Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Баранник Тетяна Анатоліївна

УДК 517.9

Симетрія і точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
Нікітін Анатолій Глібович
доктор фіз.–мат. наук, професор

Київ — 2005

ЗМІСТ

Вступ **4**

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури **15**

РОЗДІЛ 2

Основні теоретичні відомості та методи дослідження **23**

2.1. Класичний, прямий і некласичний методи симетрійної редукції нелінійних рівнянь в частинних похідних 23

2.2. Метод дослідження класичної і умовної симетрій системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії 28

2.3. Висновки до розділу 2 32

РОЗДІЛ 3

Хвильові та інші розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності **33**

3.1. Анзаци і редукція нелінійних рівнянь реакції-дифузії . . . 34

3.2. Нескінченні множини розв'язків 37

3.3. Розв'язки для довільного n 44

3.4. Точні розв'язки рівняння Фішера та його узагальнення 50

3.5. Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії 57

3.6. Точні розв'язки рівняння реакції-дифузії з експоненціальною нелінійністю 63

3.7. Висновки до розділу 3 68

РОЗДІЛ 4

Симетрія і точні розв'язки системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії 69

4.1. Умови галілеївської інваріантності для системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії 70

4.2. Системи рівнянь реакції-дифузії, інваріантні відносно груп Галілея 81

4.3. Симетрійна редукція системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії 91

4.4. Умовна симетрія і точні розв'язки одновимірного векторного рівняння дифузії 95

4.5. Умовна симетрія багатовимірного векторного рівняння дифузії 112

4.6. Солітоноподібні розв'язки системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії 118

4.7. Висновки до розділу 4 128

Висновки 129

Список використаних джерел 131

ДОДАТОК А

Симетрійна редукція системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії 141

Вступ

Актуальність теми. Абсолютна більшість математичних моделей фізики, біології, хімії та інших природничих наук, а також економіки, фінансової математики тощо, формулюється з використанням диференціальних рівнянь. Тому невід'ємною складовою частиною згаданих наук є дослідження спеціальних класів диференціальних рівнянь і побудова їх точних розв'язків. Так, процеси теплопровідності і реакції-дифузії описуються рівняннями вигляду

$$u_t - u_{xx} = f(u), \tag{0.1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ці рівняння знаходять широке застосування в багатьох моделях теорії тепломасопереносу, математичній хімії, математичній біології, генетиці, а також в багатьох інших галузях [10, 19, 21, 28, 31, 82]. Зауважимо, що рівняння (0.1) є рівнянням Колмогорова-Петровського-Піскунова при умові, що $f(u)$ — достатньо гладка функція, яка задовольняє співвідношення $f(0) = f(1) = 0$.

Важливими конкретними випадками рівняння (0.1) є рівняння Фішера, Ньюела-Вайтхедта, Хакслі, Фітцхью-Нагумо.

Ще більш широке застосування знаходять системи нелінійних рівнянь дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u), \tag{0.2}$$

де залежна змінна $u =$ стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є n - компонентною вектор-функцією, кожна з компонент вектора u є функцією від $m+1$ змінних $t, x_1, \ldots, x_m$, $f =$ стовпець$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ є вектор-функцією від u, A — стала квадратна матриця порядку n, $\det A \neq 0$. Такі системи відіграють важливу роль в математичній біології, хімії, генетиці, вони є загальноприйнятим математичним описанням збурених середовищ, при цьому u — вектор стану елементарного об'єму збуреного середовища. У середовищі хімічної природи компоненти вектор-функції u представляють концентрацію реагентів, матриця A визначає коефіцієнти їх дифузії, нелінійна функція $f(u)$ задає інтенсивність хімічних реакцій, які відбуваються в кожному елементарному об'ємі. У середовищах іншої природи компоненти вектор-функції u можуть характеризувати температуру або величину електричного потенціалу, а коефіцієнти матриці A можуть бути коефіцієнтами теплопровідності або питомої електричної провідності.

Дисертація присвячена побудові точних розв'язків для широких класів рівнянь (0.1) і (0.2). Точні розв'язки диференціальних рівнянь відіграють дуже важливу роль в теоретичних і прикладних дослідженнях. Вони є ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей, ефективності наближених методів. Відомо багато методів для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь: метод Пуасона, метод Фур'є, метод оберненої задачі розсіювання. Регулярний метод побудови точних розв'язків є складовою частиною групового аналізу диференціальних рівнянь, створеного Софусом Лі. Відзначимо, що груповий аналіз є основним інструментом при встановленні відносин еквівалентності в різних класах рівнянь, побудові законів збереження, знаходженні точних розв'язків тощо.

Класичний підхід Лі набув подальшого розвитку в працях сучасних математиків, насамперед Л.В. Овсяннікова [24–27]. Важливим узагальненням теорії Лі є метод умовних симетрій, перші паростки якого з'явилися у працях Г. Біркгофа, а остаточне становлення відбулось у роботах Д. Блумана [51], Д. Леві, П. Вінтерніца [80], Олвера [92, 93], а особливо в працях В.І. Фущича та його учнів [41, 66, 72].

Згадані вище методи широко застосовувалися для побудови точних розв'язків рівнянь (0.1), (0.2), але отримані результати відносяться до дуже обмеженого класу таких рівнянь. Методи класичного групового аналізу і умовних симетрій дозволяють знаходити спеціальні підстановки (анзаци), що редукують досліджуване рівняння до більш простого вигляду, чи навіть знаходити явні розв'язки. Слід зауважити, що історично багато з цих анзаців були отримані без використання групових методів. Як приклад можна навести анзац Баренблатта і анзац, добре відомий під назвою анзаца Коула-Хопфа

$$u = -2\mu \frac{v_x}{v}, \quad v = v(t, x), \tag{0.3}$$

який лінеаризує класичне рівняння Бюргерса. Зауважимо, що вперше цей анзац зустрічається у роботі А.Р. Форсайта 1906 року [64]. Відзначимо, що умовно-симетрійний підхід включає в себе пошук розв'язків нелінійних визначальних рівнянь, які в багатьох випадках не простіші, ніж рівняння, симетрія яких досліджується [98]. Тому в окремих випадках прямий пошук анзаців є більш простою і ефективною процедурою, ніж пошук умовних симетрій. Для знаходження точних розв'язків рівнянь (0.1), (0.2) у дисертації використовуються як симетрійні методи (класичний груповий аналіз та метод умовних симетрій), так і метод прямого пошуку анзаців.

У моделях математичної біології відіграють важливу роль спеціальні розв'язки типу одинокої хвилі. Вважається, що розв'язки саме такого типу описують, наприклад, розповсюдження сигналу в нейронних клітинках. В зв'язку з цим певний інтерес викликає селекція таких рівнянь виду (0.1), (0.2), що допускають розв'язки такого (солітонного) типу.

Таким чином, задача побудови нових точних розв'язків рівнянь (0.1), (0.2), а також опису класів таких рівнянь, що мають розв'язки солітонного типу, є актуальною та має прикладне і теоретичне значення.

Одним із важливих використань групового аналізу є побудова моделей з заданими симетрійними властивостями. Серед цих властивостей домінуючою є вимога інваріантності відносно перетворень Галілея, якій повинні задовольняти абсолютно всі моделі, при умові, що вони описують явища, які відбуваються при швидкостях значно менших швидкості світла. Повний опис рівнянь вигляду (0.1), інваріантних відносно перетворень Галілея, добре відомий [12], але галілеївські інваріантні системи описані тільки для випадку $n = 2$ [55–57, 88, 89]. Актуальна задача побудови галілеївські інваріантних систем для $n > 2$, які мають широке прикладне застосування, розв'язується в даній дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках теми "Теоретико- груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (Номер держреєстрації 0101U000098).

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є дослідження класичної та умовної симетрій системи (0.2) нелінійних рівнянь реакції-дифузії для довільних n і m, використання симетрійних властивостей таких систем для побудови їх точних розв'язків, а також пошук точних розв'язків рівнянь Колмогорова-Петровського-Піскунова, Фішера і ряду інших рівнянь, які мають широке застосування в різноманітних моделях теплопровідності і реакції-дифузії, математичній біології, хімії, генетиці. Для цього поряд з симетрійними методами використовується метод прямого пошуку анзаців, з використанням якого отримано спеціальні анзаци для проведення редукції і ефективного знаходження точних розв'язків вищезгаданих рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано спеціальні анзаци для проведення редукції і ефективного пошуку точних розв'язків нелінійних рівнянь реакції-дифузії, які є узагальненнями симетрійних і умовно-симетрійних анзаців.

2. З використанням еліптичних функцій Якобі побудовано нескінченні серії точних розв'язків одновимірного рівняння реакції-дифузії з кубічною поліноміальною нелінійністю.

3. Знайдено частинні розв'язки рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова, які належать до солітонного типу, а тому мають хороші перспективи для різноманітних застосувань. Побудовано нові точні розв'язки рівняння Фішера.

4. Досліджено умовну симетрію багатовимірного нелінійного рівняння реакції-дифузії шляхом редукції його до радіального рівняння. Встановлено, що для нелінійного рівняння реакції-дифузії з довільною кількістю незалежних змінних існують оператори умовної симетрії, причому ці оператори знайдені у явному вигляді.

5. З використанням спеціального анзацу побудовано нові точні розв'язки нелінійного рівняння реакції- дифузії з експоненціальною нелінійністю.

6. Проведено класифікацію галілеїво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії, досліджено умовну симетрію та побудовано деякі класи умовно-інваріантних розв'язків таких систем.

7. Для всіх класів систем двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, що визначені з точністю до довільних функцій від залежних змінних і володіють нетривіальною симетрією, з використанням одновимірних підалгебр проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі інваріантні розв'язки.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування прикладних задач математичної фізики, а також задач математичного моделювання в біології і хімії.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — А.Г. Нікітіну. Доведення всіх результатів дисертації проведено дисертантом самостійно. В роботах, які опубліковані разом із співавторами, особистий внесок дисертанта такий. У роботі [87] А.Г. Нікітіну належить ідея перетворення рівнянь до трилінійних, дисертанту — реалізація цієї ідеї, проведення симетрійної редукції та відшукання точних розв'язків рівнянь, які розглядаються. У роботі [48] А.Г. Нікітіну належить загальна постановка задачі і аналіз отриманих результатів, дисертанту — розв'язання задачі.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2000-2004, керівник семінару — професор А.Г. Нікітін), на науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник семінару — професор В.Г. Самойленко), на IV та V Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ 2001, 2003).

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 98 найменувань, і одного додатку. Повний обсяг дисертації 170 сторінок, з них список використаних джерел та додаток займають 40 сторінок.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в п'яти роботах [6, 7, 47, 48, 87].

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з чотирьох розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст підрозділів даного розділу.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації. Висвітлюються основні результати, отримані в роботах попередників, та окреслюється коло питань, які залишилися невирішеними.

У другому розділі дисертації наведено основні теоретичні відомості, обговорюються методи знаходження симетрій і відомі методи пошуку точних розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Третій розділ роботи присвячений побудові точних розв'язків рівняння

$$(n-1)^2(u_t-u_{xx})=-2(n+1)u^n+2\lambda_1(n-1)u+2\lambda_2(n-1)u^{\frac{n+1}{2}}+$$
$$+2\lambda_3(n-1)u^{\frac{3-n}{2}}+2\lambda_4(n-1)u^{2-n}, \qquad (0.4)$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ — довільні сталі. Рівняння (0.4) є рівнянням типу Колмогорова-Петровського-Піскунова при умові, що

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=\frac{n+1}{n-1}.$$

Для знаходження розв'язків рівняння (0.4) використовується спеціальний анзац

$$u=\left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

У підрозділі 3.1 розглядається редукція рівняння (0.4) до системи двох рівнянь, одне з яких лінійне, а друге — звичайне диференціальне рівняння. У випадку $n=3,\ \lambda_4=0$ така система легко інтегрується і ми знаходимо розв'язки рівняння (0.4), які можна отримати також з використанням умовно-симетрійного підходу.

У підрозділі 3.2 розширено список відомих точних розв'язків рівняння (0.4) для $n=3,\ \lambda_4=0$. Знайдено нескінченні множини нових точних розв'язків рівнянь теплопровідності з кубічною поліноміальною нелінійністю, які виражаються через еліптичні функції Якобі. Так, для рівняння

$$u_t-u_{xx}=-2u^3$$

одна з нескінченних множин розв'язків задається формулою

$$u_n=2x\varphi^{(n)}(y),\quad y=x^2+6t,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

де функція $\varphi^{(n)}$ задовольняє реккурентному співвідношенню

$$\varphi^{(n)}=\frac{\varphi_y^{(n-1)}}{\varphi^{(n-1)}},\quad \varphi^{(0)}(y)=\mathrm{ds}\left(y,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad n=1,2,\ldots,$$

причому $\mathrm{ds}(y,k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = k^2(k^2-1)+(2k^2-1)\eta^2+\eta^4.$$

У підрозділі 3.3 розглядається рівняння загального вигляду (0.4) з довільними параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$. Показано, що і в цьому випадку існують класи точних розв'язків рівняння (0.4). Так, у випадку $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}<0$, $\lambda_1=-k\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2},\ \lambda_4=(1-k)\left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2$ знайдено такі розв'язки рівняння (0.4):

$$u=\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\tanh\left(b\left(\frac{\sqrt{2}}{n-1}x+\frac{\lambda_2(n-1)}{\sqrt{2}}t\right)+C\right)\right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (0.5)$$

$$u=\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\tanh\left(b\left(\frac{\sqrt{2}}{n-1}x+\frac{\lambda_2(n-1)}{\sqrt{2}}t\right)+C\right)\right)^{\frac{2}{1-n}}, \quad (0.6)$$

де $b=(n-1)\sqrt{-\dfrac{\lambda_3}{2\lambda_2}}$. Якщо $\dfrac{2}{n-1}>1$, то формули (0.5) визначають розв'язки, які мають вигляд уособленої хвилі і поширюються зі швидкістю $\dfrac{\lambda_2(n-1)}{\sqrt{2}}$. Якщо $\dfrac{2}{n-1}<-1$, то (0.5) є сингулярним розв'язком, що описує режим із загостренням. Однак, у цьому випадку рівняння (0.4) має інші солітоноподібні розв'язки, які визначаються формулою (0.6). Отже, ми бачимо, що такі розв'язки існують для широкого класу нелінійних рівнянь реакції-дифузії.

У підрозділі 3.4 розглядається детально важливий випадок рівняння (0.4), а саме, коли це рівняння локально еквівалентне рівнянню Фішера. Знайдено нові точні розв'язки рівняння Фішера і запропоновано таке узагальнення цього рівняння, яке допускає хвильові розв'язки, подібні до розв'язків рівняння Фішера, але швидкість поширення яких є довільною.

У підрозділі 3.5 досліджується умовна симетрія і будуються точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії

$$u_t=\triangle u+f(u), \quad (0.7)$$

де $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$, $f(u)$ — функція від залежної змінної u,

$$\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Показано, що у випадку $f(u) = \pm u^k$ рівняння (0.7) допускає оператори умовної симетрії для довільного n, причому ці оператори умовної симетрії знайдені в явному вигляді.

Четвертий розділ дисертації присвячений вивченню класичної та умовної симетрій системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії.

У підрозділі 4.1 визначаються умови, при яких система (0.2) інваріантна відносно перетворень Галілея. Показано, що з точністю до локального перетворення такими будуть ті і тільки ті системи (0.2), у яких функція $f(u)$ задовольняє систему рівнянь

$$(A^{-1})^{kb} f^b = (A^{-1})^{ab} u^b \frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{0.8}$$

У підрозділі 4.2 дисертації пропонується опис систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно групи Галілея. В залежності від типу матриці A^{-1} знайдені всі можливі нелінійні форми $f_k(u)$; їх відшукання зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (0.8). Типовим прикладом результатів, представлених у цьому підрозділі, є наступна теорема.

Теорема 0.1. *Якщо матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n,\lambda}$, то загальний розв'язок системи (0.8) утворюють функції*

$$f_k = u_1 \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^p p!} \varphi_{k-p} \ln^p u_1, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{0.9}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є довільними функціями від

$$C_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{k+1-p}}{u_1} \ln^p u_1, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

У підрозділі 4.3 наведено деякі результати симетрійної редукції системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, проведеної за одновимірними підалгебрами алгебри інваріантності цієї системи. Знайдено анзаци, які редукують досліджувану систему до звичайних диференціальних рівнянь, і наведено випадки, коли редуковану систему вдається проінтегрувати. Повний перелік анзаців і відповідних їм редукованих систем подано у додатку.

Умовна симетрія системи (0.2) досліджувалася в підрозділах 4.4 і 4.5. Встановлено, що оператори умовної симетрії існують для будь-якої кількості залежних змінних u при умові, що матриця дифузії є діагональною і має спеціальний вигляд, а також показано, як будувати ці оператори в явному вигляді. Приклад одного з таких операторів подано в наступній теоремі.

Теорема 0.2. *Оператор*

$$X = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x+k}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{(x+k)^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \le l \le n,$$

є оператором умовної симетрії системи (0.2) тоді і тільки тоді, коли

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}, \ I_l - \textit{одинична матриця порядку } l \tag{0.10}$$

$$f^i = u_i^3\varphi_i \ \ (i = 1, \ldots, l), \quad f^j = u_1^2\varphi_j, (j = l+1, \ldots, n),$$

причому

a) якщо $l = 1$, *то* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $u_2, \ldots, u_n$;
b) якщо $l = n$, *то* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$;
c) якщо $1 < l < n$, *то* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$.

У підрозділі 4.6 з використанням операторів умовної симетрії знайдено точні розв'язки системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, причому серед них є досить цікаві з фізичної точки зору розв'язки типу одинокої хвилі.

В кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору **Нікітіну Анатолію Глібовичу** за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі. Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

Невід'ємною частиною будь-якої сучасної фізичної теорії є математичні моделі, які описуються, як правило, нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних. Ці рівняння математичною мовою відображають реальні фізичні процеси. Тому пошук точних розв'язків таких рівнянь є однією з важливих і в той же час складних проблем математичної і теоретичної фізики.

Серед рівнянь математичної фізики, які привертають до себе постійну увагу, виділяються нелінійні рівняння реакції-дифузії, які мають такий вигляд

$$u_t - u_{xx} = f(u), \tag{1.1}$$

де $u = u(t,x)$, $f(u)$ — деяка фіксована функція від залежної змінної. Якщо $f(u)$ — достатньо гладка функція, яка задовольняє співвідношення $f(0) = f(1) = 0$, то рівняння (1.1) є рівнянням Колмогорова-Петровського-Піскунова.

Багато робіт було присвячено вивченню симетрійних властивостей, проведенню групової класифікації, а також пошуку точних розв'язків цих рівнянь. Розглянемо більш детально результати отримані в них і окреслимо коло питань, які залишилися невирішеними.

Однією з центральних проблем групового аналізу є групова класифікація диференціальних рівнянь, яка дозволяє визначити нееквівалентні класи диференціальних рівнянь і відкриває шлях до застосування потужних теоретико-групових методів. Нагадаємо, що груповий аналіз диференціальних рівнянь виник як науковий напрямок у роботах видатного математика XIX століття Софуса Лі (1842–1899) і став основою його найважливішого творіння — теорії неперервних груп. Пізніше багато авторів використовували та розвивали лієвські ідеї для вивчення диференціальних рівнянь у частинних похідних механіки та фізики. Так, класична робота Біркгофа [8] присвячена побудові точних розв'язків нелінійних рівнянь гідродинаміки за допомогою лієвського методу. Груповий аналіз отримав істотний розвиток в роботах Н.Х. Ібрагімова [14] і Л.В. Овсяннікова [24–27]. Сучасний розвиток теоретико-групових методів стосовно задач математичної фізики висвітлено в [5,9,17,18,22,34,41,52,90]. Перші досягнення в груповій класифікації належать самому Лі. Він класифікував звичайні диференціальні рівняння другого порядку і визначив всі випадки, коли такі рівняння можуть бути проінтегровані в квадратурах [81]. Лі представив також групову класифікацію широкого класу рівнянь у частинних похідних, а саме лінійних рівнянь з двома незалежними змінними. Відзначимо, що груповий аналіз рівняння (1.1) у випадку $f(u) = 0$ був виконаний Софусом Лі більш, ніж 130 років тому [81].

Групову класифікацію рівняння нелінійної теплопровідності

$$u_t = (f(u)u_x)_x, \tag{1.2}$$

яке виникає при описанні різних фізичних процесів, виконав Л.В. Овсянніков [26]. Задача групової класифікації для рівняння (1.2) полягає в знаходженні групи точкових перетворень, яку допускає рівняння (1.2) для довільної функції $f(u)$, а також в переліку всіх частинних випадків, які приводять до розширення групи допустимих перетворень в порівнянні з випадком довільної функції $f(u)$. Групова класифікація проводиться з точністю до перетворень еквівалентності, які не змінюють диференціальної структури рівняння (1.2), а змінюють лише функцію $f(u)$. Два рівняння типу (1.2), які отримуються одне з одного шляхом такого перетворення, називаються еквівалентними. Л.В. Овсянніков показав, що серед всіх рівнянь виду (1.2) рівняння

$$u_t = (\lambda u^{-\frac{4}{3}} u_x)_x$$

допускає найбільшу групу точкових перетворень. У цьому випадку алгебра інваріантності рівняння є п'ятивимірною, в усіх інших випадках — чотиривимірною або тривимірною. І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов [3] доповнили цю класифікацію, використавши нелокальні симетрії. Групова класифікація рівняння

$$u_t = (G(u)u_x)_x + g(u)$$

була проведена В.А. Дородніциним [12]. З проведених ним досліджень випливає, що для нелінійного рівняння (1.1) існують лише три випадки розширення групи допустимих перетворень:

$$a)\ f(u) = u^n \ \ (n \neq 0, 1); \ \ b)\ f(u) = e^u; \ \ c)\ f(u) = a \ln u + bu.$$

Подальше дослідження рівняння (1.1) знаходимо у роботах В.І. Фущича і М.І. Сєрова [35]. Ними було започатковано систематичне вивчення умовної симетрії цього рівняння для випадку $f(u) = au^3 + bu + c$. Вони показали, що в цьому випадку рівняння (1.1) умовно інваріантне відносно оператора

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3}\sqrt{2au}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}(au^3 + bu + c)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Більше того, рівняння (1.1) умовно інваріантне відносно оператора

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad \xi_u \neq 0,$$

тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне одному з таких рівнянь:

$$u_t - u_{xx} = au^3, \tag{1.3}$$

$$u_t - u_{xx} = au(u^2 - 1), \tag{1.4}$$

$$u_t - u_{xx} = au(u^2 + 1), \tag{1.5}$$

$$u_t - u_{xx} = a(u^3 - 3u + 2). \tag{1.6}$$

Вичерпний аналіз умовних симетрій рівняння (1.1) був виконаний П. Кларксоном і Е. Мансфелд [59]. Вони встановили, що рівняння (1.1) умовно інваріантне відносно таких операторів:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x+k}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{(x+k)^2}u\frac{\partial}{\partial u}, \text{ якщо } f(u) = au^3;$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\tan(\mu x + k)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\sec^2(\mu x + k)u\frac{\partial}{\partial u},$$

якщо $f(u) = au^3 - 2\mu^2 u$;

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\coth(\mu x + k)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\mathrm{cosech}^2(\mu x + k)u\frac{\partial}{\partial u},$$

якщо $f(u) = au^3 + 2\mu^2 u$,

k — довільна стала. Ці симетрії дозволяють побудувати точні розв'язки рівняння (1.1), які виражаються через еліптичні функції Якобі.

Отже, метод умовної (некласичної) симетрії [51, 66, 80] дає можливість будувати нові точні розв'язки диференціальних рівнянь у частинних похідних, які не можна знайти в рамках класичного лієвського підходу. Але як бачимо з робіт В.І. Фущича, М.І. Сєрова та П. Кларксона і Е. Мансфелд цей метод був успішно використаний тільки для рівнянь (1.1), у яких права частина є поліномом третього степеня.

Розглянемо деякі часткові випадки рівняння (1.1), які мають важливі застосування.

Одним з фундаментальних рівнянь математичної біології є рівняння Фішера [82], яке має наступний вигляд

$$u_t - u_{xx} = u(1 - u). \tag{1.7}$$

Це рівняння використовується в задачах тепломасоперенесення, теорії горіння, екології, популяційній генетиці. Воно описує, наприклад, масоперенесення в двохкомпонентній нерухомій суміші при наявності об'ємної хімічної реакції квазіпершого порядку. Кінетична функція $f(u) = u(1 - u)$ моделює також автокаталітичне ланцюгове перетворення в теорії горіння. Добре відомим розв'язком рівняння (1.7) є розв'язок, отриманий

Абловіцем і Зепетеллою [44]

$$u = \frac{1}{(1 + Ce^{\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{5t}{6}})^2}, \tag{1.8}$$

який являє собою плоску хвилю, що рухається зі швидкістю $\frac{5}{\sqrt{6}}$.

Узагальненнями рівняння (1.7) є рівняння

$$u_t = u_{xx} + u - u^k, \tag{1.9}$$

$$u_t = u_{xx} + u^p - u^{2p-1}, \tag{1.10}$$

які вивчалися в [75, 78]. Ці рівняння також допускають точні розв'язки типу плоскої хвилі.

Рівняння теплопровідності з кубічною нелінійністю

$$u_t - u_{xx} = \alpha(u^3 + bu^2 + cu), \tag{1.11}$$

де $\alpha = \pm 1$, b і c — сталі, також має велике прикладне значення і включає як часткові випадки рівняння Фітцхью-Нагумо [62, 83] (для $\alpha = -1$, $b = -(c+1)$, $0 < c < 1$), яке використовується в генетиці, рівняння Ньюела-Вайтхедта [85] (для $c = -\alpha = 1$, $b = 0$) і рівняння Хакслі [82] (для $\alpha = b = -1$, $c = 0$). Відомо, що ці рівняння не інтегруються методом оберненої задачі розсіювання [1, 23], однак мають спеціальні класи точних розв'язків, які отримані в цілому ряді робіт [53, 54, 74, 95, 96]. Всі вищезгадані рівняння можна розглядати як часткові випадки рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова [16].

Важливою властивістю таких рівнянь є те, що вони допускають плоскохвильові розв'язки, які в багатьох випадках можна знайти в явному вигляді. Існування таких розв'язків пояснюється симетрією рівняння (1.1) відносно перетворень $t \to t + k_1$, $x \to x + k_2$, де k_1, k_2 — сталі. Для деяких спеціальних функцій $f(u)$ ці рівняння мають більш широкі групи симетрій [12], а тому і розв'язки більш загального виду, ніж плоскі хвилі.

Широке застосування в теорії тепломасопереносу, а також в математичній біології та хімії знаходять системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u), \tag{1.12}$$

де залежна змінна $u =$ стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є n - компонентною вектор-функцією, кожна з компонент вектора u є функцією від $m+1$ змінних $t, x_1, \ldots, x_m$, $f =$ стовпець$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ є вектор-функцією від u, A — стала квадратна матриця порядку n, $\det A \neq 0$. Відмітимо, що важливими частинними випадками системи (1.12) для $n = 2$ є комплексне рівняння Ландау-Гінзбурга і нелінійне рівняння Шрьодінгера в $m-$вимірному просторі, яке використовується у нелінійній оптиці, а також нелінійній квантовій механіці. Тому симетрійний аналіз системи рівнянь (1.12) має велике прикладне значення і може бути використаний, наприклад, для побудови точних розв'язків широкого класу фізичних і біологічних систем. Перша спроба класифікувати систему (1.12) у випадку $n = 2$ належить Ю.А. Данілову [60], який обмежився випадком діагональної матриці. Але результати, отримані у роботі [60], є дуже неповними. Дослідження лієвських симетрій системи (1.12) при $n = 2$ з діагональною матрицею було проведено у роботах [55–57], а з матрицею дифузії загального вигляду — у роботах [88, 89]. Завершеного вигляду ця класифікація досягла у роботі [86]. Відмітимо, що задачу групової класифікації не завжди можна розв'язати, використовуючи тільки добре відомі методи. Наприклад, система (1.12) у випадку $n = 2$ має два довільних елементи f^1 і f^2, тому підхід, застосований Овсянніковим для класифікації одновимірного нелінійного рівняння (1.2) не є ефективним, адже, як показано в [86], в цьому випадку кількість нееквівалентних систем досягає трьохста. Отже, природно шукати більш ефективні підходи, які дозволяють проводити групову класифікацію. У роботах А.Г. Нікітіна і Р. Вільтшире [88, 89] запропоновано ефективний алгоритм дослідження класичної і умовної симетрій, який може бути застосований до рівняння (1.12) з довільними n і m. Перший крок цього алгоритму полягає в тому, що оператор лієвської симетрії рівняння (1.12) шукається у вигляді

$$Q = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi^a\frac{\partial}{\partial x_a} - \pi^a\frac{\partial}{\partial u_a},$$

де η, ξ^a є функціями від t і x_a, $\pi^a = \pi^{ab}u_b - \omega^a$ і функції π^{ab}, ω^a залежать тільки від t і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Умови, при яких оператор симетрії має таке представлення, наведені в роботі [50]. Другий крок алгоритму — коефіцієнти η, ξ^a і π^a визначаються з умови, що для оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

комутатор $[Q, L]$ допускає представлення

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi, \tag{1.13}$$

де Λ, φ — квадратні матриці порядку n, елементи яких є функціями від (t, x). Третій крок — розв'язавши операторне рівняння (1.13) і визначивши відповідні матриці Λ, $\pi = (\pi^{ab})$, φ, а також функції η, ξ^a, ми можемо знайти всі нелінійності f_k, розв'язавши систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$(\Lambda^{kb} - \pi^{kb})f^b + \varphi^{kb}u^b + L\omega^k = (-\pi^{ab}u_b + \omega^a)\frac{\partial f^k}{\partial u_a}.$$

У вищезгаданих роботах для випадку $n = 2$ був проведений також повний аналіз лієвських симетрій рівняння. Слід підкреслити, що наведений алгоритм є не що інше, як спеціальне формулювання класичного алгоритму Лі, але це формулювання виявляється дуже зручним для систем рівнянь реакції-дифузії і багатьох інших систем рівнянь в частинних похідних.

Важливий інтерес представляють системи (1.12), які інваріантні відносно перетворень Галілея

$$x'_a = x_a + v_a t + b_a, \quad t' = t + b_0,$$

де v_a — швидкість інерційної системи відліку K', що рухається відносно системи K із швидкістю v_a. Вимога інваріантності математичних моделей різних фізичних, хімічних, біологічних та інших систем відносно перетворень Галілея — це не що інше, як математичне трактування принципу відносності Галілея, який стверджує еквівалентність всіх інерціальних систем відліку [65]. У роботах А.Г. Нікітіна і Р. Вільтшире [88, 89] висловлено припущення, що система (1.12) інваріантна відносно операторів Галілея

$$G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + \varphi_k \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad \varphi_k = \varphi_k(t, x, u)$$

тоді і тільки тоді, коли функція $f(u)$ задовольняє таку систему рівнянь:

$$(A^{-1})^{kb} f^b = (A^{-1})^{ab} u^b \frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{1.14}$$

Якщо функції φ_k мають вигляд

$$\varphi_k = x_a B^{kb} u_b$$

і $B = -\dfrac{1}{2}A^{-1}$, то це безпосередньо випливає з вищеназваних робіт [88, 89]. У цьому випадку задача класифікації системи (1.12), інваріантної відносно перетворень Галілея, зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (1.14). Отже, задача класифікації галілеїво-інваріантних систем в загальному випадку залишалася невирішеною. Ця задача розглядається в четвертому розділі даної дисертації, результати цих досліджень можуть бути використані для подальшого вивчення системи (1.12), зокрема знаходження її розв'язків.

РОЗДІЛ 2

Основні теоретичні відомості та методи дослідження

У даному розділі дисертації наведено основні теоретичні відомості, вказано методи знаходження симетрій і відомі методи пошуку точних розв'язків рівнянь в частинних похідних.

У підрозділі 2.1 описано класичний алгоритм знаходження симетрій диференціальних рівнянь та метод симетрійної редукції. Висвітлено метод некласичної симетрії і метод прямої редукції.

У підрозділі 2.2 викладені основні положення методу дослідження класичної і умовної симетрій системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії, запропонованого у роботах А.Г. Нікітіна і Р. Вільтшире [88, 89].

2.1. Класичний, прямий і некласичний методи симетрійної редукції нелінійних рівнянь в частинних похідних

Основний метод обчислення груп симетрій, який грунтується на формулах продовження для їх інфінітезімальних твірних, належить Софусу Лі. Довільна система диференціальних рівнянь порядку n від p незалежних і q залежних змінних задається як система рівнянь

$$\triangle\nu(x,\ u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l, \tag{2.1}$$

що містить $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $u = (u^1, \ldots, u^q)$ і похідні від u по x до порядку n включно. Однопараметрична група перетворень G простору

$X \times U$, координати якого виступають як незалежні і залежні змінні, має вигляд

$$x_i^* = x_i + \varepsilon\xi^i(x,u) + o(\varepsilon^2),$$
$$u^{\alpha *} = u^\alpha + \varepsilon\varphi_\alpha(x,u) + o(\varepsilon^2), \tag{2.2}$$

де ε — груповий параметр. Групі G відповідає оператор

$$X = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{2.3}$$

який називається інфінітезімальним оператором групи G. Групу G можна однозначно продовжити до однопараметричної групи $\underset{n}{G}$ перетворень простору $X \times U^{(n)}$, координати якого представляють собою незалежні і залежні змінні, а також різні частинні похідні, що зустрічаються в системі (2.1). Інфінітезімальний оператор $\underset{n}{X}$ продовженої групи $\underset{n}{G}$ дорівнює

$$\underset{n}{X} = X + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \varphi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{2.4}$$

де друге сумування ведеться по всіх мультиіндексах $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq \leq j_x \leq p$, $1 \leq k \leq n$. Функції φ_α^J в (2.4) визначаються такою формулою

$$\varphi_\alpha^J(x,u^{(n)}) = D_J(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{2.5}$$

де

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}, \quad u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x_i}, \quad D_j = D_{j_1}D_{j_2}\ldots D_{j_k},$$

D_j — оператор повного диференціювання по змінній x_j:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + u_j^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{jj_1}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{j_1}^\alpha} + \ldots$$

Критерій інваріантності системи (2.1) відносно групи G має вигляд

$$\underset{n}{X}\triangle_\nu = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l, \tag{2.6}$$

для $\triangle_1(x, u^{(n)}) = 0, \ldots, \triangle_l(x, u^{(n)}) = 0$. З умови інваріантності (2.6) отримуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат $\xi^i(x,u)$, $\varphi_\alpha(x,u)$ інфінітезімального оператора (2.3).

Позитивним аспектом класичного методу Лі є те, що система визначальних рівнянь є лінійною, а відповідні векторні поля утворюють алгебру Лі, що є ефективним для практичних застосувань. Безпосередні обчислення для знаходження групи симетрій даного диференціального рівняння є достатньо алгоритмічні і тому піддаються виконанню на комп'ютері з допомогою програм символьних обчислень. Проте для багатокомпонентних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних цей алгоритм реалізувати досить складно.

Всі розв'язки системи (2.1), інваріантні відносно однопараметричної групи G, можна знайти, інтегруючи систему диференціальних рівнянь Лагранжа-Ейлера

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \ldots = \frac{dx_p}{\xi^p} = \frac{du_1}{\varphi_1} = \ldots = \frac{du^q}{\varphi_q}. \tag{2.7}$$

Система (2.7) має $p + q - 1$ функціонально незалежних розв'язків. Ці розв'язки розбиваємо на два класи

$$y_1(x,u), \ldots, y_{p-1}(x,u),$$
$$v_1(x,u), \ldots, v_q(x,u),$$

що відповідають новим незалежним і залежним змінним відповідно. Вибір незалежних і залежних змінних здійснюється, як правило, згідно з вимогою, що $y_1, \ldots, y_{p-1}$ не залежать від u. Тоді анзац

$$v_i = h_i(y_1, \ldots, y_{p-1}), \quad i = 1, \ldots, q \tag{2.8}$$

редукує (2.1) до системи, що містить тільки $y_1, \ldots, y_{p-1}, h_1, \ldots, h_q$ і похідні від $h_1, \ldots, h_q$ по $y_1, \ldots, y_{p-1}$. Така редукція називається симетрійною. Якщо $p = 2$, то анзац (2.8) має вигляд

$$v_i = h_i(y_1), \quad i = 1, \ldots, q$$

і редукує (2.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Саме з використанням класичного методу Лі були отримані широкі класи точних розв'язків нелінійних рівнянь реакції-дифузії [13,33,36,59], Даламбера [34, 41, 68, 70], Нав'є-Стокса [27, 41], Дірака [37, 39, 40, 70, 71] та багато інших важливих нелінійних рівнянь математичної фізики [8, 9, 14, 32, 37, 38, 65, 67, 69, 73, 97].

Існує ряд узагальнень класичного методу Лі симетрійної редукції. Овсянніков [25, 26] розвинув метод частково інваріантних розв'язків. В окремих випадках такі розв'язки можна знайти з допомогою розв'язків редукованої системи диференціальних рівнянь з меншим числом незалежних змінних, але проміжні обчислення значно складніші, ніж в повністю інваріантному випадку. Зовсім недавно Ондіч [94] показав, що цей метод можна розглядати як окремий випадок методу диференціальних зв'язків, запропонованого в роботах М.М. Яненко [43], П. Олвера, Ф. Розенау [92, 93]. Добре відомо, що значну кількість точних розв'язків рівнянь можна отримати, виділяючи ці розв'язки з допомогою диференціальних зв'язків. Ця обставина є однією з причин інтересу, який проявляється до пошуку диференціальних зв'язків. Проблема знаходження диференціальних зв'язків, сумісних з деякими рівняннями, може виявитися складнішою, ніж розв'язування самих рівнянь. Тому приходиться обмежуватися пошуком тільки певних класів зв'язків, причому відповідні класи необхідно наперед задавати, виходячи з яких-небудь додаткових міркувань.

Важливим узагальненням теорії Лі є метод умовних симетрій, запропонований в роботах Д. Блумана, Д. Коула [51], Д. Леві, П. Вінтерністца [80], П. Олвера [92, 93], В.І. Фущича та його учнів [41, 66, 72].

Нехай

$$\triangle(x, u^{(n)}) = 0 \tag{2.9}$$

є диференціальним рівнянням порядку n, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in R^p$, $u \in R$. Ідея, яка лежить в основі методу умовних симетрій, полягає в тому, що з усієї множини розв'язків рівняння (2.9) виділяються підмножини, симетрії яких суттєво відрізняються від симетрії рівняння (2.9). Ефективною умовою, що виділяє такі розв'язки, є диференціальне рівняння першого порядку

$$\sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \varphi(x,u) = 0. \tag{2.10}$$

Невідомі функції $\xi^i(x,u)$, $\varphi(x,u)$ визначають з припущення, що система (2.9), (2.10) є інваріантною відносно оператора

$$X = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.11}$$

Використовуючи формули (2.4), (2.5) продовження оператора X і критерій (2.6) інваріантності системи (2.9), (2.10) відносно X, приходимо до системи визначальних рівнянь для знаходження функцій $\xi^i(x,u)$, $\varphi(x,u)$. Ця система на відміну від повністю інваріантного випадку є нелінійною і в багатьох випадках відшукання її розв'язків є задачею не простішою, ніж пошук розв'язків даного рівняння (2.9). Техніка знаходження розв'язків, інваріантних відносно оператора (2.11), є такою самою, що і в класичному підході. Оскільки система визначальних рівнянь є нелінійною, відповідні векторні поля не утворюють алгебру Лі, а тому обчислення на комп'ютері з допомогою відповідних програм є обмеженими.

В серії робіт Фущича В.І. та його учнів [41, 68] запропоновано прямий метод редукції рівняння (2.9). У цьому методі розв'язки рівняння шукають у вигляді

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{2.12}$$

де на функції $f(x)$, $g(x)$, $\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_{p-1}(x))$ накладають вимогу, щоб анзац (2.12) редукував (2.9) до диференціального рівняння в частинних похідних з невідомою функцією $\varphi = \varphi(\omega)$. Такий анзац у випадку

$p = 2$ редукує (2.9) до звичайного диференціального рівняння. У випадку $p = 2$ ефективним для пошуку розв'язків рівняння (2.9) є також анзац виду

$$u(x) = U(x, \omega(z)), \quad z = z(x), \tag{2.13}$$

який розглядався в роботі П. Кларксона і М. Крускала [58] і який є узагальненням анзацу (2.12). Функція $U(x, \omega(z))$ визначається з умови, що анзац (2.13) редукує рівняння (2.9) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $\omega = \omega(z)$.

У роботі П. Олвера [91] досліджувався зв'язок між методом прямої редукції (2.13) і методом умовної симетрії. Він показав, що існує взаємно однозначна відповідність між анзацами прямого методу (2.13) з умовою $U_\omega \neq 0$ і квазілінійними диференціальними зв'язками першого порядку

$$\xi^1(x)u_{x_1} + \xi^2(x)u_{x_2} + \varphi(x, u) = 0. \tag{2.14}$$

Більше того, анзац (2.13) редукує рівняння (2.9) до звичайного диференціального рівняння відносно невідомої функції $\omega = \omega(z)$ тоді і тільки тоді, коли система диференціальних рівнянь (2.9), (2.14) є сумісною.

2.2. Метод дослідження класичної і умовної симетрій системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Розглянемо основні положення методу дослідження класичної і умовної симетрій системи рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \tag{2.15}$$

де u =стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, f = стовпець $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$, кожна з компонент вектора u є функцією від змінних $t, x_1, \ldots, x_m$, f — вектор-функція від u, A — стала квадратна матриця порядку n, $\det A \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Виходячи з роботи [89], оператор симетрії (лієвської або умовної) системи (4.1) будемо шукати у вигляді

$$X = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi^a\frac{\partial}{\partial x_a} - \pi^a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{2.16}$$

де $\pi^a = \pi^{ab}u_b - \omega^a$ і функції π^{ab}, ω^a залежать тільки від t і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\eta = \eta(t,x)$, $\xi^a = \xi^a(t,x)$. Обмеження на коефіцієнти оператора (2.16) можна довести відносно просто з використанням стандартного алгоритму Лі, оскільки відповідні визначальні рівняння включають умови $\pi_{u_a,u_b} = 0$, $\xi^a_{u_b} = 0$, $\eta_{u_a} = 0$.

Розглянемо оператори

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad Q = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi^a\frac{\partial}{\partial x_a} + \pi,$$

де π — квадратна матриця $\pi = (\pi^{ab})$ порядку n. Оператор Q визначимо з умови, що

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{2.17}$$

де Λ, φ, θ — квадратні матриці порядку n, елементи яких є функціями від (t,x). Після відповідних обчислень комутатора (2.17) отримуємо таку систему для визначення матриць Λ, φ, θ і функцій ξ, η:

$$\begin{aligned}
&2A\xi^a_b = -\delta_{ab}(\Lambda A + [A,\pi]),\\
&\eta_a = 0,\ -\frac{\partial\eta}{\partial t}I = \Lambda + \theta\eta,\\
&\frac{\partial\xi^a}{\partial t}I - 2A\frac{\partial\pi}{\partial x_a} = -\theta\xi^a + A\xi^a_{aa},\\
&\varphi + \theta\pi = A\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^2\pi}{\partial x_b^2} - \frac{\partial\pi}{\partial t},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де

$$\xi^a_b = \frac{\partial\xi^a}{\partial x_b}, \quad \eta_a = \frac{\partial\eta}{\partial x_a},$$

I — одинична матриця порядку n, δ_{ab} — символ Кронекера.

Якщо оператор (2.16) є оператором лієвської симетрії, то в рівності (2.17) $\theta = 0$ і ми отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&2A\xi^a_b = -\delta_{ab}(\Lambda A + [A, \pi]),\\
&\eta_a = 0,\ -\frac{\partial \eta}{\partial t} I = \Lambda,\\
&\frac{\partial \xi^a}{\partial t} I - 2A\frac{\partial \pi}{\partial x_a} - A\xi^a_{aa} = 0,\\
&\varphi = A\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_b^2} - \frac{\partial \pi}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Оператори умовної симетрії можна розділити на два класи, що відповідають $\eta = 0$ і $\eta \neq 0$. Якщо $\eta \neq 0$, то не зменщуючи загальності будемо вважати, що $\eta = 1$. Тоді з другого рівняння системи (2.18) отримуємо, що $\Lambda + \theta = 0$, і система (2.18) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&2A\xi^a_b = -\delta_{ab}(\Lambda A + [A, \pi]),\\
&\Lambda + \theta = 0,\\
&\frac{\partial \xi^a}{\partial t} I - 2A\frac{\partial \pi}{\partial x_a} = \Lambda\xi^a + A\xi^a_{aa},\\
&\varphi - \Lambda\pi = A\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_b^2} - \frac{\partial \pi}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Нехай оператор (2.16) є оператором симетрії рівняння (4.1). Якщо $u = u(t, x)$ — розв'язок рівняння (4.1), інваріантний відносно оператора X, то $X(u(t, x) - u) = 0$ на многовиді $u(t, x) - u = 0$, тобто

$$\eta\frac{\partial u}{\partial t} + \xi^a\frac{\partial u}{\partial x_a} + \pi u = 0. \tag{2.21}$$

Рівність (2.21) можна записати у вигляді

$$Qu = \omega,\quad \omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$(QL)u-(LQ)u=Q(f(u))-L\omega,$$

звідки

$$[Q,L]u+L\omega=Q(f(u)).$$

Обчислимо $Q(f(u))$:

$$Q(f(u))=\frac{\partial f}{\partial u_a}(-\pi^{ab}u_b+\omega^a)+\pi f.$$

Отже,

$$[Q,L]u+L\omega=\pi f+\frac{\partial f}{\partial u_a}(-\pi^{ab}u_b+\omega^a). \tag{2.22}$$

Підставивши (2.17) в (2.22), отримуємо

$$\Lambda f+\varphi u+\theta Qu+L\omega=\pi f+\frac{\partial f}{\partial u_a}(-\pi^{ab}u_b+\omega^a),$$

звідки

$$(\Lambda-\pi)f+\varphi u+L\omega+\theta\omega=(-\pi^{ab}u_b+\omega^a)\frac{\partial f}{\partial u_a},$$

або

$$(\Lambda^{kb}-\pi^{kb})f^b+\varphi^{kb}u^b+L\omega^k+\theta^{kb}\omega^b=(-\pi^{ab}u_b+\omega^a)\frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{2.23}$$

Таким чином, для знаходження лієвської і умовної симетрії рівняння (4.1) досить розв'язати (2.19), (2.20).

Загальний розв'язок системи (2.19) має вигляд [89]

$$\begin{aligned}
&\xi^a=C^{[ab]}x_b+\dot{d}x^a+g^a,\\
&\eta=-2d,\quad \Lambda=-2\dot{d}I,\\
&\pi=\frac{1}{2}A^{-1}\left(\frac{\ddot{d}}{2}x^2+\dot{g}^ax^a\right)+C,\\
&\varphi=\frac{m}{2}\ddot{d}-\dot{C}-\frac{1}{2}A^{-1}\left(\frac{\dddot{d}}{2}x^2+\ddot{g}^ax^a\right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

де d і g^a є довільними функціями від t, C — матриця, елементи якої є функціями від t, причому $[A, C] = 0$.

Реалізувати алгоритм на підставі співвідношень (2.19)–(2.24) значно простіше, ніж класичний алгоритм Лі.

2.3. Висновки до розділу 2

У розділі 2 наведено основні теоретичні відомості, вказано методи знаходження симетрій, а також відомі методи пошуку точних розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Описано класичний алгоритм знаходження симетрій диференціальних рівнянь та метод симетрійної редукції. Викладено основні положення методу прямої редукції та методу умовних симетрій, який є важливим узагальненням лієвського підходу. Відмічено позитивні аспекти кожного з вищезгаданих методів. Висвітлено основні складові методу дослідження класичної і умовної симетрій системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії, запропонованого у роботах А.Г. Нікітіна і Р. Вільтшире. Цей метод є спеціальним формулюванням класичного алгоритму Лі, але саме таке формулювання виявляється дуже зручним для систем рівнянь реакції-дифузії і багатьох інших систем рівнянь в частинних похідних.

РОЗДІЛ 3

Хвильові та інші розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності

У даному розділі з використанням спеціальних анзаців, які мають загальну форму

$$u = z_x^k \varphi(z),$$

де z — невідома функція від змінних t і x, а φ — функція від z, будуються нові точні розв'язки широкого класу нелінійних рівнянь реакції-дифузії. Ці анзаци, зокрема, дають можливість знаходити нові розв'язки добре вивчених рівнянь теплопровідності з кубічною поліноміальною нелінійністю. У підрозділі 3.2 знайдено нескінченну множину нових точних розв'язків таких рівнянь, які виражаються через еліптичні функції Якобі.

У підрозділі 3.3 описано плоскохвильові розв'язки для спеціального класу рівнянь Колмогорова-Петровського- Піскунова.

У підрозділі 3.4 подано розширений список нових точних розв'язків рівняння Фішера, які виражаються через функції Вейєрштрасса. Запропоновано таке узагальнення рівняння Фішера, яке допускає хвильові розв'язки, подібні до розв'язків рівняння Фішера, але швидкість поширення яких є довільною.

У підрозділах 3.5, 3.6 досліджується умовна симетрія і будуються точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції- дифузії із степеневою і експоненціальною нелінійностями.

3.1. Анзаци і редукція нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Розглянемо рівняння теплопровідності із степеневою нелінійністю

$$u_t - u_{xx} = -\lambda u^n, \quad \lambda = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2}. \tag{3.1}$$

Нормуючи u параметр λ завжди можна звести до 1, якщо $n > 1$ або до -1, якщо $n < 1$. Значення параметра λ, яке вибране в (3.1) дозволяє зробити наступні обчислення менш громіздкими.

Для знаходження розв'язків рівняння (3.1) використаємо анзац

$$u = \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{3.2}$$

який перетворює рівняння (3.1) в рівняння

$$z((n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx}) + (n-3)z_{xx}^2) = z_x^2((n-1)z_t - (n+3)z_{xx}). \tag{3.3}$$

На відміну від (3.1) отримане рівняння (3.3) є однорідним відносно залежних змінних і містить нелінійності тільки третього порядку, в той час як рівняння (3.1) містить u в довільному (фіксованому) степені. Ми покажемо, що рівняння (3.3) є дуже зручним для проведення ефективної редукції.

Відзначимо, що рівняння (3.1) не є єдиним нелінійним рівнянням теплопровідності, яке може бути редуковане до трилінійної форми за допомогою анзацу (3.2). Більш загальне рівняння типу Колмогорова-Петровського-Піскунова (КПП), яке допускає таку процедуру, має вигляд

$$\begin{aligned}(n-1)^2(u_t - u_{xx}) = -2(n+1)u^n + 2\lambda_1(n-1)u+\\ + 2\lambda_2(n-1)u^{\frac{n+1}{2}} + 2\lambda_3(n-1)u^{\frac{3-n}{2}} + 2\lambda_4(n-1)u^{2-n},\end{aligned} \tag{3.4}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі.

Рівняння (3.4) є рівнянням типу КПП при умові, що

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{n+1}{n-1}. \tag{3.5}$$

Підстановка (3.2) перетворює рівняння (3.4) в рівняння

$$\begin{aligned}z[(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3) z_{xx}^2] = \\ = z_x^2[(n-1)(z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3) z_{xx}].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Отже, підстановку (3.2) можна використати для досить широкого класу рівнянь (3.4), який включає рівняння, розглянуті у розділі I, і багато інших рівнянь. В результаті ми отримуємо трилінійне рівняння (3.6), точні розв'язки якого будуть знайдені в цьому і наступному підрозділах.

Редукція рівняння (3.6) досягається, якщо прирівняти до нуля обидві частини рівняння. Вважаючи, що $z \neq 0$ і $z_x \neq 0$, матимемо таку систему:

$$(n-1)(z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3) z_{xx} = 0, \tag{3.7}$$

$$(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3) z_{xx}^2 = 0. \tag{3.8}$$

Розв'язавши (3.7) відносно z_t і підставивши z_t в (3.8), отримуємо звичайне диференціальне рівняння для z

$$4 z_x z_{xxx} + (n-3) z_{xx}^2 - (n-1)(\lambda_1 z_x^2 + \lambda_2 z_x z_{xx} + \lambda_3 z z_x + \lambda_4 z^2) = 0. \tag{3.9}$$

Отже, ми редукували рівняння (3.6) до системи рівнянь (3.7) і (3.9), одне з яких лінійне, а друге — звичайне диференціальне рівняння. У випадку $n = 3$, $\lambda_4 = 0$ рівняння (3.9) також редукується до лінійного

$$2 z_{xxx} - \lambda_1 z_x - \lambda_2 z_{xx} - \lambda_3 z = 0, \tag{3.10}$$

а рівняння (3.7) набуває вигляду

$$z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x - 3 z_{xx} = 0. \tag{3.11}$$

Система (3.10), (3.11) повністю інтегровна і може бути легко розв'язана. Тип розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню (3.10):

$$2k^3 - \lambda_2 k^2 - \lambda_1 k - \lambda_3 = 0.$$

Ці корені можуть бути

1) дійсні і різні; це має місце тоді, коли

$$\lambda_2 = 2(a+b+c),\ \ \lambda_1 = -2(ab+ac+bc),\ \ \lambda_3 = 2abc,\ \ a \neq b,\ \ a \neq c,\ \ b \neq c \tag{3.12}$$

2) дійсні і два з них рівні; при цьому

$$\lambda_2 = 4a + 2b,\ \ \lambda_1 = -2a^2 - 4ab,\ \ \lambda_3 = 2a^2 b,\ \ a \neq b \tag{3.13}$$

3) дійсні і всі три рівні; відповідні параметри λ_i $(i = 1, 2, 3)$ мають вигляд

$$\lambda_1 = -6a^2,\ \ \lambda_2 = 6a,\ \ \lambda_3 = 2a^3 \tag{3.14}$$

4) два корені комплексні:

$$\lambda_2 = 4a + 2c,\ \ \lambda_1 = -2(a^2 + b^2 + 2ac),\ \ \lambda_3 = 2c(a^2 + b^2). \tag{3.15}$$

Розв'язки системи (3.10), (3.11) залежать від трьох довільних параметрів k_1, k_2, k_3 і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&1)\ z = k_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + k_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + k_3 e^{cx+(c^2+2ab)t},\\
&2)\ z = k_1 e^{bx+(b^2+2a^2)t} + (k_2 + k_3(x + 2(a-b)t)e^{ax+(a^2+2ab)t},\\
&3)\ z = k_1 e^{ax+3a^2 t}(x^2 + k_2 x + k_3 + 6at),\\
&4)\ z = k_1 e^{cx+(c^2+2a^2+2b^2)t} + e^{ax+(a^2-b^2+2ac)t}(k_2 \sin(bx + 2b(a-c)t)+\\
&+k_3 \cos(bx + 2b(a-c)t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Підставивши (3.16) в (3.2), отримаємо точні розв'язки рівняння (3.4) у випадку $n = 3,\ \lambda_4 = 0$, тобто рівняння

$$u_t - u_{xx} = -2u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3. \tag{3.17}$$

Ці розв'язки виражаються такими функціями, де значення параметрів a, b і c визначаються формулами (3.12)– (3.15):

$$1)\ u = \frac{ak_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + bk_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + ck_3 e^{cx+(c^2+2ab)t}}{k_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + k_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + k_3 e^{cx+(c^2+2ab)t}}; \tag{3.18}$$

$$2)\ u=\frac{bk_1e^{bx+(b^2+2a^2)t}+[ak_2+k_3+ak_3(x+2(a-b)t]e^{ax+(a^2+2ab)t}}{k_1e^{bx+(b^2+2a^2)t}+(k_2+k_3(x+2(a-b)t)e^{ax+(a^2+2ab)t}};\quad(3.19)$$

$$3)\ u=\frac{2x+k_2}{x^2+k_2x+k_3+6at}+a; \qquad (3.20)$$

$$4)\ u=\frac{ck_1e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t}+bk_2\cos(bx+2b(a-c)t)-bk_3\sin(bx+2b(a-c)t)}{k_1e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t}+k_2\sin(bx+2b(a-c)t)+k_3\cos(bx+2b(a-c)t)} \qquad (3.21)$$

Отже, використавши підстановку (3.2), ми легко знаходимо точні розв'язки рівняння (3.17). Розв'язок (3.20) можна знайти з використанням класичної лієвської симетрійної редукції [59], в той час як розв'язки (3.18), (3.19) і (3.21) — з використанням умовної (некласичної) симетрії [59].

3.2. Нескінченні множини розв'язків

Редукція, розглянута в попередньому підрозділі, дає дуже простий шлях для знаходження точних розв'язків рівняння (3.4). Однак, існує і більш загальний підхід, який грунтується на безпосередньому знаходженні розв'язків нередукованого рівняння (3.6). У випадку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,\ n=3$ це рівняння і вихідне рівняння (3.4) мають такий вигляд

$$z(z_{xt}-z_{xxx})=z_x(z_t-6z_{xx}), \qquad (3.22)$$

$$u_t-u_{xx}=-2u^3. \qquad (3.23)$$

З використанням умовної симетрії точний розв'язок рівняння (3.23) був знайдений в [59] у вигляді

$$u=2x\mathrm{ds}\left(y,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad y=x^2+6t, \qquad (3.24)$$

де $\mathrm{ds}(y,k)$ — еліптична функція Якобі [4], що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 = k^2(k^2-1)+(2k^2-1)\eta^2+\eta^4. \tag{3.25}$$

У цьому підрозділі ми наводимо інші розв'язки рівняння (3.23), насправді нескінченну їх множину. Вихідним пунктом наших міркувань є дослідження умовної симетрії рівняння (3.22).

Теорема 3.1. *Рівняння (3.22) умовно інваріантне відносно оператора*

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x)\frac{\partial}{\partial x}$$

тоді і тільки тоді, коли функція $\xi = \xi(t,x)$ є розв'язком такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\xi_t - 3\xi_{xx} + 2\xi\xi_x = 0, \\ &\xi_{xt} - \xi_{xxx} + 2\xi_x^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Теорема доводиться з використанням формул другого продовження оператора X [25] і критерію умовної інваріантності рівняння відносно даного оператора [41,80].

Одним з розв'язків системи (3.26) є функція $\xi = -\dfrac{3}{x}$. Це означає, що рівняння (3.22) умовно інваріантне відносно оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x},$$

інваріантом якого є функція $y = x^2 + 6t$. Тому є сенс шукати розв'язок рівняння (3.22) у вигляді

$$z = \varphi(y), \quad y = x^2 + 6t. \tag{3.27}$$

Підставивши (3.27) в (3.22), отримуємо диференціальне рівняння третього порядку для визначення функції φ

$$\varphi\varphi_{yyy} = 3\varphi_y\varphi_{yy}. \tag{3.28}$$

Поділивши ліву і праву частини (3.28) на $\varphi\varphi_{yy}$ і проінтегрувавши, матимемо

$$\varphi_{yy} = C\varphi^3, \quad C = \pm 2, \tag{3.29}$$

де C — стала інтегрування, яка може бути зведена до 2 у випадку $C > 0$ і до -2 у випадку $C < 0$, нормуючи φ.

У відповідності з (3.2), (3.27) будь-який розв'язок рівняння (3.29) генерує розв'язок рівняння (3.22) виду

$$u = \frac{2x\varphi_y}{\varphi}. \tag{3.30}$$

Точним розв'язком рівняння (3.29) для $C = 2$ є еліптична функція Якобі

$$\varphi(y) = \mathrm{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad y = x^2 + 6t, \tag{3.31}$$

а тому розв'язок (3.30) набуває вигляду

$$u = u_1 = \frac{2x\mathrm{cs}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\mathrm{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{3.32}$$

Випадок $C = -2$ приводить до того самого розв'язку (3.32). Розв'язок (3.32) відсутній в списку розв'язків рівняння (3.23) в еліптичних функціях, який представлено в [59].

Зауважимо, що розв'язок (3.24) можна записати у вигляді

$$u = y_x\varphi(y), \tag{3.33}$$

де φ і y є функціями, які визначені формулами (3.31). Більше того, розв'язок (3.32) можна отримати із формули (3.33), якщо в ній виконати заміну $\varphi \to \dfrac{\varphi_y}{\varphi}$. Це зауваження відкриває шлях для побудови нескінченної множини точних розв'язків рівняння (3.23). Ці розв'язки ми знаходимо з використанням деяких властивостей еліптичних функцій, які сформульовані в наступних трьох твердженнях.

Твердження 3.1. *Нехай* $\varphi = \varphi^{(n)}$ *є розв'язком рівняння (3.29) для* $C = 2$ *або* $C = -2$. *Тоді*

$$\varphi^{(n+1)} = \frac{\varphi_y^{(n)}}{\varphi^{(n)}} \tag{3.34}$$

також є розв'язком рівняння (3.29).

Доведення цього твердження і наступних двох тверджень зводиться до безпосередньої перевірки. Зауважимо, що рівняння (3.29) рівносильне рівнянню

$$(\varphi_y^{(n)})^2 = (\varphi^{(n)})^4 + C_n, \tag{3.35}$$

де C_n — стала інтегрування. Тоді функція φ^{n+1}, визначена формулою (3.34), задовольняє рівняння

$$(\varphi_y^{(n+1)})^2 = (\varphi_y^{(n+1)})^4 + C_{n+1}, \quad C_{n+1} = -4C_n.$$

Твердження 3.2. *Нехай* $\varphi^{(n)}$ *є розв'язком рівняння (3.35) для* $C_n > 0$. *Тоді функція*

$$\tilde{\varphi}^{(n)} = \frac{\sqrt{C_n}}{\varphi^{(n)}} \tag{3.36}$$

теж є розв'язком рівняння (3.35).

Твердження 3.3. *Нехай* $\varphi^{(n)}$ *є розв'язком рівняння (3.35) для* $C_n = -B_n < 0$. *Тоді функція*

$$\hat{\varphi}^{(n)} = \frac{\sqrt{B_n}}{\varphi^{(n)}} \tag{3.37}$$

є розв'язком рівняння (3.29) для $C = -2$ *і виконуетъся таке співвідношення:*

$$(\hat{\varphi}_y^{(n)})^2 = -(\hat{\varphi}^{(n)})^4 + B_n^2. \tag{3.38}$$

Використовуючи твердження 3.1 і 3.2 і починаючи з (3.33), ми знаходимо нескінченні множини розв'язків рівняння (3.23):

$$u_n = 2x\varphi^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.39}$$

і

$$\tilde{u}_{2k+1} = \frac{2^{k+1}x}{\tilde{\varphi}^{(2k+1)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.40}$$

де $\varphi^{(n)}$ і $\tilde{\varphi}^{(2k+1)}$ визначаються формулами (3.34) і (3.36), а також реккурентними співвідношеннями

$$\varphi^{(n)} = \frac{\varphi_y^{n-1}}{\varphi^{n-1}}, \quad \varphi^{(0)} = \mathrm{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.41}$$

Для $n = 0, 1$ ми отримуємо із (3.39) і (3.40) розв'язки, визначені формулами (3.24), (3.32), в той час як для $n = 2, 3, \ldots$ і $k = 0, 1, \ldots$ маємо

$$\begin{gathered}
u_2 = 2x\left[\frac{\mathrm{cd}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{dc}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\mathrm{sn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - \mathrm{cn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
u_3 = \frac{2x\left(\mathrm{cs}^4\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{dn}^4\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\mathrm{dn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{cs}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{9}{4}\sqrt{2}\mathrm{cn}^2\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{ds}^2\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)},
\end{gathered} \tag{3.42}$$

....

і

$$\begin{gathered}
\tilde{u}_1 = \frac{2x\mathrm{dn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\mathrm{cs}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \\
\tilde{u}_3 = \frac{4x\mathrm{dn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{cs}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{9}{4}\sqrt{2}\mathrm{cn}^2\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{ds}^2\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\mathrm{cs}^4\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{dn}^4\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)},
\end{gathered} \tag{3.43}$$

....

Формули (3.32), (3.42) і (3.43) і реккурентні співвідношення (3.41) доповнюють список розв'язків в еліптичних функціях для рівняння (3.23), які представлені в [59]. Більше того, беручи до уваги інваріантність рівняння (3.23) відносно трансляцій незалежних змінних t і x, можна побудувати більш загальні розв'язки, зробивши в (3.32), (3.42) і (3.43) заміну $x \to x + k_1$, $t \to t + k_2$, де k_1, k_2 — довільні сталі.

Графік розв'язку $\tilde{u}_1$ зображено на рис. 3.1.

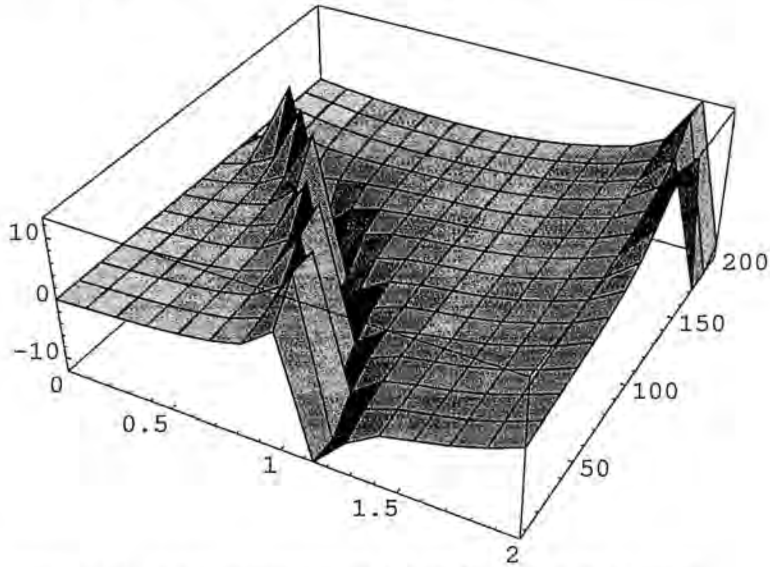


Рис. 3.1 Розв'язок $\tilde{u}_1$ для рівняння (3.23), $0 < t \leq 200$.

Твердження 3.1 і 3.2 дають можливість побудувати нескінченні множини точних розв'язків і для інших рівнянь типу (3.4).

Розглянемо спочатку рівняння (3.4) для $n = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, тобто

$$u_t - u_{xx} = -2u^3 + \lambda_1 u. \tag{3.44}$$

Не зменшуючи загальності, можна покласти $\lambda_1 = \pm 1$. У випадку $\lambda_1 = -1$ рівняння (3.44) рівносильне рівнянню Ньюела-Вайтхедта [85], якщо змінні t і x помножити на відповідні скаляри. Відповідне рівняння (3.6) має вигляд

$$z(z_{xt} - z_{xxx}) = z_x(z_t + \lambda_1 z - 3z_{xx}). \tag{3.45}$$

Якщо шукати розв'язки рівняння (3.45) у вигляді

$$z = \varphi(\xi),\ \xi = k_1 \cosh(x + k_2)\exp(3t), \quad \lambda_1 = 1, \tag{3.46}$$

$$z = \varphi(\eta),\ \eta = k_1 \cos(x + k_2)\exp(3t), \quad \lambda_1 = -1, \tag{3.47}$$

то отримуємо редуковане рівняння (3.29) для функції φ. Це дозволяє побудувати нескінченні множини точних розв'язків рівняння (3.44) у вигляді (3.24), (3.39)–(3.43), якщо в цих розв'язках зробити заміни
$y \to \xi, \quad 2x \to \xi_x$ для $\lambda_1 = 1$ і $y \to \eta, \quad 2x \to \eta_x$ для $\lambda_1 = -1$.

Нарешті відзначимо, що твердження 3.3 дає можливість побудувати нескінченні множини точних розв'язків для рівняння (3.4) у випадку $n = -1, \quad \lambda_4 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тобто для рівнянь

$$u_t - u_{xx} = 2u^3, \tag{3.48}$$

$$u_t - u_{xx} = 2(u^3 + \varepsilon u), \tag{3.49}$$

які відрізняються від (3.23) і (3.44) тільки знаком при u^3 в правій частині. Анзаци (3.33), (3.46) або (3.47) редукують відповідно рівняння (3.48) і (3.49) до рівняння

$$\varphi'' = -2\varphi^3, \tag{3.50}$$

де подвійний штрих означає другу похідну по відповідній змінній (тобто $y, \quad \xi$ або η).

Згідно з твердженням 3.3 точні розв'язки для рівняння (3.50) мають вигляд (3.37), де $\varphi^{(n)}$ є розв'язком рівняння (3.41) для парного n. Відповідний список точних розв'язків рівняння (3.48) визначається такими формулами:

$$\hat{u}_0 = x\mathrm{sd}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\hat{u}_2 = \frac{4x\mathrm{sn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\mathrm{cd}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{dc}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{cn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{dn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{sn}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \tag{3.51}$$

. . . .

$$\hat{u}_{2k} = \frac{2^k x}{\varphi^{(2k)}},$$

де $\varphi^{(2k)}$ визначається реккурентними співвідношеннями (3.41).

Графіки розв'язків $\hat{u}_0$ і $\hat{u}_2$ рівняння (3.48) зображено на рис. 3.2 і 3.3.

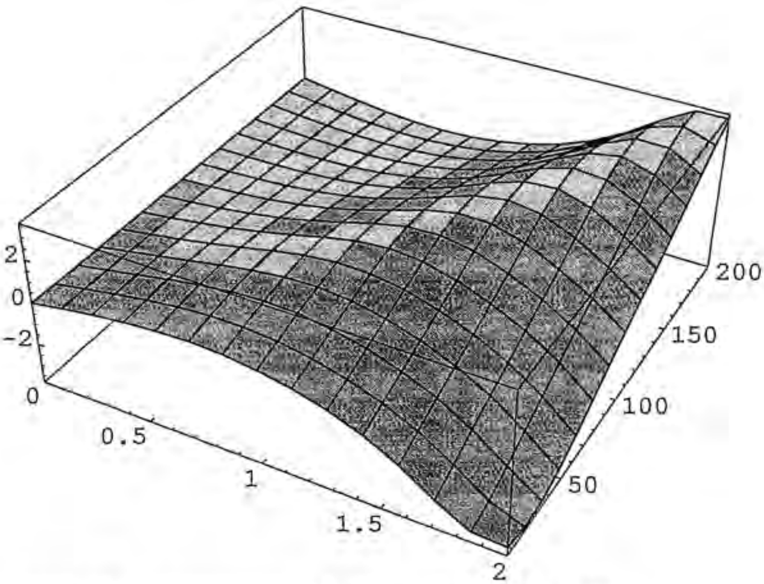


Рис. 3.2 Розв'язок $\hat{u}_0$ рівняння (3.48), $0 < t \leq 200$.

Розв'язки рівняння (3.49) можна отримати із формул (3.51) в результаті заміни $y \to \xi$, $x \to \xi_x$ і $y \to \eta$, $x \to \eta_x$ для $\varepsilon = 1$ і $\varepsilon = -1$ відповідно.

3.3. Розв'язки для довільного n

Розглянемо рівняння (3.6) для довільного n і побудуємо його точні розв'язки. Спочатку розглянемо редуковані рівняння (3.7), (3.9) для $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, тобто

$$(n-1)z_t = (n+3)z_{xx} - (n-1)(\lambda_1 z + \lambda_2 z_x), \tag{3.52}$$

$$4z_x z_{xxx} + (n-3)z_{xx}^2 - (n-1)(\lambda_1 z_x^2 + \lambda_2 z_x z_{xx}) = 0. \tag{3.53}$$

Будь-який розв'язок системи (3.52), (3.53) є одночасно розв'язком рівняння (3.6) при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, але обернене твердження не вірне.

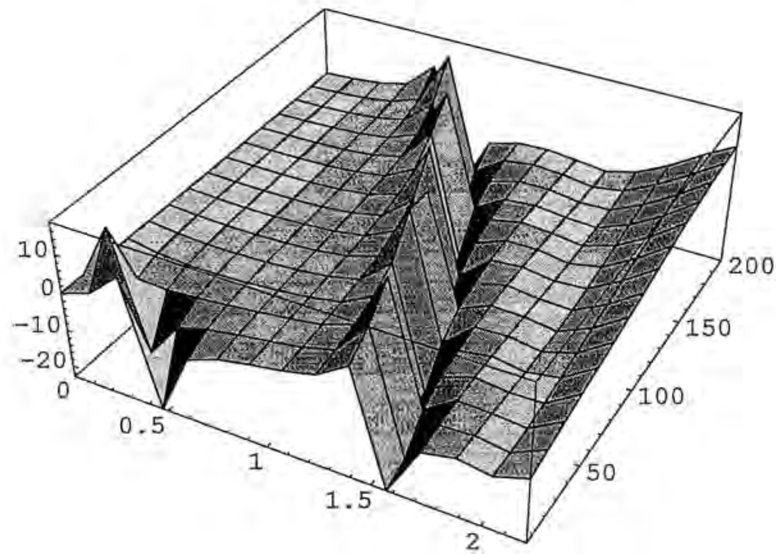


Рис. 3.3 Розв'язок $\hat{u}_2$ рівняння (3.48), $2 < t \leq 200$.

Для того, щоб знайти загальний розв'язок системи (3.52), (3.53), введемо нову змінну $y = \dfrac{z_{xx}}{z_x}$. Поділивши (3.53) на z_x^2 і використавши рівність $\dfrac{z_{xxx}}{z_x} = y_x + y^2$, перетворимо дане рівняння в рівняння Ріккаті

$$y_x + \frac{n+1}{4}y^2 - \frac{(n-1)}{4}(\lambda_2 y + \lambda_1) = 0. \tag{3.54}$$

Продиференціювавши y по t і використавши (3.52) і (3.54), отримаємо такий диференціальний наслідок

$$y_t = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \tag{3.55}$$

де

$$A = \frac{1}{8}\frac{(n+3)(n-3)(n+1)}{n-1}, \quad B = \lambda_2\left(1 - \frac{3}{16}(n^2-1)\right),$$

$$C = \frac{1}{16}((n-1)^2\lambda_2^2 - 2(n+3)(n-3)\lambda_1), \quad D = \frac{(n-1)^2}{16}\lambda_1\lambda_2.$$

Система рівнянь (3.54), (3.55) сумісна для довільного n, але має тільки тривіальні розв'язки, що є константами. У трьох спеціальних випадках

$n = \pm 3$ і $n = -1$ коефіцієнт A перетворюється в нуль, внаслідок чого, як буде показано нижче, система (3.54), (3.55) має нетривіальні розв'язки.

Нехай $n \neq \pm 3$ і $n \neq -1$, тоді $y = C_1 = \text{const}$ і рівняння (3.54), (3.55) редукуються до одного співвідношення

$$\lambda_1 = -C_1\lambda_2 + (k+1)C_1^2, \quad k = \frac{2}{n-1}.$$

Відповідний розв'язок системи (3.52), (3.53) має вигляд

$$z = e^{C_1 x + kC_1^2 t} + C_2 e^{[\lambda_2 C_1 - (k+1)C_1^2]t}, \tag{3.56}$$

а тому розв'язком рівняння (3.6), яке розглядається, у відповідності з формулою (3.2) є функція

$$u = \frac{C_1^k}{\left(1 + C_2 e^{-C_1 x - [(2k+1)C_1^2 - \lambda_2 C_1]t}\right)^k}. \tag{3.57}$$

Отже, ми знайшли точний розв'язок (3.57) рівняння

$$u_t - u_{xx} = -k(k+1)u^n + \lambda_2 k u^{\frac{n+1}{2}} + ((k+1)C_1^2 - \lambda_2 C_1)ku. \tag{3.58}$$

Це рівняння належить до типу Колмогорова-Петровського-Піскунова при умові, що

$$\lambda_2 = (k+1)(C_1+1). \tag{3.59}$$

Відповідний плоскохвильовий розв'язок (3.57) поширюється зі швидкістю

$$v = k + 1 - kC_1.$$

Що стосується спеціальних випадків $n = \pm 3$ і $n = -1$, то відзначимо, що випадок $n = 3$ був проаналізований в підрозділах 3.1, 3.2.

Для $n = -3$ система (3.54), (3.55) набуває вигляду

$$y_x = \frac{1}{2}(y - \lambda_2)^2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2^2, \tag{3.60}$$

$$y_t = -\frac{\lambda_2}{2}y^2 + \lambda_2^2 y + \lambda_1\lambda_2. \tag{3.61}$$

Розглянемо три випадки: 1) $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}\lambda_2^2$, 2) $\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\lambda_2^2 = -2\omega^2 < 0$ і 3) $\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\lambda_2^2 = 2\eta^2 > 0$. У першому випадку загальний розв'язок системи (3.60), (3.61) має вигляд

$$y = \frac{2}{\lambda_2 t - x - C_2} + \lambda_2, \tag{3.62}$$

а, отже,

$$z_x = \frac{e^{\lambda_2 \hat{x}}}{\hat{x}^2}, \quad \hat{x} = x - \lambda_2 t + C_2. \tag{3.63}$$

Проінтегрувавши (3.63) і використавши (3.52), (3.53) і (3.6), отримаємо

$$u = \sqrt{((\hat{x} I \ln(e^{\lambda_2 \hat{x}}) + C_3)e^{-\lambda_2 \hat{x}} - 1)\lambda_2}, \tag{3.64}$$

де $I\ln(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dx}{\ln x}$ — інтегральний логарифм.

Для випадків 2) і 3) відповідно матимемо

$$u = \sqrt{\frac{2e^{\lambda_2 \hat{x}}}{(\cos(2\omega\hat{x}) + 1)\omega \int\limits_0^{\tan \omega x} e^{\lambda_2 \omega \arctan t} dt}}, \tag{3.65}$$

$$u = \sqrt{\frac{2e^{\lambda_2 \hat{x}}}{(\cosh(2\eta\hat{x}) + 1)\eta \int\limits_0^{\tan \omega x} e^{\lambda_2 \eta \arctan t} dt}}. \tag{3.66}$$

Формули (3.64)–(3.66) визначають точні розв'язки рівнянь

$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{4}u^{-3} - \frac{\lambda_2}{2}u^{-1} + \frac{1}{4}\lambda_2^2 u,$$
$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{4}u^{-3} - \frac{\lambda_2}{2}u^{-1} + \left(\frac{1}{4}\lambda_2^2 + \omega^2\right) u,$$
$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{4}u^{-3} - \frac{\lambda_2}{2}u^{-1} + \left(\frac{1}{4}\lambda_2^2 - \eta^2\right) u,$$

які, однак, не можна виразити через елементарні функції.

Якщо $n = -1$, то рівняння (3.4) є лінійним і тому цей випадок розглядати не будемо.

Розглянемо тепер рівняння загального вигляду (3.6) з довільними параметрами λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Загальний розв'язок такого рівняння знайти не вдається. Однак, ми знайдемо частинні розв'язки, які належать до солітонного типу, а тому мають хороші перспективи для різноманітних застосувань.

Будемо шукати розв'язки рівняння (3.6) у вигляді $z(t,x) = U(\xi)$, де $\xi = \mu t + x$ і μ — довільна ненульова стала. Підставивши в (3.6), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для U

$$\begin{aligned} &U[U'(\mu U'' - U''' - \lambda_3 U) - \lambda_4 U^2 - (k-1)(U'')^2] = \\ &= (U')^2[(\mu + \lambda_2)U' + \lambda_1 U - (2k+1)U''], \end{aligned} \tag{3.67}$$

де $U' = \dfrac{dU}{d\xi}$, $k = \dfrac{2}{n-1}$.

Розв'язки рівняння (3.67) шукаємо у вигляді

$$U = \nu_0 + \nu_1\varphi + \nu_2\varphi^2 + \ldots, \tag{3.68}$$

де ν_0, $\nu_1, \ldots$ — сталі, а функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi' = \varepsilon\sqrt{C_0 + C_1\varphi + C_2\varphi^2 + \ldots}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{3.69}$$

Для того, щоб функція (3.68) була розв'язком рівняння (3.67), ми повинні прирівняти окремо всі доданки, які містять парні і непарні степені квадратного кореня, визначеного формулою (3.69). Враховуючи це зауваження, отримуємо таку систему рівнянь:

$$U'(\mu U U'' - \lambda_3 U^2) = (U')^3(\mu + \lambda_2), \tag{3.70}$$

$$U(U'U''' + \lambda_4 U^2 + (k-1)(U'')^2) = (U')^2((2k+1)U'' - \lambda_1 U). \tag{3.71}$$

Поділивши обидві частини рівняння (3.70) на $\mu U^2 U'$, зводимо його до рівняння Ріккаті

$$Y' - \frac{\lambda_2}{\mu}Y^2 = \frac{\lambda_3}{\mu} \tag{3.72}$$

для функції $Y = \dfrac{U'}{U}$. Загальний розв'язок рівняння (3.72) утворюють функції

$$Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C\right), \\ Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}}\left(\tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C\right)\right)^{-1}, \text{ якщо } \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{3.73}$$

$$Y = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C\right), \text{ якщо } \lambda_2\lambda_3 > 0, \tag{3.74}$$

$$Y = -\frac{\mu}{\lambda_2(\xi + C)}), \text{ якщо } \lambda_3 = 0, \tag{3.75}$$

де C — стала інтегрування.

Отже, всі розв'язки рівняння (3.67), які можна знайти використовуючи алгебраїчний метод [61], вичерпуються гіперболічними і раціональними розв'язками, які визначаються формулами (3.73)–(3.75).

Функції (3.73), (3.74) і (3.75) є розв'язками рівняння (3.71), записаного в змінних Y, Y' і Y'', якщо

$$\mu = -\lambda_2, \quad \lambda_1 = -k\frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad \lambda_4 = (1-k)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2, \quad \lambda_2\lambda_3 \neq 0$$

і

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_3 = 0$$

відповідно. Використовуючи змінні

$$\tau = \frac{2}{(n-1)^2}t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{n-1}x, \quad \sigma = -\lambda_2(n-1), \quad \nu = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

відповідне рівняння (3.4) можна записати у такому вигляді:

$$u_\tau - u_{yy} = (1 + \nu u^{1-n})(-(n+1)u^n + \nu(n-3)u + \sigma u^{\frac{n+1}{2}}). \tag{3.76}$$

На підставі формул (3.2), (3.73)–(3.75), розв'язками рівняння (3.76) є функції

$$u = (-\nu)^{\frac{1}{n-1}}\left(\tanh\left(b\left(y - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\tau\right) + C\right)\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{3.77}$$

$$u=(-\nu)^{\frac{1}{n-1}}\left(\tanh\left(b\left(y-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\tau\right)+C\right)\right)^{\frac{2}{1-n}}, \tag{3.78}$$

$$\text{якщо}\ \ \nu<0\ \ \text{і}\ \ b=(n-1)\sqrt{\frac{-\nu}{2}};$$

$$u=\nu^{\frac{1}{n-1}}\left(\tan\left(b\left(y-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\tau\right)+C\right)\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{3.79}$$

$$\text{якщо}\ \ \nu>0\ \ \text{і}\ \ b=(n-1)\sqrt{\frac{\nu}{2}};$$

$$u=2^{n-1}\left((n-1)\left(y-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\tau+C\right)\right)^{\frac{2}{1-n}}, \tag{3.80}$$

$$\text{якщо}\ \ \nu=0.$$

У випадку $\dfrac{2}{n-1}>1$ формула (3.77) визначає хвильові розв'язки, які мають вигляд усобленої хвилі і поширюються зі швидкістю $\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Випадок $n=2$ ми детально обговоримо у наступному підрозділі.

Якщо $\dfrac{2}{n-1}<-1$, то (3.77) є сингулярним розв'язком, що описує режим із загостренням. Однак, у цьому випадку рівняння (3.76) має інші солітоноподібні розв'язки, які визначаються формулою (3.78).

Ми бачимо, що такі розв'язки існують для широкого класу нелінійних рівнянь реакції-дифузії, визначених (3.76).

3.4. Точні розв'язки рівняння Фішера та його узагальнення

Повернемося до підрозділу 3.3 і розглянемо більш детально важливий випадок $n=2$. Поклавши в рівнянні (3.58) $\lambda_2=0,\ \ C_1=-1$ і зробивши заміну

$$\tau=6t,\ \ y=\sqrt{6}x, \tag{3.81}$$

ми приходимо до рівняння Фішера для функції $u=u(\tau,y)$

$$u_\tau-u_{yy}=u(1-u). \tag{3.82}$$

Отже, рівняння Фішера є частинним випадком рівняння (3.58), а тому наш розв'язок (3.57) є також розв'язком для рівняння (3.82) при умові, що ми виконаємо вищезгадані заміни змінних (3.81) і покладемо у формулі (3.59) $C_1 = -1$. В результаті ми знову отримуємо добре відомий розв'язок Абловіца-Зепетелли [44]

$$u = \frac{1}{(1 + C_2 e^{\frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{5\tau}{6}})^2}. \tag{3.83}$$

Цей розв'язок можна виразити через гіперболічні функції:

$$u = u_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \tanh\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} - \frac{5}{12}\tau - C\right)\right)^2, \quad C = \frac{1}{2}\ln|C_2|, \tag{3.84}$$

$$u = u_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \coth\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} - \frac{5}{12}\tau - C\right)\right)^2 \tag{3.85}$$

для $C_2 > 0$ і $C_2 < 0$ відповідно.

Беручи до уваги симетрію рівняння (3.82) відносно дискретного перетворення $u \to 1 - u$, одержуємо ще два розв'язки

$$u_3 = 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \tanh\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} - \frac{5}{12}\tau - C\right)\right)^2, \tag{3.86}$$

$$u_4 = 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \coth\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} - \frac{5}{12}\tau - C\right)\right)^2. \tag{3.87}$$

Нарешті, беручи до уваги симетрію рівняння (3.82) відносно перетворення $y \to -y$, отримуємо ще чотири розв'язки, які мають вигляд

$$u_5 = \frac{1}{4}\left(1 + \tanh\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} + \frac{5}{12}\tau + C\right)\right)^2, \tag{3.88}$$

$$u_6 = \frac{1}{4}\left(1 + \coth\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} + \frac{5}{12}\tau + C\right)\right)^2, \tag{3.89}$$

$$u_7 = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \tanh\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} + \frac{5}{12}\tau + C\right)\right)^2, \tag{3.90}$$

$$u_8 = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \coth\left(\frac{y}{2\sqrt{6}} + \frac{5}{12}\tau + C\right)\right)^2. \tag{3.91}$$

Отже, починаючи з наших загальних формул (3.56) і (3.57), ми приходимо до сімейства із восьми точних розв'язків рівняння Фішера. Всі вони є плоскими хвилями, що поширюються із швидкістю $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (випадки (3.84)—(3.87)) або $-\frac{5}{\sqrt{6}}$ (випадки (3.88)— (3.91)). Підкреслимо, що значення цієї швидкості для випадку рівняння Фішера є сталою величиною.

Для того, щоб знайти додаткові точні розв'язки рівняння Фішера, ми використаємо анзац

$$u = 3z_y^2\varphi(z), \tag{3.92}$$

де φ і $z = z(\tau, y)$ є функціями, які необхідно знайти. Підставивши (3.92) в (3.82), отримуємо такі редуковані рівняння:

$$\begin{aligned} &z_\tau = 5z_{yy},\\ &4z_y z_{yyy} - z_{yy}^2 = \tfrac{1}{2}z_y^2 \end{aligned} \tag{3.93}$$

і

$$\varphi_{zz} = 3\varphi^2. \tag{3.94}$$

Ми бачимо, що функція φ задовольняє рівняння Вейєрштрасса (3.94), яке ми перепишемо в наступній рівносильній формі

$$\tilde{\varphi}_z^2 = 4\tilde{\varphi}^3 - C, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi, \tag{3.95}$$

де C — стала інтегрування. Почавши з анзацу (3.92) і вибравши точні розв'язки рівнянь (3.93) і (3.94) у вигляді

$$z = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{5}{6}\tau\right), \quad \varphi = \frac{2}{z+k}, \tag{3.96}$$

ми знаходимо розв'язок Абловіца-Зепетелли (3.83) рівняння Фішера.

Зауважимо, що функція, визначена формулами (3.92), (3.96), є тільки частковим розв'язком рівняння (3.82), який відповідає нульовому значенню параметра C в (3.95). Існує безліч інших розв'язків рівняння (3.82), які відповідають ненульовому значенню параметра C, а саме:

$$u = \frac{1}{2}z^2\rho(z, 0, C), \quad z = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{5}{6}\tau + k\right), \tag{3.97}$$

де $\rho(z, 0, C)$ — функція Вейєрштрасса, що задовольняє рівняння (3.95) для $C \neq 0$.

Очевидно, розв'язки (3.97) є обмеженими, якщо вважати, що $-\frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{5}{6}\tau + k > 0$. Ця умова може виконуватися, наприклад, для довільного додатного y і від'ємного τ і k. Відповідні розв'язки можна інтерпретувати як такі, що описують історію процесу, оскільки часова змінна набуває довільних від'ємних значень. Графіки розв'язків (3.97) рівняння (3.82) для деяких значень параметру C зображено на рис. 3.4–3.6.

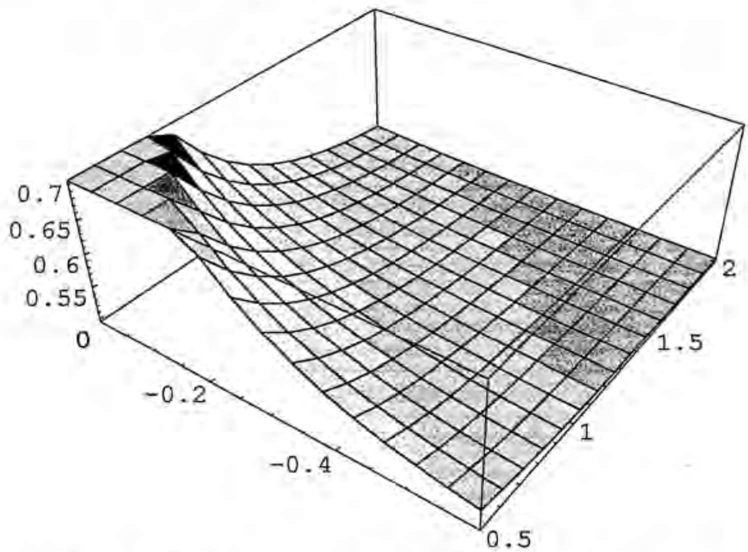


Рис. 3.4 Розв'язок (3.97) рівняння Фішера (3.82) при $k = 0, C = 10^2$.

Отже, рівняння Фішера має нескінченну множину точних розв'язків, яка включає розв'язок Абловіца-Зепетелли (3.83), а також розв'язки (3.97), залежні від двох параметрів $C \neq 0$, k. Всі ці розв'язки є плоскими хвилями, що поширюються з тією самою швидкістю $v = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

Розглянемо тепер рівняння (3.76) для $n = 2$

$$u_\tau - u_{yy} = (u + \nu)(-3u + \sigma\sqrt{u} - \nu). \tag{3.98}$$

Рівняння (3.98) є формальним узагальненням рівняння Фішера, оскільки для $\sigma = 0$ воно еквівалентне рівнянню (3.82). Однак, для $\sigma \neq 0$ рівняння (3.98) має солітонові розв'язки (3.77) або розв'язки (3.78)–(3.80) і, таким

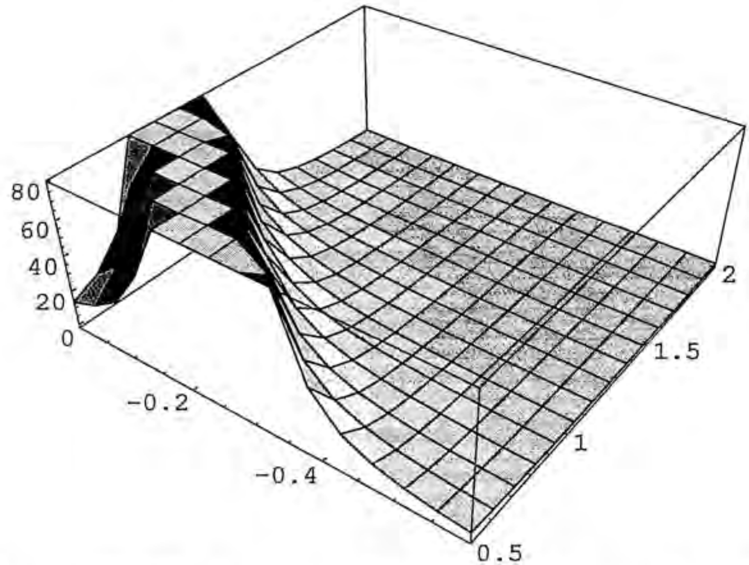


Рис. 3.5 Розв'язок (3.97) рівняння Фішера (3.82) при $k = 0, C = 10^4$.

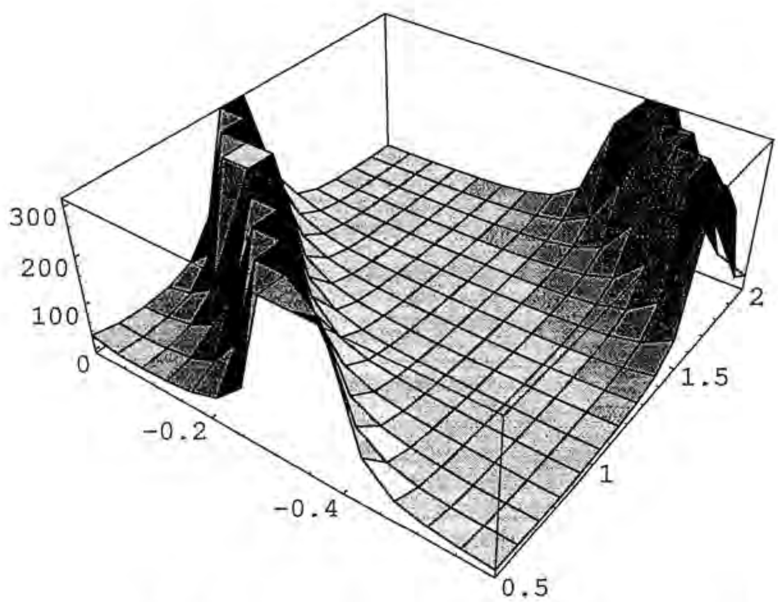


Рис. 3.6 Розв'язок (3.97) рівняння Фішера (3.82) при $k = 0, C = 10^6$.

чином, має абсолютно іншу природу. Нехай в рівнянні (3.98) $\nu < 0$. Помноживши залежні і незалежні змінні на відповідні скаляри, можна значення ν редукувати до

$$\nu' = -\frac{3}{2}. \tag{3.99}$$

Поклавши далі

$$\tilde{u} = \frac{3}{2} - u, \quad \sigma = 3\varepsilon, \quad t = 3\tau, \quad x = -\sqrt{3}y, \tag{3.100}$$

ми отримуємо рівняння

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = \tilde{u}\left(1 - \tilde{u} + \varepsilon\left(\frac{3}{2} - \tilde{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.101}$$

У граничному випадку $\varepsilon \to 0$ рівняння (3.101) редукується до рівняння Фішера. Згідно з результатами підрозділу 3.3 рівняння (3.98) має хвильовий розв'язок (3.77), який з використанням замін (3.99) і (3.100) можна звести до вигляду

$$\tilde{u} = \frac{3}{2\cosh^2\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}t\right) + C\right)}. \tag{3.102}$$

Іншими словами, узагальнене рівняння Фішера (3.98) допускає солітоноподібний розв'язок. Розглянемо тепер рівняння (3.98) для $\nu\sigma = 0$ і покладемо $u = \frac{\tilde{u}}{3}$. В результаті ми редукуємо рівняння (3.98) до найбільш простого вигляду

$$\tilde{u}_\tau - \tilde{u}_{yy} = -\tilde{u}^2. \tag{3.103}$$

Анзац

$$u = \frac{z_x^2}{6z^2} + \frac{1}{3}\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\frac{z_{xx}}{z_x}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

приводить до таких редукованих рівнянь

$$z_{xxx} = 0, \quad z_t = kz_{xx}, \quad k = 5(3 \pm \sqrt{6}).$$

Отже, ми маємо $z = \dfrac{x^2}{2} + kt$ і відповідний розв'язок рівняння (3.103) має вигляд

$$u = \frac{(3 \pm \sqrt{6})x^2 + 10(12 \pm 5\sqrt{6})t}{3(x^2 + 10(3 \pm \sqrt{6})t)^2}.$$

Зауважимо, що ці розв'язки можна отримати також з використанням класичної лієвської редукції.

Нарешті розглянемо ще одне узагальнення рівняння Фішера, яке отримується з рівняння (3.58), якщо в ньому покласти $n = 2$. Використовуючи заміни (3.81), це рівняння можна записати у такому вигляді:

$$\tilde{u}_\tau - \tilde{u}_{yy} = \tilde{u}(-C_1 + (C_1 + 1)\tilde{u}^{\frac{1}{2}} - \tilde{u}). \tag{3.104}$$

У випадку $C_1 = -1$ рівняння (3.104) перетворюється в рівняння Фішера. Згідно з результатами підрозділу 3.3 рівняння (3.104) має точні розв'язки (3.57), які в наших позначеннях можна записати так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{1}{4}\left(1 + \tanh\left(\frac{C_1}{2\sqrt{6}}y + \frac{C_1(2C_1 - 3)}{12}\tau - C\right)\right)^2, \\ \tilde{u}_2 &= \frac{1}{4}\left(1 + \coth\left(\frac{C_1}{2\sqrt{6}}y + \frac{C_1(2C_1 - 3)}{12}\tau - C\right)\right)^2. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Ще два розв'язки можна отримати, якщо в формулах (3.105) виконати заміну $y \to -y$. Формула (3.105) є аналогом розв'язків (3.84) і (3.85) рівняння (3.82). На відміну від розв'язків (3.84) і (3.85) ці розв'язки описують хвилю, що поширюється зі швидкістю $\frac{2C_1-3}{\sqrt{6}}$. Тому змінюючи параметр C_1 в рівнянні (3.104), можна отримати розв'язки (3.105) з будь-якою наперед заданою швидкістю поширення. Іншими словами, ми завжди можемо взяти цю швидкість згідно з експериментальними даними.

Отже, рівняння (3.104) перетворюється в рівняння Фішера, якщо параметр C_1 взяти рівним -1. Більше того обидва рівняння (3.82) і (3.104) мають аналогічні точні розв'язки (3.84), (3.85) і (3.105), які, однак, поширюються з різними швидкостями.

3.5. Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії

У цьому підрозділі досліджується умовна симетрія і будуються точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії

$$u_t = \triangle u + f(u), \tag{3.106}$$

де $u = u\,(t,\ x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$,

$\triangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа,

$f(u)$ — деяка фіксована функція від залежної змінної u.

Під класичною симетрією рівняння (3.106) ми розуміємо існування групи неперервних перетворень для залежних і незалежних змінних, що зберігають його форму [25, 42]. Умовна симетрія [41] означає існування такої групи при умові, що u задовольняє (3.106) і деяке додаткове рівняння (яке буде знайдено далі).

Класична симетрія рівнянь вигляду (3.106) вивчалася в [13]. Для довільної функції $f(u)$ ці рівняння зберігають симетрію відносно групи $E(n)$, генератори якої мають слідуючу форму:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t},\ P_a = \frac{\partial}{\partial x_a},\ J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a},\ a \neq b,\ a, b = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.107}$$

У роботах [35, 59] досліджено умовну (некласичну) симетрію найпростішого рівняння (3.106), що відповідає $n = 1$. У роботі [89] запропоновано новий підхід до дослідження класичної і умовної симетрій, який може бути ефективно застосований до рівняння (3.106) з довільною кількістю просторових змінних.

Беручи до уваги симетрію рівняння (3.106) відносно групи обертань $O(n)$ в n-вимірному просторі (генератори якої J_{ab} наведені у (3.107)), доцільно шукати розв'язки рівняння (3.106) у вигляді

$$u = u(t, x), \quad x = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

У підсумку приходимо до редукованого рівняння

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x}u_x = f(u). \tag{3.108}$$

Дослідимо умовну симетрію рівняння (3.108). Оператор умовної симетрії даного рівняння будемо шукати у вигляді

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + (-\pi u + \omega)\frac{\partial}{\partial u},$$

де $\xi = \xi(t,x)$, $\pi = \pi(t,x)$, $\omega = \omega(t,x)$. Цей оператор є генератором умовної симетрії рівняння (3.108), якщо це рівняння сумісне з умовою [41] $Xu = 0$.

Нехай

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \pi, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n-1}{x}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Функції ξ, π будемо визначати з умови (2.17), яку для зручності перепишемо ще раз

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{3.109}$$

де Λ, φ і θ — функції від t і x. У результаті нескладних обчислень комутатора [Q,L], який допускає зображення (3.109), одержуємо наступну систему рівнянь для визначення функцій Λ, φ, θ, ξ і π:

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\Lambda, \quad \Lambda + \theta = 0,\\
&\xi\frac{n-1}{x^2} - \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \theta\xi - \frac{n-1}{x}\Lambda,\\
&-\frac{\partial\pi}{\partial t} + \frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial\pi}{\partial x} = \theta\pi + \varphi.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Ми обмежимося випадком, коли ξ і π є функціями від однієї змінної x. У підсумку приходимо до такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\Lambda, \quad \Lambda + \theta = 0,\\
&\xi\frac{n-1}{x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \theta\xi - \frac{n-1}{x}\Lambda,\\
&\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x}\frac{\partial\pi}{\partial x} = \theta\pi + \varphi.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Нехай $u = u(t, x)$ — розв'язок рівняння (3.106), інваріантний відносно оператора X. Тоді $X(u(t,x) - u) = 0$ на многовиді $u(t,x) - u = 0$, або

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \pi u - \omega = 0. \tag{3.112}$$

Оскільки $Q = \dfrac{\partial}{\partial t} + \xi \dfrac{\partial}{\partial x} + \pi$, то рівність (3.112) перепишеться у вигляді $Qu = \omega$. Очевидно, що

$$(QL)u - (LQ)u = Q(f(u)) - L\omega,$$

звідки

$$[Q, L]u + L\omega = Q(f(u)). \tag{3.113}$$

Обчислимо $Q(f(u))$:

$$Q(f(u)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \pi f = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \pi f =$$
$$= (\omega - \pi u)\frac{\partial f}{\partial u} + \pi f.$$

Отже,

$$[Q, L]u + L\omega = (\omega - \pi u)\frac{\partial f}{\partial u} + \pi f.$$

Оскільки має місце рівність (3.109), то

$$[Q, L]u = \Lambda L u + \varphi u + \theta Q u = \Lambda f + \varphi u + \theta \omega.$$

Тому

$$\Lambda f + \varphi u + \theta \omega + L\omega = (\omega - \pi u)\frac{\partial f}{\partial u} + \pi f,$$

звідки

$$(\omega - \pi u)\frac{\partial f}{\partial u} = (\Lambda - \pi) f + \varphi u + L\omega + \theta \omega. \tag{3.114}$$

Якщо оператор X є оператором лієвської симетрії, то $\theta = 0$, і співвідношення (3.114) набуває такого вигляду:

$$(\omega - \pi u)\frac{\partial f}{\partial u} = (\Lambda - \pi) f + \varphi u + L\omega.$$

Теорема 3.2. *Оператор* $X = \dfrac{\partial}{\partial t} + \xi\dfrac{\partial}{\partial x} - \pi u\dfrac{\partial}{\partial u}$ *є оператором умовної симетрії рівняння (3.108) у випадку* $f(u) = \pm u^k + C_2 u$, *якщо* $\pi(x) = -\dfrac{2\xi_x}{1-k}$, *а функція* $\xi = \xi(x)$ *є розв'язком системи*

$$\begin{gathered}\frac{n-1}{x}\xi + \xi^2 + \frac{3+k}{1-k}\xi_x = C_1,\\ \frac{n-1}{x}\xi_{xx} + \xi_{xxx} - 2\xi_x^2 + C_2(1-k)\xi_x = 0,\end{gathered} \tag{3.115}$$

де k, C_1 *— довільні сталі.*

Доведення. Підставивши $f = \pm u^k + C_2 u$ у співвідношення (3.114), отримаємо

$$-\pi u(\pm k u^{k-1} + C_2) = (\Lambda - \pi)(\pm u^k + C_2 u) + \varphi u.$$

Звідси знаходимо, що $\Lambda = (1-k)\pi$, $\varphi = (k-1)\pi C_2$. З першого рівняння системи (3.111) випливає, що $\pi(x) = -\dfrac{2\xi_x}{1-k}$. Підставивши $\theta = -(1-k)\pi$, $\pi(x) = -\dfrac{2\xi_x}{1-k}$ в третє і четверте рівняння системи (3.111), отримуємо систему (3.115). Теорема доведена.

Якщо $f(u) = \pm u^k$, то система (3.115) для визначення функції $\xi = \xi(x)$ набуває вигляду

$$\begin{gathered}\frac{n-1}{x}\xi + \xi^2 + \frac{3+k}{1-k}\xi_x = C_1,\\ \frac{n-1}{x}\xi_{xx} + \xi_{xxx} - 2\xi_x^2 = 0.\end{gathered} \tag{3.116}$$

Система (3.116) має розв'язок вигляду $\xi = \dfrac{l}{x}$ тоді і тільки тоді, коли

$$l = n-4, \quad k = \frac{n-4}{n-2}.$$

Для чисел n, що не перевищують 12, відповідні значення l і k наведено в таблиці

n	1	3	5	6	7	8	9	10	11	12
k	3	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$
l	-3	-1	1	2	3	4	5	6	7	8

У випадках $n = 1, k = 3$ і $n = 3, k = -1$ система (3.116) має додаткові розв'язки $\xi = -\dfrac{3}{x+k'}$ і $\xi = k' - \dfrac{1}{x}$ відповідно, де k' — довільна стала. Цим випадкам відповідають такі оператори умовної симетрії рівняння (3.108):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x+k'}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{(x+k')^2}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.117}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(k' - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.118}$$

Розв'язки рівняння (3.108), інваріантні відносно оператора X_1, побудовані в підрозділі 3.2.

Розглянемо рівняння (3.108) для $n = 3$ і $f(u) = \pm u^{-1}$

$$u_t - u_{xx} - \frac{2}{x}u_x = \pm u^{-1}. \tag{3.119}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії (3.118). Якщо $k' = 0$, то операторові X_2 відповідає анзац

$$u = \frac{1}{x}\omega(z), \quad z = \frac{x^2}{2} + t,$$

який редукує рівняння (3.119) до рівняння

$$\omega'' \pm \omega^{-1} = 0. \tag{3.120}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.120) має вигляд

$$z = \int (\pm 2\ln\omega + C_1)^{-1/2} d\omega + C_2.$$

Отже, функція $u = \dfrac{1}{x}\omega(z)$, де ω визначається з умови

$$\frac{x^2}{2} + t = \int (\pm 2\ln\omega + C_1)^{-1/2} d\omega + C_2,$$

є розв'язком рівняння (3.119), а тому і розв'язком рівняння (3.106) у випадку $n = 3,\ \ f(u) = \pm u^{-1}$.

Якщо $k' \neq 0$, то операторові X_2 відповідає анзац

$$u = \frac{k'x - 1}{x}\omega(z), \quad z = k'x + \ln|k'x - 1| - k'^2 t,$$

що редукує рівняння (3.119) до рівняння

$$k'^4\omega'' + k'^4\omega' \pm \omega^{-1} = 0.$$

Розглянемо рівняння (3.108) для $n = 5$ і $f(u) = -u^{\frac{1}{3}}$

$$u_t - u_{xx} - \frac{4}{x}u_x = -u^{\frac{1}{3}}. \tag{3.121}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u},$$

якому відповідає анзац

$$u = \frac{1}{x^3}\omega(z), \quad z = \frac{x^2}{2} - t,$$

що редукує рівняння (3.121) до рівняння

$$\omega'' - \omega^{\frac{1}{3}} = 0. \tag{3.122}$$

Рівняння (3.122) є рівнянням Емдена-Фаулера і його частинний розв'язок має вигляд $\omega = \dfrac{\sqrt{6}}{36}z^3$ [15]. Отже, функція

$$u = \frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{3}{4}(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^{\frac{1}{2}}t + \frac{3}{2}\frac{t^2}{(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^{\frac{1}{2}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{t^3}{(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

є розв'язком рівняння (3.106) у випадку $n = 5,\ f(u) = -u^{\frac{1}{3}}$.

Розглянемо далі систему (3.115). Розв'язуючи її для $n = 1$, отримуємо такі оператори умовної симетрії рівняння (3.108):

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu \tan(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2 u \sec^2(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\text{якщо} f(u) = \pm u^3 - 2\mu^2 u;$$
$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial t} - 3\mu \coth(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2 u \ \mathrm{cosech}^2(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\text{якщо} f(u) = \pm u^3 + 2\mu^2 u.$$

Розв'язки рівняння (3.108), інваріантні відносно операторів Y_1 і Y_2, побудовані в підрозділі 3.2.

3.6. Точні розв'язки рівняння реакції-дифузії з експоненціальною нелінійністю

Почнемо з розгляду одновимірного рівняння реакції-дифузії

$$u_t - u_{xx} = -e^u + C. \qquad (C \neq 0) \tag{3.123}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (3.123) є алгебра, породжена двома операторами трансляцій

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

а тому всі симетрійні анзаци для рівняння (3.123) вичерпуються анзацами виду

$$u = \omega(z), \quad z = \alpha x + \beta t.$$

Для знаходження розв'язків рівняння (3.123) ми використаємо анзац

$$u = \omega(z) + 2\ln z_x, \tag{3.124}$$

де $z = z(t, x)$, а $\omega = \omega(z)$ є довільним розв'язком рівняння

$$\omega'' - a e^{\omega} = 0. \tag{3.125}$$

Підставивши (3.124) в (3.123), отримуємо рівняння

$$(z_t - z_{xx})\omega' = -\frac{2z_{xt}}{z_x} + 2\frac{z_{xxx}}{z_x} - 2\frac{z_{xx}^2}{z_x^2} + C. \tag{3.126}$$

Прирівнявши до нуля обидві частини рівняння (3.126), матимемо редуковану систему

$$\frac{2z_{xt}}{z_x} - 2\frac{z_{xxx}}{z_x} + 2\frac{z_{xx}^2}{z_x^2} - C = 0, \tag{3.127}$$

$$z_t = z_{xx}. \tag{3.128}$$

Підставимо (3.128) в (3.127):

$$2z_{xx}^2 - Cz_x^2 = 0. \tag{3.129}$$

Будемо вважати, що в рівнянні (3.129) $C > 0$. Тоді C можна представити у вигляді $C = 2\mu^2$, а, отже, рівняння (3.129) набуває вигляду

$$z_{xx}^2 - \mu^2 z_x^2 = 0. \tag{3.130}$$

Рівняння (3.130) розпадається на два рівняння

$$z_{xx} - \mu z_x = 0, \quad z_{xx} + \mu z_x = 0.$$

Загальним розв'язком першого рівняння є функція

$$z = k_1 \exp(\mu x + \mu^2 t) + k_2, \tag{3.131}$$

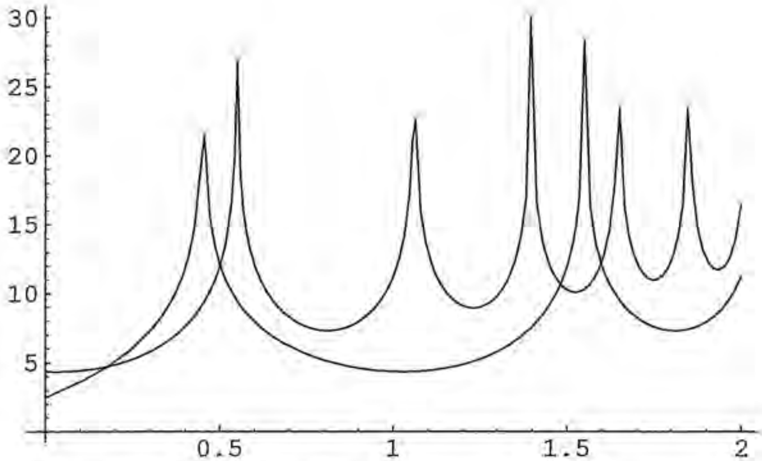
а другого рівняння — функція

$$z = k_1 \exp(-\mu x + \mu^2 t) + k_2. \tag{3.132}$$

де $k_1,\ k_2$ — довільні сталі, $k_1 \neq 0$.

Отже, задача знаходження розв'язків виду (3.124) рівняння (3.123) звелася до побудови розв'язків рівняння (3.125). Інтегруючи рівняння (3.125), знаходимо, що ω співпадає з однією із таких функцій:

$$\ln\left\{\left(-\frac{C_1}{2}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}(z + C_2)\right]\right\} \quad (C_1 < 0,\ C_2 \in R); \tag{3.133}$$



3.7 Розв'язок (3.136) рівняння (3.123) при $t = 0, 1, 2$

$$\ln\left\{\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C}_1 z)}{[1 - C_2\exp(\sqrt{C}_1 z)]^2}\right\} \qquad (C_1 > 0,\ C_2 > 0); \tag{3.134}$$

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z + C_1\right)^2. \tag{3.135}$$

Якщо змінна z має вигляд (3.131), то функціям (3.133)– (3.135) відповідають такі розв'язки рівняння (3.123):

$$1)\ u = \ln\Big[\left(-\frac{C_1}{2}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}(k_1\exp(\mu x + \mu^2 t) + k_2 + C_2)\right]\mu^2 k_1^2 \times \times \exp 2(\mu x + \mu^2 t)\Big]; \tag{3.136}$$

$$2)\ u = \ln\left[\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C}_1 k_1\exp(\mu x + \mu^2 t) + \sqrt{C}_1 k_2)}{[1 - C_2\exp(\sqrt{C}_1 k_1\exp(\mu x + \mu^2 t) + \sqrt{C}_1 k_2)]^2}\mu^2 k_1^2\exp 2(\mu x + \mu^2 t)\right]$$

$$3)\ u = \ln\frac{\mu^2 k_1^2\exp(2(\mu x + \mu^2 t))}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k_1\exp(\mu x + \mu^2 t) + \frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + C_1\right]^2}.$$

Якщо змінна z має вигляд (3.132), то отримуємо аналогічні розв'язки, замінивши у вищенаведених розв'язках μ на $-\mu$.

Розглянемо тепер рівняння вигляду

$$u_t = \triangle u - e^u, \tag{3.137}$$

дуже обмеженого класу таких рівнянь. Методи класичного групового аналізу і умовних симетрій дозволяють знаходити спеціальні підстановки (анзаци), що редукують досліджуване рівняння до більш простого вигляду, чи навіть знаходити явні розв'язки. Слід зауважити, що історично багато з цих анзаців були отримані без використання групових методів. Як приклад можна навести анзац Баренблатта і анзац, добре відомий під назвою анзаца Коула-Хопфа

$$u = -2\mu \frac{v_x}{v}, \quad v = v(t, x), \tag{0.3}$$

який лінеаризує класичне рівняння Бюргерса. Зауважимо, що вперше цей анзац зустрічається у роботі А.Р. Форсайта 1906 року [64]. Відзначимо, що умовно-симетрійний підхід включає в себе пошук розв'язків нелінійних визначальних рівнянь, які в багатьох випадках не простіші, ніж рівняння, симетрія яких досліджується [98]. Тому в окремих випадках прямий пошук анзаців є більш простою і ефективною процедурою, ніж пошук умовних симетрій. Для знаходження точних розв'язків рівнянь (0.1), (0.2) у дисертації використовуються як симетрійні методи (класичний груповий аналіз та метод умовних симетрій), так і метод прямого пошуку анзаців.

У моделях математичної біології відіграють важливу роль спеціальні розв'язки типу одинокої хвилі. Вважається, що розв'язки саме такого типу описують, наприклад, розповсюдження сигналу в нейронних клітинках. В зв'язку з цим певний інтерес викликає селекція таких рівнянь виду (0.1), (0.2), що допускають розв'язки такого (солітонного) типу.

Таким чином, задача побудови нових точних розв'язків рівнянь (0.1), (0.2), а також опису класів таких рівнянь, що мають розв'язки солітонного типу, є актуальною та має прикладне і теоретичне значення.

Одним із важливих використань групового аналізу є побудова моделей з заданими симетрійними властивостями. Серед цих властивостей домінуючою є вимога інваріантності відносно перетворень Галілея, якій повинні задовольняти абсолютно всі моделі, при умові, що вони описують де $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, $\triangle$ — оператор Лапласа. Беручи до уваги симетрію рівняння (3.137) відносно групи $O(n)$, генератори якої J_{ab} наведені у (3.107), будемо шукати розв'язки цього рівняння у вигляді

$$u = u(t, x), \quad x = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

У підсумку приходимо до редукованого рівняння

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x} u_x = -e^u. \tag{3.138}$$

Для знаходження розв'язків рівняння (3.138) використаємо анзац (3.124), (3.125). Підставивши (3.124) в (3.137), отримаємо рівняння

$$(z_t - z_{xx} - \frac{n-1}{x} z_x)\omega' + 2\frac{z_{xt}}{z_x} - 2\frac{z_{xxx}}{z_x} + 2\frac{z_{xx}^2}{z_x^2} - \frac{2(n-1)}{x}\frac{z_{xx}}{z_x} = 0. \tag{3.139}$$

Прирівнявши до нуля вираз при ω' у рівнянні (3.139), матимемо таку систему для визначення змінної $z = z(t, x)$:

$$z_{xt} - z_{xxx} + \frac{z_{xx}^2}{z_x} - \frac{n-1}{x} z_{xx} = 0, \tag{3.140}$$

$$z_t = z_{xx} + \frac{n-1}{x} z_x. \tag{3.141}$$

З рівняння (3.141) знаходимо

$$z_{xt} = z_{xxx} - \frac{n-1}{x^2} z_x + \frac{n-1}{x} z_{xx}. \tag{3.142}$$

Підставивши (3.142) в (3.140), отримуємо

$$\frac{z_{xx}^2}{z_x^2} - \frac{n-1}{x^2} = 0. \tag{3.143}$$

Проінтегрувавши рівняння (3.143), знаходимо

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{n-1}+1} x^{\sqrt{n-1}+1} + C_2, \tag{3.144}$$

або

$$z = \frac{C_1}{-\sqrt{n-1}+1} x^{-\sqrt{n-1}+1} + C_2, \tag{3.145}$$

де C_1 і C_2 є функціями від t, які необхідно визначити. Нехай функція z має вигляд (3.144). Підставивши (3.144) в рівняння (3.141), матимемо

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}+1}\frac{\partial C_1}{\partial t}x^{\sqrt{n-1}+1}+\frac{\partial C_2}{\partial t}=C_1\sqrt{n-1}x^{\sqrt{n-1}-1}+C_1(n-1)x^{\sqrt{n-1}-1}. \tag{3.146}$$

Оскільки $n>1$, то рівність (3.146) можлива лише в тому випадку, коли $n=2,\ \ \frac{\partial C_1}{\partial t}=0$. Тоді $\frac{\partial C_2}{\partial t}=2C_1$, а, отже, $C_2=2C_1t+C_3$. Поклавши $C_1=2,\ \ C_3=k$, отримуємо

$$z=x^2+4t+k,$$

де k — довільна стала.

Використовуючи формули (3.133) – (3.135), знаходимо такі розв'язки рівняння (3.137) у випадку $n=2$:

$$u=\ln\left\{-2C_1(x_1^2+x_2^2)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}\left(x_1^2+x_2^2+4t+k+C_2\right)\right]\right\}; \tag{3.147}$$

$$u=\ln\left\{8C_1C_2(x_1^2+x_2^2)\frac{\exp(\sqrt{C}_1(x_1^2+x_2^2+4t+k))}{[1-C_2\exp(\sqrt{C}_1(x_1^2+x_2^2+4t+k))]^2}\right\}; \tag{3.148}$$

$$u=\ln\frac{4(x_1^2+x_2^2)}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^2+x_2^2+4t+k)+C_1\right]^2}. \tag{3.149}$$

Беручи до уваги інваріантність рівняння (3.137) відносно трансляцій незалежних змінних $x_1,\ x_2,\ t$, можна побудувати більш загальні розв'язки, зробивши в (3.147), (3.148) і (3.149) заміну $x_1\to x_1+k_1,\ \ x_2\to x_2+k_2$, де $k_1,\ k_2$ — довільні сталі.

Зауважимо, що розв'язки (3.147) – (3.149) рівняння (3.137) можна знайти і на основі концепції умовної симетрії. Дійсно, у випадку $n=2$ рівняння (3.138) умовно інваріантне відносно оператора

$$X=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{4}{x^2}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Повторивши попередні міркування, можна показати, що випадок (3.145) неможливий.

3.7. Висновки до розділу 3

У даному розділі з використанням спеціальних анзаців, які є узагальненнями симетрійних і умовно-симетрійних анзаців, побудовано нові точні розв'язки рівнянь Колмогорова-Петровського-Піскунова, Фішера та ряду інших рівнянь, які відіграють важливу роль в математичній біології, хімії, генетиці та в багатьох інших галузях, причому отримані розв'язки є хвильовими. Зокрема, для рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова знайдено розв'язки солітонного типу. Також запропоновано таке узагальнення рівняння Фішера, яке допускає хвильові розв'язки, подібні до розв'язків рівняння Фішера, але швидкість поширення яких є довільною. У третьому розділі з використанням еліптичних функцій Якобі побудовані нескінченні серії точних розв'язків одновимірного рівняння реакції-дифузії з кубічною поліноміальною нелінійністю, а також досліджено умовну симетрію багатовимірного нелінійного рівняння реакції-дифузії шляхом редукції його до радіального рівняння.

РОЗДІЛ 4

Симетрія і точні розв'язки системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії мають широке застосування в математичній фізиці, хімії та біології. Будучи досить складними, ці системи в багатьох випадках допускають фундаментальні часткові розв'язки, такі, наприклад, як біжучі хвилі, спіральні хвилі і т.д. Існування таких розв'язків пояснюється симетрією цих систем відносно неперервних груп перетворень і тому ці розв'язки можна отримати в рамках класичного лієвського підходу.

У даному розділі досліджується класична і умовна симетрія, а також будуються точні розв'язки рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \tag{4.1}$$

де u =стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, f = стовпець $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$, кожна з компонент вектора u є функцією від змінних $t, x_1, \ldots, x_m$, f — вектор-функція від u, A — стала квадратна матриця порядку n, $\det A \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

У підрозділі 4.1 визначаються умови, при яких система (4.1) інваріантна відносно перетворень Галілея. У підрозділі 4.2 проведено класифікацію галілеїво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії для довільного n. У наступному підрозділі наведено деякі результати симетрійної редукції системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, проведеної за одновимірними підалгебрами алгебри інваріантності цієї системи. Знайдено анзаци, які редукують досліджувану систему до звичайних диференціальних рівнянь, і наведено випадки, коли редуковану систему вдається проінтегрувати. У підрозділах 4.4, 4.5 і 4.6 досліджено умовну симетрію системи (4.1) та побудовано деякі класи умовно-інваріантних розв'язків цієї системи.

4.1. Умови галілеївської інваріантності для системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Принцип відносності Галілея є одним із фундаментальних постулатів, якому повинні задовольняти фізичні, хімічні, біологічні та інші системи. Математичною мовою це означає, що математичні моделі цих систем повинні бути інваріантними відносно групи Галілея. У даному підрозділі пропонується опис систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно групи Галілея, які мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u), \tag{4.2}$$

де $u =$column$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є вектор-функцією від $t, x_1, \ldots, x_m$, $f(u) =$ $=$column $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$ є вектор-функцією від u, A — невироджена квадратна матриця порядку n. Такі системи знаходять широке застосування в теорії тепломасопереносу, а також в математичній біології та хімії.

У роботі [89] розглянуто систему (4.2) для випадку $n = 2$ та знайдено всі можливі нелінійні форми компонент вектор-функції $f(u)$. Наше завдання полягає у знаходженні для довільного n вигляду функцій $f(u)$ таких, що система (4.2) інваріантна відносно перетворень Галілея.

Нехай

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{b=1}^{m}\xi^b\frac{\partial}{\partial x_b} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_k\frac{\partial}{\partial u_k}, \tag{4.3}$$

$\tau = \tau(t,x,u)$, $\xi = \xi(t,x,u)$, $\varphi^k = \varphi^k(t,x,u)$, є оператором симетрії рівняння (4.2). Для визначення коефіцієнтів τ, ξ^b і φ_k необхідно знайти друге продовження оператора X

$$\underset{2}{X} = X + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^t \frac{\partial}{\partial u_t^k} + \sum_{b=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{x_b x_b} \frac{\partial}{\partial u_{x_b x_b}^k} + \ldots, \tag{4.4}$$

Коефіцієнти φ_k^t і $\varphi_k^{x_b x_b}$ оператора $\underset{2}{X}$ обчислюємо за формулами

$$\varphi_k^t = D_t\left(\varphi_k - \sum_{c=1}^{m} \xi^c u_{x_c}^k - \tau u_t^k\right) + \sum_{c=1}^{m} \xi^c u_{x_c t}^k + \tau u_{tt}^k, \tag{4.5}$$

$$\varphi_k^{x_b x_b} = D_{x_b}^2\left(\varphi_k - \sum_{c=1}^{m} \xi^c u_{x_c}^k - \tau u_t^k\right) + \sum_{c=1}^{m} u_{x_b x_b x_c}^k + \tau \sum_{k=1}^{n} u_{x_b x_b t}^k, \tag{4.6}$$

де

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} u_t^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{k=1}^{n} u_{tt}^k \frac{\partial}{\partial u_t^k} + \sum_{c=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_{x_c t}^k \frac{\partial}{\partial u_{x_c}^k},$$

$$D_{x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_b}^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_b t}^k \frac{\partial}{\partial u_t^k} + \sum_{c=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_{x_b x_c}^k \frac{\partial}{\partial u_{x_c}^k} +$$
$$+ \sum_{c,d=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_{x_b x_c x_d}^k \frac{\partial}{\partial u_{x_c x_d}^k} + \sum_{c=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} u_{x_b x_c t}^k \frac{\partial}{\partial u_{x_c t}^k} + \sum_{k=1}^{n} u_{x_b tt}^k \frac{\partial}{\partial u_{tt}^k}$$

є операторами повного диференціювання по змінних t і x_b відповідно.

Критерій інваріантності рівняння (4.2) відносно оператора (4.3) має вигляд

$$\varphi_k^t - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \varphi_i^{x_b x_b} = \sum_{c=1}^{n} \varphi_c \frac{\partial f^k}{\partial u^c}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.7}$$

причому рівність (4.7) повинна виконуватися для $u_t = Au_{xx} + f(u)$.

Визначимо, при якій умові рівняння (4.2) інваріантне відносно оператора

$$G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad \varphi_k = \varphi_k(t,x,u). \tag{4.8}$$

Тут $\tau = 0,\ \xi^b = \delta_{ab}t$. За формулами (4.5) і (4.6) знаходимо

$$\varphi_k^t = D_t\left(\varphi_k - tu^k_{x_a}\right) + tu^k_{x_a t} = \varphi_{k,t} + \sum_{c=1}^{n} u^c_t \varphi_{k,u^c} - u^k_{x_a}, \tag{4.9}$$

$$\varphi_k^{x_b} = D_{x_b}\left(\varphi_k - tu^k_{x_a}\right) + tu^k_{x_a x_b} = \varphi_{k,x_b} + \sum_{c=1}^{n} u^c_{x_b}\varphi_{k,u^c},$$

$$\varphi_k^{x_b x_b} = D^2_{x_b}(\varphi_k - tu_{x^k_a}) + tu^k_{x_a x_b x_b} =$$

$$= D_{x_b}(\varphi_{k,x_b} + \sum_{c=1}^{n} u^c_{x_b}\varphi_{k,u_c} - tu_{x_a x^k_b}) + tu^k_{x_a x_b x_b} = \varphi_{k,x_b x_b} +$$

$$+2\sum_{c=1}^{n}\varphi_{k,x_b u^c}u^c_{x_b} + \sum_{d=1}^{n}\sum_{c=1}^{n}\varphi_{k,u^c u^d}u^c_{x_b}u^d_{x_b} + \sum_{c=1}^{n}\varphi_{k,u^c}u^c_{x_b x_b}. \tag{4.10}$$

З рівняння (4.2)

$$u^c_t = \sum_{b=1}^{m}\sum_{d=1}^{n} a_{cd}u^d_{x_b x_b} + f^c. \tag{4.11}$$

Підставивши (4.9), (4.10) і (4.11) в (4.7), отримуємо

$$\varphi_{k,t} + \sum_{c=1}^{n}\left(\sum_{b=1}^{m}\sum_{d=1}^{n} a_{cd}u^d_{x_b x_b}\varphi_{k,u^c} + f^c\varphi_{k,u^c}\right) - u^k_{x_a} - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_b x_b} -$$

$$-2\sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_b u^c}u^c_{x_b} - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}\sum_{c=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,u^c u^d}u^c_{x_b}u^d_{x_b} -$$

$$-\sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,u^c}u^c_{x_b x_b} = \sum_{c=1}^{n}\varphi_c\frac{\partial f^k}{\partial u^c}.$$

Отже, система визначальних рівнянь має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,u^c u^d} = 0, \quad k = 1,\ldots,n; \tag{4.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_b u^c} = 0, \quad \text{якщо}\ \ b \neq a\ \ \text{або}\ \ c \neq k, \quad k = 1,\ldots,n; \tag{4.13}$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_a u^k} = 1, \quad k = 1,\ldots,n; \tag{4.14}$$

$$\sum_{c=1}^{n} a_{cd}\varphi_{k,u^c} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,u^d}, \quad k = 1, \dots, n; \tag{4.15}$$

$$\varphi_{k,t} + \sum_{c=1}^{n} f^c \varphi_{k,u^c} - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_b x_b} = \sum_{c=1}^{n} \varphi_c \frac{\partial f^k}{\partial u^c}, \; k = 1, \dots, n. \tag{4.16}$$

Система (4.12) є системою лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\varphi_{1,u^c u^d}, \dots, \varphi_{n,u^c u^d}$. Оскільки визначник $\det A$ системи (4.12) відмінний від нуля, то система має тільки нульовий розв'язок, тобто

$$\varphi_{i,u^c u^d} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.17}$$

Умова (4.17) виконується для довільних c і d, $c = 1, \dots, n$; $d = 1, \dots, n$. Аналогічно, з системи рівнянь (4.13) отримуємо, що

$$\varphi_{i,x_b u^c} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \; b \neq a. \tag{4.18}$$

З системи (4.13) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\varphi_{i,x_a u^c} = 0, \quad \text{якщо} \quad c \neq k, \; k = 1, \dots, n. \tag{4.19}$$

Систему рівнянь (4.14), (4.19) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,x_a u^1} & \dots & \varphi_{1,x_a u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,x_a u^1} & \dots & \varphi_{n,x_a u^n} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} I_n, \tag{4.20}$$

де I_n — одинична матриця порядку n. З рівняння (4.20) отримуємо, що

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,x_a u^1} & \dots & \varphi_{1,x_a u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,x_a u^1} & \dots & \varphi_{n,x_a u^n} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1}. \tag{4.21}$$

Отже, на підставі (4.17), (4.18) і (4.21)

$$\varphi_i = x_a \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u^j + \sum_{j=1}^{n} R_{ij}^{(a)}(t) u^j + B_i^{(a)}(t, x), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.22}$$

де матриця $B = (b_{ij})$ співпадає з матрицею $-\frac{1}{2}A^{-1}$. З системи (4.15) випливає, що матриця $R^{(a)} = (R_{ij}^{(a)})$ комутує з матрицею A.

Підставимо (4.22) в (4.16):

$$\sum_{j=1}^{n} R_{kj,t}^{(a)} u^j + B_{k,t}^{(a)} + x_a \sum_{c=1}^{n} b_{kc} f^c + \sum_{c=1}^{n} R_{kc}^{(a)} f^c - \sum_{b=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} B_{i,x_b x_b}^{(a)} =$$
$$= \sum_{c=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_a b_{cj} u^j + \sum_{j=1}^{n} R_{cj}^{(a)} u^j + B_c^{(a)} \right) \frac{\partial f^k}{\partial u^c}. \tag{4.23}$$

Опишемо далі рівняння (4.2), інваріантні відносно перетворень Галілея

$$x_a' = x_a + v_a t + b_a, \quad t' = t + b_0. \tag{4.24}$$

Оператори, що відповідають цим перетворенням, мають вигляд

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \sum_{a=1}^{n} \Psi^{\mu a} \frac{\partial}{\partial u_a}, \quad \Psi^{\mu a} = \Psi^{\mu a}(t, x),$$
$$G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_{b=1}^{n} \varphi_b^a \frac{\partial}{\partial u_b}, \quad \varphi_b^a = \varphi_b^a(t, x, u),$$

де $x_0 \equiv t$; $\mu = 0, 1, \ldots, m$; $a = 1, \ldots, n$. Оператори P_μ задовольняють комутаційні співвідношення $[P_\mu, P_\nu] = 0$, а тому

$$\frac{\partial \Psi^{\mu a}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \Psi^{\nu a}}{\partial x_\mu}.$$

Отже, існує така функція $F^a = F^a(t, x)$, що

$$\Psi^{\mu a} = F_\mu^a \equiv \frac{\partial F^a}{\partial x_\mu}.$$

Це дозволяє записати оператори P_μ у вигляді

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \sum_{a=1}^{n} F_\mu^a \frac{\partial}{\partial u_a}. \tag{4.25}$$

Теорема 4.1. *Якщо рівняння (4.2) інваріантне відносно операторів P_μ, визначених формулою (4.25), то локальне перетворення*

$$\hat{u}_a = u_a - F^a, \quad a = 1, \ldots, n \tag{4.26}$$

переводить рівняння (4.2) в рівняння

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - A\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_b^2} = \hat{f}(\hat{u}), \tag{4.27}$$

а оператори P_μ — в оператори

$$\hat{P}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \sum_{a=1}^{n} F_\mu^a \frac{\partial}{\partial \hat{u}_a}, \quad \frac{\partial}{\partial u_a} \to \frac{\partial}{\partial \hat{u}_a},$$

то в нових змінних $x_0 \equiv t, \ x_1, \ldots, x_m, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n$ оператор P_μ набуває вигляду

$$\hat{P}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Покажемо далі, що перетворення (4.26) зберігає диференціальну структуру рівняння (4.2), змінюючи лише саму функцію $f(u)$. Перш за все відмітимо, що оператор

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \sum_{a=1}^{n} F_\mu^a \frac{\partial}{\partial u_a}.$$

є оператором симетрії рівняння (4.2) тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти F_μ^a задовольняють таку систему визначальних рівнянь:

$$F^k_{\mu,t} - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki} F^i_{\mu,x_b x_b} = \sum_{c=1}^{n} F_\mu^c \frac{\partial f^k}{\partial u^c}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.28}$$

На підставі формул (4.26) знаходимо

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial t} + F_t^a, \quad \frac{\partial^2 u_a}{\partial x_b^2} = \frac{\partial^2 \hat{u}_a}{\partial x_b^2} + F^a_{x_b x_b},$$

тому система (4.2) набуває вигляду

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} - \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_b^2} = -F_t^k + \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki} F^i_{x_b x_b} + f^k. \tag{4.29}$$

Покажемо, що права частина

$$\hat{f}^k = -F_t^k + \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}F^i_{x_b x_b} + f^k$$

рівняння (4.29) не залежить від змінних x_μ, $\mu = 0, 1, \ldots, m$.. Дійсно,

$$\frac{\partial \hat{f}^k}{\partial x_\mu} = -F^k_{t,\mu} + \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}F^i_{x_b x_b,\mu} + \sum_{c=1}^{n} F^c_\mu \frac{\partial f^k}{\partial u^c}.$$

Внаслідок формули (4.28)

$$-F^k_{t,\mu} + \sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}F^i_{x_b x_b,\mu} = -\sum_{c=1}^{n} F^c_\mu \frac{\partial f^k}{\partial u^c},$$

а тому $\dfrac{\partial \hat{f}^k}{\partial x_\mu} = 0$. Отже, $\hat{f}^k = \hat{f}^k(\hat{u})$ і теорема доведена.

Теорема 4.2. *Якщо рівняння (4.2) інваріантне відносно перетворень Галілея (4.24), то існує локальне перетворення $u_k \to v_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, яке переводить рівняння (4.2) в рівняння*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \hat{f}(v), \tag{4.30}$$

де функція $\hat{f}(v)$ задовольняє систему рівнянь

$$(A^{-1})^{kb}\hat{f}^b = (A^{-1})^{ab} v^b \frac{\partial \hat{f}^k}{\partial v_a}. \tag{4.31}$$

В нових змінних оператори G_a перетворення (4.24) мають вигляд

$$\hat{G}_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v^j \frac{\partial}{\partial v^i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R^{(a)}_{ij} v^j \frac{\partial}{\partial v^i},$$

де $B = (b_{ij}) = -\frac{1}{2}A^{-1}$, а матриця $R^{(a)} = (R^{(a)}_{ij}) \in M_n(R)$ комутує з матрицею A.

Доведення. Внаслідок теореми (4.1) можна вважати, що оператори P_μ, які відповідають перетворенню (4.24), мають вигляд

$$P_0 = -\frac{\partial}{\partial x_0}, \;\; P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \;\; a = 1, \ldots, m,$$

а оператори G_a визначаються формулами (4.8), (4.22). Оператори P_μ, G_a є операторами розширеної класичної алгебри Галілея $A\tilde{G}(1,m)$ і пов'язані такими комутаційними співвідношеннями:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab} M, \quad [P_0, G_a] = -P_a,$$

M — центральний елемент алгебри $A\tilde{G}(1,m)$. Оскільки $[P_b, G_a] = 0$, якщо $b \neq a$, то функції $B_i^{(a)}$ у формулі (4.22) не залежать від змінних x_b, $b \neq a$. Співвідношення $[P_0, G_a] = -P_a$ показує, що функції $R_{ij}^{(a)}$ і $B_i^{(a)}$ не залежать від змінної t. З рівності $[P_a, G_a] = [P_b, G_b] = M$ випливає, що

$$B^{(a)}_{i,x_a} = B^{(b)}_{i,x_b}$$

для довільних a, b $(a \neq b,\ a,b = 1,\ldots,m)$. Враховуючи, що $B_i^{(a)}$ залежать тільки від x_a, а $B_i^{(b)}$ — від x_b, приходимо до рівності

$$B^{(a)}_{i,x_a} = B^{(b)}_{i,x_b} = \mu_i, \quad \mu_i - \text{стала}.$$

Отже,

$$B_i^{(a)} = \mu_i x_a + \lambda_i^{(a)}, \quad \lambda_i^{(a)} - \text{стала}.$$

Позначимо через $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ розв'язок системи лінійних рівнянь

$$b_{11} y_1 + \ldots + b_{1n} y_n = \mu_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n1} y_1 + \ldots + b_{nn} y_n = \mu_n.$$

Тоді локальне перетворення

$$u^k \to v^k = u^k + \lambda_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

переводить рівняння (4.2) в рівняння (4.30), де $\hat{f}(v) = f(v^1 - \lambda_1, \ldots, v^n - \lambda_n)$. В нових змінних $t, x_1, \ldots, x_m, v^1, \ldots, v^n$ оператор (4.8) набуває вигляду

$$\hat{G}_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

$$\hat{\varphi}_i = x_a \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v^j + \sum_{j=1}^{n} R_{ij}^{(a)} v^j + \hat{\lambda}_i^{(a)}, \quad \hat{\lambda}_i^{(a)} - \text{ стала.}$$

Для оператора $\hat{G}_a$ рівняння (4.23) запишеться так:

$$x_a \sum_{c=1}^{n} b_{kc} \hat{f}^c + \sum_{c=1}^{n} R_{kc}^{(a)} \hat{f}^c = \sum_{c=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_a b_{ij} v^j + \sum_{j=1}^{n} R_{cj}^{(a)} v^j + \hat{\lambda}_c^{(a)} \right) \frac{\partial \hat{f}^k}{\partial v_c}.$$

Продиференціюємо його по змінній x_a:

$$\sum_{c=1}^{n} b_{kc} \hat{f}^c = \sum_{c=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{cj} v^j \frac{\partial \hat{f}^k}{\partial v^c},$$

а це означає, що функція $\hat{f}(v)$ задовольняє систему рівнянь (4.31). Оскільки

$$[P_a, \hat{G}_a] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v^j \frac{\partial}{\partial v^i} = M,$$

то $[M, \hat{G}_a] = 0$. З цієї умови

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \hat{\lambda}_k^{(a)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.32}$$

Система лінійних однорідних рівнянь (4.32) має тільки нульовий розв'язок $\hat{\lambda}_1^{(a)} = 0, \ldots, \hat{\lambda}_n^{(a)} = 0$. Теорема доведена.

Наслідок. *Рівняння (4.2) інваріантне відносно оператора Галілея*

$$G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u^j \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{4.33}$$

тоді і тільки тоді, коли $B = (b_{ij}) = -\frac{1}{2}A^{-1}$, а функція $f(u)$ задовольняє систему рівнянь

$$(A^{-1})^{kb} f^b = (A^{-1})^{ab} u^b \frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{4.34}$$

Доведення. Необхідність випливає з доведення теореми (4.2). Навпаки, якщо функція $f(u)$ є розв'язком системи рівнянь (4.34) і $B = -\frac{1}{2}A^{-1}$, то оператор (4.33) є оператором симетрії рівняння (4.2), оскільки в цьому випадку функції

$$\varphi_k = x_a \sum_{j=1}^{n} b_{kj} u^j, \quad k = 1, \ldots, n$$

задовольняють систему визначальних рівнянь (4.12) — (4.16).

Отже, класифікація систем (4.2), інваріантних відносно перетворень Галілея, зводиться до знаходження розв'язків системи рівнянь (4.34).

Характер розв'язків системи (4.34) суттєво залежить від типу матриці A^{-1}. З точністю до перетворень еквівалентності матриця A^{-1} може бути зведена до однієї з трьох канонічних форм [20] залежно від значень коренів характеристичного рівняння. Далі розглянемо випадки, що відповідають кожній з цих форм.

1) Корені характеристичного рівняння матриці A^{-1} дійсні. Матриця A^{-1} в цьому випадку подібна до матриці [20]

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_s,\lambda_s}} \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

де J_{m_i,λ_i} є кліткою Жордана порядку m_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$:

$$J_{m_i,\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Зокрема, якщо $m_i = 1$, то $J_{m_i,\lambda_i} = (\lambda_i)$ — квадратна матриця порядку 1.

2) Корені характеристичного рівняння матриці A^{-1} комплексні. Мат-

риця A^{-1} в цьому випадку подібна до матриці [20]

$$\begin{pmatrix} \boxed{J^{m_1}_{b_1,d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^{m_k}_{b_k,d_k}} \end{pmatrix},\ d_i \neq 0 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, k,$$

де $J^m_{b,d}$ — узагальнена клітка Жордана, тобто матриця порядку $2m$ наступного вигляду

$$J^m_{b,d} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & O \\ & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ & O & & & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Якщо $m = 1$, то

$$J^1_{b,d} = \begin{pmatrix} b & -d \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Для випадку $m_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ матриця A^{-1} подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 & -d_1 \\ d_1 & b_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} b_k & -d_k \\ d_k & b_k \end{matrix}} \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

причому $d_i \neq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, k$.

3) Характеристичне рівняння матриці A^{-1} має s дійсних коренів і t комплексних коренів з врахуванням їх кратності. Матриця A^{-1} в даному

випадку подібна до матриці [20]

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \boxed{J_{m_k,\lambda_k}} & & & \\ & & & \boxed{J^{n_1}_{b_1,d_1}} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{J^{n_l}_{b_l,d_l}} \end{pmatrix},$$

де $m_1 + \ldots + m_k = s, \;\; 2n_1 + \ldots + 2n_l = t.$

Зокрема, якщо $n_1 = \ldots = n_l = 1$, то матриця A^{-1} подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \boxed{J_{m_k,\lambda_k}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} b_1 & -d_1 \\ d_1 & b_1 \end{matrix}} & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} b_l & -d_l \\ d_l & b_l \end{matrix}} \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

4.2. Системи рівнянь реакції-дифузії, інваріантні відносно груп Галілея

Згідно з результатами попереднього підрозділу опис систем рівнянь (4.2), які допускають перетворення Галілея, зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (4.34). Далі наведено розв'язки цієї системи для випадків, коли матриця має вигляд (4.35), (4.36), (4.37).

Нехай матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n,\lambda}$. Для визначення всіх можливих нелінійних форм компонент вектор-функції $f(u)$ введемо нову змінну τ , яка визначається із співвідношення

$$\frac{\partial u_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} u_b. \tag{4.38}$$

Лема 4.3. *Набір функцій*

$$u_k = e^{\lambda\tau}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1-i}\frac{\tau^i}{i!}\,, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{4.39}$$

де $C_0 = 1$, *є розв'язком системи (4.38).*

Доведення. Доведемо справедливість леми методом математичної індукції відносно n. Для $n = 1$ це очевидно, оскільки система (4.38) зводиться до одного рівняння

$$\frac{\partial u_1}{\partial\tau} = \lambda u_1,$$

розв'язком якого є функція $u_1 = e^{\lambda\tau}$. Припустимо, що лема справедлива для $n = m-1$ і доведемо її справедливість для $n = m$. За індуктивним припущенням набір функцій

$$u_k = e^{\lambda\tau}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1-i}\frac{\tau^i}{i!}\,, \quad k = 1,\ldots,m-1, \tag{4.40}$$

де $C_0 = 1$, є розв'язком системи (4.38) у випадку $n = m-1$. Якщо цей набір функцій поповнити розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u_m}{\partial\tau} = e^{\lambda\tau}\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2-i}\frac{\tau^i}{i!} + \lambda u_m, \tag{4.41}$$

то отримаємо набір функцій, який є розв'язком системи (4.38) у випадку $k = m$.

Проінтегрувавши рівняння (4.41), матимемо

$$u_m = e^{\lambda\tau}\left(\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2-i}\frac{\tau^{i+1}}{(i+1)!} + C_{m-1}\right),$$

де C_{m-1} — стала. Оскільки $m-2-i = m-1-i-1$, то

$$u_m = e^{\lambda\tau}\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1-i}\frac{\tau^i}{i!}. \tag{4.42}$$

Отже, набір функцій (4.40), (4.42) є розв'язком системи (4.38) у випадку $n = m$ і має вигляд (4.39). Лема доведена.

Лема 4.4. *Першими інтегралами системи (4.38) є функції*

$$C_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{k+1-p}}{u_1} \ln^p u_1, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{4.43}$$

Доведення. У випадку $n = 2$ система (4.38) має розв'язок $u_1 = e^{\lambda\tau}$, $u_2 = e^{\lambda\tau}(C_1 + \tau)$, а тому

$$C_1 = \frac{u_2}{u_1} - \frac{1}{\lambda} \ln u_1$$

є першим інтегралом. Нехай першими інтегралами системи (4.38) у випадку $n = m$ є функції

$$C_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{k+1-p}}{u_1} \ln^p u_1, \quad k = 1, \ldots, m-1. \tag{4.44}$$

Покажемо, що функції (4.44) і функція

$$C_m = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{m+1-p}}{u_1} \ln^p u_1$$

є першими інтегралами системи (4.38) у випадку $n = m + 1$. Дійсно, внаслідок леми 4.3

$$u_{m+1} = e^{\lambda\tau} \sum_{i=0}^{m} C_{m-i} \frac{\tau^i}{i!} = e^{\lambda\tau} \left(C_m + \sum_{i=1}^{m} C_{m-i} \frac{\tau^i}{i!} \right).$$

Звідси

$$C_m = \frac{u_{m+1}}{u_1} - \sum_{i=1}^{m} C_{m-i} \frac{\tau^i}{i!}.$$

За індуктивним припущенням

$$C_{m-i} = \sum_{p=0}^{m-i} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{m-i+1-p}}{u_1} \ln^p u_1,$$

а тому

$$C_m = \frac{u_{m+1}}{u_1} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=0}^{m-i} (-1)^p \frac{1}{i! p! \lambda^{p+i}} \frac{u_{m-i+1-p}}{u_1} \ln^{p+i} u_1. \tag{4.45}$$

Нехай $p+i=r$, тоді формула (4.45) запишеться так:

$$C_m = \frac{u_{m+1}}{u_1} - \sum_{r=1}^{m} \sum_{p+i=r} (-1)^p \frac{1}{i!p!\lambda^r} \frac{u_{m+1-r}}{u_1} \ln^r u_1. \tag{4.46}$$

Очевидно,

$$\sum_{p+i=r} (-1)^p \frac{1}{i!p!} = \frac{1}{(p+i)!} \sum_{p+i=r} (-1)^{r-i} \frac{(p+i)!}{i!p!} = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{i=1}^{r} (-1)^i C_r^i =$$

$$= \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i - \frac{(-1)^r}{r!},$$

де $C_i^r = \dfrac{r!}{i!(r-i)!}$ — біноміальні коефіцієнти. Враховуючи, що

$$0 = (1-1)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i,$$

отримуемо рівність

$$\sum_{p+i=r} (-1)^p \frac{1}{i!p!} = -\frac{(-1)^r}{r!},$$

а, отже, на підставі рівності (4.46)

$$C_m = \frac{u_{m+1}}{u_1} + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{1}{\lambda^r r!} \frac{u_{m+1-r}}{u_1} \ln^r u_1 = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{1}{\lambda^r r!} \frac{u_{m+1-r}}{u_1} \ln^r u_1.$$

Лема доведена.

Теорема 4.5. *Якщо матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n,\lambda}$, то загальний розв'язок системи (4.34) утворюють функції*

$$f_k = u_1 \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^p p!} \varphi_{k-p} \ln^p u_1, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4.47}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є довільними функціями від перших інтегралів (4.43) системи рівнянь(4.38).

Доведення. Введемо нову змінну τ, яка визначається системою (4.38). Використовуючи змінну τ рівняння (4.34) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} f_b. \tag{4.48}$$

Проінтегрувавши ситему (4.48), знаходимо її загальний розв'язок

$$f_k = e^{\lambda\tau} \sum_{p=0}^{k-1} \tilde{C}_{k-p} \frac{\tau^p}{p!}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

де $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n$ — довільні сталі. Враховуючи, що $u_1 = e^{\lambda\tau}$, отримуємо на підставі леми 4.4 загальний розв'язок системи рівнянь (4.34), який визначається функціями (4.47). Теорема доведена.

У теоремах, що сформульовані нижче, для компактного запису компонент вектор-функції $f =$стовпець$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ і $u =$стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ми використовуємо такі позначення:

$$\begin{aligned}
&f_k^{(1)} = f_k \text{ для } \ k = 1, \ldots, m_1;\\
&f_k^{(i)} = f_{m_1+\ldots+m_{i-1}+k} \text{ для } \ k = 1, \ldots, m_i, \text{якщо } \ i > 1;\\
&u_k^{(1)} = u_k \text{ для } \ k = 1, \ldots, m_1;\\
&u_k^{(i)} = u_{m_1+\ldots+m_{i-1}+k} \text{ для } \ k = 1, \ldots, m_i, \text{якщо } \ i > 1.
\end{aligned}$$

Теорема 4.6. *Нехай обернена матриця дифузії A^{-1} подібна до матриці (4.35). Відповідна система рівнянь реакції-дифузії (4.2) інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності f^1, $f^2, \ldots, f^n$ мають наступний вигляд*

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{4.49}$$

де $\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)}$ є довільними функціями від

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{k}(-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, s;\\
&[u_1^{(j)}]^{\lambda_1} [u_1^{(1)}]^{-\lambda_j}, \quad j = 2, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Доведення.

Введемо нову змінну τ, яка визначається системою рівнянь

$$\frac{\partial u_a^{(i)}}{\partial \tau} = J^{ab}_{m_i,\lambda_i} u_b^{(i)},\ i = 1, \ldots, s. \tag{4.51}$$

Проінтегрувавши рівняння

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \tau} = \lambda_1 u_1^{(1)}, \quad \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial \tau} = \lambda_j u_1^{(j)},\ j = 2, \ldots, s,$$

системи (4.51), отримаємо $u_1^{(1)} = e^{\lambda_1 \tau}, \ \ u_1^{(j)} = C^{(j)} e^{\lambda_j \tau}$, а тому

$$[u_1^{(j)}]^{\lambda_1} [u_1^{(1)}]^{-\lambda_j} = C^{(j)\lambda_1}, \quad j = 2, \ldots, s, \tag{4.52}$$

є першим інтегралом системи (4.51). Внаслідок леми 4.4 першими інтегралами системи (4.51) є також функції

$$C_k^{(i)} = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)},\ k = 1, \ldots, m_i - 1;\ i = 1, \ldots, s. \tag{4.53}$$

Використавши змінну τ, систему рівнянь (4.34) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial f_a^{(i)}}{\partial \tau} = J^{ab}_{m_i,\lambda_i} f_b^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{4.54}$$

Проінтегрувавши систему (4.54), знаходимо її загальний розв'язок

$$f_k^{(i)} = e^{\lambda_i \tau} \sum_{p=0}^{k-1} \tilde{C}_{k-p}^{(i)} \frac{\tau^p}{p!}, \quad k = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, \ldots, s,$$

де $\tilde{C}_1^{(i)}, \ldots, \tilde{C}_{m_i}^{(i)}$ — довільні сталі. Враховуючи, що $u_1^{(i)} = C^{(i)} e^{\lambda_i \tau}$, $C^{(i)}$ — стала, отримуємо загальний розв'язок системи (4.34):

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, 2,$$

де $\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)}$ є довільними функціями від перших інтегралів (4.52), (4.53) системи рівнянь (4.51). Теорема доведена.

Нехай матриця A^{-1} є кліткою Жордана

$$J^1_{b,d} = \begin{pmatrix} b & -d \\ d & b \end{pmatrix}, \quad d \neq 0.$$

Введемо нову змінну τ, яка визначається із співвідношень

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = bu_1 - du_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = du_1 + bu_2. \tag{4.55}$$

Лема 4.7. *Функція*

$$R_1 \exp\left(-\frac{b}{d}\arctan\frac{u_2}{u_1}\right), \quad R_1^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

є першим інтегралом системи (4.55).

Доведення. Загальний розв'язок системи (4.55) має вигляд

$$u_1 = e^{b\tau}(C_1\cos(d\tau) - C_2\sin(d\tau)),$$
$$u_2 = e^{b\tau}(C_1\sin(d\tau) + C_2\cos(d\tau)).$$

Тоді

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{C_1\sin(d\tau) + C_2\cos(d\tau)}{C_1\cos(d\tau) - C_2\sin(d\tau)} = \frac{\tan(d\tau) + \frac{C_2}{C_1}}{1 - \frac{C_2}{C_1}\tan(d\tau)}.$$

Поклавши $\dfrac{C_2}{C_1} = \tan\tilde{C}$, знаходимо $\dfrac{u_2}{u_1} = \tan(d\tau + \tilde{C})$. Отже,

$$\tilde{C} = \arctan\frac{u_2}{u_1} - d\tau. \tag{4.56}$$

Оскільки

$$u_1^2 + u_2^2 = e^{2b\tau}(C_1^2 + C_2^2),$$

то у випадку $b \neq 0$ маємо, що

$$\tau = \frac{1}{2b}(\ln R_1^2 - \ln(C_1^2 + C_2^2)). \tag{4.57}$$

Враховуючи рівності (4.56) і (4.57), отримуємо

$$\frac{b}{d}\tilde{C} = \frac{b}{d}\arctan\frac{u_2}{u_1} - \ln R_1 + \frac{1}{2}\ln(C_1^2 + C_2^2),$$

або

$$-\frac{b}{d}\tilde{C}+\frac{1}{2}\ln(C_1^2+C_2^2)=-\frac{b}{d}\arctan\frac{u_2}{u_1}+\ln R_1.$$

Отже, першим інтегралом системи (4.55) є функція

$$R_1\exp\left(-\frac{b}{d}\arctan\frac{u_2}{u_1}\right).$$

У випадку $b=0$ першим інтегралом системи (4.55) є функція R_1. Лема доведена.

Теорема 4.8. *Нехай обернена матриця дифузії A^{-1} подібна до матриці (4.36). Відповідна система рівнянь реакції-дифузії (4.2) інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності $f^1, f^2, \ldots, f^n$ мають наступний вигляд*

$$\begin{aligned} f_1^{(i)} &= \varphi_1^{(i)}u_2^{(i)}+\varphi_2^{(i)}u_1^{(i)},\\ f_2^{(i)} &= -\varphi_1^{(i)}u_1^{(i)}+\varphi_2^{(i)}u_2^{(i)},\quad i=1,\ldots,k, \end{aligned} \tag{4.58}$$

де $\varphi_1^{(i)}$ і $\varphi_2^{(i)}$ є довільними функціями від

$$R_i\exp\left(-\frac{b_i}{d_i}\arctan\frac{u_2^{(i)}}{u_1^{(i)}}\right),\quad R_1^{b_j}R_j^{-b_1},\quad j=2,\ldots,k, \tag{4.59}$$

$$R_i^2=[u_1^{(i)}]^2+[u_2^{(i)}]^2.$$

Доведення. Введемо нову змінну τ, яку визначимо із співвідношень

$$\frac{\partial u_a^{(i)}}{\partial\tau}=J_{b_i,d_i}^{ab}u_b^{(i)},\quad i=1,\ldots,k. \tag{4.60}$$

Загальний розв'язок системи (4.60) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} &= e^{b_i\tau}(C_1^{(i)}\cos(d_i\tau)-C_2^{(i)}\sin(d_i\tau)),\\ u_2^{(i)} &= e^{b_i\tau}(C_1^{(i)}\sin(d_i\tau)+C_2^{(i)}\cos(d_i\tau)). \end{aligned}$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{({u_1^{(1)}}^2+{u_2^{(1)}}^2)^{\frac{1}{b_1}}}{({u_1^{(j)}}^2+{u_2^{(j)}}^2)^{\frac{1}{b_j}}}=\frac{({C_1^{(1)}}^2+{C_2^{(1)}}^2)^{\frac{1}{b_1}}}{({C_1^{(j)}}^2+{C_2^{(j)}}^2)^{\frac{1}{b_j}}},\quad j=2,\ldots,k,$$

є першим інтегралом системи (4.60). Цей перший інтеграл можна взяти у вигляді $R_1^{b_j}R_j^{-b_1}$. Внаслідок леми 4.7 першими інтегралами системи (4.60), є також функції

$$R_i \exp\left(-\frac{b_i}{d_i}\arctan\frac{u_2^{(i)}}{u_1^{(i)}}\right), \quad i = 1, \ldots, k.$$

З використанням змінної τ система (4.34) набуває вигляду

$$\frac{\partial f_a^{(i)}}{\partial \tau} = J^{ab}_{b_i, d_i} f_b^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4.61}$$

Проінтегрувавши систему (4.61), знаходимо її загальний розв'язок

$$f_1^{(i)} = \varphi_1^{(i)} u_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_1^{(i)},$$
$$f_2^{(i)} = -\varphi_1^{(i)} u_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_2^{(i)},$$
$$i = 1, \ldots, k,$$

де $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}$ — довільні функції від змінних $R_1^{b_j}R_j^{-b_1}$, $j = 2, \ldots, k$,

$$R_i \exp\left(-\frac{b_i}{d_i}\arctan\frac{u_2^{(i)}}{u_1^{(i)}}\right), \quad R_i^2 = [u_1^{(i)}]^2 + [u_2^{(i)}]^2.$$

Теорема доведена.

Наслідком теорем (4.6) і (4.8) є наступна теорема.

Теорема 4.9. *Якщо матриця A^{-1} має вигляд (4.37), то загальний розв'язок системи (4.2) утворюють функції*

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, k = 1, \ldots, m_i; \; i = 1, \ldots, r; \tag{4.62}$$

$$f_1^{(j)} = \varphi_1^{(j)} u_2^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_1^{(j)}, \tag{4.63}$$

$$f_2^{(j)} = -\varphi_1^{(j)} u_1^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_2^{(j)}, \tag{4.64}$$

$$j = r+1, \ldots, r+l,$$

де $\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)}$, $\varphi_1^{(j)}$, $\varphi_2^{(j)}$ є довільними функціями від

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, k = 1, \ldots, m_i; \; i = 1, \ldots, r;$$

$$R_j \exp\left(-\frac{b_{j-r}}{d_{j-r}} \arctan \frac{u_2^{(j)}}{u_1^{(j)}}\right), \quad R_{r+1}^{b_1} R_{j'}^{-b_{j'-r}}, \quad j' = r+2, \ldots, r+l,$$
$$\frac{[u_1^{(r+1)}]^2 + [u_2^{(r+1)}]^2}{[u_1^{(1)}]^{\frac{2b_1}{\lambda_1}}}, \quad R_j^2 = [u_1^{(j)}]^2 + [u_2^{(j)}]^2.$$

Наведемо деякі приклади застосування отриманих у даному підрозділі результатів.

У випадку, коли матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{a,b}^1$, використовуючи теорему 4.8, приходимо до наступної системи рівнянь:

$$u_t - \triangle(au - bv) = \varphi_1 v + \varphi_2 u,$$
$$v_t - \triangle(bu + av) = -\varphi_1 u + \varphi_2 v,$$

де $\varphi_1, \ \varphi_2$ — довільні функції від $R \exp\left(-\frac{a}{b} \arctan \frac{v}{u}\right), \quad R^2 = u^2 + v^2.$ Ця система може бути переписана у вигляді одного рівняння для комплексної функції $W = u + iv$:

$$W_t - (a + bi)\triangle W = \varphi W, \tag{4.65}$$

де $\varphi = \varphi_2 - i\varphi_1$. Якщо в (4.65) покласти $a = 0$, то ми отримуємо галілеїво-інваріантний підклас нелінійних рівнянь Шрьодінгера.

Якщо матриця A^{-1} подібна до матриці (4.36), де $k = 2$, то згідно з теоремою 4.8 отримуємо таку систему рівнянь, інваріантну відносно перетворень Галілея:

$$\begin{aligned}
u_t^{(1)} - \triangle(b_1 u^{(1)} - d_1 v^{(1)}) &= \varphi_1^{(1)} v^{(1)} + \varphi_2^{(1)} u^{(1)}, \\
v_t^{(1)} - \triangle(d_1 u^{(1)} + b_1 v^{(1)}) &= -\varphi_1^{(1)} u^{(1)} + \varphi_2^{(1)} v^{(1)}, \\
u_t^{(2)} - \triangle(b_2 u^{(2)} - d_2 v^{(2)}) &= \varphi_1^{(2)} v^{(2)} + \varphi_2^{(2)} u^{(2)}, \\
v_t^{(2)} - \triangle(d_2 u^{(2)} + b_2 v^{(2)}) &= -\varphi_1^{(2)} u^{(2)} + \varphi_2^{(2)} v^{(2)},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

де $\varphi_1^{(1)}, \ \varphi_2^{(1)}, \ \varphi_1^{(2)}, \ \varphi_2^{(2)}$ — довільні функції від $R_1 \exp\left(-\frac{b_1}{d_1} \arctan \frac{v^{(1)}}{u^{(1)}}\right)$, $R_2 \exp\left(-\frac{b_2}{d_2} \arctan \frac{v^{(2)}}{u^{(2)}}\right)$, $R_1^{b_2} R_2^{-b_1}$, $R_1^2 = [u^{(1)}]^2 + [v^{(1)}]^2$, $R_2^2 = [u^{(2)}]^2 + [v^{(2)}]^2$.

Таким чином, ми знайшли з точністю до перетворень еквівалентності всі системи рівнянь для випадків, коли матриця дифузії задається однією з канонічних форм (4.35), (4.36), (4.37). Відповідні нелінійності задаються формулами (4.49), (4.58), (4.62)–(4.64).

4.3. Симетрійна редукція системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Даний підрозділ присвячений розгляду системи нелінійних рівнянь дифузії вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}u_1 + a_{12}u_2) = f^1(u_1, u_2),\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{21}u_1 + a_{22}u_2) = f^2(u_1, u_2),\end{aligned} \tag{4.67}$$

де u_1, u_2 є функціями, які залежать від змінних t і x, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ є довільними параметрами і $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Симетрійні властивості системи (4.67) були вивчені в роботах [88, 89]. Ми використаємо одновимірні підалгебри алгебри інваріантності системи (4.67) для побудови анзаців, які редукують систему (4.67) до системи звичайних диференціальних рівнянь. У даному підрозділі обмежимося аналізом окремих випадків, повний же перелік анзаців і відповідних їм редукованих систем подано у додатку.

У прикладах, що розглянуті нижче, ми будемо мати справу з алгебрами інваріантності систем вигляду (4.67). Кожна з таких алгебр L є алгеброю Лі над R і для класифікації інваріантних розв'язків системи (4.67) необхідно знайти всі одновимірні підалгебри алгебри L з точністю до групи внутрішніх автоморфізмів. Кожен внутрішній автоморфізм алгебри Лі L є добутком автоморфізмів вигляду $\mathrm{Ad}(\exp X)$, $X \in L$, що визначаються формулою

$$\mathrm{Ad}(\exp X)Y = Y + \frac{1}{1!}[X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \ldots \tag{4.68}$$

для довільного $Y \in L$.

Розглянемо таку систему рівнянь типу (4.67):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1^{k+1}\varphi_1, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_1^{k+d}\varphi_2, \end{aligned} \tag{4.69}$$

де $k \neq 0$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$. Максимальна алгебра інваріантності системи (4.69) породжується операторами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \ \ P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ \ D_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{k}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right). \tag{4.70}$$

Оператори (4.70) пов'язані такими комутаційними співвідношеннями:

$$[P_0, P_1] = 0, \ \ [P_0, D_1] = 2P_0, \ \ [P_1, D_1] = P_1.$$

Довільний оператор Z алгебри інваріантності (4.70) має вигляд

$$Z = \alpha P_0 + \beta P_1 + \nu D_1, \ \ \alpha, \beta, \nu \in R.$$

Якщо $\nu = 0$, то існують два типи одновимірних підалгебр, породжених оператором Z: $< P_1 >$, $< P_0 + \gamma P_1 >$ $(\gamma \in R)$. Якщо $\gamma \neq 0$, то можна вважати, що $\gamma = 1$. Діючи внутрішнім автоморфізмом $\mathrm{Ad}(\exp(\Theta_0 P_0 + + \Theta_1 P_1))$ на оператор Z, отримуємо

$$\mathrm{Ad}(\exp(\Theta_0 P_0 + \Theta_1 P_1))Z = (\alpha + 2\Theta_0)P_0 + (\beta + \Theta_1)P_1 + D_1.$$

Поклавши $\Theta_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$, $\Theta_1 = -\beta$, знаходимо, що

$$\mathrm{Ad}\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{2}P_0 - \beta P_1\right)\right)Z = D_1.$$

Отже, з точністю до групи внутрішніх автоморфізмів алгебра (4.70) має три типи одновимірних підалгебр: $< P_1 >, < P_0 + \gamma P_1 >$ $(\gamma \in R), < D_1 >$. Оскільки система (4.67) інваріантна відносно операторів P_0 і P_1 у випадку довільних функцій $f^1(u_1, u_2)$ і $f^2(u_1, u_2)$, то симетрійна редукція за підалгебрами $< P_1 >, < P_0 + \gamma P_1 >$ подана у додатку для довільних нелінійностей f^1 і f^2.

Симетрійний анзац, що відповідає підалгебрі $< D_1 >$, має вигляд

$$u_1 = t^{-\frac{1}{k}}\omega_1(z), \quad u_2 = t^{-\frac{d}{k}}\omega_2(z), \quad z = xt^{-\frac{1}{2}} \tag{4.71}$$

і редукує (4.69) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}\omega_1 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_1 + a\ddot{\omega}_1 + \omega_1^{k+1}\varphi_1 = 0,\\ &\frac{d}{k}\omega_2 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_2 + b\ddot{\omega}_2 + \omega_1^{k+d}\varphi_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.72}$$

де φ_1 і φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

Далі наведено всі випадки, коли редуковану систему вдається ефективно проінтегрувати і знайти відповідні розв'язки системи (4.69) в явному вигляді.

У випадку $k = 2,\ d = 1,\ a = b = 1$ редукована система (4.72) має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_1 + \omega_1^{3}\varphi_1 = 0,\\ &\frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_2 + \omega_1^{3}\varphi_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.73}$$

де φ_1 і φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. В залежності від виду функцій φ_1 і φ_2 розглянемо декілька випадків.

а) Нехай $\varphi_1 = -a_1 < 0,\ \varphi_2 = -b_1\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3,\ b_1 > 0$. Частинний розв'язок першого рівняння системи (4.73) будемо шукати у вигляді

$$\omega_1 = \gamma\frac{z}{z^2+6}, \quad \gamma \in R.$$

Підставивши у дане рівняння, отримаємо $-a_1\gamma^2+8 = 0$, а тому $\gamma = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}$. Отже,

$$\omega_1 = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}\frac{z}{z^2+6},$$

і на підставі анзацу (4.71)

$$u_1(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}\frac{x}{x^2+6t}.$$

При $\varphi_2 = -b_1 \left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3$, $b_1 > 0$ друге рівняння системи можна легко проінтегрувати. В результаті отримуємо такий точний розв'язок системи (4.69):

$$u_1(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}\frac{x}{x^2+6t},$$
$$u_2(x,t) = \frac{2\sqrt{2b_1}}{b_1}\frac{x}{x^2+6t}.$$

b) $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = -b_1 \left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3$. Перше рівняння системи (4.73) має вигляд

$$\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_1 = 0 \tag{4.74}$$

Рівняння (4.74) є лінійним і його загальний розв'язок [15]

$$\omega_1 = \exp\left(-\frac{1}{4}z^2\right)\left(C_1 + C_2\int \exp\left(\frac{1}{4}z^2\right)dz\right) \tag{4.75}$$

де $C_1,\ C_2$ — довільні сталі.Отже, система (4.69) має розв'язок

$$u_1(x,t) = t^{-\frac{1}{2}}\omega_1(z),\ z = xt^{-\frac{1}{2}},$$
$$u_2(x,t) = \frac{2\sqrt{2b_1}}{b_1}\frac{x}{x^2+6t},$$

де функція $\omega_1(z)$ визначається формулою (4.75).

c) Нехай $\varphi_1 = -a_1 < 0,\ \varphi_2 = -a_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$. У цьому випадку система (4.73) має частинний розвязок

$$\omega_1(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}\frac{z}{z^2+6},$$
$$\omega_2(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}\mu}{a_1}\frac{z}{z^2+6},$$

μ — ненульова довільна стала. Відповідний розвязок системи (4.69) має вигляд

$$u_1(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}}{a_1}\frac{x}{x^2+6t},$$
$$u_2(x,t) = \frac{2\sqrt{2a_1}\mu}{a_1}\frac{x}{x^2+6t}.$$

Розглянемо далі редуковану систему (4.72) у випадку $k = 1,\ d = 1,\ a = b = 1$:

$$\begin{aligned} &\omega_1 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_1 + \ddot{\omega}_1 + \omega_1^2\varphi_1 = 0, \\ &\omega_2 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_2 + \omega_1^2\varphi_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.76}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Якщо $\varphi_1 = -a_1 < 0,\ \varphi_2 = -a_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, то система (4.76) має розв'язок

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{6}{a_1}\frac{(8-2\sqrt{6})z^2 + 20(12-5\sqrt{6})}{[z^2+2(15-5\sqrt{6})]^2}, \\ \omega_2 &= -\frac{6\mu}{a_1}\frac{(8-2\sqrt{6})z^2 + 20(12-5\sqrt{6})}{[z^2+2(15-5\sqrt{6})]^2}, \end{aligned}$$

μ — довільна стала. У підсумку отримуємо такий розвязок системи (4.69):

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\frac{6}{a_1}\frac{(8-2\sqrt{6})x^2 + 20(12-5\sqrt{6})t}{[x^2+2(15-5\sqrt{6})t]^2}, \\ u_2(x,t) &= -\frac{6\mu}{a_1}\frac{(8-2\sqrt{6})x^2 + 20(12-5\sqrt{6})t}{[x^2+2(15-5\sqrt{6})t]^2}. \end{aligned}$$

4.4. Умовна симетрія і точні розв'язки одновимірного векторного рівняння дифузії

У даному підрозділі результати підрозділу 3.5 узагальнюються на векторне рівняння дифузії. Ми покажемо, що оператори умовної симетрії існують для будь-якої кількості залежних змінних u при умові, що матриця дифузії є діагональною і має спеціальний вигляд. Для визначення матриці A і функції $f(u)$ рівняння (4.1), що допускає оператор умовної симетрії, буде суттево використана система визначальних рівнянь (2.20), (2.23).

Теорема 4.10. *Оператор*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x+k}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{(x+k)^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \quad 1 \le l \le n,$$

є оператором умовної симетрії рівняння (4.1) тоді і тільки тоді, коли

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}, \ I_l\text{— одинична матриця порядку } l,$$

$$f^i = u_i^3\varphi_i(i=1,\ \ldots, l), \quad f^j = u_1^2\varphi_j \quad (j = l+1, \ldots, n),$$

причому

a) якщо $l=1$, *то* $\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $u_2, \ldots, \ u_n$*;*

b) якщо $l=n$, *то* $\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \ \dfrac{u_n}{u_1}$*;*

c) якщо $1 < l < n$, *то* $\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \ \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, \ u_n$.

Доведення. Необхідність. Нехай оператор X_1 є оператором умовної симетрії рівняння (4.1). У даному випадку

$$\xi = -\frac{3}{x+k}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{(x+k)^2}I_l & 0 \\ 0 & O_{n-l} \end{pmatrix},$$

O_{n-l} — нульова матриця порядку $n-l \ge 0$, причому, якщо $n-l=0$, то $\pi = \dfrac{3}{(x+k)^2}I_n$. Для визначення квадратних матриць A і Λ порядку n розіб'ємо їх на клітки:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \ \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{pmatrix},$$

де $A_1, \ \Lambda_1$ — квадратні матриці порядку l. Підставивши A і Λ у третє рівняння системи (2.20), знаходимо

$$\Lambda_1 = -\frac{6}{x^2}A_1, \quad \Lambda_2 = -\frac{2}{x^2}A_2,$$
$$\Lambda_3 = -\frac{6}{x^2}A_3, \quad \Lambda_4 = -\frac{2}{x^2}A_4.$$

Враховуючи ці співвідношення і перше рівняння системи (2.20), отримуємо

$$3A_1 = 3A_1^2 + A_2A_3, \tag{4.77}$$

$$3A_2 = 6A_1A_2 + 2A_2A_4, \tag{4.78}$$

$$9A_3 = 6A_3A_1 + 2A_4A_3, \tag{4.79}$$

$$3A_4 = 3A_3A_2 + A_4^2. \tag{4.80}$$

Помноживши обидві частини рівняння (4.78) на A_3 з правої сторони, матимемо

$$3A_2A_3 = 6A_1A_2A_3 + 2A_2A_4A_3.$$

З рівняння (4.79)

$$A_4A_3 = \frac{9}{2}A_3 - 3A_3A_1,$$

а тому попереднє рівняння набуває такого вигляду:

$$-A_2A_3 = A_1A_2A_3 - A_2A_3A_1. \tag{4.81}$$

З ріняння (4.77) випливає, що $A_1A_2A_3 = A_2A_3A_1$, а тому на підставі (4.81) $A_2A_3 = 0$. Підставивши в рівняння (4.77), знаходимо $A_1 = A_1^2$.

Матриця A_1 подібна над полем комплексних чисел до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_s,\lambda_s}} \end{pmatrix},$$

де J_{m_i,λ_i} — клітка Жордана ($i = 1, 2, \ldots, s$). Оскільки $A_1^2 = A_1$, то $J^2_{m_i,\lambda_i} = J_{m_i,\lambda_i}$, а тому $m_i = 1,\ \lambda_i \in \{0, 1\}$ для i=1,2,…,s. Отже, існує така невироджена матриця T_1 порядку l, що

$$T_1^{-1}A_1T_1 = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & O_{p_2} \end{pmatrix}, \tag{4.82}$$

де $p_1 + p_2 = l,\ p_2 \geq 0$.

Проведемо далі дослідження матриці A_4. Помноживши обидві частини рівняння (4.79) на A_2 з правої сторони, отримуємо

$$9A_3A_2 = 6A_3A_1A_2 + 2A_4A_3A_2.$$

Оскільки внаслідок рівняння (4.78)

$$A_1A_2 = \frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{3}A_2A_4,$$

то попереднє рівняння перепишеться так:

$$6A_3A_2 = -2A_3A_2A_4 + 2A_4A_3A_2. \tag{4.83}$$

З рівняння (4.80) випливає, що $A_3A_2A_4 = A_4A_3A_2$, а тому $A_3A_2 = 0$ на підставі (4.83). Підставивши в рівняння (4.80), знаходимо $3A_4 = A_4^2$. Аналогічно, як і у випадку матриці A_1, показуємо, що існує така невироджена матриця T_2 порядку $n-l$, що

$$T_2^{-1}A_4T_2 = \begin{pmatrix} 3I_{q_1} & 0 \\ 0 & O_{q_2} \end{pmatrix}, \tag{4.84}$$

де $q_1 + q_2 = n - l,\ q_2 \geq 0$.

Розглянемо матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} A_1' & A_2' \\ A_3' & A_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}. \tag{4.85}$$

Внаслідок рівностей (4.82) і (4.84) знаходимо, що

$$A_1' = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & O_{p_2} \end{pmatrix},\ A_4' = \begin{pmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & O_{q_2} \end{pmatrix},$$
$$A_2' = T_1^{-1}A_2T_2,\ \ A_3' = T_2^{-1}A_3T_1.$$

Неважко переконатися, що матриці $A_1',\ A_2',\ A_3'$ і A_4' теж задовольняють систему (4.77)–(4.80). Відповідно до розбиття матриць A_1' і A_4' на клітки матриці A_2' і A_3' теж розіб'ємо на клітки:

$$A_2' = \begin{pmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \end{pmatrix},\ A_3' = \begin{pmatrix} A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \\ A_3^{(3)} & A_3^{(4)} \end{pmatrix},$$

де $A_2^{(1)} - p_1 \times q_1$-матриця, $A_3^{(1)} - q_1 \times p_1$ -матриця. Тому матриця A' має вигляд

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{p_1} & 0 & A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ \hline 0 & O_{p_2} & A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \\ \hline A_3^{(1)} & A_3^{(2)} & I_{q_1} & 0 \\ \hline A_3^{(3)} & A_3^{(4)} & 0 & O_{q_2} \end{array}\right).$$

Нехай у матриці A' $q_2 > 0$. Підставивши A_1', A_2' і A_4' у рівняння (4.78), отримаємо

$$3\begin{pmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & O_{p_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \end{pmatrix} + \\ +2\begin{pmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3I_{q_1} & 0 \\ 0 & O_{q_2} \end{pmatrix}.$$

Звідси $A_2^{(2)} = 0$, $A_2^{(4)} = 0$, а тому матриця A' є виродженою, як матриця, що має нульовий стовпець. У підсумку отримуємо, що і матриця A є виродженою, що суперечить умові.

Якщо вважати, що $p_2 > 0$, то аналогічно доводимо, що $A_2^{(3)} = 0$, $A_2^{(4)} = 0$ і ми знову приходимо до суперечності. Отже, $p_2 = 0$, $q_2 = 0$, а тому $A_1' = I_l$, $A_4' = I_{n-l}$. Підставивши в рівняння (4.78) і (4.79), знаходимо, що $A_2' = 0$, $A_3' = 0$,

$$A' = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці A і A' пов'язані співвідношенням (4.85) , то

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Матриця Λ при цьому має вигляд $\Lambda = -\dfrac{6}{(x+k)^2} I_n$.

Система рівнянь для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$ має вигляд

$$\begin{aligned} & -3f^i + u_1\frac{\partial f^i}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^i}{\partial u_l} = 0,\ i = 1, \ldots, \\ & -2f^j + u_1\frac{\partial f^j}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^j}{\partial u_l} = 0,\ j = l+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Введемо допоміжну змінну τ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = u_i \quad (i = 1, \ldots, l), \\ & \frac{\partial u_j}{\partial \tau} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Тоді з використанням змінної τ система (4.86) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & -3f^i + \frac{\partial f^i}{\partial \tau} = 0, \quad i = 1, \ldots, l; \\ & -2f^j + \frac{\partial f^j}{\partial \tau} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$\begin{aligned} & f^i = C_i e^{3\tau}, \quad i = 1, \ldots, l; \\ & f^j = C_j e^{2\tau}, \quad j = l+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Визначимо перші інтеграли системи (4.87):

$$\frac{u_2}{u_1} = \bar{C}_2, \ldots, \frac{u_l}{u_1} = \bar{C}_l, u_{l+1} = \bar{C}_{l+1}, \ldots, u_n = \bar{C}_n.$$

Тому загальний розв'язок системи (4.86) має вигляд

$$f^i = u_i^3\varphi_i\ (i = 1, \ldots, l), \quad f^j = u_1^2\varphi_j\ (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Необхідність доведена. Достатність випливає з того, що функції $\xi,\ \pi,\ \Lambda$, $\varphi = 0,\ \theta = -\Lambda$, а також функції $f^1, \ldots, f^n$, наведені вище, задовольняють систему визначальних співвідношень (2.20), (2.23).

Проведемо далі редукцію рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь, використавши оператор умовної симетрії X_1. Розглянемо три випадки.

1) <u>Випадок $1 < l < n$.</u> У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_1, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}$$

і системою функцій

$$f^i = u_i^3 \varphi_i \ (i = 1, \ \dots, l), \quad f^j = u_1^2 \varphi_j \ \ (j = l+1, \dots, n),$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \dots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \dots, u_n$. Анзац, який відповідає даному операторові X_1, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_i = (2x + k_1)\omega_i(z), \quad i = 1, \dots, l, \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = l+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.88}$$

де $z = x^2 + k_1 x + 6t + k_2, \ k_1, \ k_2$ — довільні сталі, $k_1 = 2k$.
Анзац (4.88) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_i''(z) + \varphi_i \omega_i^3 = 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ &3\omega_j''(z) + \varphi_j \omega_1^2 = 0, \quad j = l+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.89}$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \dots, \dfrac{\omega_l}{\omega_1}, \omega_{l+1}, \dots, \omega_n$.

2) <u>Випадок $l = n$.</u> У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_1, характеризується матрицею $A = I_n$ і системою функцій

$$f^i = u_i^3 \varphi_i \ \ (i = 1, \dots, n),$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \dots, \dfrac{u_n}{u_1}$. Анзац, який відповідає даному операторові X_1, має вигляд

$$u_i = (2x + k_1)\omega_i(z), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.90}$$

де $z = x^2 + k_1 x + 6t + k_2, \ k_1, \ k_2$ — довільні сталі, $k_1 = 2k$.
Анзац (4.90) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_i''(z) + \varphi_i \omega_i^3 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.91}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{\omega_1}$.

3) Випадок $l = 1$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_1, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3I_{n-1} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^1 = u_1^3\varphi_1, \quad f^j = u_1^2\varphi_j \quad (j = 2, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає даному операторові X_1, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_1 = (2x + k_1)\omega_1(z), \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.92}$$

де $z = x^2 + k_1 x + 6t + k_2$, k_1, k_2 — довільні сталі, $k_1 = 2k$.
Анзац (4.92) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_1'' + \varphi_1\omega_1^3 = 0, \\ &3\omega_j'' + \varphi_j\omega_1^2 = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.93}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\omega_2, \ldots, \omega_n$.

Побудуємо розв'язки редукованих рівнянь (4.89), (4.91), (4.93). Розглянемо розв'язки системи рівнянь (4.91) у випадку $n = 2$:

$$\begin{aligned} &\omega_1'' + \varphi_1\omega_1^3 = 0, \\ &\omega_2'' + \varphi_2\omega_2^3 = 0, \end{aligned} \tag{4.94}$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. В залежності від виду функцій φ_1 і φ_2 виділимо декілька випадків.

1) $\varphi_1 = b > 0$, $\varphi_2 = d < 0$, де b, d — сталі. Знайдемо розв'язок першого рівняння системи (4.94). Це рівняння заміною $\omega_1 = C\theta_1$ (C — стала) зводиться до рівняння

$$\theta_1'' + bc^2\theta_1^3 = 0.$$

Сталу C знайдемо з умови, що $bc^2 = \frac{1}{2}$. Отримуємо, що $C = \frac{\sqrt{2b}}{2b}$. При такому виборі сталої маємо рівняння, яке рівносильне рівнянню

$$\theta_1'^2 = -\frac{1}{4}\theta_1^4 + C_1,$$

C_1 — стала. Останнє рівняння має розв'язок $\theta_1(z) = \mathrm{sd}\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, де $\mathrm{sd}(z,k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 = 1 + (2k^2-1)\eta^2 + k^2(k^2-1)\eta^4.$$

Звідси випливає, що

$$\omega_1(z) = \frac{\sqrt{2b}}{2b}\mathrm{sd}\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

а тому

$$u_1(x,t) = \frac{\sqrt{2b}}{2b}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right].$$

Знайдемо розв'язки другого рівняння системи (4.94). Це рівняння заміною $\omega_2 = C\theta_2$ (C — стала) зводиться до рівняння

$$\theta_2'' + dc^2\theta_2^3 = 0.$$

Сталу C визначимо з умови, що $-\dfrac{dc^2}{2} = 1$. Отримуємо, що $C = -\dfrac{\sqrt{-2d}}{d}$. Тому рівняння $\theta_2'' + dc^2\theta_2^3 = 0$ при такому виборі сталої C рівносильне рівнянню

$$\theta_2'^2 = \theta_2^4 + C_1,$$

де C_1 — стала. Останнє рівняння має розв'язок $\theta_2 = \mathrm{ds}\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, де $\mathrm{ds}(z,k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 = k^2(k^2-1) + (2k^2-1)\eta^2 + \eta^4.$$

Звідси випливає, що

$$\omega_2(z) = -\frac{\sqrt{-2d}}{d}\mathrm{ds}\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

а, отже,

$$u_2(x,t) = -\frac{\sqrt{-2d}}{d}(2x+k_1)\mathrm{ds}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right].$$

Використовуючи результати підрозділа 3.2, отримуємо, що у цьому випадку система (4.1) має точні розв'язки

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{\sqrt{2b}}{2b}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right], \\ u_2(x,t) &= -\frac{\sqrt{-2d}}{d}(2x+k_1)v_k, \quad k=1,2,\dots \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\text{де} \quad v_1 = \mathrm{ds}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right], \tag{4.96}$$

а для $k \geq 1$

$$v_{k+1} = \frac{\dot{v}_k}{v_k}. \tag{4.97}$$

2) $\varphi_1 = b > 0$, $\varphi_2 = d > 0$. Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (4.1):

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{\sqrt{2b}}{2b}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right], \\ u_2(x,t) &= \frac{\sqrt{2d}}{2d}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]. \end{aligned}$$

3) $\varphi_1 = b < 0$, $\varphi_2 = d < 0$. Знаходимо такі точні розв'язки рівняння (4.1):

$$\begin{aligned} u_{1,k}(x,t) &= -\frac{\sqrt{-2b}}{b}(2x+k_1)v_k, \\ u_{2,l}(x,t) &= -\frac{\sqrt{-2d}}{d}(2x+k_1)v_l, \end{aligned}$$

де $k,\ l = 1, 2, \ldots$, а функції v_k визначені за допомогою співвідношень (4.96), (4.97).

4) $\varphi_1 = b < 0,\ \varphi_2 = d > 0$. У цьому випадку маємо наступні розв'язки рівняння (4.1):

$$u_{1,k}(x,t) = -\frac{\sqrt{-2b}}{b}(2x+k_1)v_k,$$
$$u_2(x,t) = \frac{\sqrt{2d}}{2d}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right].$$

де $k = 1, 2, \ldots$, а функції v_k визначені за допомогою співвідношень (4.96), (4.97).

5) $\varphi_1 = b > 0,\ \varphi_2 = 0$. Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (4.1):

$$u_1(x,t) = \frac{\sqrt{2b}}{2b}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right],$$
$$u_2(x,t) = (2x+k_1)[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2],$$

де $C_1,\ C_2$ — довільні сталі.

6) $\varphi_1 = b < 0,\ \varphi_2 = 0$. У цьому випадку розв'язком рівняння (4.1) є функції

$$u_{1,k}(x,t) = -\frac{\sqrt{-2b}}{b}(2x+k_1)v_k,$$
$$u_2(x,t) = (2x+k_1)[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2],$$

де $k = 1, 2, \ldots, C_1,\ C_2$ — довільні сталі, а функції v_k визначені за допомогою співвідношень (4.96), (4.97).

7) $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = d > 0$. Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (4.1):

$$u_1(x,t) = (2x+k_1)[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2],$$
$$u_2(x,t) = \frac{\sqrt{2d}}{2d}(2x+k_1)\mathrm{sd}\left[(x^2+k_1x+6t+k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right],$$

де $C_1,\ C_2$ — довільні сталі.

8) $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = d < 0$. Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (4.1):

$$u_1(x,t) = (2x+k_1)[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2],$$
$$u_{2,k}(x,t) = -\frac{\sqrt{-2d}}{d}(2x+k_1)v_k,$$

де $k = 1, 2, \ldots$, а функції v_k визначені за допомогою співвідношень (4.96), (4.97).

9) $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = d\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3$. Отримуємо такий точний розв'язок рівняння (4.1):

$$u_1(x,t) = (2x+k_1)[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2],$$
$$u_2(x,t) = -\frac{d(2x+k_1)}{20C_1^2}[C_1(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_2]^5+$$
$$+C_3(2x+k_1)(x^2+k_1x+6t+k_2)+C_4(2x+k_1),$$

де $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ — довільні сталі, $C_1 \neq 0$.

Теорема 4.11. *Оператор*

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\tan(\mu x+k_1)\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2\sec^2(\mu x+k_1)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots+u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right),$$
$$1 \le l \le n,$$

є оператором умовної симетрії рівняння (4.1) тоді і тільки тоді, коли

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix},$$
$$f^i = u_i^3\varphi_i - 2\mu^2u_i (i=1,\ \ldots, l), \quad f^j = u_1^2\varphi_j \quad (j = l+1, \ldots, n),$$

причому

a) якщо $l = 1$, то $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots,\ u_n$;

b) якщо $l = n$, то $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\frac{u_2}{u_1}, \ldots,\ \frac{u_n}{u_1}$;

c) якщо $1 < l < n$, то $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\frac{u_2}{u_1}, \ldots,\ \frac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots,\ u_n$.

Доведення. Необхідність. Нехай оператор X_2 є оператором умовної симетрії рівняння (4.1). У даному випадку $\xi = 3\mu\tan(\mu x + k_1)$,

$$\pi = \begin{pmatrix} 3\mu^2\mathrm{sec}^2(\mu x + k_1)I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дослівно повторивши міркування теореми 4.10, знаходимо, що $\Lambda = -2\xi_x I = -6\mu^2\mathrm{sec}^2(\mu x + k_1)I$, а матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Підставивши Λ, A і π в останнє рівняння системи (2.20), отримуємо

$$\varphi = \Lambda\pi + A\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -12\mu^2\mathrm{sec}^2(\mu x + k_1)I_l & 0 \\ 0 & O_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$ має вигляд

$$\begin{aligned} &-3f^i + u_1\frac{\partial f^i}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^i}{\partial u_l} - 4\mu^2 u_i = 0, \\ &-2f^j + u_1\frac{\partial f^j}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial f^j}{\partial u_l} = 0, \end{aligned} \tag{4.98}$$

$i = 1, \ldots, l;\quad j = l+1, \ldots, n.$

Введемо допоміжну змінну τ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial\tau} = u_i \quad (i = 1, \ldots, l), \\ &\frac{\partial u_j}{\partial\tau} = 0 \quad (j = l+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.99}$$

Тоді з використанням змінної τ система (4.98) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &-3f^i + \frac{\partial f^i}{\partial\tau} - 4\mu^2 e^{\tau} = 0, \quad i = 1, \ldots, l; \\ &-2f^j + \frac{\partial f^j}{\partial\tau} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$f^i = C_i e^{3\tau} - 2\mu^2 e^{\tau}, \quad i = 1, \ldots, l;$$

$$f^j = C_j e^{2\tau}, \ \ j = l+1, \ldots, n.$$

де $C_1, \ldots, C_n$ — довільні сталі. Визначимо перші інтеграли системи (4.99):

$$\frac{u_2}{u_1} = \bar{C}_2, \ldots, \frac{u_l}{u_1} = \bar{C}_l, u_{l+1} = \bar{C}_{l+1}, \ldots, u_n = \bar{C}_n.$$

Тому загальний розв'язок системи (4.99) має вигляд

$$f^i = u_i^3 \varphi_i - 2\mu^2 u_i \ (i = 1, \ldots, l), \ \ f^j = u_1^2 \varphi_j \ (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Необхідність доведена. Достатність випливає з того, що функції ξ, π, Λ, $\varphi = \Lambda\pi + A\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}$, $\theta = -\Lambda$, а також функції $f^1, \ldots, f^n$ задовольняють систему визначальних співвідношень (2.20), (2.23). Теорема доведена.

Проведемо далі редукцію рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь, використавши оператор умовної симетрії X_2. Розглянемо три випадки.

1) Випадок $1 < l < n$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_2, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^i = u_i^3 \varphi_i - 2\mu^2 u_i \ (i = 1, \ \ldots, l), \ \ f^j = u_1^2 \varphi_j \ \ (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає даному операторові X_2, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_i = \mu \cos(\mu x + k_1) \exp(-3\mu^2 t) \omega_i(z), \ \ i = 1, \ldots, l, \\ &u_j = \omega_j(z), \ \ j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.100}$$

де $z = \sin(\mu x + k_1) \exp(-3\mu^2 t)$. Анзац (4.100) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_i'' + \varphi_i \omega_i^3 = 0, \ \ i = 1, \ldots, l, \\ &3\omega_j'' + \varphi_j \omega_1^2 = 0, \ \ j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.101}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_l}{\omega_1}, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n$.

2) Випадок $l = n$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_2, характеризується матрицею $A = I_n$ і системою функцій

$$f^i = u_i^3\varphi_i - 2\mu^2 u_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$. Анзац, який відповідає даному операторові X_2, має вигляд

$$u_i = \mu\cos(\mu x + k_1)\exp(-3\mu^2 t)\omega_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.102}$$

де $z = \sin(\mu x + k_1)\exp(-3\mu^2 t)$. Анзац (4.102) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_i'' + \varphi_i\omega_i^3 = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.103}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{\omega_1}$.

3) Випадок $l = 1$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_2, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3I_{n-1} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^1 = u_1^3\varphi_1 - 2\mu^2 u_1, \quad f^j = u_1^2\varphi_j \quad (j = 2, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає даному операторові X_2, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_1 = \mu\cos(\mu x + k_1)\exp(-3\mu^2 t)\omega_1(z), \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.104}$$

де $z = \sin(\mu x + k_1)\exp(-3\mu^2 t)$. Анзац (4.104) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_1'' + \varphi_1\omega_1^3 = 0, \\ &3\omega_j'' + \varphi_j\omega_1^2 = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.105}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\omega_2, \ldots, \omega_n$.

Використовуючи результати підрозділу 3.2, можна побудувати точні розв'язки систем (4.101), (4.103), (4.105).

Теорема 4.12. *Оператор*

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} - 3\mu \coth(\mu x + k_1)\frac{\partial}{\partial x} -$$
$$-3\mu^2 \mathrm{cosech}^2(\mu x + k_1)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right), \;\; 1 \le l \le n,$$

є оператором умовної симетрії рівняння (4.1) тоді і тільки тоді, коли

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix},$$

$$f^i = u_i^3\varphi_i + 2\mu^2 u_i \; (i = 1, \ldots, l), \;\; f^j = u_1^2\varphi_j \;\; (j = l+1, \ldots, n),$$

причому

a) якщо $l = 1$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots, u_n$;

b) якщо $l = n$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$;

c) якщо $1 < l < n$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$.

Доведення теореми 4.12 проводиться аналогічно до доведення теореми 4.11.

Проведемо редукцію рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи оператор умовної симетрії X_3. Розглянемо три випадки.

1) Випадок $1 < l < n$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_3, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 3I_{n-l} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^i = u_i^3\varphi_i + 2\mu^2 u_i \; (i = 1, \ldots, l), \;\; f^j = u_1^2\varphi_j \;\; (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає даному операторові X_3, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_i = \mu \sinh(\mu x + k_1) \exp(3\mu^2 t) \omega_i(z), \quad i = 1, \ldots, l, \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.106}$$

де $z = \cosh(\mu x + k_1) \exp(3\mu^2 t)$. Анзац (4.106) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_i'' + \varphi_i \omega_i^3 = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \\ &3\omega_j'' + \varphi_j \omega_1^2 = 0, \quad j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.107}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_l}{\omega_1}, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n$.

2) Випадок $l = n$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_3, визначається матрицею $A = I_n$ і системою функцій

$$f^i = u_i^3 \varphi_i + 2\mu^2 u_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$. Анзац, який відповідає даному операторові X_3, має вигляд

$$u_i = \mu \sinh(\mu x + k_1) \exp(3\mu^2 t) \omega_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.108}$$

де $z = \cosh(\mu x + k_1) \exp(3\mu^2 t)$. Анзац (4.108) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_i'' + \varphi_i \omega_i^3 = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{\omega_1}$.

3) Випадок $l = 1$. У цьому випадку рівняння (4.1), яке допускає оператор умовної симетрії X_3, характеризується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3I_{n-1} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^1 = u_1^3\varphi_1 + 2\mu^2 u_1, \quad f^j = u_1^2\varphi_j \quad (j = 2, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає операторові X_3, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_1 = \mu \sinh(\mu x + k_1)\exp(3\mu^2 t)\omega_1(z), \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.109}$$

де $z = \cosh(\mu x + k_1)\exp(3\mu^2 t)$. Анзац (4.109) редукує рівняння (4.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_1'' + \varphi_1\omega_1^3 = 0, \\ &3\omega_j'' + \varphi_j\omega_1^2 = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.110}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\omega_2, \ldots, \omega_n$.

4.5. Умовна симетрія багатовимірного векторного рівняння дифузії

У даному підрозділі результати підрозділу 3.5 узагальнюються на багатовимірне векторне рівняння дифузії

$$u_t - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u). \tag{4.111}$$

Анзац

$$u = u(t, x), \quad x = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.112}$$

редукує рівняння (4.111) до рівняння

$$u_t - Au_{xx} - A\frac{m-1}{x}u_x = f(u). \tag{4.113}$$

Дослідимо умовну симетрію рівняння (4.113). Оператор симетрії (умовної) рівняння (4.113) будемо шукати у вигляді

$$X = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} - \pi^a\frac{\partial}{\partial u_a},$$

де $\pi^a = \pi^{ab}u_b - \omega^a$ і функції π^{ab}, ω^a залежать тільки від t і x, $\eta = \eta(t,x)$, $\xi = \xi(t,x)$. Розглянемо оператори

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A\frac{n-1}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad Q = \eta\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \pi,$$

де $\pi = (\pi^{ab})$ — квадратна матриця порядку n. Оператор Q визначимо з умови, що

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \tag{4.114}$$

де Λ, φ, θ — квадратні матриці порядку n, елементи яких є функціями від (t, x).

Коефіцієнт при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ по лівій стороні рівності (4.114) дорівнює

$$A\frac{\partial \eta}{\partial x} - A\frac{m-1}{x} + A\frac{m-1}{x}\eta,$$

а по правій стороні рівності (4.114) — 0.Тому

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{m-1}{x} + \frac{m-1}{x}\eta = 0.$$

Коефіцієнт при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ по лівій стороні рівності (4.114) дорівнює

$$2A\frac{\partial \xi}{\partial x} + [A, \pi],$$

а по правій стороні рівності (4.114) дорівнює $-\Lambda A$. Тому

$$2A\frac{\partial \xi}{\partial x} = -(\Lambda A + [A, \pi]).$$

Коефіцієнт при $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ по лівій стороні рівності (4.114) дорівнює

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + 2A\frac{\partial \pi}{\partial x} + \xi A\frac{m-1}{x^2} + A\frac{m-1}{x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

а по правій стороні рівності (4.114) дорівнює

$$\theta\xi - \frac{m-1}{x}\Lambda A.$$

Отже,

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t}+2A\frac{\partial\pi}{\partial x}+\xi A\frac{m-1}{x^2}+A\frac{m-1}{x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\theta\xi-\Lambda A\frac{m-1}{x}.$$

Коефіцієнт при u по лівій стороні рівності (4.114) дорівнює

$$-\frac{\partial\pi}{\partial t}+A\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}+\frac{m-1}{x}A\frac{\partial\pi}{\partial x},$$

а по правій стороні рівності (4.114) дорівнює $\varphi+\theta\pi$. Звідси

$$\varphi+\theta\pi=A\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}+\frac{m-1}{x}A\frac{\partial\pi}{\partial x}-\frac{\partial\pi}{\partial t}.$$

Прирівнюючи далі коефіцієнти при $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ по лівій і правій частині рівності (4.114), отримуємо рівняння

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{m-1}{x}\frac{\partial\eta}{\partial x}A=\Lambda+\theta\eta.$$

Будемо вважати, що $\eta=1$. Тоді для визначення ξ, π отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&2A\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\Lambda A-[A,\pi],\\
&-\frac{\partial\xi}{\partial t}+2A\frac{\partial\pi}{\partial x}+\xi\frac{m-1}{x^2}A+\frac{m-1}{x}\frac{\partial\xi}{\partial x}A+A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\theta\xi-\frac{m-1}{x}\Lambda A,\\
&\varphi+\theta\pi=A\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}+\frac{m-1}{x}A\frac{\partial\pi}{\partial x}-\frac{\partial\pi}{\partial t},\\
&\Lambda+\theta=0.
\end{aligned}\tag{4.115}$$

Теорема 4.13. *Оператор*

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots+u_l\frac{\partial}{\partial u_l}\right),\quad 1\le l\le n,$$

є оператором умовної симетрії рівняння (4.113), де $m=5$,

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\tag{4.116}$$

тоді і тільки тоді, коли $A_1 = I_l,\ A_2 = -\frac{1}{5}I_{n-l}$,

$$f^i = u_i^{\frac{1}{3}}\varphi_i(i = 1,\ \ldots, l),\quad f^j = u_1^{-\frac{2}{3}}\varphi_j\ \ (j = l+1, \ldots, n),$$

причому

a) якщо $l = 1$, *то* $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $u_2, \ldots,\ u_n$;

b) якщо $l = n$, *то* $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\frac{u_2}{u_1}, \ldots,\ \frac{u_n}{u_1}$;

c) якщо $1 < l < n$, *то* $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ *— довільні функції від змінних* $\frac{u_2}{u_1}, \ldots,\ \frac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots,\ u_n$.

Доведення. Необхідність. У даному випадку

$$\xi = \frac{1}{x},\ \ \pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{x^2}I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Lambda = \frac{2}{x^2}I.$$

Підставивши в друге рівняння системи (4.115), отримаємо

$$2A\begin{pmatrix} -\frac{6}{x^3}I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{x^3}A = -\frac{2}{x^3}I - \frac{8}{x^3}A.$$

Враховуючи, що матриця A має вигляд (4.116), знаходимо звідси, що $A_1 = I_l,\ A_2 = -\frac{1}{5}I_{n-l}$. З третього рівняння системи (4.115) випливає, що $\varphi = 0$. Тому система для визначення функцій $f^1, \ldots, f^n$ має вигляд

$$\begin{aligned} &-f^i + 3u_1\frac{\partial f^i}{\partial u_1} + \ldots + 3u_l\frac{\partial f^i}{\partial u_l} = 0, \\ &2f^j + 3u_1\frac{\partial f^j}{\partial u_1} + \ldots + 3u_l\frac{\partial f^j}{\partial u_l} = 0, \end{aligned} \tag{4.117}$$

$i = 1, \ldots, l;\ \ j = l+1, \ldots, n$. Розв'язавши систему (4.117), знаходимо

$$f^i = u_i^{\frac{1}{3}}\varphi_i\ (i = 1,\ \ldots, l),\quad f^j = u_1^{-\frac{2}{3}}\varphi_j\ \ (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\frac{u_2}{u_1}, \ldots,\ \frac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots,\ u_n$. Необхідність доведена. Достатність теореми очевидна.

Використавши оператор умовної симетрії Y_1, проведемо редукцію рівняння (4.113) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо три випадки.

1) Випадок $1 < l < n.$ У цьому випадку рівняння (4.113), яке допускає оператор умовної симетрії Y_1, визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5}I_{n-l} \end{pmatrix}$$

і системою функцій

$$f^i = u_i^{\frac{1}{3}}\varphi_i \ (i = 1, \ldots, l), \quad f^j = u_1^{-\frac{2}{3}}\varphi_j \quad (j = l+1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_l}{u_1}, u_{l+1}, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає операторові Y_1, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_i = \frac{1}{x^3}\omega_i(z), \quad i = 1, \ldots, l, \\ &u_j = \omega_j(z), \quad j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.118}$$

де $z = \dfrac{x^2}{2} - t.$

Анзац (4.118) редукує рівняння (4.113) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_i'' + \varphi_i\omega_i^{\frac{1}{3}} = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \\ &\omega_j'' - 5\varphi_j\omega_1^{-\frac{2}{3}} = 0, \quad j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.119}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_l}{\omega_1}, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n.$

2) Випадок $l = n.$ У цьому випадку рівняння (4.113), яке допускає оператор умовної симетрії Y_1, визначається матрицею $A = I_n$ і системою функцій

$$f^i = u_i^{\frac{1}{3}}\varphi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}.$ Анзац, який відповідає операторові Y_1, має вигляд

$$u_i = \frac{1}{x^3}\omega_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.120}$$

де $z = \dfrac{x^2}{2} - t$.

Анзац (4.120) редукує рівняння (4.113) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_i'' + \varphi_i \omega_i^{\frac{1}{3}} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.121}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \dfrac{\omega_n}{\omega_1}$.

3) Випадок $l = 1$. У цьому випадку рівняння (4.113), яке допускає оператор умовної симетрії Y_1, визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} I_{n-1} \end{pmatrix},$$

і системою функцій

$$f^1 = u_1^{\frac{1}{3}} \varphi_1, \quad f^j = u_1^{-\frac{2}{3}} \varphi_j \quad (j = 2, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $u_2, \ldots, u_n$. Анзац, який відповідає операторові Y_1, має вигляд

$$u_1 = \frac{1}{x^3} \omega_1(z), u_j = \omega_j(z), \quad j = 2, \ldots, n, \tag{4.122}$$

де $z = \dfrac{x^2}{2} - t$. Анзац (4.122) редукує рівняння (4.113) до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_1'' + \varphi_1 \omega_1^{\frac{1}{3}} = 0, \\ &\omega_j'' - 5\varphi_j \omega_1^{-\frac{2}{3}} = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.123}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\omega_2, \ldots, \omega_n$.

Розглянемо оператор умовної симетрії

$$\frac{\partial}{\partial t} + \left(k - \frac{1}{x}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} u \frac{\partial}{\partial u}$$

для скалярного рівняння (3.108), де $n = 3$, $f(u) = \pm u^{-1}$. Цей оператор допускає таке узагальнення на випадок векторного рівняння (4.113).

Теорема 4.14. *Оператор*

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(k - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_n\frac{\partial}{\partial u_n}\right),$$

є оператором умовної симетрії рівняння (4.113), де $m = 3$, $A = I_n$ — квадратна матриця порядку n тоді і тільки тоді, коли

$$f^i = u_i^{-1}\varphi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — довільні функції від змінних $\dfrac{u_2}{u_1}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_1}$.

4.6. Солітоноподібні розв'язки системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії

У підрозділі 4.3 і доповненні наведено редукцію і точні розв'язки системи двох рівнянь теплопровідності, які можна отримати з використанням класичного підходу Лі. У цьому підрозділі шукаються розв'язки, що відповідають умовним симетріям цієї системи. Ми побачимо, що серед цих розв'язків існують досить цікаві з фізичної точки зору розв'язки типу одинокої хвилі.

Повернемось до системи рівнянь, що розглядалася у підрозділі 4.3, яка для зручності наведена нижче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= f_1(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= f_2(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4.124}$$

де $f_1(u_1, u_2)$ і $f_2(u_1, u_2)$ — функції залежних змінних u_1, u_2. В залежності від виду функцій f_1 і f_2 виділимо п'ять випадків.

I. Нехай

$$f_1(u_1, u_2) = u_1^3\varphi_1, \quad f_2(u_1, u_2) = u_2^3\varphi_2, \tag{4.125}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1}$. Окрім класичних лієвських симетрій ця система умовно інваріантна відносно оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Анзац, який відповідає операторові X_1, має вигляд

$$u_1 = 2x\omega_1(z), \quad u_2 = 2x\omega_2(z), \tag{4.126}$$

де

$$z = 6t + x^2$$

і редукує (4.124), (4.125) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\omega_1'' + \omega_1^3\varphi_1 = 0, \quad \omega_2'' + \omega_2^3\varphi_2 = 0, \tag{4.127}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. Отже, для знаходження розв'язків системи (4.124), (4.125) достатньо розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь (4.127). Для деяких функцій φ_1 і φ_2 ця система може бути проінтегрована в квадратурах. Тут ми розглянемо два випадки.

а) Нехай

$$\varphi_1 = 2\left(1 - 3\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\right),\ \varphi_2 = 0. \tag{4.128}$$

Система (4.127) має частинний розв'язок

$$\omega_1 = 1 - \tanh(z),\ \ \omega_2 = 1. \tag{4.129}$$

Підставивши (4.129) в (4.126), отримуємо такий розв'язок системи (4.124), (4.125) та (4.128)

$$u_1 = 2x(1 - \tanh(x^2 + 6t)),\ \ u_2 = 2x. \tag{4.130}$$

Для будь-якого скінченного інтервалу $x_0 < x < x_1$ розв'язок (4.130) обмежений і має вигляд одинокої хвилі, амплітуда цієї хвилі зменшується із зростанням часу. Графік функції u_1 (4.130) зображено на рис. 4.1.

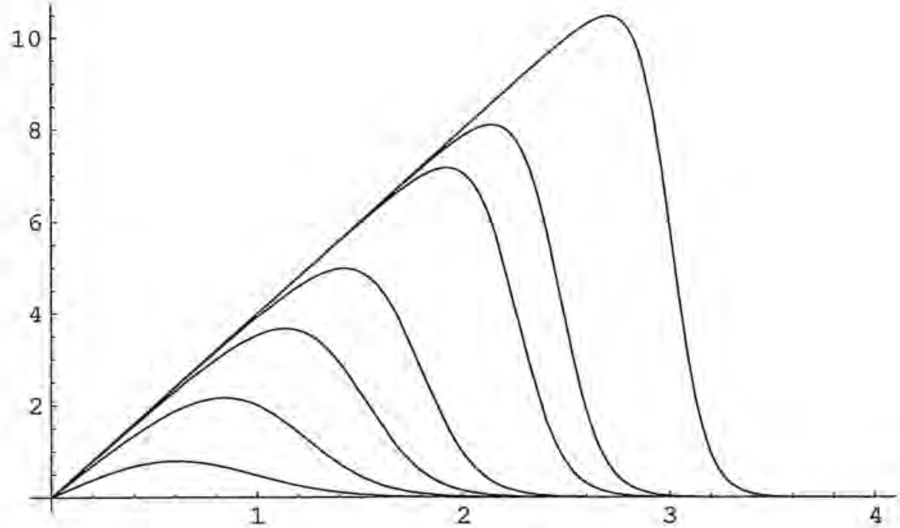


Рис. 4.1 Розв'язок u_1 (4.130) при $t = 0,\ -1/6,\ -1/3,\ -1/2,\ -3/2,$ $-\,5/6,\ -1.$

b) Розглянемо тепер систему (4.127) з нелінійностями такого загального вигляду:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varepsilon(n^2\omega_1^n\omega_2^{-n} - n(2n+m)\omega_2^m\omega_1^{-m}),\\ \varphi_2 &= \varepsilon((n+2)^2\omega_1^{n+2}\omega_2^{-n-2} - (n+2)(2n+m+2)\omega_2^{m-2}\omega_1^{2-m}),\end{aligned} \tag{4.131}$$

де $\varepsilon = \pm 1$, m і n — довільні параметри, що задовольняють умови $m + n \neq 0,\ n \neq 0,\ -2.$ У випадку $\varepsilon = 1$ система (4.127), (4.131) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{\mu}{n+m}[\cos(\mu z)]^{-\frac{n}{n+m}},\ \ \omega_2 = \frac{\mu}{n+m}[\cos(\mu z)]^{-\frac{2+n}{n+m}}, \tag{4.132}$$

μ — довільна стала, а тому відповідний розв'язок системи (4.124), (4.125), (4.131) має вигляд

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{2\mu x}{n+m}[\cos(\mu(6t+x^2))]^{-\frac{n}{n+m}},\\ u_2 &= \frac{2\mu x}{n+m}[\cos(\mu(6t+x^2))]^{-\frac{2+n}{n+m}}.\end{aligned} \tag{4.133}$$

Якщо $\frac{n}{n+m} < 0$ і $\frac{2+n}{n+m} < 0$, то розв'язок (4.133) обмежений на будь-якому скінченному інтервалі $x_0 < x < x_1$. Графіки цих розв'язків для $n = 1$, $m = -2$, $\mu = -1$ зображені на рис. 4.2 і 4.3.

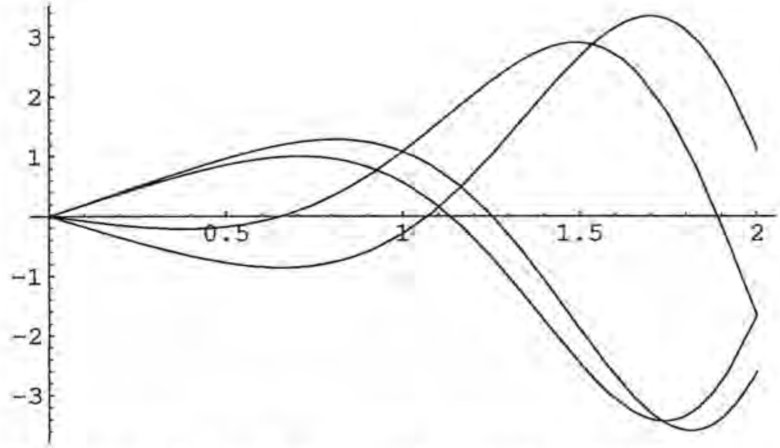


Рис. 4.2 Розв'язок u_1 (4.133) при $t = 0, -1/3, -3/2, -1$.

У випадку $\varepsilon = -1$ система (4.127), (4.131) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{\mu}{n+m}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\mu z)}\right]^{\frac{n}{n+m}}, \quad \omega_2 = \frac{\mu}{n+m}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\mu z)}\right]^{\frac{n+2}{n+m}}, \tag{4.134}$$

а тому відповідний розв'язок системи (4.124), (4.125), (4.131) має вигляд:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2\mu x}{n+m}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\mu(6t+x^2))}\right]^{\frac{n}{n+m}}, \\ u_2 &= \frac{2\mu x}{n+m}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\mu(6t+x^2))}\right]^{\frac{n+2}{n+m}}. \end{aligned} \tag{4.135}$$

У випадку $\frac{n}{n+m} > 0$ і $\frac{n+2}{n+m} > 0$ формули (4.135) визначають одинокі хвилі. Зауважимо, що розв'язки (4.135) не є плоскими хвилями і їх амплітуди зменшуються, якщо t зростає від $-t_0$ до 0 ($t_0 > 0$). Графіки цих розв'язків для $n = 1,\ m = 0,\ \mu = 1$ зображені на рис. 4.4 і 4.5.

Коли t зростає від $t = -1$ до $t = 0$, наші одинокі хвилі рухаються від точки $x = 2,3$ до $x \approx 0,7$ і їх амплітуди зменшуються. Коли змінна t стає додатною і зростає, амплітуди прямують до нуля.

II. Нехай

$$f_1(u_1, u_2) = u_1^3\varphi_1 - 2\lambda^2 u_1, \quad f_2(u_1, u_2) = u_2^3\varphi_2 - 2\lambda^2 u_2, \tag{4.136}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1}$. Лієвська симетрія відповідних рівнянь вичерпується зсувами по незалежних змінних, але це рівняння

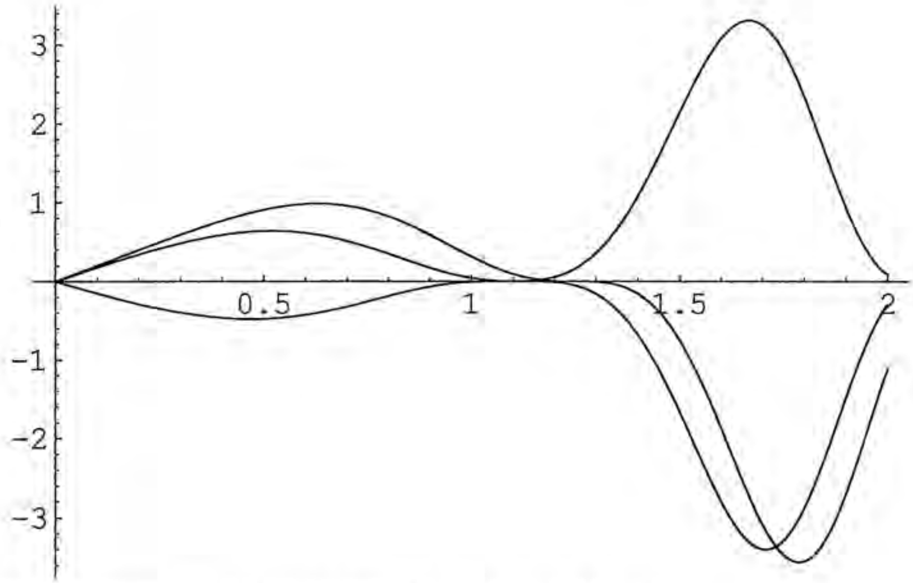


Рис. 4.3 Розв'язок u_2 (4.133) при $t = 0, -3/2, -1$.

володіє умовною симетрією, генератор якої має вигляд

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\lambda \tan(\lambda x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\lambda^2 \sec^2(\lambda x)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Анзац, який відповідає операторові X_2, має вигляд

$$\begin{aligned} &u_1 = \lambda\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)\omega_1(z), \ u_2 = \lambda\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)\omega_2(z), \\ &z = \sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t), \end{aligned} \tag{4.137}$$

і редукує (4.124), (4.136) до системи звичайних диференціальних рівнянь (4.127). Використовуючи розв'язки цієї системи (4.129), (4.132), (4.134), отримуємо наступні точні розв'язки для рівняння (4.124) з нелінійностями (4.136):

$$\begin{aligned} &u_1 = \lambda\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)[1 - \tanh[\sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)]], \\ &u_2 = \lambda\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t). \end{aligned} \tag{4.138}$$

b) Функції φ_1 і φ_2 визначені формулами (4.131). На підставі (4.131), (4.136) знаходимо, що у випадку $\varepsilon = 1$ система (4.124), (4.136) має розв'язок

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)[\cos[\mu\sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)]]^{-\frac{n}{n+m}}, \\ &u_2 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)[\cos[\mu\sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)]]^{-\frac{2+n}{n+m}}. \end{aligned} \tag{4.139}$$

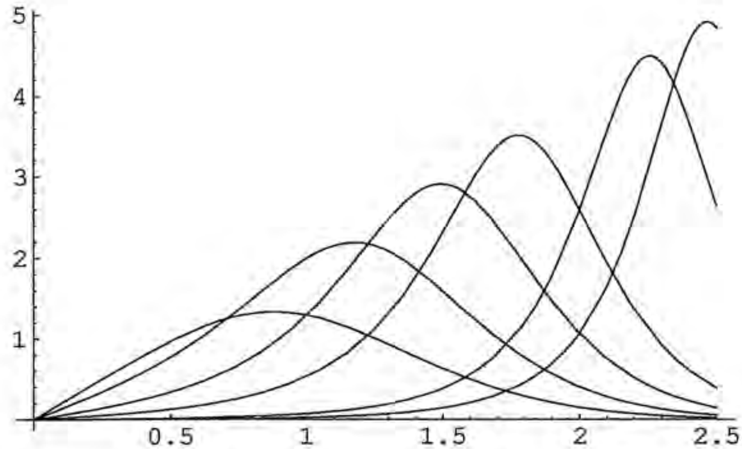


Рис. 4.4 Розв'язок u_1 (4.135) при $t = 0, -1/6, -1/3, -1/2, -5/6, -1$.

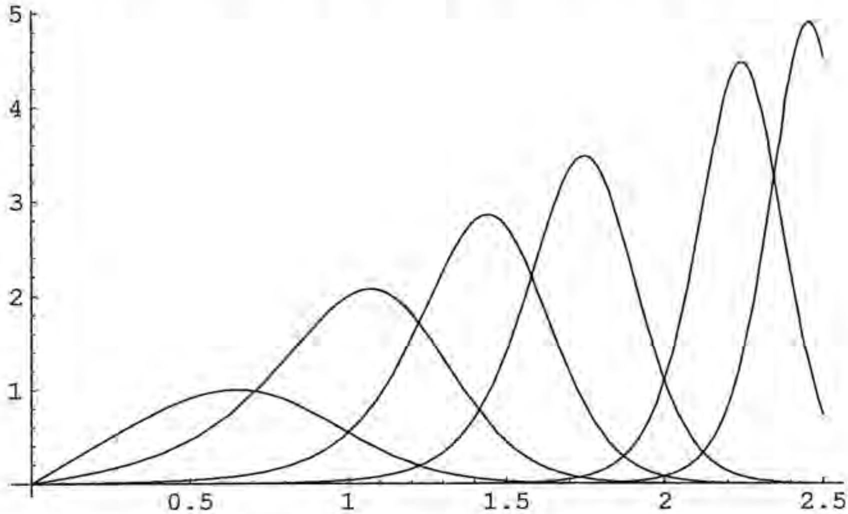


Рис. 4.5 Розв'язок u_2 (4.135) при $t = 0, -1/6, -1/3, -1/2, -5/6, -1$.

Якщо у формулах (4.131) $\varepsilon = -1$, то відповідний розв'язок системи (4.124), (4.136) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda\mu}{n+m}\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)\left[\frac{1}{\operatorname{ch}[\mu\sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)]}\right]^{\frac{n}{n+m}}, \\ u_2 &= \frac{\lambda\mu}{n+m}\cos(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)\left[\frac{1}{\operatorname{ch}[\mu\sin(\lambda x)\exp(-3\lambda^2 t)]}\right]^{\frac{n+2}{n+m}}. \end{aligned} \tag{4.140}$$

III. Нехай

$$f_1(u_1, u_2) = u_1^3\varphi_1 + 2\lambda^2 u_1, \quad f_2(u_1, u_2) = u_2^3\varphi_2 + 2\lambda^2 u_2, \tag{4.141}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1}$. У цьому випадку система (4.124), (4.141) умовно інваріантна відносно оператора

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} - 3\lambda\coth(\lambda x)\frac{\partial}{\partial x} - 3\lambda^2 \mathrm{cosech}^2(\lambda x)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Анзац, який відповідає операторові X_3, має вигляд

$$\begin{aligned}&u_1 = \lambda\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)\omega_1(z),\ u_2 = \lambda\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)\omega_2(z),\\ &z = \cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t),\end{aligned} \tag{4.142}$$

і редукує (4.124), (4.141) до системи звичайних диференціальних рівнянь (4.127). Знову розглянемо випадки (4.128), (4.131). Якщо φ_1 і φ_2 визначені формулами (4.128), тоді на підставі (4.129), (4.142) отримуємо такий розв'язок системи (4.124), (4.141):

$$\begin{aligned}&u_1 = \lambda\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)[1 - \tanh[\cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)]],\\ &u_2 = \lambda\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t).\end{aligned} \tag{4.143}$$

Якщо функції φ_1 і φ_2 визначені формулами (4.131), то використовуючи (4.132), (4.142) знаходимо, що у випадку $\varepsilon = 1$ система (4.124), (4.141) має розв'язок

$$\begin{aligned}&u_1 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)[\cos[\mu(\cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t))]]^{-\frac{n}{n+m}},\\ &u_2 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)[\cos[\mu(\cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t))]]^{-\frac{2+n}{n+m}}.\end{aligned} \tag{4.144}$$

Якщо у формулах (4.131) $\varepsilon = -1$, то відповідний розв'язок системи (4.124), (4.141) має вигляд

$$\begin{aligned}&u_1 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)\left[\frac{1}{\mathrm{ch}[\mu(\cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t))]}\right]^{\frac{n}{n+m}},\\ &u_2 = \frac{\lambda\mu}{n+m}\sinh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t)\left[\frac{1}{\mathrm{ch}[\mu(\cosh(\lambda x)\exp(3\lambda^2 t))]}\right]^{\frac{n+2}{n+m}}.\end{aligned} \tag{4.145}$$

IV. Розглянемо систему (4.124) для випадку, коли

$$f_1(u_1, u_2) = u_1^2\varphi_1 + 6\lambda^2 u_1, \quad f_2(u_1, u_2) = u_2^2\varphi_2 + 6\lambda^2 u_2, \tag{4.146}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1}$. Лієвські симетрії цієї системи також зводяться до зсувів по незалежним змінним, але для неї існує оператор умовної симетрії, якому відповідає анзац

$$u_1 = z_x^2\omega_1(z),\ \ u_2 = z_x^2\omega_2(z). \tag{4.147}$$

Підставивши (4.147) у (4.124), (4.146), приходимо до редукованої системи рівнянь

$$\omega_1'' + \omega_1^2\varphi_1 = 0,\ \ \omega_2'' + \omega_2^2\varphi_2 = 0, \tag{4.148}$$

$$2z_x z_{xt} - 2z_{xx}^2 - 2z_x z_{xxx} - 3\lambda^2 z_x^2 = 0, \tag{4.149}$$

$$z_t = 5z_{xx}. \tag{4.150}$$

Система (4.149), (4.150) повністю інтегровна і була предметом дослідження в підрозділі 3.6. Її розв'язком є функція

$$z = k_1 \exp(\lambda x + 5\lambda^2 t) + k_2, \tag{4.151}$$

де $k_1,\ k_2$ — довільні сталі, $k_1 \neq 0$. Отже, для знаходження розв'язків системи (4.124), (4.146) достатньо розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь (4.148). Для деяких функцій φ_1 і φ_2 ця система може бути проінтегрована.

Нехай

$$\begin{aligned}&\varphi_1 = \varepsilon(4n^2\omega_1^n\omega_2^{-n} - 2n(3n+m)\omega_1^{-m}\omega_2^m),\\ &\varphi_2 = \varepsilon((2+2n)^2\omega_1^{1+n}\omega_2^{-n-1} - (2+2n)(2+3n+m)\omega_1^{-m+1}\omega_2^{m-1}),\end{aligned} \tag{4.152}$$

де $\varepsilon = \pm 1$, m і n — довільні параметри, що задовольняють умови $m + n \neq 0,\ n \neq 0;\ -1$. Якщо $\varepsilon = 1$, то система (4.148), (4.152) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{1}{(n+m)^2}[\cos(z)]^{-\frac{2n}{n+m}},\ \ \omega_2 = \frac{1}{(n+m)^2}[\cos(z)]^{-\frac{2+2n}{n+m}}. \tag{4.153}$$

Підставивши (4.151), (4.153) в (4.147), отримуємо розв'язок системи (4.124), (4.146)

$$u_1 = \frac{k_1^2\lambda^2}{(n+m)^2}e^{2(\lambda x + 5\lambda^2 t)}[\cos(k_1 e^{\lambda x + 5\lambda^2 t} + k_2)]^{-\frac{2n}{n+m}},$$

$$u_2 = \frac{k_1^2\lambda^2}{(n+m)^2} e^{2(\lambda x + 5\lambda^2 t)} [\cos(k_1 e^{\lambda x + 5\lambda^2 t} + k_2)]^{-\frac{2+2n}{n+m}}.$$

У випадку $\varepsilon = -1$ система (4.148), (4.152) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{1}{(n+m)^2} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{\frac{2n}{n+m}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{(n+m)^2} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{-\frac{2+2n}{n+m}}.$$

Відповідний розв'язок системи (4.124), (4.146) має вигляд

$$u_1 = \frac{k_1^2\lambda^2}{(n+m)^2} e^{2(\lambda x + 5\lambda^2 t)} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(k_1 e^{\lambda x + 5\lambda^2 t} + k_2)}\right]^{\frac{2n}{n+m}},$$

$$u_2 = \frac{k_1^2\lambda^2}{(n+m)^2} e^{2(\lambda x + 5\lambda^2 t)} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(k_1 e^{\lambda x + 5\lambda^2 t} + k_2)}\right]^{\frac{2+2n}{n+m}}.$$

V. Нехай

$$f_1(u_1, u_2) = u_1^s \varphi_1 + \lambda_1 u_1, \quad f_2(u_1, u_2) = u_2^s \varphi_2 + \lambda_1 u_2, \tag{4.154}$$

де $s \neq -1, 1, -3, 3$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1}$. Анзац

$$u_1 = z_x^{\frac{2}{s-1}} \omega_1(z), \quad u_2 = z_x^{\frac{2}{s-1}} \omega_2(z) \tag{4.155}$$

редукує (4.124), (4.154) до системи диференціальних рівнянь

$$\omega_1'' + \omega_1^s \varphi_1 = 0, \quad \omega_2'' + \omega_2^s \varphi_2 = 0, \tag{4.156}$$

$$2(s-1) z_x z_{xt} + 2(s-3) z_{xx}^2 - 2(s-1) z_x z_{xxx} - (s-1)^2 \lambda_1 z_x^2 = 0, \tag{4.157}$$

$$z_t = \frac{s+3}{s-1} z_{xx}. \tag{4.158}$$

Система (4.157), (4.158) вже зустрічалася в підрозділі 3.3. Її розв'язком у випадку $s \neq 3$ є функція

$$z = k_1 e^{C_1 x + \frac{s+3}{s-1} C_1^2 t} + k_2, \tag{4.159}$$

де стала C_1 задовольняє співвідношення $2(s+1)C_1^2 = \lambda_1 (s-1)^2$, k_1, k_2 — довільні сталі, $k_1 \neq 0$. Отже, для знаходження розв'язків системи (4.124), (4.154) достатньо розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь (4.156). Знайдемо розв'язки системи (4.156) у випадку, коли

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon}{(s-1)^2}[4n^2\omega_1^n\omega_2^{-n} + 2n(-n-ns-ms+m)\omega_1^{-m}\omega_2^m],$$
$$\varphi_2 = \frac{\varepsilon}{(s-1)^2}[(2-2s-2n)^2\omega_1^{-1+s+n}\omega_2^{1-s-n}+ \tag{4.160}$$
$$+(-2+2s+2n)(2-2s-n-ns-ms+m)\omega_1^{-1-m+s}\omega_2^{1+m-s}],$$

де $\varepsilon = \pm 1$, n і m — довільні параметри, що задовольняють умови $m+n \neq 0$, $n \neq 0$, $2-2s-2n \neq 0$, $s \neq 1$. У випадку $\varepsilon = 1$ система (4.156), (4.160) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{1}{(n+m)^{\frac{2}{s-1}}}[\cos(z)]^{-\frac{2n}{(n+m)(s-1)}},$$
$$\omega_2 = \frac{1}{(n+m)^{\frac{2}{s-1}}}[\cos(z)]^{\frac{2-2s-2n}{(n+m)(s-1)}}. \tag{4.161}$$

Якщо $\varepsilon = -1$, то система (4.156), (4.160) має розв'язок

$$\omega_1 = \frac{1}{(n+m)^{\frac{2}{s-1}}}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{\frac{2n}{(n+m)(s-1)}},$$
$$\omega_2 = \frac{1}{(n+m)^{\frac{2}{s-1}}}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{\frac{-2+2s+2n}{(n+m)(s-1)}}. \tag{4.162}$$

Підставивши (4.159), (4.161) і (4.159), (4.162) в (4.155), отримуємо наступні розв'язки системи (4.124), (4.154):

$$u_1 = \left[\frac{k_1C_1}{n+m}e^{C_1x+\frac{s+3}{s-1}C_1^2t}\right]^{\frac{2}{s-1}}[\cos(z)]^{-\frac{2n}{(n+m)(s-1)}},$$
$$u_2 = \left[\frac{k_1C_1}{n+m}e^{C_1x+\frac{s+3}{s-1}C_1^2t}\right]^{\frac{2}{s-1}}[\cos(z)]^{\frac{2-2s-2n}{(n+m)(s-1)}}.$$

$$u_1 = \left[\frac{k_1C_1}{n+m}e^{C_1x+\frac{s+3}{s-1}C_1^2t}\right]^{\frac{2}{s-1}}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{\frac{2n}{(n+m)(s-1)}},$$
$$u_2 = \left[\frac{k_1C_1}{n+m}e^{C_1x+\frac{s+3}{s-1}C_1^2t}\right]^{\frac{2}{s-1}}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right]^{\frac{-2+2s+2n}{(n+m)(s-1)}}.$$

Таким чином, використовуючи умовні симетрії рівняння (4.124), ми знайшли серію його точних розв'язків, серед яких є розв'язки солітонного типу. Слід підкреслити, що ці розв'язки не належать до типу плоских хвиль, оскільки залежать від $x^2 + 6t$.

4.7. Висновки до розділу 4

У даному розділі визначено умови, при яких система нелінійних рівнянь реакції-дифузії інваріантна відносно перетворень Галілея, та проведено класифікацію таких систем. Досліджено умовну симетрію та побудовано деякі класи умовно-інваріантних розв'язків галілеїво- інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії. Також у даному розділі наведено деякі результати симетрійної редукції системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, проведеної за одновимірними підалгебрами алгебри інваріантності цієї системи. Знайдено анзаци, які редукують досліджувану систему до звичайних диференціальних рівнянь, і наведено випадки, коли редуковану систему вдається проінтегрувати.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Запропоновано спеціальні анзаци для проведення редукції і ефективного пошуку точних розв'язків нелінійних рівнянь реакції-дифузії, які є узагальненнями симетрійних і умовно-симетрійних анзаців.

2. З використанням еліптичних функцій Якобі побудовано нескінченні серії точних розв'язків одновимірного рівняння реакції-дифузії з кубічною поліноміальною нелінійністю.

3. Знайдено частинні розв'язки рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова, які належать до солітонного типу, а тому мають хороші перспективи для різноманітних застосувань. Побудовано нові точні розв'язки рівняння Фішера.

4. Досліджено умовну симетрію багатовимірного нелінійного рівняння реакції-дифузії шляхом редукції його до радіального рівняння. Встановлено, що для нелінійного рівняння реакції-дифузії з довільною кількістю незалежних змінних існують оператори умовної симетрії, причому ці оператори знайдені у явному вигляді.

5. З використанням спеціального анзацу побудовано нові точні розв'язки нелінійного рівняння реакції- дифузії з експоненціальною нелінійністю.

6. Проведено класифікацію галілеїво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії, досліджено умовну симетрію та побудовано деякі класи умовно-інваріантних розв'язків таких систем.

7. Для всіх класів систем двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії, що визначені з точністю до довільних функцій від залежних змінних і

володіють нетривіальною симетрією, з використанням одновимірних підалгебр проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі інваріантні розв'язки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и методы обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

[2] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначёв В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск: Наука, 1994.

[3] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.

[4] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.

[5] Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. — Новосибирск: Наука, 1982. — 142 с.

[6] Баранник Т.А. Галілеєво-інваріантні системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії // Вісник Київського університету. Математика, механіка. — 2004. — Вип. 11–12. — С. 27–29.

[7] Баранник Т.А. Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 10. — С. 1416–1420.

[8] Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Из–во иностр. лит., 1963. — 400 с.

[9] Богуш А.А., Мороз Л.Г. Введение в теорию классических полей. — Минск: Наука и техника, 1968. — 385 с.

[10] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987.

[11] Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. — Київ: Вища школа, 1941. — 416 с.

[12] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.

[13] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трёхмерном случаях // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 7. — С. 1215–1224.

[14] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[15] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

[16] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Секц. А.1 — 1937. — №6. — С. 1–26.

[17] Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллуш М. Точные решения уравнений Эйнштейна. — М.: Энергоиздат, 1982. – 416с.

[18] Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985. — 280 с.

[19] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990.

[20] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970. — С. 171–178.

[21] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

[22] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981. — 342 с.

[23] Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. мл., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. — Киев: Наук. думка, 1987. — 296 с.

[24] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. — Новосибирск, 1966. – 131с.

[25] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[26] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[27] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. — 368 с.

[28] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режим с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

[29] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение к газовой динамике. — Новосибирск: Наука. — 1994.

[30] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ. — 1958.

[31] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука. — 1972. — 736 с.

[32] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 116–123.

[33] Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470 .

[34] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[35] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — №7. — С. 24–28.

[36] Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, №9. — С. 17–20.

[37] Фущич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1102–1104.

[38] Фущич В.І., Черніга Р.М. Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона-Якобі та реакції-дифузії // Доповіді НАН України. — 1994. — №3. — С. 31–37.

[39] Фущич В.И., Штелень В.М. Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 1. — С. 88–92.

[40] Фущич В.И., Штелень В.М. О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака // Теор. и мат. физика. — 1987. — Т. 72, № 1. — С. 35–44.

[41] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[42] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. — М.: Изд-во иностр. лит., 1947. — 358 с.

[43] Яненко Н.Н. Теория совместимости и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Труды IV Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. — Ленинград, 1964. — Т. 2. — С. 247–252.

[44] Ablowits M., Zepetella A. Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. — 1979. — V. 41, № 6. — P. 835–840.

[45] Anderson R.L., Ibragimov N.H. Lie-Backlund transformations in application // Philadelphia: SIAM, 1979 — 150 p.

[46] Archilla J.F.R. et al. Lie symmetries and multiple solutions in $\lambda - \omega$ reaction-diffusion systems // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — V. 30, № 1. — P. 185–194.

[47] Barannyk T.A. Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction- diffusion equations // Proceedings of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. — 2002. — V. 43, Part 1. — P. 80–85.

[48] Barannyk T.A., Nikitin A.G. Solitary wave solutions for heat equations // Proceedings of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. — 2004. — V. 50, Part 1. — P. 34–39.

[49] Bindu P.S., Senthilvelan M., Lakshmanan M. Singularity structures, symmetries and integrability of generalized Fisher type nonlinear dif-

fusion equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — V. 49. — P. L689–L696.

[50] Bluman G.W. Simplifying the form of Lie group admitted by a given differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — V. 145. — P. 52–62.

[51] Bluman G.W., Cole G.D. The general similarity of the heat equation // J. Math. Mech. — 1969. — V. 18, №. 11. — P. 1025–1042.

[52] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. — New-York: Springer, 1989. — 412 p.

[53] Cariello F., Tabor M. Painleve expansions for nonintegrable evolution equations // Physica D. — 1989. — V. 39, №1. — P. 77–94.

[54] Cariello F., Tabor M. Similarity reductions from extended Painleve expansions for nonintegrable evolution equations // Physica D. — 1991. — V. 53, №1. — P. 59–70.

[55] Cherniha R., King I.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — V. 33. — P. 267–282.

[56] Cherniha R., King I.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — V. 33. — P. 7839–7841.

[57] Cherniha R., King I.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — V. 36. — P. 405–425.

[58] Clarkson P., Kruskal M. New similarity solutions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. — 1989. — V. 30. — P. 2201–2213.

[59] Clarkson P., Mansfield E. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. — 1993. — V. 70. — P. 250–288.

[60] Danilov Yu.A. Group analysis of the Turing systems and of its analogues // Preprint / Kurchatov Institute of Atomic Energy; IAE–3287/1.

[61] Fan E. Multiple travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using a unified algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — V. 35. — P. 6853–6872.

[62] Fitzhugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. — 1961. — V. 1. — P. 445–466.

[63] Fokas A.S., Liu Q.M. Generalized conditional symmetries and exact solutions of non-integrable equations // Theor. Math. Phys. — 1994. — V. 99. — P. 263–277.

[64] Forsyth A.R. Theory of differential equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1906. — 304 p.

[65] Fushchich W.I., Cherniga R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — V. 18. — P. 3491–3503.

[66] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. — Dordrecht: Reidel. — 1987. — 214 p.

[67] Fushchich W.I., Seheda Yu.N. Some exact solutions of the many dimensional sin- Gordon equations // Lett. Nuovo Cimento. — 1984. — V. 41, № 14. — P. 462–464.

[68] Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A. — 1983. — V. 16. — P. 3645–3658.

[69] Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — V. 20. — P. L929–L933.

[70] Fushchich W.I., Serov N.I., Shtelen W.M. Some exact solutions of the many-dimensional nonlinear d'Alembert, Liouville, eikonal and Dirac equations // Group-theoretical methods in physics. — London: Harwood Academic Publ., 1984. — P. 489–496.

[71] Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation // J. Phys. A. — 1983. — V. 16, № 2. — P. 271–277.

[72] Fushchich W.I., Tsifra I.M. On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A. — 1987. — V. 20, № 2. — P. 45–47.

[73] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. — 1984. — V. 25, № 4. — P. 791–806.

[74] Hadeler K.P., Rothe F. Travelling fronts in nonlinear diffusion equations // J. Math. Biol. — 1975. — V. 2. — P. 251–263.

[75] Herrera J.J.E., Minzoni A., Ondarza R. Reaction-diffusion equations in one dimension: Particular solutions and relaxation // Physica D. — 1992. — V. 57. — P. 249–266.

[76] Hirota R., Satsuma J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation // Phys. Lett. A. — 1981. — V. 85, № 8–9. — P. 407–408 .

[77] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure and Appl. Math. — 1950. — V. 3. — P. 201–230.

[78] Kaliappan P. An exact solution for travelling waves of $u_t = Du_{xx} + u - u^k$ // Physica D. — 1984. — V. 11. — P. 368–374.

[79] Kawahara T., Tanaka M. Interactions of travelling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation // Phys. Lett. A. — 1983. — V. 97. — P. 311–314.

[80] Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reductions: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — V. 22. — P. 2915–2924.

[81] Lie S. Transformationsgruppen in 3 Ed. — Leipzig. — 1883.

[82] Murray J.D. Mathematical Biology. — Springer. — 1991.

[83] Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. — 1962. — V. 50. — P. 2061–2070 .

[84] Needham D.J., King A.C. The evolution of travelling waves in the weakly hyperbolic generalized Fisher model // Proc. R. Soc. Lond. — 2002. — V. 458. — P. 1055–1088 .

[85] Newell A.C., Whitehead J.A. Finite bandwidth, finite amplitude convection // J. Fluid Mech. — 1969. — V. 38. — P. 279–303.

[86] Nikitin A.G. Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Укр. мат. вісник. — 2005. — Т. 2, №1. — С. 149–200.

[87] Nikitin A.G., Barannyk T.A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations// Centr. Eur. J. Math. — 2005. — V. 2, №5. — P. 840–858 (see also math-ph/0303004).

[88] Nikitin A.G., Wiltshire R. Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proceeding of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. — 2000. — V. 30, Part 1. — P. 47–59.

[89] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — V. 42, № 4. — P. 1667–1688.

[90] Olver P.J. Application of Lie groups to differential equations. — New-York: Springer, 1986.

[91] Olver P.J. Direct reduction and differential constraints // Proc. R. Soc. Lond. — 1994. — P. 509–523.

[92] Olver P.J. , Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A.— 1986. — V. 114. — P. 107–112.

[93] Olver P.J. , Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — V. 47. — P. 263–275.

[94] Ondich J. A differential constraints approach to partial invariance // Europ. J. Appl. Math. — 1995. — V. 6. — P. 631–637.

[95] Veling E.J.M. Travelling waves in an initial-boundary value problem // Proc. R. Soc. Edinburgh. — 1981. — V. 90. — P. 41–61.

[96] Vorob'ev E.M. Reduction and quotient equations for differential equations with symmetries// Acta Appl. Math. — 1991. — V. 23. — P. 1–24.

[97] Winternitz P., Grundland A.M., Tuszynski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical ϕ^6- field equations obtained of symmetry reduction // J. Math. Phys. — 1987. — V. 28, № 9. — P. 2194–2212.

[98] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation// Physica D. — 1998. — V. 122. — P. 178–186.

ДОДАТОК А

Симетрійна редукція системи двох нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Розглянемо систему нелінійних рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}u_1+a_{12}u_2)=f^1(u_1,u_2),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{21}u_1+a_{22}u_2)=f^2(u_1,u_2),
\end{aligned} \tag{A.1}$$

де $u_1,\ u_2$ є функціями, які залежать від змінних t і x, $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ є довільними параметрами і $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$. Тут ми наводимо отримані результати симетрійної редукції для системи (А.1), групові властивості якої були вивчені в роботах [88, 89]. З використанням одновимірних підалгебр алгебри інваріантності системи (А.1) ми будуємо анзаци, які редукують систему (А.1) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

1.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=u_1^{k+1}\varphi_1,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}-b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=u_1^{k+d}\varphi_2,$$

де $k\neq 0,\ \varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$.

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2}{k}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=t^{-\frac{1}{k}}\omega_1(z),\quad u_2=t^{-\frac{d}{k}}\omega_2(z),\quad z=xt^{-\frac{1}{2}}.$$

Редукована система:

$$\frac{1}{k}\omega_1 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_1 + a\ddot{\omega}_1 + \omega_1^{k+1}\varphi_1 = 0,$$
$$\frac{d}{k}\omega_2 + \frac{1}{2}z\dot{\omega}_2 + b\ddot{\omega}_2 + \omega_1^{k+d}\varphi_2 = 0,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^2}$.

1.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1\varphi_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_1^d\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\lambda t)\omega_1(z),\ u_2 = \exp(d\lambda t)\omega_2(z),\ z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\lambda\omega_1 + \beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \omega_1\varphi_1,$$
$$d\lambda\omega_2 + \beta\dot{\omega}_2 - a\ddot{\omega}_2 = \omega_1^d\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\lambda x)\omega_1(t),\ u_2 = \exp(\lambda dx)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 - \lambda^2\omega_1 = \omega_1\varphi_1,\ \dot{\omega}_2 - \lambda^2 d^2 a\omega_2 = \omega_1^d\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

1.3. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=u_1\varphi_1,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=\varphi_2,\quad \varphi_1\neq \mathrm{const},$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від u_2.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial x}+\alpha u_1\frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp(\alpha t)\omega_1(z),\ u_2=\omega_2(z),\ z=\beta t-x.$$

Редукована система:

$$\alpha\omega_1+\beta\dot{\omega}_1-\ddot{\omega}_1=\omega_1\varphi_1,\quad \beta\dot{\omega}_2=\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_2.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x}+\alpha u_1\frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp(\alpha x)\omega_1 t,\quad u_2=\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1-\alpha^2\omega_1=\varphi_1\omega_1,\ \dot{\omega}_2=\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_2.

1.4. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=u_1\varphi_1,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}-d^{-1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=u_1^d\varphi_2,$$

де $d\neq 0$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sigma t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\sigma x\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp\left(\frac{\sigma^2}{6}t^3-\frac{1}{2}\sigma tx\right)\omega_1(z),$$
$$u_2=\exp\left(\frac{\sigma^2 d}{6}t^3-\frac{1}{2}\sigma dtx\right)\omega_2(z),$$
$$z=\frac{\sigma}{2}t^2-x.$$

Редукована система:

$$\frac{1}{2}\sigma z\omega_1-\ddot{\omega}_1=\omega_1\varphi_1,\ \ \frac{1}{2}\sigma dz\omega_2-d^{-1}\ddot{\omega}_2=\omega_1^d\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

b) Оператор симетрії:

$$t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}x\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\omega_1(t),\ u_2=\exp\left(-\frac{dx^2}{4t}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1+\frac{1}{2t}\omega_1=\omega_1\varphi_1,\ \dot{\omega}_2+\frac{1}{2t}\omega_2=\omega_1^d\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

2.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\exp\left(k\arctan\frac{u_2}{u_1}\right)[\varphi_1u_2+\varphi_2u_1],$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\exp\left(k\arctan\frac{u_2}{u_1}\right)[-\varphi_1u_1+\varphi_2u_2],$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R\exp\left(-d\arctan\dfrac{u_2}{u_1}\right),\ R=\sqrt{u_1^2+u_2^2}.$

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2}{k}\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=(2t)^{-\frac{d}{k}}\left(\cos\left(\frac{1}{k}\ln(2t)\right)\omega_1(z)+\sin\left(\frac{1}{k}\ln(2t)\right)\omega_2(z)\right),$$

$$u_2=(2t)^{-\frac{d}{k}}\left(-\sin\left(\frac{1}{k}\ln(2t)\right)\omega_1(z)+\cos\left(\frac{1}{k}\ln(2t)\right)\omega_2(z)\right),$$

$$z=\frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$-\frac{2}{k}(d\omega_1-\omega_2)-(2z+4a)\dot\omega_1+4b\dot\omega_2-8z(a\ddot\omega_1-b\ddot\omega_2)=$$

$$=\exp\left(k\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)[\varphi_1\omega_2+\varphi_2\omega_1],$$

$$-\frac{2}{k}(\omega_1+d\omega_2)-(2z+4a)\dot\omega_2-4b\dot\omega_1-8z(b\ddot\omega_1+a\ddot\omega_2)=$$

$$=\exp\left(k\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)[-\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2],$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right),\ R_1=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}.$

3.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\varphi_1 u_1^{k+1},\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}-b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=(\varphi_1\ln u_1+\varphi_2)u_1^{k+1},$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $u_1\exp\left(-\dfrac{u_2}{u_1}\right).$

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2}{k}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=(2t)^{-\frac{1}{k}}\omega_1(z),\quad u_2=(2t)^{-\frac{1}{k}}\left(\omega_2(z)-\frac{1}{k}\ln(2t)\omega_1(z)\right),$$

$$z=\frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$\frac{2}{k}\omega_1 + (2z+4a)\dot{\omega}_1 + 8az\ddot{\omega}_1 = -\omega_1^{k+1}\varphi_1,$$
$$\frac{2}{k}\omega_2 + \frac{4}{k}\omega_1 + 4b\dot{\omega}_1 + (2z+4a)\dot{\omega}_2 + 8bz\ddot{\omega}_1 + 8az\ddot{\omega}_2 = -(\varphi_1 \ln\omega_1 + \varphi_2)\omega_1^{k+1},$$

φ_1, φ_2 — довільні функції від $\omega_1 \exp\left(-\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

4.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \exp\left(k\frac{u_2}{u_1}\right)\varphi_1 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \exp\left(k\frac{u_2}{u_1}\right)(\varphi_1 u_2 + \varphi_2),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від u_1.

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{k}u_1\frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z), \quad u_2 = -\frac{2}{k}\ln x\,\omega_1(z) + \omega_2(z), \quad z = \frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$(z^2+2az)\dot{\omega}_1 + 4az^2\ddot{\omega}_1 = -\exp\left(k\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\varphi_1\omega_1,$$
$$\frac{2a}{k}\omega_1 + (z^2+2az)\dot{\omega}_2 + \left(2bz - \frac{8a}{k}z\right)\dot{\omega}_1 + 4bz^2\ddot{\omega}_1 + 4az^2\ddot{\omega}_2 =$$
$$= -\exp\left(k\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)(\varphi_1\omega_2 + \varphi_2),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_1.

5.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1(n\ln u_1 + \varphi_1), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_2(n\ln u_2 + \varphi_2),$$

де $n \neq 0$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial x}+\mu\exp(nt)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z),\;\; u_2=\exp\left(\frac{\mu d}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z),\;\; z=\beta t-x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1-\ddot\omega_1=\omega_1(n\ln\omega_1+\varphi_1),$$
$$\beta\dot\omega_2-a\ddot\omega_2=\omega_2(n\ln\omega_2+\varphi_2),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x}+\mu\exp(nt)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp(\mu x\exp(nt))\omega_1(t),\quad u_2=\exp(\mu dx\exp(nt))\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1-\mu^2\exp(2nt)\omega_1=\omega_1(n\ln\omega_1+\varphi_1),$$
$$\dot\omega_2-a\mu^2d^2\exp(2nt)\omega_2=\omega_2(n\ln\omega_2+\varphi_2),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

5.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=u_1(n\ln u_1+\varphi_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-d^{-1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=u_2(n\ln u_2+\varphi_2),$$

де $n\neq 0,\ \ \varphi_1,\ \ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1^d}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t}+(\beta+\nu e^{nt})\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\nu e^{nt}nx\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\beta\nu}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu}{2}xe^{nt}\right)\omega_1(z),$$
$$u_2 = \exp\left(\frac{\beta\nu d}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2 d}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu d}{2}xe^{nt}\right)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t + \frac{\nu}{n}e^{nt} - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \omega_1(n\ln\omega_1 + \varphi_1), \quad \beta\dot{\omega}_2 - d^{-1}\ddot{\omega}_2 = \omega_2(n\ln\omega_2 + \varphi_2),$$

$\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu nxe^{nt}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(-\frac{\nu ne^{nt}x^2}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_1(t), \quad u_2 = \exp\left(-\frac{\nu nde^{nt}x^2}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\frac{\nu ne^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_1 + \dot{\omega}_1 = \omega_1(n\ln\omega_1 + \varphi_1),$$
$$\frac{\nu ne^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_2 + \dot{\omega}_2 = \omega_2(n\ln\omega_2 + \varphi_2),$$

$\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

c) Оператор симетрії:

$$e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}nxe^{nt}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(-\frac{nx^2}{4}\right)\omega_1(t), \quad u_2 = \exp\left(-\frac{ndx^2}{4}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{n}{2}\omega_1 = \omega_1(n\ln\omega_1 + \varphi_1), \quad \dot{\omega}_2 + \frac{n}{2}\omega_2 = \omega_2(n\ln\omega_2 + \varphi_2),$$

φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1^d}$.

6.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2 u_2 + \varphi_1 u_1 + \frac{n}{d}\ln R(du_1 - u_2),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \frac{n}{d}\ln R(du_2 + u_1),$$

φ_1, φ_2 — довільні функції від $R\exp\left(-d\arctan\dfrac{u_2}{u_1}\right)$, $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\exp(nt)\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\mu d}{n}\exp(nt)\right)\left(\cos\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z) - \sin\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z)\right),$$
$$u_2 = \exp\left(\frac{\mu d}{n}\exp(nt)\right)\left(\sin\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z) + \cos\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z)\right).$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_1 + b\ddot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_1 - \omega_2),$$
$$\beta\dot{\omega}_2 - b\ddot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_2 = -\varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_2 + \omega_1),$$

де $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu\exp(nt)\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu dx\exp(nt))(\cos(\mu x\exp(nt))\omega_1(t) - \sin(\mu x\exp(nt))\omega_2(t)),$$
$$u_2 = \exp(\mu dx\exp(nt))(\sin(\mu x\exp(nt))\omega_1(t) + \cos(\mu x\exp(nt))\omega_2(t)).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 - a\mu^2 d^2 \exp(2nt)\omega_1 + b\mu^2 d^2 \exp(2nt)\omega_2 + 2b\mu^2 d \exp(2nt)\omega_1 +$$
$$+ 2a\mu^2 d \exp(2nt)\omega_2 + a\mu^2 \exp(2nt)\omega_1 - b\mu^2 \exp(2nt)\omega_2 =$$
$$= \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_1 - \omega_2),$$
$$- \dot\omega_2 + b\mu^2 d^2 \exp(2nt)\omega_1 + a\mu^2 d^2 \exp(2nt)\omega_2 + 2a\mu^2 d \exp(2nt)\omega_1 -$$
$$- 2b\mu^2 d \exp(2nt)\omega_2 - b\mu^2 \exp(2nt)\omega_1 - a\mu^2 \exp(2nt)\omega_2 =$$
$$= \varphi_1\omega_1 - \varphi_2\omega_2 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_2 + \omega_1),$$

де $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 \exp\left(-d \arctan\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

6.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2 u_2 - \varphi_1 u_1,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R \exp\left(-d \arctan\dfrac{u_2}{u_1}\right)$, $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right), \quad d \neq 0.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu d t)(\cos(\mu t)\omega_1(z) - \sin(\mu t)\omega_2(z)),$$
$$u_2 = \exp(\mu d t)(\sin(\mu t)\omega_1(z) + \cos(\mu t)\omega_2(z)),$$
$$z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\mu d\omega_1 - \mu\omega_2 + \beta\dot\omega_1 - a\ddot\omega_1 + b\ddot\omega_2 = \varphi_2\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$\mu d\omega_2 + \mu\omega_1 + \beta\dot\omega_2 - a\ddot\omega_2 - b\ddot\omega_1 = \varphi_2\omega_2 - \varphi_1\omega_1,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 \exp\left(-d \arctan\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu dx)(\cos(\mu x)\omega_1(t) - \sin(\mu x)\omega_2(t)),$$
$$u_2 = \exp(\mu dx)(\sin(\mu x)\omega_1(t) + \cos(\mu x)\omega_2(t)).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + (-a\mu^2 d^2 + a\mu^2 + 2b\mu^2 d)\omega_1 + (2a\mu^2 d + b\mu^2 d^2 - b\mu^2)\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$-\dot{\omega}_2 + (2a\mu^2 d + b\mu^2 d^2 - b\mu^2)\omega_1 + (a\mu^2 d^2 - a\mu^2 - 2b\mu^2 d)\omega_2 = \varphi_1\omega_1 - \varphi_2\omega_2.$$

6.3. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{k^{-1}}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1 + \frac{n}{d}\ln R(du_1 - u_2),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \frac{n}{d}\ln R(du_2 + u_1),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R\exp\left(-d\arctan\dfrac{u_2}{u_1}\right)$, $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $d \neq 0$.

а) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu knxe^{nt}\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(ds)(\cos(s)\omega_1(z) - \sin(s)\omega_2(z)),$$
$$u_2 = \exp(ds)(\sin(s)\omega_1(z) + \cos(s)\omega_2(z)),$$
$$s = \frac{\beta\nu k}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2 k}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu k}{2}xe^{nt}, \quad z = \beta t + \frac{\nu}{n}e^{nt} - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - \frac{k^{-1}d}{d^2+1}\ddot{\omega}_1 - \frac{k^{-1}}{d^2+1}\ddot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_1 - \omega_2),$$
$$\beta\dot{\omega}_2 + \frac{k^{-1}}{d^2+1}\ddot{\omega}_1 - \frac{k^{-1}d}{d^2+1}\ddot{\omega}_2 = -\varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2 + \frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_2 + \omega_1),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $d \neq 0$.

b) Оператор симетрії:

$$(1+\nu e^{nt})\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\nu knxe^{nt}\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp(ds)(\cos(s)\omega_1(t)-\sin(s)\omega_2(t)),$$
$$u_2=\exp(ds)(\sin(s)\omega_1(t)+\cos(s)\omega_2(t)),$$
$$s=-\frac{\nu knx^2e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1+\frac{\nu ne^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_1=\varphi_1\omega_2+\varphi_2\omega_1+\frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_1-\omega_2),$$
$$\beta\dot\omega_2+\frac{\nu ne^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_2=-\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2+\frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_2+\omega_1),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$, $d\neq 0$.

c) Оператор симетрії:

$$e^{nt}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}knxe^{nt}\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp\left(-\frac{kdnx^2}{4}\right)\left(\cos\left(-\frac{knx^2}{4}\right)\omega_1(t)-\sin\left(-\frac{knx^2}{4}\right)\omega_2(t)\right),$$
$$u_2=\exp\left(-\frac{kdnx^2}{4}\right)\left(\sin\left(-\frac{knx^2}{4}\right)\omega_1(t)+\cos\left(-\frac{knx^2}{4}\right)\omega_2(t)\right).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1+\frac{n}{2}\omega_1=\varphi_1\omega_2+\varphi_2\omega_1+\frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_1-\omega_2),$$
$$\dot\omega_2+\frac{n}{2}\omega_2=-\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2+\frac{n}{d}\ln R_1(d\omega_2+\omega_1),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$, $d\neq 0$.

6.4. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{k^{-1}}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\varphi_1 u_2+\varphi_2 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{k^{-1}d}{d^2+1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=-\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R\exp\left(-d\arctan\frac{u_2}{u_1}\right)$, $R=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sigma t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\sigma kx\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp(-ds)(\cos(s)\omega_1(z)+\sin(s)\omega_2(z)),$$
$$u_2=\exp(-ds)(-\sin(s)\omega_1(z)+\cos(s)\omega_2(z)),$$
$$s=-\frac{\sigma^2 k}{6}t^3+\frac{1}{2}\sigma ktx,\quad z=\frac{\sigma}{2}t^2-x.$$

Редукована система:

$$\frac{1}{2}d\sigma kz\omega_1-\frac{1}{2}\sigma kz\omega_2-\frac{k^{-1}d}{d^2+1}\ddot{\omega}_1-\frac{k^{-1}}{d^2+1}\ddot{\omega}_2=\varphi_1\omega_2+\varphi_2\omega_1,$$
$$\frac{1}{2}\sigma kz\omega_1+\frac{1}{2}d\sigma kz\omega_2+\frac{k^{-1}}{d^2+1}\ddot{\omega}_1-\frac{k^{-1}d}{d^2+1}\ddot{\omega}_2=-\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1\exp\left(-d\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}kx\left(du_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+du_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1=\exp\left(-\frac{kdx^2}{4t}\right)\left(\cos\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_1(t)+\sin\left(\frac{kx^2}{4}\right)\omega_2(t)\right),$$
$$u_2=\exp\left(-\frac{kdx^2}{4t}\right)\left(-\sin\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_1(t)+\cos\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_2(t)\right).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1+\frac{1}{2t}\omega_1=\varphi_1\omega_2+\varphi_2\omega_1,\quad \dot{\omega}_2+\frac{1}{2t}\omega_2=\varphi_2\omega_2-\varphi_1\omega_1,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1 \exp\left(-d \arctan \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

7.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos(\mu t)\omega_1(z) - \sin(\mu t)\omega_2(z),$$
$$u_2 = \sin(\mu t)\omega_1(z) + \cos(\mu t)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$-\mu\omega_2 + \beta\dot\omega_1 - a\ddot\omega_1 + b\ddot\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$\mu\omega_1 + \beta\dot\omega_2 - b\ddot\omega_1 - a\ddot\omega_2 = -\varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos(\mu x)\omega_1(t) - \sin(\mu x)\omega_2(t),$$
$$u_2 = \sin(\mu x)\omega_1(t) + \cos(\mu x)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 + a\mu^2\omega_1 - b\mu^2\omega_2 = \varphi_2\omega_2 + \varphi_1\omega_1,$$
$$\dot\omega_2 + b\mu^2\omega_1 + a\mu^2\omega_2 = -\varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

7.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1 - n u_2 \arctan\frac{u_2}{u_1},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + n u_1 \arctan\frac{u_2}{u_1},$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $n \neq 0$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu \exp(nt)\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z) - \sin\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z),$$
$$u_2 = \sin\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z) + \cos\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1 - a\ddot\omega_1 + b\ddot\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 - n\omega_2\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1},$$
$$\beta\dot\omega_2 - b\ddot\omega_1 - a\ddot\omega_2 = -\varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2 + n\omega_1\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1},$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu \exp(nt)\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos(\mu x \exp(nt))\omega_1(t) - \sin(\mu x\exp(nt))\omega_2(t),$$
$$u_2 = \sin(\mu x \exp(nt))\omega_1(t) + \cos(\mu x\exp(nt))\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 + a\mu^2\exp(2nt)\omega_1 - b\mu^2\exp(2nt)\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 - n\omega_2\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1},$$
$$-\dot\omega_2 - a\mu^2\exp(2nt)\omega_2 - b\mu^2\exp(2nt)\omega_1 = \varphi_1\omega_1 - \varphi_2\omega_2 - n\omega_1\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1},$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

7.3. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - k^{-1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = (\varphi_1 - n\theta)u_2 + \varphi_2 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + k^{-1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = (-\varphi_1 + n\theta)u_1 + \varphi_2 u_2,$$

де $n \neq 0$, $\theta = \arctan\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu knxe^{nt}\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos(s)\omega_1(z) - \sin(s)\omega_2(z),$$
$$u_2 = \sin(s)\omega_1(z) + \cos(s)\omega_2(z),$$
$$s = \frac{\beta\nu k}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2 k}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu k}{2}xe^{nt},$$
$$z = \beta t + \frac{\nu}{n}e^{nt} - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - k^{-1}\ddot{\omega}_2 = \left(\varphi_1 - n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$\beta\dot{\omega}_2 + k^{-1}\ddot{\omega}_1 = \left(-\varphi_1 + n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_1 + \varphi_2\omega_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu knxe^{nt}\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos\left(\frac{\nu knx^2e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_1(t) + \sin\left(\frac{\nu knx^2e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_2(t),$$
$$u_2 = -\sin\left(\frac{\nu knx^2e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_1(t) + \cos\left(\frac{\nu knx^2e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{\nu n e^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_1 = \left(\varphi_1 - n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$\dot{\omega}_2 + \frac{\nu n e^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_2 = \left(-\varphi_1 + n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_1 + \varphi_2\omega_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

c) Оператор симетрії:

$$e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}knxe^{nt}\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos\left(\frac{knx^2}{4}\right)\omega_1(t) + \sin\left(\frac{knx^2}{4}\right)\omega_2(t),$$
$$u_2 = -\sin\left(\frac{knx^2}{4}\right)\omega_1(t) + \cos\left(\frac{knx^2}{4}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{n}{2}\omega_1 = \left(\varphi_1 - n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$
$$\dot{\omega}_2 + \frac{n}{2}\omega_2 = \left(-\varphi_1 + n\arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_1 + \varphi_2\omega_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

7.4. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - k^{-1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + k^{-1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_2 u_2 - \varphi_1 u_1,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sigma t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma kx\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos\left(-\frac{\sigma^2 k}{6}t^3 + \frac{1}{2}\sigma ktx\right)\omega_1(z) + \sin\left(-\frac{\sigma^2 k}{6}t^3 + \frac{1}{2}\sigma ktx\right)\omega_2(z),$$
$$u_2 = -\sin\left(-\frac{\sigma^2 k}{6}t^3 + \frac{1}{2}\sigma ktx\right)\omega_1(z) + \cos\left(-\frac{\sigma^2 k}{6}t^3 + \frac{1}{2}\sigma ktx\right)\omega_2(z),$$
$$z = \frac{\sigma}{2}t^2 - x.$$

Редукована система:

$$\frac{1}{2}\sigma kz\omega_1 + k^{-1}\ddot{\omega}_1 = \omega_2\varphi_2 - \omega_1\varphi_1,$$
$$\frac{1}{2}\sigma kz\omega_2 - k^{-1}\ddot{\omega}_2 = \omega_2\varphi_1 + \omega_1\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

b) Оператор симетрії:

$$t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}kx\left(-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \cos\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_1(t) + \sin\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_2(t),$$
$$u_2 = -\sin\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_1(t) + \cos\left(\frac{kx^2}{4t}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{1}{2t}\omega_1 = \omega_2\varphi_1 + \omega_1\varphi_2,\quad \dot{\omega}_2 + \frac{1}{2t}\omega_2 = \omega_2\varphi_2 - \omega_1\varphi_1,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $R_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

8.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1} - \ln u_1$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu t)\omega_1(z),\quad u_2 = \mu t\exp(\mu t)\omega_1(z) + \exp(\mu t)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\mu\omega_1 + \beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1,\quad \mu\omega_1 + \mu\omega_2 + \beta\dot{\omega}_2 - c\ddot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu x)\omega_1(t), \quad u_2 = \mu x\exp(\mu x)\omega_1(t) + \exp(\mu x)\omega_2(t),$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 - \mu^2\omega_1 = \varphi_1\omega_1, \quad \dot\omega_2 - (c+2)\mu^2\omega_1 - \mu^2\omega_2 = \varphi_2\omega_2 + \varphi_2\omega_1,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

8.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1 + n u_2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + u_1\varphi_2 + n u_2\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1} - \ln u_1$, $n \neq 0$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\exp(nt)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z),$$
$$u_2 = \frac{\mu}{n}\exp(nt)\exp\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z) + \exp\left(\frac{\mu}{n}\exp(nt)\right)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1 - \ddot\omega_1 = \varphi_1\omega_1 + n\omega_2,$$

$$\beta\dot\omega_2 - c\ddot\omega_1 - \ddot\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu \exp(nt) \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\mu x \exp(nt))\omega_1(t),$$
$$u_2 = \mu x \exp(nt) \exp(\mu x \exp(nt))\omega_1(t) + \exp(\mu x \exp(nt))\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 - \mu^2 \exp(2nt)\omega_1 = \varphi_1\omega_1 + n\omega_2,$$
$$\dot{\omega}_2 - (c+2)\mu^2 \exp(2nt)\omega_1 - \mu^2 \exp(2nt)\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln \omega_1$.

8.3. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + u_1\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1} - \ln u_1$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sigma t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma x \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sigma t x\right)\omega_1(z),$$
$$u_2 = \left(\frac{\sigma^2}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sigma t x\right)\exp\left(\frac{\sigma^2}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sigma t x\right)\omega_1(z) + \exp\left(\frac{\sigma^2}{6}t^3 - \frac{1}{2}\sigma t x\right)\omega_2(z),$$
$$z = \frac{\sigma}{2}t^2 - x.$$

Редукована система:

$$\frac{1}{2}\sigma z\omega_1 - \ddot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1,$$
$$\frac{1}{2}\sigma z\omega_1 + \frac{1}{2}\sigma z\omega_2 + \ddot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 = \omega_2\varphi_1 + \omega_1\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}x\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\omega_1(t),$$
$$u_2 = -\frac{x^2}{4t}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\omega_1(t) + \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{1}{2t}\omega_1 = \omega_1\varphi_1, \quad \dot{\omega}_2 + \frac{1}{2t}\omega_2 = \omega_2\varphi_1 + \omega_1\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

8.4. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1 + n u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + u_1\varphi_2 + n u_2\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\dfrac{u_2}{u_1} - \ln u_1$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu n x e^{nt}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\beta\nu}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu}{2}xe^{nt}\right)\omega_1(z),$$
$$u_2 = \left(\frac{\beta\nu}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu}{2}xe^{nt}\right)\exp\left(\frac{\beta\nu}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu}{2}xe^{nt}\right)\omega_1(z) +$$
$$+ \exp\left(\frac{\beta\nu}{2n}e^{nt} + \frac{\nu^2}{4n}e^{2nt} - \frac{\nu}{2}xe^{nt}\right)\omega_2(z),$$
$$z = \beta t + \frac{\nu}{n}e^{nt} - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1 + n\omega_2,$$

$$\beta\dot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \nu e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu n x e^{nt}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(-\frac{\nu n x^2 e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_1(t),$$

$$u_2 = -\frac{\nu n x^2 e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\exp\left(-\frac{\nu n x^2 e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_1(t) + \exp\left(-\frac{\nu n x^2 e^{nt}}{4(1+\nu e^{nt})}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\frac{\nu n e^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_1 + \dot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1 + n\omega_2,$$

$$\frac{\nu n e^{nt}}{2(1+\nu e^{nt})}\omega_2 + \dot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \ln\omega_1$.

c) Оператор симетрії:

$$e^{nt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}n x e^{nt}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(-\frac{n x^2}{4}\right)\omega_1(t),$$

$$u_2 = -\frac{n x^2}{4}\exp\left(-\frac{n x^2}{4}\right)\omega_1(t) + \exp\left(-\frac{n x^2}{4}\right)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{n}{2}\omega_1 = \varphi_1\omega_1 + n\omega_2,\quad \dot{\omega}_2 + \frac{n}{2}\omega_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

9.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi u_2,$$

де φ — довільна функція від u_1.

Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \nu u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \mu u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \quad \nu \neq 0.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z), \quad u_2 = -\frac{\mu}{\nu}\omega_1(z) + \exp(\nu t)\omega_2(z), \quad z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \varphi\omega_1, \quad \nu\omega_2 + \beta\dot{\omega}_2 - \ddot{\omega}_2 = \varphi\omega_2,$$

де φ — довільна функція від ω_1.

9.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi u_1 - s u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi u_2,$$

де $s \neq 0$, φ — довільна функція від u_1.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \nu u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \mu e^{st} u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \quad s - \nu \neq 0.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z), \quad u_2 = \frac{\mu}{s-\nu}\exp(st)\omega_1(z) + \exp(st)\omega_2(z), \quad z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_1 = \varphi\omega_1 - s\omega_1, \quad s\omega_2 + \beta\dot{\omega}_2 - \ddot{\omega}_2 = \varphi\omega_2.$$

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \nu u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \mu e^{st} u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \quad \nu \neq 0.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(t), \quad u_2 = -\frac{\mu}{\nu}\exp(st)\omega_1(t) + \exp(\nu x)\omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 = \varphi\omega_1 - s\omega_1, \quad \omega_2 - \nu^2\omega_2 = \omega_2\varphi,$$

де φ — довільна функція від ω_1.

10.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_2 + \varphi_2 u_1 + n u_2,$$

де $\varphi_1, \ \varphi_2$ — довільні функції від $u_1, \ \varphi_1 \neq 0$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu\exp(nt)u_1\frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z), \quad u_2 = \frac{\mu}{n}\exp(nt)\omega_1(z) + \omega_2(z), \quad z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1, \quad \beta\dot{\omega}_2 - b\ddot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2,$$

де $\varphi_1, \ \varphi_2$ — довільні функції від ω_1.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu\exp(nt)u_1\frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(t), \quad u_2 = \mu x\exp(nt)\omega_1(t) + \omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 = \varphi_1\omega_1, \quad \dot{\omega}_2 = \varphi_1\omega_2 + \varphi_2\omega_1 + n\omega_2.$$

10.2. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = nu_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2 u_1 + nu_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від u_1.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z), \quad u_2 = \mu t \omega_1(z) + \omega_2(z), \quad z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \mu\omega_1 + \beta\dot{\omega}_2 - b\ddot{\omega}_1 - a\ddot{\omega}_2 = \varphi_2\omega_1 + n\omega_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_1.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mu u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(t), \quad u_2 = \mu x \omega_1(t) + \omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \dot{\omega}_2 = \varphi_2\omega_1 + n\omega_2.$$

11.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1^{\left(1 - \frac{\sqrt{k^2+s^2}}{k}\right)}\varphi_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u_1^{-\frac{\sqrt{k^2+s^2}}{k}}\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $s\ln u_1 + ku_2$.

Симетрійний анзац:

$$u_1 = (2t)^{\frac{k}{\sqrt{k^2+s^2}}}\omega_1(z), \quad u_2 = \omega_2(z) - \frac{s}{\sqrt{k^2+s^2}}\ln(2t),$$

$$z = \frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$\frac{2k}{\sqrt{k^2+s^2}}\omega_1 - 2z\dot\omega_1 - 4\dot\omega_1 - 8z\ddot\omega_1 = \omega_1^{\left(1-\frac{k}{\sqrt{k^2+s^2}}\right)}\varphi_1,$$
$$-\frac{2s}{\sqrt{k^2+s^2}}\omega_1 - 2z\dot\omega_2 - 4a\dot\omega_2 - 8az\ddot\omega_2 = \omega_1^{-\frac{\sqrt{k^2+s^2}}{k}}\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $s\ln\omega_1 + k\omega_2$.

12.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1 u_1 + \frac{s}{n}u_1u_2,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2 + su_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $u_2 - n\ln u_1$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\exp(st)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + n\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\lambda}{s}\exp(st)\right)\omega_1(z),\quad u_2 = \omega_2(z) + \frac{\lambda n}{s}\exp(st),\quad z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1 - \ddot\omega_1 = \varphi_1\omega_1 + \frac{s}{n}\omega_1\omega_2,\quad \beta\dot\omega_2 - a\ddot\omega_2 = \varphi_2 + s\omega_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\omega_2 - n\ln\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\exp(st)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + n\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\lambda x\exp(st))\omega_1(t),\quad u_2 = \omega_2(t) + \lambda nx\exp(st).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 - \lambda^2\exp(2st)\omega_1 = \varphi_1\omega_1 + \frac{s}{n}\omega_1\omega_2,\quad \dot\omega_2 = \varphi_2 + s\omega_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\omega_2 - n\ln\omega_1$.

13.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \exp(ku_1)\varphi_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \exp(ku_1)(\varphi_2 - 2n\varphi_1 u_1),$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $nu_1^2 + u_2$.

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{k}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - 2nu_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = -\frac{1}{k}\ln(2t) + \omega_1(z),$$
$$u_2 = -\frac{n}{k^2}\ln^2(2t) + \frac{2n}{k}\ln(2t)\omega_1(z) + \omega_2(z),$$
$$z = \frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$-\frac{2}{k} - 2z\dot{\omega}_1 - 4\dot{\omega}_1 - 8z\ddot{\omega}_1 = \exp(k\omega_1)\varphi_1,$$
$$\frac{4n}{k}\omega_1 - 2z\dot{\omega}_2 - 4c\dot{\omega}_1 - 8cz\ddot{\omega}_1 - 4\dot{\omega}_2 - 8z\ddot{\omega}_2 = \exp(k\omega_1)[\varphi_2 - 2n\varphi_1\omega_1],$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $n\omega_1^2 + \omega_2$.

15.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = u_1\varphi_1 + nu_1\ln u_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $u_2,\ n \neq 0$.

а) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\exp(nt)u_1\frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp\left(\frac{\lambda}{n}\exp(nt)\right)\omega_1(z),\ u_2 = \omega_2(z),\ z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1 - \ddot\omega_1 = \omega_1\varphi_1 + n\omega_1\ln\omega_1, \quad \beta\dot\omega_2 - a\dot\omega_2 = \varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_2.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\exp(nt)u_1\frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \exp(\lambda x\exp(nt))\omega_1(t), \; u_2 = \omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot\omega_1 - \lambda^2\exp(2nt)\omega_1 = \omega_1\varphi_1 + n\omega_1\ln\omega_1, \quad \dot\omega_2 = \varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від ω_2.

16.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \exp\left[\frac{k}{p_1^2+p_2^2}(p_1u_1+p_2u_2)\right]\varphi_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \exp\left[\frac{k}{p_1^2+p_2^2}(p_1u_1+p_2u_2)\right]\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $p_1u_2 - p_2u_1$, $k \neq 0$.

Оператор симетрії:

$$2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{k}\left(p_1\frac{\partial}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \omega_1(z) - \frac{1}{k}p_1\ln(2t), \; u_2 = \omega_2(z) - \frac{1}{k}p_2\ln(2t), \; z = \frac{x^2}{t}.$$

Редукована система:

$$-2z\dot\omega_1 - \frac{2p_1}{k} - a_{11}(4\dot\omega_1 + 8z\ddot\omega_1) - a_{12}(4\dot\omega_2 + 8z\ddot\omega_2) =$$
$$= \exp\left[\frac{k}{p_1^2+p_2^2}(p_1\omega_1+p_2\omega_2)\right]\varphi_1,$$
$$-2z\dot\omega_2 - \frac{2p_2}{k} - a_{21}(4\dot\omega_1 + 8z\ddot\omega_1) - a_{22}(4\dot\omega_2 + 8z\ddot\omega_2) =$$
$$= \exp\left[\frac{k}{p_1^2+p_2^2}(p_1\omega_1+p_2\omega_2)\right]\varphi_2,$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $p_1\omega_2 - p_2\omega_1$.

17.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1 + ku_1 + u_2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2 + k(ku_1 + u_2),$$

де $k \neq 0$, φ_1, φ_2 — довільні функції від $u_2 - ku_1$.

a) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \lambda e^{2kt}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + k\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \frac{\lambda}{2k}e^{2kt} + \omega_1(z),\ u_2 = \frac{\lambda}{2}e^{2kt} + \omega_2(z),\ z = \beta t - x.$$

Редукована система:

$$\beta\dot{\omega}_1 - a_{11}\ddot{\omega}_1 - a_{12}\ddot{\omega}_2 = \varphi_1 + k\omega_1 + \omega_2,$$
$$\beta\dot{\omega}_2 - a_{21}\ddot{\omega}_1 - a_{22}\ddot{\omega}_2 = \varphi_2 + k(k\omega_1 + \omega_2),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\omega_2 - k\omega_1$.

b) Оператор симетрії:

$$\frac{\partial}{\partial x} + \lambda e^{2kt}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + k\frac{\partial}{\partial u_2}\right).$$

Симетрійний анзац:

$$u_1 = \lambda x e^{2kt} + \omega_1(t),\ u_2 = \lambda k x e^{2kt} + \omega_2(t).$$

Редукована система:

$$\dot{\omega}_1 = \varphi_1 + k\omega_1 + \omega_2,\ \dot{\omega}_2 = \varphi_2 + k(k\omega_1 + \omega_2),$$

де φ_1, φ_2 — довільні функції від $\omega_2 - k\omega_1$.

18.1. Система рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $u_1,\ u_2$.

Оператор симетрії: $\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Симетрійний анзац: $u_1=\omega_1(z),\ u_2=\omega_2(z),\ z=\beta t-x$.

Редукована система:

$$\beta\dot\omega_1-a_{11}\ddot\omega_1-a_{12}\ddot\omega_2=\varphi_1,$$

$$\beta\dot\omega_2-a_{21}\ddot\omega_1-a_{22}\ddot\omega_2=\varphi_2,$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2$ — довільні функції від $\omega_1,\ \omega_2$.