Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Z. Angew. Math. Phys. — 1956. — Vol. 7, Iss. 2. — P. 164–169.

196. Rutishauser H. Ein infinitesimales Analogon zuin Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Arch. Math. — 1954. — Vol. 5, Iss. 1–3. — P. 132–137.

197. Rutishauser H. On a modification of the QD-algorithm with graeffe-type convergence // Z. Angew. Math. Phys. — 1962. — Vol. 8, Iss. 5. — P. 493–496.

198. Rutishauser H. Stabile Sonderfälle des Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Numer. Math. — 1963. — Vol. 5. — P. 95–112.

199. Scott W. T., Wall H. S. A convergence theorem for continued fractions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 47, No. 1. — P. 155–172.

200. Seidel L. Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbrüches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche // Abh. d. Math.-Phys. Cl. d. Königl. Bayer. Akad. d. Wiss. — 1855. — Bd. 7. — S. 559–602.

201. Seidel L. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche: Akad. Abh., eingereicht pro impetranda venia legendi bei d. philosoph. Fak. d. Königl. Ludwigs-Maximilians-Universität. — München: Gedruckt bei Georg Franz, 1846. — 16 s.

202. Siemaszko W. Branched continued fractions for double power series // J. Comput. Appl. Math. — 1980. — Vol. 6, Iss. 2. — P. 121–125.

203. Siemaszko W. On some conditions for convergence of branched continued fractions // Padé Approx. and its Appl., Amsterdam 1980: Proc. of a Conf. Held in Amsterdam, The Netherlands, Oct. 29-31, 1980: Lecture

Notes in Math. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1981. — Vol. 888. — P. 363–370.

204. Stern M. A. Lehrbuch der algebraischen Analysis. — Leipzig; Heidelberg: C. F. Winter'sche Verlagshandlung, 1860. — x+486 s.
205. Stern M. A. Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. — Berlin: Gedruckt und verlegt bei G. Reimer, 1834. — viii+212 s.
206. Stern M. A. Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung // J. Reine Angew. Math. — 1833. — Bd. 10. — S. 364–376.
207. Stern M. A. Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbrüchs // J. Reine Angew. Math. — 1848. — Bd. 37. — S. 255-–272.
208. Stieltjes T. -J. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. — 1894. — Vol. 8, No. 4. — P. J1–J122.
209. Stieltjes T. J. Recherches sur les fractions continues // Œuvres complétes de Thomas Joannes Stieltjes, pub. par les soins de la Société mathématique d'Amsterdam: in 2 tom. Tom 2. — Groningen: P. Noordhoff, 1918. — P. 402–566.
210. Stolz O. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den neueren Ansichten. — Leipzig: Druk und verlag von B. G. Teubner, 1886. — viii+326 s.
211. Stone E. A new mathematical dictionary: wherein is contain'd, not only the explanation of the bare terms, but likewise an history of the rise, progress, state, properties, etc. of things, both in pure mathematics, and natural philosophy, so far as these last come under a mathematical consideration. — 2d ed., with large add. — London: W. Innys etc., MDCCXLIII. — xii+522 p.
212. Thron W. J. A priori truncation error estimates for Stieltjes fractions // E. B. Christoffeli: the influence of his work on math. and the phys. sciences / ed. P. L. Bulzer, F. Febér. — Basel: Birkhäuser, 1981. — P. 203–211.

213. Thron W. J. Convergence of sequences of linear fractional transformations and of continued fractions // Indian. Math. Soc. — 1963. — Vol. 27, Iss. 3–4. — P. 103–127.

214. Thron W. J. On parabolic convergence regions for continued fractions // Math. Zeitschr. — 1958. — Bd. 69, Iss. 1. — S. 173–182.

215. Thron W. J. Some properties of continued fraction $1 + d_0 z + K(z/(1 + d_n z))$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54, No. 2. — P. 206-218.

216. Thron W. J. Two families of twin convergence regions for continued fractions // Duke Math. J. — 1943. — Vol. 10, No. 4 — P. 677–685.

217. Van Vleck E. B. On the convergence and character of the continued fraction a $\frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1901. — Vol. 2, No. 4. — P. 476–483.

218. Van Vleck E. B. On the convergence of algebraic continued fraction whose coefficients have limiting values // Trans. Amer. Math. Soc. — 1904. — Vol. 5, No. 3. — P. 253–262.

219. Van Vleck E. B. On the convergence of continued fractions with complex elements// Trans. Amer. Math. Soc. — 1901. — Vol. 2, No. 3. — P. 215–233.

220. Viscovatov B. De la méthode générale pour réduire toutes sortes de quantités en fractions continues: présenté le 18. Décembre 1805 // Mém. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg: Hist. Acad.: (1803-1806). — St. Pétersbourg: Impr. Acad. Imp. Sci., 1809. — Tom. I. — P. 226—247.

221. Viscovatov B. Essai d'une méthode générale pour réduire toutes sortes de séries en fractions continues: pésenté à la Conférence le 2. Mai 1802 // Nova Acta Acad. Scient. Imp. Petropolitanae: Hist. Acad.: (MDCCXCIX-MDCCCII). — Petropoli: Typis Acad. Scient., MDCCCVI. — Tom. 15. — P. 181–191.

222. Von Koch H. Sur un thèoréme de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues // Bulletin de la S. M. F. — 1895. — Tom. 23. — P. 33–40.

223. Wall H. S. Analytic Theory of Continued Fractions. — New York, N. Y.: D. Van Nostrand Co., Inc, 1948. — xiii+433 p. — (Series “The University series in higher mathematics”; vol. 1).

224. Wall H. S. Continued fraction and totally monotone sequences // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48, No. 2. — P. 165–184.

225. Wall H. S., Wetzel M. Quadratic forms and convergence regions for continued fractions // Duke Math. J. — 1944. — Vol. 11, No. 1. — P. 89–102.

226. Worpitzky J. Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche: Jahresabericht, womit zu der öffentlichen Prüfung der Schüler am 10. April 1865; Friedrichs-Gymnasium und Realschule. — Berlin: Buchdruckerei von G. Lange, 1865. — S. 3–39.

# ДОДАТКИ

## Список публікацій за темою дисертації


1. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 4. — С. 31–36.
2. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Mat. Stud. — 2001. — Vol. 15, No. 2. — P. 115–126.
3. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 164–165. — P. 265–284.
4. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 4. — С. 121–127.
5. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. — 2006. — № 2. — С. 13–18.
6. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Вісн. Львівського ун-ту, Сер. “Мех.-мат.”. — 2008. — Вип. 68. — С. 28–36.
7. Дмитришин Р. І. Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту, Сер. “Матем.”. — 2008. — Вип. 374. — С. 44–49.
8. Dmytryshyn R. I. The multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Carpathian Math. Publ. — 2009. — Vol. 1, № 2. — P. 145–151.
9. Дмитришин Р. І. Про розвинення деяких функцій у двовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 28–34. (Те саме: Dmytryshyn R. I. On the expansion of some functions in a two-dimensional $g$-fraction with independent variables // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 181, № 3. — P. 320–327.)

10. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Матем. вісник НТШ. — 2011. — Т. 8. — С. 69–77.
11. Дмитришин Р. І. Багатовимірне узагальнення $g$-алгоритму Бауера // Карпатські матем. публ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 247–260.
12. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. — 2012. — Vol. 164, Iss. 12. — P. 1520–1539.
13. Дмитришин Р. І. Двовимірне узагальнення $qd$-алгоритму Рутисхаузера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 6–11. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Two-dimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 208, Iss. 3. — P. 301–309.)
14. Дмитришин Р. І. Регулярний двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для подвійного степеневого ряду // Буковинський мат. журн. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 55–57.
15. Дмитришин Р. І. Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1175–1184. (Те саме: Dmytryshyn R. I. Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1312–1323.)
16. Dmytryshyn R. I. A multidimensional generalization of the Rutishauser $qd$-algorithm // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 230–238.
17. Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2017. — Т. 5, № 3–4. — С. 71–76.
18. Dmytryshyn R. I. Convergence of some branched continued fractions with independent variables // Mat. Stud. — 2017. — Vol. 47, No. 2. — P. 150–159.
19. Dmytryshyn R. I. On the convergence criterion for branched continued fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2017.

— Vol. 9, № 2. — P. 120–127.

20. Дмитришин Р. І. Оцінки похибок наближень для багатовимірного $S$-дробу з нерівнозначними змінними // Буковинський мат. журн. — 2018. — Т. 6, № 1–2. — С. 56–59.
21. Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $S$-fractions with independent variables // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, № 1. — P. 58–64.
22. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional regular $C$-fractions with independent variables // Visn. Dnipro univ., Ser. Mat. — 2018. — Vol. 26. — P. 18–24.
23. Dmytryshyn R. I. On the convergence of multidimensional $g$-fraction // Междунар. конф. "VIII Белорусская математическая конференция" (Минск, Беларусь, 19–24 июня 2000 г.): тезисы докл. — В 2 ч.: ч. 1. — Минск, 2000. — С. 4.
24. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Дослідження збіжності різних типів гіллястих ланцюгових дробів // Конф. "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці" (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.): тези доп. — Київ, 2001. — С. 7–8.
25. Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I. On the convergence speed of multidimensional $g$-fraction in the some domain of the space $\mathbb{C}^N$ // International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, Belgium, 22–26 July, 2002): Abstracts of talks ICCAM-2002. — Leuven, 2002. — P. 35.
26. Dmytryshyn R. I. The multidimensional generalization of $g$-fractions // Міжнар. школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування", присвячена 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.): тези доп. — Ужгород, 2002. — С. 15–16.
27. Дмитришин Р. І. Про область збіжності багатовимірного $J$-дробу // III всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С. 32.

28. Дмитришин Р. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // X міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2004. — С. 368.
29. Dmytryshyn R. I. The two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables for double power series // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2005 (Rhodes, Greek, 16–20 September 2005): Proc. of ICNAAM 2005. — Weinheim: Wiley-VCH, 2005. — P. 156–159.
30. Дмитришин Р. І. Про ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2006. — С. 186–187.
31. Dmytryshyn R. I. One example of the two-dimensional $g$-fraction with nonequivalent variables expansion for the double power series // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.): тези доп. — Львів, 2007. — С. 92.
32. Дмитришин Р. І. Про одиничну полікругову область збіжності багатовимірного $g$-дробу з нерівнозначними змінними // Дванадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.): матеріали конф. — Київ: ТОВ "Задруга", 2008. — С. 604.
33. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with nonequivalent variables // Тринадцята міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.): матеріали конф. — В 2 т.: т. 2. — Київ: НТУУ "КПІ", 2010. — С. 14.
34. Дмитришин Р. І. Про багатовимірний $g$-дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.): тези доп. — Львів, 2010. — С. 91–92.

35. Дмитришин Р. І. Про деякі області збіжності багатовимірного $J$-дробу з нерівнозначними змінними // Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.): тези доп. — Львів, 2011. — С. 65.
36. Dmytryshyn R. I. The correspondence between the formal multiple power series and multidimensional $g$-fraction with independent variables // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2012. — С. 121–122.
37. Дмитришин Р. І. Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними для ФПСР // Міжнар. матем. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.): тези доп. — Київ: Ін-т матем. НАН України, 2013. — С. 233.
38. Дмитришин Р. І. Двовимірний $C$-дріб з нерівнозначними змінними для формального подвійного степеневого ряду // Міжнар. наук. конф. "Теорія наближень і її застосування", з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.): тези доп. — Дніпропетровськ, 2015. — С. 35.
39. Дмитришин Р. І. Про відповідність регулярного багатовимірного $C$-дробу з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2017. — С. 76–77.
40. Дмитришин Р. І. Про приєднаний багатовимірний дріб з нерівнозначними змінними // Міжнар. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.): тези доп. — Слов'янськ: ДДПУ,

2017. — С. 56.

41. Дмитришин Р. І. Про збіжність регулярних багатовимірних $C$-дробів з нерівнозначними змінними // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 52–54.
42. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність багатовимірних $S$-дробів з нерівнозначними змінними // Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.): матеріали конф. — Чернівці, 2018. — С. 166–167.
43. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Послідовність мероморфних функцій багатьох змінних відповідна до формального кратного ряду Лорана // VI всеукр. наук. конф. імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.): тези доп. — Івано-Франківськ, 2018. — С. 9–11.
44. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. Про збіжність деяких класів гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наук. праць у 3-х т. — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. — Т. 1. — С. 25-27. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018 (дата звернення: 26.12.2018).

## Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях, конгресі, школі-семінарі, наукових семінарах і науково-навчальному семінарі:

1. Міжнародна конференція “VIII Білоруська математична конференція” (Мінськ, Білорусь, 19–24 червня 2000 р.).

2. Конференція “Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці” (Київ, 19–22 жовтня 2001 р.).
3. Міжнародний конгрес з обчислювальної і прикладної математики (Левен, Бельгія, 22–26 липня, 2002 р.).
4. Міжнародна школа-семінар “Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування”, присвячена 75-річчю з дня народження проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серпня 2002 р.).
5. III всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 9–12 вересня 2003 р.).
6. X міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.).
7. Міжнародна конференція з чисельного аналізу і прикладної математики 2005 (Родос, Греція, 16–20 вересня 2005 р.).
8. Міжнародна наукова конференція “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.).
9. Міжнародна математична конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.).
10. Дванадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.).
11. Тринадцята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010 р.).
12. Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам’яті А. А. Гольдберга (1930-2008) (Львів, 31 травня – 5 червня 2010 р.).
13. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.).
14. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам’янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.).

15. Міжнародна математична конференція “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23–30 червня 2013 р.).
16. Міжнародна наукова конференція “Теорія наближень і її застосування”, з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного (Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 р.).
17. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.).
18. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007) (Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.).
19. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.).
20. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України (Львів, 22–25 травня 2018 р.).
21. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.).
22. VI всеукраїнська наукова конференція імені Б. В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ – Микуличин, 26–28 вересня 2018 р.).
23. Науковий семінар з аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів в Інституті прикладних проблем механіки і математи-

ки ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2000-2018 рр., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д.ф.-м.н., с.н.с. Х. Й. Кучмінська).

24. Науково-навчальний семінар "Теорія потенціалу та її застосування" в Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків, д.ф.-м.н., проф. І. Е. Чижиков).
25. Науковий семінар "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 29 листопада 2017 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук, д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко).
26. Науковий семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (Київ, 21 лютого 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Г. М. Торбін).
27. Науковий семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 2 березня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. С. Романюк).
28. Науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ, 5 вересня 2018 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк).