Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

**БАРАННИК Людмила Леонідівна**

# СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ШРЬОДІНГЕРА ТА ГІДРОДИНАМІЧНОГО ТИПУ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
**НІКІТІН**
**Анатолій Глібович**
доктор фіз.–мат. наук

Київ – 1997

# Зміст

# Вступ

Проблема редукції багатовимірних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних до систем диференціальних рівнянь з меншим числом незалежних змінних і, зокрема, до систем звичайних диференціальних рівнянь є однією з найважливіших проблем групового аналізу диференціальних рівнянь. Редукція є засобом пошуку точних розв'язків систем нелінійних рівнянь. Мова йде про так звані інваріантні й частково інваріантні розв'язки. Підстановки, що для цього використовуються, конструюються певним чином по підалгебрах (для кожної підалгебри — своя підстановка) алгебри інваріантності вихідної системи рівнянь [21, 23, 33, 71]. Тому така редукція називається *симетрійною*.

Клас інваріантних розв'язків є досить широким. Він містить класичні автомодельні розв'язки, біжучі хвилі та інші важливі розв'язки, що становлять інтерес з математичної і фізичної точок зору. В багатьох випадках інваріантні розв'язки є єдиними відомими розв'язками даної системи рівнянь, які задано в явному вигляді. В останні два десятиліття інваріантні розв'язки були предметом багатьох досліджень [14, 16, 21, 23, 33, 71, 75, 76].

Метод симетрійної редукції передбачає виконаною класифікацію підалгебр алгебри інваріантності даної системи рівнянь відносно спряженості, що визначається групою її внутрішніх автоморфізмів. Якщо вихідна система рівнянь допускає додаткові дискретні перетворення, то їх зручно застосовувати для додаткового ототожнення підалгебр. В монографії [21] наведено ряд результатів, що стосуються проблеми класифікації підгруп групи Лі відносно приєднаної дії.

Систематичне вивчення проблеми класифікації підалгебр Лі алгебр симетрій розпочато в роботі Патери, Вінтерніца і Цассенхауза [84]. У згаданій і наступних роботах цих авторів [81, 82, 83, 85] проведено класифікацію підалгебр багатьох алгебр Лі, що відіграють фундаментальну роль у математичній фізиці.

В серії публікацій [30, 33, 48, 49, 50] доведено ряд тверджень про структуру підалгебр узагальнених алгебр Галілея і Пуанкаре, завдяки чому вдалося виконати завершену класифікацію підалгебр згаданих алгебр для невисоких розмірностей (див. також [2]).

Симетрії рівнянь типу Шрьодінгера та систем рівнянь гідродинамічного типу досліджувались в роботах [14, 15, 16, 20, 21, 23, 27, 28, 35, 37, 38, 43, 45, 65, 66, 67, 88]. В.І. Фущич [26, 29] запропонував проводити редукцію нелінійних систем диференціальних рівнянь за допомогою лінійних анзаців. Пуанкаре-інваріантні лінійні анзаци було знайдено для багатьох скалярних [33, 45, 88], векторних [19, 35, 45] і тензорних полів [35, 45]. В рамках цього підходу вдалося побудувати багатопараметричні розв'язки рівнянь Гамільтона–Якобі [1, 36, 44, 45, 70, 74], Борна–Інфельда [45, 63], Даламбера [4, 11, 12, 45, 70, 74], Ліувілля [3, 45, 70, 74], Буссінеска [45, 51, 59], Шрьодінгера [5, 14, 42, 45, 54, 60, 61, 73], рівнянь теплопровідності [58, 77, 91, 55], основних рівнянь газової динаміки [21, 22, 39, 40, 45, 80], рівнянь Дірака [35, 45], Максвелла [35], Нав'є–Стокса [18, 69, 87], нелінійних рівнянь класичної електродинаміки [41, 45, 71].

В дисертації виконано симетрійну редукцію лінійних і нелінійної систем Шрьодінгера та однієї системи нелінійних рівнянь гідродинамічного типу по підалгебрах відповідно центрального розширення алгебри Галілея $AG_3(3)$, центрального розширення конформної алгебри $AC(1,4)$ і афінної алгебри $AIGL(4,\mathbb{R})$. За допомогою редукції побудовано широкі класи багатопараметричних точних розв'язків цих систем.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Розділ 1 присвячено дослідженню симетрійної редукції рівняння Шрьодінгера по підалгебрах центральних розширень алгебр Галілея. Спираючись на результати робіт [56, 78, 79], ми виписуємо в параграфі 1.1 базисні елементи максимальної алгебри інваріантності (МАІ) одновимірного рівняння Шрьодінгера з потенціалом

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + W(x)\psi.$$

В параграфі 1.2 виконано симетрійну редукцію цього рівняння по одновимірних підалгебрах алгебри $AG_3(1) \oplus \langle Z \rangle$, де $AG_3(1) = \langle M, P, G \rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} ASL(2, \mathbb{R})$ є спеціальною алгеброю Галілея.

Наступний параграф 1.3 містить результати класифікації підалгебр рангу 3 алгебри Лі $L = AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$, породженої операторами симетрій тривимірного вільного рівняння Шрьодінгера, що мають нульовий перетин з $\langle M, Z \rangle$. З точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів алгебри $L$ таких підалгебр є 20. В параграфі 1.4 виділені підалгебри застосовуються для проведення редукції системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{m} \nabla u \nabla v + \dfrac{1}{2m} u \triangle v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2m} (\nabla v)^2 - \dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{\triangle u}{u} = 0, \end{cases}$$

одержаної з тривимірного рівняння Шрьодінгера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \triangle \psi$$

за допомогою заміни $\psi = u\, \mathrm{e}^{iv/\hbar}$ з наступним прирівнюванням дійсної та уявної частин.

Параграф 1.5 присвячено розмноженню розв'язків вільної системи Шрьодінгера за допомогою методу симетрійної редукції. Як відомо, в результаті застосування до розв'язку лінійної системи довільного оператора з МАІ ми одержуємо знову розв'язок цієї системи. Можна сказати, що такий розв'язок є результатом диференціювання. Оберненою операцією типу інтегрування є відтворення розв'язку за його слідами на операторах. Саме ця операція є об'єктом нашого дослідження. Доведені нами твердження дозволяють використовувати метод симетрійної редукції для побудови нових точних розв'язків лінійних систем. Запропонований нами підхід ілюструється в параграфі 1.5 на прикладі вільної системи Шрьодінгера, а в параграфі 1.6 — на прикладі лінійного рівняння теплопровідності.

В розділі 2 виконано симетрійну редукцію конформно інваріантного рівняння Шрьодінгера (рівняння Гуерра–Пустерла)

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u = \frac{\triangle |u|}{|u|} u \tag{1}$$

по підалгебрах рангу 3 алгебри $A\tilde{P}(1,4) \oplus \langle N \rangle$, що розглядаються з точністю до конформної спряженості. Покладаючи

$$u(t,\vec{x}) = \exp[r(t,\vec{x}) + i\theta(t,\vec{x})]$$

і прирівнюючи в рівнянні (1) дійсні і уявні частини, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla\theta\nabla\theta = 0, \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} + \Delta\theta + 2\nabla\theta\nabla r = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будемо її називати *системою Гуерра–Пустерла.*

В параграфі 2.1 встановлено, що МАІ системи (2) є пряма сума $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ конформної алгебри $AC(1,4)$ п'ятивимірного простору Мінковського $\mathbb{R}_{1,4}$ і одновимірної алгебри $\langle N \rangle$. Знайдено також три дискретні симетрії системи (2), що дозволило зменшити перелік підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ при їх класифікації. В цьому ж параграфі проаналізовано питання про розмноження розв'язків системи (2) за допомогою конформних перетворень.

Класифікації $I$-максимальних підалгебр МАІ системи (2) присвячено параграф 2.2. Доведена в цьому параграфі теорема 2.2 дозволяє обмежитися підалгебрами, які не містять операторів $P_0$ і $P_0 \pm P_4$. Оскільки $AC(1,4)$ є ізоморфною з псевдоортогональною алгеброю $AO(2,5)$, то результати класифікації зручно подавати в термінах простору Мінковського $\mathbb{R}_{2,5}$. Тому ми розбиваємо множину підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ на три класи: 1) підалгебри, проекції яких на $AC(1,4)$ не мають в $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантних ізотропних підпросторів; 2) підалгебри, проекції яких на $AC(1,4)$ мають в $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності 1; 3) підалгебри, проекції яких на $AC(1,4)$ мають в $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантний цілком ізотропний підпростір розмірності 2 і не мають інваріантних ізотропних підпросторів розмірності 1. Підалгебри другого класу є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4) \oplus \langle N \rangle$. Натомість до третього класу належать ті підалгебри алгебри $AG_4(3) \oplus \langle N \rangle$, які не є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4) \oplus \langle N \rangle$. Підалгебри першого класу описує теорема 2.3, другого класу — теореми 2.4 та 2.5 а третього класу — теорема 2.6.

Параграф 2.3 містить результати редукції системи Гуерра–Пустерла (2) до систем звичайних диференціальних рівнянь по підалгебрах алгебри $AP(1,4) \oplus \langle N \rangle$, а параграф 2.4 — результати редукції системи (2) по підалгебрах алгебри $A\tilde{P}(1,4) \oplus \langle N \rangle$, які не є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4) \oplus \langle N \rangle$.

В розділі 3 досліджується система нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + H_l \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial H_k}{\partial t} + E_l \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3), \tag{3}$$

яка була запропонована В.І. Фущичем [64] для опису векторних полів. При $E_k = H_k$ $(k = 1, 2, 3)$ система (3) перетворюється в систему Ойлера для ідеальної рідини. Система Ойлера вивчалася в роботах [18, 24, 34, 45, 86, 89]. Симетрійні властивості системи (3) досліджувались в [57, 65, 72]. Було встановлено, що МАІ цієї системи є афінна алгебра $AIGL(4, \mathbb{R})$, у якої три базисні елементи є нелінійними диференціальними операторами. Алгебра $AIGL(4, \mathbb{R})$ містить розширену алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3)$ і повну редуковану алгебру Галілея $A\bar{G}_4(3)$ [48].

В параграфі 3.1 ми одержуємо ряд тверджень про системи лінійних інваріантів підалгебр алгебри $AIGL(4, \mathbb{R})$. Спираючись на необхідну умову існування невироджених інваріантних розв'язків [21], встановлюємо, що для симетрійної редукції системи (3) до систем звичайних диференціальних рівнянь потрібні тільки тривимірні підалгебри алгебри $AIGL(4, \mathbb{R})$, які мають лише один основний інваріант від змінних $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

В параграфі 3.2 ми знаходимо розв'язки системи (3), які є функціями тільки від $t$ і $x_1$. В цьому випадку функції $E_1$, $H_1$ можна розглядати як компоненти розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + H_1 \frac{\partial E_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial t} + E_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 0, \tag{4}$$

функції $E_2$, $E_3$ — як розв'язки однорідного рівняння

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + H_1 \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = 0, \tag{5}$$

а функції $H_2$, $H_3$ — як розв'язки однорідного рівняння

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} + E_1 \frac{\partial H_k}{\partial x_1} = 0. \tag{6}$$

Система рівнянь (4) є інваріантною відносно афінної алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$. Тому за допомогою одновимірних підалгебр алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$ можна редукувати систему (4) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Якщо функція $E_1(t, x_1)$ не є сталою, то кожен розв'язок рівняння (5) можна подати у вигляді $\psi(E_1(t, x_1))$, де $\psi$ — деяка диференційовна функція. Більше того, для кожної диференційовної функції $\psi$ функція $\psi(E_1(t, x_1))$ є розв'язком рівняння (5). Подібне можна сказати і про рівняння (6).

В параграфі 3.3 ми будуємо розв'язки системи (3), які є функціями від $t$, $x_1$, $x_2$. Функції $E_1$, $E_2$, $H_1$, $H_2$ є компонентами розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + H_l \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial H_k}{\partial t} + E_l \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = 0 \qquad (k, l = 1, 2), \tag{7}$$

натомість функцію $E_3$ можна розглядати як розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} + H_1 \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + H_2 \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0, \tag{8}$$

а $H_3$ — як розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} + E_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0.$$

Якщо функції $E_1(t, x_1, x_2)$, $E_2(t, x_1, x_2)$ є функціонально незалежними в деякій області $\Gamma$, то кожен розв'язок рівняння (8) можна подати в цій області у вигляді $\psi(E_1(t, x_1, x_2), E_2(t, x_1, x_2))$, де $\psi$ — деяка диференційовна функція. Крім того, для довільної диференційовної функції $\psi$ функція $\psi(E_1(t, x_1, x_2), E_2(t, x_1, x_2))$ від змінних $t$, $x_1$, $x_2$ є розв'язком рівняння (8).

Система рівнянь (7) є інваріантною відносно афінної алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$. Для редукції системи (7) до систем звичайних диференціальних рівнянь нам потрібні такі двовимірні підалгебри алгебри

$AIGL(3, \mathbb{R})$, які мають тільки один основний інваріант від змінних $t$, $x_1$, $x_2$. Перелік таких підалгебр ми одержуємо з точністю до афінної спряженості з результатів класифікації, виконаної в [6].

В параграфі 3.4 виконано редукцію системи (3) по тривимірних підалгебрах алгебри Пуанкаре $AP(1, 3)$.

Основні результати дисертації доповідалися автором на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на IV, V Міжнародних конференціях ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1995; 1996), на I, II Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995; 1997), на 5-й Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1997).

По темі дисертації опубліковано 9 друкованих робіт [7, 8, 9, 10, 31, 32, 52, 53, 54].

Всі досліджені в дисертації задачі були поставлені першим науковим керівником членом–кореспондентом НАН України, професором, доктором фізико–математичних наук Вільгельмом Іллічем Фущичем. Автор з глибокою вдячністю згадує співпрацю з ним. Автор виражає також щиросердечну подяку своєму науковому керівнику доктору фізико–математичних наук Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійну увагу до роботи та підтримку на завершальному її етапі. Щиро вдячна також усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені при обговоренні результатів.

# Розділ 1

# Редукція системи Шрьодінгера по підалгебрах центральних розширень алгебр Галілея

Системами Шрьодінгера ми називаємо системи диференціальних рівнянь, одержаних з рівнянь Шрьодінгера в результаті застосування підстановок $\psi(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x}) + iv(t,\vec{x})$, $\psi(t,\vec{x}) = \mathrm{A}(t,\vec{x})\exp[i\theta(t,\vec{x})]$ з наступним прирівнюванням дійсних та уявних частин. Перевага однієї з цих систем над другою в конкретному випадку визначається можливістю виконати симетрійну редукцію, а також можливістю знайти розв'язок відповідної редукованої системи.

В параграфі 1.1, використовуючи результати Бойєра та зв'язок підходу Лі з підходом Міллера до теорії лінійних симетрій [56, 78, 79], ми виписуємо базисні елементи максимальної алгебри інваріантності одновимірної системи Шрьодінгера з потенціалом. В параграфі 1.2 виконуємо симетрійну редукцію такої системи по одновимірних підалгебрах алгебри $AG_3(1) \oplus \langle Z \rangle$. В параграфі 1.3 виділяємо всі (з точністю до спряженості) $I$-максимальні підалгебри алгебри $AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$, за допомогою яких в наступному параграфі проводимо редукцію тривимірної вільної системи Шрьодінгера до систем звичайних диференціальних рівнянь.

В параграфі 1.5 вводиться операція типу інтегрування на множині розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь, завдяки чому метод симетрійної редукції можна використовувати для побудови нових розв'язків за відомими розв'язками таких систем. Можливості цієї операції проілюстровано в параграфі 1.5 на прикладі вільної системи Шрьодінгера, а в параграфі 1.6 — на прикладі лінійного рівняння теплопровідності.

## 1.1. Симетрія системи Шрьодінгера з потенціалом

В даному параграфі розглядається одновимірне рівняння Шрьодінгера з потенціалом

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + W(x)\psi \tag{1.1}$$

для тих випадків, коли $W(x)$ є однією з таких функцій:

$$\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b, \quad \frac{c\hbar^2}{2mx^2} + \frac{2mk^2}{\hbar^2}x^2, \quad \frac{c\hbar^2}{2mx^2} - \frac{2mk^2}{\hbar^2}x^2, \tag{1.2}$$

де $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $h$ — стала Планка; $m$ — маса частинки; $a$, $b$, $c$, $k$ — дійсні числа, причому $k \geq 0$, $a \neq 0$ або $a = b = 0$. Як встановлено в роботах [46, 56], в цих і тільки цих випадках рівняння (1.1) має нетривіальну алгебру симетрій.

Розв'язком рівняння (1.1) ми будемо називати пару дійсних функцій $u(t,x)$, $v(t,x)$ або пару дійсних функцій $\mathrm{A}(t,x)$, $\theta(t,x)$, пов'язаних з хвильовою функцією $\psi(t,x)$ співвідношеннями $\psi(t,x) = u(t,x) + iv(t,x)$, $\psi(t,x) = \mathrm{A}(t,x)\exp(i\theta(t,x))$. Ці пари є розв'язками систем двох диференціальних рівнянь в частинних похідних, які є рівносильними рівнянню (1.1). Щоб спростити обчислення, перейдемо до нових незалежних змінних і нових функцій. Нехай

$$x_0 = \frac{t}{\hbar}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}x, \quad V(x_1) = W\left(\frac{\hbar x_1}{\sqrt{2m}}\right),$$

$$f(x_0,x_1) = u\left(\hbar x_0, \frac{\hbar x_1}{\sqrt{2m}}\right), \quad g(x_0,x_1) = v\left(\hbar x_0, \frac{\hbar x_1}{\sqrt{2m}}\right),$$

$$\Lambda(x_0,x_1) = \mathrm{A}\left(\hbar x_0, \frac{\hbar x_1}{\sqrt{2m}}\right), \quad \mu(x_0,x_1) = \theta\left(\hbar x_0, \frac{\hbar x_1}{\sqrt{2m}}\right).$$

Тоді системи, що відповідають рівнянню (1.1), можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_0} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - gV(x_1) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_0} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + fV(x_1) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_0} + 2\dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_1}\dfrac{\partial \mu}{\partial x_1} + \Lambda\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2} = 0, \\ \Lambda\left[\dfrac{\partial \mu}{\partial x_0} + \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial x_1}\right)^2\right] - \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2} + \Lambda V(x_1) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Систему (1.3) будемо називати системою Шрьодінгера в алгебраїчній формі, а систему (1.4) — системою Шрьодінгера в тригонометричній формі.

Теореми про максимальні алгебри інваріантності в сенсі Лі систем Шрьодінгера можна довести методом Лі [21, 23, 45] або одержати з результатів [46, 56] на підставі зв'язку підходу Лі з підходом Міллера (див. [23], с. 233, 396) до теорії лінійних симетрій.

Кожен елемент $Y$ алгебри інваріантності системи (1.3) має вигляд

$$Y = h_0(x_0,x_1)\frac{\partial}{\partial x_0} + h_1(x_0,x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} +$$
$$+ h_2(x_0,x_1)\left(f\frac{\partial}{\partial f} + g\frac{\partial}{\partial g}\right) + h_3(x_0,x_1)\left(g\frac{\partial}{\partial f} - f\frac{\partial}{\partial g}\right).$$

Домовимося $Y$ подавати у вигляді $(h_0, h_1, h_2, h_3)$.

**Теорема 1.1.** *Нехай $V(x_1)$ є однією з функцій $ax_1+b$, $\pm k^2x_1^2$, де $k>0$, $a \neq 0$ або $a=b=0$. Тоді максимальна алгебра інваріантності системи (1.3) породжується алгеброю Лі $L = AG_3(1) \oplus \langle Z\rangle$ і нескінченновимірною алгеброю $X = F(x_0,x_1)\dfrac{\partial}{\partial f} + G(x_0,x_1)\dfrac{\partial}{\partial g}$, де пара функцій $F(x_0,x_1)$ і $G(x_0,x_1)$ є довільним розв'язком розглядуваної системи, при цьому вигляд базисних операторів $D$, $S$, $T$, $P$, $G$, $M$ алгебри $AG_3(1)$ і оператора $Z$ залежить від потенціалу.*

*Якщо* $V(x_1) = ax_1 + b$, *то*

$$\begin{aligned}
&D = (2x_0, x_1 - 3ax_0^2, -\frac{1}{2}, 3ax_0x_1 - a^2x_0^3 + 2bx_0),\\
&S = (x_0^2, x_0x_1 - ax_0^3, -\frac{x_0}{2}, -\frac{x_1^2}{4} + \frac{3}{2}ax_0^2x_1 - \frac{a^2}{4}x_0^4 + bx_0^2),\\
&T = (1, -2ax_0, 0, ax_1 - a^2x_0^2), \quad P = (0, -1, 0, -ax_0),\\
&G = (0, x_0, 0, -\frac{x_1}{2} + \frac{a}{2}x_0^2), \ M = (0, 0, 0, -\frac{1}{2}), \ Z = (0, 0, 1, 0).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

*Якщо* $V(x_1) = k^2x_1^2 \ \ (k > 0)$, *то*

$$\begin{aligned}
&D = (\frac{1}{2k}\sin 4kx_0, x_1\cos 4kx_0, -\frac{1}{2}\cos 4kx_0, kx_1^2\sin 4kx_0),\\
&S = (-\frac{1}{4k} + \frac{1}{4k}\cos 4kx_0, -\frac{x_1}{2}\sin 4kx_0, \frac{1}{4}\sin 4kx_0, \frac{k}{2}x_1^2\cos 4kx_0),\\
&T = (-\frac{1}{4k} - \frac{1}{4k}\cos 4kx_0, \frac{x_1}{2}\sin 4kx_0, -\frac{1}{4}\sin 4kx_0, -\frac{k}{2}x_1^2\cos 4kx_0),\\
&P = (0, \cos 2kx_0, 0, kx_1\sin 2kx_0), \quad M = (0, 0, 0, k),\\
&G = (0, \sin 2kx_0, 0, -kx_1\cos 2kx_0), \quad Z = (0, 0, 1, 0).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Позначимо через $\hat{Y}$ векторне поле, одержане з векторного поля $Y$ виду (1.6) в результаті заміни $k$ на $ik$. Якщо $V(x_1) = -k^2x_1^2$, то $AG_3(1)$ породжується векторними полями

$$\hat{D}, \quad -i\hat{S}, \quad i\hat{T}, \quad \hat{P}, \quad -i\hat{G}, \quad -i\hat{M}. \tag{1.7}$$

Оператор $Z$ залишається без зміни.

**Теорема 1.2.** *Якщо* $V(x_1)$ *є однією з функцій* $\dfrac{c}{x_1^2} \pm k^2x_1^2$, *де* $c \neq 0$, $k \geq 0$, *то максимальну алгебру інваріантності системи Шрьодінгера (1.3) породжує алгебра* $\langle D, S, T, M, Z\rangle$ *і нескінченновимірна алгебра*

$$X = F(x_0, x_1)\frac{\partial}{\partial f} + G(x_0, x_1)\frac{\partial}{\partial g}, \tag{1.8}$$

*де пара функцій $F(x_0, x_1)$ і $G(x_0, x_1)$ є довільним розв'язком розглядуваної системи. Для $V(x_1) = \dfrac{c}{x_1^2}$ оператори $D$, $S$, $T$ мають вигляд (1.5), де $a = b = 0$. При $V(x_1) = \dfrac{c}{x_1^2} + k^2x_1^2$ $(k > 0)$ оператори $D$, $S$, $T$ задаються формулами (1.6), а при $V(x_1) = \dfrac{c}{x_1^2} - k^2x_1^2$ $(k > 0)$ — формулами (1.7). У всіх випадках оператори $M$, $Z$ мають вигляд $M = g\dfrac{\partial}{\partial f} - f\dfrac{\partial}{\partial g}$, $Z = f\dfrac{\partial}{\partial f} + g\dfrac{\partial}{\partial g}$.*

Надалі оператори (1.7) також будемо позначати відповідно $D$, $S$, $T$, $P$, $G$, $M$.

Щоб одержати в явному вигляді базис максимальної алгебри інваріантності системи Шрьодінгера (1.4) в тригонометричній формі потрібно в базисних операторах максимальної алгебри інваріантності системи Шрьодінгера (1.3) в алгебраїчній формі замінити $f\dfrac{\partial}{\partial f} + g\dfrac{\partial}{\partial g}$ на $\Lambda\dfrac{\partial}{\partial \Lambda}$, $g\dfrac{\partial}{\partial f} - f\dfrac{\partial}{\partial g}$ — на $\left(-\dfrac{\partial}{\partial \mu}\right)$. Оператор $X$ в цьому випадку набуває вигляду

$$X = \Gamma\left\{\cos(\nu - \mu)\frac{\partial}{\partial \Lambda} + \frac{1}{\Lambda}\sin(\nu - \mu)\frac{\partial}{\partial \mu}\right\},$$

де пара функцій $\Gamma(x_0, x_1)$, $\nu(x_0, x_1)$ є довільним розв'язком системи (1.4).

## 1.2. Симетрійна редукція одновимірної системи Шрьодінгера з потенціалом

Щоб знайти розв'язки системи (1.3) або системи (1.4), ми редукуємо ці системи до систем звичайних диференціальних рівнянь. Редукція здійснюється по одновимірних підалгебрах максимальних алгебр інваріантності. Ці підалгебри ми розглядаємо з точністю до спряженості, яка визначається групою внутрішніх автоморфізмів алгебри інваріантності. Будемо використовувати тільки підалгебри алгебри $L = AG_3(1) \oplus \langle Z \rangle$. Легко бачити, що кожна з них мусить бути відмінною від алгебри виду $\langle \alpha M + \beta Z \rangle$.

**Теорема 1.3.** *Одновимірні підалгебри алгебри $L$, що є відмінними від $\langle \alpha M+\beta Z\rangle$, вичерпуються з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів алгебри $L$ такими підалгебрами:*

$$\langle D+\alpha M+\beta Z\rangle\ (\alpha\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R}),\quad \langle T+\delta Z\rangle\ (\delta=0,\pm 1),$$

$$\langle T+\varepsilon G+\delta Z\rangle\ (\varepsilon=\pm 1,\ \delta\in\mathbb{R}),\quad \langle T+\varepsilon M+\delta Z\rangle\ (\varepsilon=\pm 1,\ \delta\in\mathbb{R}),$$

$$\langle S+T+\alpha M+\beta Z\rangle\ (\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}),\quad \langle P+\delta Z\rangle\ (\delta=0,\pm 1).$$

**Доведення.** Спеціальна алгебра Галілея $AG_3(1)$ є напівпрямою сумою ідеалу $\langle M,P,G\rangle$ і спеціальної лінійної алгебри $ASL(2,\mathbb{R})$ з базисом $D$, $S$, $T$. З точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів алгебра $ASL(2,\mathbb{R})$ має такі і тільки такі одновимірні підалгебри ([33], с. 65): $\langle D\rangle$, $\langle T\rangle$, $\langle S+T\rangle$.

Нехай $X=D+\alpha G+\beta P+\gamma M+\delta Z$. На підставі формули Кемпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(\theta_1 G+\theta_2 P)\cdot X\cdot\exp(-\theta_1 G-\theta_2 P)=$$

$$=D+(\alpha-\theta_1)G+(\beta+\theta_2)P+(\gamma+\theta_1\beta-\theta_2\alpha)M+\delta Z.$$

Поклавши $\theta_1=\alpha$, $\theta_2=-\beta$, одержуємо елемент $D+\lambda M+\delta Z$. Оскільки

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}(S+T)\right)\cdot D\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{2}(S+T)\right)=-D,$$

то можна вважати, що $\lambda\geq 0$.

Якщо $X=T+\alpha G+\beta P+\gamma M+\delta Z$, де $\alpha\neq 0$, то за допомогою внутрішніх автоморфізмів алгебри $L$ можна домогтися, щоб $\beta=0$, $\gamma=0$. Рівність

$$\exp(\theta D)\cdot X\cdot\exp(-\theta D)=\mathrm{e}^{-2\theta}(T+\alpha\,\mathrm{e}^{3\theta}\,G+\delta\,\mathrm{e}^{2\theta}\,Z)$$

дозволяє припускати, що $|\alpha|=1$.

Якщо $X=T+\beta P+\gamma M+\delta Z$, то з точністю до внутрішніх автоморфізмів $\beta=0$ і виконується одна з наступних умов: 1) $|\gamma|=1$; 2) $\gamma=0$, $\delta=0$; 3) $\gamma=0$, $|\delta|=1$.

Аналогічно розглядається решта випадків. Теорему доведено.

Проведемо редукцію для потенціалів (1.2). В кожному конкретному випадку редукцію виконуємо для однієї з систем Шрьодінгера. Вибір цієї системи зумовлений можливістю виконати редукцію, а також можливістю знайти розв'язок відповідної редукованої системи. Для кожного з потенціалів (1.2) наведемо приклади редукції по тих підалгебрах алгебри $L$, де вдалося знайти частинний або загальний розв'язок відповідної редукованої системи. Для таких підалгебр вказуємо анзац, редуковану систему та інваріантний розв'язок рівняння Шрьодінгера (1.1), що відповідає розв'язку редукованої системи.

**1.2.1.** *Випадок* $W(x)=0$.

$\mathfrak{A}$. $\langle P+\delta Z\rangle$ $(\delta=0,\pm1)$: $f=\mathrm{e}^{-\delta x_1}\varphi_1(\omega)$, $g=\mathrm{e}^{-\delta x_1}\varphi_2(\omega)$,

$$\omega=x_0,\ \dot\varphi_1+\delta^2\varphi_2=0,\quad \dot\varphi_2-\delta^2\varphi_1=0.$$

Загальному розв'язку редукованої системи для $\delta\neq0$ відповідає такий розв'язок рівняння (1.1):

$$u=\exp\left(-\frac{\delta\sqrt{2m}}{\hbar}x\right)\left(C_1\cos\frac{t}{\hbar}+C_2\sin\frac{t}{\hbar}\right),$$

$$v=\exp\left(-\frac{\delta\sqrt{2m}}{\hbar}x\right)\left(C_1\sin\frac{t}{\hbar}-C_2\cos\frac{t}{\hbar}\right).$$

$\mathfrak{B}$. $\langle T+\delta Z\rangle$ $(\delta=0,\pm1)$: $f=\mathrm{e}^{\delta x_0}\varphi_1(\omega)$, $g=\mathrm{e}^{\delta x_0}\varphi_2(\omega)$, $\omega=x_1$,

$$\delta\varphi_1+\ddot\varphi_2=0,\quad \delta\varphi_2-\ddot\varphi_1=0.$$

В результаті цієї редукції одержуємо розв'язок

$$u=\operatorname{sgn}\delta\,\mathrm{e}^{\frac{\delta}{\hbar}t}\left(C_1\sinh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\sin\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x-\right.$$

$$\left.-C_2\sinh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\cos\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x+C_3\cosh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\sin\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x-\right.$$

$$-C_4\cosh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\cos\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\Bigg),$$

$$v=\mathrm{e}^{\frac{\delta}{\hbar}t}\Bigg(C_1\cosh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\cos\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x+$$

$$+C_2\cosh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\sin\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x+C_3\sinh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\cos\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x+$$

$$+C_4\sinh\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\sin\frac{k\sqrt{2m}}{\hbar}x\Bigg),\quad \text{де}\ \ k=\sqrt{\frac{1}{2}},\ \delta=\pm1;$$

$$u=C_1x+C_2,\quad v=C_3x+C_4,\quad \text{де}\ \ \delta=0.$$

$\mathfrak{C}$. $\langle D+\beta Z\rangle:\ f=x_0^{\frac{2\beta-1}{4}}\varphi_1(\omega),\ g=x_0^{\frac{2\beta-1}{4}}\varphi_2(\omega),\ \omega=\dfrac{x_1^2}{x_0},$

$$\begin{cases}\dfrac{2\beta-1}{4}\varphi_1-\omega\dot\varphi_1+2\dot\varphi_2+4\omega\ddot\varphi_2=0,\\[2mm] \dfrac{2\beta-1}{4}\varphi_2-\omega\dot\varphi_2-2\dot\varphi_1-4\omega\ddot\varphi_1=0.\end{cases}$$

Для $\beta=\dfrac{1}{2}$ відповідний розв'язок рівняння (1.1) має вигляд

$$u=\gamma\,\mathrm{C}\left(\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right)-\delta\,\mathrm{S}\left(\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right),\quad v=\delta\,\mathrm{C}\left(\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right)+\gamma\,\mathrm{S}\left(\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right),$$

де $\mathrm{C}(z)$, $\mathrm{S}(z)$ — косинус- (синус-) інтеграли Френеля [25].

**1.2.2.** *Випадок* $W(x)=\dfrac{2mk^2}{\hbar^2}x^2\ \ (k>0)$.

$\mathfrak{A}$. $\langle P+\delta Z\rangle\ (\delta=0,\pm1):\ \Lambda=\exp\left(\dfrac{\delta x_1}{\cos 2kx_0}\right)\varphi_1(\omega),$

$$\mu=-\frac{k}{2}x_1^2\tan 2kx_0+\varphi_2(\omega),\ \omega=x_0,$$

$$\dot{\varphi}_1 - k\varphi_1 \tan 2k\omega = 0, \quad \dot{\varphi}_2 - \frac{\delta^2}{\cos^2 2k\omega} = 0.$$

Загальному розв'язку редукованої системи відповідає розв'язок системи (1.1)

$$\mathrm{A} = C_1 \left(\cos \frac{2k}{\hbar} t\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{\delta\sqrt{2m}x}{\hbar \cos \frac{2k}{\hbar} t}\right),$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(-\frac{2km}{\hbar^2}x^2 + \frac{\delta^2}{k}\right) \tan \frac{2k}{\hbar} t + C_2.$$

$$\mathfrak{B}.\ \langle S + T - \frac{\alpha}{2k} Z\rangle:\ f = \mathrm{e}^{\alpha x_0}\, \varphi_1(\omega),\ g = \mathrm{e}^{\alpha x_0}\, \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$$

$$\alpha\varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 - k^2\omega^2\varphi_2 = 0, \quad \alpha\varphi_2 - \ddot{\varphi}_1 + k^2\omega^2\varphi_1 = 0.$$

При $\alpha = 0$ одержуємо розв'язок системи (1.1) у вигляді

$$u = \mathrm{Re}\left\{x^{\frac{1}{2}} \mathrm{Z}^{(1)}_{1/4}\left(\frac{ikm}{\hbar^2}x^2\right)\right\}, \qquad v = \mathrm{Re}\left\{x^{\frac{1}{2}} \mathrm{Z}^{(2)}_{1/4}\left(\frac{ikm}{\hbar^2}x^2\right)\right\},$$

де $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z) = C^{(j)}_1 \mathrm{J}_\nu(z) + C^{(j)}_2 \mathrm{Y}_\nu(z)$ $(j = 1, 2)$, $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z)$ — циліндрична функція; $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{Y}_\nu(z)$ — функції Бесселя першого та другого роду відповідно ([17], с. 450).

$$\mathfrak{C}.\ \langle S + T - \frac{\alpha}{2k} Z - \frac{\beta}{2k^2} M\rangle:\ \Lambda = \mathrm{e}^{\alpha x_0}\, \varphi_1(\omega),$$

$$\mu = -\beta x_0 + \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$$

$$\alpha\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \varphi_1\ddot{\varphi}_2 = 0, \quad -\beta\varphi_1 + \varphi_1\dot{\varphi}_2^2 - \ddot{\varphi}_1 + k^2\omega^2\varphi_1 = 0.$$

Частинному розв'язку редукованої системи відповідає розв'язок системи (1.1)

$$\mathrm{A} = \exp\left(-\frac{km}{\hbar^2}x^2\right) x^{-1/2} \left[C_1 x^{3/2}\, {}_1F_1\left(\frac{3k-\beta}{4k}, \frac{3}{2}, \frac{2km}{\hbar^2}x^2\right) + \right.$$

$$\left. + C_2 x^{1/2}\, {}_1F_1\left(\frac{k-\beta}{4k}, \frac{1}{2}, \frac{2km}{\hbar^2}x^2\right)\right], \quad \theta = -\frac{\beta}{\hbar} t + C_3,$$

де ${}_1F_1(a,b;z)$ — функція Похгаммера або вироджена гіпергеометрична функція.

**1.2.3.** *Випадок* $W(x) = -\dfrac{2mk^2}{\hbar^2}x^2 \quad (k>0)$.

$\mathfrak{A}$. $\langle P+\delta Z\rangle$ $(\delta = 0, \pm 1)$ : $\Lambda = \exp\left(\dfrac{\delta x_1}{\cosh 2kx_0}\right)\varphi_1(\omega)$,

$$\mu = \frac{k}{2}x_1^2\tanh 2kx_0 + \varphi_2(\omega),\ \omega = x_0,$$

$$\dot\varphi_1 + k\tanh 2k\omega\varphi_1 = 0, \quad \dot\varphi_2 - \frac{\delta^2}{\cosh^2 2k\omega} = 0.$$

По загальному розв'язку редукованої системи будуємо розв'язок системи (1.1)

$$\mathrm{A} = C_1\left(\cosh\frac{2k}{\hbar}t\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{\delta\sqrt{2m}x}{\hbar\cosh\frac{2k}{\hbar}t}\right),$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{2km}{\hbar^2}x^2 + \frac{\delta^2}{k}\right)\tanh\frac{2k}{\hbar}t + C_2.$$

$\mathfrak{B}$. $\langle S-T\rangle$ : $f = \varphi_1(\omega),\ g = \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1$,

$$\ddot\varphi_1 + k^2\omega^2\varphi_1 = 0, \quad \ddot\varphi_2 + k^2\omega^2\varphi_2 = 0.$$

Повертаючись до системи (1.1), одержуємо такий розв'язок:

$$u = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{(1)}_{1/4}\left(\frac{km}{\hbar^2}x^2\right), \qquad v = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{(2)}_{1/4}\left(\frac{km}{\hbar^2}x^2\right).$$

**1.2.4.** *Випадок* $W(x) = \dfrac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b \quad (a \neq 0)$.

$\mathfrak{A}$. $\langle -P+\delta Z\rangle$ $(\delta = 0, \pm 1)$ : $\Lambda = \mathrm{e}^{\delta x_1}\varphi_1(\omega)$,

$$\mu = -ax_0x_1 + \varphi_2(\omega),\ \omega = x_0,$$

$$\dot{\varphi}_1 - 2a\delta\omega\varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 + a^2\omega^2 - \delta^2 + b = 0.$$

В цьому випадку одержуємо такий розв'язок системи (1.1):

$$\mathrm{A} = C_1 \exp\left[\delta\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}x + \frac{a}{\hbar^2}t^2\right)\right],$$

$$\theta = -\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar^2}tx - \frac{a^2}{3\hbar^3}t^3 + \frac{\delta^2 - b}{\hbar}t + C_2.$$

$\mathfrak{B}$. $\langle T + 2aG\rangle:\ f = \varphi_1(\omega),\ g = \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$

$$\ddot{\varphi}_1 - (a\omega + b)\varphi_1 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 - (a\omega + b)\varphi_2 = 0.$$

Розглядуваній підалгебрі відповідає такий розв'язок системи (1.1):

$$u = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b\right)^{1/2} \mathrm{Z}^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2i}{3a}\left(\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b\right)^{3/2}\right)\right\},$$

$$v = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b\right)^{1/2} \mathrm{Z}^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2i}{3a}\left(\frac{a\sqrt{2m}}{\hbar}x + b\right)^{3/2}\right)\right\}.$$

**1.2.5.** *Випадок* $W(x) = \dfrac{a\hbar^2}{2m}x^{-2}\ \ (a \neq 0).$

$\mathfrak{A}$. $\langle T + \lambda Z\rangle\ (\lambda = 0, \pm 1):\ f = \mathrm{e}^{\lambda x_0}\varphi_1(\omega),\ g = \mathrm{e}^{\lambda x_0}\varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$

$$\lambda\varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 - \frac{a}{\omega^2}\varphi_2 = 0, \quad \lambda\varphi_2 - \ddot{\varphi}_1 + \frac{a}{\omega^2}\varphi_1 = 0.$$

Система (1.1) в цьому випадку має розв'язок

$$u = x^{1/2}\left(C_1 + C_2 \ln\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}x\right),\ v = x^{1/2}\left(C_3 + C_4 \ln\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}x\right) \quad \left(a = -\frac{1}{4}\right);$$

$$u = C_1 x^{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}}, \quad v = C_3 x^{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} + C_4 x^{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}} \quad \left(a > -\frac{1}{4}\right).$$

$\mathfrak{B}$. $\langle D + \left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right)Z\rangle:\ f = x_1^{\alpha}\varphi_1(\omega),\ g = x_1^{\alpha}\varphi_2(\omega),\ \omega = \dfrac{x_1^2}{x_0},$

$$\begin{cases} -\omega^2\dot{\varphi}_1 + (\alpha^2 - \alpha - a)\varphi_2 + 2(2\alpha+1)\omega\dot{\varphi}_2 + 4\omega^2\ddot{\varphi}_2 = 0, \\ \omega^2\dot{\varphi}_2 + (\alpha^2 - \alpha - a)\varphi_1 + 2(2\alpha+1)\omega\dot{\varphi}_1 + 4\omega^2\ddot{\varphi}_1 = 0. \end{cases}$$

При $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ та $a = \dfrac{3}{4}$ система (1.1) має розв'язок

$$u = x^{-1/2}\left(C_1 \cos\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t} + C_2 \sin\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right),$$

$$v = x^{-1/2}\left(C_1 \sin\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t} - C_2 \cos\frac{m}{2\hbar}\frac{x^2}{t}\right).$$

**1.2.6.** *Випадок* $W(x) = \dfrac{a\hbar^2}{2m}x^{-2} + \dfrac{2mk^2}{\hbar^2}x^2 \quad (a \neq 0,\ k > 0)$.

$$\langle S + T\rangle : \ f = \varphi_1(\omega),\ g = \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$$

$$\omega^2\ddot{\varphi}_1 - (a + k^2\omega^4)\varphi_1 = 0, \quad \omega^2\ddot{\varphi}_2 - (a + k^2\omega^4)\varphi_2 = 0.$$

Відповідний розв'язок системи (1.1) для $a \geq -\dfrac{1}{4}$

$$u = \mathrm{Re}\left\{x^{1/2}\mathrm{Z}_\nu^{(1)}\left(i\frac{km}{\hbar^2}x^2\right)\right\}, \quad v = \mathrm{Re}\left\{x^{1/2}\mathrm{Z}_\nu^{(2)}\left(i\frac{km}{\hbar^2}x^2\right)\right\},$$

де $\nu = \dfrac{1}{4}\sqrt{1+4a}$.

**1.2.7.** *Випадок* $W(x) = \dfrac{a\hbar^2}{2m}x^{-2} - \dfrac{2mk^2}{\hbar^2}x^2 \quad (a \neq 0,\ k > 0)$.

$$\langle S - T\rangle : \ f = \varphi_1(\omega),\ g = \varphi_2(\omega),\ \omega = x_1,$$

$$\omega^2\ddot{\varphi}_1 - (a - k^2\omega^4)\varphi_1 = 0, \quad \omega^2\ddot{\varphi}_2 - (a - k^2\omega^4)\varphi_2 = 0.$$

Цій підалгебрі для $a \geq -\dfrac{1}{4}$ відповідає такий розв'язок системи (1.1):

$$u = x^{1/2}\mathrm{Z}_\nu^{(1)}\left(\frac{km}{\hbar^2}x^2\right), \quad v = x^{1/2}\mathrm{Z}_\nu^{(2)}\left(\frac{km}{\hbar^2}x^2\right) \quad \left(\nu = \frac{1}{4}\sqrt{1+4a}\right).$$

## 1.3. Класифікація $I$-максимальних підалгебр рангу 3 алгебри $AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$

Припускаємо, що

$$Z = u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{1.9}$$

і що базис спеціальної алгебри Галілея $AG_3(3)$ утворюють такі векторні поля:

$$\begin{aligned}
&S = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx_a\frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{3}{2}tu\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m}{2}\vec{x}^2\frac{\partial}{\partial v},\\
&D = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_a\frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -\frac{\partial}{\partial x_a},\\
&G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + mx_a\frac{\partial}{\partial v}, \quad J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad M = m\frac{\partial}{\partial v},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

де $a < b$, $a, b = 1, 2, 3$; $m$ — ненульове дійсне число; $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Векторні поля (1.10) задовольняють комутаційні співвідношення:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac};$$

$$[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b; \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b;$$

$$[P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [G_a, P_b] = \delta_{ab}M;$$

$$[D, J_{ab}] = 0, \quad [S, J_{ab}] = 0, \quad [T, J_{ab}] = 0;$$

$$[D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a;$$

$$[S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0; \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a;$$

$$[D, S] = 2S, \quad [D, T] = -2T, \quad [T, S] = D \quad (a, b, c, d = 1, 2, 3).$$

Оператор $Z$ комутує з кожним оператором з алгебри $AG_3(3)$.

Нехай $U = \langle M, P_1, P_2, P_3, G_1, G_2, G_3 \rangle$. Тоді

$$AG_3(3) = U \supsetplus (AO(3) \oplus ASL(2, \mathbb{R})).$$

Алгебра $AG_3(3)$ містить алгебри Галілея $AG_j(3)$ $(j = 0, 1, 2)$, де

$$AG_0(3) = U \niplus AO(3), \qquad AG_1(3) = U \niplus (AO(3) \oplus \langle T \rangle),$$

$$AG_2(3) = U \niplus (AO(3) \oplus \langle D, T \rangle).$$

Для редукції вільної системи Шрьодінгера з трьома просторовими змінними до систем звичайних диференціальних рівнянь потрібно скласти перелік тих $I$-максимальних підалгебр рангу 3 алгебри $L = AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$, які мають нульовий перетин з підалгеброю $\langle M, Z \rangle$. Підалгебра алгебри $L$ називається $I$-максимальною, якщо вона не міститься в жодній іншій підалгебрі алгебри $L$ з тими ж самими основними інваріантами [4].

Надалі через $\mathrm{Ad}\, L$ будемо позначати групу внутрішніх автоморфізмів алгебри $L$, а через $\pi$, $\tau$ — проектування $L$ на $AO(3)$ і $ASL(2, \mathbb{R})$ відповідно. Нехай $K$ є $I$-максимальною підалгеброю алгебри $L$. З точністю до $\mathrm{Ad}\, L$-спряженості можливі такі випадки: 1) $K$ — підалгебра алгебри $AG_0(3) \oplus \langle Z \rangle$; 2) $K$ — підалгебра алгебри $AG_1(3) \oplus \langle Z \rangle$ і $\tau(K) = \langle T \rangle$; 3) $K$ — підалгебра алгебри $AG_2(3) \oplus \langle Z \rangle$ і $D \in \tau(K)$; 4) $\tau(K) = \langle S + T \rangle$. Кожен з цих випадків розглянемо окремо.

**Теорема 1.4**. *Якщо $K$ є $I$-максимальною підалгеброю рангу 3 алгебри $AG_0(3) \oplus \langle Z \rangle$ і $K \cap \langle M, Z \rangle = 0$, то $K$ спряжена відносно $\mathrm{Ad}\, L$ з однією з таких підалгебр:*

$$F_0 = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle \niplus AO(3); \quad F_1 = \langle G_1 + \alpha Z, P_2, P_3, J_{23} \rangle, \ \text{де } \alpha = 0, 1;$$

$$F_2 = \langle G_1 + P_1 + \alpha Z, G_2 + \beta Z, P_3 + \gamma Z \rangle \ (\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0);$$

$$F_3 = \langle G_1 + \alpha Z, P_2 + Z, P_3 \rangle \ (\alpha \geq 0); \quad F_4 = \langle P_1 + Z, P_2, P_3, J_{23} \rangle.$$

**Доведення.** Нехай $\pi(K) = AO(3)$. Тоді внаслідок того, що $AO(3)$ — проста алгебра, маємо $AO(3) \subset K$ (теорема Уайтхеда (див. напр. [33], с. 32)). Звідси випливає, що алгебра $K$ містить $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ або $\langle G_1 + \alpha P_1, G_2 + \alpha P_2, G_3 + \alpha P_3 \rangle$. Використовуючи автоморфізм, що відповідає елементу $\exp \theta(S + T)$, генератори $G_1 + \alpha P_1$, $G_2 + \alpha P_2$,

$G_3 + \alpha P_3$ можна відобразити відповідно в $P_1$, $P_2$, $P_3$. Оскільки $K$ є $I$-максимальною підалгеброю рангу 3, то $K = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle \oplus AO(3)$.

Нехай $\pi(K) = \langle J_{12} \rangle$. На підставі теореми III.3.1 ([33], с. 72) алгебра $K$ містить свою проекцію на $\langle G_1, G_2, P_1, P_2 \rangle$. Якщо ця проекція є ненульовою, то з точністю до внутрішніх автоморфізмів можна вважати, що $P_1, P_2 \in K$. Дійсно, нехай $K$ містить елементи $X_1 = G_1 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, $X_2 = G_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$. Тоді з рівностей

$$[X_1, J_{12}] = G_2 + \alpha_1 P_2 - \alpha_2 P_1, \qquad [X_2, J_{12}] = -G_1 + \beta_1 P_2 - \beta_2 P_1$$

випливає, що $K$ містить $(\alpha_1 - \beta_2)P_1 + (\alpha_2 + \beta_1)P_2$, $(\beta_1 + \alpha_2)P_1 + (\beta_2 - \alpha_1)P_2$. Якщо $(\alpha_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2 \neq 0$, то $P_1, P_2 \in K$, а тому $M \in K$. Протиріччя. Припустимо, що $\alpha_1 - \beta_2 = 0$, $\alpha_2 + \beta_1 = 0$. Тоді $\beta_2 = \alpha_1$, $\beta_1 = -\alpha_2$. Маємо $X_1 = G_1 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, $X_2 = G_2 - \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2$. Але $[X_1, X_2] = (-\alpha_2 - \alpha_2)M = -2\alpha_2 M$. Оскільки $M \notin K$, то $\alpha_2 = 0$. Застосовуючи тепер автоморфізм, що відповідає елементу $\exp\theta(S + T)$, дістаємо, що $P_1, P_2 \in K$. Внаслідок $I$-максимальності $J_{12} \in K$. Підалгебра $K$ містить ще елемент $G_3 + \gamma P_3 + \delta Z$ або $P_3 + \delta Z$. У першому випадку автоморфізм, що відповідає елементу $\exp(-\gamma T)$, дозволяє вважати, що $\gamma = 0$. Застосовуючи внутрішній автоморфізм, що відповідає елементу $\exp(\pi J_{23})$, можна вважати, що $\delta \geq 0$. Якщо $\delta > 0$, то за допомогою внутрішнього автоморфізму, що відповідає елементу $\exp(\theta D)$, можна $\delta$ замінити на 1. Отже, підалгебра $K$ спряжена з однією з підалгебр:

$$\langle G_3 + \alpha Z, P_1, P_2, J_{12} \rangle, \ \langle P_3 + Z, P_1, P_2, J_{12} \rangle, \tag{1.11}$$

де $\alpha = 0, 1$. Автоморфізм, що відповідає матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3), \tag{1.12}$$

відображає підалгебри (1.11) відповідно в підалгебри

$$\langle G_1 + \alpha Z, P_2, P_3, J_{23} \rangle, \ \langle P_1 + Z, P_2, P_2, J_{23} \rangle.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\pi(K) = 0$. Оскільки $M \notin K$, то на підставі теореми III.6.1 ([33], с. 87) підалгебра $K$ спряжена з однією з підалгебр:

$$\langle G_1 + \alpha_1 P_1 + \beta_1 Z, G_2 + \alpha_2 P_2 + \beta_2 Z, G_3 + \alpha_3 P_3 + \beta_3 Z \rangle, \tag{1.13}$$

$$\langle G_1 + \alpha_1 P_1 + \beta_1 Z, G_2 + \alpha_2 P_2 + \beta_2 Z, P_3 + \beta_3 Z \rangle, \tag{1.14}$$

$$\langle G_1 + \alpha_1 P_1 + \beta_1 Z, P_2 + \beta_2 Z, P_3 + \beta_3 Z \rangle, \tag{1.15}$$

$$\langle P_1 + \beta_1 Z, P_2 + \beta_2 Z, P_3 + \beta_3 Z \rangle. \tag{1.16}$$

Розглянемо спочатку випадок підалгебри (1.13). Якщо $\alpha_i = 0$ для деякого $i$, то автоморфізм, що відповідає елементу $\exp \frac{\pi}{2}(S + T)$, відображає підалгебру (1.13) в одну з підалгебр (1.14), (1.15), (1.16). Нехай $\alpha_3 \neq 0$. За допомогою автоморфізму, що відповідає елементу $\exp(-\alpha_3^{-1} S)$, відображаємо підалгебру (1.13) в одну з підалгебр (1.14)–(1.16). Отже, випадок підалгебри (1.13) зводиться до випадків підалгебр (1.14)–(1.16).

Нехай маємо підалгебру (1.14). Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то за допомогою автоморфізму, що відповідає елементу $\exp \frac{\pi}{2}(S + T)$, і автоморфізму, що відповідає матриці (1.12), підалгебру (1.14) відображаємо на підалгебру (1.15). Нехай $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\alpha_2 \neq 0$. За допомогою автоморфізму, що відповідає елементу $\exp(\alpha_2 T)$, одержуємо, що $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 = 0$. Застосовуючи тепер автоморфізм, що відповідає елементу $\exp(\theta D)$, дістаємо при $\alpha_1 > 0$ підалгебру $\langle G_1 + P_1 + \alpha Z, G_2 + \beta Z, P_3 + \gamma Z \rangle$, де $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. У випадку підалгебри (1.15) аналогічними міркуваннями приходимо до висновку, що $\alpha_1 = 0$. Далі, якщо $\beta_2 \neq 0$, то підалгебра $K$ містить елемент $P_3 - \beta_3 \beta_2^{-1} P_2$. Автоморфізм $\exp(\theta J_{23})$ дозволяє цей елемент відобразити в $P_3$. Тому підалгебра $K$ спряжена з підалгеброю $\langle G_1 + \alpha Z, P_2 + \beta Z, P_3 \rangle$ ($\beta \neq 0$). За рахунок автоморфізму, що відповідає елементу $\exp(\pi J_{23})$, отримуємо $\beta > 0$. Далі на підалгебру діємо автоморфізмом, що відповідає елементу $\exp(\theta D)$, і одержуємо підалгебру того ж виду, де $\beta = 1$. Автоморфізм, що відповідає елементу $\exp(\pi J_{13})$, дозволяє вважати, що $\alpha \geq 0$.

Підалгебра (1.16) спряжена з підалгеброю такого ж виду, де $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Але така підалгебра не є $I$-максимальною. Теорему доведено.

**Теорема 1.5.** *Нехай $K$ є $I$-максимальною підалгеброю рангу 3 алгебри $AG_1(3) \oplus \langle Z \rangle$ з ненульовою проекцією на $\langle T \rangle$ і нульовим перетином з підалгеброю $\langle M, Z \rangle$. Тоді $K$ спряжена відносно $\mathrm{Ad}\, L$ з однією з таких підалгебр:*

$$F_5 = \langle P_2, P_3, T + \frac{\alpha}{m} M + \beta Z, J_{23} \rangle,$$

$$\text{де } \alpha = \pm m \text{ або } \alpha = 0 \text{ і } \beta \in \{0, -1, 1\};$$

$$F_6 = \langle P_2, P_3, T + G_1 + \alpha Z, J_{23} \rangle;$$

$$F_7 = \langle P_3 + \alpha Z, J_{12} + \frac{\beta}{m} M + \gamma Z, T + \frac{\delta}{m} M + \lambda Z \rangle;$$

$$F_8 = AO(3) \oplus \langle T + \frac{\alpha}{m} M + \beta Z \rangle;$$

$$F_9 = \langle T + G_1 + \alpha Z, P_2 + \beta Z, P_3 \rangle \ (\beta > 0);$$

$$F_{10} = \langle T + \frac{\alpha}{m} M + \beta Z, P_2 + Z, P_3 \rangle.$$

**Доведення.** Якщо $\pi(K) = AO(3)$, то $AO(3) \subset K$. Звідси випливає, що $K$ містить $T + \alpha M + \beta Z$, а тому $K = AO(3) \oplus \langle T + \alpha M + \beta Z \rangle$. Нехай $\pi(K) = \langle J_{12} \rangle$ і $K \supset [T, K]$. Оскільки $M \notin K$, то звідси одержуємо, що проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ є нульовою. Нехай проекція $K$ на $\langle P_1, P_2 \rangle$ відмінна від нуля. Тоді на підставі теореми III.3.1 ([33], с. 72) $P_1, P_2 \in K$, а тому $J_{12} \in K$. Маємо підалгебру $K = \langle P_1, P_2, J_{12}, T + \alpha M + \beta Z \rangle$, яка є спряженою з підалгеброю $\langle P_2, P_3, T + \alpha M + \beta Z, J_{23} \rangle$. Якщо проекція $K$ на $\langle P_1, P_2 \rangle$ є нульовою, то $K = \langle P_3 + \alpha Z, J_{12} + \beta M + \gamma Z, T + \delta M + \lambda Z \rangle$.

Тепер розглянемо випадок, коли $K$ не містить $[T, K]$. Згідно з лемою III.2.1 і теоремою III.3.1 ([33], с. 66, 72 відповідно), до $K$ належить $T + G_3 + \alpha Z + \beta J_{12}$. Інші базисні елементи можна вибрати так, щоб вони належали до $\langle P_1, P_2, J_{12}, M, Z \rangle$. Оскільки ранг $K$ дорівнює 3, то необхідно проекція $K$ на $\langle P_1, P_2 \rangle$ є ненульовою, і вона міститься в $K$, а тому $P_1, P_2 \in K$, звідки $J_{12} \in K$. Одержана підалгебра спряжена з підалгеброю $\langle P_2, P_3, T + G_1 + \alpha Z, J_{23} \rangle$.

Нехай $\pi(K) = 0$. Якщо проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$ є ненульовою, то $K$ містить елемент $T + G_1 + \alpha Z$. Інші базисні елементи можна вибрати у вигляді $P_2 + \beta Z$, $P_3 + \gamma Z$. Тому підалгебра $K$ спряжена з підалгеброю $\langle T + G_1 + \alpha Z, P_2 + \beta Z, P_3\rangle$ $(\beta > 0)$. Якщо проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$ є нульовою, то $K$ спряжена з $\langle T + \alpha M + \beta Z, P_2 + Z, P_3\rangle$. Теорему доведено.

**Теорема 1.6.** *Якщо $K$ є $I$-максимальною підалгеброю рангу 3 алгебри $L$ і $K \subset AG_2(3) \oplus \langle Z\rangle$, причому проекція $K$ на $\langle D\rangle$ є ненульовою і $K \cap \langle M, Z\rangle = 0$, то $K$ є $\mathrm{Ad}\, L$-спряженою з однією з таких підалгебр:*

$$F_{11} = \langle G_1, P_2, D + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z\rangle; \quad F_{12} = \langle P_3, D + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z, T\rangle;$$

$$F_{13} = \langle P_2, P_3, J_{23}, D + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z\rangle;$$

$$F_{14} = \langle J_{12} + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z, D + \frac{\gamma}{m}M + \delta Z, T\rangle,$$

*де* $\alpha > 0$ *або* $\alpha = 0,\ \beta \geq 0;$

$$F_{15} = \langle P_3, J_{12} + \alpha D + \frac{\beta}{m}M + \gamma Z, T\rangle \ (\alpha > 0);$$

$$F_{16} = \langle P_3, J_{12} + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z, D + \frac{\gamma}{m}M + \delta Z\rangle \ (\alpha \geq 0);$$

$$F_{17} = AO(3) \oplus \langle D + \frac{\alpha}{m}M + \beta Z\rangle.$$

**Доведення.** На підставі леми III.2.1 і теореми III.3.1 ([33], с. 66, 72 відповідно) маємо $[D, K] \subset K$. Звідси випливає, що $K$ містить свої проекції на $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$ і $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, а також на $\langle T\rangle$. Якщо $\pi(K) = AO(3)$, то $AO(3) \subset K$, а тому $K = AO(3) \oplus \langle D + \alpha M + \beta Z\rangle$. Нехай $\pi(K) = \langle J_{12}\rangle$. Якщо $\tau(K) = \langle D, T\rangle$, то проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$ є нульовою. Якби проекція $K$ на $\langle P_1, P_2\rangle$ була ненульовою, то $K$ містила б елементи $P_1$, $P_2$, $J_{12}$, $T$, $D + X$, де $X \in \langle P_3, M, Z\rangle$. В цьому випадку ранг $K$ був би більший, ніж три. Отже, проекція $K$ на $\langle P_1, P_2\rangle$ є нульовою, а тому $K$ спряжена з підалгеброю $\langle J_{12} + \alpha M + \beta Z, D + \gamma M + \delta Z, T\rangle$ або з підалгеброю $\langle P_3, J_{12} + \alpha D + \beta M + \gamma Z, T\rangle$ $(\alpha > 0)$. Припустимо, що $\pi(K) = \langle J_{12}\rangle$

і $\tau(K) = \langle D \rangle$. В цьому випадку допустимо використання автоморфізму, що відповідає елементу $\exp\frac{\pi}{2}(S+T)$. Якщо проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, P_1, P_2 \rangle$ (як векторний простір) є ненульовою, то внаслідок теореми III.3.1 ([33], с. 72) можна припускати, що $P_1, P_2 \in K$. Підалгебра $K$ спряжена з підалгеброю $\langle P_2, P_3, J_{23}, D+\alpha M+\beta Z \rangle$. Якщо проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, P_1, P_2 \rangle$ є нульовою, то $K = \langle P_3, J_{12}+\alpha M+\beta Z, D+\gamma M+\delta Z \rangle$ $(\alpha \geq 0)$.

Залишається проаналізувати випадок $\pi(K) = 0$. Підалгебра $K$ (з точністю до внутрішніх автоморфізмів алгебри $L$) містить на підставі теореми III.3.1 ([33], с. 72) елемент $D+\alpha M+\beta Z$. Якщо $\tau(K) = \langle D, T \rangle$, то проекція $K$ на $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ є нульовою, а проекція $K$ на $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ є одновимірною. Тому $K$ спряжена з підалгеброю $\langle P_3, D+\alpha M+\beta Z, T \rangle$. Якщо ж $\tau(K) = \langle D \rangle$, то проекції на $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ і $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ є одновимірними, а тому $K$ спряжена з підалгеброю $\langle G_1, P_2, D+\alpha M+\beta Z \rangle$. Теорему доведено.

**Теорема 1.7.** *Якщо I-максимальна підалгебра $K$ рангу 3 алгебри $L$ задовольняє умови: 1) $\tau(K) = \langle S+T \rangle$, 2) $K \cap \langle M, Z \rangle = 0$, то $K$ спряжена відносно* $\mathrm{Ad}\,L$ *з однією з підалгебр:*

$$F_{18} = AO(3) \oplus \langle S+T+\frac{\alpha}{m}M+\beta Z \rangle;$$

$$F_{19} = \langle S+T+2J_{12}+\frac{\alpha}{m}M+\beta Z, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3 \rangle.$$

**Доведення.** Якщо $\pi(K) = AO(3)$, то $K = AO(3) \oplus \langle S+T+\alpha M+\beta Z \rangle$. Нехай $\pi(K) = \langle J_{12} \rangle$. Підалгебра $K$ містить елемент $X = J_{12} + \lambda(S+T) + Y$, де $\lambda \geq 0$, а $Y$ — елемент підалгебри, породженої $M$, $P_a$, $G_a$, $Z$ $(a = 1,2,3)$. Якщо $\lambda \neq 1$, то внаслідок теореми III.3.1 ([33], с. 72) про розщеплюваність всіх розширень $Y = \gamma M + \delta Z$. На підставі твердження III.5.2 ([33], с. 82) при $\lambda \neq \frac{1}{2}$ підалгебра $K$ містить один з підпросторів $\langle G_3, P_3 \rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1 \rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1 \rangle$. Але тоді $M \in K$, що неможливо. При $\lambda = \frac{1}{2}$ одержуємо підалгебру

$$\langle S+T+2J_{12}+\alpha M+\beta Z, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3 \rangle.$$

Якщо $\lambda = 1$, то $J_{12} + \lambda(S+T)$ анулює $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1\rangle$ і діє незвідно в просторах $\langle G_1 - P_2, G_2 + P_1\rangle$, $\langle G_3, P_3\rangle$. Згідно з твердженням III.5.2 ([33], с. 82) $K$ містить свої проекції на $\langle G_1 - P_2, G_2 + P_1\rangle$ і $\langle G_3, P_3\rangle$. Якщо одна з цих проекцій є ненульовою, то $M \in K$, а це неможливо. Внаслідок цього $K \subset \langle J_{12}+S+T, M, Z, G_1+P_2\rangle$ або $K \subset \langle J_{12}+S+T, M, Z, G_2-P_1\rangle$. Але тоді ранг $K$ є меншим, ніж 3.

Нехай $\pi(K) = 0$. Тоді $S+T+\alpha M+\beta Z \in K$ внаслідок теореми III.3.1 ([33], с. 72) про розщеплюваність всіх розширень $\langle S + T\rangle$ в $A\tilde{G}_3(3)$. Незвідні підпростори простору $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, інваріантні відносно $\langle S + T\rangle$, вичерпуються з точністю до внутрішніх автоморфізмів такими підпросторами:

$$0,\ \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1\rangle,\ \langle G_1, P_1\rangle.$$

Внаслідок цього $M \in K$. Протиріччя. Теорему доведено.

## 1.4. Редукція вільної системи Шрьодінгера з трьома просторовими змінними до систем звичайних диференціальних рівнянь

Вільну систему Шрьодінгера з трьома просторовими змінними $x_1$, $x_2$, $x_3$ в тригонометричній формі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{m}\nabla u \nabla v + \dfrac{1}{2m} u \triangle v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}(\nabla v)^2 - \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\triangle u}{u} = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

де $\hbar$ — стала Планка, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, ми одержуємо з тривимірного рівняння Шрьодінгера

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\triangle\psi$$

за допомогою заміни $\psi = ue^{iv/\hbar}$ з наступним прирівнюванням дійсної та уявної частин.

**Теорема 1.8.** *Максимальна алгебра симетрій в сенсі Лі системи (1.17) породжується векторними полями (1.9), (1.10) та нескінченновимірною алгеброю*

$$X = \rho\left(\cos\frac{\theta - v}{\hbar}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hbar}{u}\sin\frac{\theta - v}{\hbar}\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

*де функції $u = \rho(t, \vec{x})$, $v = \theta(t, \vec{x})$ є довільним розв'язком системи (1.17), при цьому $\rho(t, \vec{x}) \geq 0$.*

Теорему 1.8 можна довести методом Лі або одержати з результату [78] на підставі зв'язку підходу Лі з підходом Міллера (див. [23], с. 233, 396) до теорії лінійних симетрій.

Векторні поля (1.9) і (1.10) породжують алгебру Лі $L = AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$. Класифікація $I$-максимальних підалгебр рангу 3 алгебри $L$ виконана в попередньому параграфі. Проведемо редукцію системи (1.17) по підалгебрах алгебри $AG_3(3) \oplus \langle Z \rangle$. Для кожної з підалгебр $F_j$ ($j = 1, \ldots, 19$) вкажемо відповідний анзац та редуковану систему. В деяких випадках подамо в явному вигляді розв'язки системи (1.17), які є інваріантними відносно $F_j$.

**1.4.1.** $F_1$ : $u = \exp\left(\dfrac{\alpha x_1}{t}\right)\varphi(\omega)$, $v = \dfrac{m x_1^2}{2t} + \psi(\omega)$, $\omega = t$,

$$2\omega\dot{\varphi} + \varphi = 0, \quad \dot{\psi} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m\omega^2} = 0.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (1.17) має вигляд

$$u = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{\alpha x_1}{t}\right), \quad v = \frac{m x_1^2}{2t} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2mt} + C_2.$$

**1.4.2.** $F_2$ : $u = \exp\left(\dfrac{\alpha}{t-1}x_1 + \beta\dfrac{x_2}{t} - \gamma x_3\right)\varphi(\omega)$,

$$v = \frac{m}{2(t-1)}x_1^2 + \frac{m}{2t}x_2^2 + \psi(\omega),\ \omega = t,$$

$$2\omega(\omega - 1)\dot{\varphi} + (2\omega - 1)\varphi = 0, \quad \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\alpha^2}{(\omega-1)^2} + \frac{\beta^2}{\omega^2} + \gamma^2\right) = 0.$$

В цьому випадку ми отримуємо такий інваріантний розв'язок системи (1.17):

$$u = C_1|t(t-1)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha x_1}{t-1} + \frac{\beta x_2}{t} - \gamma x_3\right),$$

$$v = \frac{mx_1^2}{2(t-1)} + \frac{mx_2^2}{2t} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\alpha^2}{t-1} - \frac{\beta^2}{t} + \gamma^2 t\right) + C_2.$$

**1.4.3.** $F_3: \ u = \exp\left(\frac{\alpha x_1}{t} - x_2\right)\varphi(\omega), \ v = \frac{mx_1^2}{2t} + \psi(\omega), \ \omega = t,$

$$2\omega\dot{\varphi} + \varphi = 0, \quad \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} + 1\right) = 0.$$

Відповідний інваріантний розв'язок має вигляд:

$$u = \frac{C_1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{\alpha x_1}{t} - x_2\right), \qquad v = \frac{mx_1^2}{2t} + \frac{\hbar^2(t^2 - \alpha^2)}{2mt} + C_2.$$

**1.4.4.** $F_4: \ u = \exp(-x_1)\varphi(\omega), \ v = \psi(\omega), \ \omega = t,$

$$\dot{\varphi} = 0, \qquad \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} = 0.$$

Відповідним інваріантним розв'язком є

$$u = C_1 \exp(-x_1), \qquad v = \frac{\hbar^2}{2m}t + C_2.$$

**1.4.5.** $F_5: \ u = \exp(\beta t)\varphi(\omega), \ v = \alpha t + \psi(\omega), \ \omega = x_1.$

Редукована система має вигляд

$$2\beta m\varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} + \varphi\ddot{\psi} = 0, \quad 2\alpha m\varphi + \varphi\dot{\psi}^2 - \hbar^2\ddot{\varphi} = 0.$$

**1.4.6.** $F_6: \ u = \exp(\alpha t)\varphi(\omega), \ v = mtx_1 - \frac{m}{3}t^3 + \psi(\omega), \ \omega = t^2 - 2x_1.$

Редукована система:

$$\alpha m\varphi + 4\dot{\varphi}\dot{\psi} + 2\varphi\ddot{\psi} = 0, \quad -m^2\omega\varphi + 4\varphi\dot{\psi}^2 - 4\hbar^2\ddot{\varphi} = 0.$$

**1.4.7.** $F_7: \ u = \exp\left(\lambda t - \alpha x_3 - \gamma \arctan\dfrac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\omega),$

$$v = -\beta \arctan\frac{x_1}{x_2} + \delta t + \psi(\omega), \ \omega = x_1^2 + x_2^2.$$

Відповідна редукована система має вигляд

$$\begin{cases} (\lambda m + \beta\gamma)\varphi + 4\omega\dot{\varphi}\dot{\psi} + 2\varphi\dot{\psi} + 2\omega\varphi\ddot{\psi} = 0, \\ (\beta^2 - \hbar^2(\alpha^2\omega + \gamma^2)) + 2\delta m\omega)\varphi - 4\hbar^2\omega\dot{\varphi} - 4\hbar^2\omega^2\ddot{\varphi} + 4\omega^2\varphi\dot{\psi}^2 = 0. \end{cases}$$

**1.4.8.** $F_8: \ u = \exp(\beta t)\varphi(\omega), \ v = \alpha t + \psi(\omega), \ \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$

Редукована система:

$$\beta m\varphi + 4\omega\dot{\varphi}\dot{\psi} + 3\varphi\dot{\psi} + 2\omega\varphi\ddot{\psi} = 0, \quad \alpha m\varphi + 2\omega\varphi\dot{\psi}^2 - \hbar^2(3\dot{\varphi} + 2\omega\ddot{\varphi}) = 0.$$

**1.4.9.** $F_9: \ u = \exp(\alpha t - \beta x_2)\varphi(\omega),$

$$v = m\left(tx_1 - \frac{t^3}{3}\right) + \psi(\omega), \ \omega = t^2 - 2x_1.$$

Відповідною редукованою системою є

$$\alpha m\varphi + 4\dot{\varphi}\dot{\psi} + 2\varphi\ddot{\psi} = 0, \quad -(m^2\omega + \hbar^2\beta^2)\varphi + 4\varphi\dot{\psi}^2 - 4\hbar^2\ddot{\varphi} = 0.$$

**1.4.10.** $F_{10}: u = \exp(\beta t - x_2)\varphi(\omega), \ v = \alpha t + \psi(\omega), \ \omega = x_1.$

Редукована система має вигляд

$$2\beta m\varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} + \varphi\ddot{\psi} = 0, \quad (2\alpha m - \hbar^2)\varphi + \varphi\dot{\psi}^2 - \hbar^2\ddot{\varphi} = 0.$$

**1.4.11.** $F_{11}: \ u = x_3^{\beta - \frac{3}{2}}\varphi(\omega), \ v = \dfrac{m}{2t}x_1^2 + \alpha \ln x_3 + \psi(\omega), \ \omega = \dfrac{x_3^2}{t},$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{2\alpha}{m} - \omega\right]\dot{\varphi} + \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{m}(\beta - 1)\dfrac{1}{\omega}\right]\varphi + \dfrac{2\beta}{m}\varphi\dot{\psi} + \dfrac{4}{m}\omega\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dfrac{2}{m}\omega\varphi\ddot{\psi} = 0, \\ \left[\dfrac{2\alpha}{m} - \omega\right]\varphi\dot{\psi} + \dfrac{2}{m}\omega\varphi\dot{\psi}^2 + \dfrac{\varphi}{2m\omega}\left[\alpha^2 - \hbar^2\left(\beta - \dfrac{1}{2}\right)\left(\beta - \dfrac{3}{2}\right)\right] - \\ -\dfrac{2\hbar^2\beta}{m}\dot{\varphi} - \dfrac{2\hbar^2}{m}\omega\ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

**1.4.12.** $F_{12}:\ u = x_2^{\beta-\frac{1}{2}}\varphi(\omega),\ v = \alpha\ln x_1 + \psi(\omega),\ \omega = \dfrac{x_1}{x_2},$

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\omega}\dot\varphi + 2(1+\omega^2)\dot\varphi\dot\psi + [1+(3-2\beta)\omega]\varphi\dot\psi - \dfrac{\alpha}{\omega^2}\varphi + \omega^2\varphi\ddot\psi = 0, \\ \left[\dfrac{\alpha^2}{\omega^2} - \hbar^2\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)\left(\beta-\dfrac{3}{2}\right)\right]\varphi + (1+\omega^2)\varphi\dot\psi^2 - \hbar^2(1+\omega^2)\ddot\varphi + \\ +\dfrac{2\alpha}{\omega}\varphi\dot\psi + \hbar^2(2\beta-3)\omega\dot\varphi = 0. \end{cases}$$

**1.4.13.** $F_{13}:\ u = x_1^{\beta-\frac{1}{2}}\varphi(\omega),\ v = \alpha\ln x_1 + \psi(\omega),\ \omega = \dfrac{x_1^2}{t},$

$$\begin{cases} -\omega\dot\varphi + \dfrac{1}{m}\left\{\alpha\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\varphi}{\omega} + 2\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)\varphi\dot\psi + 2\alpha\dot\varphi + 4\omega\dot\varphi\dot\psi\right\} + \\ +\dfrac{1}{2m}\varphi\left\{-\dfrac{\alpha}{\omega} + 4\omega\ddot\psi + 2\dot\psi\right\} = 0, \\ -\omega\dot\psi + \dfrac{1}{2m}\left\{\dfrac{\alpha^2}{\omega} + 4\alpha\dot\psi + 4\omega\dot\psi^2\right\} - \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{1}{\varphi}\left\{\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)\left(\beta-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{\varphi}{\omega} + \right. \\ \left. +4\beta\dot\varphi + 4\omega\ddot\varphi\right\} = 0. \end{cases}$$

**1.4.14.** $F_{14}:\ u = x_3^{\delta-\frac{1}{2}}\exp\left(-\beta\arctan\dfrac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\omega),$

$$v = -\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2} + \gamma\ln x_3 + \psi(\omega),\ \omega = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\omega}\varphi + 4\omega\dot\varphi\dot\psi + \left(\delta-\dfrac{1}{2}\right)\gamma\varphi - (2\delta-1)\omega\varphi\dot\psi - 2\gamma\omega\dot\varphi + 4\omega^2\dot\varphi\dot\psi + \\ +\dfrac{1}{2}\varphi(4\dot\psi + 4\omega\ddot\psi - \gamma + 4\omega^2\ddot\psi + 6\omega\dot\psi) = 0, \\ \dfrac{\alpha^2}{\omega}\varphi + 4\omega\varphi\dot\psi^2 + \gamma^2\varphi - 4\gamma\omega\varphi\dot\psi + 4\omega^2\varphi\dot\psi^2 - \hbar^2\left[\dfrac{\beta^2}{\omega}\varphi + 4\omega\ddot\varphi + \right. \\ \left. +4\dot\varphi + \left(\delta-\dfrac{1}{2}\right)\left(\delta-\dfrac{3}{2}\right)\varphi - (2\delta-1)\omega\dot\varphi - (2\delta-7)\omega\dot\varphi + 4\omega^2\ddot\varphi\right] = 0. \end{cases}$$

**1.4.15.** $F_{15}:\ u=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{2\gamma-3\alpha}{4\alpha}}\varphi(\omega),\ v=-\beta\arctan\dfrac{x_1}{x_2}+\psi(\omega),$

$$\omega=\ln(x_1^2+x_2^2)+2\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2},$$

$$\begin{cases} -\alpha\beta\dot\varphi+2\delta\varphi\dot\psi+2(1+\alpha^2)\dot\varphi\dot\psi+(1+\alpha^2)\varphi\ddot\psi=0,\\ \beta^2\varphi+4(1+\alpha^2)\varphi\dot\psi^2-4\alpha\beta\varphi\dot\psi-4\hbar^2\left\{\delta^2\varphi+2\delta\dot\varphi+(1+\alpha^2)\ddot\varphi\right\}=0,\end{cases}$$

де $\delta=\dfrac{2\gamma-3\alpha}{4\alpha}$.

**1.4.16.** $F_{16}:\ u=t^{\frac{2\delta-3}{4}}\exp\left(-\beta\arctan\dfrac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\omega),$

$$v=-\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}+\frac{\gamma}{2}\ln t+\psi(\omega),\ \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{t},$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2\delta-3}{4}+\dfrac{\alpha\beta}{m\omega}\right)\varphi-\omega\dot\varphi+\dfrac{4}{m}\omega\dot\varphi\dot\psi+\dfrac{2}{m}\varphi(\dot\psi+\omega\ddot\psi)=0,\\ \gamma\varphi-2\omega\varphi\dot\psi+\dfrac{\alpha^2}{m\omega}\varphi+\dfrac{4}{m}\omega\varphi\dot\psi^2-\dfrac{\hbar^2}{m}\left[\dfrac{\beta^2}{\omega}\varphi+4\dot\varphi+4\omega\ddot\varphi\right]=0.\end{cases}$$

**1.4.17.** $F_{17}:\ u=t^{\frac{2\beta-1}{4}}\varphi(\omega),\ v=\dfrac{\alpha}{2}\ln t+\psi(\omega),\ \omega=\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t},$

$$\begin{cases} \dfrac{2\beta-1}{4}\varphi-\omega\dot\varphi+\dfrac{4}{m}\omega\dot\varphi\dot\psi+\dfrac{1}{m}\varphi(3\dot\psi+2\omega\ddot\psi)=0,\\ \dfrac{\alpha}{2}\varphi-\omega\varphi\dot\psi+\dfrac{2}{m}\omega\varphi\dot\psi^2-\dfrac{\hbar^2}{m}(3\dot\varphi+2\omega\ddot\varphi)=0.\end{cases}$$

**1.4.18.** $F_{18}:\ u=(t^2+1)^{-\frac{3}{4}}\exp(\beta\arctan t)\varphi(\omega),$

$$v=\frac{m}{2}\frac{t}{t^2+1}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\alpha\arctan t+\psi(\omega),$$

$$\omega=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t^2+1},$$

$$\begin{cases} \beta\varphi + \dfrac{4}{m}\omega\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dfrac{3}{m}\varphi\dot{\psi} + \dfrac{2}{m}\omega\varphi\ddot{\psi} = 0, \\ \dfrac{m}{2}\omega\varphi + \alpha\varphi + \dfrac{2}{m}\omega\varphi\dot{\psi}^2 - \dfrac{\hbar^2}{m}[3\dot{\varphi} + 2\omega\ddot{\varphi}] = 0. \end{cases}$$

**1.4.19.** $F_{19}: \ u = (1+t^2)^{-\frac{3}{4}}\exp(\beta\arctan t)\varphi(\omega),$

$$v = \alpha\arctan t + \frac{m}{2(1+t^2)^3}\Big\{[2x_1x_2 - 8x_1 - 2\sqrt{2}x_1x_3] +$$

$$+ [5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_2 - 4\sqrt{2}x_2x_3]t + [4x_1x_2 - 8x_1]t^2 +$$

$$+ [14x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_2 - 4\sqrt{2}x_2x_3]t^3 +$$

$$+ [18x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3]t^4 + [x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2]t^5\Big\} + \psi(\omega),$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}tx_1 + \sqrt{2}(t^2-1)x_2 + (1+t^2)x_3}{\sqrt{2}(1+t^2)^{3/2}},$$

$$\begin{cases} \beta\varphi + \dfrac{3}{2m}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dfrac{3}{4m}\varphi\ddot{\psi} = 0, \\ (4\alpha m + 12m^2\omega^2 + 3\dot{\psi}^2)\varphi - 3\hbar^2\ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Нехай $\beta = 0$, $\psi = C$. Тоді редукована система перетворюється в рівняння

$$(4\alpha m + 12m^2\omega^2)\varphi - 3\hbar^2\ddot{\varphi} = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} - (\gamma + \delta^2\omega^2)\varphi = 0, \tag{1.18}$$

де $\gamma = \dfrac{4\alpha m}{3\hbar^2}$, $\delta = \dfrac{2m}{\hbar}$.

Загальним розв'язком рівняння (1.18) є функція

$$\varphi = \omega^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right) + C_2 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},-\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right)\right],$$

де $M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+m-k, 2m+1, x\right)$, ${}_1F_1(a,b,x)$ — вироджена гіпергеометрична функція або функція Похгаммера.

Отже, редукована система має розв'язок

$$\varphi = \omega^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right) + C_2 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},-\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right)\right],\ \psi = C.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (1.17)

$$u = (1+t^2)^{-\frac{3}{4}}\exp(\beta\arctan t)\omega^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[C_1 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right) + C_2 M_{-\frac{\alpha}{6\hbar},-\frac{1}{4}}\left(\frac{2m}{\hbar}\omega^2\right)\right],$$
$$v = \alpha\arctan t + \frac{m}{2(1+t^2)^3}\Big\{[2x_1x_2 - 8x_1 - 2\sqrt{2}x_1x_3] +$$
$$+[5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_2 - 4\sqrt{2}x_2x_3]t + [4x_1x_2 - 8x_1]t^2 +$$
$$+[14x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_2 - 4\sqrt{2}x_2x_3]t^3 + [18x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3]t^4 +$$
$$+[x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2]t^5\Big\} + C,$$

де $\omega = \dfrac{2\sqrt{2}tx_1 + \sqrt{2}(t^2-1)x_2 + (1+t^2)x_3}{\sqrt{2}(1+t^2)^{3/2}}$.

Зокрема, для $\alpha = \dfrac{3\hbar}{2}$ редукована система має розв'язок [17]

$$\varphi = \mathrm{e}^{\frac{\delta\omega^2}{2}}\left[C_1 + C_2\int \mathrm{e}^{-\delta\omega^2}\,d\omega\right], \quad \psi = C,$$

якому відповідає такий розв'язок системи (1.17):

$$u = (1+t^2)^{-\frac{3}{4}}\exp(\beta\arctan t)\,\mathrm{e}^{\frac{\delta\omega^2}{2}}\left[C_1 + C_2\int \mathrm{e}^{-\delta\omega^2}\,d\omega\right],$$
$$v = \alpha\arctan t + \frac{m}{2(1+t^2)^3}\Big\{[2x_1x_2 - 8x_1 - 2\sqrt{2}x_1x_3] +$$
$$+[5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_2 - 4\sqrt{2}x_2x_3]t + [4x_1x_2 - 8x_1]t^2 +$$

$$+[14x_1^2+6x_2^2+2x_3^2-8x_2-4\sqrt{2}x_2x_3]t^3+[18x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3]t^4+$$

$$+[x_1^2+9x_2^2+x_3^2]t^5\big\}+C,$$

де $\omega=\dfrac{2\sqrt{2}tx_1+\sqrt{2}(t^2-1)x_2+(1+t^2)x_3}{\sqrt{2}(1+t^2)^{3/2}}$.

## 1.5. Симетрійна редукція як метод розмноження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь. Розмноження розв'язків одновимірної системи Шрьодінгера з потенціалом

Нехай $S$ — система лінійних диференціальних рівнянь з $n$ незалежними змінними $x_1,\ldots,x_n$ і $m$ шуканими функціями $u_1,\ldots,u_m$. Кожен лінійний оператор симетрії [38]

$$Y=\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+B(x),\quad x=(x_1,\ldots,x_n)$$

системи $S$ переводить будь-який її розв'язок в розв'язок цієї ж системи (по індексах, що повторюються, проводиться сумування).

В цьому параграфі метод редукції [45] буде використано для відтворення розв'язку системи $S$ по його образах відносно операторів алгебри симетрій розглядуваної системи. За допомогою цього підходу знайдено нові точні розв'язки лінійного рівняння Шрьодінгера з потенціалом.

Надалі, говорячи про алгебру симетрій системи $S$, ми маємо на увазі алгебру симетрій в сенсі Лі [21, 38, 45]. Припустимо, що для $S$ існує нетривіальна алгебра симетрій. Нехай вона породжується скінченновимірною алгеброю Лі $K$ операторів виду

$$\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+b_{kq}(x)u_q\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{1.19}$$

і операторами

$$X=f_j(x)\frac{\partial}{\partial u_j},$$

де $u = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ є довільним розв'язком системи $S$. Для проведення симетрійної редукції нам потрібні тільки такі підалгебри Лі алгебри $K$, які не містять операторів виду (1.19) з умовою $\xi_i(x) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Нехай $L$ — одна з цих підалгебр і нехай $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ — її базис. Припустимо, що

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, s). \tag{1.20}$$

**Означення.** *Слідом* розв'язку $(f_1(x), \dots, f_m(x))$ на операторі $Y_\alpha$ будемо називати такий розв'язок $(f_1^\alpha(x), \dots, f_m^\alpha(x))$ системи $S$, що

$$\left[Y_\alpha, f_j(x)\frac{\partial}{\partial u_j}\right] = f_j^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Якщо

$$Y_\alpha = \xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b^\alpha_{kq}(x) u_q \frac{\partial}{\partial u_k},$$

то

$$f_j^\alpha = \xi_i^\alpha \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - b^\alpha_{jq} f_q. \tag{1.21}$$

Слід $(f_1^\alpha(x), \dots, f_m^\alpha(x))$ є, очевидно, образом розв'язку $(f_1(x), \dots, f_m(x))$ відносно оператора

$$\xi_i^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - B^\alpha(x),$$

де

$$B^\alpha(x) = \left(b^\alpha_{kq}(x)\right).$$

**Твердження 1.1.** *Послідовність розв'язків* $(f_{1\alpha}, \dots, f_{m\alpha})$ $(\alpha = 1, \dots, s)$ *системи* $S$ *є послідовністю слідів деякого розв'язку системи* $S$ *на операторах* $Y_1, \dots, Y_s$ *відповідно алгебри* $L$ *тільки тоді, коли*

$$Y_\alpha(f_{j\beta}) - Y_\beta(f_{j\alpha}) = C^\gamma_{\alpha\beta} f_{j\gamma} \quad (j = 1, \dots, m;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, s).$$

Справедливість твердження 1.1 випливає з комутаційних співвідношень (1.20).

**Твердження 1.2.** *Розв'язок системи $S$ є $L$-інваріантним тоді і тільки тоді, коли його сліди на базисних елементах цієї алгебри є нульовими.*

**Твердження 1.3.** *Розв'язки $u = f(x)$ і $u = f'(x)$ системи $S$ мають однакові сліди на одних і тих же базисних елементах алгебри $L$ тоді і тільки тоді, коли розв'язок $u = f(x) - f'(x)$ є $L$-інваріантним.*

На підставі твердження 1.3 розв'язок відтворюється за своїми слідами на операторах алгебри $L$ не однозначно, а з точністю до доданків, що є $L$-інваріантними розв'язками (будемо говорити: з точністю до $L$-інваріантних розв'язків).

**Теорема 1.9.** *Для того, щоб розв'язок $(f_1, \ldots, f_m)$ системи $S$ мав слід $(f_{1\alpha}, \ldots, f_{m\alpha})$ на операторі $Y_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$ алгебри $L$ необхідно і достатньо, щоб $(f_1, \ldots, f_m)$ був $\tilde{L}$-інваріантним розв'язком, де $\tilde{L}$ — алгебра Лі з базисом*

$$\tilde{Y}_\alpha = Y_\alpha + f_{j\alpha}\frac{\partial}{\partial u_j} \quad (\alpha = 1, \ldots, s).$$

**Доведення.** Нехай

$$u_j = f_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.22}$$

є $\tilde{L}$-інваріантним розв'язком системи $S$. Тоді

$$\tilde{Y}_\alpha(u_j - f_j)\Big|_{(1.22)} = b^\alpha_{jq}u_q + f_{j\alpha} - \xi^\alpha_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_{(1.22)} = b^\alpha_{jq}f_q + f_{j\alpha} - \xi^\alpha_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0,$$

звідки випливає, що

$$f_{j\alpha} = \xi^\alpha_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - b^\alpha_{jq}f_q \overset{(1.21)}{=} f^\alpha_j.$$

Це означає, що розв'язок $(f_{1\alpha}, \ldots, f_{m\alpha})$ є слідом розв'язку $(f_1, \ldots, f_m)$ на операторі $Y_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$. Аналогічно доводиться й обернене твердження теореми.

**Наслідок 1.1.** *$\tilde{L}$-інваріантні розв'язки системи $S$ і тільки вони мають ту властивість, що їх слід на $Y_\alpha$ збігається з $(f_{1\alpha}, \ldots, f_{m\alpha})$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$.*

**Розмноження розв'язків рівняння Шрьодінгера.** Як встановлено в [56], одновимірне рівняння Шрьодінгера з потенціалом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \tag{1.23}$$

має нетривіальну алгебру симетрій тоді і тільки тоді, коли $V(x)$ збігається з однією з таких функцій:

$$ax + b, \quad \frac{c}{x^2} + k^2x^2, \quad \frac{c}{x^2} - k^2x^2, \tag{1.24}$$

$a$, $b$, $c$, $k$ — дійсні числа, причому $k \geq 0$, $a \neq 0$ або $a = b = 0$.

Домовимося розв'язком рівняння (1.23) називати пару дійсних функцій $f(t,x)$, $g(t,x)$, пов'язаних з хвильовою функцією $\psi(t,x)$ формулою $\psi(t,x) = f(t,x) + i\,g(t,x)$.

Рівняння (1.23) рівносильне системі Шрьодінгера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - gV(x) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fV(x) = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Використовуючи доведену теорему та наслідок з неї, знайдемо деякі розв'язки системи (1.25) для потенціалів (1.24).

**1.5.1.** Випадок $V(x) = 0$. При цій умові система (1.25) є інваріантною відносно операторів

$$D = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = f\frac{\partial}{\partial f} + g\frac{\partial}{\partial g}.$$

Відтворимо розв'язок системи (1.25) за його слідом $f = x^2 - 2t$, $g = x^2 + 2t$ на операторі $D+Z$. Для цього згідно наслідку 1.1 потрібно знайти розв'язки системи (1.25), що є інваріантними відносно оператора

$$\tilde{Y} = D + Z + (x^2 - 2t)\frac{\partial}{\partial f} + (x^2 + 2t)\frac{\partial}{\partial g}.$$

Оператор $\tilde{Y}$ має такі основні інваріанти:

$$fx^{-1}-\frac{\omega-2}{\omega}x,\quad gx^{-1}-\frac{\omega+2}{\omega}x,\quad \omega=\frac{x^2}{t}.$$

Відповідний їм анзац

$$f=x\varphi_1(\omega)+(\omega-2)t,\quad g=x\varphi_2(\omega)+(\omega+2)t \tag{1.26}$$

редукує систему (1.25) до системи

$$-\omega\dot\varphi_1+6\dot\varphi_2+4\omega\ddot\varphi_2=0,\quad \omega\dot\varphi_2+6\dot\varphi_1+4\omega\ddot\varphi_1=0. \tag{1.27}$$

Система (1.27) має розв'язок

$$\varphi_1=-\gamma\frac{2}{\sqrt{\omega}}\cos\frac{\omega}{4}-\delta\frac{2}{\sqrt{\omega}}\sin\frac{\omega}{4}-\sqrt{2\pi}\left[\gamma\,\mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right)-\delta\,\mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right],$$

$$\varphi_2=-\gamma\frac{2}{\sqrt{\omega}}\sin\frac{\omega}{4}+\delta\frac{2}{\sqrt{\omega}}\cos\frac{\omega}{4}+\sqrt{2\pi}\left[\gamma\,\mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right)+\delta\,\mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right],$$

де $\mathrm{C}\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\mathrm{S}\left(\frac{\omega}{4}\right)$ — відповідно косинус– і синус–інтеграли Френеля [25]. Підставляючи вирази для $\varphi_1$ і $\varphi_2$ в формули (1.26), одержуємо відтворений розв'язок рівняння Шрьодінгера (1.23):

$$f=\{x^2-2t\}-2\sqrt{t}\left(\gamma\cos\frac{x^2}{4t}+\delta\sin\frac{x^2}{4t}\right)-\sqrt{2\pi}x\left[\gamma\,\mathrm{S}\left(\frac{x^2}{4t}\right)-\delta\,\mathrm{C}\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right],$$

$$g=\{x^2+2t\}-2\sqrt{t}\left(\gamma\sin\frac{x^2}{4t}-\delta\cos\frac{x^2}{4t}\right)+\sqrt{2\pi}x\left[\gamma\,\mathrm{C}\left(\frac{x^2}{4t}\right)+\delta\,\mathrm{S}\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right].$$

Зауважимо, що у фігурних дужках подано компоненти вихідного розв'язку. Внаслідок лінійності та однорідності рівняння (1.23) після вилучення з поданих виразів цих компонент ми знову одержуємо розв'язок рівняння (1.23).

**1.5.2.** Випадок $V(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$. Якщо на операторі $T=\dfrac{\partial}{\partial t}$ розв'язок має слід

$$f=C_1\cos(-atx-\frac{a^2}{3}t^3-bt+C_2),$$

$$g = C_1 \sin(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2),$$

де

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}a,\ C_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi q \ \text{або}\ C_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}a,\ C_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi q,\ q \in \mathbf{Z},$$

то з точністю до $\langle T\rangle$-інваріантних розв'язків його можна подати у вигляді

$$f = C_1 \int_0^t \cos\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right) dt +$$
$$+(-ax-b)^{1/2}\Bigg[\mathrm{Z}^{(1)}_{1/3}\left(-\frac{2}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(-\frac{1}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right)^{1+2l}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+l\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}+l\right)}\Bigg],$$

$$g = C_1 \int_0^t \sin\left(-atx - \frac{a^2}{3}t^3 - bt + C_2\right) dt +$$
$$+(-ax-b)^{1/2}\Bigg[\mathrm{Z}^{(2)}_{1/3}\left(-\frac{2}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(-\frac{1}{3a}(-ax-b)^{3/2}\right)^{1+2l}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+l\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}+l\right)}\Bigg],$$

при цьому $ax + b \le 0$. В поданих формулах $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z) = A^{(j)}\mathrm{J}_\nu(z) + B^{(j)}\mathrm{Y}_\nu(z)$; $\mathrm{Z}^{(j)}_\nu(z)$ — циліндрична функція; $\mathrm{J}_\nu(z)$, $\mathrm{Y}_\nu(z)$ — функції Бесселя першого та другого роду відповідно [17].

**1.5.3.** Випадок $V(x) = \dfrac{c}{x^2}$ $(c \neq 0)$. Наведемо два розв'язки, які задані своїми слідами на операторі $T$.

Якщо $c = -\dfrac{1}{4}$ і слідом є розв'язок

$$f = x^{1/2}(A_1 + A_2 \ln x), \qquad g = x^{1/2}(B_1 + B_2 \ln x),$$

то відтворений розв'язок має вигляд

$$f = x^{1/2}\left(A_1 + A_2 \ln x\right)t + x^{1/2}\left(K_1 + K_2 \ln x\right) + x^{5/2}\left(\frac{B_1 - B_2}{4} + \frac{B_2}{4}\ln x\right),$$

$$g = x^{1/2}\left(B_1 + B_2\ln x\right)t + x^{1/2}\left(L_1 + L_2\ln x\right) + x^{5/2}\left(\frac{A_2 - A_1}{4} - \frac{A_2}{4}\ln x\right).$$

Якщо $c > -\dfrac{1}{4}$, а слідом є розв'язок

$$f = A_1x^\gamma + A_2x^\delta, \quad g = B_1x^\gamma + B_2x^\delta,$$

де $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, $\delta = \dfrac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$, то після відтворення відносно оператора $T$ отримаємо розв'язок

$$f = \left(A_1x^\gamma + A_2x^\delta\right)t + K_1x^\gamma + K_2x^\delta +$$

$$+\frac{B_1}{(\gamma+1)(\gamma+2)-c}x^{\gamma+2} + \frac{B_2}{(\delta+1)(\delta+2)-c}x^{\delta+2},$$

$$g = \left(B_1x^\gamma + B_2x^\delta\right)t + L_1x^\gamma + L_2x^\delta -$$

$$-\frac{A_1}{(\gamma+1)(\gamma+2)-c}x^{\gamma+2} - \frac{A_2}{(\delta+1)(\delta+2)-c}x^{\delta+2}.$$

## 1.6. Розмноження розв'язків рівняння теплопровідності методом симетрійної редукції

Одновимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.28}$$

є інваріантним відносно спеціальної алгебри Галілея $AG_3(1)$ з базисом

$$\begin{aligned} &P = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad G = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad D = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \\ &M = -\frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad S = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}x^2\right)u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Знайдемо деякі розв'язки рівняння (1.28) по їх слідах на операторах з алгебри (1.29).

Якщо розв'язок рівняння (1.28) має слід $f(t,x)$ на операторі $-P+2\alpha M$, то згідно наслідку 1.1 такий розв'язок є інваріантним відносно оператора

$$\tilde{Y} = -P + 2\alpha M + f(t,x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Оператор $\tilde{Y}$ має такі основні інваріанти:

$$u\,\mathrm{e}^{\alpha x} - \int f(t,x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx, \quad t.$$

Відповідний анзац

$$u = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\varphi(\omega) + \int f(t,x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx\right), \quad \omega = t$$

редукує рівняння (1.28) до рівняння

$$\dot{\varphi} - \alpha^2\varphi = \int(\alpha^2 f - f_t)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx + \mathrm{e}^{\alpha x}(f_x - \alpha f).$$

Якщо $f(t,x) = x^2 + 2t$ і $\alpha \neq 0$, то редуковане рівняння має розв'язок $\varphi = C\,\mathrm{e}^{\alpha^2 t}$, де $C$ — довільна стала. Йому відповідає розв'язок рівняння (1.28):

$$u = C\,\mathrm{e}^{\alpha^2 t - \alpha x} + \frac{1}{\alpha}(x^2 + 2t) - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}.$$

Добре відомими є розв'язки рівняння (1.28), задані тепловими многочленами [90]

$$v_n(t,x) = n!\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!}\cdot\frac{t^k}{k!}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{v_n(t,x)}{n!}\right\} = \frac{v_{n-1}(t,x)}{(n-1)!},$$

то ці розв'язки можна одержати з розв'язку $f(t,x) = n!$ в результаті $n$-кратного застосування розглядуваної процедури розмноження при $\alpha = 0$.

Відшукання розв'язків рівняння (1.28), які мають слід $f(t,x)$ на операторі $T+2\alpha M$, проводиться за допомогою анзацу

$$u=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\varphi(\omega)+\int f(t,x)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,dt\right),\quad \omega=x.$$

В цьому випадку редуковане рівняння має вигляд

$$\ddot{\varphi}+\alpha\varphi=f\,\mathrm{e}^{\alpha t}-\int(\alpha f+f_{xx})\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,dt.$$

Зокрема, після відтворення за слідом $f(t,x)=x^2+2t$ одержуємо такі розв'язки:

$$1)\ u=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(C_1\cos(\sqrt{\alpha}x)+C_2\sin(\sqrt{\alpha}x)\right)-\frac{2}{\alpha^2}+\frac{x^2+2t}{\alpha}\ \text{ для }\ \alpha>0;$$

$$2)\ u=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}x}+C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}x}\right)+\frac{x^2+2t}{\alpha}-\frac{2}{\alpha^2}\ \text{ для }\ \alpha<0;$$

$$3)\ u=\frac{x^4}{12}+tx^2+C_1x+t^2+C_2\ \text{ для }\ \alpha=0.$$

Тут $C_1$, $C_2$ — довільні сталі.

Розв'язки, які мають слід $f(t,x)$ на операторі $D+(2\beta-1)M$, шукаємо за допомогою анзацу

$$u=x^{-\beta}\left[\varphi(\omega)+\int f\left(\frac{x^2}{\omega},x\right)x^{\beta-1}dx\right],\quad \omega=\frac{x^2}{t}$$

і редукованого рівняння

$$4\omega^2\ddot{\varphi}+(2-4\beta+\omega)\omega\dot{\varphi}+\beta(\beta+1)\varphi=-\beta(\beta+1)\int fx^{\beta-1}dx+$$

$$+\left(-\frac{6+4\beta}{\omega}+1\right)\int f_tx^{\beta+1}dx-\frac{4}{\omega^2}\int f_{tt}x^{\beta+3}dx+(\beta+1)fx^{\beta}-$$

$$-f_xx^{\beta+1}+\frac{2}{\omega}f_tx^{\beta+2}.$$

Зокрема, для $\beta = 0$, $f = x^2 + 2t$ одержуємо розв'язок

$$u = C \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x^2}{4t}}\right) + t + \frac{x^2}{2},$$

де $\operatorname{erf}(y)$ — інтеграл імовірності, а $C$ — довільна стала. Якщо $\beta = -1$, то для того ж сліду відтворений розв'язок має вигляд

$$u = -C \operatorname{sgn} x \sqrt{t} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + C\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x^2}{4t}}\right).$$

# Розділ 2

# Редукція рівняння Гуерра–Пустерла по підалгебрах центрального розширення конформної алгебри

В цьому розділі виконано симетрійну редукцію системи рівнянь Гуерра–Пустерла до систем звичайних диференціальних рівнянь. Симетрійні властивості системи Гуерра–Пустерла досліджуються в параграфі 2.1. В наступному параграфі 2.2 здійснено класифікацію $I$-максимальних підалгебр рангу 3 максимальної алгебри інваріантності $L$ системи Гуерра–Пустерла з точністю до спряженості відносно групи, яка породжується внутрішніми автоморфізмами алгебри $L$ і трьома дискретними симетріями цієї системи. Останні два параграфи присвячено редукції розглядуваної системи по тих підалгебрах алгебри $L$, проекції яких на конформну алгебру $AC(1,4)$ є спряженими з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$.

## 2.1. Симетрія рівняння Гуерра–Пустерла

Рівнянням Гуерра–Пустерла називається рівняння

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi = \left(\frac{\triangle|\psi|}{|\psi|} + \kappa\right)\psi,$$

де $\kappa$ — невід'ємна константа, а $\psi = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$. Якщо $\psi$ — довільний розв'язок цього рівняння, то

$$u = e^{i\kappa t}\psi$$

задовольняє рівняння

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u = \frac{\triangle|u|}{|u|}u. \tag{2.1}$$

Після заміни $u(t,\vec{x}) = \exp[r(t,\vec{x}) + i\theta(t,\vec{x})]$, де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, одержуємо систему дійсних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla\theta\nabla\theta = 0, \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} + \triangle\theta + 2\nabla r\nabla\theta = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

яку будемо називати *системою Гуерра–Пустерла.*

**Теорема 2.1.** *Максимальною алгеброю інваріантності системи Гуерра–Пустерла є пряма сума алгебр Лі* $\langle N\rangle$ *і* $AC(1,4)$, *де*

$$N = \frac{\partial}{\partial r},$$

*а $AC(1,4)$ є конформною алгеброю з базисом*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}\right), \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right),\\
&J_{ab} = x_b\frac{\partial}{\partial x_a} - x_a\frac{\partial}{\partial x_b}, \quad J_{04} = t\frac{\partial}{\partial t} - \theta\frac{\partial}{\partial \theta},\\
&J_{0a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\frac{\partial}{\partial t} + (t+2\theta)\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{1}{2}x_a\frac{\partial}{\partial \theta}\right\},\\
&J_{a4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\frac{\partial}{\partial t} + (t-2\theta)\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{1}{2}x_a\frac{\partial}{\partial \theta}\right\},\\
&D = -\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \theta\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial r}\right),\\
&K_0 = \sqrt{2}\left\{\left(t^2 + \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + (t+2\theta)x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{1}{4}\vec{x}^2 + 2\theta^2\right)\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3}{2}(t+2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\right\},\\
&K_4 = -\sqrt{2}\left\{\left(t^2 - \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + (t-2\theta)x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{1}{4}\vec{x}^2 - 2\theta^2\right)\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3}{2}(t-2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\right\},\\
&K_a = 2x_aD - (4t\theta - \vec{x}^2)\frac{\partial}{\partial x_a},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

*де $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; $a, b = 1, 2, 3$, при цьому по індексах, що повторюються, проводиться сумування.*

**Доведення.** Нехай $\xi^0$, $\xi^a$, $\eta$, $\zeta$ є функціями від $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $r$, $\theta$. Оператор

$$X = \xi^0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^a\frac{\partial}{\partial x_a} + \eta\frac{\partial}{\partial \theta} + \zeta\frac{\partial}{\partial r}$$

належить до максимальної алгебри інваріантності системи (2.2) тоді і тільки тоді, коли

$$\xi^0_\theta = 0, \quad \xi^0_r = 0, \quad \xi^a_r = 0, \quad \eta_r = 0, \quad \eta_t = 0, \quad \zeta_r = 0,$$

$$\xi^a_\theta = 2\xi^0_a, \quad \xi^a_b + \xi^b_a = 0 \text{ при } a \neq b, \quad \xi^1_{x_1} = \xi^2_{x_2} = \xi^3_{x_3}, \quad \eta_\theta = 2\xi^1_{x_1} - \xi^0_t,$$

$$2\eta_a = \xi^a_t, \quad \zeta_\theta + \eta_{\theta\theta} = 2\xi^1_{x_1\theta} - \triangle\xi^0, \quad \zeta_t = -\triangle\eta, \quad \zeta_a = \frac{1}{2}\triangle\xi^a - \eta_{a\theta}.$$

Розв'язавши цю систему лінійних диференціальних рівнянь, одержимо, що

$$\xi^0 = g\frac{\vec{x}^2}{4} + 2t(\vec{p}\cdot\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{q}\cdot\vec{x}) + wt^2 + 2\alpha t - mt + n_0,$$

$$\xi^a = [gx_a + 4tp_a + q_a]\theta + wtx_a + 2tv_a + 2(\vec{p}\cdot\vec{x})x_a -$$

$$-p_a\vec{x}^2 + \varepsilon_{ab}x_b + \alpha x_a + \beta_a,$$

$$\eta = g\theta^2 + [2(\vec{p}\cdot\vec{x}) + m]\theta + w\frac{\vec{x}^2}{4} + \vec{v}\cdot\vec{x} + v_0,$$

$$\zeta = -\frac{3}{2}wt - 3(\vec{p}\cdot\vec{x}) - \frac{3}{2}g\theta + c,$$

де $g$, $\alpha$, $m$, $n_0$, $p_a$, $q_a$, $w$, $v_a$, $\beta_a$, $c$ є довільними сталими; $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Звідси випливає, що система (2.2) є інваріантною відносно $X$ тоді і тільки тоді, коли $X$ є лінійною комбінацією з дійсними коефіцієнтами операторів (2.3) і оператора $N$.

Введемо нові змінні

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + 2\theta), \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - 2\theta).$$

Тоді $x_0 + x_4 = \sqrt{2}t$, $x_0 - x_4 = 2\sqrt{2}\theta$, а тому

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_4), \qquad \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0 - x_4).$$

В змінних $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ генератори (2.3) набувають вигляду:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\beta} - x^\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$D = -x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial r}, \quad N = \frac{\partial}{\partial r}, \tag{2.4}$$

$$K_\alpha = -2x^\alpha D - (x_\beta x^\beta)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Тут індекси піднімаються за допомогою метричного тензора $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ простору Мінковського $\mathbb{R}_{1,4}$. Якщо не брати до уваги доданок $\dfrac{\partial}{\partial r}$, то векторні поля (2.4) задають стандартне зображення конформної алгебри $AC(1,4)$. Звідси випливає, що векторні поля (2.3) також породжують конформну алгебру. Теорему доведено.

Відмітимо, що симетрійні властивості рівняння (2.1) досліджувались також в роботі [68].

Переконаємося, що система (2.2) має дискретні симетрії, які породжують дискретні автоморфізми $\varphi_{c_1}, \varphi_{c_2}, \varphi_{c_3} = \varphi_{c_2}\varphi_{c_1}$ алгебри $AC(1,4)$, що задаються таким чином:

$$\begin{aligned}
\varphi_{c_1}:\ & P_\alpha \to -P_\alpha, \quad K_\alpha \to -K_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \\
& (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4), \quad D \to D; \\
\varphi_{c_2}:\ & P_1 \to -P_1, \quad K_1 \to -K_1, \quad J_{01} \to -J_{01}, \\
& J_{1a} \to -J_{1a} \quad (a = 2, 3, 4), \quad P_\alpha \to P_\alpha, \quad K_\alpha \to K_\alpha, \\
& J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 2, 3, 4), \quad D \to D; \\
\varphi_{c_3}:\ & P_1 \to P_1, \quad K_1 \to K_1, \quad J_{01} \to -J_{01}, \\
& J_{1a} \to -J_{1a}\ (a = 2, 3, 4), \quad P_\alpha \to -P_\alpha, \quad K_\alpha \to -K_\alpha, \\
& J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 2, 3, 4), \quad D \to D.
\end{aligned}$$

Нехай $t' = -t$, $x'_a = -x_a$ $(a = 1, 2, 3)$, $\theta' = -\theta$, $r' = r$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_a} = -\frac{\partial}{\partial x'_a}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'},$$

$$P'_\alpha = -P_\alpha, \quad K'_\alpha = -K_\alpha, \quad J'_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}, \quad D' = D.$$

В нових змінних система (2.2) набуває вигляду

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \theta'}{\partial t'} + \nabla\theta'\nabla\theta' = 0, \\
-\dfrac{\partial r'}{\partial t'} - \Delta\theta' - 2\nabla r'\nabla\theta' = 0,
\end{cases}$$

а отже, є інваріантною відносно даного перетворення змінних. Очевидно, розглядуване перетворення змінних породжує автоморфізм $\varphi_{c_1}$ алгебри $AC(1,4)$. Аналогічно переконуємося, що система (2.2) є інваріантною відносно перетворень змінних

$$t' = t, \quad x_1' = -x_1, \quad x_a' = x_a \quad (a = 2,3), \quad \theta' = \theta, \quad r' = r$$

та

$$t' = -t, \quad x_1' = x_1, \quad x_a' = -x_a \quad (a = 2,3), \quad \theta' = -\theta, \quad r' = r,$$

які породжують автоморфізми $\varphi_{c_2}$ та $\varphi_{c_3}$ алгебри $AC(1,4)$ відповідно.

На підставі сказаного при класифікації підалгебр алгебри $AC(1,4)$ можна використовувати не тільки внутрішні автоморфізми цієї алгебри, а й дискретні автоморфізми, тобто підалгебри алгебри $AC(1,4)$ розглядати з точністю до $C(1,4)$-спряженості ([33], с. 270).

Щоб одержати формули для розмноження розв'язків системи (2.2), скористаємося відомим явним виглядом перетворень змінних $x_\alpha$ ($\alpha = 0,1,2,3,4$), що генеруються векторними полями (2.4). Вважаємо, що індекси, які позначені буквами грецького алфавіту $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\mu$, $\ldots$, змінюються від 0 до 4, натомість індекси, які позначені буквами латинського алфавіту $a$, $b$, $c$, $\ldots$ — від 1 до 4.

Однопараметричні групи перетворень, що відповідають базисним елементам алгебри $AC(1,4)$, мають вигляд:

$$\exp(\xi P_\alpha): \; r' = r, \; x_\alpha' = x_\alpha + \xi, \; x_\beta' = x_\beta \text{ для } \beta \neq \alpha;$$

$$\exp(\xi J_{0a}): \; r' = r, \; x_0' = x_0 \cosh\xi + x_a \sinh\xi,$$

$$x_a' = x_0 \sinh\xi + x_a \cosh\xi, \; x_b' = x_b \text{ для } b \neq a;$$

$$\exp(\xi J_{ab}): \; r' = r, \; x_0' = x_0, \; x_c' = x_c \text{ для } c \in \{a,b\},$$

$$x_a' = x_a \cos\xi + x_b \sin\xi, \; x_b' = -x_a \sin\xi + x_b \cos\xi;$$

$$\exp(\xi D): \; r' = \frac{3}{2}\xi + r, \; x_\alpha' = \mathrm{e}^{-\xi} x_\alpha;$$

$$\exp(\xi K_\alpha): \ r' = r + \frac{3}{2}\ln|\sigma(x)|, \ x'_\beta = (x_\beta - \delta_{\alpha\beta}\xi x_\gamma x^\gamma)\,\sigma(x)^{-1},$$

де $\sigma(x) = 1 - 2\xi x^\alpha + g_{\alpha\alpha}\xi^2 x_\gamma x^\gamma$ (по $\alpha$ немає сумування).

Для розмноження розв'язків будемо використовувати також і багатопараметричні групи, генеровані векторними полями (2.4). Загальний вигляд елементів кожної з таких груп є наступним:

1) група паралельних перенесень, що породжується операторами $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$:

$$r' = r, \ x'_\alpha = x_\alpha + c_\alpha \ (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4);$$

2) зв'язна компонента одиниці групи тригонометричних поворотів $O(4)$, породженої $J_{ab}$ $(a, b = 1, 2, 3, 4)$:

$$r' = r, \ x'_0 = x_0, \ x'_a = \gamma_{ab}x_b,$$

при цьому $\gamma_{aj}\gamma_{bj} = \delta_{ab}$ і $\det(\gamma_{ac}) = 1$;

3) зв'язна компонента одиниці $O_1(1, 4)$ групи перетворень Лоренца $O(1, 4)$:

$$r' = r, \ x'_\alpha = u_{\alpha\beta}x_\beta,$$

де

$$u_{\alpha\gamma}u^\gamma_\beta = g_{\alpha\beta}, \ u_{00} > 0 \text{ і } \det(u_{ab}) > 0;$$

4) група нелінійних конформних перетворень, генерованих операторами $K_0$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$:

$$r' = r + \frac{3}{2}\ln|\sigma(x, u)|, \ x'_\mu = (x_\mu - u_\mu x_\nu x^\nu)\,\sigma(x, u)^{-1},$$

де

$$\sigma(x, u) = 1 - 2u_\gamma x^\gamma + u_\beta u^\beta x_\gamma x^\gamma.$$

Система (2.2) допускає також три дискретні симетрії:

1°. $x'_0 = -x_0, \ x'_a = -x_a \ (a = 1, 2, 3, 4), \ r' = r;$

$$2^\circ.\ x_0' = x_0,\ x_1' = -x_1,\ x_a' = x_a\ (a = 2, 3, 4),\ r' = r;$$

$$3^\circ.\ x_0' = -x_0,\ x_1' = x_1,\ x_a' = -x_a\ (a = 2, 3, 4),\ r' = r.$$

Якщо і їх залучати до розмноження розв'язків, то група $O(4)$ тригонометричних поворотів задається умовою $\gamma_{aj}\gamma_{bj} = \delta_{ab}$, а група $O(1,4)$ псевдоповоротів — умовою $u_{\alpha\gamma}u_\beta^\gamma = g_{\alpha\beta}$.

Нехай

$$\theta = f(t, x_1, x_2, x_3), \quad r = g(t, x_1, x_2, x_3)$$

є довільним розв'язком системи (2.2). В змінних $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ він набуває вигляду:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0 - x_4) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_4), x_1, x_2, x_3\right),$$

$$r = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_4), x_1, x_2, x_3\right).$$

В результаті застосування до даного розв'язку перетворень з виділених багатопараметричних груп одержуємо такі розв'язки:

1) група трансляцій:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0 - x_4 + c_0 - c_4) =$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_4 + c_0 + c_4), x_1 + c_1, x_2 + c_2, x_3 + c_3\right),$$

$$r = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + x_4 + c_0 + c_4), x_1 + c_1, x_2 + c_2, x_3 + c_3\right);$$

2) група Лоренца:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(u_{0\gamma} - u_{4\gamma})x_\gamma = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{0\gamma} + u_{4\gamma})x_\gamma, u_{1\gamma}x_\gamma, u_{2\gamma}x_\gamma, u_{3\gamma}x_\gamma\right),$$

$$r = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{0\gamma} + u_{4\gamma})x_\gamma, u_{1\gamma}x_\gamma, u_{2\gamma}x_\gamma, u_{3\gamma}x_\gamma\right);$$

3) група масштабних перетворень:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0 - x_4) = \mathrm{e}^{\xi} f\left(2^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\xi}(x_0 + x_4), \mathrm{e}^{-\xi} x_1, \mathrm{e}^{-\xi} x_2, \mathrm{e}^{-\xi} x_3\right),$$

$$r = g\left(2^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\xi}(x_0 + x_4), \mathrm{e}^{-\xi} x_1, \mathrm{e}^{-\xi} x_2, \mathrm{e}^{-\xi} x_3\right) + \frac{3}{2}\xi;$$

4) група нелінійних конформних перетворень:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{x_0 - x_4 - (u_0 - u_4)x_\nu x^\nu\right\}\sigma(x,u)^{-1} =$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma(x,u)}[x_0 + x_4 - (u_0 + u_4)x_\nu x^\nu],\right.$$

$$\left.\frac{x_1 - u_1 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}, \frac{x_2 - u_2 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}, \frac{x_3 - u_3 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}\right),$$

$$r = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma(x,u)}[x_0 + x_4 - (u_0 + u_4)x_\nu x^\nu],\right.$$

$$\left.\frac{x_1 - u_1 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}, \frac{x_2 - u_2 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}, \frac{x_3 - u_3 x_\nu x^\nu}{\sigma(x,u)}\right).$$

Щоб розв'язок записати у змінних $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\theta$, $r$, потрібно виконати обернену заміну:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + 2\theta),\ x_a = x_a\ (a = 1,2,3),\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - 2\theta),\ r = r.$$

## 2.2. Класифікація $I$-максимальних підалгебр алгебри симетрій

Для редукції системи (2.2) до систем звичайних диференціальних рівнянь необхідно класифікувати підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N\rangle$ з точністю до $C(1,4)$-спряженості. Оскільки редукція потребує не самі підалгебри, а основні інваріанти цих підалгебр, то ми будемо оперувати $I$-максимальними підалгебрами [4].

Підалгебра $F$ алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$ називається $I$-максимальною, якщо вона не міститься в жодній іншій підалгебрі алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$ з тими ж самими основними інваріантами. Підалгебра $F$ є $I$-максимальною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі підалгебри алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$, що мають такі ж основні інваріанти, як і підалгебра $F$.

**Теорема 2.2.** *Нехай*

$$X=2\sqrt{2}(P_0+\beta P_4)+\sum_{j=1}^{3}\alpha_jP_j+\gamma N$$

*і*

$$\lambda=8(1-\beta^2)-\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2\geq 0.$$

*Система (2.2) має $X$-інваріантний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\beta\neq -1$, $\gamma=0$ і $\lambda=0$, при цьому кожен $X$-інваріантний розв'язок системи (2.2) можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{\beta-1}{2(\beta+1)}+\frac{1}{4(\beta+1)}\sum_{j=1}^{3}\alpha_jx_j+C,\\ r&=g\left(\frac{\alpha_1}{2(\beta+1)}t-x_1,\frac{\alpha_2}{2(\beta+1)}t-x_2,\frac{\alpha_3}{2(\beta+1)}t-x_3\right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

*де $g(y_1,y_2,y_3)$ — деяка диференційовна функція, і навпаки, для будь-якої диференційовної функції $g(y_1,y_2,y_3)$ пара функцій $\theta$, $r$, заданих формулами (2.5), є розв'язком системи (2.2), інваріантним відносно $X$.*

**Доведення.** Очевидно,

$$2\sqrt{2}(P_0+\beta P_4)=2(1+\beta)\frac{\partial}{\partial t}+(1-\beta)\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Якщо $\beta = 1$, то $\alpha_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$, а тому фундаментальну систему інваріантів оператора $X$ утворюють функції

$$\theta,\ r - \frac{1}{4}\gamma t,\ x_1,\ x_2,\ x_3.$$

Розв'язок, що є інваріантним відносно $X$, має вигляд $\theta = f(x_1, x_2, x_3)$, $r = \dfrac{1}{4}\gamma t + g(x_1, x_2, x_3)$. Підставивши $f$ до першого рівняння системи (2.2), одержуємо $\nabla f \nabla f = 0$, а тому $f$ — стала. В цьому випадку друге рівняння системи (2.2) набуває вигляду $\gamma = 0$, отже, функція $g(x_1, x_2, x_3)$ може бути довільною диференційовною функцією.

Якщо $\beta = -1$, то $\alpha_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$, а тому

$$X = 2\frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial}{\partial r}.$$

В цьому випадку система (2.2) не має $X$-інваріантних розв'язків.

Нехай $\beta \neq \pm 1$. Фундаментальну систему інваріантів оператора $X$ утворюють функції:

$$\theta - \frac{1-\beta}{2(1+\beta)}t, \quad r - \frac{\gamma}{2(1+\beta)}t, \quad \frac{\alpha_j}{2(1+\beta)}t - x_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Звідси випливає, що кожен розв'язок системи (2.2), який є інваріантним відносно $X$, можна подати у такому вигляді:

$$\theta = \frac{1-\beta}{2(1+\beta)}t + f(y_1, y_2, y_3), \quad r = \frac{\gamma}{2(1+\beta)}t + g(y_1, y_2, y_3),$$

де

$$y_j = \frac{\alpha_j}{2(1+\beta)}t - x_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Підставивши записані функції в систему (2.2), дістанемо редуковану систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{3} \left( \dfrac{\alpha_j}{4(1+\beta)} + \dfrac{\partial f}{\partial y_j} \right)^2 + \dfrac{8(1-\beta^2) - \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_j^2}{16(1+\beta)^2} = 0, \\ \dfrac{\gamma}{2(1+\beta)} + \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\alpha_j}{2(1+\beta)} \dfrac{\partial g}{\partial y_j} + \Delta f + 2\nabla g \nabla f = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Система (2.6) є сумісною тільки тоді, коли

$$8(1-\beta^2) - \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 \neq 0$$

і

$$f = -\frac{1}{4(1+\beta)} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j y_j + C.$$

Для такої функції $f$ друге рівняння системи (2.6) набуває вигляду

$$\frac{\gamma}{2(1+\beta)} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_j}{2(1+\beta)} \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{1}{2(1+\beta)} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \frac{\partial g}{\partial y_j} = 0,$$

звідки $\gamma = 0$ є необхідною умовою існування розв'язку.

Якщо $\beta \neq \pm 1$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, то для будь-якої диференційовної функції $g(y_1, y_2, y_3)$ пара функцій

$$\theta = \frac{1-\beta}{2(1+\beta)} t - \frac{1}{4(1+\beta)} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left( \frac{\alpha_j}{2(1+\beta)} t - x_j \right) + C,$$

$$r = g\left( \frac{\alpha_1}{2(1+\beta)} t - x_1, \frac{\alpha_2}{2(1+\beta)} t - x_2, \frac{\alpha_3}{2(1+\beta)} t - x_3 \right)$$

є розв'язком системи (2.2), інваріантним відносно $X$. З урахуванням умови $\lambda = 0$ цей розв'язок можна подати у вигляді (2.5). Теорему доведено.

На підставі теореми 2.2 можна обмежитись $I$-максимальними підалгебрами, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять з точністю до $C(1,4)$-спряженості операторів $P_0$ і $P_0 \pm P_4$.

Конформна алгебра $AC(1,4)$ ізоморфна псевдоортогональній алгебрі $AO(2,5)$, причому, якщо ототожнити ці алгебри, то група $C(1,4)$-автоморфізмів алгебри $AC(1,4)$ збігається з групою її $O(2,5)$-автоморфізмів ([33], с. 134). Нехай $\mathbb{R}_{2,5} = \{(y_1, \ldots, y_7) : \ y_i \in \mathbb{R}\}$ є простором Мінковського з метрикою $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_7^2$. Простір $\mathbb{R}_{2,5}$ має з точністю до ізометрій один одновимірний ізотропний підпростір $W_1$, породжений вектором $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, і один двовимірний цілком ізотропний підпростір $W_2$, породжений векторами $(1,0,0,0,0,0,1)$ і $(0,1,0,0,0,-1,0)$.

Цілком ізотропних підпросторів більших розмірностей в просторі $\mathbb{R}_{2,5}$ не існує.

Кожна підалгебра алгебри $AC(1,4)$, що має в просторі $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності один, спряжена з підалгеброю розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$, породженої операторами $P_\alpha$, $J_{\alpha\beta}$, $D$, де $\alpha < \beta$ і $\alpha, \beta = 0,1,2,3,4$. Якщо вилучити з базиса алгебри $A\tilde{P}(1,4)$ оператор $D$, то одержимо базис алгебри Пуанкаре $AP(1,4)$. Алгебра $AP(1,4)$ містить класичну алгебру Галілея $AG_1(3)$, породжену операторами $P_a$, $G_a$, $M$, $T$, $J_{ab}$, де $G_a = J_{0a} + J_{a4}$, $M = P_0 - P_4$, $T = \dfrac{1}{2}(P_0 + P_4)$ ($a < b$ і $a, b = 1,2,3$). Будь-яка підалгебра алгебри $AC(1,4) = AO(2,5)$, яка має в $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантний цілком ізотропний підпростір розмірності два, спряжена з підалгеброю повної алгебри Галілея $AG_4(3)$, що породжується операторами $M$, $P_a$, $G_a$, $J_{ab}$, $R$, $S$, $T$, $Z$, де $R = J_{04} - D$, $Z = -(J_{04} + D)$, $S = \dfrac{1}{2}(K_0 - K_4)$, при цьому $a < b$ і $a, b = 1,2,3$. Відмітимо, що в [33] (див. с. 135) за простір $W_2$ взято простір, породжений векторами $(1,0,0,0,0,0,1)$ і $(0,1,0,0,0,1,0)$, тому там $G_a = J_{0a} - J_{a4}$, $M = P_0 + P_4$, $T = \dfrac{1}{2}(P_0 - P_4)$, $S = \dfrac{1}{2}(K_0 + K_4)$.

Щоб одержати перелік $I$-максимальних підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, розглядуваних з точністю до $C(1,4)$-спряженості, беремо перелік підалгебр алгебри $AC(1,4)$ ([33], с. 270), потім використовуємо конструкцію Лі–Гурса ([33], с. 35) для опису підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ і одночасно відбираємо з цих підалгебр $I$-максимальні підалгебри рангу три. В процесі відбору спираємося на таку властивість $I$-максимальних підалгебр: якщо $K$ є $I$-максимальною підалгеброю алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, то разом з кожною підалгеброю $F \subset K$ підалгебра $K$ містить будь-яку підалгебру $F' \subset AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, що має такі ж основні інваріанти, як і підалгебра $F$. Зокрема, якщо $P_a, P_b \in K$ або $G_a, G_b \in K$, то $J_{ab} \in K$. При відборі $I$-максимальних підалгебр враховуємо також ранги підалгебр. Відмітимо, що ранги підалгебр $F_1 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$, $F_2 = F_1 \oplus \langle J_{12} - J_{34} \rangle$, $F_3 = AO(4)$, $F_4 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D \rangle$ дорівнюють 3. Ранг підалгебри $\langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle$ дорівнює 2.

**Теорема 2.3.** *$I$-максимальні підалгебри, що не містять $N$, рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять $P_0$, $P_0 \pm P_4$*

*і не мають в просторі $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантних ізотропних підпросторів, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

$$\langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03},$$

$$-P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, P_0 + K_0 - 4J_{23}\rangle;$$

$$\langle P_0 + K_0 + \alpha(K_4 - P_4) + \beta N\rangle \oplus \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \ (\alpha > 0,\ \alpha \neq 1);$$

$$\langle P_0 + K_0 + \alpha N, J_{12} + \beta N, J_{34} + \gamma N\rangle,\ \langle P_0 + K_0 + \alpha N, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle;$$

$$\langle 2J_{12} + J_{34}, 2J_{13} + 2J_{24} - \sqrt{3}(K_4 - P_4), 2J_{23} - 2J_{14} + \sqrt{3}(K_3 - P_3)\rangle;$$

$$\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle.$$

**Теорема 2.4.** *$I$-максимальні підалгебри, що не містять $N$, рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять $P_0$, $P_0 \pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

*i) Підалгебри з розщеплюваними проекціями на $AP(1,4)$:*

$$\langle J_{12} + \alpha N, P_3 + N, P_4\rangle \ (\alpha \geq 0);\ \langle J_{12}, P_1, P_2, P_3 + N\rangle;$$

$$\langle J_{04} + \alpha N, P_1 + N, P_2\rangle;\ \langle G_1 + \alpha N, P_2 + N, P_3\rangle \ (\alpha = 0, 1);$$

$$\langle J_{12} + \alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle;\ \langle J_{04} + \alpha N, J_{12} + \beta N, P_3 + \gamma N\rangle;$$

$$\langle J_{04} + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle;\ \langle G_1 + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle \ (\alpha = 0, 1);$$

$$\langle G_1, J_{04} + \alpha N, P_3 + \beta N\rangle \ (\alpha \text{ — довільне},\ \beta = 0, 1);$$

$$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4 + \alpha N\rangle \ (\alpha = 0, 1);\ \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_1, P_2, P_3\rangle;$$

$$\langle J_{01}, J_{04}, J_{14}, P_3 + \alpha N\rangle \ (\alpha = 0, 1);\ \langle G_3, J_{04} + \alpha N, J_{12} + \beta N\rangle;$$

$$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} + \alpha N\rangle \ (\alpha \geq 0);\ \langle G_1, G_2, J_{04} + \alpha N, J_{12}\rangle;$$

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha N\rangle$; $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$;

$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$.

*ii) Підалгебри з нерозщеплюваними проекціями на* $AP(1,4)$:

$\langle J_{12} + P_0 + \alpha N, P_3 + \beta N, P_4\rangle$ $(\beta > 0)$;

$\langle J_{04} + P_1 + \alpha N, P_2 + \beta N, P_3\rangle$ $(\beta > 0)$;

$\langle G_1 + 2T + \alpha N, P_2 + N, P_3\rangle$; $\langle J_{12} + M + \alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$;

$\langle J_{04} + P_1 + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1 + 2T + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha N, G_2 + P_2 + \beta N, P_3 + \gamma N\rangle$;

$\langle G_1, J_{04} + P_2 + \alpha N, P_3 + \beta N\rangle$ ($\alpha$ — *довільне,* $\beta \geq 0$);

$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3 + \alpha N, J_{12}\rangle$.

**Теорема 2.5.** *$I$-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять $P_0$, $P_0 \pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4)$, але не є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

*i) Підалгебри з розщеплюваними проекціями на* $A\tilde{P}(1,4)$:

$\langle J_{04} + \alpha N, D + \beta N, P_3\rangle$; $\langle J_{12} + \alpha J_{04} + \beta N, D + \gamma N, P_3\rangle$ $(\alpha > 0)$;

$\langle J_{12} + \alpha N, J_{34} + \beta N, D + \gamma N\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha D + \beta N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ ($\alpha > 0$, $\beta$ — *довільне*);

$\langle J_{04} + \alpha N, J_{12} + \beta N, D + \gamma N\rangle$;

$\langle J_{04} + \alpha_1 D + \beta_1 N, J_{12} + \alpha_2 D + \beta_2 N, P_3\rangle$, *де* $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$;

$\langle J_{04} + \alpha D + \beta N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha \neq 0)$;

$\langle G_1, J_{04}+\alpha D+\beta N, P_3\rangle$ $(\alpha\neq 0)$; $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D+\alpha N\rangle$;

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D+\beta N\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D+\beta N\rangle$ $(\alpha>0)$.

*ii) Підалгебри з нерозщеплюваними проекціями на $A\tilde{P}(1,4)$:*

$\langle J_{04}+D+2T+\alpha N, J_{12}+2\beta T+\gamma N, P_3\rangle$;

$\langle J_{04}-D+M+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$; $\langle J_{04}+D+\alpha N, J_{12}+2T+\beta N, P_3\rangle$;

$\langle J_{04}+2D+\alpha N, G_1+2T, P_3\rangle$; $\langle J_{04}+D+\alpha N, G_1+P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{04}-D+M+\alpha N, G_1, P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha N, J_{04}+2D+\beta N, G_3+2T\rangle$ $(\alpha\geq 0)$;

$\langle J_{04}+D+\alpha N, G_1+P_3, G_2+\beta P_2+\gamma P_3\rangle$

$(\beta>0, \gamma\geq 0,$ $\alpha$— *довільне*);

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+M+\alpha N\rangle$.

**Теорема 2.6.** *$I$-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять $P_0$, $P_0\pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $AG_4(3)$, але не є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

$\langle S+T+2J_{12}+\alpha M+\beta N, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$

$(\alpha=0,\pm 1)$; $\langle J_{12}+\alpha N, S+T+\beta N, Z+\gamma N\rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S+T+\alpha M+\beta N\rangle$ $(\alpha=0,\pm 1;$ $\beta$ — *довільне*);

$\langle S+T+2J_{12}+\alpha Z+\beta N, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;

$\langle S+T+J_{12}+\alpha N, Z+\beta N, G_1+P_2\rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S+T+\alpha Z+\beta N\rangle$ $(\alpha\neq 0)$.

## 2.3. Редукція по підалгебрах алгебри $AP(1,4)\oplus\langle N\rangle$

В цьому параграфі ми використовуємо підалгебри рангу 3 алгебри $AP(1,4)\oplus\langle N\rangle$ для редукції системи Гуерра–Пустерла (2.2) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Як і раніше, після підалгебри подаємо відповідний їй анзац, редуковану систему, її частинний або загальний розв'язок та відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2).

**2.3.1.** $\langle J_{12}+\alpha N, P_3+N, P_4\rangle$ $(\alpha\geq 0)$ : $\theta=-\dfrac{1}{2}t+f(\omega)$,

$$r=x_3-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}+g(\omega),\ \omega=x_1^2+x_2^2,$$

$$-\frac{1}{2}+4\omega\dot f^2=0,\quad 4\omega\ddot f+4\dot f+8\omega\dot f\dot g=0.$$

Загальним розв'язком редукованої системи є пара функцій

$$f=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}+C_1,\quad g=-\frac{1}{4}\ln\omega+C_2\quad(\varepsilon=\pm1).$$

Йому відповідає такий розв'язок системи (2.2):

$$\theta=-\frac{1}{2}t+\varepsilon\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}+C_1\quad(\varepsilon=\pm1),$$

$$r=x_3-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2)+C_2.$$

**2.3.2.** $\langle J_{12}, P_1, P_2, P_3+N\rangle$ : $\theta=f(\omega)$, $r=x_3+g(\omega)$, $\omega=t$,

$$\dot f=0,\ \dot g=0.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2): $\theta=C_1$, $r=x_3+C_2$.

**2.3.3.** $\langle J_{04}+\alpha N, P_1+N, P_2\rangle$ : $\theta=\dfrac{1}{t}f(\omega)$, $r=\alpha\ln t+x_1+g(\omega)$,

$$\omega=x_3,\ \dot f^2-f=0,\ \ddot f+2\dot f\dot g+\alpha=0.$$

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f=\frac{1}{4}(\omega+C_1)^2,\quad g=-\frac{2\alpha+1}{2\varepsilon}\ln|\omega+C_1|+C_2,\quad \varepsilon=\pm 1.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta=\frac{1}{4t}(x_3+C_1)^2,\quad r=\alpha\ln t+x_1-\frac{2\alpha+1}{2}\varepsilon\ln|x_3+C_1|+C_2.$$

**2.3.4.** $\langle G_1+\alpha N, P_2+N, P_3\rangle$ $(\alpha=0,1):$ $\theta=\dfrac{x_1^2}{4t}+f(\omega),$

$$r=\frac{\alpha x_1}{\sqrt{2t}}+x_2+g(\omega),\ \omega=t,\ \dot f=0,\ \dot g+\frac{1}{2\omega}=0.$$

Розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{x_1^2}{4t}+C_1,\quad r=\frac{\alpha x_1}{\sqrt{2t}}+x_2-\frac{1}{2}\ln|t|+C_2.$$

**2.3.5.** $\langle J_{12}+\alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha\geq 0):$ $\theta=-\dfrac{1}{2}t+f(\omega),$

$$r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}+g(\omega),\ \omega=x_1^2+x_2^2,$$

$$4\omega\dot f^2-\frac{1}{2}=0,\quad \omega\ddot f+\dot f+2\omega\dot f\dot g=0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=\varepsilon\sqrt{\frac{\omega}{2}}+C_1,\quad g=-\frac{1}{4}\ln\omega+C_2,\quad \varepsilon=\pm 1.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=-\frac{1}{2}t+\varepsilon\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}+C_1,$$

$$r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2)+C_2.$$

**2.3.6.** $\langle J_{04}+\alpha N, J_{12}+\beta N, P_3+\gamma N\rangle:\ \theta=\dfrac{1}{t}f(\omega),$

$$r=\alpha\ln t-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1}+\gamma x_3+g(\omega),\ \omega=x_1^2+x_2^2,$$

$$4\omega\dot f^2-f=0,\quad 4\omega\ddot f+4\dot f+8\omega\dot f\dot g+\alpha=0.$$

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f=\frac{(\sqrt{\omega}+C_1)^2}{4},\quad g=-\frac{1}{4}\ln\omega-\frac{2\alpha+1}{2}\ln|\sqrt{\omega}+C_1|+C_2.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right)^2}{4t},\quad r=\alpha\ln t-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1}+\gamma x_3-$$

$$-\frac{1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2)-\frac{2\alpha+1}{2}\ln\left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right|+C_2.$$

**2.3.7.** $\langle J_{04}+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle:\ \theta=\dfrac{1}{t}f(\omega),$

$$r=\alpha\ln|t|+g(\omega),\ \omega=x_1,$$

$$\dot f^2-f=0,\quad \ddot f+2\dot f\dot g+\alpha=0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=\frac{(\omega+C_1)^2}{4},\quad g=-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln|\omega+C_1|+C_2.$$

Розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{(x_1+C_1)^2}{4t},\quad r=\alpha\ln|t|-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln|x_1+C_1|+C_2.$$

**2.3.8.** $\langle G_1+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle\ (\alpha=0,1):\ \theta=\dfrac{x_1^2}{4t}+f(\omega),$

$$r = \frac{\alpha x_1}{\sqrt{2}t} + g(\omega),\ \omega = t,\ \dot{f} = 0,\ \dot{g} + \frac{1}{2\omega} = 0.$$

Розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t} + C_1, \quad r = \frac{\alpha x_1}{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}\ln|t| + C_2.$$

**2.3.9.** $\langle G_1, J_{04} + \alpha N, P_3 + \beta N\rangle$ ($\alpha$ — довільне, $\beta = 0, 1$) :

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t} + \frac{1}{t}f(\omega),\ r = \alpha\ln|t| + \beta x_3 + g(\omega),\ \omega = x_2,$$

$$\dot{f}^2 - f = 0, \quad \ddot{f} + 2\dot{f}\dot{g} + \alpha + \frac{1}{2} = 0.$$

Скориставшись випадком 2.3.7 (замість $\alpha$ підставляємо $\alpha + \frac{1}{2}$), одержуємо, що редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f = \frac{(\omega + C_1)^2}{4}, \quad g = -(\alpha + 1)\ln|\omega + C_1| + C_2.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{x_1^2 + (x_2 + C_1)^2}{4t}, \quad r = \alpha\ln|t| + \beta x_3 - (\alpha + 1)\ln|x_2 + C_1| + C_2.$$

**2.3.10.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4 + \alpha N\rangle$ ($\alpha = 0, 1$) : $\theta = -\frac{1}{2}t + f(\omega)$,

$$r = -\sqrt{2}\alpha t + g(\omega),\ \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$4\omega\dot{f}^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad 4\omega\ddot{f} + 6\dot{f} + 8\omega\dot{f}\dot{g} - \sqrt{2}\alpha = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega} + C_1, \quad g = \alpha\varepsilon\sqrt{\omega} - \frac{1}{2}\ln\omega + C_2.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta = -\frac{1}{2}t + \varepsilon\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}} + C_1,$$

$$r = -\sqrt{2}\alpha t + \alpha\varepsilon\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + C_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

**2.3.11.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_1, P_2, P_3\rangle : \ \theta = C_1, \ r = C_2.$

**2.3.12.** $\langle J_{01}, J_{04}, J_{14}, P_3 + \alpha N\rangle \ (\alpha = 0, 1) : \ \theta = \frac{1}{t}f(\omega) + \frac{1}{4t}x_1^2,$

$$r = \alpha x_3 + g(\omega), \ \omega = x_2,$$

$$\dot{f}^2 - f = 0, \quad 2\ddot{f} + 4\dot{f}\dot{g} + 1 = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{(\omega + C_1)^2}{4}, \quad g = -\ln|\omega + C_1| + C_2.$$

Відповідний йому розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{x_1^2 + (x_2 + C_1)^2}{4t}, \quad r = \alpha x_3 - \ln|x_2 + C_1| + C_2.$$

**2.3.13.** $\langle G_3, J_{04} + \alpha N, J_{12} + \beta N\rangle \ (\alpha \neq 0, \beta \geq 0) : \ \theta = \frac{1}{4t}x_3^2 + \frac{1}{t}f(\omega),$

$$r = \alpha\ln|t| - \beta\arctan\frac{x_2}{x_1} + g(\omega), \ \omega = x_1^2 + x_2^2,$$

$$4\omega\dot{f}^2 - f = 0, \quad 4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} + 8\omega\dot{f}\dot{g} + \alpha + \frac{1}{2} = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{(\sqrt{\omega} + C_1)^2}{4}, \quad g = -\frac{1}{4}\ln\omega - (\alpha + 1)\ln|\sqrt{\omega} + C_1| + C_2.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right)^2+x_3^2}{4t}, \quad r = \alpha \ln|t| - \beta \arctan\frac{x_2}{x_1} -$$

$$-\frac{1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2) - (\alpha+1)\ln\left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right| + C_2.$$

**2.3.14.** $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha N\rangle$ $(\alpha \geq 0)$ : $\theta = \frac{1}{4t}x_3^2 + \frac{1}{t}f(\omega)$,

$$r = -\alpha \arctan\frac{x_2}{x_1} + g(\omega), \ \omega = x_1^2 + x_2^2,$$

$$4\omega \dot{f}^2 - f = 0, \quad 4\omega \ddot{f} + 4\dot{f} + 8\omega \dot{f}\dot{g} + \frac{1}{2} = 0.$$

Цей випадок формально можна одержати з випадку 2.3.13, якщо в попередньому випадку покласти $\alpha = 0, \beta = \alpha$. Фактично ж це різні випадки, бо при $\alpha = 0$ підалгебра $\langle G_3, J_{04}+\alpha N\rangle$ не є $I$-максимальною, оскільки еквівалентна підалгебрі $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$.

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f = \frac{(\sqrt{\omega}+C_1)^2}{4}, \quad g = -\frac{1}{4}\ln\omega - \ln|\sqrt{\omega}+C_1| + C_2.$$

Відповідним йому розв'язком системи (2.2) є

$$\theta = \frac{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right)^2+x_3^2}{4t},$$

$$r = -\alpha \arctan\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2) - \ln\left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_1\right| + C_2.$$

**2.3.15.** $\langle G_1, G_2, J_{04}+\alpha N, J_{12}+\beta N\rangle$ : $\theta = \frac{1}{4t}(x_1^2+x_2^2) + \frac{1}{t}f(\omega)$,

$$r = \alpha \ln|t| - \beta \arctan\frac{x_2}{x_1} + g(\omega), \ \omega = x_3,$$

$$\dot{f}^2 - f = 0, \quad \ddot{f} + 2\dot{f}\dot{g} + (\alpha+1) = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{(\omega + C_1)^2}{4}, \quad g = -\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\ln|\omega + C_1| + C_2.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + C_1)^2}{4t},$$

$$r = \alpha\ln|t| - \beta\arctan\frac{x_2}{x_1} - \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\ln|x_3 + C_1| + C_2.$$

**2.3.16.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha N\rangle : \ \theta = \frac{1}{t}f(\omega),\ r = \alpha\ln|t| + g(\omega),$

$$\omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$4\omega\dot{f}^2 - f = 0, \quad 4\omega\ddot{f} + 6\dot{f} + 8\omega\dot{f}\dot{g} + \alpha = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{(\sqrt{\omega} + C_1)^2}{4}, \quad g = -\frac{1}{2}\ln\omega - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln|\sqrt{\omega} + C_1| + C_2.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + C_1\right)^2}{4t}, \quad r = \alpha\ln|t| - \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) -$$

$$-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln\left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + C_1\right| + C_2.$$

**2.3.17.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle : \ \theta = -\frac{1}{2}t + f(\omega),\ r = g(\omega),$

$$\omega = (t - 2\theta)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$16\omega\dot{f}^2 - 1 = 0, \quad 4\omega\dot{g} + 3 = 0.$$

Інтегруючи редуковану систему, одержуємо

$$f=\frac{1}{2}\sqrt{\omega}+C_1,\quad g=-\frac{3}{4}\ln|\omega|+C_2.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) задається неявно:

$$\theta=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left[(t-2\theta)^2+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]^{1/2}+C_1,$$

$$r=-\frac{3}{4}\ln\left[(t-2\theta)^2+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]+C_2.$$

**2.3.18.** $\langle J_{01},J_{02},J_{03},J_{12},J_{13},J_{23}\rangle:\ \theta=\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4t}+\dfrac{1}{4t}f(\omega),$

$$r=g(\omega),\ \omega=\theta-\frac{1}{2}t,$$

$$f=8C_1\omega+8C_1^2,\quad \dot g=-\frac{3}{2(\omega+2C)}.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=8C_1\omega+8C_1^2,\quad g=-\frac{3}{2}\ln|\omega+2C_1|+C_2.$$

Відповідний йому інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд

$$\theta=\frac{\vec{x}^2-4C_1t+8C_1^2}{4t-8C_1},\quad r=-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\vec{x}^2-2(t-2C_1)^2}{t-2C_1}\right|+C_2.$$

**2.3.19.** $\langle J_{12}+P_0+\alpha N,P_3+\beta N,P_4\rangle\ (\alpha\geq 0,\ \beta>0):\ \omega=x_1^2+x_2^2,$

$$\theta=f(\omega)-\frac{1}{2}t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1},\ r=g(\omega)-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}+\beta x_3,$$

$$4\omega\dot f^2+\frac{1-\omega}{2\omega}=0,\quad 4\omega\ddot f+4\dot f+\frac{\sqrt{2}\alpha}{\omega}+8\omega\dot f\dot g=0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(\sqrt{\omega-1}-\arctan\sqrt{\omega-1})+C_1,$$

$$g=-\frac{1}{4}\ln|\omega-1|-\alpha\varepsilon\arctan\sqrt{\omega-1}+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}-\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}\right)+C_1,$$

$$r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}+\beta x_3-\frac{1}{4}\ln|x_1^2+x_2^2-1|-$$
$$-\varepsilon\alpha\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

**2.3.20.** $\langle J_{04}+P_1+\alpha N, P_2+\beta N, P_3\rangle$ ($\alpha$ — довільне, $\beta>0$) :

$$\theta=\frac{1}{t}f(\omega),\ r=g(\omega)+\alpha x_1+\beta x_2,\ \omega=t\,\mathrm{e}^{-x_1},$$

$$\omega^2\dot f^2+\omega\dot f-f=0,\quad \omega^2\ddot f+\omega(\dot f+\dot g)-2\omega(\alpha-\omega\dot g)\dot f=0.$$

**2.3.21.** $\langle G_1+2T+\alpha N, P_2+N, P_3\rangle$ : $\theta=f(\omega)-\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{x_1t}{2}$,

$$r=g(\omega)+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}t+x_2,\ \omega=t^2-2x_1,$$

$$\dot f^2-\frac{\omega}{16}=0,\quad \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+4\dot f+8\dot f\dot g=0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=\frac{\varepsilon}{6}\omega^{3/2}+C_1,\quad g=-\frac{1}{2}\omega-\frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega}+C_2.$$

Йому відповідає такий інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{\varepsilon}{6}(t^2-2x_1)^{3/2}-\frac{t^3}{6}+\frac{x_1t}{2}+C_1,$$

$$r=-\frac{1}{2}(t^2-2x_1)-\frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2}}{2}(t^2-2x_1)^{1/2}+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}t+x_2+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

**2.3.22**. $\langle J_{12}+2T+\alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha\geq 0):\quad \omega=x_1^2+x_2^2,$

$$\theta=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1}+f(\omega),\ r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}+g(\omega),$$

$$\frac{1-\omega}{2\omega}+4\omega\dot f^2=0,\quad 4\omega\ddot f+4\dot f+\frac{\sqrt{2}\alpha}{\omega}+8\omega\dot f\dot g=0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega-1}-\arctan\sqrt{\omega-1}\right)+C_1,$$

$$g=-\frac{1}{4}\ln|\omega-1|-\alpha\varepsilon\arctan\sqrt{\omega-1}+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

Відповідний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}-\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}\right)+C_1,$$

$$r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{4}\ln|x_1^2+x_2^2-1|-$$

$$-\alpha\varepsilon\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

**2.3.23**. $\langle J_{04}+P_1+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha\geq 0):\ \theta=\frac{1}{t}f(\omega),$

$$r=g(\omega)+\alpha x_1,\ \omega=t\,\mathrm{e}^{-x_1},$$

$$\omega^2\dot f^2+\omega\dot f-f=0,\quad \omega^2\ddot f+\omega(\dot f+\dot g)-2\omega\dot f(\alpha-\omega\dot g)=0.$$

**2.3.24**. $\langle G_1+2T+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle:\ \theta=f(\omega)-\frac{t^3}{6}+\frac{x_1t}{2},$

$$r = g(\omega) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}t, \ \omega = t^2 - 2x_1,$$

$$\dot{f}^2 - \frac{\omega}{16} = 0, \quad \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + 4\dot{f} + 8\dot{f}\dot{g} = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{\varepsilon}{6}\omega^{3/2} + C_1, \quad g = -\frac{1}{2}\omega - \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega} + C_2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Відповідний розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{\varepsilon}{6}(t^2 - 2x_1)^{3/2} - \frac{t^3}{6} + \frac{x_1 t}{2} + C_1,$$

$$r = -\frac{1}{2}(t^2 - 2x_1) - \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{2}}{2}(t^2 - 2x_1)^{1/2} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}t + C_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

**2.3.25**. $\langle G_1 + \alpha N, G_2 + P_2 + \beta N, P_3 + \gamma M \rangle$ $(\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0)$ :

$$\theta = f(\omega) + \frac{x_1^2}{4t} + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{4(\sqrt{2}t + 1)},$$

$$r = g(\omega) + \frac{\alpha x_1}{\sqrt{2}t} + \frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t + 1} + \gamma x_3, \ \omega = t,$$

$$\dot{f} = 0, \quad \dot{g} + \frac{1}{2\omega} + \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}\omega + 1)} = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = C_1, \quad g = -\frac{1}{2}\ln|\omega| - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}\omega + 1| + C_2.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t} + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{4(\sqrt{2}t + 1)} + C_1,$$

$$r = \frac{\alpha x_1}{\sqrt{2}t} + \frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t + 1} + \gamma x_3 - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}t + 1| + C_2.$$

**2.3.26.** $\langle G_1, J_{04} + P_2 + \alpha N, P_3 + \beta N\rangle$ ($\alpha$ — довільне, $\beta \geq 0$) :

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t} + \frac{1}{t}f(\omega),\ r = \alpha x_2 + \beta x_3 + g(\omega),\ \omega = t\,\mathrm{e}^{-x_2},$$

$$\omega^2\dot{f}^2 + \omega\dot{f} - f = 0, \quad \omega^2\ddot{f} + \omega(\dot{f} + \dot{g}) + 2\omega\dot{f}(\omega\dot{g} - \alpha) + \frac{1}{2} = 0.$$

**2.3.27.** $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3 + \alpha N, J_{12}\rangle$ : $\theta = \frac{1}{t}f(\omega) + \frac{1}{4t}(x_1^2 + x_2^2)$,

$$r = g(\omega) + \alpha x_3,\ \omega = t\,\mathrm{e}^{-x_3},$$

$$\omega^2\dot{f}^2 + \omega\dot{f} - f = 0, \quad \omega^2\ddot{f} + \omega(\dot{f} + \dot{g}) + 2\omega\dot{f}(\omega\dot{g} - \alpha) + 1 = 0.$$

## 2.4. Редукція по підалгебрах алгебри $A\tilde{P}(1,4) \oplus \langle N\rangle$, які не є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4) \oplus \langle N\rangle$

Для редукції використовуємо підалгебри з теореми 2.5.

**2.4.1.** $\langle J_{04} + \alpha N, D + \beta N, P_3\rangle$ ($\alpha \geq 0$, $\beta$ — довільне) : $\theta = \frac{x_1^2}{t}f(\omega)$,

$$r = g(\omega) + \alpha \ln|t| - \left(\beta + \frac{3}{2} + \alpha\right)\ln|x_1|,\ \omega = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\begin{cases} (\omega^2 + \omega^4)\dot{f}^2 + 4\omega f\dot{f} + 4f^2 - f = 0, \\ (\omega^2 + \omega^4)\ddot{f} + (4\omega + 2\omega^3)\dot{f} + (2f + \omega\dot{f})(\omega\dot{g} - 2\beta - 3 - 2\alpha) + \\ +2\omega^4\dot{f}\dot{g} + 2f + \alpha = 0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок

$$f = \frac{1}{4}, \quad g = 2(\beta + 1)\ln|\omega| + C.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t}, \quad r = \left(\beta + \frac{1}{2} - \alpha\right)\ln|x_1| - 2(\beta+1)\ln|x_2| + \alpha\ln|t| + C.$$

**2.4.2.** $\langle J_{12} + \alpha J_{04} + \beta N, D + \gamma N, P_3\rangle$ $(\alpha > 0)$ : $\theta = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{t} f(\omega)$,

$$r = -\beta \arctan\frac{x_2}{x_1} + \frac{3+2\gamma}{4}\ln(x_1^2 + x_2^2) + g(\omega),$$

$$\omega = 2\ln|t| - \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha \arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$\begin{cases} 4(f - \dot f)^2 + 4\alpha^2 \dot f^2 + 2\dot f - f = 0, \\ 2(1+\alpha^2)\ddot f + 4(1+\alpha^2)\dot f \dot g - 4f\dot g - \\ -(7 + 2\alpha\beta + 2\gamma)\dot f + \dot g + (5+2\gamma) f = 0. \end{cases}$$

Якщо $\gamma = -\dfrac{5}{2}$, то редукована система має розв'язок $f = \dfrac{1}{4}$, $g = g(\omega)$ — довільна диференційовна функція. Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4t}, \quad r = g(\omega) - \beta\arctan\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2),$$

де $\omega = 2\ln|t| - \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha\arctan\dfrac{x_2}{x_1}$, а $g(\omega)$ — довільна диференційовна функція.

**2.4.3.** $\langle J_{12} + \alpha N, J_{34} + \beta N, D + \gamma N\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma$ — довільне$)$ :

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4t} f(\omega) + \frac{x_3^2}{4t}, \ \omega = \frac{t + 2\theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$r = g(\omega) - \alpha\arctan\frac{x_2}{x_1} - \beta\arctan\frac{t - 2\theta}{\sqrt{2}x_3} - \frac{3+2\gamma}{4}\ln(x_1^2 + x_2^2),$$

$$(\omega - 2)\dot f^2 + 4\omega(1-f)\dot f + 4f^2 - 4f = 0.$$

**2.4.4.** $\langle J_{12} + \alpha D + \beta N, J_{34}, P_3, P_4 \rangle$ $(\alpha > 0)$ :

$$\theta = \exp\left(\alpha \arctan \frac{x_2}{x_1}\right) f(\omega) - \frac{1}{2}t, \; r = g(\omega) - \beta \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

$$\omega = \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

$$\begin{cases} 4(1+\alpha^2)\dot{f}^2 - 4\alpha^2 f\dot{f} + \alpha^2 f^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\omega} = 0, \\ 4(1+\alpha^2)\ddot{f} + 8(1+\alpha^2)\dot{f}\dot{g} - 4\alpha^2 f\dot{g} + 4\alpha(\beta-\alpha)\dot{f} + \alpha(\alpha - 2\beta)f = 0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок

$$f = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\omega/2}, \quad g = -\frac{1}{4}\omega + C.$$

Відповідний йому інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд

$$\theta = \pm\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} - \frac{1}{2}t, \quad r = -\frac{1}{4}\ln(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)\arctan\frac{x_2}{x_1} + C_1.$$

**2.4.5.** $\langle J_{04} + \alpha N, J_{12} + \beta N, D + \gamma N \rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma$ — довільне$)$ :

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t} f(\omega), \; \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2},$$

$$r = g(\omega) + \alpha \ln|t| - \beta \arctan\frac{x_2}{x_1} - \frac{2\alpha + 2\gamma + 3}{4}\ln(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\begin{cases} \omega^2(\omega+1)\dot{f}^2 + 2\omega f\dot{f} + f^2 - \frac{1}{4}f = 0, \\ 4\omega^2(\omega+1)\ddot{f} + 8\omega^2\dot{f}\dot{g} + 8\omega f\dot{g} + \\ +[6\omega^2 + (6 - 4\alpha - 4\gamma)\omega]\dot{f} - (2 + 4\alpha + 4\gamma)f + \alpha = 0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок $f = \dfrac{1}{4}$, $g = \dfrac{2\gamma + 1}{4}\ln\omega + C$. Йому відповідає такий інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4t},$$

$$r=-\frac{\alpha+1}{2}\ln(x_1^2+x_2^2)-\frac{2\gamma+1}{2}\ln|x_3|+\alpha\ln|t|-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1}+C.$$

**2.4.6.** $\langle J_{04}+\alpha_1 D+\beta_1 N, J_{12}+\alpha_2 D+\beta_2 N, P_3\rangle$ $(\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0)$ :

$$\theta=\frac{x_1^2+x_2^2}{t}f(\omega),\ r=g(\omega)+\frac{3\alpha_1+2\beta_1}{2}\ln|t|-$$

$$-\frac{3\alpha_1+2\beta_1}{4}\ln(x_1^2+x_2^2)-\frac{3\alpha_2+2\beta_2}{2}\arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$\omega=\alpha_1\ln|\theta|-\alpha_1\ln|t|+2\alpha_2\arctan\frac{x_2}{x_1}-\ln(x_1^2+x_2^2),$$

$$\begin{cases}[4(\alpha_2^2+1)f+\alpha_1^2]\dot f^2-8f^2\dot f+4f^3-f^2=0,\\ \left(\frac{3}{2}\alpha_1+\beta_1\right)(\alpha_1\dot f-f)^3+[2\alpha_1 f\dot g+(6\alpha_2^2+4\alpha_2\beta_2-6\alpha_1-\\ -4\beta_1+4)f\dot f+(6\alpha_1+4\beta_1-4)f^2](\alpha_1\dot f-f)^2+\\ +\{4(1-\alpha_1)f(f\ddot f+\dot f^2-2f\dot f)+4\alpha_1\alpha_2^2\dot f(\dot f^2+f\ddot f)+\\ +8f[\alpha_1\alpha_2^2\dot f+(1-\alpha_1)f]\dot f\dot g+8(\alpha_1-1)f^3\dot g\}\times\\ \times(\alpha_1\dot f-f)+4(\alpha_1\ddot f-\dot f)f[(1-\alpha_1)f(f-\dot f)-\alpha_1\alpha_2^2\dot f^2]=0.\end{cases}$$

Редукована система має розв'язок

$$f=\frac{1}{4},\quad g=\frac{1}{2}\omega+C.$$

Йому відповідає такий розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{x_1^2+x_2^2}{4t},\quad r=-\frac{\alpha_1+2\beta_1+2}{4}\ln(x_1^2+x_2^2)+$$

$$+\frac{\alpha_1+2\beta_1}{2}\ln|t|-\frac{\alpha_2+2\beta_2}{2}\arctan\frac{x_2}{x_1}+C.$$

**2.4.7.** $\langle J_{04}+\alpha D+\beta N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1)$ :

$$\theta=t^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}f(\omega),\ r=g(\omega)+\beta\ln t-\left(\beta+\frac{3}{2}\right)\ln x_1,\ \omega=tx_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \omega^{\frac{4\alpha-2}{\alpha-1}} \dot{f}^2 + \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} f + \omega \dot{f} = 0, \\ \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \omega^{\frac{4\alpha-2}{\alpha-1}} \ddot{f} + \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \omega^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-1}} \dot{f} \times \\ \times \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \omega \dot{g} + \dfrac{1}{\alpha} - \beta - \dfrac{3}{2}\right) + \omega \dot{g} + \beta = 0. \end{cases}$$

**2.4.8.** $\langle J_{04} + D + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3 \rangle : \ \omega = t, \ \theta = x_1^2 f(\omega),$

$$r = g(\omega) - \left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \ln|x_1|, \ \dot{f} + 4f^2 = 0, \ \dot{g} - (4\alpha + 4) f = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{1}{4\omega + C_1}, \quad g = (\alpha + 1) \ln|4\omega + C_1| + C_2.$$

Відповідний йому інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{x_1^2}{4t + C_1}, \quad r = (\alpha + 1) \ln|4t + C_1| - \left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \ln|x_1| + C_2.$$

**2.4.9.** $\langle G_1, J_{04} + \alpha D + \beta N, P_3 \rangle$ $(\alpha \neq 0, \beta$ — довільне$)$ :

$$\theta = \frac{x_2^2}{4t} f(\omega) + \frac{x_1^2}{4t}, \ r = g(\omega) - \frac{3\alpha + 2\beta}{2\alpha} \ln x_2, \ \omega = t x_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$\begin{cases} \left(f + \dfrac{1-\alpha}{2\alpha} \omega \dot{f}\right)^2 + \omega \dot{f} - f = 0, \\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \omega^2 \ddot{f} + \left(f + \dfrac{1-\alpha}{2\alpha} \omega \dot{f}\right)\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \omega \dot{g} - \dfrac{3\alpha + 2\beta}{2\alpha}\right) + \\ + \dfrac{1 + \alpha - 2\alpha^2}{4\alpha^2} \omega \dot{f} + \omega \dot{g} + \dfrac{1}{2}(f + 1) = 0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок:

$$f = 1, \quad g = \frac{\alpha + 2\beta}{2} \ln|\omega| + C.$$

Відповідний йому інваріантний розв'язок системи (2.2) можна подати у вигляді

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4t}, \quad r = \frac{\alpha + 2\beta}{2} \ln|t| - \frac{\alpha + 2\beta + 2}{2} \ln x_2 + C.$$

**2.4.10.** $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D + \alpha N \rangle : \ \theta = \dfrac{x_1^2}{4t} f(\omega) + \dfrac{x_3^2}{4t},$

$$r = g(\omega) - \alpha \ln|x_1|, \ \omega = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\begin{cases} (\omega^4 + \omega^2)\dot{f}^2 + 4\omega f \dot{f} + 4(f^2 - f) = 0, \\ (\omega^4 + \omega^2)\ddot{f} + 2(\omega^4 + \omega^2)\dot{f}\dot{g} + \\ +4\omega f \dot{g} + (4\omega + 2\omega^3)\dot{f} + (2 - 4\alpha) f + 2 = 0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок $f = 1$, $g = (\alpha - 1)\ln|\omega| + C$. Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_3^2}{4t}, \quad r = -\ln|x_2| + C.$$

**2.4.11.** $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} + \alpha D + \beta N \rangle \ (\alpha > 0):$

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4t} f(\omega) + \frac{x_3^2}{4t},$$

$$r = g(\omega) - \beta \arctan\frac{x_2}{x_1}, \ \omega = 2\alpha \arctan\frac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\begin{cases} (\alpha^2 + 1)\dot{f}^2 - 2f\dot{f} = 0, \\ (\alpha^2 + 1)\ddot{f} + 2(\alpha^2 + 1)\dot{f}\dot{g} - 2f\dot{g} - (\alpha\beta + 1)\dot{f} + f + \dfrac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння одержуємо, що $\dot{f} = 0$ або $(\alpha^2 + 1)\dot{f} - 2f = 0$. В першому випадку

$$f = C_1, \quad g = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4C_1}\right)\omega + C_2 \quad (C_1 \neq 0).$$

Цьому розв'язку редукованої системи відповідає такий розв'язок системи (2.2):

$$\theta = \frac{C_1(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2}{4t},$$

$$r = \left(\alpha + \frac{\alpha}{2C_1} - \beta\right) \arctan\frac{x_2}{x_1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4C_1}\right) \ln(x_1^2 + x_2^2) + C_2.$$

В другому випадку

$$f = C_1 \exp\frac{2\omega}{\alpha^2 + 1},$$

$$g = \frac{2\alpha\beta - \alpha^2 - 3}{2(\alpha^2 + 1)}\omega + \frac{\alpha^2 + 1}{8C_1} \exp\left(-\frac{2\omega}{\alpha^2 + 1}\right) + C_2 \quad (C_1 \neq 0).$$

Відповідний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{C_1(x_1^2 + x_2^2)\exp\left(\frac{2\omega}{\alpha^2+1}\right) + x_3^2}{4t},$$

$$r = \frac{2\alpha\beta - \alpha^2 - 3}{2(\alpha^2 + 1)}\omega + \frac{\alpha^2 + 1}{8C_1} \exp\left(-\frac{2\omega}{\alpha^2 + 1}\right) - \beta \arctan\frac{x_2}{x_1} + C_2,$$

де $\omega = 2\alpha \arctan\dfrac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2 + x_2^2)$.

**2.4.12.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D + \beta N \rangle$ $(\alpha > 0)$ :

$$\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{t} f(\omega),$$

$$r = g(\omega) + \frac{3\alpha + 2\beta}{2} \ln|t| - \frac{3\alpha + 2\beta}{4} \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\omega = \alpha \ln|\theta| - \alpha \ln|t| - \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\begin{cases} (\alpha^2+4f)\dot f^2-8f^2\dot f+4f^3-f^2=0, \\ \left(\frac{3}{2}\alpha+\beta\right)(\alpha\dot f-f)^3+[2\alpha f\dot g+(6-6\alpha-4\beta)f(\dot f-f)]\times \\ \times(\alpha\dot f-f)^2+8(1-\alpha)f^2(\dot f-f)(\alpha\dot f-f)\dot g+ \\ +4(1-\alpha)f[(\alpha-1)f^2\ddot f+\alpha\dot f^3-2\alpha f\dot f^2+f^2\dot f]=0. \end{cases}$$

Редукована система має розв'язок

$$f=\frac{1}{4},\quad g=\frac{3}{4}\omega+C.$$

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд

$$\theta=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4t},\qquad r=\beta\ln|t|-\left(\frac{3}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\ln(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+C.$$

**2.4.13.** $\langle J_{04}+D+2T+\alpha N, J_{12}+2\beta T+\gamma N, P_3\rangle$ :

$$\theta=(x_1^2+x_2^2)f(\omega),\ r=g(\omega)-\frac{\alpha}{2}\ln(x_1^2+x_2^2)-\gamma\arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$\omega=\sqrt{2}t+2\beta\arctan\frac{x_2}{x_1}+\ln(x_1^2+x_2^2),$$

$$\begin{cases} 4(1+\beta^2)\dot f^2+8f\dot f+\sqrt{2}\dot f+4f^2=0, \\ 4(1+\beta^2)\ddot f+8(1+\beta^2)\dot f\dot g+8f\dot g+ \\ +(8-4\alpha-4\beta\gamma)\dot f+\sqrt{2}\dot g+(4-4\alpha)f=0. \end{cases}$$

**2.4.14.** $\langle J_{04}-D+M+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$ : $\theta=f(\omega)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t|,$

$$r=g(\omega)+\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\ln|x_1|,\ \omega=\frac{x_1^2}{t},$$

$$4\omega\dot f^2-\omega\dot f+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0,\quad 4\omega\ddot f+8\omega\dot f\dot g+(4\alpha-4)\dot f-\omega\dot g=0.$$

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f=\frac{\omega}{8}\left(1+\varepsilon\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}}\right)+\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}}-1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}}+1}\right|+C_1,$$

$$g=-\frac{\varepsilon(\alpha-1)}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}}-1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}}+1}\right|+\frac{3-2\alpha}{4}\ln|\omega|-\frac{1}{4}\ln|\omega-4\sqrt{2}|+C_2,$$

де $\varepsilon=\pm1$.

Йому відповідає такий інваріантний розв'язок системи (2.2):

$$\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t|+\frac{x_1^2}{t}\left(1+\varepsilon\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}t}{x_1^2}}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x_1^2-4\sqrt{2}t}-|x_1|}{\sqrt{x_1^2-4\sqrt{2}t}+|x_1|}\right|+C_1,$$

$$r=\frac{\alpha-1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}\ln|x_1^2-4\sqrt{2}t|+$$

$$+\frac{\varepsilon(\alpha+2)}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x_1^2-4\sqrt{2}t}-|x_1|}{\sqrt{x_1^2-4\sqrt{2}t}+|x_1|}\right|+C_2.$$

**2.4.15.** $\langle J_{04}+D+\alpha N, J_{12}+2T+\beta N, P_3\rangle:\ \theta=(x_1^2+x_2^2)f(\omega),$

$$r=g(\omega)-\frac{\alpha}{2}\ln(x_1^2+x_2^2)-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1},\ \omega=\sqrt{2}\arctan\frac{x_2}{x_1}-t,$$

$$2\dot{f}^2-\dot{f}+4f^2=0,\quad 2\ddot{f}+4\dot{f}\dot{g}-2\sqrt{2}\beta\dot{f}-\dot{g}+(4-4\alpha)f=0.$$

**2.4.16.** $\langle J_{04}+2D+\alpha N, G_1+2T, P_3\rangle:\ \theta=x_2^{3/2}f(\omega)+\frac{1}{2}tx_1-\frac{1}{6}t^3,$

$$r=g(\omega)-\frac{\alpha+3}{2}\ln|x_2|,\ \omega=\frac{t^2-2x_1}{x_2},$$

$$\begin{cases} 4(\omega^2+4)\dot{f}^2 - 12\omega f\dot{f} + 9f^2 - \omega = 0, \\ (\omega^2+4)\ddot{f} + (2\omega^2+8)\dot{f}\dot{g} - 3\omega f\dot{g} + (\alpha+2)\omega\dot{f} - \dfrac{6\alpha+15}{4}f = 0. \end{cases}$$

**2.4.17.** $\langle J_{04}+D+\alpha N, G_1+P_2, P_3\rangle$ : $\theta = \dfrac{(\sqrt{2}tx_2 - x_1)^2}{t}f(\omega) + \dfrac{1}{4t}x_1^2,$

$$r = g(\omega) - \left(\frac{3}{2}+\alpha\right)\ln|\sqrt{2}tx_2 - x_1|, \ \omega = t,$$

$$t\dot{f} + (4+8t^2)f^2 + f = 0, \quad \dot{g} - \frac{4(1+\alpha)(1+2t^2)}{t}f - \frac{1+\alpha}{t} = 0.$$

Якщо $t > 0$, то загальний розв'язок редукованої системи має вигляд

$$f = \frac{1}{8t^2 + C_1t - 4},$$

$$g = \frac{(1+\alpha)(1+2\lambda_1^2)}{2\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\ln|t-\lambda_1| + \frac{(1+\alpha)(1+2\lambda_2^2)}{2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\ln|t-\lambda_2| + C_2,$$

де

$$\lambda_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2+128}}{16}, \quad \lambda_2 = \frac{-C_1 - \sqrt{C_1^2+128}}{16}.$$

Якщо ж $t < 0$, то редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f = \frac{1}{-8t^2 + C_1t + 4}, \quad g = 2(1+\alpha)\ln|t| -$$

$$-\frac{(1+\alpha)(1+2\mu_1^2)}{2\mu_1(\mu_1-\mu_2)}\ln|t-\mu_1| - \frac{(1+\alpha)(1+2\mu_2^2)}{2\mu_2(\mu_2-\mu_1)}\ln|t-\mu_2| + C_2,$$

де

$$\mu_1 = \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2+128}}{16}, \quad \mu_2 = \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2+128}}{16}.$$

Підставивши одержані вирази для $f$ і $g$ в анзац, дістанемо відповідні інваріантні розв'язки системи (2.2).

**2.4.18.** $\langle J_{04}-D+M+\alpha N, G_1, P_3\rangle$ : $\theta = f(\omega) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t| + \dfrac{x_1^2}{4t},$

$$r = g(\omega) + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\ln|x_2|,\ \omega = \frac{x_2^2}{t},$$

$$4\omega\dot{f}^2 - \omega\dot{f} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \quad 4\omega\ddot{f} + 8\omega\dot{f}\dot{g} + (4\alpha - 4)\dot{f} - \omega\dot{g} + \frac{1}{2} = 0.$$

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f = \frac{\omega}{8}\left(1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}}\right) + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}} + 1}\right| + C_1,$$

$$g = -\frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}} + 1}\right| + \frac{3 - 2\alpha}{4}\ln|\omega| - \frac{1}{4}\ln|\omega - 4\sqrt{2}| + C_2,$$

де $\varepsilon = \pm 1$, а $C_1$, $C_2$ — довільні сталі.

Відповідний інваріантний розв'язок системи (2.2) має вигляд:

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t| + \frac{x_1^2}{4t} + \frac{x_2^2}{8t}\left(1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}t}{x_2^2}}\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x_2^2 - 4\sqrt{2}t} - |x_2|}{\sqrt{x_2^2 - 4\sqrt{2}t} + |x_2|}\right| + C_1,$$

$$r = \frac{\alpha - 1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|x_2^2 - 4\sqrt{2}t| + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x_2^2 - 4\sqrt{2}t} - |x_2|}{\sqrt{x_2^2 - 4\sqrt{2}t} + |x_2|}\right| + C_2.$$

**2.4.19.** $\langle J_{12} + \alpha N, J_{04} + 2D + \beta N, G_3 + 2T\rangle$ ($\alpha \geq 0$, $\beta$ — довільне) :

$$\theta = (x_1^2 + x_2^2)^{3/4} f(\omega) + \frac{1}{2}x_3 t - \frac{1}{6}t^3,$$

$$r = g(\omega) - \alpha\arctan\frac{x_2}{x_1} - \frac{\beta + 3}{4}\ln(x_1^2 + x_2^2),\ \omega = \frac{t^2 - 2x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}},$$

$$\begin{cases} (\omega^2+4)\dot f^2 - 3\omega f\dot f + \dfrac{9}{4}f^2 - 4\omega = 0, \\ (\omega^2+4)\ddot f + 2(\omega^2+4)\dot f\dot g - 3\omega f\dot g + (\beta+1)\omega\dot f - \left(\dfrac{3}{2}\beta + \dfrac{9}{4}\right) f = 0. \end{cases}$$

**2.4.20.** $\langle J_{04} + D + \alpha N, G_1 + P_3, G_2 + \beta P_2 + \gamma P_3\rangle$ $(\beta > 0, \gamma \ge 0)$ :

$$\theta = \left(\frac{\gamma x_2}{\sqrt{2}t+\beta} + \frac{x_1}{\sqrt{2}t} - x_3\right)^2 f(\omega) + \frac{x_1^2}{4t} + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{4(\sqrt{2}t+\beta)},$$

$$r = g(\omega) - \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\ln\left|\frac{\gamma x_2}{\sqrt{2}t+\beta} + \frac{x_1}{\sqrt{2}t} - x_3\right|,\ \omega = t,$$

$$\begin{cases} \dot f + 2\left(\dfrac{1}{\omega^2} + \dfrac{2\gamma^2}{(\sqrt{2}\omega+\beta)^2} + 2\right) f^2 = 0, \\ \dot g - (2\alpha+2)\left(\dfrac{1}{\omega^2} + \dfrac{2\gamma^2}{(\sqrt{2}\omega+\beta)^2} + 2\right) f + \dfrac{1}{2\omega} + \dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}\omega+\beta)} = 0. \end{cases}$$

**2.4.21.** $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + M + \alpha N\rangle$ : $\theta = f(\omega) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t|$,

$$r = g(\omega) + \frac{2\alpha-3}{4}\ln(x_1^2+x_2^2+x_3^2),\ \omega = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t},$$

$$4\omega\dot f^2 - \omega\dot f + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \quad 4\omega\ddot f + 8\omega\dot f\dot g + 4\alpha\dot f - \omega\dot g = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи має вигляд

$$f = \frac{\omega}{8}\left(1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{\omega}}\right) + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}} - 1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}} + 1}\right| + C_1,$$

$$g = \frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}} - 1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{\omega}} + 1}\right| + \frac{1-2\alpha}{2}\ln|\omega| - \frac{1}{4}\ln|\omega - 4\sqrt{2}| + C_2.$$

Відповідним інваріантним розв'язком системи (2.2) є пара функцій

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t| + \frac{\vec{x}^2}{8t}\left(1+\varepsilon\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}t}{\vec{x}^2}}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{\vec{x}^2-4\sqrt{2}t}-\sqrt{\vec{x}^2}}{\sqrt{\vec{x}^2-4\sqrt{2}t}+\sqrt{\vec{x}^2}}\right| + C_1,$$

$$r = -\frac{1+2\alpha}{4}\ln(\vec{x}^2) + \frac{4\alpha-1}{2}\ln|t|+$$

$$+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\vec{x}^2-4\sqrt{2}t}-\sqrt{\vec{x}^2}}{\sqrt{\vec{x}^2-4\sqrt{2}t}+\sqrt{\vec{x}^2}}\right| - \frac{1}{4}\ln|\vec{x}^2-4\sqrt{2}t| + C_2,$$

де $\varepsilon = \pm 1$, $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

# Розділ 3

# Редукція системи нелінійних диференціальних рівнянь для векторного поля по підалгебрах афінної алгебри

Метою наших досліджень в цьому розділі є побудова точних розв'язків системи

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + H_l \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial H_k}{\partial t} + E_l \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3)$$

за допомогою симетрійної редукції по деяких підалгебрах афінної алгебри $AIGL(4, \mathbb{R})$. В переважній більшості випадків для цього використовуються лінійні анзаци, які можна ефективно конструювати за допомогою тверджень, доведених в параграфі 3.1. Якщо здійснюється пошук розв'язків, які не залежать від $m$ $(1 \leq m \leq 2)$ просторових змінних, то редукувати потрібно не всю систему, а лише підсистему такого ж типу, що містить $6 - 2m$ рівнянь. В параграфі 3.2 лінійні анзаци ми будуємо по підалгебрах алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$ (випадок $m = 2$), в параграфі 3.3 — по підалгебрах алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$ (випадок $m = 1$), а в параграфі 3.4 — по підалгебрах алгебри Пуанкаре $AP(1, 3)$.

В параграфах 3.2–3.4 знайдено також розв'язки багатьох редукованих систем. По цих розв'язках і по анзацах відтворюємо відповідні їм інваріантні розв'язки досліджуваної системи диференціальних рівнянь. Щоб з них одержати багатопараметричні розв'язки, потрібно застосувати формули розмноження розв'язків, виписані в роботі [72].

## 3.1. Лінійні анзаци

Щоб охопити всі випадки, які виникають при виконанні симетрійної редукції, розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_0} + H_l \frac{\partial E_k}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial H_k}{\partial x_0} + E_l \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = 0 \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

де $n$ — довільне натуральне число, а $x_0 = t$. Такими ж міркуваннями, як і в [72], одержуємо, що алгеброю інваріантності системи (3.1) є афінна алгебра $AIGL(n+1, \mathbb{R})$, базис якої утворюють векторні поля:

$$\begin{aligned}
&P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n),\\
&\Gamma_{00} = -x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + E_l \frac{\partial}{\partial E_l} + H_l \frac{\partial}{\partial H_l} \quad (l = 1, \ldots, n),\\
&\Gamma_{aa} = -x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - E_a \frac{\partial}{\partial E_a} - H_a \frac{\partial}{\partial H_a} \quad (\text{немає сумування по } a),\\
&\Gamma_{0a} = -x_a \frac{\partial}{\partial x_0} + E_a E_k \frac{\partial}{\partial E_k} + H_a H_k \frac{\partial}{\partial H_k} \quad (k = 1, \ldots, n),\\
&\Gamma_{a0} = -x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{\partial}{\partial E_a} - \frac{\partial}{\partial H_a},\\
&\Gamma_{ac} = -x_c \frac{\partial}{\partial x_a} - E_c \frac{\partial}{\partial E_a} - H_c \frac{\partial}{\partial H_a} \quad (a \neq c;\ a, c = 1, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Підалгебру Лі алгебри $AIGL(n+1, \mathbb{R})$ утворює лінійна оболонка системи операторів, одержаної з базису (3.2) в результаті вилучення операторів $\Gamma_{0a}$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$. Цю підалгебру позначимо через $Q$ і назвемо *лінійною частиною* алгебри інваріантності системи (3.1).

Кожен оператор $Y \in Q$ можна подати у вигляді

$$Y = a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + b_{ij} \left( E_j \frac{\partial}{\partial E_i} + H_j \frac{\partial}{\partial H_i} \right) + c_i \left( \frac{\partial}{\partial E_i} + \frac{\partial}{\partial H_i} \right), \tag{3.3}$$

де $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; $b_{ij}$, $c_i$ — дійсні числа; $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

**Означення.** Інваріант підалгебри лінійної частини, який є лінійною функцією відносно змінних $E_a$, $H_a$ $(a = 1, \ldots, n)$, будемо називати *лінійним.*

Нехай

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.1.** *Система функцій $f_q = u_{qi}(x)E_i + v_q(x)$, $q = 1, 2, \ldots, n$, є системою лінійних інваріантів оператора $Y$, функціонально незалежних відносно змінних $E_1, E_2, \ldots, E_n$, тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB = 0, \quad a_\alpha(x)\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_\alpha} + U\vec{C} = 0 \tag{3.4}$$

*і* $\det U \neq 0$ *в деякій області простору точок $x$.*

**Доведення.** Очевидно,

$$Y(f_q) = a_\alpha(x)\frac{\partial u_{qi}(x)}{\partial x_\alpha}E_i + a_\alpha(x)\frac{\partial v_q(x)}{\partial x_\alpha} + b_{ij}u_{qi}E_j + c_i u_{qi}.$$

Тому $Y(f_q) = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$a_\alpha(x)\frac{\partial u_{qi}}{\partial x_\alpha} + u_{ql}b_{li} = 0, \quad a_\alpha(x)\frac{\partial v_q}{\partial x_\alpha} + u_{ql}c_l = 0$$

для всіх значень $i, q = 1, 2, \ldots, n$. Цю систему рівнянь можна переписати у вигляді матричних рівнянь (3.4).

Матриця $U$ є матрицею Якобі для функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ відносно змінних $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Тому система цих функцій є функціонально незалежною тоді і тільки тоді, коли $\det U \neq 0$ в деякій області простору точок $x$. Теорему доведено.

**Твердження 3.1.** *Нехай $B \neq 0$. Матриця $U = \exp(f(x)B)$ задовольняє перше рівняння системи (3.4) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = -1.$$

**Доведення.** Оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} UB,$$

то $U$ задовольняє перше рівняння системи (3.4) тоді і тільки тоді, коли

$$\left(a_\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + 1\right) UB = 0.$$

Остання рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$a_\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + 1 = 0.$$

Твердження доведено.

**Твердження 3.2.** *Нехай*

$$Y_1 = a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \ldots, \qquad Y_2 = a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \ldots$$

*— оператори вигляду (3.3) і нехай відповідні їм матриці $B_1$ і $B_2$ комутують між собою, а також є лінійно незалежними. Матриця $U = \exp(f(x)B_1) \times \exp(g(x)B_2)$ задовольняє систему рівнянь*

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_1 = 0, \qquad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_2 = 0 \tag{3.5}$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{aligned} &a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha} + 1 = 0, \qquad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha} = 0, \\ &a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha} + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Доведення.** Матриця $U$ задовольняє систему (3.5) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha}UB_1 + a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha}UB_2 + UB_1 = 0, \\ a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha}UB_1 + a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha}UB_2 + UB_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки матриці $B_1$ і $B_2$ є лінійно незалежними, то останнє має місце тоді і тільки тоді, коли справджуються рівності (3.6). Твердження доведено.

**Твердження 3.3.** *Нехай*

$$Y_1 = a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \ldots, \qquad Y_2 = a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \ldots$$

*— оператори вигляду (3.3) і нехай відповідні їм матриці $B_1$ і $B_2$ пов'язані співвідношенням $[B_2, B_1] = B_2B_1 - B_1B_2 = \lambda B_1$, $\lambda \neq 0$. Матриця $U = \exp(f(x)B_1)\exp(g(x)B_2)$ задовольняє систему рівнянь (3.5) тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{aligned} &a_\alpha^{(1)}(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda g(x)}\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha} + 1 = 0, \qquad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha} = 0, \\ &a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha} + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

**Доведення.** Оскільки на підставі формули Кемпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(\theta B_2)\cdot B_1\cdot\exp(-\theta B_2) = B_1 + \frac{\lambda\theta}{1!}B_1 + \frac{(\lambda\theta)^2}{2!}B_1 + \cdots = \mathrm{e}^{\lambda\theta}\,B_1,$$

то

$$B_1\exp(g(x)B_2) = \mathrm{e}^{-\lambda g(x)}\exp(g(x)B_2)B_1.$$

Матриця $U$ задовольняє систему (3.5) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{e}^{-\lambda g(x)}\,UB_1 + a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha}UB_2 + UB_1 = 0, \\ a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{e}^{-\lambda g(x)}\,UB_1 + a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_\alpha}UB_2 + UB_2 = 0. \end{cases}$$

За умовою $[B_2, B_1] \neq 0$, тому матриці $B_1$ і $B_2$ є лінійно незалежними. Прирівнявши до нуля вирази перед $B_1$ і $B_2$ в лівих частинах записаних рівностей, одержимо рівності (3.7). Твердження доведено.

**Твердження 3.4.** *Нехай*

$$\begin{aligned} Y_j = a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik}^{(j)}\left(E_k\frac{\partial}{\partial E_i} + H_k\frac{\partial}{\partial H_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{3} c_i^{(j)}\left(\frac{\partial}{\partial E_i} + \frac{\partial}{\partial H_i}\right) \quad (j=1,2,3) \end{aligned} \tag{3.8}$$

*— оператори виду (3.3) і нехай відповідні їм матриці $B_1$, $B_2$, $B_3$ є лінійно незалежними і задовольняють комутаційні співвідношення*

$$[B_3, B_j] = B_j \quad (j=1,2), \qquad [B_1, B_2] = 0.$$

*Матриця $U = \prod\limits_{i=1}^{3} \exp[f_i(x)B_i]$ задовольняє систему рівнянь*

$$a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_j = 0 \qquad (j=1,2,3) \tag{3.9}$$

*тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{e}^{-f_3} + 1 = 0, \qquad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{e}^{-f_3} + 1 = 0, \qquad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0.$$

**Доведення.** На підставі формули Кемпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(\theta B_3)\cdot B_j\cdot\exp(-\theta B_3) = B_j + \frac{\theta}{1!}B_j + \frac{\theta^2}{2!}B_j + \cdots = \mathrm{e}^{\theta} B_j \quad (j=1,2).$$

Отже,

$$B_j \exp(\theta B_3) = \mathrm{e}^{-\theta}\exp(\theta B_3) B_j \quad (j=1,2).$$

Тому

$$a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}=a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\exp(f_1B_1)B_1\exp(f_2B_2)\exp(f_3B_3)+$$

$$+a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\exp(f_1B_1)\exp(f_2B_2)B_2\exp(f_3B_3)+$$

$$+a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}\exp(f_1B_1)\exp(f_2B_2)\exp(f_3B_3)fB_3=$$

$$=a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\mathrm{e}^{-f_3}UB_1+a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\mathrm{e}^{-f_3}UB_2+a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}UB_3.$$

Звідси випливає, що

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+UB_1=0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\mathrm{e}^{-f_3}+1=0,\quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}=0,\quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}=0.$$

Подібно

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+UB_2=0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}=0,\quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\mathrm{e}^{-f_3}+1=0,\quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}=0.$$

Нарешті,

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+UB_3=0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}=0,\quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}=0,\quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}+1=0.$$

Твердження доведено.

**Твердження 3.5.** *Нехай* $Y_j \quad (j = 1, 2, 3)$ — *оператори (3.8) і нехай відповідні їм матриці* $B_1$, $B_2$, $B_3 = B_3' + B_3''$ *є лінійно незалежними і задовольняють комутаційні співвідношення*

$$[B_3', B_j] = \rho B_j \quad (j = 1, 2), \quad [B_3'', B_1] = -B_2, \quad [B_3'', B_2] = B_1,$$

$$[B_3', B_3''] = 0, \quad [B_1, B_2] = 0.$$

*Матриця* $U = \prod\limits_{i=1}^{3} \exp[f_i(x)B_i]$ *задовольняє систему рівнянь (3.9) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = -\,\mathrm{e}^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = \mathrm{e}^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = -\,\mathrm{e}^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = -\,\mathrm{e}^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0.$$

**Доведення.** Застосуємо формулу Кемпбелла–Хаусдорфа:

$$\exp(\theta B_3)(\gamma B_1 + \delta B_2)\exp(-\theta B_3) =$$

$$= \exp(\theta B_3'')\exp(\theta B_3')(\gamma B_1 + \delta B_2)\exp(\theta B_3')\exp(\theta B_3'') =$$

$$= \mathrm{e}^{\rho\theta}\left\{\gamma B_1 + \delta B_2 + \frac{\theta}{1!}(-\gamma B_2 + \delta B_1) + \frac{\theta^2}{2!}(-\gamma B_1 - \delta B_2) + \cdots\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{\rho\theta}\left\{(\gamma B_1 + \delta B_2)\cos\theta + (-\gamma B_2 + \delta B_1)\sin\theta\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{\rho\theta}\left\{(\gamma\cos\theta + \delta\sin\theta)B_1 + (\delta\cos\theta - \gamma\sin\theta)B_2\right\}.$$

Отже,

$$(\gamma B_1 + \delta B_2)\exp(\theta B_3) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\rho\theta}\exp(\theta B_3)\left\{(\gamma\cos\theta - \delta\sin\theta)B_1 + (\delta\cos\theta + \gamma\sin\theta)B_2\right\}.$$

На підставі цієї формули одержуємо

$$a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}U\,\mathrm{e}^{-\rho f_3}(\cos f_3 B_1 + \sin f_3 B_2) +$$

$$+ a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}U\,\mathrm{e}^{-\rho f_3}(-\sin f_3 B_1 + \cos f_3 B_2) + a_\alpha^{(j)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}UB_3.$$

Звідси випливає, що

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_1 = 0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\cos f_3 - a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\sin f_3 + \mathrm{e}^{\rho f_3} = 0, \\ a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\sin f_3 + a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\cos f_3 = 0, \\ a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0. \end{cases}$$

Якщо отриману систему розглядати як лінійну неоднорідну систему відносно змінних $a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}$, $a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}$, $a_\alpha^{(1)}(x)\dfrac{\partial f_3}{\partial x_\alpha}$, то вона еквівалентна системі

$$a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = -\,\mathrm{e}^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = \mathrm{e}^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_2 = 0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\cos f_3 - a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\sin f_3 = 0, \\ a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\sin f_3 + a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\cos f_3 + \mathrm{e}^{\rho f_3} = 0, \\ a_\alpha^{(2)}(x)\dfrac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0 \end{cases}$$

або

$$a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = \mathrm{e}^{\rho f_3}\sin f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = \mathrm{e}^{\rho f_3}\cos f_3, \quad a_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Рівність

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + UB_3 = 0$$

має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_\alpha^{(3)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\cos f_3 - a_\alpha^{(3)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\sin f_3 = 0, \\ a_\alpha^{(3)}(x)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}\sin f_3 + a_\alpha^{(3)}(x)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}\cos f_3 = 0, \\ a_\alpha^{(3)}(x)\dfrac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0 \end{cases}$$

або

$$a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} = 0, \quad a_\alpha^{(3)}(x)\frac{\partial f_3}{\partial x_\alpha} + 1 = 0.$$

Твердження доведено.

Розглядувана нами афінна алгебра $AIGL(n+1,\mathbb{R})$ є підпрямою сумою афінної алгебри $AIGL(n+1,\mathbb{R})'$ з базисними елементами

$$\Gamma'_{\alpha\beta} = -x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad P'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha,\beta = 0,1,\ldots,n)$$

і повної лінійної алгебри $AGL(n+1,\mathbb{R})''$ з базисними елементами

$$\Gamma''_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma'_{\alpha\beta}.$$

**Твердження 3.6.** *Нехай $L$ — підалгебра алгебри $AIGL(n+1,\mathbb{R})$, породженої векторними полями (3.2), $r$ — ранг $L$, а $r'$ — ранг проекції $L$ на $AIGL(n+1,\mathbb{R})'$. Якщо $r = r'$, то $\dim L = r$.*

**Доведення.** Припустимо супротивне: $\dim L > r$. Нехай $X_1, \ldots, X_m$ — який-небудь базис $L$ і нехай ранг функціональної матриці, яка відповідає проекціям операторів $X_1, \ldots, X_r$ на $AIGL(n+1, \mathbb{R})'$, дорівнює $r$. Можна вважати, що лінійна оболонка системи операторів $X_1, \ldots, X_r$ містить $L \cap V$, де $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$. Позначимо через $M_0 = (x_0^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ точку, в якій ранг функціональної матриці, що відповідає проекціям операторів $X_1, \ldots, X_r$ на $AIGL(n+1, \mathbb{R})'$, дорівнює $r$, а через $X_1^\circ, \ldots, X_r^\circ$, $X_{r+1}^\circ, \ldots, X_m^\circ$ — значення векторних полів $X_1, \ldots, X_r$, $X_{r+1}, \ldots, X_m$ відповідно в точці $M_0$. На підставі означення рангу матриці $\alpha_1 X_1^\circ + \cdots + \alpha_r X_r^\circ + X_{r+1}^\circ \in AGL(n+1, \mathbb{R})''$ для деяких дійсних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Якби таке поле було нульовим, то векторне поле $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r + X_{r+1}$ належало б до $L \cap V$, а отже, було б нульовим. Одержане протиріччя доводить, що розглядуване поле є ненульовим. Тому функціональна матриця, яка складається для векторних полів $X_1, \ldots, X_r$, $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r + X_{r+1}$, має в деякій точці $(x_0^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, \ldots, E_1^\circ, \ldots, E_n^\circ, H_1^\circ, \ldots, H_n^\circ)$ (перші координати такі ж, як і у точки $M_0$) ненульовий мінор порядку $r+1$, а це суперечить умові теореми. Отже, $\dim L = r$. Теорему доведено.

На підставі твердження 3.6 та необхідної умови існування невироджених інваріантних розв'язків (див. [21], с. 249) доходимо висновку, що для редукції системи (3.1) до систем звичайних диференціальних рівнянь нам потрібні $n$-вимірні підалгебри алгебри $AIGL(n+1, \mathbb{R})$, які мають тільки один основний інваріант від змінних $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Неважко переконатися, що система (3.1) є інваріантною відносно перетворення

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2, \; \ldots, \; x_n' = x_n,$$

$$E_1' = -E_1, \quad E_2' = E_2, \; \ldots, \; E_n' = E_n,$$

$$H_1' = -H_1, \quad H_2' = H_2, \; \ldots, \; H_n' = H_n.$$

Тому підалгебри алгебри $AIGL(n+1, \mathbb{R})$ можна розглядати з точністю до афінної спряженості.

Нехай

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\\vdots\\E_n\end{pmatrix},\qquad \vec{H}=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\\\vdots\\H_n\end{pmatrix},\qquad \vec{V}=\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\\\vdots\\v_n(x)\end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що коли для деякої $n\times n$-матриці $U=U(x)$ компоненти вектор-функції $U\vec{E}+\vec{V}$ є лінійними інваріантами підалгебри $F\subset Q$, то лінійними інваріантами цієї підалгебри $F$ є також компоненти вектор-функції $U\vec{H}+\vec{V}$.

Для симетрійної редукції системи (3.1) до систем ЗДР нам потрібні такі $n$-вимірні підалгебри алгебри $F$, які мають один основний інваріант $\omega$, що залежить тільки від змінних $x_0, x_1, \ldots, x_n$. По таких підалгебрах будемо конструювати анзаци вигляду

$$U\vec{E}+\vec{V}=\vec{M}(\omega),\qquad U\vec{H}+\vec{V}=\vec{N}(\omega),\tag{3.10}$$

де $\vec{M}(\omega)$, $\vec{N}(\omega)$ — невідомі $n$-компонентні функції, а матриці $U$, $\vec{V}$ є відомими, при цьому $\det U\neq 0$ в деякій області простору точок $x$. Анзац (3.10) можна подати у вигляді

$$\vec{E}=U^{-1}\vec{M}(\omega)-U^{-1}\vec{V},\qquad \vec{H}=U^{-1}\vec{N}(\omega)-U^{-1}\vec{V}.\tag{3.11}$$

Анзаци вигляду (3.10) або (3.11) називаємо *лінійними*. При їх відшуканні використовуємо доведені твердження.

## 3.2. Точні розв'язки, що є функціями від $t$ і $x_1$

В цьому випадку функції $E_1$, $H_1$ є компонентами розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial E_1}{\partial t}+H_1\frac{\partial E_1}{\partial x_1}=0,\qquad \frac{\partial H_1}{\partial t}+E_1\frac{\partial H_1}{\partial x_1}=0,\tag{3.12}$$

функції $E_2$, $E_3$ є розв'язками однорідного рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}+H_1\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1}=0,\tag{3.13}$$

а функції $H_2$, $H_3$ є розв'язками однорідного рівняння

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+E_1\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_1}=0. \tag{3.14}$$

Як відмічалося в параграфі 3.1, алгеброю інваріантності системи (3.12) є афінна алгебра $AIGL(2,\mathbb{R})$, в якій виберемо базис таким чином:

$$D=t\frac{\partial}{\partial t}-x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-2E_1\frac{\partial}{\partial E_1}-2H_1\frac{\partial}{\partial H_1},$$

$$S=x_1\frac{\partial}{\partial t}-E_1^2\frac{\partial}{\partial E_1}-H_1^2\frac{\partial}{\partial H_1},\quad T=t\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial E_1}+\frac{\partial}{\partial H_1},$$

$$P_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad P_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad Z=t\frac{\partial}{\partial t}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

З точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів алгебра $AIGL(2,\mathbb{R})$ має такі одновимірні підалгебри [6]:

$$F_1=\langle D-\alpha Z\rangle\ (\alpha\geq 0,\,\alpha\neq 1),\ F_2=\langle D-Z-2\alpha P_0\rangle\ (\alpha\in\mathbb{R}),$$

$$F_3=\langle Z\rangle,\ F_4=\langle P_1\rangle,\ F_5=\langle T+\alpha P_0\rangle,$$

$$F_6=\langle T+\alpha Z\rangle\ (\alpha\neq 0),\ F_7=\langle T-S+\alpha Z\rangle\ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

Використовуючи ці підалгебри, проведемо редукцію системи (3.12) до систем ЗДР, по розв'язках яких відшукаємо відповідні розв'язки системи (3.12), а потім і системи (3.1) для $n=3$. Якщо функція $E_1(t,x_1)$ не є сталою, то кожен розв'язок рівняння (3.13) можна подати у вигляді $\psi(E_1(t,x_1))$, де $\psi$ — деяка диференційовна функція. Окрім того, для кожної диференційовної функції $\psi$ функція $\psi(E_1(t,x_1))$ є розв'язком рівняння (3.13). Таке саме можна сказати і про рівняння (3.14).

**3.2.1**. $F_1:\ E_1=\dfrac{x_1}{t}M_1(\omega),\ H_1=\dfrac{x_1}{t}N_1(\omega),\ \omega=t^{\frac{1}{1-\alpha}}x_1^{\frac{1}{1+\alpha}},$

$$-M_1+\frac{\omega}{1-\alpha}\dot M_1+N_1\left(M_1+\frac{\omega}{1+\alpha}\dot M_1\right)=0,$$
$$-N_1+\frac{\omega}{1-\alpha}\dot N_1+M_1\left(N_1+\frac{\omega}{1+\alpha}\dot N_1\right)=0.$$

**3.2.2.** $F_2\ (\alpha \neq 0):\ E_1 = x_1 M_1(\omega),\ H_1 = x_1 N_1(\omega),\ \omega = \dfrac{1}{x_1} \mathrm{e}^{\frac{t}{\alpha}},$

$$\frac{1}{\alpha}\omega \dot{M}_1 + N_1(M_1 - \omega \dot{M}_1) = 0, \quad \frac{1}{\alpha}\omega \dot{N}_1 + M_1(N_1 - \omega \dot{N}_1) = 0.$$

**3.2.3.** $F_2\ (\alpha = 0):\ E_1 = x_1 M_1(\omega),\ H_1 = x_1 N_1(\omega),\ \omega = t,$

$$\dot{M}_1 + N_1 M_1 = 0, \quad \dot{N}_1 + M_1 N_1 = 0.$$

Якщо $M_1 = N_1$, то $E_1 = \dfrac{x_1}{t + C'}$, $H_1 = \dfrac{x_1}{t + C'}$, а $E_2$, $E_3$, $H_2$, $H_3$ є довільними функціями від $\dfrac{x_1}{t + C'}$. Якщо $M_1 = N_1 + C$, $C \neq 0$, то

$$E_1 = \frac{C x_1}{1 - \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-Ct}}, \qquad H_1 = \frac{C\tilde{C} x_1\,\mathrm{e}^{-Ct}}{1 - \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-Ct}}.$$

Компоненти $E_2$, $E_3$ можуть бути довільними функціями від $\dfrac{C x_1}{1 - \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-Ct}}$, а компоненти $H_2$, $H_3$ — довільними функціями від $\dfrac{C\tilde{C} x_1\,\mathrm{e}^{-Ct}}{1 - \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-Ct}}$.

**3.2.4.** $F_3:\ E_1 = M_1(\omega),\ H_1 = N_1(\omega),\ \omega = \dfrac{x_1}{t},$

$$-\omega \dot{M}_1 + N_1 \dot{M}_1 = 0, \quad -\omega \dot{N}_1 + M_1 \dot{N}_1 = 0.$$

Якщо $\dot{M}_1 \neq 0$, $\dot{N}_1 \neq 0$, то приходимо до розв'язку $E_1 = H_1 = \dfrac{x_1}{t}$, а компоненти $E_2$, $E_3$, $H_2$, $H_3$ є довільними функціями від $\dfrac{x_1}{t}$.

**3.2.5.** $F_5\ (\alpha \neq 0):\ E_1 = \dfrac{1}{\alpha} t + M_1(\omega),$

$$H_1 = \frac{1}{\alpha} t + N_1(\omega),\ \omega = x_1 - \frac{t^2}{2\alpha},$$

$$\frac{1}{\alpha} + N_1 \dot{M}_1 = 0, \quad \frac{1}{\alpha} + M_1 \dot{N}_1 = 0.$$

Розв'язком редукованої системи є пара функцій

$$M_1 = (C\omega + C')^{\frac{1}{2}}, \qquad N_1 = -\frac{2}{\alpha C}(C\omega + C')^{\frac{1}{2}},$$

а відповідний розв'язок системи (3.12) має вигляд

$$E_1 = \frac{t}{\alpha} + \left[C\left(x_1 - \frac{t^2}{2\alpha}\right) + C'\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$H_1 = \frac{t}{\alpha} - \frac{2}{\alpha C}\left[C\left(x_1 - \frac{t^2}{2\alpha}\right) + C'\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Компоненти $E_2$, $E_3$ є довільними диференційовними функціями від $E_1$, а $H_2$, $H_3$ — довільними диференційовними функціями від $H_1$.

**3.2.6.** $F_5\ (\alpha = 0): \ E_1 = \dfrac{x_1}{t} + M_1(\omega), \ H_1 = \dfrac{x_1}{t} + N_1(\omega), \ \omega = t,$

$$\dot{M}_1 + \frac{1}{\omega}N_1 = 0, \quad \dot{N}_1 + \frac{1}{\omega}M_1 = 0.$$

Редукована система має розв'язок $M_1 = C\omega + \dfrac{\tilde{C}}{\omega}$, $N_1 = -C\omega + \dfrac{\tilde{C}}{\omega}$, а відповідним розв'язком системи (3.12) є

$$E_1 = \frac{x_1}{t} + Ct + \frac{\tilde{C}}{t}, \qquad H_1 = \frac{x_1}{t} - Ct + \frac{\tilde{C}}{t}.$$

Компоненти $E_2$, $E_3$ — довільні диференційовні функції від $E_1$, а компоненти $H_2$, $H_3$ — довільні диференційовні функції від $H_1$.

**3.2.7.** $F_6: \ E_1 = \dfrac{1}{\alpha}\ln t + M_1(\omega),$

$$H_1 = \frac{1}{\alpha}\ln t + N_1(\omega), \ \omega = \frac{x_1}{t} - \frac{1}{\alpha}\ln t,$$

$$\dot{M}_1\left(N_1 - \omega - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} = 0, \quad \dot{N}_1\left(M_1 - \omega - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

**3.2.8.** $F_7\ (\alpha \neq 0): \ \omega = \arctan\dfrac{x_1}{t} - \dfrac{1}{2\alpha}\ln(t^2 + x_1^2),$

$$E_1 = \frac{\frac{x_1}{t} + \tan M_1(\omega)}{1 - \frac{x_1}{t}\tan M_1(\omega)}, \; H_1 = \frac{\frac{x_1}{t} + \tan M_1(\omega)}{1 - \frac{x_1}{t}\tan M_1(\omega)},$$

$$\dot{M}_1(\alpha \tan N_1 - 1) + \alpha \tan N_1 = 0,$$
$$\dot{N}_1(\alpha \tan M_1 - 1) + \alpha \tan M_1 = 0.$$

**3.2.9.** $F_7 \; (\alpha = 0): \; E_1 = \dfrac{\frac{x_1}{t} + M_1(\omega)}{1 - \frac{x_1}{t}M_1(\omega)},$

$$H_1 = \frac{\frac{x_1}{t} + N_1(\omega)}{1 - \frac{x_1}{t}N_1(\omega)}, \; \omega = t^2 + x_1^2,$$

$$2\omega\dot{M}_1 + (1 + M_1^2)N_1 = 0, \quad 2\omega\dot{N}_1 + (1 + N_1^2)M_1 = 0.$$

Розв'язку $M_1 = N_1 = (C\omega - 1)^{-\frac{1}{2}}$ редукованої системи відповідає такий розв'язок системи (3.12):

$$E_1 = H_1 = \frac{1 + \frac{x_1}{t}\left[C(t^2 + x_1^2) - 1\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[C(t^2 + x_1^2) - 1\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1}{t}}.$$

Компоненти $E_2$, $E_3$, $H_2$, $H_3$ є довільними диференційовними функціями від $E_1$.

## 3.3. Точні розв'язки, які є функціями від $t$, $x_1$, $x_2$

Мова йтиме про розв'язки системи (3.1) при $n = 2$, які не є еквівалентними розв'язкам, що залежать тільки від $t$ і $x_1$. Щоб одержати такі розв'язки для системи (3.1) при $n = 2$, треба обмежитися при редукції використанням тільки тих двовимірних підалгебр алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$, які мають нульовий перетин з простором трансляцій $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$. Наведемо перелік таких підалгебр, спираючись на результати класифікації всіх підалгебр алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$ відносно афінної спряженості, виконаної в [6].

Нехай

$$B = \Gamma_{11} - \Gamma_{22}, \quad Z = -\Gamma_{11} - \Gamma_{22},$$

$$D = -2\Gamma_{00} - \Gamma_{11} - \Gamma_{22} + 2\Gamma_{33} \quad \text{(див. позначення (3.2))}.$$

З точністю до афінної спряженості алгебра $AIGL(3,\mathbb{R})$ містить тільки такі двовимірні підалгебри, що мають нульовий перетин з простором $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$:

$F_0 = \langle \Gamma_{12}, \Gamma_{10}\rangle$, $F_1 = \langle \Gamma_{10}, \Gamma_{20}\rangle$, $F_2 = \langle P_2 - \Gamma_{10}, \varepsilon P_1 - \Gamma_{20}\rangle$ $(\varepsilon = 0, 1)$,

$F_3 = \langle \Gamma_{10}, P_2 - \Gamma_{20}\rangle$, $F_4 = \langle P_2 - \Gamma_{12}, \varepsilon P_0 - \Gamma_{10}\rangle$ $(\varepsilon = \pm 1)$,

$F_5 = \langle P_2 - \Gamma_{12}, \Gamma_{10}\rangle$, $F_6 = \langle \Gamma_{12} + \Gamma_{20}, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_7 = \langle \Gamma_{12} + \Gamma_{20}, P_1 - \Gamma_{10}\rangle$, $F_8 = \langle D + Z, \Gamma_{12}\rangle$,

$F_9 = \langle D + Z, \Gamma_{12} + \Gamma_{20}\rangle$, $F_{10} = \langle D + Z - 2\Gamma_{12}, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{11} = \langle D + Z - 2\Gamma_{12} - 2\Gamma_{20}, \Gamma_{10}\rangle$, $F_{12} = \langle D + Z - 2\Gamma_{10}, \Gamma_{20}\rangle$,

$F_{13} = \langle D + Z - 2\Gamma_{10}, \Gamma_{12} + \Gamma_{20}\rangle$, $F_{14} = \langle D + \alpha Z, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{15} = \langle Z, \Gamma_{10}\rangle$, $F_{16} = \langle Z - D + 2P_1, \Gamma_{10}\rangle$, $F_{17} = \langle Z - D + 2P_2, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{18} = \langle D + 3Z, P_0 - \Gamma_{10}\rangle$, $F_{19} = \langle Z, P_2 - \Gamma_{10}\rangle$, $F_{20} = \langle D + \alpha Z, \Gamma_{12}\rangle$,

$F_{21} = \langle Z, \Gamma_{12}\rangle$, $F_{22} = \langle Z - D + 2P_1, \Gamma_{12}\rangle$,

$F_{23} = \langle Z - D + 2P_1, P_2 - \Gamma_{12}\rangle$, $F_{24} = \langle Z - D, P_2 - \Gamma_{12}\rangle$,

$F_{25} = \langle Z + \alpha P_0, \beta P_0 - \Gamma_{12}\rangle$ $(\alpha, \beta = 0, 1;\ \alpha + \beta = 1)$,

$F_{26} = \langle Z - \Gamma_{12}, D + Z\rangle$, $F_{27} = \langle D + \alpha Z - \beta\Gamma_{12}, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{28} = \langle Z - \alpha\Gamma_{12}, \Gamma_{10}\rangle$, $F_{29} = \langle Z - D - 2\Gamma_{12} + 2P_2, \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{30} = \langle Z - \Gamma_{12} + P_0, P_2 - \Gamma_{10}\rangle$, $F_{31} = \langle D + 3Z - 2\Gamma_{12}, P_0 - \Gamma_{10}\rangle$,

$F_{32} = \langle Z - \alpha\Gamma_{12}, D + Z - 2\Gamma_{12}\rangle$, $F_{33} = \langle B + \alpha D + (1 + \alpha)Z, \Gamma_{20}\rangle$,

$F_{34} = \langle B + D + 2Z, P_1 - \Gamma_{20}\rangle,\ F_{35} = \langle B + D + 2Z, P_0 - \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{36} = \langle B - D + P_2, \Gamma_{20}\rangle,\ F_{37} = \langle B + Z + P_1, \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{38} = \langle B + \alpha D + (1+\alpha)Z - \Gamma_{10}, \Gamma_{20}\rangle,\ F_{39} = \langle B - D - \Gamma_{10} + P_2, \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{40} = \langle B + Z - \Gamma_{10}, P_2 - \Gamma_{20}\rangle,\ F_{41} = \langle B + D + 2Z - \Gamma_{10}, P_1 - \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{42} = \langle B + \alpha D + \beta Z, \Gamma_{12}\rangle,\ F_{43} = \langle B + 2Z - D + P_1, P_0 - \Gamma_{12}\rangle,$

$F_{44} = \langle B + \alpha D + (1-\alpha)Z + P_1, \Gamma_{12}\rangle\ (\alpha \neq 0, 1),$

$F_{45} = \langle B - 3Z + P_0, P_2 - \Gamma_{12}\rangle,\ F_{46} = \langle B + \alpha Z + P_0, \Gamma_{12}\rangle\ (\alpha \neq \pm 1),$

$F_{47} = \langle B + \alpha D - (\alpha+3)Z, P_2 - \Gamma_{12}\rangle\ (\alpha \neq -1, -2),$

$F_{48} = \langle B + (\alpha-1)Z - D, P_0 - \Gamma_{12}\rangle\ (\alpha \neq \pm 1),$

$F_{49} = \langle B + \alpha D + (\alpha-3)Z, \Gamma_{12} + \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{50} = \langle B + 2D - Z + P_1, \Gamma_{12} + \Gamma_{20}\rangle,$

$F_{51} = \langle B - D - 4Z, -\Gamma_{12} - \Gamma_{20} + P_0\rangle,$

$F_{52} = \langle \Gamma_{21} - \Gamma_{12} + \alpha Z, D + Z\rangle\ (\alpha \geq 0),$

$F_{53} = \langle D, Z\rangle,\ F_{54} = \langle B + \alpha Z, D + Z\rangle\ (0 \leq \alpha < 1),$

$F_{55} = \langle B + \alpha(D+Z), Z + \beta(D+Z)\rangle\ (\alpha \geq 3\beta + 1),$

$F_{56} = \langle B + D, Z\rangle,\ F_{57} = \langle 2B + D + Z, D - Z\rangle,$

$F_{58} = \langle 2B + D + Z + 2P_1, D - Z + \alpha P_1\rangle,$

$F_{59} = \langle 2B + D + Z, Z - D + 2P_1\rangle,$

$F_{60} = \langle \Gamma_{21} - \Gamma_{12} + \alpha(D+Z), Z + \beta(D+Z)\rangle\ (\alpha \geq 0),$

$$F_{61} = \langle \Gamma_{21} - \Gamma_{12} + P_0, Z + \alpha P_0 \rangle \ (\alpha \geq 0), \ F_{62} = \langle \Gamma_{21} - \Gamma_{12}, Z + P_0 \rangle.$$

З цього переліку вилучаємо підалгебру $\langle \Gamma_{12}, \Gamma_{10} \rangle$, ранг якої відносно змінних $t$, $x_1$, $x_2$ дорівнює 1.

Наведемо результати симетрійної редукції системи (3.1) при $n = 2$, виконаної за допомогою поданих підалгебр. Кожній з підалгебр $F_j$ ($j = 1, \ldots, 59$) відповідає лінійний анзац $\vec{E} = \Lambda \vec{M}(\omega) + \vec{W}$, $\vec{H} = \Lambda \vec{N}(\omega) + \vec{W}$, де $\Lambda$, $\vec{W}$ — відомі матриці, а $\vec{M}(\omega)$, $\vec{N}(\omega)$ — невідомі двокомпонентні вектор-функції. Для скорочення запису будемо виписувати тільки значення $\Lambda$ та $\vec{W}$. З чотирьох рівнянь редукованих систем подамо тільки перші два рівняння; останні два рівняння можна одержати з перших двох в результаті перетворення $M_i \to N_i$, $N_i \to M_i$ ($i = 1, 2$). Розв'язки вказуємо тільки для редукованих систем, оскільки по цих розв'язках і по анзацу легко відтворити відповідний інваріантний розв'язок системи (3.1) при $n = 2$. Компоненту $E_3$ розв'язку системи рівнянь (3.1) при $n = 2$ можна розглядати як розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} + H_1 \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + H_2 \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0, \tag{3.15}$$

а $H_3$ — як розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} + E_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0. \tag{3.16}$$

Якщо функції $E_1(t, x_1, x_2)$, $E_2(t, x_1, x_2)$ є функціонально незалежними в деякій області $\Gamma$, то кожен розв'язок (3.15) можна подати в цій області у вигляді $\psi(E_1(t, x_1, x_2), E_2(t, x_1, x_2))$, де $\psi$ — деяка диференційовна функція. Крім того, для довільної диференційовної функції $\psi$ функція $\psi(E_1(t, x_1, x_2), E_2(t, x_1, x_2))$ від змінних $t$, $x_1$, $x_2$ є розв'язком рівняння (3.15). Аналогічне можна сказати і про рівняння (3.16).

**3.3.1.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \dfrac{1}{t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\omega = t$, $\begin{cases} \omega \dot{M}_1 + N_1 = 0, \\ \omega \dot{M}_2 + N_2 = 0. \end{cases}$

Розв'язок: $M_1 = C_1\omega + \dfrac{C_2}{\omega}$, $N_1 = -C_1\omega + \dfrac{C_2}{\omega}$, $M_2 = C_3\omega + \dfrac{C_4}{\omega}$, $N_2 = -C_3\omega + \dfrac{C_4}{\omega}$.

**3.3.2.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \dfrac{1}{t^2-\varepsilon}\begin{pmatrix} tx_1 - \varepsilon x_2 \\ tx_2 - x_1 \end{pmatrix}$, $\omega = t$,

$$\omega N_1 - \varepsilon N_2 + (\omega^2-\varepsilon)\dot{M}_1 = 0, \quad -N_1 + \omega N_2 + (\omega^2-\varepsilon)\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язки при $\varepsilon = 1$: $M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = \dfrac{C}{\omega+1}$ та $M_1 = N_1 = -M_2 = -N_2 = \dfrac{C}{\omega-1}$; при $\varepsilon = 0$: $M_1 = N_1 = \dfrac{C_1}{\omega}$, $M_2 = N_2 = -\dfrac{C_1}{\omega^2} + \dfrac{C_2}{\omega}$.

**3.3.3.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\dfrac{x_1}{t}, \quad \dfrac{x_2}{t+1}\right)$, $\omega = t$,

$$N_1 + \omega\dot{M}_1 = 0, \quad N_2 + (\omega+1)\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = C_1\omega + \dfrac{C_2}{\omega}$, $M_2 = C_3(\omega+1) + \dfrac{C_4}{\omega+1}$, $N_1 = -C_1\omega + \dfrac{C_2}{\omega}$, $N_2 = -C_3(\omega+1) + \dfrac{C_4}{\omega+1}$.

**3.3.4.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} \varepsilon t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = t^2 - 2\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2^2$,

$$\varepsilon - 2\varepsilon N_1\dot{M}_1 + M_2 N_2 = 0, \quad N_1\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язки: $M_1 = N_1 = 0$, $M_2 = M(\omega)$, $N_2 = -\dfrac{\varepsilon}{M(\omega)}$, де $M(\omega)$ — довільна ненульова диференційовна функція; $M_1 = 0$, $M_2 = C$, $N_1 = N(\omega)$, $N_2 = -\dfrac{\varepsilon}{C}$, де $N(\omega)$ — довільна диференційовна функція.

**3.3.5.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\dfrac{x_1}{t} - \dfrac{x_2^2}{2t}, \quad 0\right)$, $\omega = t$,

$$\omega\dot{M}_1 + N_1 + \omega M_2 N_2 = 0, \quad \dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = C_3\omega + \dfrac{C_4}{\omega}$, $N_1 = -(C_1C_2 + C_3)\omega + \dfrac{C_4}{\omega}$, $M_2 = C_1$, $N_2 = C_2$.

**3.3.6.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_2}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\omega = t$,

$$N_1 + M_2N_2 + \omega\dot{M}_1 = 0, \quad N_2 + \omega\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язок:

$$M_1 = \frac{C_1^2}{3}\omega^2 + \frac{C_2^2}{\omega^2} + C_3\omega + \frac{C_4}{\omega}, \quad M_2 = C_1\omega + \frac{C_2}{\omega},$$

$$N_1 = \frac{C_1^2}{3}\omega^2 + \frac{C_2^2}{\omega^2} - C_3\omega + \frac{C_4}{\omega}, \quad N_2 = -C_1\omega + \frac{C_2}{\omega}.$$

**3.3.7.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left( \frac{x_1}{1+t} + \frac{x_2^2}{2t^2(1+t)}, \quad \frac{x_2}{t} \right)$, $\omega = t$,

$$\dot{M}_1 + \frac{1}{1+\omega}N_1 + \frac{1}{\omega}M_2N_2 = 0, \quad N_2 + \omega\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язок:

$$M_1 = \frac{1}{1+\omega}\left( \frac{C_1^2}{2}\omega^2 + \frac{C_2^2}{2\omega^2} + \frac{C_1^2}{3}\omega^3 + \frac{C_2^2}{\omega} + C_3(1+\omega)^2 + C_4 \right),$$

$$N_1 = \frac{1}{1+\omega}\left( \frac{C_1^2}{2}\omega^2 + \frac{C_2^2}{2\omega^2} + \frac{C_1^2}{3}\omega^3 + \frac{C_2^2}{\omega} - C_3(1+\omega)^2 + C_4 \right),$$

$$M_2 = C_1\omega + \frac{C_2}{\omega}, \quad N_2 = -C_1\omega + \frac{C_2}{\omega}.$$

**3.3.8.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1}{x_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \frac{x_2}{t}$,

$$N_1M_2 + \omega N_2\dot{M}_1 - \omega^2\dot{M}_1 = 0, \quad \dot{M}_2(N_2 - \omega) = 0.$$

Розв'язки: $M_1 = N_1 = C_2\frac{\omega - C_1}{\omega}$, $M_2 = N_2 = C_1$ та $M_1 = N_1 = 0$, $M_2 = N_2 = \omega$.

**3.3.9.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_2}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left( \frac{x_2^2}{2t^2}, \quad \frac{x_2}{t} \right)$, $\omega = \frac{x_2^2 - 2tx_1}{t^2}$,

$$-\omega\dot{M}_1 - 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0, \quad -\omega\dot{M}_2 - 2N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.10.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \Bigl(\dfrac{x_1}{t} - \dfrac{x_2}{t}\ln t,\quad 0\Bigr)$, $\omega = \dfrac{x_2}{t}$,

$$-\omega(1+\dot{M}_1) + M_2 + N_1 + N_2\dot{M}_1 = 0, \quad \dot{M}_2(N_2-\omega) = 0.$$

Розв'язки:

$$M_1 = N_1 = -(\omega - C_2)\ln(\omega - C_2) + C_2 - C_1, \quad M_2 = C_1, \quad N_2 = C_2;$$

$$M_1 = N_1 = 0, \quad M_2 = N_2 = \omega.$$

**3.3.11.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \Bigl(\ln^2 t + \dfrac{x_1 - x_2\ln t}{t},\quad \ln t\Bigr)$,

$$\omega = \frac{x_2}{t} - \ln t,$$

$$-\omega - (1+\omega)\dot{M}_1 + M_2 + N_1 + N_2\dot{M}_1 = 0, \quad (1+\omega)\dot{M}_2 - N_2\dot{M}_2 = 1.$$

**3.3.12.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \Bigl(\ln t,\quad \dfrac{x_2 - x_1}{t} + \ln t\Bigr)$, $\omega = \dfrac{x_1}{t} - \ln t$,

$$(1+\omega)\dot{M}_1 - N_1\dot{M}_1 = 1, \quad (1+\omega)\dot{M}_2 + N_1 - N_2 - N_1\dot{M}_2 = 1.$$

**3.3.13.** $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_2}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \Bigl(\ln t + \dfrac{x_2^2}{2t^2},\quad \dfrac{x_2}{t}\Bigr)$,

$$\omega = \frac{x_2^2}{t^2} - \frac{2x_1}{t} + 2\ln t,$$

$$1 - (\omega-2)\dot{M}_1 - 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0, \quad -(\omega-2)\dot{M}_2 - 2N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.14.** $\Lambda = t^{\frac{\alpha-1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \Bigl(\dfrac{x_1}{t},\quad 0\Bigr)$, $\omega = \dfrac{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x_2}$,

$$\frac{\alpha-1}{2}M_1 + \frac{\alpha+1}{2}\omega\dot{M}_1 + N_1 - \omega^2N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$\frac{\alpha-1}{2}M_2 + \frac{\alpha+1}{2}\omega\dot{M}_2 - \omega^2N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.15.** $\Lambda = x_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \begin{pmatrix}\frac{x_1}{t}, & 0\end{pmatrix}$, $\omega = t$,

$$\omega\dot{M}_1 + N_1 + \omega M_1 N_2 = 0, \quad \dot{M}_2 + M_2 N_2 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_2}{\omega^2} + C_1\right)$, $N_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_2}{\omega^2} - C_1\right)$, $M_2 = N_2 = \frac{1}{\omega}$.

**3.3.16.** $\Lambda = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \begin{pmatrix}\frac{x_1 + \ln t}{t}, & 0\end{pmatrix}$, $\omega = x_2$,

$$1 - M_1 + N_1 + N_2\dot{M}_1 = 0, \quad -M_2 + N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.17.** $\Lambda = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \begin{pmatrix}\frac{x_1}{t}, & 0\end{pmatrix}$, $\omega = x_2 + \ln t$,

$$-M_1 + N_1 + N_2\dot{M}_1 = 0, \quad -M_2 + \dot{M}_2 + N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.18.** $\Lambda = \sqrt{x_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}$, $\omega = \frac{t^2 - 2x_1}{x_2}$,

$$1 - 2N_1\dot{M}_1 + \frac{1}{2}M_1N_2 - \omega N_2\dot{M}_1 = 0, \quad -2N_1\dot{M}_2 + \frac{1}{2}M_2N_2 - \omega N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.19.** $\Lambda = (x_1 - tx_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix}x_2\\ 0\end{pmatrix}$, $\omega = t$,

$$\dot{M}_1 + M_1N_1 + N_2 - \omega M_1N_2 = 0, \quad \dot{M}_2 + M_2N_1 - \omega M_2N_2 = 0.$$

**3.3.20.** $\Lambda = t^{\frac{\alpha-1}{2}}\begin{pmatrix}1 & \frac{x_1}{x_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\omega = x_2^{\frac{2}{1+\alpha}}t^{-1}$,

$$\frac{\alpha-1}{2}M_1 - \omega\dot{M}_1 + \omega^{-\frac{\alpha+1}{2}}M_2N_1 = 0,$$
$$\frac{\alpha-1}{2}M_2 - \omega\dot{M}_2 + \frac{2}{1+\alpha}\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.21.** $\Lambda = \begin{pmatrix}x_2 & x_1\\ 0 & x_2\end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\omega = t$,

$$\dot{M}_1 + M_2N_1 + M_1N_2 = 0, \quad \dot{M}_2 + M_2N_2 = 0.$$

Розв'язки:

$$M_1 = \frac{1}{(\omega + K_1)^2}\left[-C_1\left(\frac{\omega^2}{2} + K_1\omega\right) + K_2\right], \quad M_2 = N_2 = \frac{1}{\omega + K_1},$$

$$N_1 = \frac{1}{(\omega + K_1)^2}\left[C_1\left(\frac{\omega^2}{2} + K_1\omega + K_1^2\right) + K_2\right],$$

де $K_1$, $K_2$, $C_1$ — довільні сталі;

$$M_1 = \left(-C_1\,\mathrm{e}^{-C_2\omega} - \frac{C_1C_2}{C_3}\omega + C_4\right)\frac{C_3^2\,\mathrm{e}^{-C_2\omega}}{(C_3\,\mathrm{e}^{-C_2\omega} - 1)^2},$$

$$N_1 = \frac{(-C_1C_2C_3\omega + C_3^2C_4 - 2C_1C_3)\,\mathrm{e}^{-C_2\omega} + C_1}{(C_3\,\mathrm{e}^{-C_2\omega} - 1)^2},$$

$$M_2 = \frac{C_2C_3\,\mathrm{e}^{-C_2\omega}}{1 - C_3\,\mathrm{e}^{-C_2\omega}}, \quad N_2 = \frac{C_2}{1 - C_3\,\mathrm{e}^{-C_2\omega}},$$

де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ — довільні сталі, при цьому $C_2 \neq 0$.

**3.3.22.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1 + \ln t}{x_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = x_2$,

$$-\omega M_1 + M_2 + M_2N_1 = 0, \quad -M_2 + N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.23.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = x_2^2 - 2x_1 - 2\ln t$,

$$M_1 + 2\dot{M}_1 + 2N_1\dot{M}_1 - M_2N_2 = 0, \quad M_2 + 2\dot{M}_2 + 2N_1\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.24.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = x_2^2 - 2x_1$,

$$M_1 + 2N_1\dot{M}_1 - M_2N_2 = 0, \quad M_2 + 2N_1\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.25.** $\Lambda = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \alpha\ln x_2 + \beta\dfrac{x_1}{x_2} - t$,

$$-\dot{M}_1+\beta N_1\dot{M}_1+M_2N_1+M_1N_2+\alpha N_2\dot{M}_1=0,$$
$$-\dot{M}_2+\beta N_1\dot{M}_2+M_2N_2+\alpha N_2\dot{M}_2=0.$$

**3.3.26.** $\Lambda=\exp\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)\begin{pmatrix}1 & \dfrac{x_1}{x_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{W}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\omega=\dfrac{x_1}{x_2}+\ln\dfrac{t}{x_2}$,

$$\dot{M}_1+\mathrm{e}^{\omega}(M_1N_1+N_1\dot{M}_1+M_2N_1-N_2\dot{M}_1)=0,$$
$$\dot{M}_2+\mathrm{e}^{\omega}(M_2N_1+N_1\dot{M}_2-N_2\dot{M}_2)=0.$$

**3.3.27.** $\Lambda=t^{\frac{\alpha-1}{2}}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\beta}{2}\ln t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W}=\left(\dfrac{x_1}{t}-\dfrac{\beta x_2}{(\alpha+1)t}\ln x_2,\quad 0\right)$,

$$\omega=\frac{t^{\alpha+1}}{x_2^2},$$

$$\frac{\alpha-1}{2}M_1+(\alpha+1)\omega\dot{M}_1+\frac{\beta}{2}M_2+N_1+\frac{\beta}{2(\alpha+1)}(\ln\omega-2)N_2-$$
$$-2\omega^{3/2}N_2\dot{M}_1=0,\quad \frac{\alpha-1}{2}M_2+(\alpha+1)\omega\dot{M}_2-2\omega^{3/2}N_2\dot{M}_2=0.$$

**3.3.28.** $\Lambda=x_2\begin{pmatrix}1 & \alpha\ln x_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W}=\left(\dfrac{x_1}{t}-\alpha\dfrac{x_2}{t}\ln x_2,\quad 0\right)$, $\omega=t$,

$$\omega\dot{M}_1+N_1-\alpha N_2+\omega M_1N_2+\alpha\omega M_2N_2=0,\quad \dot{M}_2+M_2N_2=0.$$

Розв'язок: $M_1=N_1=\dfrac{\alpha C_1\ln(\omega+C_1)+C_2}{\omega(\omega+C_1)}$, $M_2=N_2=\dfrac{1}{\omega+C_1}$.

**3.3.29.** $\Lambda=\dfrac{1}{t}\begin{pmatrix}1 & -\ln t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W}=\left(-\dfrac{x_2^2}{2t}+\dfrac{x_1}{t},\quad 0\right)$, $\omega=x_2+\ln t$,

$$-M_1+\dot{M}_1-M_2+N_1-\omega N_2+N_2\dot{M}_1=0,\quad -M_2+\dot{M}_2+N_2\dot{M}_2=0.$$

**3.3.30.** $\Lambda=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{W}=\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix}$, $\omega=\mathrm{e}^{-t}(x_1-tx_2)$,

$$M_1-\omega\dot{M}_1+M_2+N_1\dot{M}_1+N_2=0,\quad M_2-\omega\dot{M}_2+N_1\dot{M}_2=0.$$

**3.3.31**. $\Lambda = \sqrt{x_2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\ln x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \ln x_2 + \dfrac{t^2 - 2x_1}{x_2}$,

$$1 - 2N_1\dot{M}_1 + (1-\omega)N_2\dot{M}_1 + \frac{1}{2}M_1N_2 + \frac{1}{2}M_2N_2 = 0,$$
$$-2N_1\dot{M}_2 + (1-\omega)N_2\dot{M}_2 + \frac{1}{2}M_2N_2 = 0.$$

**3.3.32**. $\Lambda = \dfrac{x_2}{t}\begin{pmatrix} 1 & \ln\dfrac{x_2^\alpha}{t^{\alpha-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{x_1}{x_2} + \ln\dfrac{t^{\alpha-1}}{x_2^\alpha}$,

$$-M_1 + (\alpha-1)\dot{M}_1 - (\alpha-1)M_2 + N_1\dot{M}_1 -$$
$$-(\omega+\alpha)N_2\dot{M}_1 + M_1N_2 + \alpha M_2N_2 = 0,$$
$$-M_2 + (\alpha-1)\dot{M}_2 + N_1\dot{M}_2 - (\omega+\alpha)N_2\dot{M}_2 + M_2N_2 = 0.$$

**3.3.33**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \begin{pmatrix} 0, & \dfrac{x_2}{t} \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{x_1}{t}$,

$$\dot{M}_1(N_1 - \omega) = 0, \quad \frac{1}{\alpha}M_2 - \omega\dot{M}_2 + N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

Розв'язки:

$$M_1 = N_1 = C_1, \quad M_2 = N_2 = C_2(\omega - C_1)^{\frac{1}{\alpha}+1};$$

$$M_1 = N_1 = \omega, \quad M_2 = N_2 = 0 \ \text{ при } \ \alpha \neq \pm 1;$$

$$M_1 = N_1 = \omega, \quad M_2 = M(\omega), \quad N_2 = -\frac{1}{\alpha}M(\omega) \ \text{ при } \ \alpha = \pm 1,$$

де $M(\omega)$ — довільна диференційовна функція.

**3.3.34**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{x_2 - tx_1}{t^2}$,

$$\dot{M}_1(-2\omega - N_1 + N_2) = 0, \quad M_2 + N_1 + (-2\omega - N_1 + N_2)\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язки:

$$M_1 = C, \quad M_2 = 2\omega + C, \quad N_1 = -2\omega - C, \quad N_2 = -C;$$

$$M_1 = -2\omega - C, \quad M_2 = -C, \quad N_1 = C, \quad N_2 = 2\omega + C;$$

$$M_1 = M(\omega),\ M_2 = 2\omega + M(\omega),\ N_1 = -2\omega - M(\omega),\ N_2 = -M(\omega),$$

де $M(\omega)$ — довільна диференційовна функція.

**3.3.35**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{2x_2 - t^2}{x_1^2}$,

$$(N_2 - \omega N_1)\dot{M}_1 = 0, \quad 1 + M_2 N_1 + 2(N_2 - \omega N_1)\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язки:

$$M_1 = C, \quad M_2 = C\omega, \quad N_1 = -\frac{1}{C\omega}, \quad N_2 = -\frac{1}{C};$$

$$M_1 = M(\omega), \quad M_2 = \omega M(\omega), \quad N_1 = -\frac{1}{\omega M(\omega)}, \quad N_2 = -\frac{1}{M(\omega)},$$

де $M(\omega)$ — довільна ненульова диференційовна функція.

**3.3.36**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(0, \quad \dfrac{1}{2t}\ln t + \dfrac{x_2}{t}\right)$, $\omega = \dfrac{x_1}{t}$,

$$(N_1 - \omega)\dot{M}_1 = 0, \quad \frac{1}{2} - M_2 + N_2 + (N_1 - \omega)\dot{M}_2 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = N_1 = C_1$, $M_2 = N_2 = \dfrac{1}{2}\ln(\omega - C_1) + C_2$.

**3.3.37**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x_1} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(0, \quad \dfrac{x_2}{t}\right)$, $\omega = t$,

$$\dot{M}_2 + 2M_2 N_1 + \frac{1}{\omega} N_2 = 0, \quad \dot{M}_1 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = N_1 = C_1$, $M_2 = N_2 = \dfrac{C_2}{\omega}\exp(-2C_1\omega)$.

**3.3.38**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{1/\alpha} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\dfrac{1}{2\alpha}\ln t, \quad \dfrac{x_2}{t}\right)$, $\omega = \dfrac{x_1}{t} - \dfrac{1}{2\alpha}\ln t$,

$$\frac{1}{2\alpha} - \left(\omega + \frac{1}{2\alpha}\right)\dot{M}_1 + N_1\dot{M}_1 = 0,$$
$$\frac{1}{\alpha}M_2 - \left(\omega + \frac{1}{2\alpha}\right)\dot{M}_2 + N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.39**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(-\frac{1}{2}\ln t, \quad \frac{1}{2t}\ln t\right)$, $\omega = \frac{x_1}{t} + \frac{1}{2}\ln t$,

$$\frac{1}{2} + \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\dot{M}_1 - N_1\dot{M}_1 = 0, \quad -\frac{1}{2} + M_2 + \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\dot{M}_2 - N_1\dot{M}_2 - N_2 = 0.$$

**3.3.40**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{2x_1}{t}\right) \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\frac{x_1}{t}, \quad \frac{x_2}{t+1}\right)$, $\omega = t$,

$$\omega\dot{M}_1 + N_1 = 0, \quad \dot{M}_2 + \frac{2}{\omega}M_2N_1 + \frac{N_2}{\omega+1} = 0.$$

Розв'язок:

$$M_1 = C_1\omega + \frac{C_2}{\omega}, \quad N_1 = -C_1\omega + \frac{C_2}{\omega},$$

$$M_2 = \left(-\frac{C_4}{4C_1(\omega+1)} + C_4\right)\mathrm{e}^{4C_1}\exp\left(2C_1\omega + \frac{2C_2}{\omega}\right) - $$
$$-\frac{C_3}{\omega+1}\exp\left(-2C_1\omega + \frac{2C_2}{\omega}\right),$$

$$N_2 = -\frac{C_4}{4C_1(\omega+1)}\mathrm{e}^{4C_1}\exp\left(2C_1\omega + \frac{2C_2}{\omega}\right) - $$
$$-\left(\frac{C_3}{\omega+1} + 4C_1C_3\right)\exp\left(-2C_1\omega + \frac{2C_2}{\omega}\right).$$

**3.3.41**. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\frac{1}{2}\ln t, \quad \frac{x_2}{t}\right)$, $\omega = \frac{tx_1 - x_2}{t^2} - \frac{1}{2}\ln t$,

$$\frac{1}{2} - \left(\omega + \frac{1}{2}\right)\dot{M}_1 + N_1\dot{M}_1 - N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$M_2 - \left(\omega + \frac{1}{2}\right)\dot{M}_2 + N_1\dot{M}_2 - N_2\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.42.** $\Lambda = \begin{pmatrix} t^{\frac{-\alpha+\beta-1}{2\alpha}} & \dfrac{x_1}{x_2} t^{\frac{-\alpha+\beta+1}{2\alpha}} \\ 0 & t^{\frac{-\alpha+\beta+1}{2\alpha}} \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{x_2^{2\alpha}}{t^{\alpha+\beta+1}}$,

$$\frac{-\alpha+\beta-1}{2\alpha} M_1 - (\alpha+\beta+1)\omega \dot{M}_1 + \omega^{-\frac{1}{2\alpha}} M_2 N_1 + 2\alpha\omega^{1-\frac{1}{2\alpha}} N_2 \dot{M}_1 = 0,$$
$$\frac{-\alpha+\beta+1}{2\alpha} M_2 - (\alpha+\beta+1)\omega \dot{M}_2 + 2\alpha\omega^{1-\frac{1}{2\alpha}} N_2 \dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.43.** $\Lambda = x_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\ln x_2 + x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\omega = \ln x_2 + 2tx_2 - 2x_1,$$

$$2\dot{M}_1 - 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_1 + M_1N_2 + (\omega+1)N_2\dot{M}_1 - \frac{1}{2}M_2N_2 = 0,$$
$$2\dot{M}_2 - 2N_1\dot{M}_2 + (\omega+1)N_2\dot{M}_2 + 2M_2N_2 = 0.$$

**3.3.44.** $\Lambda = x_2^{-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\ln x_2 + x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{x_2^{\alpha}}{t}$,

$$-\omega^2\dot{M}_1 + M_2N_1 - \alpha M_1N_2 + \alpha\omega N_2\dot{M}_1 - \frac{1}{2}M_2N_2 = 0,$$
$$-\omega^2\dot{M}_2 + (1-\alpha)M_2N_2 + \alpha\omega N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.45.** $\Lambda = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \mathrm{e}^{4t}(2x_1 - x_2^2)$,

$$-4M_1 + 4\omega\dot{M}_1 + 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0, \quad -M_2 + 2\omega\dot{M}_2 + N_1\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.46.** $\Lambda = \begin{pmatrix} x_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} & x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \ln x_2 - (\alpha+1)t$,

$$-(\alpha+1)\dot{M}_1 + M_2N_1 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}M_1N_2 + N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$-(\alpha+1)\dot{M}_2 + M_2N_2 + N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.47.** $\Lambda = t^{-1-\frac{1}{\alpha}}\begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{\alpha}} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = t^{-\frac{1}{\alpha}}(x_2^2 - 2x_1)^{-1/2}$,

$$-\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)M_1 - \frac{1}{\alpha}\omega\dot{M}_1 + \omega^3 N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0,$$
$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)M_2 + \frac{1}{\alpha}\omega\dot{M}_2 - \omega^3 N_1\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.48.** $\Lambda = \begin{pmatrix} x_2 & tx_2^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \\ 0 & x_2^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{(x_1 - tx_2)^{\alpha-1}}{x_2^{\alpha-3}}$,

$$-(\alpha-1)\omega^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\dot{M}_1 + M_2 + (\alpha-1)\omega^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}N_1\dot{M}_1 + M_1N_2 - (\alpha-3)\omega N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$-(\alpha-1)\omega^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\dot{M}_2 + (\alpha-1)\omega^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}N_1\dot{M}_2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1}M_2N_2 - (\alpha-3)\omega N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.49.** $\Lambda = \begin{pmatrix} t^{-\frac{2}{\alpha}} & x_2 t^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ 0 & t^{-\frac{1}{\alpha}} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(-\dfrac{x_1}{t} + \dfrac{x_2^2}{t^2},\ \ \dfrac{x_2}{t}\right)$,

$$\omega = (x_2^2 - 2tx_1)t^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}},$$

$$-\omega - \frac{2}{\alpha}M_1 - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}\omega\dot{M}_1 - N_1 - 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0,$$
$$-\frac{1}{\alpha}M_2 - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}\omega\dot{M}_2 - 2N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.50.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & x_2 t^{-1/2} \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\dfrac{x_2^2}{2t^2},\ \ \dfrac{x_2}{t}\right)$,

$$\omega = \frac{1}{2}\ln t + \frac{x_2^2}{t} - 2x_1,$$

$$-M_1 + \frac{1}{2}\dot{M}_1 - 2N_1\dot{M}_1 + M_2N_2 = 0, \quad -\frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}\dot{M}_2 - 2N_1\dot{M}_2 + N_2 = 0.$$

**3.3.51.** $\Lambda = (t^2 - 2x_2)^{1/2}\begin{pmatrix} (t^2-2x_2)^{1/2} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\vec{W} = \left(\dfrac{t^2}{2},\ \ t\right)$,

$$\omega = \left(x_1 - tx_2 + \frac{t^3}{3}\right)^2 (t^2 - 2x_2)^{-3},$$

$$\omega^{1/2}\dot{M}_1 + M_2 + 2\omega^{1/2}N_1\dot{M}_1 + 2\omega N_2\dot{M}_1 - 2M_1N_2 = 0,$$
$$1 + \omega^{1/2}\dot{M}_2 + 2\omega^{1/2}N_1\dot{M}_2 + 6\omega N_2\dot{M}_2 - M_2N_2 = 0.$$

**3.3.52.** $\Lambda = \exp\left(\alpha \arctan\frac{x_1}{x_2}\right)\begin{pmatrix} \cos\arctan\frac{x_1}{x_2} & \sin\arctan\frac{x_1}{x_2} \\ -\sin\arctan\frac{x_1}{x_2} & \cos\arctan\frac{x_1}{x_2}\end{pmatrix},$

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \omega = 2\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2} - \ln\frac{x_1^2 + x_2^2}{t^2},$$

$$N_1(-M_1 + \alpha M_2 + 2\alpha\dot{M}_2) - 2N_2\dot{M}_2 + 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}}\,\dot{M}_2 = 0,$$
$$N_1(\alpha M_1 + M_2 + 2\alpha\dot{M}_1) - 2N_2\dot{M}_1 + 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2}}\,\dot{M}_1 = 0.$$

**3.3.53.** $\Lambda = \frac{x_1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \omega = \frac{x_1}{x_2},$

$$-M_1 + M_1N_1 + \omega N_1\dot{M}_1 - \omega^2 N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$-M_2 + M_2N_1 + \omega N_1\dot{M}_2 - \omega^2 N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.54.** $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{x_1}{t}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\end{pmatrix},\ \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \omega = \frac{x_1^{\alpha+1}x_2^{-\alpha+1}}{t^2},$

$$-M_1 - 2\omega\dot{M}_1 + M_1N_1 + (\alpha+1)\omega N_1\dot{M}_1 + (1-\alpha)\omega^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}N_2\dot{M}_1 = 0,$$
$$-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}M_2 - 2\omega\dot{M}_2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1}M_2N_1 +$$
$$+(\alpha+1)\omega N_1\dot{M}_2 + (1-\alpha)\omega^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}N_2\dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.55.** $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{x_1}{t}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} t^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\end{pmatrix},\ \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\omega = x_1^{\alpha-\beta} x_2^{-(\alpha+\beta)} t^{1+2\beta},$$

$$-M_1 + (1+2\beta)\omega \dot{M}_1 + M_1 N_1 + (\alpha-\beta)\omega N_1 \dot{M}_1 - \\ -(\alpha+\beta)\omega^{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta}} N_2 \dot{M}_1 = 0,$$

$$\tfrac{-\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta} M_2 + (1+2\beta)\omega \dot{M}_2 + \tfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} M_2 N_1 + \\ +(\alpha-\beta)\omega N_1 \dot{M}_2 - (\alpha+\beta)\omega^{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta}} N_2 \dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.56.** $\Lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{t} & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \dfrac{tx_1}{x_2}$,

$$-M_1 + \omega \dot{M}_1 + M_1 N_1 + \omega N_1 \dot{M}_1 - \omega^2 N_2 \dot{M}_1 = 0,$$
$$\omega \dot{M}_2 + M_2 N_1 + \omega N_1 \dot{M}_2 - \omega^2 N_2 \dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.57.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = x_1$,

$$-M_1 + N_1 \dot{M}_1 = 0, \quad -M_2 + N_1 \dot{M}_2 + M_2 N_2 = 0.$$

Розв'язок: $M_1 = N_1 = \omega + C_1$, $M_2 = N_2 = 1 + \dfrac{C_2}{\omega + C_1 - C_2}$.

**3.3.58.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\omega = 2\alpha \ln t - (\alpha - 2)\ln x_2 - 4x_1,$$

$$M_1 - 2\alpha \dot{M}_1 + 4N_1 \dot{M}_1 + (\alpha-2) N_2 \dot{M}_1 = 0,$$
$$M_2 - 2\alpha \dot{M}_2 + 4N_1 \dot{M}_2 - M_2 N_2 + (\alpha-2) N_2 \dot{M}_2 = 0.$$

**3.3.59.** $\Lambda = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \ln \dfrac{t^2}{x_2} - 2x_1$,

$$-M_1 + 2\dot{M}_1 - 2N_1 \dot{M}_1 - N_2 \dot{M}_1 = 0,$$
$$-M_2 + 2\dot{M}_2 - 2N_1 \dot{M}_2 + M_2 N_2 - N_2 \dot{M}_2 = 0.$$

## 3.4. Редукція по підалгебрах алгебри Пуанкаре

Алгебра $AIGL(4,\mathbb{R})$ з базисом (3.2) при $n=3$ містить алгебру Пуанкаре $AP(1,3)$ з базисом

$$J_{0a}=-\Gamma_{0a}-\Gamma_{a0},\quad J_{ab}=\Gamma_{ba}-\Gamma_{ab},\quad P_0,\quad P_a\quad (a,b=1,2,3).$$

Нехай $G_a=J_{0a}-J_{a3}$ $(a=1,2)$.

**Твердження 3.7.** *З точністю до афінної спряженості тривимірні підалгебри алгебри $AP(1,3)$, що мають тільки один основний інваріант, залежний від змінних $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, вичерпуються такими підалгебрами:*

$$\langle P_1,P_2,P_3\rangle,\ \langle J_{12}+\alpha J_{03},P_0,P_3\rangle,\ \langle J_{12}+\alpha J_{03},P_1,P_2\rangle\ (\alpha\neq 0),$$

$$\langle J_{03},P_1,P_2\rangle,\ \langle G_1,P_0+P_3,P_2+\alpha P_1\rangle,\ \langle G_1,G_2,P_0+P_3\rangle,$$

$$\langle G_1,J_{03},P_2\rangle,\ \langle J_{12},J_{03},P_0+P_3\rangle,\ \langle G_1,G_2,J_{03}\rangle,$$

$$\langle G_1,G_2,J_{12}+\alpha J_{03}\rangle\ (\alpha>0),\ \langle J_{12}+P_0,P_1,P_2\rangle,\ \langle J_{03}+P_1,P_0,P_3\rangle,$$

$$\langle J_{03}+\gamma P_1,P_0+P_3,P_2\rangle\ (\gamma=0,1),\ \langle G_1+P_2,P_0+P_3,P_1\rangle,$$

$$\langle G_1+P_0-P_3,P_0+P_3,P_2\rangle,\ \langle G_1,G_2+P_2,P_0+P_3\rangle,$$

$$\langle G_1+P_0-P_3,P_0+P_3,P_1+\alpha P_2\rangle,\ \langle G_1,G_2,J_{12}+P_0+P_3\rangle,$$

$$\langle G_1+P_2,G_2-P_1+\beta P_2,P_0+P_3\rangle,\ \langle G_1,J_{03}+\alpha P_1+\beta P_2,P_0+P_3\rangle.$$

Щоб одержати цей перелік, потрібно до переліку підалгебр алгебри $AP(1,3)$, що розглядаються з точністю до $P(1,3)$-спряженості ([33], с. 126), застосувати афінну спряженість, при якій, зокрема, можна ототожнювати всі одновимірні підпростори простору трансляцій $\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$.

Оскільки генератори $G_1$, $G_2$, $J_{03}$ є нелінійними диференціальними операторами, то на підалгебри, що їх містять, подіємо внутрішнім автоморфізмом, який відповідає елементу $g = \exp\left(\dfrac{\pi}{4}X\right)$, де

$$X = -\Gamma_{03} + \Gamma_{30} = x_3\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial x_3} - E_3E_k\frac{\partial}{\partial E_k} - H_3H_k\frac{\partial}{\partial H_k} - \frac{\partial}{\partial E_3} - \frac{\partial}{\partial H_3}.$$

Нехай $J'_{\alpha\beta} = gJ_{\alpha\beta}g^{-1}$, $P'_\alpha = gP_\alpha g^{-1}$, $G'_a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}gG_ag^{-1}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ a = 1, 2)$. Неважко переконатися, що

$$G'_a = J'_{0a} - J'_{a3} = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a\frac{\partial}{\partial x_3} +$$

$$+ E_a\frac{\partial}{\partial E_3} + H_a\frac{\partial}{\partial H_3} + \frac{\partial}{\partial E_a} + \frac{\partial}{\partial H_a} \quad (a = 1, 2),$$

$$J'_{03} = -x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{i=1}^{2}\left(E_i\frac{\partial}{\partial E_i} + H_i\frac{\partial}{\partial H_i}\right) + 2E_3\frac{\partial}{\partial E_3} + 2H_3\frac{\partial}{\partial H_3},$$

$$J'_{12} = J_{12} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + E_2\frac{\partial}{\partial E_1} - E_1\frac{\partial}{\partial E_2} + H_2\frac{\partial}{\partial H_1} - H_1\frac{\partial}{\partial H_2},$$

$$P'_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_0 + P_3), \quad P'_1 = P_1, \quad P'_2 = P_2, \quad P'_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(P_0 - P_3).$$

Нехай $E_a = M_a(x)$, $H_a = N_a(x)$ $(a = 1, 2, 3)$ — розв'язок, інваріантний відносно підалгебри алгебри $AP(1,3)' = gAP(1,3)g^{-1}$ (алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ з штрихованими операторами). Тоді розв'язок, інваріантний відносно відповідної підалгебри алгебри $AP(1,3)$, має вигляд:

$$E_a = \frac{\sqrt{2}M_a(x')}{M_3(x') + 1} \quad (a = 1, 2), \qquad E_3 = \frac{M_3(x') - 1}{M_3(x') + 1},$$

$$H_a = \frac{\sqrt{2}N_a(x')}{N_3(x') + 1} \quad (a = 1, 2), \qquad H_3 = \frac{N_3(x') - 1}{N_3(x') + 1},$$

де

$$x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), \quad x'_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - x_3),$$

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + x_3).$$

В наведеному у твердженні 3.7 переліку підалгебр алгебри $AP(1,3)$ є 10 підалгебр, які мають двовимірний перетин з простором трансляцій. Це означає, що з точністю до спряженості розв'язки системи (3.1) при $n = 3$, які інваріантні відносно деякої з цих підалгебр, є функціями тільки від однієї просторової змінної $x_a$. Тому часто зручно проводити редукцію не всіх шести рівнянь системи (3.1) при $n = 3$, а тільки двох з них, що містять функції $E_a$ і $H_a$. Інші компоненти розв'язку $E_k$ і $H_k$ $(k \neq a)$ системи (3.1) при $n = 3$ будуть записані у вигляді довільних функцій від $E_a$ і $H_a$ відповідно, які підбираємо так, щоб розв'язок був інваріантним відносно всіх базисних елементів підалгебри.

Проілюструємо сказане на прикладі підалгебри $F = \langle J'_{12} + \alpha J'_{03}, P_1, P_2 \rangle$ $(\alpha \neq 0)$. В цьому випадку $E_i$, $H_i$ $(i = 1, 2, 3)$ є функціями від $x_0$, $x_3$. Якщо розглядати тільки систему рівнянь

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_0} + H_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial H_3}{\partial x_0} + E_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0, \tag{3.17}$$

то до уваги треба брати лише оператор

$$-x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 2E_3 \frac{\partial}{\partial E_3} + 2H_3 \frac{\partial}{\partial H_3}.$$

Оскільки повну систему інваріантів цього оператора в класі функцій від $x_0$, $x_3$, $E_3$, $H_3$ утворюють $\omega = x_0 x_3$, $E_3 x_0^2$, $H_3 x_0^2$, то анзац має вигляд

$$E_3 = \frac{1}{x_0^2} M_3(\omega), \qquad H_3 = \frac{1}{x_0^2} N_3(\omega).$$

Цей анзац редукує систему (3.17) до системи

$$-2M_3 + (\omega + N_3)\dot{M}_3 = 0, \qquad -2N_3 + (\omega + M_3)\dot{N}_3 = 0. \tag{3.18}$$

Припустимо, що ми знайшли розв'язок $(M_3, N_3)$ цієї системи, причому $M_3 \neq 0$, $N_3 \neq 0$. Тоді $E_i = F_i(y)$, $H_i = K_i(z)$ $(i = 1, 2)$, де $y = \frac{1}{x_0^2} M_3(\omega)$, $z = \frac{1}{x_0^2} N_3(\omega)$, а $F_i$, $K_i$ — невідомі функції, які ми знайдемо з умови інваріантності розв'язку відносно $J'_{12} + \alpha J'_{03}$. З рівностей

$$(J'_{12} + \alpha J'_{03})(E_1 - F_1(y)) = E_2 - \alpha \frac{dF_1}{dy} 2y + \alpha E_1 = 0,$$

$$(J'_{12} + \alpha J'_{03})(E_2 - F_2(y)) = -E_1 + \alpha E_2 - \alpha \frac{dF_2}{dy} 2y = 0$$

випливає, що

$$F_1 = \alpha F_2 - 2\alpha y \frac{dF_2}{dy}, \qquad (1 + \alpha^2) F_2 + 4\alpha^2 y^2 \frac{d^2 F_2}{dy^2} = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, що є рівнянням Ойлера другого порядку відносно функції $F_2$, і підставляючи знайдений розв'язок у формулу для $F_1$, отримуємо такі функції:

$$F_1 = C_1 y^{1/2} \sin \frac{\ln y}{2\alpha} - C_2 y^{1/2} \cos \frac{\ln y}{2\alpha},$$

$$F_2 = C_1 y^{1/2} \cos \frac{\ln y}{2\alpha} + C_2 y^{1/2} \sin \frac{\ln y}{2\alpha}.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$K_1 = C_3 y^{1/2} \sin \frac{\ln y}{2\alpha} - C_4 y^{1/2} \cos \frac{\ln y}{2\alpha},$$

$$K_2 = C_3 y^{1/2} \cos \frac{\ln y}{2\alpha} + C_4 y^{1/2} \sin \frac{\ln y}{2\alpha}.$$

Система (3.18) має розв'язок

$$M_3 = N_3 = \frac{1}{2} \left[ 2\omega + C \pm \sqrt{4C\omega + C^2} \right].$$

Тому розв'язок системи (3.1) при $n = 3$, інваріантний відносно підалгебри $F$, можна записати у вигляді:

$$E_1 = C_1 y^{1/2} \sin\frac{\ln y}{2\alpha} - C_2 y^{1/2} \cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$

$$E_2 = C_1 y^{1/2} \cos\frac{\ln y}{2\alpha} + C_2 y^{1/2} \sin\frac{\ln y}{2\alpha}, \qquad E_3 = y,$$

$$H_1 = C_3 y^{1/2} \sin\frac{\ln y}{2\alpha} - C_4 y^{1/2} \cos\frac{\ln y}{2\alpha},$$

$$H_2 = C_3 y^{1/2} \cos\frac{\ln y}{2\alpha} + C_4 y^{1/2} \sin\frac{\ln y}{2\alpha}, \qquad H_3 = y,$$

де $y = \dfrac{1}{2x_0^2}\left[2x_0x_3 + C \pm \sqrt{4Cx_0x_3 + C^2}\right]$; $C$, $C_i$ $(i = \overline{1,4})$ — довільні сталі.

Аналогічно діємо і у випадку, коли підалгебри мають одновимірний перетин з простором трансляцій.

Відмітимо також, що розв'язки системи (3.1) при $n = 3$, які є інваріантними відносно тих підалгебр алгебри $AP(1,3)$, що мають ненульовий перетин з простором трансляцій, містяться серед розв'язків, знайдених в параграфах 3.2, 3.3. Тому немає потреби досліджувати в повному обсязі редукцію по цих підалгебрах.

Тепер проведемо редукцію системи (3.1) при $n = 3$ по підалгебрах алгебри $AP(1,3)'$, які мають нульовий перетин з простором трансляцій.

**3.4.1.** $\langle G_1', G_2', J_{03}' \rangle$ : $E_1 = \dfrac{x_1}{x_0} + \dfrac{1}{x_0}M_1(\omega)$, $E_2 = \dfrac{x_2}{x_0} + \dfrac{1}{x_0}M_2(\omega)$,

$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{x_1}{x_0^2}M_1(\omega) + \frac{x_2}{x_0^2}M_2(\omega) + \frac{1}{x_0^2}M_3(\omega),$$

$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + \frac{1}{x_0}N_1(\omega), \; H_2 = \frac{x_2}{x_0} + \frac{1}{x_0}N_2(\omega),$$

$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{x_1}{x_0^2}N_1(\omega) + \frac{x_2}{x_0^2}N_2(\omega) + \frac{1}{x_0^2}N_3(\omega),$$

$$\omega = x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3,$$

$$\begin{cases} (\omega - 2N_3)\dot{M}_1 - M_1 + N_1 = 0, \quad (\omega - 2N_3)\dot{M}_2 - M_2 + N_2 = 0, \\ (\omega - 2N_3)\dot{M}_3 - 2M_3 + M_1N_1 + M_2N_2 = 0, \\ (\omega - 2M_3)\dot{N}_1 - N_1 + M_1 = 0, \quad (\omega - 2M_3)\dot{N}_2 - N_2 + M_2 = 0, \\ (\omega - 2M_3)\dot{N}_3 - 2N_3 + M_1N_1 + M_2N_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язку $M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = N_3 = 0$, $M_3 = C\omega^2$ редукованої системи відповідає такий розв'язок системи (3.1) при $n = 3$, інваріантний відносно підалгебри $\langle G_1', G_2', J_{03}' \rangle$:

$$E_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad E_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad E_3 = \frac{2C(x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2},$$

$$H_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad H_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2}.$$

**3.4.2.** $\langle G_1', G_2', J_{12}' + \alpha J_{03}' \rangle : \ \omega = x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3,$

$$E_1 = \frac{x_1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\left\{\cos\frac{\ln x_0}{\alpha} M_1(\omega) - \sin\frac{\ln x_0}{\alpha} M_2(\omega)\right\},$$

$$E_2 = \frac{x_2}{x_0} + \frac{1}{x_0}\left\{\sin\frac{\ln x_0}{\alpha} M_1(\omega) + \cos\frac{\ln x_0}{\alpha} M_2(\omega)\right\},$$

$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}\left\{x_1\cos\frac{\ln x_0}{\alpha} + x_2\sin\frac{\ln x_0}{\alpha}\right\} M_1(\omega) -$$

$$- \frac{1}{x_0^2}\left\{x_1\sin\frac{\ln x_0}{\alpha} - x_2\cos\frac{\ln x_0}{\alpha}\right\} M_2(\omega) + \frac{1}{x_0^2} M_3(\omega),$$

$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\left\{\cos\frac{\ln x_0}{\alpha} N_1(\omega) - \sin\frac{\ln x_0}{\alpha} N_2(\omega)\right\},$$

$$H_2 = \frac{x_2}{x_0} + \frac{1}{x_0}\left\{\sin\frac{\ln x_0}{\alpha} N_1(\omega) + \cos\frac{\ln x_0}{\alpha} N_2(\omega)\right\},$$

$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}\left\{x_1 \cos\frac{\ln x_0}{\alpha} + x_2 \sin\frac{\ln x_0}{\alpha}\right\} N_1(\omega) -$$

$$- \frac{1}{x_0^2}\left\{x_1 \sin\frac{\ln x_0}{\alpha} - x_2 \cos\frac{\ln x_0}{\alpha}\right\} N_2(\omega) + \frac{1}{x_0^2} N_3(\omega),$$

$$\begin{cases} (\omega - 2N_3)\dot{M}_1 - M_1 - \frac{1}{\alpha}M_2 + N_1 = 0, \\ (\omega - 2N_3)\dot{M}_2 + M_2 - \frac{1}{\alpha}M_1 - N_2 = 0, \\ (\omega - 2N_3)\dot{M}_3 - 2M_3 + M_1N_1 + M_2N_2 = 0, \\ (\omega - 2M_3)\dot{N}_1 - N_1 - \frac{1}{\alpha}N_2 + M_1 = 0, \\ (\omega - 2M_3)\dot{N}_2 + N_2 - \frac{1}{\alpha}N_1 - M_2 = 0, \\ (\omega - 2M_3)\dot{N}_3 - 2N_3 + M_1N_1 + M_2N_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язку редукованої системи $M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = 0$, $M_3 = N_3 = \frac{1}{8C}(1 - 4C\omega \pm \sqrt{1 - 8C\omega})$ відповідає такий розв'язок вихідної системи, інваріантний відносно підалгебри $\langle G_1', G_2', J_{12}' + \alpha J_{03}' \rangle$:

$$E_1 = H_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad E_2 = H_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad E_3 = H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} +$$

$$+ \frac{1}{8Cx_0^2}\left[1 - 4C(x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3) \pm \sqrt{1 - 8C(x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3)}\right].$$

**3.4.3.** $\langle G_1', G_2', J_{12}' + P_3 \rangle : \; E_1 = \frac{x_1}{x_0} + M_1(\omega)\cos f_3 - M_2(\omega)\sin f_3,$

$$E_2 = \frac{x_2}{x_0} + M_1(\omega)\sin f_3 + M_2(\omega)\cos f_3,$$

$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0}(x_1 \cos f_3 + x_2 \sin f_3) M_1(\omega) -$$

$$- \frac{1}{x_0}(x_1 \sin f_3 - x_2 \cos f_3) M_2(\omega) + M_3(\omega),$$

$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + N_1(\omega)\cos f_3 - N_2(\omega)\sin f_3,$$

$$H_2 = \frac{x_2}{x_0} + N_1(\omega)\sin f_3 + N_2(\omega)\cos f_3,$$

$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0}(x_1\cos f_3 + x_2\sin f_3)N_1(\omega) -$$

$$-\frac{1}{x_0}(x_1\sin f_3 - x_2\cos f_3)N_2(\omega) + +N_3(\omega),$$

де $\omega = x_0$, $f_3 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0} - x_3$.

Редукована система має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{M}_1 + \frac{1}{\omega}N_1 + N_3M_2 = 0, \quad \dot{M}_2 + \frac{1}{\omega}N_2 - N_3M_1 = 0, \quad \dot{M}_3 = 0, \\ \dot{N}_1 + \frac{1}{\omega}M_1 + M_3N_2 = 0, \quad \dot{N}_2 + \frac{1}{\omega}M_2 - M_3N_1 = 0, \quad \dot{N}_3 = 0. \end{cases}$$

Вона має розв'язок

$$M_1 = A_1\omega + \frac{B_1}{\omega}, \quad M_2 = A_2\omega + \frac{B_2}{\omega}, \quad M_3 = 0,$$

$$N_1 = -A_1\omega + \frac{B_1}{\omega}, \quad N_2 = -A_2\omega + \frac{B_2}{\omega}, \quad N_3 = 0.$$

Йому відповідає такий інваріантний розв'язок системи (3.1) при $n = 3$:

$$E_1 = \frac{x_1}{x_0} + \left(A_1x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\cos f_3 - \left(A_2x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\sin f_3,$$

$$E_2 = \frac{x_2}{x_0} + \left(A_1x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\sin f_3 + \left(A_2x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\cos f_3,$$

$$E_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \left(A_1 + \frac{B_1}{x_0^2}\right)[x_1\cos f_3 + x_2\sin f_3] -$$

$$-\left(A_2 + \frac{B_2}{x_0^2}\right)[x_1\sin f_3 - x_2\cos f_3],$$

$$H_1 = \frac{x_1}{x_0} + \left(-A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\cos f_3 + \left(A_2 x_0 - \frac{B_2}{x_0}\right)\sin f_3,$$

$$H_2 = \frac{x_2}{x_0} + \left(-A_1 x_0 + \frac{B_1}{x_0}\right)\sin f_3 + \left(-A_2 x_0 + \frac{B_2}{x_0}\right)\cos f_3,$$

$$H_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_0^2} + \left(-A_1 + \frac{B_1}{x_0^2}\right)[x_1 \cos f_3 + x_2 \sin f_3] + \\ + \left(A_2 - \frac{B_2}{x_0^2}\right)[x_1 \sin f_3 - x_2 \cos f_3].$$

# Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. В дисертації обгрунтовано можливість застосування методу симетрійної редукції для побудови нових розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь за відомими розв'язками цих систем. В рамках цього підходу знайдено нові точні розв'язки лінійного одновимірного рівняння Шрьодінгера з потенціалом і одновимірного рівняння теплопровідності.

2. Класифіковано підалгебри центральних розширень алгебр Галілея і конформної алгебри.

3. Доведено ряд тверджень про лінійні анзаци, що дозволило алгоритмізувати процес їх побудови.

4. По підалгебрах максимальної алгебри інваріантності виконано симетрійну редукцію лінійних і нелінійної систем Шрьодінгера та однієї системи гідродинамічного типу для векторного поля до систем звичайних диференціальних рівнянь.

5. Побудовано широкі класи багатопараметричних точних розв'язків досліджуваних систем.

# Список використаних джерел

[1] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция и точные решения уравнения эйконала // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, №4. — С. 461–474.

[2] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Связные подгруппы конформной группы $C(1,4)$ // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, №7–8. — С. 870–884.

[3] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, №10. — С. 1311–1323.

[4] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного уравнения Даламбера к двумерным уравнениям // *Укр. мат. журн.* — 1994. — **46**, №6. — С. 651–662.

[5] Баранник А.Ф., Марченко В.А., Фущич В.И. О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // *Теор. и мат. физика.* — 1991. — **87**, №2. — С. 220–234.

[6] Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д., Фущич В.И. Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3,\mathbb{R})$. — Киев, 1989. — 32 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; №89.65).

[7] Баранник Л.Л. Симетрійний аналіз системи нелінійних рівнянь еволюційного типу // Тези IV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 11–13 трав. 1995 р. — Київ, 1995. — С. 33.

[8] Баранник Л.Л. Розмноження розв'язків рівняння теплопровідності методом симетрійної редукції // Тези V Міжнар. наук. конф.

ім. акад. М. Кравчука, Київ, 16–18 трав. 1996 р. — Київ, 1996. — С. 24.

[9] Баранник Л.Л. Про симетрійну редукцію та точні розв'язки лінійного одновимірного рівняння Шродінгера // *Доп. НАН України.* — 1996. — №9. — С. 32–38.

[10] Баранник Л.Л. Про симетрійну редукцію та точні розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь для електромагнітного поля // Тези 5-ї Всеукр. наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", Дрогобич, 15–19 верес. 1997 р. — Київ, 1997. — С. 13.

[11] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I // *Укр. мат. журн.* — 1988. — **40**, №4. — С. 411–416.

[12] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II // *Укр. мат. журн.* — 1989. — **41**, №5. — С. 579–584.

[13] Вільгельмсон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв'язку температури та густини у термоядерних плазмах // *Укр. фіз. журн.* — 1993. — **38**, №1. — С. 44–53.

[14] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[15] Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака // *Докл. АН СССР.* — 1969. — **185**, №6. — С. 1226–1228.

[16] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[17] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

[18] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // *Докл. АН СССР.* — 1978. — **243**, №4. — С. 901–904.

[19] Лагно В.I., Смалій В.Ф. $\tilde{P}(1,3)$-інваріантні анзаци для поля Максвелла // *Доп. НАН України.* — 1996. — №12. — С. 49–54.

[20] Мелешко С.В. Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // *Прикл. мат. и мех.* — 1994. — **58**, вып.4. — С. 56–62.

[21] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic Press, 1982. — 400 p.

[22] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // *Прикл. мат. и мех.* — 1994. — **58**, вып.4. — С. 30–55.

[23] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с. — Пер. с англ.: Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — New York: Springer–Verlag, 1986. — 497 p.

[24] Попович Г.В. Загальний розв'язок рівнянь Ойлера з додатковою умовою $u^1_1 = u^3 = 0$ // *Доп. НАН України.* — 1996. — №9. — С. 39–42.

[25] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 800 с.

[26] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. — Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1981. — С. 6–28.

[27] Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. — Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1983. — С. 4–23.

[28] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1987. — С. 4–16.

[29] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // *Укр. мат. журн.* — 1987. — **39**, №1. — С. 116–123.

[30] Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида // *Укр. мат. журн.* — 1986. — **38**, №1. — С. 67–72.

[31] Фущич В.І., Баранник Л.Л. Симетрійна редукція як метод розмноження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь // *Доп. НАН України.* — 1996. — №12. — С. 44–49.

[32] Фущич В.І., Баранник Л.Л. Симетрійна редукція по підалгебрах алгебри Пуанкаре однієї нелінійної системи диференціальних рівнянь для векторного поля // *Доп. НАН України.* — 1997. — №8. — С. 50–57.

[33] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[34] Фущич В.І., Бойко В.М. Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики // *Доп. НАН України.* — 1996. — №9. — С. 43–48.

[35] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 288 с.

[36] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // *Укр. мат. журн.* — 1991. — **43**, №11. — С. 1471–1487.

[37] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с. — English translation: Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. — Dordrecht: D. Reidel, 1987. — 220 p.

[38] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с. — English translation: Fushchich W.I. and Nikitin A.G. Symmetries of equations of quantum mechanics. — New York: Allerton Press Inc., 1994. — 480 p.

[39] Фущич В.І., Сєров М.І., Репета В.К. Неліївська симетрія і точні розв'язки одновимірних рівнянь газової динаміки // *Доп. АН України.* — 1991. — №11. — С. 27–33.

[40] Фущич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // *Докл. АН СССР.* — 1983. — **268**, №5. — С. 1102–1104.

[41] Фущич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // *Теор. и мат. физика.* — 1985. — **64**, №1. — С. 41–50.

[42] Фущич В.И., Чернига Р.М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I // *Укр. мат. журн.* — 1989. — **41**, №10. — С. 1349–1357.

[43] Фущич В.І., Черніга Р.М. Системи нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень // *Докл. АН Украины.* — 1993. — №8. — С. 44–51.

[44] Фущич В.І., Черніга Р.М. Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції–дифузії // *Докл. АН Украины.* — 1994. — №3. — С. 31–38.

[45] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[46] Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C. Invariants of the equations of wave mechanics. I, II // *Rev. mex. fís.* — 1972. — **21**. — P. 1–33; 35–57.

[47] Aris R. The theory of reaction and diffusion in permeable catalyst. — Oxford, 1975. — 300 p.

[48] Barannyk L.F.[1] On the classification of subalgebras of the Galilei al-

[1]Barannyk=Barannik

gebras // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, №3–4. — P. 263–268.

[49] Barannik L.F., Fushchich W.I.[1] On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1,n)$ // *J. Math. Phys.* — 1987. — **28**, №7. — P. 1445–1458.

[50] Barannik L.F., Fushchich W.I. On continuous subalgebras of the generalized Schrödinger groups // *J. Math. Phys.* — 1989. — **30**, №2. — P. 280–290.

[51] Barannik L.F. and Lahno H.O. Symmetry reduction for the Boussinesq equation to ordinary differential equations // *Repts Math. Phys.* — 1996. — **38**, №1. — P. 1–9.

[52] Barannyk L.L. Symmetry reduction for a system of nonlinear evolution equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1996. — **3**, №3–4. — P. 447–452.

[53] Barannyk L.L. Invariant solutions of a nonlinear system of differential equations for electromagnetic field // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1997. — **4**, №3–4. — P. 482–491.

[54] Basarab–Horwath P., Barannyk L.L., Fushchych W.I. Some exact solutions of a conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. — Linköping, 1997. — 12 p. — (Prepr. / Linköping University; LiTH-MAT-R-97-11).

[55] Boyer C.P. On some solutions of a nonlinear diffusion equation // *J. Math. Phys.* — 1961. — **40**, №1. — P. 42–46.

[56] Boyer C.P. The maximal "kinematical" invariance group for an arbitrary potential // *Helv. phys. acta.* — 1974. — **47**. — P. 589–605.

[57] Boyko V. Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of a hydrodynamical type // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, №3–4. — P. 418–424.

[58] Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, №3–4. — P. 374–383.


[1] Fushchych=Fushchich

[59] Clarkson P.A. New exact solutions of the Boussinesq equation // *Eur. J. Appl. Math.* — 1990. — **1.** — P. 279–300.

[60] Clarkson P.A. Dimensional reduction and exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation // *Nonlinearity.* — 1992. — **5.** — P. 453–472.

[61] Clarkson P.A. and Hood S. Symmetry reductions of a generalized, cylindrical nonlinear Schrödinger equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1993. — **26**, №1. — P. 133–150.

[62] Fairlie D.B., Leznov A.N. General solution of the universal equation in $n$-dimensional space // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1994. — **1**, №4. — P. 333–339.

[63] Fedorchuk V. Symmetry reduction and exact solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, multidimensional Monge–Ampere and eikonal equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, 3–4. — P. 329–333.

[64] Fushchich W.I. New nonlinear equations for electromagnetic field having velocity different from $c$ // *Докл. АН Украины.* — 1992. — №4. — С. 24–27.

[65] Fushchych W., Boyko V. Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of hydrodynamical type. — Linköping, 1995. — 11 p. — (Prepr. / Linköping University; LiTH-MATH-R-95-19).

[66] Fushchich W.I., Cherniha R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1985. — **18**, №18. — P. 3491–3503.

[67] Fushchych W.I., Cherniha R.M. Galilei-invariant nonlinear systems of evolution equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1995. — **28.** — P. 5569–5579.

[68] Fushchych W., Cherniha R., Chopyk V. On unique symmetry of two nonlinear generalizations of the Schrödinger equation // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1996. — **3**, №3–4. — P. 296–301.

[69] Fushchych W.I., Popovych R.O. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1994. — **1**, №1,2. — P. 75–113; 158–188.

[70] Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1983. — **16**, №15. — P. 3645–3656.

[71] Fushchich W.I., Shtelen V.M. and Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[72] Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1994. — **1**, №2. — P. 210–221.

[73] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: I. The symmetry group and its subgroups // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1988. — **21**, №7. — P. 1493–1511.

[74] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // *J. Math. Phys.* — 1984. — **25**, №4. — P. 791–806.

[75] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. V.1. Symmetries, exact solutions, and conservation law. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1994.

[76] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. V.2. Applications in engineering and physical sciences. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1994.

[77] King J.R. Exact results for the nonlinear diffusion equations $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{-4/3}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ and $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{-2/3}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1991. — **24**, №24. — P. 5721–5745.

[78] Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation // *Helv. phys. acta.* — 1972. — **45**. — P. 802–810.

[79] Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator // *Helv. phys. acta.* — 1973. — **46**. — P. 191–200.

[80] Ovsyannikov L.V. and Chupakhin A.P. Regular partially invariant submodels of gas dynamics equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, №3–4. — P. 236–246.

[81] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poincaré group and their invariants // *J. Math. Phys.* — 1976. — **17**, №6. — P. 977–985.

[82] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups // *J. Math. Phys.* — 1977. — **18**, №12. — P. 2259–2288.

[83] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of the $SU(p,q)$ groups and all subgroups of $SU(2,1)$ // *J. Math. Phys.* — 1974. — **15**, №8. — P. 1378–1393.

[84] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, №8. — P. 1597–1614.

[85] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, №8. — P. 1615–1624.

[86] Popovych H. On reduction of the Euler equations by means of two-dimensional algebras // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1996. — **3**, №3–4. — P. 441–446.

[87] Popovych R. On Lie reduction of the Navier–Stokes equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — **2**, №3–4. — P. 301–311.

[88] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // *J. Math. Phys.* — 1990. — **31**, №5. — P. 1095–1105.

[89] Rosen G. Conformal transformation matrix for fields // *Ann. Phys.* (USA) — 1973. — **77**, №2. — P. 452–453.

[90] Rosenbloom P.C., Widder D.V. Expansions in terms of heat polynomials and associated functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1959. — **92**, №2. — P. 220–266.

[91] Wiltshire R.J. The use of Lie transformation groups in the solution of the coupled diffusion equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — **27**, №23. — P. 7821–7829.