МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

БАТЫРОВ САДУЛЛА

УДК 517.95:519.46

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук,
профессор ФУЩИЧ В.И.

Киев - 1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Большинство физических систем обладает той или иной симметрией. Уравнения, описывающие такие системы, должны отражать этот факт, т.е. быть инвариантными относительно соответствующих преобразований. Симметрийные свойства дифференциальных уравнений (ДУ) позволяют:

а) найти некоторые классы точных решений ДУ;

б) установить законы сохранения для данного ДУ;

в) провести групповую классификацию ДУ;

г) найти замены переменных, преобразующие уравнение к простому виду, иногда удается нелинейное уравнение преобразовать к линейному;

д) изучать алгебраическую структуру множества решений уравнения;

е) указать все системы координат, в которых ДУ допускает разделение переменных.

Поэтому изучение групповых свойств дифференциальных уравнений является важной и актуальной задачей. Особенно важны исследования такого рода при изучении уравнений, непосредственно применяемых в теоретической физике, поскольку такие уравнения должны удовлетворять известным принципам относительности Галилея или Пуанкаре-Эйнштейна.

К настоящему времени почти не изучены групповые свойства дифференциальных уравнений высокого порядка.

Настоящая диссертация посвящена исследованию групповых свойств многомерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа высокого порядка.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Для решения задач, рассматриваемых в работе, использовался метод Ли и метод операторных уравнений, а для нахождения точных решений использовался метод, изложенный в [50, 58, 64].

Изложим кратко основные результаты, полученные в диссертации.

I. Доказано, что алгеброй инвариантности уравнения типа Шредингера $2n$-го порядка является I3-мерная алгебра Шредингера $Sch(1,3)$, а также установлена максимальная группа инвариантности уравнения Шредингера $2n$-го порядка для двух скалярных частиц.

2. Изучены теоретико-групповые свойства одной линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

3. Доказано, что среди всех линейных уравнений четвертого порядка существует только одно уравнение, инвариантное относительно группы Галилея $G(1,3)$.

4. Установлено, что среди множества уравнений вида

$$S^n U + F(U)U = 0, \tag{I}$$

где S – оператор Шредингера, S^n – n-ая степень оператора S, существует только одно нелинейное уравнение, инвариантное относительно группы $Sch(1,3)$.

5. Описаны нелинейные дифференциальные уравнения вида

$$S^n U + F(U, \underset{1}{U})U = 0, \tag{2}$$

где $\underset{1}{U} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_k}\right)$, S – оператор Шредингера, инвариантное относительно группы $Sch(1,3)$, группы $\tilde{G}(1,3)$ – расширенной группы Галилея и группы $G(1,3)$.

6. Проведена групповая классификация потенциалов в уравнении Шредингера высокого порядка, при которых оно инвариантно относительно подгрупп группы $Sch(1,3)$. Показано, что существует только единый потенциал, при котором уравнение Шредингера $2n$-го порядка для двух скалярных частиц будет инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$.

7. Найдены классы частных решений для некоторых нелинейных уравнений параболического типа.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах по теоретико-групповым методам в математической физике в Институте математики АН УССР, на научных конференциях Киевского педагогического института им.А.М.Горького в 1980-83 годах, а также на конференции молодых ученых и аспирантов, посвященной 1500-летию Киева и опубликованы в 6 работах [4,5,6,7,8,9].

Автор выражает благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Фущичу В.И. за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I

О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы остановимся на необходимых в дальнейшем общих сведениях о групповых свойствах дифференциальных уравнений.

Охарактеризуем вкратце некоторые методы исследования групповых свойств дифференциальных уравнений.

§ I. Общая характеристика методов

Существуют различные методы исследования групповых свойств дифференциальных уравнений. Например, классический метод С.Ли [83, 84]; метод операторных уравнений; нелиевский метод исследования теоретико-групповых свойств систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных [53, 57]. Знание группы инвариантности очень полезно для отыскания классов точных - частных решений для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [54].

Почти сто лет назад выдающийся норвежский математик Софус Ли создал теорию непрерывных групп [83, 84]. Эта теория подробно изложена в трехтомной монографии Ли-Энгеля [85]. Софус Ли также предложил основные идеи и методы теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений и нашел, используя инфинитезимальные преобразования групп, их явные решения.

Дальнейшее развитие теории групповых свойств дифференциальных уравнений связано в нашей стране деятельностью новосибирской школы во главе с Л.В.Овсянниковым [38, 40, 41, 42], главным образом, в применении к уравнениям гидро- и аэродинамики.

Для исследования теоретико-групповых свойств систем дифференциальных уравнений используются и некоторые другие подходы. Среди них можно отметить следующие.

Метод, основанный на использовании преобразований Ли-Бэклунда [25], является развитием и обобщением метода Ли. В нем, в отличие от классического метода Ли, используются касательные преобразования бесконечного порядка.

В работах Нидерера [86,87,88], Боера [75.76], Боера и Калнинса [77], Боера и Пеньяфила [78] используются идеи инфинитезимального подхода, т.е. близкие к классическому методу Ли, хотя и с некоторыми отличиями.

Симметрийные свойства дифференциальных уравнений в частных производных используются для отыскания точных решений. В 1747 г. Даламбер впервые использовал в неявном виде симметрию линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной для построения общего решения в виде суммы двух произвольных дважды дифференцируемых функций, зависящих от двух инвариантных переменных $(x+t)$ и $(x-t)$. В 1853 г. Лиувилль нашел решения нелинейного волнового уравнения с одной пространственной переменной.

Впоследствии многие исследователи использовали и развивали теорию С.Ли. Г.Бейтмен особенно широко использовал симметрийные свойства линейных волновых уравнений для отыскания точных решений. Цикл работ В.И.Смирнова и С.Л.Соболева (1932) посвящен построению и применению функционально-инвариантных решений линейного волнового уравнения.

"Особая ценность этих классических идей состоит в том, что они применимы не только к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных, но и к нелинейным, для которых не имеет места принцип суперпозиции. Поэтому задача о построении какого-либо решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по известному решению для обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих симметрийными свойствами, конструктивно может быть решена. Можно сказать, что для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые инвариантны относительно нетривиальных преобразований независимых и зависимых переменных, справедлив симметрийный нелинейный принцип суперпозиции". [54 ст.4].

В настоящее время выполнен групповой анализ многих уравнений математической физики. С помощью групповых методов найдены семейства точных решений этих уравнений. Разработан алгоритм отыскания частично-инвариантных решений, теория дифференциальных инвариантов [38]. Применение теории Ли в механике и смежных областях резюмированы в монографии [40] и обзорах [41,42], где можно найти развернутое изложение и дальнейшие ссылки по этому вопросу.

Построению теории инвариантных и частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений в частных производных посвящен ряд монографий Л.В.Овсянникова [38, 39, 40]. Л.В.Овсянников провел всесторонний анализ и нашел некоторые классы частных решений уравнений газовой динамики. В настоящее время эта теория получила широкое применение.

Новый подход к исследованию симметрийных свойств дифферециальных уравнений в частных производных предложен В.И.Фущичем в [57].

Надо отметить ограниченность метода Ли, так как операторы $Q_A(X_A)$, допускаемые системой S, ищутся только в виде дифференциальных операторов первого порядка. Поэтому чтобы обнаружить новые алгебры инвариантности дифференциальных уравнений, которые в принципе не могут быть найдены с помощью классического метода Ли, необходимо существенно расширить класс рассматриваемых операторов. Основное отличие этого метода от классического метода С.Ли состоит в том, что базисные элементы алгебры инвариантности соответствующих уравнений являются, как правило, интегродифференциальными (псевдодифференциальными) операторами. По этой причине эти алгебры порождают нелокальные (неточечные) преобразования, тогда как алгебра Ли операторов первого порядка порождает локальные (точечные) преобразования. Этот новый метод получил название нелиевского метода исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений в частных производных.

Этот метод был успешно применен к уравнениям Дирака [80,81], Максвелла [61], Шредингера [63] и др.

Эффективный алгоритм для отыскания классов точных решений для дифференциальных уравнений в частных производных предложен В.И.Фущичем и в явном виде реализован в [58, 64, 65].

§ 2. Метод Ли

Рассмотрим совокупность преобразований L в n-мерном евклидовом пространстве E^n точек $x \in E^n$ и $x' = Lx \in E^n$ Множество преобразований $\{L_a\}$ в точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, зависящих от параметров $a=(a^1, a^2, \dots, a^r)$ можно задать системой равенств

$$L_a:\ x'^i = f^i(x) = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; a^1, a^2, \dots, a^r), \qquad \text{(I.2.I)}$$

где функции f^i бесконечно дифференцируемы и локально обратимы.

Закон умножения преобразования: $L_a L_b \in \{L_c\}$, для некоторых значений параметров в терминах функций f запишется формулой

$$f^i(x) = f_1^i(f_2^1(x), \dots, f_2^n(x)), \qquad i=\overline{1,n}.$$

Преобразование L, для которого в некоторой окрестности точки существует обратное преобразование L^{-1}, т.е. для точки $x'=Lx$ существует $x=L^{-1}x'$, называется обратным.

Определение I [38]. Совокупность преобразований $\{L_a\}$ называется локальной r параметрической непрерывной группой преобразований Ли (G_r^n) в пространстве E^n, если существует такой куб $\mathcal{M}_0 \subset R^m$, что для всех $a \in \mathcal{M}_0$, и удовлетворяются все аксиомы группы Ли:

I. Существует такое значение $a_0 \in \mathcal{M}_0$, что L_0 есть тождественное преобразование;

2. Для $a \in \mathcal{M}_0$ и $b \in \mathcal{M}_0$ выполняется $L_b L_a = L_{\varphi(a,b)} \in \{L_a\}$;

3. Если $a \in \mathcal{M}_0$, $b \in \mathcal{M}_0$ и $L_a = L_b$, то $a=b$;

4. $\varphi(a,b) \in C_\infty^n(\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0)$.

Рассмотрим теперь множество преобразований независимых и зависимых переменных $(x, u(x))$, образующих, по определению, группу Ли;

$$\bar{x}^i = f^i(x, u; a)$$
$$\bar{u}^\alpha = F^\alpha(x, u; a) \quad , \tag{I.2.2}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, u^2, \ldots, u^k)$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^r)$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,k}$, a – параметр преобразования и для малых значений a , например вблизи точки $a = 0$ соответствующих тождественному преобразованию:

$$\bar{x}^i_{|a=0} = f^i(x, u, 0) = x^i \ ,$$
$$\bar{u}^\alpha_{|a=0} = F^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha \ .$$

Для случая бесконечно малых преобразований L_a $(a=0)$ получаем

$$\bar{x}^i = x^i + a^\nu \xi^i_\nu(x, u) = x^i + \delta x^i \ ,$$
$$\bar{u}^\alpha = u^\alpha + a^\nu \eta^\alpha_\nu(x, u) = u^\alpha + \delta u^\alpha \ , \tag{I.2.3}$$

где $\nu = \overline{1,r}$ и

$$\xi^i_\nu(x, u) = \frac{\partial f^i(x, u; a)}{\partial a^\nu}\Big|_{a=0} \ ,$$
$$\eta^\alpha_\nu(x, u) = \frac{\partial F^\alpha(x, u; a)}{\partial a^\nu}\Big|_{a=0} \ . \tag{I.2.4}$$

Используя ряд Тейлора, вычислим приращение функции $\varphi(x, u)$ при бесконечно малом преобразовании (I.2.3) и ограничимся бесконечно малыми первого порядка

$$\Delta\varphi(x, u(x)) = \varphi(x + \delta x, u + \delta u) - \varphi(x, u) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha = a^\nu \Big\{ \xi^i_\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \qquad (I.2.5)$$

$$+ \eta^\alpha_\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big\}\varphi(x,u) \equiv a^\nu X_\nu \varphi(x,u) ,$$

где

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha_\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (I.2.6)$$

– дифференциальный оператор первого порядка. Операторы X называются инфинитезимальными операторами группы G_ν преобразований (I.2.2), или генераторами группы Ли.

Закон преобразования производных $u^\alpha_i = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ для независимых переменных x^i и зависимых переменных $u^\alpha(x)$ из формул (I.2.2) однозначно определяются, т.е. при преобразовании (I.2.3) производные u^α_i преобразуются по правилу

$$\bar{u}^\alpha_i = u^\alpha_i + a\,\zeta^\alpha_i(x,u) , \qquad (I.2.7)$$

где

$$\zeta^\alpha_i = \mathcal{D}_i(\eta^\alpha) - u^\alpha_j \mathcal{D}_i(\xi^i) , \qquad (I.2.8)$$

$\mathcal{D}_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + u^\alpha_i \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}$ – оператор полного дифференцирования. В самом деле, группе преобразований G_r независимых и зависимых переменных $(x, u(x))$ в пространстве E^n соответствует некоторая группа преобразований переменных $\left(x, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, которая называется продолженной группой группы G_r и обозначается $\widetilde{G}_r$. Генераторами продолженной группы $\widetilde{G}_r$ являются операторы

$$\widetilde{X} = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}. \qquad (I.2.9)$$

Здесь для простоты положили $\nu = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0. \qquad (I.2.I0)$$

Будем искать для уравнения (I.2.I0) оператор

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad (I.2.II)$$

где

ξ^i и η^α – координаты этого оператора.

Если для преобразований (I.2.3), (I.2.7) выполняется условие

$$\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = \Phi(x', u', \frac{\partial u'}{\partial x'})$$

тогда говорят, что рассматриваемое уравнение (I.2.I0) инвариантно относительно группы G_r. Приращение $\Delta\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ при преобразованиях из группы G_r имеет вид

$$\Delta\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = (a^\nu \widetilde{X}_\nu)\Phi(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}). \qquad (I.2.I2)$$

Определение 2 [38]. Будем говорить, что уравнение (I.2.I0) инвариантно относительно группы G_r, если

$\Delta\Phi=0$, т.е. если

$$\widetilde{X}_\nu \Phi(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})_{|\Phi=0} = 0. \tag{1.2.13}$$

Выражение (1.2.9) подставим в (1.2.13) и получаем определяющее уравнение для определения координат инфинитезимального оператора (1.2.11) $\xi^i(x,u), \eta^\alpha(x,u)$.

Решая систему определяющих уравнений, находим $\xi^i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$. Найденные выражения подставляем в (1.2.11), и, собирая вместе выражения при одинаковых постоянных интегрирования, получаем набор операторов $\{X_A\}$, которые и порождают искомую группу симметрии уравнения (1.2.10).

Найденный набор операторов X_A образует алгебру Ли, т.е. они удовлетворяют таким условиям [38]:

1. X_A – образует линейное пространство R .

2. В R определена операция, ставящая в соответствие каждым двум элементам $X_i, X_j \in R$ некоторый элемент $X_k \in R$ называемый коммутатором элементов X_i, X_j , т.е.

$$[X_i, X_j] \equiv X_k \tag{1.2.14}$$

Коммутатор (1.2.14) обладает следующими свойствами:

а) антисимметричность:

$$[X_i, X_j] = -[X_j, X_i] \;;$$

б) распределительность:

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, X_3] = \alpha[X_1, X_3] + \beta[X_2, X_3] \;;$$

с) тождество Якоби:

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0.$$

Таким образом, задача о нахождении алгебры инвариантности уравнения (I.2.I0) сводится к отысканию всех тех инвариантов $\widetilde{X}_\nu$, для которых удовлетворяет условие (I.2.I3). Аналогичным образом можно находить группы инвариантности дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка

$$\Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0.$$

§ 3. Метод операторных уравнений

Рассмотрим некоторое линейное дифференциальное уравнение

$$L(\partial)\,\psi(x) = 0\,, \qquad (I.3.I)$$

где $L(\partial)$ – линейный дифференциальный оператор.

Функция $\psi(x)$ преобразуется по следующему закону

$$\psi'(x') = T(\Lambda)\,\psi(x) = T(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}x') \qquad (I.3.2)$$

если

$$x' = \Lambda x\,, \qquad (I.3.3)$$

где x – независимая переменная; Λ – некоторая совокупность преобразований, образующих группу G.

Если выполняется условие

$$L(\partial)\,\psi(x) = L(\partial')\,\psi'(x') = 0\,, \qquad (I.3.4)$$

тогда уравнение (I.3.I) называется инвариантным относительно преобразований (I.3.3). Условия (I.3.4) справедливо только для линейных уравнений. При бесконечно малом преобразовании

$$x' = x + \delta x \tag{I.3.5}$$

закон преобразования (I.3.3) можно привести к виду

$$\Psi'(x') = (1 + i\varepsilon Q)\psi(x') , \tag{I.3.6}$$

где Q - генератор преобразования, ε - бесконечно малая величина.

В уравнение (I.3.4) подставляем (I.3.6):

$$L(\partial)\psi(x) = L(\partial')\psi(x') + i\varepsilon L(\partial')Q\psi(x') = 0$$

и согласно уравнению (I.3.2), имеем

$$L(\partial)Q\psi(x) = 0 , \tag{I.3.7}$$

т.е. функция $Q\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (I.3.I).

Комбинируя (I.3.I) и (I.3.7), получаем необходимое и достаточное условие инвариантности уравнения (I.3.I) относительно преобаразования (I.3.5):

$$[L, Q]\psi(x) \equiv (LQ - QL)\psi(x) \tag{I.3.8}$$

или в операторной форме [57]:

$$[L, Q] = \lambda L , \tag{I.3.9}$$

где λ -некоторый неизвестный оператор. Условия (I.3.9) выполняются для функций $\psi(x)$, удовлетворяющих уравнению (I.3.I).

О п р е д е л е н и е [57]. Будем говорить, что уравнение (I.3.I) инвариантно относительно группы G, если генераторы Q группы G удовлетворяют условию (I.3.9).

Множество всех операторов Q, удовлетворяющих условию

(I.3.9), образует алгебру Ли. Действительно, пусть Q_1 и $Q_2 \in \{Q_A\}$. Если выполняются соотношения

$$[L, Q_1] = \lambda_1 L, \quad [L, Q_2] = \lambda_2 L$$

то, учитывая тождество

$$[L, Q_1 Q_2] = Q_1 [L, Q_2] + [L, Q_1] \quad ,$$

получаем

$$[L, [Q_1, Q_2]] = R L,$$

где

$$R = Q_1\lambda_2 + \lambda_2 Q_1 + Q_2\lambda_1 + \lambda_1 Q_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_1 \ ,$$

т.е. коммутатор операторов Q_1 и Q_2 удовлетворяет условию инвариантности (I.3.9).

Таким образом, определив все операторы Q_A, удовлетворяющие условию (I.3.9), мы найдем группу инвариантности линейного уравнения (I.3.I).

Условие инвариантности (I.3.9) является более общим, чем условие

$$[L, Q_A] = 0 \tag{I.3.10}$$

т.е. среди генераторов Q_A, удовлетворяющих условию (I.3.8), могут быть такие, для которых выполняется условие (I.3.10), в то время как для некоторых из Q_A это условие выполняется только если подействовать на решение $\psi(x)$ уравнения (I.3.I).

В дальнейшем формулы (I.3.9) будут одним из основных средств исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в диссертации.

§ 4. Построение решений дифференциальных уравнений групповыми методами

Для отыскания решений дифференциального уравнения в частных производных

$$S\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 , \tag{I.4.I}$$

где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R^n$ независимые переменные, а $u = u(x)$ – искомая функция, инвариантных относительно группы Шредингера поступим следующим образом. Решения уравнения (I.4.I) относительно группы G_A ищем в виде (см. [54])

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x) , \tag{I.4.2}$$

где $\varphi(\omega)$ – некоторая пока неизвестная функция от новых переменных $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$ (независимых инвариантов группы инвариантности данного дифференциального уравнения), число которых на единицу меньше, чем переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Предположим, что уравнение (I.4.I) допускает некоторую группу G_A преобразований пространства $Z = R^n \times R^1$, $x \in R^n$, $u \in R^1$

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + a \cdot \xi^\mu(x, u) + O(a^2) , \\ u' &= u + a \cdot \eta(x, u) + O(a^2) , \end{aligned} \tag{I.4.3}$$

где $\mu = \overline{0, n-1}$, причем

$$X = \xi^{\mu}(x, u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (I.4.4)$$

— инфинитезимальный оператор группы G_A .

Условие

$$X \cdot \Phi_{|\Phi=0} = 0 \qquad (I.4.5)$$

является критерием инвариантности решений уравнения (I.4.I), образующих некоторое многообразие $\Phi(x, u) = 0$, заданное в пространстве $(x, u) \in Z = R^n \times R^1$. Общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (I.4.5) относительно функции $\Phi(x, u)$ записывается в виде

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r) = 0 , \qquad (I.4.6)$$

где $\omega_r = \omega_r(x, u)$, $r = \overline{1, n}$ — является первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x,u)} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)} , \qquad (I.4.7)$$

где ξ, η координаты инфинитезимального оператора (I.4.4).

Как известно, координаты инфинитезимального оператора группы Галилея имеют вид

$$\xi^{\mu} = C_{\mu\nu} x^{\nu} + d_{\mu} , \qquad (I.4.8)$$

где

$C_{\mu\nu}$, d_{μ} , $\mu, \nu = \overline{0, n-1}$., $C_{0a} = 0$, $C_{ab} = -C_{ba}$, $C_{00} = 2C_{11} = \ldots = 2C_{nn}$ — постоянные параметры группы. Это значит, что уравнение (I.4.6) содержит только один инвариант, зависящий от всех переменных x и u, а остальные $n-1$ инвариантов зависят только от переменных x, т.е.: $\omega_a=\omega_a(x)$, $a=\overline{1,n-1}$, $\omega_n=\omega_n(x,u)$. Поэтому решения уравнения (I.4.I) имеют вид (I.4.2). Подставляя выражения (I.4.2) в уравнения (I.4.I) получим уравнение

$$S(\omega,\varphi)=0 \tag{I.4.9}$$

относительно независимых переменных ω и искомой функции φ. Решив уравнение (I.4.9) по формуле (I.4.2) получаем решение исходного уравнения.

Таким образом, вопрос о нахождении инвариантных решений дифференциальных уравнений в частных производных можно было бы считать решением, но возникают некоторые затруднения. Набор $\omega_r(x,u)$ получается интегрированием системы (I.4.7), содержащей параметры группы G_A. Л.В.Овсянников в [38] предложил решить этот вопрос с помощью алгоритма нахождения так называемых H-инвариантных решений уравнения (I.4.I), т.е. находятся решения, инвариантные относительно несопряженных подгрупп группы G_A, из которых посредством продолжения можно получить все остальные решения, соответствующие некоторому набору параметров группы G_A. В этом алгоритме затруднение состоит в перечислении всех несопряженных подгрупп группы G_A. Из работы [56] и др., видно, что количество несопряженных подалгебр Q_r резко возрастает с увеличением числа независимых переменных x в уравнении (I.4.I). Например, группа инвариантности уравнения Даламбера в 5-мерном пространстве Минковского содержит около 650 неэквивалентных подгрупп [56].

В предположении (I.4.8) система (I.4.7) интегрируется известными методами [50].

ГЛАВА II

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Уравнение Шредингера является одним из основных уравнений нерелятивистской квантовой физики и поэтому необходимо всестороннее изучение его симметрийных свойств.

В этой главе будут изучены групповые свойства уравнения $2n$ - порядка типа Шредингера с потенциалом, а также уравнения Шредингера с распадающейся массой. Рассматривается также уравнение Шредингера для двух частиц и исследуются групповые свойства такого уравнения.

§ 7 посвящен обратной задаче группового анализа - нахождению дифференциальных уравнений четвертого порядка, инвариантных относительно группы Галилея.

В § 10 исследуются симметрии системы дифференциальных уравнений параболического типа.

§ 1. О группе симметрии линейного параболического уравнения $2n$-го порядка.

Рассмотрим свободное нерелятивистское уравнение типа Шредингера $2n$-го порядка

$$Lu \equiv (P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2)^n u = 0 \,, \tag{2.1.1}$$

где $u = u(t,\vec{x})$ - однокомпонентная волновая функция,

$x=(x_1, x_2, x_3)$, $P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$, $P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $a=1,2,3.$, $\vec{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$, m – фиксированная масса частицы, n – произвольное натуральное число,

$$(P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2) = M, \quad (P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2)^2 = M \cdot M \quad \text{и т.д.}$$

Исследуем групповые свойства уравнения (2.I.I).

Известно [86], что основное уравнение нерелятивистской механики – уравнение Шредингера

$$Mu = (P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2)u = 0 \qquad (2.I.2)$$

инвариантно относительно I3-параметрической алгебры Ли группы Шредингера $Sch(1,3)$. Базисные элементы алгебры Ли этой группы записываются в следующем виде

$$\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a=1,2,3. \\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a=b. \\
&G_a = tP_a - m x_a, \\
&D = 2tP_0 - x_a P_a + \frac{3}{2}i, \\
&A = t(x_\nu P^\nu + \frac{3}{2}i) + m\frac{\vec{x}^2}{2}, \quad \nu=\overline{0,3}. \\
&B = mE,
\end{aligned} \qquad (2.I.3)$$

где $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $A_\nu B^\nu = A_0 B_0 - A_a B_a$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В группу преобразований Шредингера включается II-параметрическая подгруппа Галилея, где P_0 – генератор временных трансляций (гамильтониан), P_a – генератор пространственных смещений (оператор импульса), J_{ab} - генераторы вращения трехмерного пространства (момент импульса). G_a порождает чисто галилеевские преобразования

$$\omega \longrightarrow \omega' = \omega + v ,$$

где ω - скорость движения частицы в инерциальной системе отсчета K, v - скорость системы отсчета K'. Операторы P_0, P_a, J_{ab}, G_a, B являются базисными элементами алгебры Ли группы Галилея. Остальные два оператора A и D порождают проективные и масштабные преобразования вида

$$D:\ t' = e^{2\lambda} t , \quad x'_b = e^{\lambda} x_b .$$

$$A:\ t' = \frac{t}{1-at} , \quad x'_b = \frac{x_b}{1-at} ,$$

где a, λ - параметры преобразований.

Базисные элементы алгебры Ли группы Шредингера удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[P_a, P_0] = 0 , \quad [P_a, P_b] = 0 ,$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g^{bc} J_{ad} + g^{ad} J_{bc} - g^{ac} J_{bd} - g^{bd} J_{ac}) ,$$
$$[J_{ab}, P_c] = 0 , \ [J_{ab}, P_0] = 0 , \ [J_{ab}, G_c] = i(g^{bc} G_a - g^{ac} G_b) ,$$
$$[G_a, G_b] = 0 , \ [P_a, G_b] = i m g^{ab} , \qquad (2.1.4)$$
$$[P_0, G_a] = i P_a , \ [P_a, D] = i P_a , \ [P_0, D] = 2i P_0 ,$$
$$[G_a, D] = -i G_a , \ [J_{ab}, D] = 0 , \ [P_0, A] = -i D ,$$
$$[P_a, A] = -i G_a , \ [J_{ab}, A] = 0 , [G_a, A] = 0 , [A, D] = -2i A ,$$

где $g^{\alpha\beta}$ – метрический тензор.

$$g^{\alpha\beta}=\begin{cases}1\ , & \alpha=\beta=0.\\ -1\ , & \alpha=\beta=1,2,3.\\ 0\ , & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

Теперь мы исследуем группу симметрии уравнения шредингеровского типа $2n$ -го порядка вида (2.I.I).

Т е о р е м а 2.I.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.I.I) есть I3-мерная алгебра Ли группы Шредингера, базисные элементы которой задаются операторами

$$\begin{aligned}&P_0^{(n)}=P_0^{(1)}=P_0\ , \quad P_a^{(n)}=P_a^{(1)}=P_a\ ,\\ &J_{ab}^{(n)}=J_{ab}^{(1)}=J_{ab}\ , \quad G_a^{(n)}=G_a^{(1)}=G_a\ ,\\ &D^{(n)}=D^{(1)}-(n-1)i=D-(n-1)i\ ,\\ &A^{(n)}=A^{(1)}-(n-1)it=A-(n-1)it\ , \quad B=mE\end{aligned}\tag{2.I.5}$$

с коммутационными свойствами (2.I.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции.

I. $n=2$. В этом случае для нахождения алгебры инвариантности уравнения (2.I.I) применим метод Ли [38] и рассматриваемое уравнение в обозначениях [38] запишем следующим образом:

$$SU=-U_{00}+\frac{i}{m}\left(U_{011}+U_{022}+U_{033}\right)+\frac{1}{4m^2}\left(U_{1111}+U_{2222}+U_{3333}+2\left(U_{1122}+U_{1133}+U_{2233}\right)\right)=0,\tag{2.I.6}$$

где индекс внизу означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Допускаемый оператор будем искать в виде

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial U} . \qquad (2.I.7)$$

Для записи определяющего уравнения необходимо 4-ое продолжение оператора (2.I.7):

$$\overset{4}{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial U} + \zeta^i \frac{\partial}{\partial U_i} + \sigma^{ij} \frac{\partial}{\partial U_{ij}} + \tau^{ijk} \frac{\partial}{\partial U_{ijk}} + \omega^{ijkl} \frac{\partial}{\partial U_{ijkl}} , \qquad (2.I.8)$$

где

$$\begin{aligned} &\zeta^i = \mathcal{D}_i(\eta) - U_t \mathcal{D}_i(\xi^t) , \quad \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial}{\partial U} . \\ &\sigma^{ij} = \overset{1}{\mathcal{D}}_i(\zeta^j) - U_{tj} \mathcal{D}_i(\xi^t) , \quad \overset{1}{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i + U_{ij} \frac{\partial}{\partial U_j} . \qquad (2.I.9) \\ &\tau^{ijk} = \overset{2}{\mathcal{D}}_i(\sigma^{jk}) - U_{tjk} \mathcal{D}_i(\xi^t) , \quad \overset{2}{\mathcal{D}}_i = \overset{1}{\mathcal{D}}_i + U_{ijk} \frac{\partial}{\partial U_{jk}} . \\ &\omega^{ijkl} = \overset{3}{\mathcal{D}}_i(\tau^{jkl}) - U_{tjkl} \mathcal{D}_i(\xi^t) , \quad \overset{3}{\mathcal{D}}_i = \overset{2}{\mathcal{D}}_i + U_{ijkl} \frac{\partial}{\partial_{jkl}} . \end{aligned}$$

Из условия инвариантности уравнения (2.I.6) относительно оператора (2.I.7) имеем

$$\overset{4}{X}(SU)\Big|_{SU=0} = 0 , \qquad (2.I.10)$$

где $\overset{4}{X}$ – оператор (2.I.8), после довольно громоздких преобразований находим систему определяющих уравнений относительно координат инфинитезимального оператора ξ^i и η :

1. $\dfrac{\partial \xi^0}{\partial x_a} = 0 .$

2. $\dfrac{\partial \xi^0}{\partial U} = 0 .$

5. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial \xi^0}{\partial t} = \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} .$

6. $\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x_3} .$

$$3.\ \frac{\partial \xi^a}{\partial U} = 0. \qquad 7.\ -im\frac{\partial \xi^a}{\partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_a \partial U} = 0. \qquad (2.I.11)$$

$$4.\ \frac{\partial \xi^a}{\partial x_b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x_a} = 0,\ a \neq b. \qquad 8.\ S\eta = 0.$$

Решая систему дифференциальных уравнений (2.I.II) получим:

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= C_1 t^2 + 2C_2 t + d_0, \\
\xi^1 &= C_1 t x_1 + C_3 t + C_2 x_1 + C_4 x_2 + C_5 x_3 + d_1, \\
\xi^2 &= C_1 t x_1 + C_6 t - C_4 x_1 + C_2 x_2 + C_7 x_3 + d_2, \\
\xi^3 &= C_1 t x_3 + C_8 t - C_5 x_1 - C_7 x_2 + C_2 x_3 + d_3, \\
\eta &= \left(C_1\left(-\frac{1}{2}t + \frac{im}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) + im(C^3 x_1 + C^6 x_2 + C^8 x_3) + C^9\right)U + B,
\end{aligned} \qquad (2.I.12)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_9$; $d_0, d_1, \ldots, d_3$ – постоянные интегрирования.

Подставляя эти решения в (2.I.7) и собирая члены при одинаковых постоянных интегрирования, рассматриваемых как независимые параметры, получаем алгебру инвариантности с базисными операторами:

$$\begin{aligned}
&P_0^{(2)} = P_0^{(n)} = P_0, \quad P_a^{(2)} = P_a^{(n)} = P_a, \\
&J_{ab}^{(2)} = J_{ab}^{(n)} = J_{ab}, \quad G_a^{(2)} = G_a^{(n)} = G_a, \\
&D^{(2)} = 2tP_0 - x_a P_a + \frac{1}{2}i = D^{(1)} - i, \\
&A^{(2)} = t(x_\nu P^\nu + \frac{1}{2}i) + \frac{m}{2}\vec{x}^2 = A^{(1)} - it
\end{aligned} \qquad (2.I.13)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2.I.4).

Множество операторов (2.I.13), удовлетворяющих (2.I.10) можно получить и другим способом. Поскольку уравнение (2.I.6) линейное, то условие инвариантности запишем таким образом [57]:

$$[L, Q_q^{(r)}]u = 0 \ , \quad r = 1,2. \ , \qquad (2.I.14)$$

где L – оператор уравнения, а $Q_q^{(1)}$ и $Q_q^{(2)}$ – операторы алгебр (2.I.3) и (2.I.5) соответственно. Оператор $A^{(1)} \in \{Q_q^{(1)}\}$, известен, а оператор $A^{(2)} \in \{Q^{(2)}\}$ будем искать в виде

$$A^{(2)} = A^{(1)} + ict \ , \qquad (2.I.15)$$

где C – неизвестная постоянная. Подставляя теперь (2.I.15) в (2.I.14) и используя формулу

$$[M, t] = i \quad , \quad [M, A^{(1)}] = 2itM$$

получим

$$[M^2, A^{(2)}] = M[M, A^{(2)}] + [M, A^{(2)}]M = M[M, A^{(1)} + ict] +$$
$$[M, A^{(1)} + ict]M = M[M, A^{(1)}] + ic[M, t] + [M, A^{(1)}]M + ic[M, t]M =$$
$$M2itM + ici + 2itMM + iciM = 4itM^2 - 2(c+1)M \ .$$

Таким образом,

$$[M^2, A^{(2)}]u = 4itM^2u - 2(c+1)Mu \ . \qquad (2.I.16)$$

Из (2.I.16) видно, что для удовлетворения условия (2.I.14) нужно выбрать $C = -1$. Тогда

$$A^{(2)} = A^{(1)} - it$$

Аналогично можно показать, что

$$D^{(2)} = D^{(1)} - i \ .$$

Поскольку

$$[M, P_0] = [M, P_a] = [M, J_{ab}] = [M, G_a] = 0 ,$$

то проверка того, что

$$P_0^{(2)} = P_0^{(1)} , \quad P_a^{(2)} = P_a^{(1)} , \quad J_{ab}^{(2)} = J_{ab}^{(1)} , \quad G_a^{(2)} = G_a^{(1)}$$

тривиальна. На этом первый шаг доказательства завершен.

II. Пусть (2.I.3) выполняется при $n = k-1$:

$$P_0^{(k-1)} = P_0^{(1)} , \quad P_a^{(k-1)} = P_a^{(1)} , \quad J_{ab}^{(k-1)} = J_{ab}^{(1)} , \quad G_a^{(k-1)} = G_a^{(1)} ,$$

$$D^{(k-1)} = D^{(1)} - (k-2)i , \quad A^{(k-1)} = A^{(1)} - (k-2)it , \quad B = mE .$$

III. Докажем, что это остается справедливым при $n = k$:

$$P_0^{(k)} = P_0^{(1)} , \quad P_a^{(k)} = P_a^{(1)} , \quad J_{ab}^{(k)} = J_{ab}^{(1)} , \quad G_a^{(k)} = G_a^{(1)} , \qquad (2.I.17)$$

$$D^{(k)} = D^{(1)} - (k-1)i , \quad A^{(k)} = A^{(1)} - (k-1)it , \quad B = mE$$

Докажем это утверждение только для $A^{(k)}$, поскольку утверждения относящиеся к остальным операторам доказываются аналогично. Используя соотношение

$$[M^k, t] = ikM^{k-1} .$$

имеем

$$[M^k, A^{(k)}] = M[M^{k-1}, A^{(k)}] + [M, A^{(k)}]M^{k-1} = M[M^{k-1}, A^{(k-1)} - it] +$$
$$[M, A^{(1)} - (k-1)it]M^{k-1} = M[M^{k-1}, A^{(k-1)}] - iM[M^{k-1}, t] +$$
$$[M, A^{(1)}]M^{k-1} - (k-1)i[M, t]M^{k-1} = M2(k-1)itM^{k-1} - iM(k-1)iM^{k-2} +$$
$$2itM \cdot M^{k-1} - (k-1)i \cdot iM^{k-1} = 2(k-1)i^2M^{k-1} + 2(k-1)itM^k -$$
$$i^2(k-1)M^{k-1} + 2itM^k - i^2(k-1)M^{k-1} = 2kitM^k .$$

Итак, условия (2.I.I4) действительно выполняются. Теорема доказана.

Таким образом в этом параграфе мы нашли группу симметрии уравнения шредингеровского типа $2n$ -го порядка (2.I.I).

§ 2. Групповая классификация потенциалов для линейного дифференциального уравнения порядка $2n$

В [58] поставлена задача о построении теоретико-групповых основ квантовой механики, базирующейся на уравнении вида

$$L\varphi \equiv (S^n + V)\varphi = 0 , \qquad (2.2.I)$$

где

$$S^n = (P_0 + \frac{1}{2m}\vec{P}^2)^n , \quad \varphi = \varphi(t = x_0, \vec{x}) , \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) , \quad V = V(\vec{x}) ,$$

n - натуральное число. Уравнение (2.2.I) является обобщением уравнения Шредингера и совпадает с ним при $n = 1$

Настоящий параграф посвящен групповой классификации потенциалов V в уравнении (2.2.I), т.е. описанию всех потенциалов V , при которых уравнение (2.2.I) остается инвариантным относительно некоторой подалгебры алгебры Шредингера $Sch(1,3)$.

Аналогичная задача в случае $n = 1$ решена в [76]. Решим эту задачу при произвольном n .

Т е о р е м а 2.2.I. Уравнение $(S^n + V)\varphi = 0$ инвариантно относительно следующих алгебр:

$[O(2) \oplus sl(2,R)] \supset\!\!\!\!+ \omega_2$, если $V = c / x_1^{2n}$.

$[O(2)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_2$, если $V=c/(x_1^2+x_2^2)$.

$sl(2,R)\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_1$, если $V=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)/x_1^{2n}$.

$O(3)\oplus sl(2,R)$, если $V=c/r^{2n}$.

$O(2)\oplus sl(2,R)$, если $V=f(\cos\theta_2)/r^{2n}$.

$sl(2,R)$, если $V=f(\theta_1,\theta_2)/r^{2n}$.

$\mathcal{S}_2$, если $V=f(\theta_1-\beta\ln r_1,\theta_2)/r^{2n}$.

$\mathcal{S}_2\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_1$, если $V=f(\theta_1-\beta\ln r\sin\theta_2)(r\sin\theta_2)\exp\left\{-\frac{2\theta_1}{\beta}\right\}$.

$[O(2)\oplus t]\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_2$, если $V=V(x_1)$.

$[O(2)\oplus t]\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_1$, если $V=V(x_1^2+x_2^2)$.

$t\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_1$, если $V=V(x_1,x_2)$.

$O(3)\oplus t$, если $V=V(r)$.

$O(2)\oplus t$, если $V=V(x_1^2+x_2^2,x_3)$.

t, если $V=V(x_1,x_2,x_3)$.

$[O(3)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!+ \mathcal{W}_3$, если $V=\Lambda-const$,

где $\mathcal{W}_a-2a+1$ – мерная алгебра Гайзенберга-Вейля, образованная операторами $P_\alpha=-i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $G_\alpha=tP_\alpha-mx_\alpha$;

$sl(2,R)$ – алгебра, образованная операторами $I_1=\frac{1}{2}D$, $I_2=\frac{1}{2}(P_0+A)$, $I_3=\frac{1}{2}(P_0-A)$; $\mathcal{S}_2$ – двумерная разрешимая алгебра, образованная одним из $J_{\alpha\beta}$ и D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (2.2.I инвариантно относительно некоторой алгебры операторов $\{Q_A\}$, если выполняются условия

$$[S^n + V,\ Q_A]\psi = 0\ , \qquad A = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.2.2}$$

где $[L, Q] = LQ - QL$. Условие (2.2.2) эквивалентно уравнению

$$[S^n + V,\ Q_A] = \lambda(t, \vec{x})(S^n + V)\ , \tag{2.2.3}$$

где $\lambda(t, \vec{x})$ – некоторая функция.

Определим алгебру инвариантности уравнения (2.2.I) в классе дифференциальных операторов первого порядка. В этом случае наиболее общее выражение для оператора Q имеет вид

$$Q = i\left[a(t, \vec{x})\frac{\partial}{\partial t} + b_i(t, \vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t, \vec{x})\right], \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.2.4}$$

где $a(t, \vec{x}), b_i(t, \vec{x}), c(t, \vec{x})$ – неизвестные функции, которые предполагаем трижды непрерывно дифференцируемыми по всем независимым переменным.

Для нахождения Q и соответствующих потенциалов V подставим выражение (2.2.4) в (2.2.3). Выполняя коммутацию в левой части уравнения (2.2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ в обеих частях равенства, после весьма громоздких вычислений получаем систему уравнений для определения коэффициентов a , b_i , c :

$$
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ \frac{\partial a}{\partial x_\alpha} = 0\ ,\ \ \alpha = \overline{1,3}. &&\quad 6.\ \ \frac{\partial^2 c}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0\ ,\ \ \alpha = \beta. \\
&2.\ \ n\frac{\partial a}{\partial t} = \lambda(t, \vec{x}). &&\quad 7.\ \ \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} = 0. \\
&3.\ \ \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial b_\beta}{\partial x_\alpha} = 0,\ \ \alpha \neq \beta. &&\quad 8.\ \ \frac{\partial^2 c}{\partial x_\alpha \partial t} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

4. $\dfrac{\partial^2 b_\alpha}{\partial t^2} = 0.$ 9. $\dfrac{\partial c}{\partial x_\alpha} = -im\dfrac{\partial b_\alpha}{\partial t}.$

5. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial t} = \dfrac{\partial b_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial b_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial b_3}{\partial x_3}.$

и потенциала V :

$$b_\alpha \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} + n\frac{\partial a}{\partial t}\cdot V = 0 . \qquad (2.2.6)$$

Решая систему (2.2.5) и подставляя найденные a и b_α в (2.2.6), приходим к следующей системе уравнений для определения потенциала:

$$(a_2 x_i + b_i^{(1)})V_{x_i} + 2n a_2 V = 0 , \qquad (2.2.7)$$

$$(a_1 x_i + b_{ij} x_j + b_i^{(2)})V_{x_i} + 2n a_1 V = 0, \quad i \neq j. \qquad (2.2.8)$$

Возможны следующие случаи:

I. $a_2 \neq 0$.

Полагая в уравнении (2.2.7) $b_i^{(1)} = 0$, получаем

$$x_i V_{x_i} + 2nV = 0 ,$$

откуда

$$V(x_i) = \frac{1}{x_1^{2n}} F\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_k}{x_1}\right) = \frac{1}{r^{2n}} f(\Omega) , \qquad (2.2.9)$$

где F и f – произвольные функции, а Ω обозначает ($n-1$)-мерную единичную сферу, параметризованную следующим образом:

$$x_1 = r\sin\theta_{k-1}\dots\sin\theta_1 , \qquad (2.2.10)$$

$$x_2 = r\sin\theta_{k-1}\ldots\sin\theta_1,$$
$$-----------$$
$$x_k = r\cos\theta_{k-1}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (2.2.9) является однородная функция степени $2n$. Уравнение (2.2.8) сводится к уравнению

$$(b_{ij}x_j + b_i^{(2)})V_{x_i} = 0, \quad i \neq j. \tag{2.2.11}$$

Мы рассмотрим только $K=2,3$. Пусть $b_2 = b_3 = 0$, интегрируя уравнения Лагранжа для уравнения (2.2.11), находим

$$V(x_i) = \frac{1}{r^{2n}} f\left(\varepsilon_{ij\ell} b_{ij} \frac{x_\ell}{r}\right), \tag{2.2.12}$$

где $\varepsilon_{ij\ell}$ – единичный, полностью антисимметричный тензор. Например:

а) $V(x_i) = \frac{1}{r^{2n}} g(\theta_2)$, если $b_{23} = b_{13} = 0$, $b_{12} \neq 0$, где
$g(\theta_2) = f(\cos\theta_2) - const$;

б) $V(x_i) = \frac{c}{r^{2n}}$, если $b_{ij} \neq 0$, где $c - const$;

с) $V(x_i) = \frac{1}{r^{2n}} f(\theta_1, \theta_2)$, если $a_2 \neq 0$.

Если $a_1, b_{13}, b_{23} = 0$, то уравнение (2.2.8) имеет вид

$$(b_{12}x_2 + b_1^{(2)})V_{x_1} + (b_{21}x_1 + b_2^{(2)})V_{x_2} = 0. \tag{2.1.13}$$

Из уравнения (2.2.13), учитывая (2.2.8) и (2.2.9), получаем

$$V(x_i) = \frac{1}{x_1^{2n}} F\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad b_2, b_3 \neq 0. \tag{2.2.13 a}$$

$$V(x_i)=\frac{c}{x_1^2+x_2^2}\ ,\qquad b_{12}\,,\,b_3\neq 0, \tag{2.2.13 в}$$

$$V(x_1)=\frac{c}{x_1^{2n}}\ ,\qquad b_{23},\,b_2\,,\,b_3\neq 0 \tag{2.2.13 с}$$

все остальные коэффициенты b_α равны нулю. В случае $K=2$ остается только (2.2.13 с) с $b_2\,,\,b_1\neq 0$.

II. $a_1\neq 0,\quad a_2=0.$

Отметим сначала, что если $b_{ij}=0$, то имеем частный случай предыдущего результата. Поэтому мы предполагаем, что не все b_{ij} равны нулю. Сделав замену $\vec{x}'=\vec{x}+\vec{a}$, преобразуем уравнение (2.2.8), так, чтобы $b_i^{(2)}=0$ и перепишем (2.2.8) следующим образом:

$$x_i V_{x_i}+\beta_{ij}x_j V_{x_i}+2nV=0, \tag{2.2.14}$$

где $\beta_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{a_1}$. Теперь для $K=3$ выбираем β_{ij} следующим образом: $\beta_{23}=\beta_{31}=0$ и для $\beta_{12}=\beta$ находим решения

$$V(\vec{x})=\frac{1}{r^{2n}}F(\theta_1-\beta\ln r_1\,,\,\theta_2). \tag{2.2.15}$$

При $a_1\neq 0,\ a_2=0$ уравнение (2.2.7) имеет вид $b_i^{(1)}V_{x_i}=0$.

Если $\beta_{13}=0$ и $V_{x_3}=0$, уравнение (2.2.14) перепишем так:

$$(x_1+\beta_{12}x_2)V_{x_1}+(x_2-\beta_{12}x_1)V_{x_2}+2nV=0.$$

Откуда

$$V(x_1)=\exp\left(-\frac{2\theta}{\beta}\right)f(\theta_1-\beta\ln r\sin\theta_2)(r\sin\theta_2)^{2(1-n)}. \tag{2.2.16}$$

Ш. $a_1 = a_2 = 0$.

Из уравнения (2.2.8) следует, что

$$b_{ij} x_j V_{x_i} = 0, \quad b_{ij} \neq 0, \quad i \neq j. \tag{2.2.17}$$

Решая эти уравнения, имеем

$$V(\vec{x}) = V(r^2). \tag{2.2.18 a}$$

Если $b_{12} \neq 0$, то

$$V(\vec{x}) = V(x_1^2 + x_2^2, x_3). \tag{2.2.18 в}$$

Уравнения (2.2.7) и (2.2.8) при $a_1 = a_2 = 0$ запишем так:

$$\begin{aligned} & b_i^{(1)} V_{x_i} = 0, \\ & (b_{ij} x_j + b_i^{(2)}) V_{x_i} = 0. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Их совместные решения:

$$V(\vec{x}) = V(x_1^2 + x_2^2), \quad \text{если} \quad b_{12}, b_3 \neq 0. \tag{I.2.20a}$$

$$V(\vec{x}) = V(x_1, x_2), \quad \text{если} \quad b_3 \neq 0. \tag{I.2.20в}$$

$$V(\vec{x}) = V(x_1), \quad \text{если} \quad b_{23}, b_2, b_3 \neq 0. \tag{I.2.20c}$$

Следовательно, в этом параграфе выполнена полная классификация потенциалов для уравнения типа Шредингера $2n$ -го порядка.

§ 3. Алгебра инвариантности уравнения четвертого порядка

I. а. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$(P_0 - k_1 \vec{P}^2 - k_2 \vec{P}^2 \vec{P}^2) U = 0, \tag{2.3.I}$$

где

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \ P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}\,,\ \ a=\overline{1,3}\,,\ \ \vec{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\,,$$

$$U = U(t = x_0, \vec{x})\,,\ \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)\,,\ \ K_1, K_2 - const\,,\ \ K_1 \cdot K_2 \neq 0.$$

Для удобства уравнение (2.3.I) можно записать в виде

$$(i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2)U = 0, \tag{2.3.2}$$

где

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}\,,\ \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$ – оператор Лапласа.

Определим максимальную алгебру инвариантности уравнения (2.3.2) в классе всех дифференциальных операторов первого порядка. Используя метод, изложенный во введении, условие инвариантности уравнения (2.3.2) относительно некоторой группы, как обычно, запишем в виде

$$[i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, Q_A]\,U(t,x) = 0, \tag{2.3.3}$$

где Q_A – генераторы преобразований, индекс A пробегает некоторое множество значений.

В условии (2.3.3) функция $U(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.3.2). Условие инвариантности (2.3.3) эквивалентно уравнению (см.глава I § 3).

$$[i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, Q_A] = i\lambda_A(t,x)(i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2), \tag{2.3.4}$$

где $\lambda_A(t,x)$ некоторая пока неопределенная функция.

Как было отмечено выше, условие (2.3.4) является более общим, чем условие

$$[i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, Q_A] = 0, \tag{2.3.5}$$

то есть некоторые из операторов Q_A могут удовлетворять условию (2.3.3), но не удовлетворяют (2.3.5).

Очевидно, для нахождения алгебры симметрии уравнения (2.3.2) необходимо определить все независимые операторы Q_A, удовлетворяющие условию инвариантности (2.3.4) и образующие алгебру Ли.

Будем искать генераторы группы симметрии уравнения (2.3.2) в классе дифференциальных операторов первого порядка. В этом случае наиболее общее выражение для оператора Q_A имеет вид

$$Q_A = i\left(a(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial t} + b_i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,\vec{x})\right), \quad i=\overline{1,3}. \qquad (2.3.6)$$

где $a(t,\vec{x}), b_i(t,\vec{x}), c(t,\vec{x})$ – неизвестные пока функции, которые мы предполагаем трижды непрерывно дифференцируемыми по всем независимым переменным.

Подставляя оператор Q_A в (2.3.4), получаем следующее операторное уравнение

$$\begin{aligned}&[i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, Q_A] = [i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, a(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial t} + \\ &b_i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,\vec{x})] = [i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, a(t,\vec{x})]\frac{\partial}{\partial t} + \\ &[(i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, b_i(t,\vec{x})]\frac{\partial}{\partial x_i} + [i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2, c(t,\vec{x})] = \\ &\Lambda_A(t,\vec{x})(i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2),\end{aligned} \qquad (2.3.7)$$

так как оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x_i}$ – перестановочны с оператором $L = i\partial_0 + K_1\Delta + K_2\Delta^2$.

Выполняя коммутацию в левой части уравнения (2.3.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, после вычислений получаем систему уравнений для определения коэффициентов a, b_i, c:

I. $\frac{\partial a}{\partial x_i} = 0.$

6. $\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial b_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$

$$2.\ \frac{\partial a}{\partial t}=\lambda(t,\vec{x}). \qquad 7.\ \frac{\partial b_i}{\partial t}=0.$$

$$3.\ \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial b_1}{\partial x_1}. \qquad 8.\ \frac{\partial c}{\partial t}=0. \qquad (2.3.8)$$

$$4.\ \frac{\partial b_1}{\partial x_1}=\frac{\partial b_2}{\partial x_2}=\frac{\partial b_3}{\partial x_3}. \qquad 9.\ \frac{\partial c}{\partial x_i}=0.$$

$$5.\ \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_a \partial x_b}=0. \qquad 10.\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial b_1}{\partial x_1}.$$

Таким образом, для нахождения оператора   , входящего в условие (2.3.3) инвариантности уравнения (2.3.2), необходимо найти общее решение системы уравнений (2.3.8). Здесь мы не будем подробно излагать все выкладки, связанные с решением этой системы, они слишком громоздки, а напишем лишь окончательный результат. Общее решение этой системы, как легко проверить, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&a(t,\vec{x})=const\ ,\\
&b_1(t,\vec{x})=r_{12}x_2+r_{13}x_3+d_1\ ,\\
&b_2(t,\vec{x})=r_{21}x_1+r_{23}x_3+d_2\ , \qquad r_{12}=-r_{21}\ .,\\
&b_3(t,\vec{x})=r_{31}x_1+r_{32}x_2+d_3\ , \qquad r_{23}=-r_{32}\ ,\ r_{13}=-r_{31}\ .,\\
&c(t,\vec{x})=const\ ,\\
&\lambda(t,\vec{x})=0,
\end{aligned}$$

где r_{ab}, d_1, d_2, d_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя эти решения в (2.3.6), получаем следующее выражение для оператора Q :

$$Q=a\frac{\partial}{\partial t}+(r_{12}x_2+r_{13}x_3+d_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(r_{21}x_1+r_{23}x_3+d_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+ \qquad (2.3.9)$$
$$+(r_{31}x_1+r_{32}x_2+d_3)\frac{\partial}{\partial x_3}+c\,.$$

Собирая в (2.3.9) выражения при одинаковых постоянных интегрирования, рассматриваемых как независимые параметры, получаем операторы

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1,2,3.$$
$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad I = U\frac{\partial}{\partial U}. \tag{2.3.10}$$

Операторы (2.3.10) удовлетворяют условию инвариантности (2.3.3) и коммутационным соотношениям

$$[P_0, P_a] = 0, \quad [P_0, J_{ab}] = 0,$$
$$[J_{ab}, P_c] = i(g_{ac}P_b - g_{bc}P_a), \tag{2.3.11}$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ac}J_{bd} + g_{bd}J_{ac} - g_{bc}J_{ad} - g_{ad}J_{bc})$$

Операторы $\{P_0, P_a, J_{ab}, I\}$ образуют подалгебру алгебры Галилея

Можно теперь сформулировать следующее утверждение.

Л е м м а 2.3.1. Уравнение (2.3.1) инвариантно относительно 8-параметрической группы Ли, генераторы которой удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.3.11).

1 в. Рассмотрим частный случай уравнения (2.3.1). Пусть $K_1 = 0$. Тогда уравнение принимает вид

$$(P_0 - K\vec{P}^2\vec{P}^2)U = 0, \quad K \neq 0. \tag{2.3.12}$$

Т е о р е м а 2.3.2. Уравнение (2.3.12) инвариантно относительно 9-мерной алгебры Ли базисные элементы которой задаются операторами

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \ a \neq b,$$
$$D = 4tP_0 - x_a P_a, \quad I = U\frac{\partial}{\partial U} \tag{2.3.13}$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[P_a, P_0] = 0, \quad [P_a, P_b] = 0, \quad [J_{ab}, P_c] = i(g_{ac}P_b - g_{bc}P_a),$$
$$[J_{ab}, P_0] = 0, \quad [J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ac}J_{bd} + g_{bd}J_{ac} - g_{bc}J_{ad} - g_{ad}J_{bc}),$$
$$[P_0, D] = 2iP_0, \quad [P_a, D] = iP_a, \quad [J_{ab}, D] = 0.$$

Эта теорема доказывается аналогично лемме.

Iс. В заключение этого пункта заметим, что при ,
из (2.3.I) получаем уравнение Шредингера

$$(P_0 - K\vec{P}^2)u = 0,$$

групповые свойства которого исследованы в § I главы П.

П. Представляет интерес нахождение симметрии уравнения типа Шредингера четвертого порядка вида

$$Su = (P_0^2 + \lambda \vec{P}^2\vec{P}^2)u = 0, \qquad (2.3.I4)$$

где

$$u = u(t, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$

λ - постоянная.

Т е о р е м а 2.3.3. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.3.I4) является 9-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b,$$
$$D = 2tP_0 - x_a P_a, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (2.3.I5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [38], инфинитезимальный оператор группы, допускаемый уравнением (2.3.I4) имеет вид

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}. \qquad (2.3.I6)$$

Поскольку рассматриваемое уравнение 4-го порядка, необходимо 4-ое продолжение оператора X :

$$\overset{4}{X} = X + \zeta^i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sigma^{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \tau^{ijk}\frac{\partial}{\partial u_{ijk}} + \omega^{ijkl}\frac{\partial}{\partial u_{ijkl}}, \qquad (2.3.I7)$$

где координаты инифнитезимального оператора ξ^i, σ^{ij}, τ^{ijk}, ω^{ijkl} указаны в (2.I.9). Составляем условия инвариантности рассматриваемого уравнения относительно оператора $\overset{4}{X}$

$$\overset{4}{X}(SU)_{|SU=0} = 0. \tag{2.3.I8}$$

Действуя оператором $\overset{4}{X}$ на уравнения, переходя на многообразие и приравнивая коэффициенты при независимых производных, получаем систему определяющих уравнений для нахождения координат инфинитезимального оператора (2.3.I6)

$$
\begin{array}{llll}
\text{I.} & \dfrac{\partial \xi^i}{\partial U} = 0. & 6. & \dfrac{\partial \xi^a}{\partial x_b} + \dfrac{\partial \xi^b}{\partial x_a} = 0, \quad a \neq b. \\
2. & \dfrac{\partial \xi^0}{\partial x_a} = 0. & 7. & \dfrac{\partial^2 \xi^0}{\partial t^2} = 2\dfrac{\partial \eta^2}{\partial t \partial U}. \\
3. & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \xi^0}{\partial t} = \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1}. & 8. & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial U^2} = 0. \\
4. & \dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x_3}. & 9. & \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_a \partial U} = 0. \\
5. & \dfrac{\partial \xi^a}{\partial t} = 0. & \text{I0.} & S\eta = 0.
\end{array}
\tag{2.3.I9}
$$

Решая систему определяющих линейных дифференциальных уравнений (2.3.I9), находим явный вид координат ξ^i и η

$$
\begin{aligned}
\xi^0 &= 2c^1 t + d_0, \\
\xi^1 &= c^1 x_1 + c^2 x_2 + c^3 x_3 + d_1, \\
\xi^2 &= -c^2 x_1 + c^1 x_2 + c^4 x_3 + d_2, \\
\xi^3 &= -c^3 x_1 - c^4 x_2 + c^1 x_3 + d_3, \\
\eta &= c^5 U + b.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти координаты (2.3.I6) и собирая члены при одинаковых постоянных интегрирования, рассматриваемых как независимые параметры, получим алгебру инвариантности с базисными операторами (2.3.I5). Для базисных операторов симметрии (2.3.I5) уравнения (2.3.I4) выполняются следующие коммутационные соотношения определяющие алгебру Ли группы симметрии $\widetilde{E}(1,3)$.

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_0, J_{ab}] = 0, \quad [P_c, J_{ab}] = 0,$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{bc}J_{ad} + g_{ad}J_{bc} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}),$$
$$[P_0, D] = 2iP_0, \quad [P_a, D] = iP_a, \quad [J_{ab}, D] = 0.$$

Теорема доказана.

§ 4. Групповые свойства уравнения Шредингера с переменной массой

До сих пор мы рассматривали уравнение Шредингера с постоянной массой частицы. Ниже мы изучим симметрийные свойства уравнения Шредингера с переменной массой

$$Lu \equiv \left(P_0 - \frac{\vec{P}^2}{2m}\right)u = 0, \tag{2.4.I}$$

где $m = m(t)$ – масса частицы, являющаяся функцией от времени t, $u = u(t, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Условие инвариантности уравнения (2.4.I) имеет вид

$$[L, Q_A]u \equiv [P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2, Q_A]u = 0, \tag{2.4.2}$$

где Q_A – неизвестные операторы симметрии уравнения (2.4.I), Операторы Q_A имеют общий вид операторов первого порядка

$$Q_A = i\left(a\frac{\partial}{\partial t} + b^i\frac{\partial}{\partial x_i} + c\right), \tag{2.4.3}$$

где $a = a(t, \vec{x})$, $b^i = b^i(t, \vec{x})$, $c = c(t, \vec{x})$ – пока неизвестные коэффициенты оператора Q_A.

Условие инвариантности (2.4.2) эквивалентно уравнению

$$[L, Q_A] = i\lambda_A(t, \vec{x})L, \tag{2.4.4}$$

где $\lambda_A(t, \vec{x})$ – некоторая пока неизвестная функция.

Для нахождения максимальной алгебры симметрии уравнения (2.4.I), подставим выражение для оператора (2.4.3) в условие инвариантности (2.4.4) и получим следующее операторное уравнение

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta, Q_A\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta, a(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial t} + b^i(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,\vec{x})\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta, a(t,\vec{x})\right]\frac{\partial}{\partial t} + \left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta, b^i(t,\vec{x})\right]\frac{\partial}{\partial x_i} + \left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta, c(t,\vec{x})\right] = \lambda_A(t,\vec{x})\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m}\Delta\right), \tag{2.4.5}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

После вычисления коммутатора в левой части уравнения (2.4.5) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях операторов $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}$ в обеих частях равенства. После расщепления получаем следующую систему дифференциальных уравнений для определения $a(t,\vec{x})$, $b^i(t,\vec{x})$, $c(t,\vec{x})$:

а) $\frac{\partial a}{\partial t} = \lambda(t,\vec{x})$. д) $\frac{\partial b^1}{\partial x_1} = \frac{\partial b^2}{\partial x_2} = \frac{\partial b^3}{\partial x_3}$.

б) $\frac{\partial a}{\partial x_i} = 0$. в) $i\frac{\partial b^i}{\partial t} + \frac{1}{m(t)}\cdot\frac{\partial c}{\partial x_i} = 0$. (2.4.6)

в) $\frac{\partial b^i}{\partial x_j} + \frac{\partial b^j}{\partial x_i} = 0$, $i \neq j$. е) $2\frac{\partial b^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2m(t)}a\frac{\partial m}{\partial t} = \lambda(t,\vec{x})$.

г) $\frac{\partial^2 b^i}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$ ж) $i\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2m(t)}\Delta C = 0.$

Решим эту систему уравнений. Подставляя выражение а) в уравнение е) получим неоднородные уравнения относительно t

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{2m} a \frac{\partial m}{\partial t} + 2\frac{\partial b^i}{\partial x_i},$$

из которых находим

$$a = d_0\sqrt{m} + 2\sqrt{m}\int \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\partial b^i}{\partial x_i} dt. \tag{2.4.7}$$

Из в) г) е) получим

$$C = A(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + G^i(t)x^i + N(t). \tag{2.4.8}$$

Подставляя это в уравнение е), имеем

$$\frac{\partial b^i}{\partial t} = i\frac{1}{m}(2Ax_i + G^i). \tag{2.4.9}$$

Совместное решение уравнений в) и г) нам дает:

$$b^i = \tilde{C}^i_k(t)x_k + C^i(t).$$

Подставляя в (2.4.9), находим

$$\tilde{C}^i_i = 2i\int \frac{A}{m} dt + D,$$

$$C^i = i\int \frac{B^i}{m} dt + d_i.$$

Таким образом,

$$b^i = \left(2i\int \frac{A(t)}{m} dt + D\right)x_i + C^i_k x_k + i\int \frac{B^i(t)}{m} dt + d_i. \tag{2.4.10}$$

Из (2.4.8) и ж) получим

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B^i(t)}{\partial t} = 0, \quad N = 3iA\int \frac{1}{m} dt + d. \tag{2.4.11}$$

Из (2.4.7), (2.4.8), (2.4.10), (2.4.11) получим

$$a(t)=A\cdot 4i\sqrt{m}\int\frac{1}{\sqrt{m}}\Big(\int\frac{1}{m}dt+D\cdot 2\sqrt{m}\int\frac{1}{\sqrt{m}}dt+d_0\sqrt{m}.$$

(2.4.12)

$$b^i(t,\vec{x})=A\cdot 2i\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)x_i+Dx_i+C^i_j x_j+G_i\cdot i\int\frac{1}{m}dt+d_i\,,\quad i\neq j.$$

$$c(t,\vec{x})=A\Big(3i\int\frac{1}{m}dt+\vec{x}^2\Big)+G_i x_i+d.$$

Подставляя найденные коэффициенты (2.4.12) в (2.4.3), получаем следующее выражение для оператора Q :

$$Q=i\Big(A\cdot 4i\sqrt{m}\int\frac{1}{\sqrt{m}}\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)dt+D\cdot 2\sqrt{m}\int\frac{1}{\sqrt{m}}dt+d_0\sqrt{m}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+$$

(2.4.13)

$$i\Big(A\cdot 2i\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)x_i+D\cdot x_i+C^i_j x_j+G_i\cdot i\int\frac{1}{m}dt+d_i\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}+$$

$$i\Big(A\Big(3i\int\frac{1}{m}dt+\vec{x}^2\Big)+G_i x_i+d\Big).$$

В выражении (2.4.13) собираем члены при одинаковых постоянных интегрирования и получаем следующие операторы

$$P_0=i\sqrt{m}\frac{\partial}{\partial t}\,,\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},\quad I=u\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

(2.4.14)

$$J_{ab}=x_a P_b-x_b P_a\,,\ a\neq b,\quad G_a=\int\frac{1}{m}dt\,P_a-x_a\,,$$

$$D=\Big(2\sqrt{m}\int\frac{1}{m}dt\Big)P_0-x_a P_a\,,\quad A=\Big(4i\sqrt{m}\int\frac{1}{\sqrt{m}}\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)dt\Big)\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+2i\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)x_a\frac{\partial}{\partial x_a}+\Big(\vec{x}^2+3i\Big(\int\frac{1}{m}dt\Big)\Big)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, мы нашли максимальную группу инвариантности уравнения (2.4.1), которая оказалась локально изоморфной группе инвариантности уравнения Шредингера с $m=const$. Учитывая эти результаты, сформулируем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.4.1. Максимальная алгебра инвариантности уравнения (2.4.I) является I3-мерной алгеброй Ли, базисные элементы которой задаются операторами (2.4.I4).

§ 5. Об алгебре инвариантности уравнения четвертого порядка

Настоящий параграф посвящен нахождению линейного дифференциального уравнения 4-го порядка, инвариантного относительно группы Галилея. Общий вид такого уравнения задается следующим дифференциальным оператором 4-го порядка

$$L = D_{\mu\nu\alpha r}\frac{\partial^4}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\alpha \partial x_r} + A_{\mu\nu\alpha}\frac{\partial^3}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\alpha} + B_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + C_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (2.5.I)$$

где D, A, B, C – пока неизвестные постоянные, $\mu,\nu,\alpha,r=\overline{0,3}$. Мы ищем уравнение, инвариантное относительно следующего представления алгебры галилеевских операторов

$$G_a = tP_a + Kx_a, \quad (2.5.2а)$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b. \quad (2.5.2в)$$

$$P_a = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.5.2с)$$

где K – постоянная, $a,b=1,2,3.$

Условие инвариантности уравнения (2.5.I) относительно генераторов алгебры Галилея G записывается в виде

$$[L, G] = \lambda_a L, \quad (2.5.3$$

где $G=\{G_a, J_{ab}, P_a, P_0, I\}$. Уравнение (2.5.3) определяет соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты оператора L. Для нахождения этих коэффициентов поступим следующим образом. Распишем детальнее условия (2.5.3)

$$[L, G_a] = [\mathcal{D}_{\mu\nu\varkappa\gamma}\frac{\partial^4}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\varkappa \partial x_\gamma} + A_{\mu\nu\varkappa}\frac{\partial^3}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\varkappa} + B_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + C_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, tP_a + kx_a] = \Lambda_a(x_\mu, x_\nu, x_\varkappa, x_\gamma)\left(\mathcal{D}_{\mu\nu\varkappa\gamma}\frac{\partial^4}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\varkappa \partial x_\gamma} + A_{\mu\nu\varkappa}\frac{\partial^3}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\varkappa} + B_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + C_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right). \qquad (2.5.4)$$

Обозначим уравнение (2.5.4) через Φ и $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = S_\mu$, $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = S_{\mu\nu}$ и т.д. Тогда

$$\Phi \equiv [L, G_a] - \Lambda_a L = \mathcal{D}_{\mu\nu\varkappa\gamma}\big(-i(g^{o\gamma}S_a S_\varkappa S_\nu S_\mu + g^{o\varkappa}S_a S_\gamma S_\nu S_\mu + g^{o\nu}S_a S_\gamma S_\varkappa S_\mu + g^{o\mu}S_a S_\gamma S_\varkappa S_\nu) + k(g^{a\gamma}S_\varkappa S_\nu S_\mu + g^{a\varkappa}S_\gamma S_\nu S_\mu + g^{a\nu}S_\gamma S_\varkappa S_\mu + g^{a\mu}S_\gamma S_\varkappa S_\nu)\big) + A_{\mu\nu\varkappa}\big(-i(g^{o\varkappa}S_a S_\nu S_\mu + g^{o\nu}S_a S_\varkappa S_\mu + g^{o\mu}S_a S_\varkappa S_\nu) + k(g^{a\varkappa}S_\mu S_\nu + g^{a\nu}S_\varkappa S_\mu + g^{a\mu}S_\varkappa S_\nu)\big) + B_{\mu\nu}\big(-i(g^{o\nu}S_a S_\mu + g^{o\mu}S_a S_\nu) + k(g^{a\nu}S_\mu + g^{a\mu}S_\nu)\big) + C_\mu(-ig^{o\mu}S_a + kg^{a\mu}) - \Lambda_a(\mathcal{D}_{\mu\nu\varkappa\gamma}S_\mu S_\nu S_\varkappa S_\gamma + A_{\mu\nu\varkappa}S_\mu S_\nu S_\varkappa + B_{\mu\nu}S_\mu S_\nu + C_\mu S_\mu).$$

Искомые коэффициенты находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{array}{lll}
1.\ \partial_{S_\kappa S_\beta S_\gamma S_\rho}\Phi_{|S=0} = 0, & 4.\ \partial_{S_\kappa}\Phi_{|S=0} = 0, & \\
2.\ \partial_{S_\kappa S_\beta S_\gamma}\Phi_{|S=0} = 0, & 5.\ \Phi_{|S=0} = 0, & (2.5.5) \\
3.\ \partial_{S_\kappa S_\beta}\Phi_{|S=0} = 0, & &
\end{array}$$

где $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)$.

После довольно громоздких вычислений из (2.5.5) получим следующие условия для определения коэффициентов $\mathcal{D}$, A, B, C.

1. $\Lambda_\alpha \mathcal{D}_{oooo} = 0$.

2. $\mathcal{D}_{\alpha\alpha\alpha o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\alpha\alpha\alpha} = i\Lambda_\alpha \mathcal{D}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$.

3. $\Lambda_\alpha \mathcal{D}_{\beta\beta\beta\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta$.

4. $\mathcal{D}_{oooo} = \frac{i}{4}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha ooo} + \ldots + \mathcal{D}_{ooo\alpha})$.

5. $\mathcal{D}_{\beta\beta\beta o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\beta\beta\beta} = i\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\beta\beta\beta\alpha} + \ldots + \mathcal{D}_{\alpha\beta\beta\beta}), \quad \alpha \neq \beta \neq 0$

6. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{o\beta\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta\beta o}) = 0, \quad \alpha \neq \beta \neq 0$.

7. $\mathcal{D}_{\alpha\alpha oo} + \ldots + \mathcal{D}_{oo\alpha\alpha} = \frac{i}{2}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{o\alpha\alpha\alpha} + \ldots + \mathcal{D}_{\alpha\alpha\alpha o})$.

8. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\rho\beta\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta\beta\rho}) = 0, \quad \beta \neq \rho \neq \alpha \neq 0$.

9. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\rho ooo} + \ldots + \mathcal{D}_{ooo\rho}) = 0, \quad \rho \neq \alpha \neq 0$.

10. $\mathcal{D}_{\alpha ooo} + \ldots + \mathcal{D}_{ooo\alpha} = \frac{i}{3}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{oo\alpha\alpha} + \ldots + \mathcal{D}_{\alpha\alpha oo})$.

11. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{oo\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta oo}) = 0, \quad \beta \neq \alpha \neq 0$.

12. $\mathcal{D}_{\beta\beta\alpha o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\alpha\beta\beta} = i\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha\alpha\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta\alpha\alpha}), \quad \beta \neq \alpha \neq 0$.

13. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\rho\beta\beta o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\beta\beta\rho}) = 0, \quad \beta \neq \rho \neq \alpha \neq 0$.

14. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\beta\beta\rho\rho} + \ldots + \mathcal{D}_{\rho\rho\beta\beta}) = 0, \quad \rho \neq \beta \neq \alpha \neq 0$.

15. $\mathcal{D}_{\beta\beta\rho o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\rho\beta\beta} = i\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha\rho\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta\rho\alpha}), \quad \rho \neq \beta = \alpha \neq 0$.

16. $\mathcal{D}_{\alpha\beta\rho o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\rho\beta\alpha} = \Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha\alpha\rho\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\rho\alpha\alpha}), \quad \rho \neq \beta \neq \alpha \neq 0$.

17. $\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{oo\rho\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\rho oo}) = 0$.

18. $\mathcal{D}_{ooo\rho} + \ldots + \mathcal{D}_{\rho ooo} = \frac{i}{3}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\rho\alpha oo} + \ldots + \mathcal{D}_{oo\alpha\rho}), \quad \rho \neq \alpha \neq 0$.

19. $\mathcal{D}_{oo\rho\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\rho\beta oo} = \frac{i}{2}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\rho\beta\alpha o} + \ldots + \mathcal{D}_{o\alpha\beta\rho}), \quad \beta \neq \rho \neq \alpha \neq 0$.

20. $\mathcal{D}_{oo\alpha\rho} + \ldots + \mathcal{D}_{\rho\alpha oo} = \frac{i}{2}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{\alpha\alpha o\rho} + \ldots + \mathcal{D}_{\rho o\alpha\alpha}), \quad \rho \neq \alpha \neq 0$.

21. $\mathcal{D}_{\beta\beta oo} + \ldots + \mathcal{D}_{oo\beta\beta} = \frac{i}{2}\Lambda_\alpha(\mathcal{D}_{o\alpha\beta\beta} + \ldots + \mathcal{D}_{\beta\beta\alpha o}), \quad \beta \neq \alpha \neq 0$.

22. $4K\mathcal{D}_{\alpha\alpha\alpha\alpha} - i(A_{\alpha\alpha o} + A_{\alpha o\alpha} + A_{o\alpha\alpha}) = \Lambda_\alpha A_{\alpha\alpha\alpha}$.

23. $\mathcal{D}_{oooa}+\ldots+\mathcal{D}_{aooo}=\frac{1}{K}\Lambda_a A_{ooo}$.

24. $\mathcal{D}_{a\beta\beta\beta}+\ldots+\mathcal{D}_{\beta\beta\beta a}=\frac{1}{K}\Lambda_a A_{\beta\beta\beta}$, $a\neq\beta\neq 0$. (2.5.6)

25. $2K(\mathcal{D}_{aa\beta\beta}+\ldots+\mathcal{D}_{\beta\beta aa})-i(A_{o\beta\beta}+\ldots+A_{\beta\beta o})=\Lambda_a(A_{a\beta\beta}+\ldots+A_{\beta\beta a})$, $\beta\neq a\neq 0$.

26. $2K(\mathcal{D}_{ooaa}+\ldots+\mathcal{D}_{aaoo})-3iA_{ooo}=\Lambda_a(A_{aoo}+\ldots+A_{ooa})$.

27. $\mathcal{D}_{\beta\beta ao}+\ldots+\mathcal{D}_{oa\beta\beta}=\frac{\Lambda_a}{K}(A_{o\beta\beta}+\ldots+A_{\beta\beta o})$, $\beta\neq a\neq 0$.

28. $3K(\mathcal{D}_{aaao}+\ldots+\mathcal{D}_{oaaa})-2(A_{aoo}+\ldots+A_{ooa})=\Lambda_a(A_{oaa}+\ldots+A_{aao})$.

29. $\mathcal{D}_{ooa\beta}+\ldots+\mathcal{D}_{\beta aoo}=\frac{1}{K}\Lambda_a(A_{oo\beta}+\ldots+A_{\beta oo})$, $\beta\neq a\neq 0$.

30. $\mathcal{D}_{\kappa\kappa\beta a}+\ldots+\mathcal{D}_{a\beta\kappa\kappa}=\frac{1}{K}\Lambda_a(A_{\kappa\kappa\beta}+\ldots+A_{\beta\kappa\kappa})$, $\beta\neq\kappa\neq a\neq 0$.

31. $3KA_{aaa}-i(B_{ao}+B_{oa})=\Lambda_a B_{aa}$.

32. $A_{ooa}+\ldots+A_{aoo}=\frac{1}{K}\Lambda_a B_{oo}$.

33. $A_{\beta\beta a}+\ldots+A_{a\beta\beta}=\frac{1}{K}\Lambda_a B_{\beta\beta}$, $a\neq\beta\neq 0$.

34. $A_{\gamma\beta a}+\ldots+A_{a\beta\gamma}=\frac{\Lambda_a}{K}(B_{\gamma\beta}+B_{\beta\gamma})$, $\beta\neq\gamma\neq a\neq 0$.

35. $A_{oa\beta}+\ldots+A_{\beta ao}=\frac{\Lambda_a}{K}(B_{o\beta}+B_{\beta o})$, $\beta\neq a=0$.

36. $2K(A_{aa\beta}+\ldots+A_{\beta aa})-i(B_{\beta o}+B_{o\beta})=\Lambda_a(B_{a\beta}+B_{\beta a})$, $\beta\neq a\neq 0$.

37. $2K(A_{oaa}+\ldots+A_{aao})-2iB_{oo}=\Lambda_a(B_{ao}+B_{oa})$.

38. $B_{ao}+B_{oa}=\frac{1}{K}\Lambda_a C_o$.

39. $B_{ba}+B_{ab}\neq 0$, $a\neq b$.

40. $B_{aa}=\frac{i}{2K}C_o$.

41. $C_a=0$

где под $\mathcal{D}_{\mu\nu\alpha r}+\ldots+\mathcal{D}_{r\alpha\nu\mu}$ понимается сумма по перестановкам индексов $\mu\nu\alpha r$, $\mathcal{D}_{\mu\nu\alpha r\ldots}\equiv\sum_{\sigma(\mu\nu\alpha r)}\mathcal{D}_{\sigma(\mu),\sigma(\nu),\sigma(\alpha),\sigma(r)}$. Из условия

(2.5.6) получаем явный вид оператора уравнения 4-го порядка в виде

$$L=B_{oo}\left(\frac{i}{2K}\Delta+\partial_o\right)^2+C_o\left(\frac{i}{2K}\Delta+\partial_o\right)=B\left(P_o+\frac{1}{2K}\vec{P}^2\right)^2+C\left(P_o+\frac{1}{2K}\vec{P}^2\right) \tag{2.5.7}$$

или

$$LU=\left\{\left(P_o+\frac{1}{2K}\vec{P}^2\right)^2+\tilde{B}\left(P_o+\frac{1}{2K}\vec{P}^2\right)\right\}U=0. \tag{2.5.8}$$

Таким образом, мы нашли уравнение 4-го порядка, инвариантное относительно преобразования G_a .

Аналогичным образом можно показать, что уравнение (2.5.8) инвариантно относительно преобразования J_{ab}, P_a, P_o, I . Учитывая эти результаты, сформулируем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.5.I. Единственным галилеевски инвариантным оператором 4-го порядка является оператор (2.5.7).

§ 6. О максимальной алгебре инвариантности уравнения типа Шредингера для системы двух частиц порядка $2n$ с потенциалом

А. Настоящий параграф посвящен исследованию групповых свойств линейного дифференциального уравнения вида

$$L_{(n)}U\equiv\left(P_o-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n U=0. \tag{2.6.I}$$

Здесь n – натуральное число, $L_{(n)}$ – оператор шредингеровского типа двух частиц порядка $2n$:

$L_{(1)}=S=\left(P_o-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)$, $L_{(2)}=S^2=\left(P_o-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^2$ и т.д.;

$U=U(t,x,y)$, $t=x_o$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$,

$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$, $P_{x_a} = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $P_{y_a} = -i\frac{\partial}{\partial y_a}$, $a = 1, 2, 3$, m_1, m_2 - некоторые постоянные.

Т е о р е м а 2.6.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.6.I) является 3I-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой имеют вид:

$$P_0^{(n)} = P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_A^{(n)} = P_A = -i\frac{\partial}{\partial x_A}, \text{где } A = \overline{1,6}, \quad \frac{\partial}{\partial x_{a+3}} = \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad P_{a+3} = -i\frac{\partial}{\partial y_a};$$

$$J_{AB}^{(n)} = J_{AB} = x_A P_B - x_B P_A; \quad A, B = \overline{1,6}.$$

$$J_{ab}^{(n)} = J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a; \quad a \neq b = 1, 2, 3.$$

$$J_{a+3, b+3}^{(n)} = J_{a+3, b+3} = y_a P_{b+3} - y_b P_{a+3}; \quad a \neq b.$$

$$J_{a+3, b}^{(n)} = J_{a+3, b} = m_2 y_a P_b - m_1 x_b P_{a+3}:$$

$$G_A^{(n)} = tP_A - M x_A, \text{ где } M = \{m_1, m_2\}. \tag{2.6.2}$$

$$G_a^{(n)} = G_a = tP_a - m_1 x_a;$$

$$G_{a+3}^{(n)} = G_{a+3} = tP_{a+3} - m_2 y_a;$$

$$D^{(n)} = 2tP_0 - x_A P_A + (4-n)i = D^{(1)} - (n-1)i = 2tP_0 - x_A P_A + 3i - (n-1)i;$$

$$A^{(n)} = t(tP_0 - x_A P_A + (4-n)i) + M\frac{\vec{x}^2}{2} = A^{(1)} - (n-1)it = t(tP_0 - x_A P_A + 3i - (n-1)i) + M\frac{\vec{x}^2}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Максимальную группу инвариантности уравнения (2.6.I) определим в классе дифференциальных операторов первого порядка. С помощью метода, изложенного в параграфе 3 главы I условие инвариантности рассматриваемого уравнения (2.6.I) относительно некоторой группы записываем в виде

$$[L_{(n)}, Q_A] U(t, x, y) = 0, \tag{2.6.3}$$

где Q_A - генераторы группы симметрии уравнения (2.6.I), которые будем искать в виде операторов первого порядка

$$Q = a(t,x,y)\frac{\partial}{\partial t} + b_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + k_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y_i} + C(t,x,y)\,, \tag{2.6.4}$$

где a, b, k_i и C – пока неизвестные функции. Условия (2.6.3) напишем эквивалентно следующим образом

$$\left[\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n, Q_A\right] = i\lambda(t,x,y)\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n, \tag{2.6.5}$$

где $\lambda_A(t,x,y)$ – некоторая, пока неизвестная функция. Согласно методу математической индукции для доказательства теоремы рассмотрим случай $n=1$, $n=k-1$ и $n=k$.

I. При $n=1$ уравнение (2.6.I) – дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$L_{(1)}U = \left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)U = \left(i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\right)U\,, \tag{2.6.6}$$

где индекс внизу означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Для $n=1$ уравнение (2.6.5) имеет вид

$$\left[\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\right), Q_A\right] = \left[\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\right),\right.$$

$$\left. a\frac{\partial}{\partial t} + b^i\frac{\partial}{\partial x_i} + k^i\frac{\partial}{\partial y_i} + C\right] = \left[i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\,,\right. \tag{2.6.7}$$

$$\left. a(t,x,y)\right]\frac{\partial}{\partial t} + \left[i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\,, b^i(t,x,y)\right]\frac{\partial}{\partial x_i} + \left[i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\,,\right.$$

$$\left. k^i(t,x,y)\right]\frac{\partial}{\partial y_i} + \left[i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\,, C(t,x,y)\right] = i\lambda(t,x,y)\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m_1}\Delta_x + \frac{1}{2m_2}\Delta_y\right).$$

Выполняя коммутации и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$ в обеих частях равенства, получим систему дифференциальных уравнений для коэффициентов $a(t,x,y)$, $b^i(t,x,y)$, $k^i(t,x,y)$:

$$1.\ \frac{\partial a}{\partial x_i}=\frac{\partial a}{\partial y_i}=0.$$

$$2.\ \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial b^1}{\partial x_1}=\frac{\partial k^1}{\partial y_1}.$$

$$3.\ \frac{\partial a}{\partial t}=\lambda(t).$$

$$4.\ \frac{\partial b^i}{\partial x_j}+\frac{\partial b^j}{\partial x_i}=0,\quad i\neq j.$$

$$5.\ \frac{\partial k^i}{\partial y_j}+\frac{\partial k^j}{\partial y_i}=0,\quad i\neq j.$$

$$6.\ \frac{1}{2m_1}\cdot\frac{\partial k^i}{\partial x_j}+\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial b^j}{\partial y_i}=0,\quad i\neq j.$$

$$7.\ i\frac{\partial b^i}{\partial t}+\frac{1}{m_1}\frac{\partial c}{\partial x_i}=0.$$

$$8.\ i\frac{\partial k^i}{\partial t}+\frac{1}{m_2}\frac{\partial c}{\partial y_i}=0.$$

$$9.\ \frac{\partial b^1}{\partial x_1}=\frac{\partial b^2}{\partial x_2}=\frac{\partial b^3}{\partial x_3}. \tag{2.6.8}$$

$$10.\ \frac{\partial k^1}{\partial y_1}=\frac{\partial k^2}{\partial y_2}=\frac{\partial k^3}{\partial y_3}.$$

$$11.\ i\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial x_i\partial x_i}+\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial y_i\partial y_i}=0.$$

Решая систему уравнений (2.6.8), находим координаты инфинитезимального оператора Q:

$$\xi^0=C^1x_0^2+2C^3x_0+C^{24},$$

$$\xi^1=C^1x_1x_0+C^2x_0+C^3x_1+C^4x_2+C^5x_3+\frac{1}{2m_1}(C^6y_1+C^7y_2+C^8y_3)+C^{25},$$

$$\xi^2=C^1x_2x_0+C^9x_0-C^4x_1+C^3x_2+C^{10}x_3+\frac{1}{2m_1}(C^{11}y_1+C^{12}y_2+C^{13}y_3)+C^{26},$$

$$\xi^3=C^1x_3x_0+C^{14}x_0-C^5x_1-C^{10}x_2+C^3x_3+\frac{1}{2m_1}(C^{15}y_1+C^{16}y_2+C^{17}y_3)+C^{27},$$

$$K^1=C^1y_1x_0+C^{18}x_0+C^3y_1+C^{19}y_2+C^{20}y_3-\frac{1}{2m_2}(C^6x_1+C^{11}x_2+C^{15}x_3)+C^{28},$$

$$K^2=C^1y_2x_0+C^{21}x_0-C^{19}y_1+C^3y_2+C^{22}y_3-\frac{1}{2m_2}(C^7x_1+C^{12}x_2+C^{16}x_3)+C^{29},$$

$$K^3=C^1y_3x_0+C^{23}x_0-C^{20}y_1+C^{22}y_2+C^3y_3-\frac{1}{2m_2}(C^8x_1+C^{13}x_2+C^{17}x_3)+C^{30},$$

$$C=\Big[\Big(-3x_0+im_1\frac{\vec{x}^2}{2}+im_2\frac{\vec{y}^2}{2}\Big)C^1+im_1(C^2x_1+C^9x_2+C^{14}x_3)+$$
$$im_2(C^{18}y_1+C^{21}y_2+C^{23}y_3)+C^{31}\Big]U+B.$$

Это решение определяет алгебру инвариантности уравнения (2.6.6) с базисными операторами

$$P_0^{(1)}=P_0^{(n)}=P_0\ ,\quad P_A^{(1)}=P_A^{(n)}=P_A\ ,\quad J_{AB}^{(1)}=J_{AB}^{(n)}=J_{AB}\ ,$$
$$G_A^{(1)}=G_A^{(n)}=G_A\ ,\quad D^{(1)}=2tP_0-x_AP_A+3i\ ,\ I=u\frac{\partial}{\partial u}\ , \tag{2.6.9}$$
$$A^{(1)}=t(tP_0-x_AP_A+3i)+M\frac{\vec{x}^2}{2}\ ,\qquad M=\{m_1,m_2\}.$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[P_0,P_a]=[P_0,P_a']=[P_a,P_b]=[P_a,P_b']=[P_a',P_b']=[P_0,J_{ab}]=$$
$$[P_0,J_{ab}']=[P_0,J_{ab}'']=[P_c,J_{ab}']=[P_c',J_{ab}]=[P_c,G_a']=[P_c',G_a]=$$
$$[J_{ab},J_{cd}']=[J_{ab}',G_c]=[J_{ab},G_c']=[J_{ab},D]=[J_{ab}',D]=[J_{ab}'',D]=$$
$$[J_{ab},A]=[J_{ab}',A]=[J_{ab}'',A]=[G_a,G_b]=[G_a,G_b']=[G_a',G_b']=$$
$$[G_a,A]=[G_a',A]=0.\ [P_0,G_a]=iP_a\ ,\ [P_0,G_a']=iP_a'\ , \tag{2.6.10}$$
$$[P_0,D]=2iP_0\ ,\ [P_0,A]=iD\ ,\ [P_c,J_{ab}]=i(g^{ca}P_b-g^{cb}P_a)\ ,$$
$$[P_c,J_{ab}'']=im_1g^{bc}P_a'\ ,\ [P_c',J_{ab}']=-i(g^{ca}P_b'-g^{cb}P_a')\ ,$$
$$[P_c',J_{ab}'']=-im_2g^{ac}P_b\ ,\ [P_c,G_a]=im_1g^{ca}\ ,\ [P_c',G_a']=im_2g^{ca}\ ,$$
$$[P_c,D]=iP_c\ ,\ [P_c',D]=iP_c'\ ,\ [P_c,A]=iG_c\ ,\ [P_c',A]=iG_c'\ ,$$
$$[J_{ab},J_{cd}]=-i(g^{ac}J_{bd}+g^{bd}J_{ac}-g^{ad}J_{cb}-g^{bc}J_{da})\ ,$$
$$[J_{ab}',J_{cd}']=-i(g^{ac}J_{bd}'+g^{bd}J_{ac}'-g^{ad}J_{cb}'-g^{bc}J_{da}')\ ,$$
$$[J_{ab},G_c]=im_1(x_ag^{bc}-x_bg^{ac})\ ,\ [J_{ab}',G_c']=im_2(y_ag^{bc}-y_bg^{ac})\ ,$$
$$[J_{ab}'',J_{cd}'']=im_1m_2(g^{ca}J_{bd}+g^{bd}J_{ac}')\ ,\ [J_{ab},J_{cd}'']=i(g^{ad}J_{cb}''-g^{bd}J_{ca}'')\ ,$$
$$[J_{ab}',J_{cd}'']=i(g^{bc}J_{ad}''+g^{ac}J_{bd}'')\ ,\ [J_{ab}'',G_c]=-im_1g^{bc}G_a'\ ,$$
$$[J_{ab}'',G']=im_2g^{ac}G_b\ ,\ [G_a,D]=-iG_a\ ,\ [G_a',D]=-iG_a'\ ,\ [D,A]=2iA.$$

Зная операторы $A^{(1)}$ оператор $A^{(2)}$ будем искать в виде

$$A^{(2)}=A^{(1)}+ict, \tag{2.6.II}$$

где C - пока неизвестная постоянная. Условие инвариантности для искомого оператора $A^{(2)}$ запишем таким образом

$$[L_{(2)},A^{(2)}]=\lambda(t,x,y)L_{(2)} \tag{2.6.I2}$$

и используя формулу

$$[L_{(1)},t]=i\ ,\qquad [L_{(1)},A^{(1)}]=2itL_{(1)}$$

имеем

$$[S^2,A]=S[S,A^{(2)}]+[S,A^{(2)}]S=S[S,A^{(1)}]+S[S,ict]+[S,A^{(1)}]S+$$
$$[S,ict]S=S2itS+Si^2c+2itS^2+i^2cS=2i^2S+2itS^2+i^2cS+$$
$$2itS^2+i^2cS=4itS^2+2i^2S+2i^2cS=4itS^2-2(c+1)S.$$

Отсюда видно, что для удовлетворения условия (2.6.I2) нужно выбрать $C=-1$. Тогда

$$A^{(2)}=A^{(1)}-it \qquad \text{и} \qquad D^{(2)}=D^{(1)}-i\,.$$

Так как

$$[S,P_0]=[S,P_A]=[S,J_{AB}]=[S,G_A]=0,$$

то проверка равенств $P_0^{(2)}=P_0^{(1)}$, $P_A^{(2)}=P_A^{(1)}$, $J_{AB}^{(2)}=J_{AB}^{(1)}$, $G_A^{(2)}=G_A^{(1)}$ тривиальна. Следовательно, первый шаг доказательства завершен.

2. Предположим, что базисные операторы (2.6.9) при $n=k-1$ имеют вид, т.е.

$$P_0^{(K-1)}=P_0\,,\quad P_A^{(K-1)}=P_A^{(1)}\,,\quad J_{AB}^{(K-1)}=J_{AB}^{(1)}\,,\quad G_A^{(K-1)}=G_A^{(1)}$$

$$D^{(K-1)}=D^{(1)}-(K-2)i\,,\quad A^{(K-1)}=A^{(1)}-(K-2)it\,.$$

3. Докажем, что при $n=K$:

$$P_0^{(K)}=P_0^{(1)},\ P_A^{(K)}=P_A^{(1)},\ J_{AB}^{(K)}=J_{AB}^{(1)}\,,\ G_A^{(K)}=G_A^{(1)}\,, \tag{2.6.13}$$
$$D^{(K)}=D^{(1)}-(K-1)i\,,\quad A^{(K)}=A^{(1)}-(K-1)it\,.$$

Формулу (2.6.13) докажем только для $A^{(K)}$. Для остальных операторов доказательство аналогичное. Для доказательства формулы (2.6.13) достаточно показать выполнение условия (2.6.5).

Воспользовавшись формулой

$$[S^K,\,t]=Ki\,S^{K-1}\,,$$

получаем

$$[S^K,A^{(K)}]=S[S^{K-1},A^{(K)}]+[S^1,A^{(K)}]S^{K-1}=S[S^{K-1},A^{(K-1)}-it]+$$
$$[S,A^{(1)}-(K-1)it]S^{K-1}=S[S^{K-1},A^{(K-1)}]-iS[S^{K-1},t]+[S,A^{(1)}]S^{K-1}-$$
$$(K-1)i[S,t]S^{K-1}=S\cdot 2(K-1)itS^{K-1}-iS(K-1)iS^{K-2}+2itS\cdot S^{K-1}-$$
$$(K-1)i\cdot iS^{K-1}=2(K-1)i^2S^{K-1}+2(K-1)itS^K-i^2(K-1)S^{K-1}+$$
$$2itS^K-i^2(K-1)S^{K-1}=2iKtS^K\,,$$

т.е. условие (2.6.5) действительно выполняется. Теорема доказана.

Б. Рассмотрим теперь обобщенное уравнение Шредингера (2.6.1) с потенциалом V.

$$(L_{(n)}+V)U=\left(\left(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n+V\right)U=0\,, \tag{2.6.14}$$

где $V=V(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

Наша цель – найти такие потенциалы V, при которых уравнение (2.6.I4) остается инвариантным относительно некоторой подалгебры алгебры Шредингера.

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.6.2. Уравнение (2.6.I4) инвариантно относительно следующих подалгебр алгебры $Sch(1,6)$:

I. $[O(5)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_5$ если $\dfrac{c}{x_1^{2n}}$;

2. $[O(2)\oplus O(4)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_4$ если $c/[m_1x_1^{2n}+m_2y_1^{2n}]$;

3. $[O(2)\oplus O(2)\oplus O(2)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_2$ если $c/[m_1(x_1^2+x_2^2)^n+m_2(y_1+y_2)^n]$;

4. $[O(3)\oplus O(3)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_3$ если c/r_x^{2n};

5. $[O(3)\oplus O(3)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_3$ если c/r_y^{2n};

6. $[O(2)\oplus O(4)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_4$ если $c/(x_1^2+x_2^2)^n$;

7. $[O(2)\oplus O(4)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_4$ если $c/(y_1^2+y_2^2)^n$;

8. $[O(4)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_4$ если $\dfrac{1}{x_1^{2n}}f\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)$;

9. $[O(2)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_2$ если $\dfrac{1}{x_1^{2n}}f\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{y_1}{x_1},\dfrac{y_2}{x_1}\right)$;

I0. $[O(3)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_3$ если $\dfrac{1}{x_1^{2n}}f\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1}\right)$;

II. $[O(2)\oplus sl(2,R)]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_2$ если $\dfrac{1}{x_1^{2n}}f\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},\dfrac{y_1}{x_1}\right)$;

I2. $sl(2,R)$ если $\dfrac{1}{x_1^{2n}}f\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},\dfrac{y_1}{x_1},\dfrac{y_2}{x_1},\dfrac{y_3}{x_1}\right)$;

I3. $[O(3)\oplus O(3)\oplus sl(2,R)]$ если $c/(m_1r_x^{2n}+m_2r_y^{2n})$;

I4. $O(6)\oplus t$ если $V(m_1r_x^2+m_2r_y^2)$;

I5. $[O(2)\oplus O(4)\oplus t]\supset\!\!\!\!\!+\, \bar{w}_2$ если $V[m_1(x_1^2+x_2^2)+m_2(y_1^2+y_2^2)]$;

16. $[O(4)\oplus O(2)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_4$ если $V(m_1x_1^2+m_2y_1^2)$;

17. $[O(3)\oplus O(3)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_3$ если $V(r_x^2)$;

18. $[O(4)\oplus O(2)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_4$ если $V(x_1^2+x_2^2)$;

19. $[O(3)\oplus O(3)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_3$ если $V(r_y^2)$;

20. $[O(4)\oplus O(2)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_4$ если $V(y_1^2+y_2^2)$;

21. $[O(5)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_5$ если $V(x_1)$;

22. $[O(4)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_4$ если $V(x_1,x_2)$;

23. $[O(3)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_3$ если $V(x_1,x_2,x_3)$;

24. $[O(2)\oplus t]\ni\!\!\!+ w_2$ если $V(x_1,x_2,x_3,y_1)$;

25. $t\ni\!\!\!+ w_1$ если $V(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)$;

26. t если $V(\vec{x},\vec{y})$,

где $w_a - 2a+1$ -мерная алгебра Гайзенберга-Вейля, образованная операторами I, P_A, G_A ; $SL(2,R)$ – алгебра, образованная операторами $I_1=\frac{1}{2}D$, $I_2=\frac{1}{2}(P_0+A)$, $I_3=\frac{1}{2}(P_0-A)$; $O(K)$ – алгебра группы вращений K -мерного пространства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем условие инвариантности уравнения (2.6.14) относительно преобразований, порождаемых операторами Q_A

$$[L_{(n)}+V,\, Q_A]=\lambda_A(t,\vec{x},\vec{y})(L_{(n)}+V)\,, \qquad (2.6.15)$$

где

$Q=i\left[a(t,x,y)\frac{\partial}{\partial t}+b^i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x_i}+k^i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y_i}+c(t,x,y)\right]$ – дифференциальные операторы первого порядка из алгебры инвариантности уравнения (2.6.14).

Для нахождения соответствующих потенциалов V инвариантных относительно операторов Q_A выполним вычисления, аналогичные § 2. В результате таких вычислений получаем систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов a, b^i, k^i, c, λ :

1. $\dfrac{\partial a}{\partial x_i}=\dfrac{\partial a}{\partial y_i}=0.$

2. $n\dfrac{\partial a}{\partial t}=\lambda(t).$

3. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial t}=\dfrac{\partial b^1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial k^1}{\partial y_1}.$

4. $\dfrac{\partial b^1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial b^2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial b^3}{\partial x_3}.$

5. $\dfrac{\partial k^1}{\partial y_1}=\dfrac{\partial k^2}{\partial y_2}=\dfrac{\partial k^3}{\partial y_3}.$

6. $\dfrac{\partial b^i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial b^j}{\partial x_i}=0, \quad i\neq j.$

7. $\dfrac{\partial k^i}{\partial y_j}+\dfrac{\partial k^j}{\partial y_i}=0, \quad i\neq j.$

8. $\dfrac{1}{2m_1}\cdot\dfrac{\partial k^i}{\partial x_j}+\dfrac{1}{2m_2}\cdot\dfrac{\partial b^j}{\partial y_i}=0.$

9. $i\dfrac{\partial b^i}{\partial t}+\dfrac{1}{m_1}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial x_i}=0.$

10. $i\dfrac{\partial k^i}{\partial t}+\dfrac{1}{m_2}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial y_i}=0.$

11. $\dfrac{\partial^2 c}{\partial t\partial x_i}=0.$

12. $\dfrac{\partial^2 c}{\partial t\partial y_i}=0.$

13. $\dfrac{\partial^2 b^i}{\partial t^2}=0.$

14. $\dfrac{\partial^2 k^i}{\partial t^2}=0.$ (2.6.16)

15. $\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_i\partial y_j}=0.$

16. $\dfrac{\partial^2 c}{\partial t^2}=0.$

17. $\dfrac{2i}{m_1}\cdot\dfrac{\partial^2 b^i}{\partial t\partial x_i}+\dfrac{3}{2m_1^2}\cdot\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}+\dfrac{1}{2m_1m_2}\cdot\dfrac{\partial^2 c}{\partial y_i^2}+\dfrac{i}{m_1}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial t}=0.$

18. $\dfrac{2i}{m_2}\cdot\dfrac{\partial^2 k^i}{\partial t\partial y_i}+\dfrac{3}{2m_2^2}\cdot\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}+\dfrac{1}{2m_1m_2}\cdot\dfrac{\partial^2 c}{\partial y_i^2}+\dfrac{i}{m_2}\cdot\dfrac{\partial c}{\partial t}=0$ и для

потенциала V :

$$b^i \frac{\partial V}{\partial x_i} + k^i \frac{\partial V}{\partial y_i} + 2V \frac{\partial a}{\partial t} = 0 . \qquad (2.6.17)$$

Решая систему (2.6.16), мы находим коэффициенты a, b^i, k^i, C, подставляя найденные коэффициенты в уравнение (I.6.17) получаем следующие условия для определения потенциала V:

$$(a_2 x_i + b_i^{(1)}) \frac{\partial V}{\partial x_i} + (\tilde{a}_2 y_i + \tilde{b}_i^{(1)}) \frac{\partial V}{\partial y_i} + 2n a_2 V = 0 ,$$

$$(a_1 x_i + b_{ij} x_j + B_{i\beta} \frac{1}{2m_1} y_\beta + b_i^{(2)}) \frac{\partial V}{\partial x_i} + (\tilde{a}_1 y_i + \tilde{b}_{ij} y_j + B_{i\beta} \frac{1}{2m_2} x_\beta + \tilde{b}_i^{(2)}) \frac{\partial V}{\partial y_i} + 2n a_1 V = 0 . \qquad (2.6.18)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в параграфе 2 главы II.

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение

$$x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial V}{\partial y_i} + 2nV = 0$$

получаемое из (2.6.18) при $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$, $b_i = 0$. Для уравнения Лагранжа

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2} = \ldots = \frac{dV}{-2nV}$$

находим первые интегралы

$$C_1 = \frac{x_2}{x_1} , C_2 = \frac{x_3}{x_1} , \ldots , C_k = \frac{y_1}{x_1} , C_{k+1} = \frac{y_2}{x_1} , \ldots , C_{2k-1} = x_1^{2n} V .$$

Тогда общее решение запишется в виде

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_{2k-1}) = 0 ,$$

а потенциал V, в случае, если $k = 6$, принимает вид

$$V=\frac{1}{x_1^{2n}}f\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\frac{y_1}{x_1},\frac{y_2}{x_1},\frac{y_3}{x_1}\right).$$

§ 7. Алгебра инвариантности обобщенного уравнения Шредингера для системы двух частиц с потенциалом

Рассмотрим обобщенное уравнение Шредингера двух частиц с потенциалом вида

$$L_{(n)}\psi\equiv(S^n+V)\psi=0, \tag{2.7.I}$$

где

$S^n=\left(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n$ – оператор обобщенного уравнения Шредингера для двух частиц,

$P_0=i\frac{\partial}{\partial t}$, $P_{x_a}=-i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $P_{y_a}=-i\frac{\partial}{\partial y_a}$, $a=1,2,3.$, m_1, m_2 – масса частицы, n – натуральное число, $V(\vec{x},\vec{y})=-\frac{k}{r^{2n}}$,
$r=\sqrt{(\sqrt{m_1}\vec{x}-\sqrt{m_2}\vec{y})^2}$, $\psi=\psi(t,\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, k – постоянная.

В случае $V=0$ уравнение (2.7.I) принимает следующую форму.

$$S^n\psi=\left(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n\psi=0. \tag{2.7.2}$$

В параграфе 6 главы II исследованы групповые свойства уравнения (2.7.2). Учитывая это, найдем максимальную симметрию уравнения $2n$-го порядка вида (2.7.I) с потенциалом

$$V=-\frac{k}{\rho^{2n}}. \tag{2.7.3}$$

Т е о р е м а 2.7.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.7.I) с потенциалом (2.7.3) является I3-мерная алгебра Ли группы Шредингера $Sch(1,3)$, генераторы которой задаются следующими линейными комбинациями операторов симметрии уравнения (2.7.2)

$$\tilde{P}_0^{(n)}=\tilde{P}_0^{(1)}=P_0\,,\quad \tilde{P}_a^{(n)}=\tilde{P}_a^{(1)}=\tilde{P}_a=P_a+P_{a+3}\,,\quad a=\overline{1,3}.$$
$$\tilde{J}_{ab}^{(n)}=\tilde{J}_{ab}^{(1)}=\tilde{J}_{ab}=J_{ab}+J_{a+3,b+3}\,,$$
$$\tilde{G}_a^{(n)}=\tilde{G}_a^{(1)}=\tilde{G}_a=G_a+G_{a+3}\,,\qquad I=u\frac{\partial}{\partial u}\,, \tag{2.7.4}$$
$$D^{(n)}=2t\tilde{P}_0-x_A\tilde{P}_a+(4-n)i=D^{(1)}-(n-1)i\,,$$
$$A^{(n)}=t(tP_0-x_A\tilde{P}_a+(4-n)i)+M\frac{\vec{x}_A^{\,2}}{2}=A^{(1)}-(n-1)it\,,$$

где

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t}\,,\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}\,,\quad P_{a+3}=-i\frac{\partial}{\partial y_a}\,,$$
$$J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a\,,\ a\neq b.,\quad J_{a+3,b+3}=y_aP_{b+3}-y_bP_{a+3}\,,\ a\neq b.,$$
$$G_a=tP_a-m_1x_a\,,\quad G_{a+3}=tP_{a+3}-m_2y_a\,,\qquad M=\{m_1,m_2\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции

I. $n=1$. В данном случае уравнение (2.7.I) имеет вид

$$L_{(1)}\psi=(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_a^{\,2}-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_{a+3}^{\,2}+V)\psi=0. \tag{2.7.5}$$

Сделаем следующую замену

$$X=\alpha x\,,\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}=\alpha\frac{\partial}{\partial X}\,,\quad \text{где}\quad \alpha=\sqrt{m_1}$$

$$Y=\beta y\,,\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}=\beta\frac{\partial}{\partial Y}\,,\quad \text{где}\quad \beta=\sqrt{m_2} \tag{2.7.6}$$

й уравнение (2.7.5) примет такой вид:

$$L_{(1)}\psi\equiv\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta-\frac{K}{r^2}\right)\psi=0, \tag{2.7.7}$$

где

$$\psi=\psi(X_A)\,,\ X_A=\begin{cases}X_a\,, & 0<A\leq 3\\ Y_a\,, & A=3+a\,,\end{cases}\quad r=\sqrt{(X_a-X_{a+3})^2}\,.$$

Используя подход [57], условия инвариантности уравнения (2.7.7) относительно некоторой алгебры записываем в виде следующих соотношений для оператора L :

$$[L,\ Q_N]=\lambda_N L\,, \tag{2.7.8}$$

где $N=1,2,3,\dots,\qquad \lambda_N=\lambda_N(t,\vec{X})$

$$Q_N=A(X_i,t)\frac{\partial}{\partial t}+B^i(X_i,t)\frac{\partial}{\partial X_i}+C(X_i,t). \tag{2.7.9}$$

Подставляя (2.7.7), (2.7.9) в (2.7.8) и приравнивая коэффициенты соответствующих производных, мы получаем определяющие уравнения для коэффициентов A , B^i , C и потенциала $V(\vec{X})$:

1. $\dfrac{\partial A}{\partial X_i}=0.$

2. $\dfrac{\partial A}{\partial t}=\lambda.$

3. $\dfrac{\partial B^1}{\partial X_1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial A}{\partial t}.$

4. $\dfrac{\partial B^i}{\partial X_j}+\dfrac{\partial B^j}{\partial X_i}=0,\quad i\neq j.$

5. $\dfrac{\partial^2 B^i}{\partial X_i\partial X_i}+2i\dfrac{\partial B^i}{\partial t}+2\dfrac{\partial C}{\partial X_i}=0.$ (2.7.10)

6. $\dfrac{\partial B^1}{\partial X_1}=\dfrac{\partial B^2}{\partial X_2}=\dfrac{\partial B^3}{\partial X_3}.$

$$B^i\frac{\partial V}{\partial X_i}+\lambda V=-i\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial X_i\partial X_i}. \qquad (2.7.11)$$

Решая систему (2.7.10), получим явный вид коэффициентов A, B, C.

$$\begin{aligned}
&A(X,t)=A(t),\\
&B^i(X_i,t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}X_i+b_{ij}X_j+b_i(t),\quad \frac{\partial b_{ij}}{\partial t}=0.\\
&C(X_i,t)=-\frac{i}{4}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}X_iX_i-i\frac{\partial B_i}{\partial t}X_i+C_0(t),\\
&\frac{\partial A}{\partial t}=\lambda(X_i,t).
\end{aligned} \qquad (2.7.12)$$

Подставив (2.7.12) в (2.7.11), имеем

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}\cdot X_i+b_{ij}X_j+b_j\right)\frac{\partial V}{\partial X_i}+\frac{\partial A}{\partial t}V= \qquad (2.7.13)$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial t^3}X_i^2-\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2}X_i-i\frac{\partial C_0}{\partial t}+\frac{3i}{2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Общее решение уравнения (2.7.13) есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Поскольку неоднородная часть уравнения (2.7.13) является квадратичной функцией от X, то решение уравнения (2.7.13) записывается следующим образом

$$\tilde{V}(X)=\frac{1}{2}\omega_i^2X_i+g_iX_i+U_0+V(X), \qquad (2.7.14)$$

где $V(X)$ – общее решение однородного уравнения (2.7.13). Для нашей задачи выражение (2.7.14) имеет вид

$$\tilde{V}(X)=V(X)=\frac{k}{r^2}. \qquad (2.7.15)$$

Это выражение подставим в (2.7.13). После вычисления приравниваем члены при степенях X_i и получаем

$$\frac{\partial^3 A}{\partial t^3}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial t},\quad \frac{\partial C}{\partial t}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Отсюда находим что:

$$\begin{aligned} &A(t)=a_2 t^2+a_1 t+a_0\ ,\\ &b_i(t)=b_i^{(1)}t+b_i^{(2)}\ ,\\ &C(t)=3a_2 t+C_0\ . \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Мы видим, что неоднородная часть уравнения (2.7.13) обусловливает временную зависимость коэффициентов $A(t)$, $b_i(t)$, $C(t)$. Подставив (2.7.16) в однородную часть уравнения (2.7.13) и приравнивая члены при степенях t , получаем

$$\begin{aligned} &(a_2 X_i+b_i^{(1)})\frac{\partial V}{\partial X_i}+2a_2 V=0,\\ &\left(\frac{1}{2}a_1 X_i+b_{ij}X_j+b^{(2)}\right)\frac{\partial V}{\partial X_i}+a_1 V=0. \end{aligned} \tag{2.7.17}$$

В случае $V=\frac{K}{r^2}$ уравнения (2.7.17) обращаются в тождества. Из (2.7.9), (2.7.12) и (2.7.16) следует, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.7.7) является алгебра Ли группы Шредингера, генераторы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_0^{(1)}=\tilde{P}_0^{(n)}=P_0\ ,\quad \tilde{P}_a^{(1)}=\tilde{P}_a^{(n)}=\tilde{P}_a\ ,\\ &\tilde{J}_{ab}^{(1)}=\tilde{J}_{ab}^{(n)}=\tilde{J}_{ab}\ ,\quad \tilde{G}_a^{(1)}=\tilde{G}_a^{(n)}=\tilde{G}_a\ ,\\ &D^{(1)}=2tP_0-X_A\tilde{P}_a+3i\ ,\\ &A^{(1)}=t(tP_0-X_A\tilde{P}_a+3i)+M\frac{\vec{X}^2}{2}\ ,\quad I=u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{2.7.18}$$

2. Предположим, что соотношения (2.7.4) задают алгебру

инвариантности уравнения (2.7.I) с $V=\frac{K}{r^{2n}}$ при $n=q-1$.

При этом генераторы (2.7.4) принимают вид

$$\widetilde{P}_0^{(q-1)}=\widetilde{P}_0^{(1)}, \quad \widetilde{P}_a^{(q-1)}=\widetilde{P}_a^{(1)}, \quad \widetilde{J}_{ab}^{(q-1)}=\widetilde{J}_{ab}^{(1)},$$

$$\widetilde{G}_a^{(q-1)}=\widetilde{G}_a^{(1)}, \quad D^{(q-1)}=D^{(1)}-(q-2)i,$$

$$A^{(q-1)}=A^{(1)}-(q-2)it, \quad I=u\frac{\partial}{\partial u}.$$

3. Докажем, что отсюда следует инвариантность уравнения (2.7.I) относительно алгебры (2.7.4) при $n=q$. Вычислим коммутатор (2.7.8), где

$$L=L_{(q)}=\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\right)^q-\frac{K}{r^{2q}}$$

, а Q из (2.7.9).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов $\frac{\partial}{\partial X_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ в обеих частях уравнения (2.7.8), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов A, B^i, C и потенциала V:

I. $\frac{\partial A}{\partial X_i}=0.$

2. $\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{1}{q}\lambda.$

3. $\frac{\partial B^1}{\partial X_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}.$

4. $\frac{\partial B^i}{\partial X_j}+\frac{\partial B^j}{\partial X_i}=0, \; i\neq j.$

5. $\frac{\partial B^1}{\partial X_1}=\frac{\partial B^2}{\partial X_2}=\frac{\partial B^3}{\partial X_3}.$

6. $\frac{\partial^2 B^i}{\partial t^2}=0.$

7. $\frac{\partial^2 B^i}{\partial X_i \partial X_i}+2i\frac{\partial B^i}{\partial t}+2\frac{\partial C}{\partial X_i}=0.$

8. $\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}=0.$ (2.7.I9)

9. $\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial X_i}=0.$

IO. $\frac{\partial^2 C}{\partial X_i \partial X_j}=0, \; i\neq j.$

$$B^i\frac{\partial V}{\partial X_i}+\lambda V=0. \qquad (2.7.20)$$

Решая систему (2.7.I9) и подставляя найденные коэффициенты в уравнение (2.7.20), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&(a_2 X_i+b_i^{(1)})\frac{\partial V}{\partial X_i}+2q\,a_2 V=0,\\&\left(\frac{1}{2}a_1 X_i+b_{ij}X_j+b_i^{(2)}\right)\frac{\partial V}{\partial X_i}+q\,a_1 V=0.\end{aligned} \qquad (2.7.21)$$

Отсюда и из (2.7.9), (2.7.I2) и (2.7.I6) следует, что при $V=\frac{K}{r^{2q}}$ максимальная алгебра инвариантности рассматриваемого уравнения снова сводится к алгебре Ли группы Шредингера, то есть уравнения (2.7.2I) обращаются в тождества при $V=\frac{K}{r^{2q}}$.

Таким образом, доказано, что обобщенное уравнение Шредингера для двух частиц с потенциалом $V=\frac{K}{r^{2n}}$ является инвариантным относительно группы Шредингера $Sch(1,6)$.

Следствие 2.7.2. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.7.I) при $V=\frac{K}{r^{n}}$ является II-мерная алгебра Ли группы Галилея, генераторы которой задаются следующими линейными комбинациями операторов

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}_0^{(n)}=\widetilde{P}_0^{(1)}=P_0, \quad \widetilde{P}_a^{(n)}=\widetilde{P}_a^{(1)}=\widetilde{P}_a=P_a+P_{a+3},\\&\widetilde{J}_{ab}^{(n)}=\widetilde{J}_{ab}^{(1)}=\widetilde{J}_{ab}=J_{ab}+J_{a+3,b+3},\\&\widetilde{G}_a^{(n)}=\widetilde{G}_a^{(1)}=\widetilde{G}_a=G_a+G_{a+3}, \quad I=U\frac{\partial}{\partial U}.\end{aligned}$$

Это следствие доказывается аналогично только что доказанной теореме.

§ 8. Симметрия линейного параболического уравнения четвертого порядка для двух частиц

Рассмотрим группу симметрии дифференциального уравнения 4-го порядка вида

$$LU=(S+S^2)U=0, \qquad (2.8.1)$$

где

$S=P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2$ – оператор обобщенного уравнения Шредингера для двух частиц; $\vec{P}_x^2=-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}=-\Delta_x$, $\vec{P}_y^2=-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}=-\Delta_y$ – операторы Лапласа, m_1 , m_2 – масса частицы, $U=U(t,\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

Определим группу симметрии уравнения (2.8.I) в классе дифференциальных операторов первого порядка. Используя метод [57], условие инвариантности уравнения (2.8.I) относительно некоторой группы, как обычно, записываем в виде

$$[L,Q_A]=\lambda_A L, \qquad (2.8.2)$$

где

$$Q=i\left(a(t,\vec{x},\vec{y})\frac{\partial}{\partial t}+b^i(t,\vec{x},\vec{y})\frac{\partial}{\partial x_i}+k^i(t,\vec{x},\vec{y})\frac{\partial}{\partial y_i}+c(t,\vec{x},\vec{y})\right) \qquad (2.8.3)$$

Подставляя оператор Q в условие (2.8.2), получаем

$$[L,Q]=[S+S^2,Q]=[S,Q]+[S^2,Q]=[S,Q]+S[S,Q]+[S,Q]S=$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a\frac{\partial}{\partial t}+b^i\frac{\partial}{\partial x_i}+k^i\frac{\partial}{\partial y_i}+c\Big]+$$

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y\Big)\Big[i\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a\frac{\partial}{\partial t}+b^i\frac{\partial}{\partial x_i}+k^i\frac{\partial}{\partial y_i}+c\Big]+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a\frac{\partial}{\partial t}+b^i\frac{\partial}{\partial x_i}+k^i\frac{\partial}{\partial y_i}+c\Big]\Big(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y\Big)=$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial t}+\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ b^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ k^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial y_i}+\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ c(t,\vec{x},\vec{y})\Big]+$$

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y\Big)\Big(\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial t}+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ b^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}+\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ k^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial y_i}+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ c(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\Big)+\Big(\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ a(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial t}+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ b^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}+\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ k^i(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\frac{\partial}{\partial y_i}+$$

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y,\ c(t,\vec{x},\vec{y})\Big]\Big)\Big(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y\Big)=$$

$$\lambda(t,\vec{x},\vec{y})\Big(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\Delta_x+\frac{1}{2m_2}\Delta_y\Big).$$

Проведя соответствующие вычисления и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов в обеих частях равенства, получаем систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов a, b^i, k^i и c:

1. $\dfrac{\partial a}{\partial x_i}=\dfrac{\partial a}{\partial y_i}=0.$

2. $\dfrac{\partial a}{\partial t}=\lambda(t,\vec{x},\vec{y}).$

8. $\dfrac{\partial^2 b^i}{\partial x_j\partial x_\nu}=0.$

9. $\dfrac{\partial^2 k^i}{\partial y_j\partial y_\nu}=0.$

$$3.\ \frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial b^1}{\partial x_1}=\frac{\partial k^1}{\partial y_1}=0. \qquad 10.\ \frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial b^i}{\partial y_j}+\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial k^j}{\partial x_i}=0.$$

$$4.\ \frac{\partial b^1}{\partial x_1}=\frac{\partial b^2}{\partial x_2}=\frac{\partial b^3}{\partial x_3}. \qquad 11.\ i\frac{\partial b^i}{\partial t}+\frac{1}{m_1}\cdot\frac{\partial c}{\partial x_i}=0. \qquad (2.8.4)$$

$$5.\ \frac{\partial k^1}{\partial y_1}=\frac{\partial k^2}{\partial y_2}=\frac{\partial k^3}{\partial y_3}. \qquad 12.\ i\frac{\partial k^i}{\partial t}+\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\partial c}{\partial y_i}=0.$$

$$6.\ \frac{\partial b^i}{\partial x_j}+\frac{\partial b^j}{\partial x_i}=0,\ i\neq j. \qquad 13.\ \frac{1}{2m_1}\cdot\frac{\partial^2 k^j}{\partial x_i\partial x_\nu}+\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\partial^2 b^i}{\partial x_\nu\partial y_j}=0,\ i\neq\nu.$$

$$7.\ \frac{\partial k^i}{\partial y_j}+\frac{\partial k^j}{\partial y_i}=0. \qquad 14.\ \frac{1}{m_1}\cdot\frac{\partial^2 k^j}{\partial x_i\partial y_\nu}+\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial^2 b^i}{\partial y_\nu\partial y_j}=0,\ \nu\neq j.$$

Решая систему (2.8.4), находим a , b^i , k^i и c

$$
\begin{aligned}
&\xi^0=C^{22},\\
&\xi^1=C^1t+C^2x_2+C^3x_3+\frac{1}{2m_1}(C^4y_1+C^5y_2+C^6y_3)+C^{23},\\
&\xi^2=C^7t-C^2x_1+C^8x_3+\frac{1}{2m_1}(C^9y_1+C^{10}y_2+C^{11}y_3)+C^{24},\\
&\xi^3=C^{12}t-C^3x_1-C^8x_2+\frac{1}{2m_1}(C^{13}y_1+C^{14}y_2+C^{15}y_3)+C^{25},\\
&k^1=C^{16}t+C^{17}y_2+C^{18}y_3-\frac{1}{2m_2}(C^4x_1+C^9x_2+C^{13}x_3)+C^{26},\\
&k^2=C^{19}t-C^{17}y_1+C^{20}y_3-\frac{1}{2m_2}(C^5x_1+C^{10}x_2+C^{14}x_3)+C^{27},\\
&k^3=C^{21}t-C^{18}y_1-C^{20}y_2-\frac{1}{2m_3}(C^6x_1+C^{11}x_2+C^{15}x_3)+C^{28},\\
&c=-im_1(C^1x_1+C^7x_2+C^{12}x_2)-im_2(C^{16}y_1+C^{19}y_2+C^{21}y_3)+C^{29}.
\end{aligned}
\qquad (2.8.5)
$$

Подставляя найденные координаты (2.8.5) в (2.8.3) и собирая выражения при одинаковых постоянных интегрирования, получаем следующие операторы, удовлетворяющие условию инвариантности (2.8.2)

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \ P_A=-i\frac{\partial}{\partial x_A}\ ,\ \text{где}\ A=\overline{1,6}.,\ \frac{\partial}{\partial x_{a+3}}=\frac{\partial}{\partial y_a},\ \ P_{a+3}=-i\frac{\partial}{\partial y_a}.$$

$$J_{AB}=x_AP_B-x_BP_A\ ,\quad A,B=\overline{1,6}.$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b.$$

$$J_{a+3,b+3} = y_a P_{b+3} - y_b P_{a+3}, \quad a \neq b. \tag{2.8.6}$$

$$J_{a+3,b} = m_2 y_a P_b - m_1 x_b P_{a+3}.$$

$$G_A = tP_A - Mx_A, \qquad M = \{m_1, m_2\}.$$

$$G_a = tP_a - m_1 x_a,$$

$$G_{a+3} = tP_{a+3} - m_2 y_a. \qquad I = U\frac{\partial}{\partial U}.$$

Явного вида операторов симметрии первого порядка (2.8.6) коммутационные соотношения алгебры Ли указаны в § 5 главы I.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.8.I. Максимальной алгеброй уравнения (2.8.I) является 29-мерная алгебра, базисные элементы которой имеют вид (2.8.6).

§ 9. Группа инвариантности одной параболической системы дифференциальных уравнений

В этом параграфе установим максимальную группу инвариантности системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \Delta \vec{U} = 0, & \text{(2.9.Iа)} \\ \operatorname{div} \vec{U} = 0 & \text{(2.9.Iб)} \end{cases}$$

где

$\vec{U} = (U^1, U^2, U^3)$, $U^i = U^i(t, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, Δ - оператор

Лапласа, $div\,\vec{u} = \dfrac{\partial u^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u^3}{\partial x_3}$.

Система (2.9.I) возникает при линеаризации уравнения Навье-Стокса. В подходе С.Ли для заданной системы дифференциальных уравнений множество дифференциальных операторов первого порядка, относительно которых инвариантна система (2.9.I), запишем в следующем виде

$$Q_A\left(t\text{-}x_o, \vec{x}, \vec{u}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \xi^o_A(t, \vec{x}, \vec{u})\frac{\partial}{\partial t} + \qquad (2.9.2)$$

$$\xi^k_A(t, \vec{x}, \vec{u})\frac{\partial}{\partial x_k} + \eta^\ell(t, \vec{x}, \vec{u})\frac{\partial}{\partial u^\ell}.$$

По повторяющимся индексам, как и раньше предполагается суммирование. Уравнения (2.9.I) второго порядка, поэтому запишем второе продолжение оператора группы, допускаемой данной системой в виде

$$\overset{2}{X}\cdot\partial = X\cdot\partial + \eta^\ell_i \frac{\partial}{\partial u^\ell_i} + \eta^\ell_{ij}\frac{\partial}{\partial u^\ell_{ij}},$$

где

$X\cdot\partial = \xi^o\dfrac{\partial}{\partial t} + \xi^i\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \eta^k\dfrac{\partial}{\partial u^k}$ и координаты η^ℓ_k, η^ℓ_{ij}

задаются выражениями

$$\eta^\ell_i = \partial_i\eta^\ell + y^k_i \underset{o}{\partial_k}\eta^\ell - y^\ell_k\partial_i\xi^k - y^\ell_k y^r_i \underset{o}{\partial_r}\xi^k,$$

$$\eta^\ell_{ij} = \partial_j\eta^\ell_i + y^s_j\underset{o}{\partial_s}\eta^\ell_i + y^s_{rj}\underset{1}{\partial^r_s}\eta^\ell_i - y^\ell_{is}\partial_j\xi^s - y^\ell_{is}y^r_j\underset{o}{\partial_r}\xi^s.$$

В результате реализации алгоритма [38] получаем следующую систему определяющих уравнений для координат инфинитезимального оператора X

1. $\frac{\partial \xi^0}{\partial x_i} = 0.$
2. $\frac{\partial \xi^0}{\partial u^k} = 0.$
3. $\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} = 0.$
4. $\frac{\partial^2 \eta^\ell}{\partial u^k \partial u^r} = 0.$
5. $\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j.$
6. $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \xi^0}{\partial t} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}.$
7. $\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi^3}{\partial x_3}.$
8. $\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} = \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j}.$
9. $\frac{\partial^2 \eta^k}{\partial u^i \partial x_j} = 0.$
10. $\frac{\partial \eta^k}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial x_i \partial x_i} = 0.$ (2.9.3)
11. $\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} = \frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} = \frac{\partial \eta^3}{\partial u^3}.$
12. $\frac{\partial \eta^i}{\partial x_i} = 0.$
13. $3\frac{\partial \xi^i}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 \eta^k}{\partial u^k \partial x_i} = 0.$

Система (2.9.3) имеет следующие независимые решения:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = 2a x_0 + c^1, \\
&\xi^1 = a x_1 + b x_2 + c^1 x_3 + d^1, \\
&\xi^2 = -b x_1 + a x_2 + c^3 x_3 + d^2, \\
&\xi^3 = -c^1 x_1 - c^2 x_2 + a x_3 + d^3, \\
&\eta^1 = N u^1 + b u^2 + c^1 u^3 + d^1(x_0, \ldots, x_3), \\
&\eta^2 = -b u^1 + N u^2 + c^2 u^3 + d^2(x_0, \ldots, x_3), \\
&\eta^3 = -c^1 u^1 - c^2 u^2 + N u^3 + d^3(x_0, \ldots, x_3)
\end{aligned}
$$

которым соответствуют такие операторы алгебры инвариантности:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}, \quad a, b = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{2.9.4}
$$

$$S_{12}=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad S_{13}=\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix},\quad S_{23}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\\ 0 & -i & 0\end{pmatrix},$$

$$D=2tP_0-\vec{x}\vec{P},\qquad I=U\frac{\partial}{\partial U}.$$

Подведем итог сказанному в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2.9.I. Система уравнений (2.9.I) инвариантна относительно девятимерной алгебры Ли, базисные элементы которой определяются формулами (2.9.4).

Возникает вопрос о том, какова симметрия системы уравнений (2.9.I а) без дополнительного условия (2.9.Iб). Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся алгоритмом [38].

З а м е ч а н и е 2.9.2. Известно, что система уравнений (2.9.Iа) инвариантна относительно I3-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой выражаются следующими формулами:

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,\quad a\neq b.$$
$$G_a=tP_a+\frac{1}{2i}x_a,$$
$$D=2tP_0-x_aP_a,$$
$$A=t\left(x_\nu P^\nu+\frac{3}{2}i\right)-\frac{1}{4i}\vec{x}^2,\quad \nu=\overline{0,3},\quad I=U\frac{\partial}{\partial U}.$$

Можно убедиться в том, что уравнение (2.9.Iб) допускает алгебру инвариантности со следующими базисными элементами:

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial x_0},\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a+U_a\frac{\partial}{\partial U_b}-U_b\frac{\partial}{\partial U_a},\quad a\neq b,$$
$$G_a=tP_a-\frac{\partial}{\partial U_a},\quad I=U\frac{\partial}{\partial U},$$

$$D = x_a P_a - U_a \frac{\partial}{\partial U_a},$$

$$A = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2t\vec{x}\frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \left(x_1 \frac{\partial}{\partial U_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial U_2} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial U_3}\right) + 2\lambda t \vec{U} \frac{\partial}{\partial \vec{U}}.$$

Таким образом, система уравнений (2.9.I) имеет более узкую алгебру инвариантности, чем отдельно уравнения (2.9.I а) или (2.9.I в). Причина этого заключается в том, что на решениях этих уравнений реализуются различные представления алгебры Галилея.

ГЛАВА III

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Настоящая глава посвящена изучению групповых свойств нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и построению некоторых точных решений. Решена обратная симметрийная задача, т.е. найдено такое дифференциальное уравнение, которое инвариантно относительно наперед заданной группы преобразований. В первом и втором параграфах решена обратная симметрийная задача для нелинейного нерелятивистского уравнения типа Шредингера $2n$ -го порядка для одной и двух частиц.

В заключении главы найдено некоторое точное решение линейного уравнения типа Шредингера с потенциалом и нелинейного параболического уравнения, инвариантного относительно группы Галилея $G(1,n)$.

§ I. Об алгебре инвариантности нелинейного уравнения порядка $2n$.

I. В данном параграфе исследуются групповые свойства нелинейного дифференциального уравнения

$$L:\ S^n u + F(u, \underset{1}{u}) = 0, \qquad (3.I.I)$$

где

$$S^n=\left(P_0-\frac{1}{2m}\vec{P}^2\right)^n$$ – оператор типа Шредингера $2n$ -го

порядка,

$$u=u(t,\vec{x}),\ \vec{x}=(x_1,x_2,x_3),\ \underset{1}{u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

В первом параграфе главы II исследована симметрия линейного дифференциального уравнения

$$S^n u=0. \tag{3.1.2}$$

Здесь мы рассмотрим вопрос о нахождении таких функций $F(u,\underset{1}{u})$ при которых уравнение (3.1.1) было бы инвариантным относительно группы Галилея, расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3)=G(1,3)\supsetplus D$ и группы Шредингера.

Т е о р е м а 3.1.1. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3.1.1) является:

а) алгебра Галилея, если:

$$F(u,\underset{1}{u})=\Phi\left(u\bar{u},\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u;$$

б) алгебра группы $\tilde{G}(1,3)$, если:

$$F(u,\underset{1}{u})=(u\bar{u})^{-\frac{n}{\alpha}}\Phi\left((u\bar{u})^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u;$$

в) алгебра Шредингера, если

$$F(u,\underset{1}{u})=(u\bar{u})^{\frac{2n}{5-2n}}\Phi\left((u\bar{u})^{\frac{4(n-3)}{5-2n}}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u,$$

где α – действительное число неравное нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а). Докажем необходимость. Уравнение (3.1.1) запишем для действительной и мнимой части:

$$U = U^1 + iU^2, \quad F = F^1 + iF^2.$$

$$L:\ \begin{aligned} &\overset{1}{L}U + F^1 = 0, \\ &\overset{2}{L}U + F^2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.I.3)$$

Пусть $\overset{2n}{X}$ – $2n$ – продолжение инифнитезимального оператора

$$X = \xi^{\alpha}(x, u^1, u^2)\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + \eta^1(x, U^1, U^2)\frac{\partial}{\partial U^1} + \eta^2(x, u^1, u^2)\frac{\partial}{\partial U^2}.$$

Запишем условие инвариантности для уравнения (3.I.3)

$$\overset{2n}{X}(L)_{|L=0} = 0. \qquad (3.I.4)$$

После вычисления имеем

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = C^1 x_0 + 2C^2 x_0 + d_0, \\
&\xi^1 = C^1 x_0 x_1 + C^3 x_0 + C^2 x_1 + C^4 x_2 + C^5 x_3 + d_1, \\
&\xi^2 = C^1 x_0 x_2 + C^6 x_0 - C^4 x_1 + C^2 x_2 + C^7 x_3 + d_2, \\
&\xi^3 = C^1 x_0 x_3 + C^8 x_0 - C^5 x_1 - C^7 x_2 + C^2 x_3 + d_3, \\
&\eta^1 = \left(\left((n - \tfrac{5}{2})x_0 + 1\right)C^1\right)U^1 - m\left(C^1 \frac{\vec{x}^2}{2} + C^3 x_1 + C^6 x_2 + C^8 x_3\right)U^2 + b^1, \\
&\eta^2 = \left(\left((n - \tfrac{5}{2})x_0 + 1\right)C^1\right)U^2 + m\left(C^1 \frac{\vec{x}^2}{2} + C^3 x_1 + C^6 x_2 + C^8 x_3\right)U^1 + b^2,
\end{aligned} \qquad (3.I.5)$$

где

C_{α}, d_{β} – $const$, а функция $F(u, \underset{1}{u})$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{L}\eta - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2n\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right)F^1 - \frac{\partial \eta^1}{\partial U^2}F^2 + \overset{2n}{X} \cdot F^1 = 0, \\
&\overset{2}{L}\eta - \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} - 2n\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right)F^2 - \frac{\partial \eta^2}{\partial U^1}F^1 + \overset{2n}{X} \cdot F^2 = 0
\end{aligned} \qquad (3.I.6)$$

или

$$\overset{1}{L}_{\eta} - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2n\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right)F^1 - \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2}F^2 + \eta^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1} + \eta^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2} + \zeta^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + \zeta^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} = 0,$$

$$\overset{2}{L}_{\eta} - \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} - 2n\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right)F^2 - \frac{\partial \eta^2}{\partial u^1}F^1 + \eta^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1} + \eta^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2} + \zeta^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + \zeta^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} = 0. \qquad (3.I.7)$$

Запишем уравнения (3.I.7) для операторов группы галилеевских преобразований, полученных из (3.I.5)

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b.$$

$$G_a = x_0 P_a - m x_a, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

т.е.

$$u^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_b} - u^1_b\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + u^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_b} - u^2_b\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} = 0, \quad a \neq b,$$

$$u^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_b} - u^1_b\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + u^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_b} - u^2_b\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} = 0, \quad a \neq b,$$

$$u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} - u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} = 0, \qquad (3.I.8)$$

$$u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} - u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} = 0,$$

$$u^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} - u^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1} + F^2 = 0,$$

$$u^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} - u^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1} - F^1 = 0.$$

Решая систему уравнений (3.I.8) получим выражения для $F(u, \underset{1}{u})$:

$$F(u, \underset{1}{u}) = \Phi\left(u\bar{u}, \frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u, \qquad (3.I.9)$$

где u и $\bar{u}$ комплексно сопряженные функции.

При произвольной функции Φ вида (3.I.9) уравнение (3.I.I) будет инвариантно относительно алгебры Галилея.

б). Чтобы найти при каких $F(u, \underset{1}{u})$ уравнение (3.I.I) инвариантно относительно алгебры $\widetilde{G}(1,3)=G(1,3)\oplus D$ образованной операторами

$$P_0,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ I,$$
$$D=2tP_0-x_aP_a+\left(\frac{5}{2}-n\right)i$$

из уравнения (3.I.7) находим, что F удовлетворяет следующим уравнениям

$$
\begin{aligned}
&u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a}-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a}=0,\\
&u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a}-u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a}=0,\\
&u^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_b}-u^1_b\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a}+u^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_b}-u^2_b\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a}=0,\quad a\neq b.\\
&u^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_b}-u^1_b\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a}+u^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_b}-u^2_b\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a}=0,\quad a\neq b.\qquad (3.I.10)\\
&u^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a}-u^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a}+u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2}-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+F^2=0,\\
&u^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a}-u^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a}+u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2}-u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1}-F^1=0,\\
&u^1_a\frac{\partial F^1}{\partial u^1_a}+u^2_a\frac{\partial F^1}{\partial u^2_a}-2nF^1=0,\\
&u^1_a\frac{\partial F^2}{\partial u^1_a}+u^2_a\frac{\partial F^2}{\partial u^2_a}-2nF^2=0.
\end{aligned}
$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений, находим, что

$$F(u,\underset{1}{u})=(u\bar{u})^{-\frac{n}{\alpha}}\Phi\left((uu)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u,$$

где Φ произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

в). В заключение этого пункта укажем такие функции $F(U, \underset{1}{U})$ при которых уравнение (3.I.I) осталось бы инвариантным относительно операторов группы Шредингера, заданных следующими формулами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b. \\
&G_a = tP_a - m x_a, \qquad I = U\frac{\partial}{\partial U} \\
&D = 2tP_0 - x_a P_a + \left(\tfrac{5}{2} - n\right)i, \\
&A = t\left(x_\nu P^\nu + \left(\tfrac{5}{2} - n\right)i\right) + m\frac{\vec{x}^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Тогда уравнения (3.I.7) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&U^1\frac{\partial F^1}{\partial U_a^2} - U^2\frac{\partial F^1}{\partial U_a^1} = 0, \\
&U^1\frac{\partial F^2}{\partial U_a^2} - U^2\frac{\partial F^2}{\partial U_a^1} = 0, \\
&U_a^1\frac{\partial F^1}{\partial U_b^1} - U_b^1\frac{\partial F^1}{\partial U_a^1} + U_a^2\frac{\partial F^1}{\partial U_b^2} - U_b^2\frac{\partial F^1}{\partial U_b^2} = 0, \ a \neq b. \\
&U_a^1\frac{\partial F^2}{\partial U_b^1} - U_b^1\frac{\partial F^2}{\partial U_a^1} + U_a^2\frac{\partial F^2}{\partial U_b^2} - U_b^2\frac{\partial F^2}{\partial U_a^2} = 0, \ a \neq b. \qquad (3.I.II) \\
&U_a^1\frac{\partial F^1}{\partial U_a^2} - U_a^2\frac{\partial F^1}{\partial U_a^1} + U^1\frac{\partial F^1}{\partial U^2} - U^2\frac{\partial F^1}{\partial U^1} + F^2 = 0, \\
&U_a^1\frac{\partial F^2}{\partial U_a^2} - U_a^2\frac{\partial F^2}{\partial U_a^1} + U^1\frac{\partial F^2}{\partial U^2} - U^2\frac{\partial F^2}{\partial U^1} - F^1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$u^1_a \frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} - 2n F^1 = 0,$$

$$u^1_a \frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} - 2n F^2 = 0,$$

$$u^1_a \frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^1}{\partial u^2_a} + u^1 \frac{\partial F^1}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial F^1}{\partial u^2} - F^1 = 0,$$

$$u^1_a \frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^2}{\partial u^2_a} + u^1 \frac{\partial F^2}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial F^2}{\partial u^2} - F^2 = 0,$$

$$(7-2n)\left(u^1_a \frac{\partial F^1}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^1}{\partial u^2_a}\right) + (5-2n)\left(u^1 \frac{\partial F^1}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right) - (5+2n) F^1 = 0,$$

$$(7-2n)\left(u^1_a \frac{\partial F^2}{\partial u^1_a} + u^2_a \frac{\partial F^2}{\partial u^2_a}\right) + (5-2n)\left(u^1 \frac{\partial F^2}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial F^2}{\partial u^2}\right) - (5+2n) F^2 = 0.$$

Решением этой системы являются функции

$$F(u, \underset{1}{u}) = (u\bar{u})^{\frac{2n}{5-2n}} \Phi\left((u\bar{u})^{\frac{4(n-3)}{5-2n}} \cdot \frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial(uu)}{\partial x_a}\right) u.$$

Достаточность доказывается непосредственной проверкой с применением алгоритма [38].

Таким образом, мы определили функции F в нелинейном уравнении типа Шредингера (3.I.I), при которых уравнение остается инвариантным относительно некоторых подалгебр алгебры Шредингера $Sch(1,3)$.

2. Теперь рассмотрим уравнение Шредингера $2n$ -го порядка с нелинейностью, задаваемой функцией F.

$$L:\ S^n u + F(u) = 0. \tag{3.I.12}$$

Мы хотим найти все функции $F(u)$, при которых нелинейное дифференциальное уравнение $2n$-го порядка (3.I.12) осталось бы инвариантным относительно алгебры Шредингера.

В работе [79] показано, что для того, чтобы уравнение (3.I.I2) при $n=1$ было инвариантно относительно I3-мерной группы Шредингера, необходимо и достаточно чтобы

$$F(u)=\lambda u|u|^{4/3}.$$

Этот результат будет обобщен на случай уравнения (3.I.I2).

Т е о р е м а 3.I.2. Уравнение (3.I.I2) инвариантно относительно I2-параметрической группы Шредингера, если

$$F(u)=\lambda u|u|^{\frac{4n}{5-2n}},$$

где λ - комплексный параметр.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции.

I. $n=2$. В этом случае уравнение (3.I.I2) имеет вид

$$\left(P_0-\frac{\vec{P}^2}{2m}\right)^2 u+F(u)=0. \tag{3.I.I3}$$

Применяя метод Ли [38], уравнение (3.I.I3) запишем для действительной и мнимой части: $u=u^1+iu^2$, $F=F^1+iF^2$,

$$S^1:\ -u^1_{00}-\frac{1}{m}\left(u^2_{011}+u^2_{022}+u^2_{033}\right)+ \tag{3.I.I4 а}$$

$$+\frac{1}{4m^2}\left(u^1_{1111}+u^1_{2222}+u^1_{3333}+2\left(u^1_{1122}+u^1_{1133}+u^1_{2233}\right)\right)+\lambda F^1=0,$$

$$S^2:\ -u^2_{00}+\frac{1}{m}\left(u^1_{011}+u^1_{022}+u^1_{033}\right)+ \tag{3.I.I4 б}$$

$$\frac{1}{4m^2}\left(U^2_{1111}+U^2_{2222}+U^2_{3333}+2\left(U^2_{1122}+U^2_{1133}+U^2_{2233}\right)\right)+\lambda F^2=0,$$

где индекс внизу означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Допускаемый оператор будем искать в виде

$$X=\xi^{e}\frac{\partial}{\partial x_e}+\eta^{k}\frac{\partial}{\partial U^k}. \tag{3.I.15}$$

Для получения определяющих уравнений необходимо 4-е продолжение оператора (3.I.15).

$$\overset{4}{X}=\xi^{e}\frac{\partial}{\partial x_e}+\eta^{k}\frac{\partial}{\partial U^k}+\varsigma^{k}_{e}\frac{\partial}{\partial U^k_e}+\sigma^{k}_{ej}\frac{\partial}{\partial U^k_{ej}}+ \tag{3.I.16}$$

$$\tau^{k}_{ejq}\frac{\partial}{\partial U^k_{ejq}}+\omega^{k}_{ejql}\frac{\partial}{\partial U^k_{ejql}},$$

где ς^{k}_{i}, σ^{k}_{ij}, τ^{k}_{ijq}, ω^{k}_{ijql} вычисляются по известным формулам продолжения [38].

Запишем условия инвариантности системы (3.I.14) относительно оператора $\overset{4}{X}$:

$$\overset{4}{X}(S^1)\Big|_{\substack{S^1=0\\S^2=0}}=\Big\{-\sigma^{1}_{00}-\frac{1}{m}\left(\tau^{2}_{011}+\tau^{2}_{022}+\tau^{2}_{033}\right)+\frac{1}{4m^2}\big(\omega^{1}_{1111}+\omega^{1}_{2222}+\omega^{1}_{3333}+$$

$$2\left(\omega^{1}_{1122}+\omega^{1}_{1133}+\omega^{1}_{2233}\right)\big)+\eta^{1}\frac{\partial F^1}{\partial U^1}+\eta^{2}\frac{\partial F^2}{\partial U^2}\Big\}\Big|_{\substack{S^1=0\\S^2=0}}=0,$$

$$\overset{4}{X}(S^2)\Big|_{\substack{S^1=0\\S^2=0}}=\Big\{-\sigma^{2}_{00}+\frac{1}{m}\left(\tau^{1}_{011}+\tau^{1}_{022}+\tau^{1}_{033}\right)+\frac{1}{4m^2}\big(\omega^{2}_{1111}+\omega^{2}_{2222}+\omega^{2}_{3333}+$$

$$2\left(\omega^{2}_{1122}+\omega^{2}_{1133}+\omega^{2}_{2233}\right)\big)+\eta^{1}\frac{\partial F^2}{\partial U^1}+\eta^{2}\frac{\partial F^2}{\partial U^2}\Big\}\Big|_{\substack{S^1=0\\S^2=0}}=0,$$

где

$$S^1=0 \Longrightarrow U^1_{1111}=4m^2U^1_{00}+4m(U^2_{011}+U^2_{022}+U^2_{033})-$$
$$[U^1_{2222}+U^1_{3333}+2(U^1_{1122}+U^1_{1133}+U^1_{2233})]-4m^2F^1,$$
$$S^2=0 \Longrightarrow U^2_{1111}=4m^2U^2_{00}-4m(U^1_{011}+U^1_{022}+U^1_{033})-$$
$$[U^2_{2222}+U^2_{3333}+2(U^2_{1122}+U^2_{1133}+U^2_{2233})]-4m^2F^2.$$

После несложных, но довольно громоздких преобразований, находим систему определяющих уравнений для координат инфинитезимального оператора X:

1. $\dfrac{\partial\xi^\mu}{\partial U^k}=0.$

2. $\dfrac{\partial\xi^0}{\partial x_a}=0.$

3. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial\xi^0}{\partial x_0}=\dfrac{\partial\xi^1}{\partial x_1}.$

4. $\dfrac{\partial\xi^1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial\xi^2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial\xi^3}{\partial x_3}.$

5. $\dfrac{\partial\xi^a}{\partial x_b}=\dfrac{\partial\xi^b}{\partial x_a}=0,\ a\neq b.$

6. $m\dfrac{\partial\xi^a}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_a\partial U^1}=0.$

7. $m\dfrac{\partial\xi^a}{\partial t}+\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_a\partial U^1}=0.$

8. $\dfrac{\partial\eta^1}{\partial U^2}+\dfrac{\partial\eta^2}{\partial U^1}=0.$

9. $\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_a\partial U^1}=\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial x_a\partial U^2}=\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial t\partial U^2}=\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial t\partial U^1}=0.$

10. $\dfrac{\partial\eta^1}{\partial U^1}=\dfrac{\partial\eta^2}{\partial U^2}.$ (3.1.17)

11. $2\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial t\partial U^1}-\dfrac{\partial^2\xi^0}{\partial t^2}+\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\partial^3\eta^2}{\partial x_a\partial x_a\partial U^1}=0.$

12. $2\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial t\partial U^1}-\dfrac{\partial^2\xi^0}{\partial t^2}-\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\partial^3\eta^1}{\partial x_a\partial x_a\partial U^2}=0.$

13. $\dfrac{\partial F}{\partial x_\mu}=0.$

где $\mu=\overline{0,3}$, $a,b=1,2,3$ и на функцию F получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$S^1\eta-\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial u^1}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^1-\frac{\partial\eta^1}{\partial u^2}F^2+XF^1=0,$$

$$S^2\eta-\left(\frac{\partial\eta^2}{\partial u^2}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^2-\frac{\partial\eta^2}{\partial u^1}F^1+XF^2=0$$

или

$$S^1\eta-\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial u^1}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^1-\frac{\partial\eta^1}{\partial u^2}F^2+\eta^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+\eta^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$
$$S^2\eta-\left(\frac{\partial\eta^2}{\partial u^2}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^2-\frac{\partial\eta^2}{\partial u^1}F^1+\eta^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1}+\eta^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0. \quad (3.I.18)$$

Решая систему (3.I.18), получаем алгебру инвариантности для рассматриваемого уравнения (3.I.13) со следующими базисными операторами:

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,\quad a\neq b.$$
$$G_a=tP_a-mx_a,\qquad I=u\frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.I.19)$$
$$D=2tP_0-\vec{x}\vec{P}+\frac{1}{2}i,$$
$$A=t(x_eP^e+\frac{1}{2}i)+\frac{m}{2}\vec{x}.$$

Подставляя (3.I.19) в (3.I.18), получаем следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial u^1}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^1+\frac{\partial\eta^1}{\partial u^2}F^2-\eta^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}-\eta^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$

$$\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial u^2}-4\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)F^2+\frac{\partial\eta^2}{\partial u^1}F^1-\eta^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2}-\eta^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1}=0$$

или

$$F^2-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$

$$9F^1 - u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1} - u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2} = 0,$$

$$F^1 + u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1} - u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2} = 0,$$

$$9F^2 - u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1} - u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2} = 0.$$

Решая эту систему находим

$$F^1 = \lambda u^1[(u^1)^2+(u^2)^2]^4, \quad F^2 = \lambda u^2[(u^1)^2+(u^2)^2]^4$$ или

$F = \lambda u|u|^8$, где λ - комплексный параметр.

II. Предположим, что теорема справедлива при $n = \alpha - 1$, т.е.

$$F = \lambda u|u|^{\frac{4(\alpha-1)}{5-2(\alpha-1)}}.$$

III. Докажем, что уравнение (3.I.I2) при $n = \alpha$, т.е.

$$F = \lambda u|u|^{\frac{4\alpha}{5-2\alpha}}$$

остается инвариантным относительно алгебры Шредингера. В этом случае (3.I.I9) имеет вид

$$P_0^{(n)} = P_0^{(1)} = P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a^{(n)} = P_a^{(1)} = P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},$$
$$J_{ab}^{(n)} = J_{ab}^{(1)} = J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b.$$
$$G_a^{(n)} = G_a^{(1)} = G_a = tP_a - mx_a, \qquad I = u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$D^{(n)} = 2tP_0 - \vec{x}\vec{P} + \left(\tfrac{5}{2} - n\right)i,$$

$$A^{(n)}=t\left(x_a P^a+\left(\tfrac{5}{2}-n\right)i\right)+\frac{m}{2}\vec{x}.$$

Для функции F получаем

$$F^2-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$

$$(5+2\alpha)F^1-(5-2\alpha)\left(u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right)=0,$$

$$F^1+u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1}-u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0,$$

$$(5+2\alpha)F^2-(5-2\alpha)\left(u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1}+u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2}\right)=0.$$

Решая эту систему, находим нелинейность, при которой уравнение (3.I.I2) инвариантно относительно алгебры Шредингера

$$F=\lambda u|u|^{\frac{4n}{5-2n}}.$$

Теорема доказана.

3. В этом пункте рассмотрим при каких нелинейностях $F(u)$ дифференциальные уравнения типа Шредингера $2n$-го порядка (3.I.I2) остаются инвариантными относительно алгебры Галилея $G(1,3)$ преобразований

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\quad P_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a},$$

$$J_{ab}=x_a P_b-x_b P_a,\quad a\neq b.$$

$$G_a=tP_a-mx_a,\qquad I=u\frac{\partial}{\partial u}.$$

На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Т е о р е м а 3.I.3. Уравнение (3.I.I2) инвариантно относительно II-параметрической группы Галилея $G(1,3)$, если

$$F(u)=F(u\bar{u})u,$$

где F – произвольная дифференцируемая функция от аргумента $u\bar{u}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы.

§ 2. Максимальная алгебра инвариантности нелинейного уравнения первого порядка

Исследуем групповые свойства нелинейного уравнения первого порядка вида

$$P_0 u = \lambda\left[(P_a u)(P_a u)\right]^2, \tag{3.2.I}$$

где $P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$, $P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $u = u(t = x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

λ – постоянная.

Используя метод Ли [38], рассматриваемое уравнение запишем в виде:

$$Lu \equiv i\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^4 +$$

$$2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\right)\Big] = 0.$$

Оператор, допускаемый уравнением (3.2.I) будем искать в виде

$$X = \xi^\mu(x, u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.2.2}$$

Условия инвариантности для рассматриваемого уравнения относительн оператора X таковы

$$X(Lu)_{|Lu} = 0, \tag{3.2.3}$$

где

$\tilde{X} = X + \zeta^\mu\frac{\partial}{\partial u_\mu}$ – продолжение оператора X, а

$$\zeta^{\ell}=\mathcal{D}_{\ell}(\eta)-U_i\mathcal{D}_{\ell}(\xi^{\circ})\ ,\ \mathcal{D}_{\ell}=\frac{\partial}{\partial x_{\ell}}+U_{\ell}\frac{\partial}{\partial U}$$ по повторяющимся индексам предполагается суммирование

$$LU=0\Longrightarrow\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^4=\frac{i}{\lambda}\cdot\frac{\partial U}{\partial t}-\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^4-\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^4-$$
$$2\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right).$$

Выполняя преобразования и приравнивая члены при одинаковых степенях производных $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, находим систему определяющих уравнений относительно координат инфинитезимального оператора (3.2.2) ξ^{ℓ} и η :

1. $\frac{\partial \xi^{\circ}}{\partial U}=0.$

2. $\frac{\partial \xi^{\circ}}{\partial t}=0.$

3. $\frac{\partial \xi^{a}}{\partial t}=0.$

4. $\frac{\partial \xi^{a}}{\partial x_{b}}+\frac{\partial \xi^{b}}{\partial x_{a}}=0,\ a\neq b.$

5. $3\frac{\partial \eta}{\partial U}=4\frac{\partial \xi^{1}}{\partial x_1}-\frac{\partial \xi^{\circ}}{\partial t}.$

6. $\frac{\partial \xi^{1}}{\partial x_1}=\frac{\partial \xi^{2}}{\partial x_2}=\frac{\partial \xi^{3}}{\partial x_3}.$

7. $\frac{\partial \eta}{\partial x_{\ell}}=0.$

Решая эту систему дифференциальных уравнений находим:

$$\xi^{\circ}=C_1 t+d_{\circ}\ ,$$
$$\xi^{a}=C_2 x_a+C_{ab}x_b+d_a\ ,\ a\neq b.$$
$$\eta=\left(\frac{4}{3}C_2-\frac{1}{3}C_1\right)U+d\ ,$$

где C_1, C_2, d_{ℓ}, d – постоянные интегрирования.

Подставляя эти координаты в (3.2.2) и собирая члены при одинаковых постоянных интегрирования, рассматриваемых как независимые параметры, получаем алгебру инвариантности с базисными операторами:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_u = \frac{\partial}{\partial u}, \\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a \neq b, \\
&D^{(1)} = t P_0 - \frac{1}{3} u \frac{\partial}{\partial u}, \\
&D^{(2)} = -x_a P_0 + \frac{4}{3} u \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

Таким образом, мы нашли базисные операторы, удовлетворяющие условию инвариантности (3.2.3). Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 3.2.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3.2.I) является I0-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой выражаются формулами (3.2.4).

§ 3. О квазилинейном уравнении типа Шредингера для системы из двух частиц

В параграфе 6 главы II найдена максимальная алгебра инвариантности уравнения типа Шредингера для двух частиц порядка вида

$$
\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n u = 0. \tag{3.3.I}
$$

Теперь исследуем алгебру инвариантности уравнения (3.3.I) с нелинейными добавками $F(u)$:

$$
\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^n u + F(u) = 0 \tag{3.3.2}
$$

Теорема 3.3.I. Нелинейное уравнение $2n$ -го порядка вида (3.3.2) инвариантно относительно 3I-параметрической группы Шредингера, если

$$F(u)=\lambda u|u|^{\frac{2n}{4-n}},$$

где λ – комплексный параметр.

Доказательство проведем методом математической индукции.

I. $n=1$. В этом случае уравнение (3.3.2) имеет вид

$$\Big(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_a^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_{a+3}^2\Big)u+F(u)=0. \qquad (3.3.3)$$

Чтобы найти при каких $F(u)$ уравнение инвариантно относительно алгебры Шредингера, применим метод Ли [38]. Уравнение (3.3.3) запишем для действительной и мнимой части:

$$u=u^1+iu^2, \quad F(u)=F^1(u^1,u^2)+iF^2(u^1,u^2),$$

$$\overset{1}{L}:\ u_0^1+\frac{1}{2m_1}(u_{11}^2+u_{22}^2+u_{33}^2)+\frac{1}{2m_2}(\underset{11}{u^2}+\underset{22}{u^2}+\underset{33}{u^2})+\lambda F^2(u^1,u^2)=0,$$
$$(3.3.4)$$
$$\overset{2}{L}:\ -u_0^2+\frac{1}{2m_1}(u_{11}^1+u_{22}^1+u_{33}^1)+\frac{1}{2m_2}(\underset{11}{u^1}+\underset{22}{u^1}+\underset{33}{u^1})+\lambda F^1(u^1,u^2)=0,$$

где

$$u_0^k=\frac{\partial u^k}{\partial t},\ k=1,2.,\quad u_{aa}^k=\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_a^2},\quad \underset{aa}{u^k}=\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_{a+3}^2}.$$

Допускаемый оператор будем искать в виде

$$X=\xi^{\mu}(t,x_a,y_a,u^k)\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\eta^k(t,x_a,y_a,u^k)\frac{\partial}{\partial u^k}, \qquad (3.3.5)$$
$$\mu=\overline{0,a+3}.$$

Для получения определяющих уравнений необходимо 2-е продолжение оператора X .

$$\overset{2}{X} = X + \zeta^{k}_{\mu} \frac{\partial}{\partial U^{k}_{\mu}} + \sigma^{k}_{\mu j} \frac{\partial}{\partial U^{k}_{\mu j}},$$

где ζ^{k}_{μ}, $\sigma^{k}_{\mu j}$ вычисляются по известным формулам продолжения [38].

Запишем условия инвариантности системы нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка (3.3.4) относительно оператора X:

$$\overset{2}{X}(L^1)\Big|_{\substack{L^1=0\\ L^2=0}} = \zeta^1_o + \frac{1}{2m_1}(\sigma^2_{11} + \sigma^2_{22} + \sigma^2_{33}) + \frac{1}{2m_2}(\underset{11}{\sigma^2} + \underset{22}{\sigma^2} + \underset{33}{\sigma^2}) + \eta^1 \frac{\partial F^2}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^2}{\partial U^2} = 0,$$

$$\overset{2}{X}(L^2)\Big|_{\substack{L^1=0\\ L^2=0}} = -\zeta^2_o + \frac{1}{2m_1}(\sigma^1_{11} + \sigma^1_{22} + \sigma^1_{33}) + \frac{1}{2m_2}(\underset{11}{\sigma^2} + \underset{22}{\sigma^2} + \underset{33}{\sigma^2}) + \eta^1 \frac{\partial F^1}{\partial U^1} + \eta^2 \frac{\partial F^1}{\partial U^2} = 0,$$

где

$$L^1 = 0 \Longrightarrow U^1_{11} = 2m_1 U^2_o - U^1_{22} - U^1_{33} - \frac{m_1}{m_2}(\underset{11}{U^1} + \underset{22}{U^1} + \underset{33}{U^1}) - 2m_1 F^1,$$

$$L^2 = 0 \Longrightarrow U^2_{11} = -2m_1 U^1_o - U^2_{22} - U^2_{33} - \frac{m_1}{m_2}(\underset{11}{U^2} + \underset{22}{U^2} + \underset{33}{U^2}) - 2m_1 F^2.$$

После громоздких преобразований находим систему определяющих уравнений относительно координат инфинитезимального оператора (3.3.5) ξ^{μ} и η:

1. $\dfrac{\partial \xi^{\mu}}{\partial U^{k}} = 0.$

2. $\dfrac{\partial \xi^{o}}{\partial x_{\theta}} = 0, \quad \theta = \overline{1,6}$

3. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial \xi^{o}}{\partial t} = \dfrac{\partial \xi^{\theta}}{\partial x_{\theta}}.$

4. $\dfrac{\partial\xi^1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial\xi^2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial\xi^3}{\partial x_3}=\dfrac{\partial\xi^{a+1}}{\partial x_{a+1}}=\dfrac{\partial\xi^{a+2}}{\partial x_{a+2}}=\dfrac{\partial\xi^{a+3}}{\partial x_{a+3}}.$

5. $\dfrac{\partial\xi^a}{\partial x_b}+\dfrac{\partial\xi^b}{\partial x_a}=0\,,\quad a\neq b.$

6. $\dfrac{\partial\xi^{a+3}}{\partial x_{b+3}}+\dfrac{\partial\xi^{b+3}}{\partial x_{a+3}}=0\,,\quad a\neq b.$ (3.3.6)

7. $m_1\dfrac{\partial\xi^a}{\partial t}+\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_a\partial u^2}=0.$

8. $m_1\dfrac{\partial\xi^a}{\partial x_{a+3}}+m_2\dfrac{\partial\xi^{a+3}}{\partial x_a}=0.$

9. $m_1\dfrac{\partial\xi^a}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial x_a\partial u^1}=0.$

10. $m_2\dfrac{\partial\xi^{a+3}}{\partial t}+\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_{a+3}\partial u^2}=0.$

11. $m_2\dfrac{\partial\xi^{a+3}}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial x_{a+3}\partial u^1}=0.$

12. $\dfrac{\partial\eta^1}{\partial u^2}+\dfrac{\partial\eta^2}{\partial u^1}=0.$

13. $\dfrac{\partial\eta^1}{\partial u^1}=\dfrac{\partial\eta^2}{\partial u^2}\,.$

14. $\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial t\partial u^2}=\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial t\partial u^1}=\dfrac{\partial^2\eta^1}{\partial x_b\partial u^1}=\dfrac{\partial^2\eta^2}{\partial x_b\partial u^2}=0$

и на функции F^1, F^2 получаем уравнения

$$\frac{\partial\eta^1}{\partial t}-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x_a\partial x_a}-\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x_{a+3}\partial x_{a+3}}-F^2\left(\frac{\partial\eta^2}{\partial u^2}-2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)-F^1\frac{\partial\eta^2}{\partial u^1}+\eta^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1}+\eta^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0, \qquad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial\eta^2}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\cdot\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x_a\partial x_a}+\frac{1}{2m_2}\cdot\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x_{a+3}\partial x_{a+3}}-F^1\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial u^1}-2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)-F^2\frac{\partial\eta^1}{\partial u^2}+\eta^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}+\eta^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0.$$

Решая систему (3.3.6) получаем

$$\xi^0=Cx_0^2+2Dx_0+d_0, \qquad (3.3.8)$$

$$\xi^a=Cx_0x_a+g_ax_0+Dx_a+C_{ab}x_b+\frac{1}{2m_1}\bar{\bar{C}}_{a,\bar b}\,y_{\bar b}+d_a\,,\quad a\neq b.$$

$$\xi^{a+3}=cy_a x_0+g_{a+3}x_0+\mathcal{D}y_a+\bar{C}_{ab}y_b+\frac{1}{2m_2}\bar{\bar{C}}_{a\bar{b}}x_{\bar{b}}+d_{a+3}\ ,\quad a\neq b$$

$$\eta=\left(c\left(-3x_0+im_1\frac{\vec{x}^2}{2}+im_2\frac{\vec{y}^2}{2}\right)+im_1 g_a x_a+im_2 g_{a+3}y_a+c_1\right)u+b\ .$$

Запишем уравнение (3.3.7) для операторов 31-мерной алгебры Ли группы Шредингера $Sch(1,6)$, которые получены из (3.3.8)

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\ P_A=-i\frac{\partial}{\partial x_A},\ \text{где}\ A=\overline{1,6},\ \frac{\partial}{\partial x_{a+3}}=\frac{\partial}{\partial y_a},\ P_{a+3}=-i\frac{\partial}{\partial y_a},$$

$$J_{AB}=x_A P_B-x_B P_A\ ,$$

$$J_{ab}=x_a P_b-x_b P_a\ ,\quad a\neq b.$$

$$J_{a+3,b+3}=y_a P_{b+3}-y_b P_{a+3}\ ,\quad a\neq b$$

$$\bar{J}_{a,b}=m_2 y_a P_b-m_1 x_b P_{a+3}\ ,$$

$$G_A=tP_A-Mx_A\ ,\qquad M\in\{m_1,m_2\}\ .$$

$$G_a=tP_a-m_1 x_a\ ,$$

$$G_{a+3}=tP_{a+3}-m_2 y_a\ ,$$

$$D=2iP_0-x_A P_A+3i\ ,$$

$$\tilde{A}=t(tP_0-x_A P_A+3i)+M\frac{\vec{x}_A^2}{2}\ ,\quad I=u\frac{\partial}{\partial u}\ ,$$

то есть

$$F^1+u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1}-u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0\ ,$$

$$5F^2-3u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^1}-3u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0,$$

$$F^2-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1}-u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$

$$5F^1-3u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}-3u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0.$$

Решая эту систему, находим

$$F^1=\lambda u^1\left[(u^1)^2+(u^2)^2\right]^{1/3},\quad F^2=\lambda u^2\left[(u^1)^2+(u^2)^2\right]^{1/3}$$ или

$$F(u)=\lambda u|u|^{2/3},$$

где λ – комплексное число.

2. Предположим, что уравнение (3.3.2) при $n=\alpha-1$

$$\left(P_0-\frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2-\frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)^{\alpha-1}+\lambda u|u|^{\frac{2(\alpha-1)}{4-(\alpha-1)}}=0$$

инвариантно относительно 3I-параметрической алгебры Шредингера $Sch(1,6)$.

3. Докажем, что при $n=\alpha$ уравнение (3.3.2) остается инвариантным относительно алгебры Шредингера. Выполняя вычисления, аналогичные случаю при $n=1$, получим для уравнения (3.3.2) при $n=\alpha$ следующую алгебру

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\quad P_A=-i\frac{\partial}{\partial x_A},$$

$$J_{AB}=x_A P_B-x_B P_A,$$

$$G_A=tP_A-Mx_A,\quad M\in\{m_1,m_2\}.$$

$$D=2tP_0-x_AP_A+(4-\alpha)i,$$

$$\tilde{A}=t\left[tP_0-x_AP_A+(4-\alpha)i\right]+M\frac{\vec{x}^2}{2},\quad I=u\frac{\partial}{\partial u}$$

а на $F(u)$ получаем следующую систему уравнений:

$$F^1+u^2\frac{\partial F^2}{\partial u^1}-u^1\frac{\partial F^2}{\partial u^2}=0,$$

$$(4+\alpha)F^1-(4-\alpha)u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1}-(4-\alpha)u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2}=0,$$

$$F^2 - u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^1} + u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^2} = 0,$$

$$(4+\alpha)F^1 - (4-\alpha)u^1\frac{\partial F^1}{\partial u^1} - (4-\alpha)u^2\frac{\partial F^1}{\partial u^2} = 0.$$

Из этой системы находим, что

$$F(u) = \lambda u|u|^{\frac{2n}{4-n}}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Точные решения уравнения Шредингера с потенциалом

В параграфе 2 главы II проведена групповая классификация потенциалов V для уравнения типа Шредингера порядка $2n$ вида

$$Lu \equiv (P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2)^n u + Vu = 0. \qquad (3.4.I)$$

А. В этом параграфе используя результаты главы II найдем точные решения уравнения (3.4.2)

$$(P_0 - \frac{1}{2m}\vec{P}^2)u + Vu = 0. \qquad (3.4.2)$$

Если $V = \frac{b}{m(\vec{x}^2)}$, то как показано в § 2 главы II, уравнение (3.4.2) инвариантно относительно алгебры $O(3) \oplus P_0$, где $u = u(t = x_0, x_1, x_2, x_3)$, b – постоянная. Инфинитезимальные преобразования, относительно которых инвариантно уравнение (3.4.2), задаются формулой

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon \xi^\mu(x),$$
$$U' = U + \varepsilon\eta, \qquad (3.4.3)$$

где $\xi^0 = d_0$, $\xi^a = C_{ab}x_b$, $\eta = bU$, $a,b=\overline{1,3}.$, $a\neq b$, $\mu=\overline{0,3}.$, $C_{ab}=-C_{ba}$, d_0 – параметры группы инвариантности уравнения (3.4.2), b – произвольная постоянная.

Решение уравнения (3.4.2) следуя [58] ищем в виде

$$U = \varphi(\omega)\cdot f(x), \qquad (3.4.4)$$

где $f(x)$ и $\omega=\omega(x)=\{\omega_1(x),\dots,\omega_q(x)\}$ – известные функции переменных x, φ – новая неизвестная функция, зависящая от ω, ω – инварианты преобразований (3.4.3).

В зависимости от соотношений между коэффициентами $C_{\mu\nu}$ и d_μ имеем несколько случаев

а) $\omega = x_i x_i$, $f(x) = e^{\frac{ia}{m}x_0}$.

Для функции $\varphi(\omega)$ получим уравнение

$$\omega^2\varphi_{\omega\omega} + \frac{3}{2}\omega\varphi_\omega + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\omega\right)\varphi = 0, \qquad (3.4.5)$$

которое преобразуется к уравнению Бесселя, $a, b - const$.
Решение уравнения (3.4.5) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \omega^{-\frac{1}{4}} Z_\nu \cdot 2\left(-\frac{a}{2}\omega\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = \frac{\sqrt{1-8b}}{2}, \quad a\neq 0.$$

где Z_ν – цилиндрическая функция. Учитывая соотношение (3.4.4), имеем решение уравнения (3.4.2):

$$U = (x_a x_a)^{-\frac{1}{4}} Z_\nu\left(2\left(-\frac{a}{2}x_a x_a\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot e^{\frac{ia}{m}x_0},$$

$$\nu = \frac{\sqrt{1-8b}}{2}, \quad a \neq 0.$$

б) $$\omega = x_a x_a, \quad f(x) = 1.$$

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$2\omega^2 \varphi_{\omega\omega} + 3\omega \varphi_\omega + b\varphi = 0$$

общее решение которого

$$\varphi = \begin{cases} C_1 \omega^\alpha + C_2 \omega^\beta & \text{при} \quad \alpha \neq \beta \\ \omega^\alpha (C_1 + C_2 \ln\omega) & \text{при} \quad \alpha = \beta \end{cases} \tag{3.4.6}$$

где α и β определяется из систем:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{b}{2}, \quad \alpha, \beta \in R. \end{cases}$$

Решение уравнения (3.4.2), полученное из (3.4.4) и (3.4.6) имеет вид

$$U = \begin{cases} C_1 (x_a x_a)^\alpha + C_2 (x_a x_a)^\beta & \text{при} \quad \alpha \neq \beta \\ (x_a x_a)^\alpha (C_1 + C_2 \ln(x_a x_a)) & \text{при} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Б. Уравнение (3.4.I) при $n=2$ и $V = \frac{b}{m^2 (\vec{x}^2)^2}$ переходит в

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m} \vec{P}^2\right)^2 U + \frac{b}{m^2 (\vec{x}^2)^2} U = 0. \tag{3.4.7}$$

Это уравнение 4-го порядка, инвариантное относительно алгебры $O(3) \oplus P_0$ – поворотов и переносов.

Решение уравнения (3.4.7) ищем в виде (3.4.4), где

а) $$\omega = x_a x_a; \quad f(x) = 1, \quad a = \overline{1,3}.$$

Для функции $\varphi(\omega)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$4\omega^4\varphi_{\omega\omega\omega\omega}+20\omega^3\varphi_{\omega\omega\omega}+15\omega^2\varphi_{\omega\omega}+b\varphi=0. \tag{3.4.8}$$

Заменой

$$\varphi=\omega^k$$

оно приводится к алгебраическому уравнению 4-го порядка.

$$k(k-1)(4k^2-1)+b=0 \tag{3.4.9}$$

Решая уравнение (3.4.9), находим k_1, k_2, k_3, k_4 и тогда решение уравнения (3.4.8) задается формулами

$$\varphi^1=\omega^{k_1},\ \varphi^2=\omega^{k_2},\ \varphi^3=\omega^{k_3},\ \varphi^4=\omega^{k_4}$$, если

k_α - действительные и различные.

При помощи (3.4.4) строим частные решения уравнения (3.4.7)

$$U=C_1|\omega|^{k_1}+C_2|\omega|^{k_2}+C_3|\omega|^{k_3}+C_4|\omega|^{k_4},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - постоянная интегрирования.

б) $\omega=x_a x_a$, $f(x)=e^{\frac{ia}{m}x_0}$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega^2a^2\varphi-a\omega^2(4\omega\varphi_{\omega\omega}+6\varphi_\omega)+4\omega^4\varphi_{\omega\omega\omega\omega}+20\omega^2\varphi_{\omega\omega\omega}+15\omega^2\varphi_{\omega\omega}+b\varphi=0.$$

В. Рассмотрим задачу о нахождении точных решений уравнения четвертого порядка вида:

$$\lambda_1 SU+\lambda_2 S^2U+VU=0, \tag{3.4.10}$$

где

$S=P_0-\frac{1}{2m}\vec{P}^2$ - оператор Шредингера, $U=U(t=x_0,x_1,x_2,x_3)$

В параграфе 5 главы II рассмотрена обратная задача, т.е. задача о нахождении линейного дифференциального уравнения 4-го порядка, инвариантного относительно группы Галилея и показано, что такое уравнение имеет следующую структуру:

$$\lambda_1 SU + \lambda_2 S^2 U = 0.$$

Используя этот факт и следуя [57], нетрудно показать, что уравнение (3.4.10) при

$$V = \lambda_2 \frac{b}{2m^2(x_1^2+x_2^2+x_3)^2}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \frac{1}{2m(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$$

инвариантно относительно преобразований из $O(3) \oplus P_0$. В этом случае уравнение (3.4.10) имеет вид:

$$\frac{1}{2m\omega} SU + S^2 U + \frac{b}{2m^2\omega^2} = 0. \tag{3.4.11}$$

Теперь найдем точные решения этого уравнения. Решение ищем в виде (3.4.3), где

$$\omega = x_a x_a, \quad a = 1,2,3., \quad f(x) = 1.$$

Тогда для функции $\varphi(\omega)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка:

$$8\omega^4 \varphi^{(4)} + 40\omega^3 \varphi^{(3)} + 32\omega^2 \varphi^{(2)} + 3\omega \varphi_\omega + b\varphi = 0.$$

При помощи замены $\varphi = \omega^k$, решение этого уравнения сводится к нахождению корней характеристического уравнения

$$8k^3(k-1) + 3k + b = 0.$$

Решая это уравнение находим k_1, k_2, k_3, k_4 при помощи формулы (3.4.4) находим частные решения уравнения (3.4.II). т.е.

$$U = C_1|\omega|^{K_1} + C_2|\omega|^{K_2} + C_3|\omega|^{K_3} + C_4|\omega|^{K_4},$$

где $\omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $K \in R^1$, $K_\alpha \neq K_\beta$.

Г. В заключение этого параграфа рассмотрим задачу о нахождении точных решений следующего уравнения типа Шредингера для двух частиц второго порядка с потенциалом V:

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)U + V(\vec{x}, \vec{y})U = 0, \tag{3.4.I2}$$

где

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_{x_a} = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{y_a} = -i\frac{\partial}{\partial y_a}, \quad a = 1,2,3.$$

$$U = U(t = x_0, \vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

m_1, m_2 – массы частиц.

В параграфе 6 главы II исследована групповая структура уравнения (3.4.I2) и указаны все потенциалы V, при которых уравнение остается инвариантным относительно подгруппы 3I-параметрической группы Шредингера. В частности, показано, что при

$$V = \frac{2b}{m_1 r_x^2 + m_2 r_y^2}$$ уравнение (3.4.I2)

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_x^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_y^2\right)U + \frac{2b}{m_1 r_x^2 + m_2 r_y^2}U = 0 \tag{3.4.I3}$$

инвариантно относительно алгебры $O(6) \oplus P_0$, где b – произвольное действительное число. Точное решение уравнения (3.4.I3) ищем по известной формуле (3.4.4), где

$$\omega = m_1 r_x^2 + m_2 r_y^2, \quad f(x, y) = 1.$$

Подставив в уравнение (3.4.13) выражение (3.4.4), получаем уравнение Эйлера для функции φ

$$\omega^2 \varphi_{\omega\omega} + 3\omega\varphi_\omega + b\varphi = 0. \qquad (3.4.14)$$

При помощи замены

$$\varphi = \omega^k$$

получаем характеристическое уравнение для уравнения (3.4.14)

$$k^2 + 2k + b = 0.$$

Решая его, находим k_1, k_2. Общее решение уравнения (3.4.14) имеет вид

$$\varphi(\omega) = C_1|\omega|^{k_1} + C_2|\omega|^{k_2}, \quad k \in R^1, \quad k_\alpha \neq k_\beta.$$

Отсюда получаем, что частные решения рассматриваемого уравнения (3.4.13) следующие:

$$U = C_1|m_1 r_x^2 + m_2 r_y^2|^{k_1} + C_2|m_1 r_x^2 + m_2 r_y^2|^{k_2}.$$

Таким образом, в этом параграфе используя результаты главы II мы нашли частные решения уравнения типа Шредингера с потенциалом V.

§ 5. Частные решения нелинейного параболического уравнения, инвариантного относительно группы Галилея

В параграфе I главы III исследованы групповые свойства уравнения вида

$$\left(P_0-\frac{1}{2m}\vec{P}^2\right)^n u + F(u,\underset{1}{u})=0, \tag{3.5.1}$$

где $\underset{1}{u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Показано, что это уравнение при произвольной функции

$$F(u,\underset{1}{u})=F\left(u\bar{u},\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u$$

инвариантно относительно алгебры Галилея $G(1,3)$.

I. Используя этот факт рассмотрим задачу о нахождении точных решений уравнения (3.5.I) при $n=1$ и

$$F(u,\underset{1}{u})=F\left(u\bar{u},\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u \quad \text{, т.е.}$$

$$\left(P_0-\frac{1}{2m}\vec{P}^2\right)u+F\left(u\bar{u},\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u=0, \tag{3.5.2}$$

где $u=u(t=x_0,\vec{x})$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$.

Решение уравнения (3.5.2) ищем в виде (3.4.4). Не вдаваясь в подробности решения системы (3.5.2), выпишем явный вид функций $f(x)$ и инварианта $\omega=\omega(x)$. В зависимости от соотношений между $C_{\mu\nu}$ и d_μ, как и в предыдущих параграфах этой главы, имеем несколько случаев.

Случай I.

$$\omega=x_0, \quad f(x)=e^{\frac{im}{2}\cdot\frac{x_a x_a}{x_0}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.5.2), для функции $\varphi(\omega)$ имеем уравнение

$$i\varphi_\omega + \frac{3i}{2\omega}\varphi + F\left(u\bar{u}, \frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)\varphi = 0. \qquad (3.5.3)$$

Если в уравнении (3.5.2) функции F выберем в виде произведения двух функций, т.е.

$$F\left(u\bar{u}, \frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u = Q(u\bar{u})\cdot\mathcal{N}\left(\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\right)u,$$

тогда уравнение (3.5.3) приобретет вид

$$i\varphi_\omega + \frac{3i}{2\omega}\varphi + Q(\varphi^2)\cdot\mathcal{N}(0)\cdot\varphi = 0. \qquad (3.5.4)$$

а). $\mathcal{N}(0) = 0$. В этом случае решение уравнения (3.5.4) имеет вид

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{x_0^3}}$$, где C – постоянная.

Решение уравнения (3.5.2) можно записать в виде

$$u = \frac{C}{\sqrt{x_0^3}}\cdot e^{\frac{im}{2}\cdot\frac{x_a x_a}{x_0}}. \qquad (3.5.5)$$

б). $\mathcal{N}(0) \neq 0 - const$. Функция $\varphi(\omega)$ действительна и удовлетворяет уравнению

$$i\varphi_\omega + \frac{3i}{2\omega}\varphi + C\cdot Q(\varphi^2)\varphi = 0, \qquad (3.5.6)$$

где $C = i\tilde{C}$, $\tilde{C} \in R^1$

Выберем функцию $Q(\varphi^2)$ следующим образом

$$Q(\varphi^2) = \varphi^{2n}$$

Тогда из (3.5.6) мы получим для φ обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\varphi_\omega + \frac{3}{2\omega}\varphi + \varphi^{2n+1} = 0,$$

общее решение которого задается формулой

$$\varphi = \left(\frac{2n}{1-3n}\omega + C_1\omega^{3n}\right)^{-\frac{1}{2n}}.$$

Решением уравнения (3.5.2) являются функции

$$U = \left(\frac{2n}{1-3n}x_0 + C_1 x_0^{3n}\right)^{-\frac{1}{2n}} e^{\frac{im}{2}\cdot\frac{x_\alpha x_\alpha}{x_0}}.$$

Случай 2.

$$\omega = x_1, \quad f(x) = e^{i\alpha m x_0}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\frac{1}{2m}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \alpha m\varphi + Q(\varphi^2)\cdot N\left(4\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right)\varphi = 0$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \Psi(\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2\alpha m^2\varphi = 0, \tag{3.5.7}$$

где

$$\Psi(\varphi) = 2mQ(\varphi^2)\cdot 4\varphi^3, \quad N(A) = A, \quad \alpha = -\beta,$$

$\varphi(\omega)$ – действительная функция.

Заменой

$$P(\varphi) = \varphi'(x_1), \quad \varphi'(x_1) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \tag{3.5.8}$$

уравнение (3.5.7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $P(\varphi)$:

$$P' + f(\varphi)P = -b\varphi P^{-1},$$

общее решение которого задается формулой

$$P(\varphi) = \pm\left\{-4\beta m^2 e^{-2\int f(\varphi)d\varphi}\int \varphi e^{2\int f(\varphi)d\varphi} d\varphi + c^1 e^{-2\int f(\varphi)d\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При помощи формулы (3.5.8) и (3.4.4) находим решение уравнения (3.5.2)

$$U = \pm \exp\{i\beta m t\}\left\{\int\left[-4\beta m^2 e^{-2\int f(\varphi)d\varphi}\int \varphi e^{2\int f(\varphi)d\varphi} d\varphi + c_1 e^{-2\int f(\varphi)d\varphi}\right]^{\frac{1}{2}} dx_1 + C_2\right\}.$$

Случай 3.

$$\omega(x) = \alpha_\nu x^\nu, \quad f(x) = e^{im\beta_\nu x^\nu}, \tag{3.5.9}$$

где $A_\nu B^\nu = A_0 B_0 - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)$, α_ν, β_ν – произвольные постоянные, причем $\alpha_a \beta_a = -\alpha_0$.

Используя явные выражения (3.5.9) для ω и $f(x)$, уравнение (3.5.2) перепишем в виде

$$\frac{\alpha_a \alpha_a}{2m}\varphi_{\omega\omega} - m\left(\beta_0 + \frac{\beta_a \beta_a}{2}\right)\varphi = \Phi(\varphi^2, 4\alpha^2 \varphi_\omega^2)\varphi,$$

где $\alpha^2 = \alpha_a \alpha_a$, $F = \Phi\left(u\bar{u}, \dfrac{\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}\frac{\partial(u\bar{u})}{\partial x_a}}{u\bar{u}}\right)$, φ – действительная функция, или

$$\varphi_{\omega\omega} = \gamma\left(\varphi^2, (\varphi^2)_\omega\right)\varphi, \tag{3.5.10}$$

где

$$\mathcal{H}(\varphi^2, (\varphi^2)_\omega) = \frac{\Phi + m\left(\beta_0 + \frac{\beta_a \beta_a}{2}\right)}{\frac{\alpha_a \alpha_a}{2m}}.$$

Сделав замену

$$\varphi_\omega = \psi(\varphi)\,, \quad \varphi^2 = X\,, \qquad (3.5.11)$$

$$\varphi_{\omega\omega} = \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\,, \quad \psi^2 = Y$$

уравнение (3.5.10) приведем к виду

$$Y' = \mathcal{H}(X, Y). \qquad (3.5.12)$$

Уравнение (3.5.12) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. С помощью замены (3.5.11) можно построить целый класс точных решений уравнения (3.5.9) по известным решениям уравнения (3.5.12), зависящий от вида функции $\mathcal{H}$. Другими словами, от нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных (3.5.2), с помощью замены переменных пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка (3.5.12).

Для примера в уравнении (3.5.12) выберем несколько конкретных функций $\mathcal{H}(X, Y)$, а значит, и функций F. В этих случаях построим несколько решений уравнения (3.5.2).

а) $$\mathcal{H}(X, Y) = -2XY^2 \qquad (3.5.13)$$

Решение нелинейного уравнения (3.5.12). (3.5.13) имеет вид

$$Y = \frac{1}{X^2 + C_1}.$$

При помощи замены (3.5.11) находим φ :

$$\varphi(\omega)=\left(\pm 3\omega+C_2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.4.4), имеем

$$U=\left(\pm 3\alpha_\nu x^\nu+C_2\right)^{\frac{1}{3}}\exp\{im\beta_\nu x^\nu\}$$ – частное решение

дифференциального уравнения (3.5.2) при условии (3.5.13).

б) $$\mathcal{H}(X,Y)=\lambda\frac{X^k}{Y^n}, \qquad (3.5.14)$$

где λ – постоянные, k и n – натуральные числа. Решая нелинейное дифференциальное уравнение (3.5.12), (3.5.14) с помощью замены (3.5.11) находим φ, т.е.

$$\varphi(\omega)=\left\{\frac{r(n-k)}{n+1}\omega+C\right\}^{\frac{n-k}{n+1}},$$

где

$$r=\left(\lambda\frac{n+1}{k+1}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}}$$, C – постоянная интегрирования.

Подставляя найденное выражение для $\varphi(\omega)$ в формулу (3.4.4), находим частное решение уравнения (3.5.2), т.е.

$$U=\left\{\frac{r(n-k)}{n+k}(\alpha_\nu x^\nu)+C\right\}^{\frac{n-k}{n+k}}\exp\{im\beta_\nu x^\nu\}.$$

II. В заключение этого параграфа рассмотрим случай уравнения (3.5.2) при $F=\Phi(U\bar{U})$:

$$\left(P_0-\frac{1}{2m}\vec{P}^2\right)U=\Phi(U\bar{U})U, \qquad (3.5.15)$$

где

$U=U(t=x_0,x_1,x_2,x_3)$, и найдем несколько его точных решений.

а) $$\omega=\alpha_\nu x^\nu, \quad f(x)=e^{im\beta_\nu x^\nu}, \tag{3.5.16}$$

где α_ν и β_ν – произвольные постоянные, причем $\alpha_0+\alpha_a\beta_a=0$. Используя явные выражения (3.5.16) для ω и $f(x)$ уравнение (3.5.15) запишем в виде

$$\frac{1}{2m}\alpha_a\alpha_a\varphi_{\omega\omega}-m\left(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_a\beta_a\right)\varphi=\Phi(\varphi^2)\varphi \tag{3.5.17}$$

или

$$\varphi_{\omega\omega}=\mathcal{X}(\varphi^2)\varphi, \tag{3.5.18}$$

где

$$\mathcal{X}(\varphi^2)=\frac{2m}{\alpha_a\alpha_a}\left[\Phi(\varphi^2)+m\left(\beta_0+\frac{m}{2}\beta_a\beta_a\right)\right].$$

Сделаем замену

$$\varphi_\omega=\psi(\varphi^2). \tag{3.5.19}$$

Тогда уравнение (3.5.18) принимает вид

$$2\psi\frac{\partial\psi}{\partial y^2}=\mathcal{X}(\varphi^2). \tag{3.5.20}$$

Очередной заменой

$$\psi^2(\varphi^2)=Y, \quad \varphi^2(\omega)=X \tag{3.5.21}$$

уравнение (3.5.22) приводится к виду

$$\frac{dY}{dX}=\mathcal{X}(X). \tag{3.5.22}$$

Таким образом, благодаря симметрии, задача о нахождении решения уравнения (3.5.15) свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Найдем частное решение уравнения (3.5.I7). Перепишем уравнение (3.5.I7) в таком виде

$$\frac{1}{2m}\varphi_{\omega\omega}-\ell m\varphi=\frac{1}{\alpha_a\alpha_a}\Phi(\varphi\bar{\varphi})\varphi, \tag{3.5.23}$$

где

$\ell=\dfrac{(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_a\beta_a)}{\alpha_a\alpha_a}$, $\Phi(\varphi\bar{\varphi})$ — произвольная функция.

Выберем $\Phi(\varphi\bar{\varphi})=|\varphi|^n$, тогда уравнение (3.5.22) сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядкам

$$\frac{1}{2m}\varphi_{\omega\omega}-\ell m\varphi=\lambda\varphi|\varphi|^n, \tag{3.5.24}$$

где $\lambda=\dfrac{1}{\alpha_a\alpha_a}$. При $\ell<0$ и $\lambda<0$ существует частное решение уравнения (3.5.24)

$$\varphi=C_1\exp\left\{i\omega\sqrt{2m^2|\ell|+2m|\lambda|C_1^n}+C_2\right\},$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. С помощью формулы (3.4.4) находим частное решение уравнения (3.5.24):

$$U=C_1\exp\left\{i\left[\alpha_\nu x_\nu\sqrt{2m^2|\ell|+2m|\lambda|C_1^n}+m_1\beta_\nu x^\nu+C_2\right]\right\}.$$

б). Рассмотрим уравнение (3.5.I5) в пространстве n переменных

$$\omega=x_0, \quad f(x)=e^{\frac{im}{2}\cdot\frac{x_a x_a}{x_0}}, \quad a=\overline{1,n-1}.$$

После подстановки выражения (3.4.4) для ω и $f(x)$ в уравнение (3.5.15) получим обыкновенное дифференциальное уравнение для φ:

$$i\varphi_\omega + \frac{in}{2\omega}\varphi = \Phi(\varphi^2)\varphi .$$

При $\Phi(\varphi^2) = i(\varphi)^{K-1}$ получим

$$\varphi_\omega + \frac{n}{2\omega}\varphi = \varphi^K. \tag{3.5.25}$$

Общее решение этого нелинейного уравнения имеет вид

$$\varphi = \left\{ \frac{2(1-K)}{n(1-K)+2}\,\omega + \tilde{C}\,\omega^{\frac{n(K-1)}{2}} \right\}^{\frac{1}{1-K}} .$$

Подставляя это решение в выражение (3.4.4), находим точное решение уравнения (3.5.15):

$$U = \left\{ \frac{2(1-K)}{n(1-K)+2}\,x_0 + \tilde{C}\,x_0^{\frac{n(K-1)}{2}} \right\}^{\frac{1}{1-K}} \exp\left\{ \frac{im}{2}\cdot\frac{x_a x_a}{x_0} \right\}.$$

З а м е ч а н и е 3.5.1. Как было показано в параграфе 3 главы III, квазилинейное уравнение типа Шредингера для системы двух частиц

$$\left(P_0 - \frac{1}{2m_1}\vec{P}_a^2 - \frac{1}{2m_2}\vec{P}_{a+3}^2\right)U + \lambda U|U|^{2/3} = 0, \tag{3.5.26}$$

где

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{a+3} = -i\frac{\partial}{\partial y_a}, \quad U = U(t = x_0, \vec{x}, \vec{y}),$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, m_1, m_2 – массы частиц,

λ-const, инвариантно относительно 3I-параметрической группы $Sch(1,6)$.

Используя это и поступая аналогично тому, как это сделано в параграфе 5 главы III, нетрудно получить частное решение нелинейного уравнения (3.5.26)

$$u=\left(cx_0^2-\frac{2}{3}x_0\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{im_1}{2}\cdot\frac{x_a x_a}{x_0}+\frac{im_2}{2}\cdot\frac{y_a y_a}{x_0}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Аронсон Э.Б., Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии в квантовой теории. - ЭЧАЯ, 1974, т.5, вып.I, с.122-171.

2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, 1966. - 543 с.

3. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. - М.: Мир, 1980, I-2 т.

4. Батыров С. Групповая классификация потенциалов для линейного дифференциального уравнения порядка $2n$. - В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев, 1981, с.68-73.

5. Батыров С. О группе симметрии нелинейного параболического уравнения порядка $2n$. - В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев, 1981, с.119-124.

6. Батыров С. О группе симметрии параболического уравнения высокого порядка. - В кн.: Приближенные методы математического анализа. - Киев, 1982, с.7-11.

7. Батыров С. О группах инвариантности параболических систем уравнений. - В кн.: Приближенные методы математического анализа. - Киев, 1982, с.11-14.

8. Батыров С. О максимальной алгебре инвариантности обобщенного уравнения Шредингера двух частиц с потенциалом. - В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. - Киев, 1982, с.115-117.

9. Батыров С. О квазилинейном уравнении Шредингера для системы из двух частиц. - В кн.: Теоремы Тауберова типа и дифферен-

циальные уравнения с малым параметром. – Киев, 1983, с.8–11.

10. Бицадзе А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных. – Диф. ур-ния. 1977, 13, № 11, с.1994.

11. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд.-во АН СССР, 1959, 164 с.

12. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. – М.: Наука, 1980. – 319 с.

13. Ван дер Варден В.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. – 648 с.

14. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. ИЛ, М., 1947. – 408 с.

15. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.

16. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применение. – М.: Физматгиз, 1958. – 368 с.

17. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 37 с.

18. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Гостехиздат. 1934. – 360 с.

19. Дирак П.А. Принципы квантовой механики. – М.: Физматгиз, 1960. – 434 с.

20. Желудев И.С. Симметрия и ее приложения. – М.: Атомиздат, 1976. – 288 с.

21. Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. – 60 с.

22. Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака. – ДАН СССР, 1969, 185, № 6, с.1226–1228.

23. Ибрагимов Н.Х. Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения. ТМФ, 1969, 1, № 3, с.350-359.

24. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. - Новосибирск. гос.ун-т, 1972. - 159 с.

25. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Л. Группы касательных преобразований Ли-Бэклунда. - ДАН СССР, 1976, 227, № 3, с.539-542.

26. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576.

27. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. Изд. Наука. - М., 1972. - 239 с.

28. Каплан И.Г. Симметрия многоэлектронных систем. - М.: Наука, 1969. - 408 с.

29. Кошляков Н.С., Глинер Э.В., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 710 с.

30. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. - 830 с.

31. Курбатов А.М., Зданьски А.К. Вариационный принцип для систем с бесконечным числом степеней взаимодействия и двусторонние оценки для разности свободных энергий модельного и аппроксимирующего гамильтонианов. Ин-т физ. АН АзССР, Препр., 1979, № 4. - 13 с.

32. Москалюк С.С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения Шредингера. - Укр.физ.жур., 1981, 26, № 6, с.1045-1046.

33. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 344 с.

34. Наймарк М.А. Теория представлений групп. – М.: Наука, 1976. – 560 с.
35. Никитин А.Г., Наконечный В.В. Об алгебрах инвариантности уравнений Дирака и Шредингера. – Укр.физ.журн., 1980, 24, № 4, с.618–621.
36. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений.–Новосибирск. СО АН СССР. 1972. – 239 с.
37. Овсянников Л.В. Аналитические группы. – НГУ, 1972. – 237 с.
38. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
39. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений механики. – В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – М.: Наука, 1972, с.381–393.
40. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. – 132 с.
41. Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ дифференциальных уравнений механики. – В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. – М., 1975, 2, с.5–52.
42. Овсянников Л.В. Частичная инвариантность. – ДАН СССР, 1969, 186, № 1, с.22–25.
43. Петрашень М.И., Трифонов Е.Д. Применение теории групп в квантовой механике. – М.: Наука, 1967. – 307 с.
44. Поливанов М.К. и др. Построение модели теории поля на основе условия унитарности. – К.: 1968, ИТФ, Препринт № 43.
45. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Гостехиздат, 1954. – 513 с.
46. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованые поля. – М.: Наука, 1977. – 248 с.

47. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
48. Сегеда Ю.Н. Теоретико-групповые свойства некоторых уравнений релятивистской квантовой механики. Автореф.дис. на соиск.учен.степени канд.физ.-мат.наук. – Киев, 1977. – 15 с. В надзаг.: Институт математики АН УССР.
49. Сегеда Ю.Н., Редченко Г.А. Об инвариантности уравнений ньютоновской механики относительно преобразований из группы Шредингера. – В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике. – Киев, 1978, с.176-180.
50. Серов Н.И. Групповые свойства и точные решения нелинейных гиперболических уравнений: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд.физ.-мат.наук. – Киев, 1982. – 12 с. В надзаг.: Институт математики АН УССР.
51. Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. – Кишинев, Изд. "Штиница", 1976. – 268 с.
52. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 467 с.
53. Теоретико-групповые методы в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – 188 с.
54. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – 135 с.
55. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
56. Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера . – Киев, 1978. – 36 с. (Препринт, 78.18, Ин-т математики АН УССР).
57. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств

систем дифференциальных уравнений в частных производных. – В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике. – Киев, 1978, с.5–44.

58. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев, 1981, с.6–28.

59. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. – ДАН СССР, 1979, 246, № 4, с.846–850.

60. Фущич В.И. Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики. – В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наукова думка, 1977. – с.238–246.

61. Фущич В.И., Никитин А.Г. Групповые свойства уравнений Максвелла. – В кн.: Теоретико-групповые методы математической физики. – Киев, 1978, с.45–80.

62. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики. – Укр. мат.журн., 1976, 28, № 6, с.844–849.

63. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера. – ДАН СССР, 1977, 232, № 4, с.800–801.

64. Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда. – ДАН СССР, 1982, 263, с.582–586.

65. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С. О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений. – В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентября 1981 г.): Тез.докл. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.338–339.

66. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. – М.: Мир, 1966. – 588 с.

67. Хоружий С.С. Квазилокальность одного класса неперенормируемых взаимодействий. – К., ИТФ, 1968, Препринт № 22,

68. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. – М.: Гостехиздат, 1949. – 396 с.

69. Чеботаревский Б.Л. Некоторые глобальные аспекты теории групповых свойств дифференциальных уравнений (на примере уравнений теплопроводности на сфере). – Тр.Международного симпозиума "Теоретико-групповые методы в механике", СССР. Новосибирск, 1978. с.285–291.

70. Чиркунов Ю.А. О групповых свойствах уравнения Дарбу. – В кн.: Динамика сплошной среды, 1977, № 27, с.101–105.

71. Штелень В.М. Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантной относительно группы Шредингера. – В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.104–107.

72. Штрайтвольф Г. Теория групп в физике твердого тела. – М.: Мир, 1971. – 262 с.

73. Эйзенхарт Л. Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 358 с.

74. Ames W.F. Nonlinear partial differential equatian. – New-York, London. Vol. I (1965), vol II (1972) A-P.

75. Boyer C.P. Symmetries of differential equations in mathematical physics. – Lect. Notes Phys., 1976, vol 50, p.425-434.

76. Boyer C.P. The Maximal „Kinematical" Invariance Croup for on Arbitrary Potential. – Helv.

Phys. Acta, 1974, Vol 47, fosc 5, p. 589-604.
77. Boyer C.P., Kalnins E. G. Symmetries of the Hamilton-Jacobi equation.- J. Math. Phys., 1977, Vol. 18, No. 15, p. 1032-1045.
78. Boyer C.P., Peñafiel M. Conformal Symmetry of the Hamilton-Jacobi Equation and Quantization - Nouvo Cim., 1976, Vol. 31B No. 2, p. 195-210.
79. Fushchich W.J., Moskaliuck S.S. On som exact solutions of the nonlinear Schrodinger equation in three spatial dimensians - Lett. Nuovo. Cimm., 1981, 31, No. 6, p. 571-576.
80. Fushchich W.J. On Additional Invariance of the Dirac and Maxwell Equatians - Let. Nuovo Cim., 1974, Vol. 11, No. 10, p. 508-512.
81. Fushchich W.J., Nikitin A.G. On the New Invariance Group of the Dirac and Kemmer-Duffin-Petiau Equations.- Let. Nuovo Cim., 1977, Vol. 19, No. 9, p 347-352.
82. Lévy-Leblond J.M. Galilei Group and Nonrelativistic Quantum Mechanics.- J. Math. Phus., 1963. Vol. 4, p 776-778.
83. Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten.- Math. Annalen, 1885, Bd. 25, No. 1, S. 71-151.