Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису
УДК 517.42:519.46

БОЙКО Вячеслав Миколайович

СИМЕТРІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ТИПУ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
член–кореспондент НАН України,
доктор фіз–мат наук, професор
ФУЩИЧ В. І.

Київ – 1995

Зміст

Вступ

Більшість фізичних систем та процесів підпорядковані тим чи іншим законам (властивостям) регулярності або симетрії. Тому природно, що диференціальні рівняння, які моделюють конкретні фізичні процеси, також мають широку симетрію. Більш того, наявність широкої симетрії може бути одним з критеріїв вибору оптимальної математичної моделі серед деякої множини рівнянь

Груповий аналіз диференціальних рівнянь виник як науковии напрямок в працях норвежзького математика Софуса Лі [71, 72]. Він заклав основи теорії інтегрування диференціальних рівнянь, яка базується на понятті неперервної групи.

Вивчення групи перетворень, відносно якої інваріантна фізична система, дає можливість отримати важливу інформацію про систему без побудови точних розв'язків рівнянь, що її описують. Закони збереження, розмноження розв'язків, анзаци, методи розділення змінних — всі ці поняття і методи базуються на симетрійних властивостях відповідного диференціального рівняння. Особливу актуальність, ефективність набувають методи симетрійного аналізу для нелінійних рівнянь, для яких важко або неможливо використати класичний апарат математичної фізики.

Сучасне викладення теорії Лі і її застосувань для дослідження диференціальних рівнянь дано в монографіях [19, 27, 29, 50].

Поряд з класичним методом Лі в останній час широко розробляються нові методи симетрійного аналізу:

- нелокальні симетрії Лі–Беклунда [19, 54];
- негеометричні симетрії [44];
- дискретна симетрія [11, 43];
- умовна симетрія [50], ...

Принципи відносності Галілея, Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна також формулюються в теоретико–групових термінах. Якщо диференціальне рівняння інваріантне відносно групи Галілея або групи Пуанкаре, то для нього буде виконуватись один з принципів відносності. В останній період інтенсивно розвивається теорія зображень різних алгебраїчних структур (їх класифікація, нелінійні зображення) [43, 66].

Коротко сформулюємо основні поняття та визначення, що використовуються в дисертаційній роботі.

Нехай

$$L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0 \tag{0.1}$$

система диференціальних рівнянь в частинних похідних r–го порядку, де $u = u(x)$; $x = (x_0, \vec{x})$; $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$; $u \in \mathrm{R}^m$; $\underset{k}{u}$ – сукупність похідних k–го порядку функції u; $k = \overline{1, r}$; $k, n, m, r \in \mathrm{N}$.

Визначення 0.1 *Група Лі перетворень виду*

$$\begin{aligned} \widetilde{x_\mu} &= f^\mu(x, u, \theta), \quad \mu = \overline{0, n}, \\ \widetilde{u^k} &= g^k(x, u, \theta), \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

де $\theta = (\theta_b, b = \overline{1, l})$, називається l–параметричною групою інваріантності рівняння (0.1), якщо множина розв'язків (0.1) інваріантна відносно перетворень (0.2).

Визначення 0.2 *Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори виду*

$$X_b = \xi_b^\mu(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta_b^k(x, u)\partial_{u^k}, \qquad b = \overline{1, l} \tag{0.3}$$

де

$$\xi_b^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial \theta_b}\bigg|_{\theta = 0}, \qquad \eta_b^k = \frac{\partial g^k}{\partial \theta_b}\bigg|_{\theta = 0}, \tag{0.4}$$

з введеною операцією комутування

$$X_a,\ X_b \to [X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a.$$

Між групою Лі перетворень (0.2) і її алгеброю Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Для того щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі неохідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^{\mu}}{\partial \theta_b} = \xi^{\mu}_b(f,g), \quad \frac{\partial g^k}{\partial \theta_b} = \eta^k_b(f,g), \\ &f^{\mu}|_{\theta=0} = x_{\mu}, \qquad g^k|_{\theta=0} = u^k. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності рівняння (0.1).

Теорема 0.1 *Диференціальний оператор*

$$X = \xi^{\mu}(x,u)\partial_{x_{\mu}} + \eta^k(x,u)\partial_{u^k}$$

є оператором інваріантності (0.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\underset{r}{X} L\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right)\Bigg|_{L=0} \equiv 0, \tag{0.6}$$

де $\underset{r}{X}$ *— r—е продовження оператора X, яке будується по формулам*

$$\begin{aligned} &\underset{r}{X} = X + \zeta^k_{i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + \zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}\partial_{u^k_{i_1 i_2 \cdots i_r}}, \\ &\zeta^k_{i_1} = D_{i_1}(\eta^k) - u^k_j D_{i_1}(\xi^j), \\ &\zeta^k_{i_1 i_2} = D_{i_2}(\zeta^k_{i_1}) - u^k_{i_1 j} D_{i_2}(\xi^j), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\zeta^k_{i_1 i_2 \cdots i_r} = D_{i_r}(\zeta^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}) - u^k_{i_1 i_2 \cdots i_{r-1} j} D_{i_r}(\xi^j), \\ &D_i = \partial_{x_i} + u^k_i \partial_{u^k} + u^k_{i i_1}\partial_{u^k_{i_1}} + \cdots + u^k_{i i_1 \cdots i_{r-1}}\partial_{u^k_{i_1 \cdots i_{r-1}}}, \\ &i, i_1, \ldots i_r, j = \overline{0,n}, \qquad k = \overline{1,m}\,. \end{aligned}$$

Записавши (0.6) в розгорнутому вигляді, після розщеплення по похідним, отримуємо систему лінійних рівнянь в частинних похідних (систему визначальних рівнянь) відносно координат ξ, η оператора X, загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівняння (0.1).

Використовуючи формули (0.5), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Визначення 0.3 *Скалярна функція $F(x, u)$ називається абсолютним інваріантом групи (0.2), якщо*

$$F\left(f^{\mu}(x, u, \theta), g^{k}(x, u, \theta)\right) = F(x, u).$$

Теорема 0.2 *$F(x, u)$ є інваріантом групи (0.2) тоді і тільки тоді, коли*

$$\xi_b^{\mu}\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} + \eta_b^{k}\frac{\partial F}{\partial u^{k}} = 0, \quad b = \overline{1, l}.$$

Використовуючи поняття інваріантності, розв'язується задача опису диференціальних рівнянь, які є інваріантними відносно даної групи [50, 29, 27], будуються широкі класи інваріантних розв'язків (алгоритм редукції та знаходження розв'зків дивись детальнше [50, 29]).

В дисертаційній роботі також використовується поняття умовної інваріантності [50, 62]. Нехай Q – деякий оператор першого порядку, який не належить алгебрі інваріантності (0.1).

Визначення 0.4 *[50] Система (0.1) – умовно інваріантна відносно оператора Q, якщо існує деяка додаткова умова*

$$L_1\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{s}{u}\right) = 0, \tag{0.7}$$

коли (0.1) разом з (0.7) інваріантна відносно Q.

Додаткова умова (0.7) виділяє з множини розв'язків (0.1) деяку підмноживу розв'язків, що є інваріантною відносно оператора Q.

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей нелінійних рівнянь гідродинамічного типу як для скалярних та векторних полів, вивченню та побудові нелінійних зображень, зокрема, алгебр Галілея та Пуанкаре. Запропоновані низка нелінійних рівнянь, що допускають широкі алгебри інваріантності, в тому числі рівняння, на множині розв'язків яких реалізуються нелінійні зображення деяких алгебр Лі.

Дисертація складається з вступу, трьох розділів, додатку, висновків та списку літератури. Коротко опишемо структуру та зміст даної дисертації.

Перший розділ присвячений дослідженню одновимірних рівнянь дифузійного типу високого порядку. В першому параграфі вводяться в розгляд рівняння виду $u_t + u u_{x\cancel{x}} = F(u_{xx}, u_{xxx}, \ldots)$. Проведена симетрійна класифікація, побудовані нові нелінійні рівняння, що допускають широкі алгебри інваріантності, в тому числі алгебри з нелінійними зображеннями, побудовані деякі класи точних розв'язків. В другому параграфі проведена симетрійна класифікація узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза. В третьому параграфі описано одновимірні рівняння другого порядку, на множині розв'язків яких реалізується зображення узагальненої алгебри Галілея.

В другому розділі проведена симетрійна класифікація деяких нелінійних рівнянь та систем гідродинамічного типу. В першому параграфі розглядається одновимірне рівняння $L(Lu) + \lambda Lu = F(u)$, $L = \partial_t + u\partial_x$. Досліджена симетрія даного рівняння. Побудовані нові, нелінійні зображення алгебр Лі, в тому числі нелінійні розширення алгебри Галілея. Для $F(u) = const$ вказано заміну змінних, яка дає можливість побудувати загальний розв'язок. В другому параграфі узагальнено результати першого параграфа на випадок багатовимірної системи гідродинамічного типу. В третьому параграфі проведена симетрійна класифікація нелінійної моделі розповсюдження коротхвильових збурень в релаксуючому середовищі. В четвертому параграфі досліджена симетрія деяких одновимірних систем гідродинамічного типу.

В третьому розділі досліджуються нелінійні рівняння та будуються деякі нелінійні зображення алгебр Пуанкаре та Галілея для електромагнітного поля. В першому параграфі побудовані нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея для вектор–потенціалу з нелінійними операторами дилатації, наводяться рівняння, на множині розв'язків яких реалізуються дані зображення. В другому параграфі побудовано два нееквівалентних нелінійних зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу з нелінійними операторами Лоренца. В третьому параграфі досліджена умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля. Розглянуто питання пуанкаре–інваріантності рівняння неперервності, коли густина та імпульс є функціями від $\vec{E}, \vec{H}$. В четвертому параграфі досліджена симетрія деяких нелінійних узагальнень рівнянь Максвела.

В додатку розглядається питання інтегровності звичайних диференціальних рівнянь. Запропоновано підхід щодо класифікації інтегровних випадків звичайних диференціальних рівнянь. З допомогою теорії груп Лі досліджено деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду.

Основні результати дисертації доповідались на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на IV міжнародній конференції ім. акад. М. Кравчука, на науковій конференції "Сучасні фізико–математичні дослідження молодих науковців вузів України" в Київському університеті, на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics".

По темі дисертації опубліковано 6 друкованих робіт [3, 4, 31, 52, 58, 64].

Виражаю щиру подяку моєму науковому керівникові член–кор. НАН України Фущичу В.І. за постановку задач і постійну увагу до роботи, кандидатам фіз.–мат. наук Цифрі І.М. та Ревенку І.В. за наукове співробітництво і обговорення результатів, а також усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики за постійне і корисне обговорення результатів.

Розділ 1

Нелінійні рівняння дифузійного типу високого порядку. Симетрійна класифікація і розв'язки.

Згадаємо деякі класичні нелінійні одновимірні рівняння гідродинаміки. Хвиля, що описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

називається простою хвилею. Як добре відомо, рівняння (1.1) має загальний розв'язок

$$x - ut = \varphi(u), \tag{1.2}$$

де $\varphi(u)$ — довільна функція.

В середовищі з дисипацією рівняння Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.3}$$

описує поведінку квазіпростої хвилі. Слід зазначити, що (1.3), як відомо, нелокальною заміною Коула–Хопфа зводиться до лінійного рівняння теплопровідності [34].

Поширення хвилі у середовищі з дисперсією описується рівнянням Кортевега–де–Фріза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1.4}$$

Для опису хвилі в середовищі з дисипацією і дисперсією використовується рівняння Кортевега–де–Фріза–Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad (1.5)$$

В (1.1 – 1.5) $u(t,x)$ – амплітуда хвилі.

Рівняння (1.1, 1.3, 1.4, 1.5) широко використовуються для опису реальних хвильових процесів в гідродинаміці, зокрема теорії мілкої води, акустиці [2, 15, 22, 24, 32, 34, 77]. Дослідженню рівнянь цих типів, зокрема, їх симетрійних властивостей, присв'ячено ряд публікацій [19, 27, 28, 42, 50, 69, 70, 79, 80, 81, 83].

Ми розглянемо деякі нові узагальнення високого порядку рівнянь типу (1.1, 1.3, 1.4, 1.5) з теоретико–алгебраїчної точки зору. Проведемо їх симетрійний аналіз, вкажемо деякі класи точних розв'язків.

1.1 Узагальнення рівняння Бюргерса довільного порядку

В даному параграфі розглядаються нелінійні одновимірні узагальнення рівняння дифузійного типу

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right), \qquad (1.6)$$

де $u = u(t,x)$; $u_{(0)} = \frac{\partial u}{\partial t}$; $u_{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, n – натуральне, $F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ – довільна гладка функція, $F \neq const$. Сформулюємо спочатку деякі твердження про ліївську симетрію деяких з рівнянь (1.6). Розглянемо рівняння :

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(2)}\right), \qquad (1.7)$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(3)}\right), \qquad (1.8)$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(4)}\right). \qquad (1.9)$$

Теорема 1.1 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.7) в залежності від* $F\left(u_{(2)}\right)$ *є алгебри*

1. $< P_0, P_1, G >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right)$ *– довільна, де*

$$P_0 = \partial_t,$$
$$P_1 = \partial_x,$$
$$G = t\partial_x + \partial_u,$$

2. $< P_0, P_1, G, Y_1 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1 \left(u_{(2)}\right)^k + \lambda_0$, *де*

$$Y_1 = (k+1)t\partial_t + \left((2-k)x + \frac{3}{2}\lambda_0 k t^2\right)\partial_x + \left((1-2k)u + 3\lambda_0 k t\right)\partial_u,$$

$k = const$; $k \neq 0$; $k \neq 1$; $k \neq \frac{1}{3}$;

3. $< P_0, P_1, G, Y_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \ln \lambda_1 u_{(2)}$, *де*

$$Y_2 = t\partial_t + \left(2x - \frac{3}{2}t^2\right)\partial_x + (u-3t)\partial_u,$$

4. $< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1 u_{(2)} + \lambda_0$, *де*

$$Z_1 = 2t\partial_t + \left(x + \frac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (-u + 3\lambda_0 t)\partial_u,$$

$$Z_2 = t^2\partial_t + \left(tx + \frac{1}{2}\lambda_0 t^3\right)\partial_x + \left(x - tu + \frac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_u,$$

5. $< P_0, P_1, G, R_1, R_2, R_3, R_4 >$, *якщо* $F\left(u_{(2)}\right) = \lambda_1 \left(u_{(2)}\right)^{1/3} + \lambda_0$, *де*

$$R_1 = 4t\partial_t + \left(5x + \frac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (u + 3\lambda_0 t)\partial_u,$$
$$R_2 = u\partial_x + \lambda_0\partial_u,$$
$$R_3 = \left(2tu - x - \frac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (u - \lambda_0 t)\partial_u,$$
$$R_4 = \left(tu - x - \frac{1}{2}\lambda_0 t^2\right)(t\partial_x + \partial_u),$$

в умовах теореми $\lambda_0 = 0; 1$, $\lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.

Доведення Симетрійну класифікацію (1.7) проводимо в класі диференціальних операторів першого порядку

$$X = \xi^0(t,x,u)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u. \tag{1.10}$$

(1.7)¯рівняння другого порядку, знайшовши друге продовження оператора (1.10), умову інваріантності, згідно підходу Лі, запишемо у вигляді

$$\underset{2}{X}\left(u_{(0)} + uu_{(1)} - F\left(u_{(2)}\right)\right)\Bigg|_{u_{(0)} = F\left(u_{(2)}\right) - uu_{(1)}} \equiv 0, \tag{1.11}$$

де

$$\underset{2}{X} = X + \left\{\eta_\alpha + \eta_u u_\alpha - u_j(\xi^j_\alpha + \xi^j_u u_\alpha)\right\}\partial_{u_\alpha} +$$
$$\left\{\eta_{\alpha i} + \eta_{\alpha u}u_i + \eta_{iu}u_\alpha + \eta_{uu}u_i u_\alpha + \eta_u u_{\alpha i} - u_{ji}(\xi^j_\alpha + \xi^j_u u_\alpha) -\right.$$
$$\left. u_j(\xi^j_{\alpha i} + \xi^j_{\alpha u}u_i + \xi^j_{iu}u_\alpha + \xi^j_{uu}u_\alpha u_i + \xi^j_u u_{\alpha i}) - u_{\alpha j}(\xi^j_i + \xi^j_u u_i)\right\}\partial_{u_{\alpha i}},$$
$$\alpha, i, j = 0; 1.$$

Для зручності доведення, використовуватимемо наступні позначення $u_{(1)} \equiv u_1, u_{(2)} \equiv u_{11}$. Рівняння (1.11) в розгорнутому записі матиме вигляд

$$u_1\eta + \left[\eta_0 + \eta_u(F - uu_1) - (F - uu_1)(\xi^0_0 + \xi^0_u(F - uu_1)) -\right.$$
$$\left. u_1(\xi^1_0 + \xi^1_u(F - uu_1))\right] + u\left[\eta_1 + \eta_u u_1 - (F - uu_1)(\xi^0_1 + \xi^0_u u_1) -\right.$$
$$\left. u_1(\xi^1_1 + \xi^1_u u_1)\right] - F_{u_{11}}\left[\eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2u_{10}(\xi^0_1 + \xi^0_u u_1) -\right.$$
$$2u_{11}(\xi^1_1 + \xi^1_u u_1) - (F - uu_1)(\xi^0_{11} + 2\xi^0_{1u}u_1 + \xi^0_{uu}u_1^2 + \xi^0_u u_{11}) -$$
$$\left. u_1(\xi^1_{11} + 2\xi^1_{1u}u_1 + \xi^1_{uu}u_1^2 + \xi^1_u u_{11})\right] = 0,$$

де $\xi^1_{1u} = \dfrac{\partial^2\xi^1}{\partial x\partial u}, \eta_0 = \dfrac{\partial\eta}{\partial t}, F_{u_{11}} = \dfrac{\partial F}{\partial u_{11}}, \ldots$

Оскільки ξ^0, ξ^1, η залежать лише від (t, x, u), а $F\,(u_{11})$ лише від u_{11}, тоді після розщеплення даного рівняння по похідним u_{01}, u_1 отримуємо систему визначальних рівнянь на ξ^0, ξ^1, η, F:

$$\xi^0_1 = 0, \qquad \xi^0_u = 0, \qquad \xi^1_{uu} = 0, \qquad \eta_{uu} = 2\xi^1_{1u}, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &\eta - \xi^1_0 + u\left(\xi^0_0 - \xi^1_1\right) - F\xi^1_u - F_{u_{11}}\left(2\eta_{1u} - \xi^1_{11} - 3u_{11}\xi^1_u\right) = 0, \\ &\eta_0 + \eta_u F - \xi^0_0 F + u\eta_1 - F_{u_{11}}\left(\eta_{11} + u_{11}\left(\eta_u - 2\xi^1_1\right)\right) = 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

Розв'язок (1.12) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &\xi^0 = p(t), \quad \xi^1 = a(t,x)u + b(t,x), \\ &\eta = a_1(t,x)u^2 + c(t,x)u + d(t,x), \end{aligned} \tag{1.14}$$

де $p(t), a(t,x), b(t,x), c(t,x), d(t,x)$ – гладкі функції, що підлягають визначенню. Підставивши (1.14) в (1.13), одержуємо (через нижні індекси позначено диференціювання по відповідній змінній)

$$\begin{aligned} &a_1u^2 + cu + d + up_0 - (a_0u + b_0) - aF - u(a_1u + b_1) - \\ &F_{u_{11}}\left(4a_1u + 2c_1 - (a_{11}u + b_{11}) - 3au_{11}\right) = 0, \\ &a_{01}u^2 + c_0u + d_0 + (2a_1u + c)F - p_0F + u(a_{11}u^2 + c_1u + d_1) - \\ &F_{u_{11}}\left(a_{111}u^2 + c_{11}u + d_{11} + u_{11}((2a_1u + c) - 2(a_1u + b_1))\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Після розщеплення (1.15) по степеням u, одержуємо систему рівнянь на p, a, b, c, d, F

$$\begin{aligned}
&c + p_0 - a_0 - b_1 = 0,\\
&d - b_0 - aF - F_{u_{11}}(2c_1 - b_{11} - 3au_{11}) = 0,\\
&a_{11} = 0,\\
&a_{01} + c_1 = 0,\\
&c_0 + 2a_1F + d_1 - c_{11}F_{u_{11}} = 0,\\
&d_0 + cF - p_0F - F_{u_{11}}(d_{11} + u_{11}(c - 2b_1)) = 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Для системи (1.16) розглянемо випадки:
I. F – довільна функція.
Розщепивши (1.16) по похідних функції F, одержуємо систему

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_0 = 0, \quad c + p_0 - b_1 = 0,\\
&d - b_0 = 0, \quad c_0 + d_1 = 0, \quad c - p_0 = 0, \quad c - 2b_1 = 0,
\end{aligned}$$

розв'язок якої має вигляд

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad c = 0, \quad p = C_1,\\
&b = C_2t + C_3, \quad d = C_2,
\end{aligned}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.
Звідси

$$\xi^0 = C_1, \quad \xi^1 = C_2t + C_3, \quad \eta = C_2,$$

що й визначає випадок 1 теореми 1.1.

II. $F_{u_{11}u_{11}} = 0$ ($F \neq const$).
Отже

$$F = \lambda_1 u_{11} + \lambda_0, \tag{1.17}$$

$\lambda_0, \lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.
Підставивши (1.17) в (1.16), після розщеплення по u_{11} одержуємо

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 + d_1 = 0, \quad p_0 = 2b_1\\
&c + p_0 - b_1 = 0, \quad d - b_0 = 0, \quad d_0 + \lambda_0(c - b_0) = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Розв'язок (1.18) має вигляд

$$\begin{aligned}
&a = 0,\\
&p = C_1t^2 + 2C_2t + C_3,\\
&b = (C_1t + C_2)x + \frac{1}{2}\lambda_0 C_1 t^3 + \frac{3}{2}\lambda_0 C_2 t^2 + C_4 t + C_5,\\
&c = -(C_1 t + C_2),\\
&d = C_1 x + \frac{3}{2}\lambda_0 C_1 t^2 + 3\lambda_0 C_2 t + C_4,
\end{aligned}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – довільні сталі.
Отже, при $F = \lambda_1 u_{11} + \lambda_0$,

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = C_1t^2 + 2C_2t + C_3,\\
&\xi^1 = (C_1t + C_2)x + \frac{1}{2}\lambda_0 C_1 t^3 + \frac{3}{2}\lambda_0 C_2 t^2 + C_4 t + C_5,\\
&\eta = -(C_1 t + C_2)u + C_1 x + \frac{3}{2}\lambda_0 C_1 t^2 + 3\lambda_0 C_2 t + C_4.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Координати ξ^0, ξ^1, η (1.19) визначають вигляд базисних елементів у випадку 4 теореми 1.1.

III. $F_{u_{11}u_{11}} \neq 0$.
Диференціюючи друге рівняння системи (1.16) по u_{11}, після спрощення одержуємо

$$2aF_{u_{11}} - F_{u_{11}u_{11}}(2c_1 - b_{11} - 3au_{11}) = 0. \tag{1.20}$$

Оскільки $F_{u_{11}u_{11}} \neq 0$, тоді розділивши (1.20) на $F_{u_{11}u_{11}}$ і продиференціювавши по u_{11}, одержуємо

$$2a\left(\frac{F_{u_{11}}}{F_{u_{11}u_{11}}}\right)_{u_{11}} + 3a = 0. \tag{1.21}$$

Знову потрібно розглядати випадки $a = 0$ і $a \neq 0$.

Нехай $a = 0$, тоді систему (1.16) можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad c + p_0 - b_1 = 0, \quad d = b_0,\\
&b_{11} = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 + d_1 = 0,\\
&d_0 + F(c - p_0) - u_{11}F_{u_{11}}(c - 2b_1) = 0.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Диференціюючи останнє рівняння системи (1.22) по u_{11}, одержуємо

$$F_{u_{11}}(2b_1 - p_0) - u_{11}F_{u_{11}u_{11}}(c - 2b_1) = 0. \tag{1.23}$$

Якщо $2b_1 - p_0 = 0$ або $c - 2b_1 = 0$, то ми приходимо знову до випадку I. В протилежному випадку (1.23) перепишемо наступним чином

$$\frac{F_{u_{11}u_{11}}}{F_{u_{11}}} = \frac{2b_1 - p_0}{(c-2b_1)u_{11}}. \tag{1.24}$$

В (1.24) виділяються два принципово різні випадки

$$III(a): \quad F(u_{11}) = \lambda_1 (u_{11})^k + \lambda_0, \tag{1.25}$$

$$III(b): \quad F(u_{11}) = \lambda_2 \ln u_{11} + \lambda_3, \tag{1.26}$$

де $\lambda_0, \ldots, \lambda_3, k - const$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $k \neq 0; 1$.
Випадок $III(b)$ можна спростити, внаслідок можливості в (1.7) розтягу по t, u, наступним чином

$$III(b): \quad F(u_{11}) = \ln(\lambda_1 u_{11}). \tag{1.27}$$

Підставляючи відповідно (1.25) або (1.27) в систему (1.16) і діючи за схемою випадку II, одержуємо випадки 2 та 3 теореми.

Нехай тепер $a \neq 0$, тоді з (1.21) знаходимо

$$III(c): \quad F(u_{11}) = \lambda_1 (u_{11} + \lambda_2)^{1/3} + \lambda_0. \tag{1.28}$$

Підставивши (1.28) в (1.16), після розщеплення по степеням u_{11} одержуємо систему рівнянь, з якої знаходимо $\lambda_2 = 0$ та a, p, b, c, d, що й визначає випадок 5 теореми.

В загальному випадку в умовах теореми λ_0 – довільна константа, але внаслідок розтягу по змінних x, u в (1.7) завжди можна покласти $\lambda_0 = 0$ або $\lambda_0 = 1$. Теорема доведена.

Теорема 1.1 уточнює результат отриманий в [78].

Рівняння Бюргерса (1.3), як частинний випадок (1.7), включається в випадок 4 теореми 1.1 при $\lambda_0 = 0$.

Слід зазначити, що найбільш широку симетрію в класі рівнянь (1.7) (7–вимірна алгебра, суттєво нелінійне зображення) має наступне рівняння

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \big(u_{(2)}\big)^{1/3} + \lambda_0, \tag{1.29}$$

Оператори $< P_0, P_1, G, R_1, R_2, R_3, R_4 >$, що визначають алгебру інваріантності (1.29), задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

	P_0	P_1	G	R_1	R_2	R_3	R_4
P_0	0	0	P_1	$4P_0+3\lambda_0 G$	0	$2R_2-3\lambda_0 G$	R_3
P_1	0	0	0	$5P_1$	0	$-P_1$	$-G$
G	$-P_1$	0	0	G	P_1	G	0
R_1	$-4P_0-3\lambda_0 G$	$-5P_1$	$-G$	0	$3\lambda_0 G-4R_2$	0	$4R_4$
R_2	0	0	$-P_1$	$4R_2-3\lambda_0 G$	0	$3\lambda_0 G-2R_2$	$-R_3$
R_3	$3\lambda_0 G-2R_2$	P_1	$-G$	0	$2R_2-3\lambda_0 G$	0	$-2R_4$
R_4	$-R_3$	$-G$	0	$-4R_4$	R_3	$2R_4$	0

Для зручності, ми використовуємо тут і надалі таблиці для задання комутаційних співвідношень між базисними елементами алгебр Лі. Так наприклад, за допомогою вище наведеною таблиці визначаємо

$$[P_0, R_1] = 4P_0 + 3\lambda_0 G.$$

Наведемо скінчені групові перетворення, що відповідають операторам G, R_1, R_2, R_3, R_4:

$$\begin{aligned} G: t &\to \tilde{t} = t,\\ x &\to \tilde{x} = x + \theta t,\\ u &\to \tilde{u} = u + \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1: t &\to \tilde{t} = t\exp(4\theta),\\ x &\to \tilde{x} = x\exp(5\theta) + \frac{1}{2}\lambda_0 t^2\Big(\exp(8\theta) - \exp(13\theta)\Big),\\ u &\to \tilde{u} = u\exp(\theta) + \lambda_0 t\Big(\exp(4\theta) - \exp(5\theta)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2: t &\to \tilde{t} = t\\ x &\to \tilde{x} = x + \frac{1}{2}\lambda_0\theta^2 + \theta u,\\ u &\to \tilde{u} = u + \lambda_0\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3: t &\to \tilde{t} = t,\\ x &\to \tilde{x} = \Big(x - \frac{1}{2}\lambda_0 t^2\Big)\exp(-\theta) + tu\exp(\theta) + \frac{1}{2}\lambda_0 t^2,\\ u &\to \tilde{u} = (u - \lambda_0 t)\exp(\theta) + \lambda_0 t, \end{aligned}$$

$$R_4 : t \to \tilde{t} = t,$$

$$x \to \tilde{x} = x + \theta t \left(ut - x - \frac{1}{2}\lambda_0 t^2 \right),$$

$$u \to \tilde{u} = u + \theta \left(ut - x - \frac{1}{2}\lambda_0 t^2 \right),$$

θ – груповий параметр, $\lambda_0 = 0$ або 1.

Наведемо два точних розв'язки (1.29) (вказується оператор, анзац, редуковане рівняння та отриманий внаслідок вказаної редукції та інтегрування редукованого рівняння розв'язок)

1) оператор: $R_2 = u\partial_x + \lambda_0 \partial_u$,
анзац: $u^2 = \varphi(t) + 2\lambda_0 x$,
редуковане рівняння: $\varphi' = -2\lambda_1 (\lambda_0)^{2/3}$,
розв'зок (1.29): $u^2 = -2\lambda_1 (\lambda_0)^{2/3} t + 2\lambda_0 x$,

2) оператор: $R_3 = \left(2tu - x - \frac{3}{2}\lambda_0 t^2 \right) \partial_x + (u - \lambda_0 t)\partial_u$,
анзац: $x(u - \lambda_0 t) - tu^2 + \frac{3}{2}\lambda_0 t^2 u = \varphi(t)$,
редуковане рівняння:

$$2\varphi' - 3(\lambda_0)^2 t^2 = 2\lambda_1 \Big(2\varphi - (\lambda_0)^3 t^3 \Big)^{1/3},$$

розв'зок (1.29):

$$xu - tu^2 + \frac{3}{2}\lambda_0 t^2 u - \lambda_0 t x = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3}\lambda_1 t + C \right)^{3/2} + (\lambda_0)^2 t^3 \right).$$

Теорема 1.2 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.8) в залежності від $F\left(u_{(3)}\right)$ є алгебри*

1. $< P_0, P_1, G >$, *якщо* $F\left(u_{(3)}\right)$ *– довільна*

2. $< P_0, P_1, G, Y_3 >$, *якщо* $F\left(u_{(3)}\right) = \lambda_1 \left(u_{(3)}\right)^k + \lambda_0$, *де*

$$Y_3 = (2k+1)t\partial_t + \left((2-k)x + \frac{5}{2}\lambda_0 k t^2 \right) \partial_x + \Big((1-3k)u + 5\lambda_0 k t \Big) \partial_u,$$

$k = const$; $k \neq 0$; $k \neq \frac{3}{4}$;

3. $< P_0, P_1, G, Y_4 >$, *якщо* $F\left(u_{(3)}\right) = \ln \lambda_1 u_{(3)}$, *де*

$$Y_4 = t\partial_t + \left(2x - \frac{5}{2}t^2 \right) \partial_x + (u - 5t)\partial_u,$$

4. $< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(3)}\right) = \lambda_1\left(u_{(3)}\right)^{3/4} + \lambda_0$, *в умовах теореми* $\lambda_0 = 0; 1$, $\lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.

Доведення теореми 1.2 проводиться аналогічно, як і для теореми 1.1. Рівняння Кортевега–де–Фріза (1.4), як частинний випадок (1.8), включається в випадок 2 теореми 1.2 при $\lambda_0 = 0, k = 1$.

Теорема 1.3 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.9) в залежності від* $F\left(u_{(4)}\right)$ *є алгебри*
1. $< P_0, P_1, G >$, *якщо* $F\left(u_{(4)}\right)$ *– довільна,*
2. $< P_0, P_1, G, Y_5 >$, *якщо* $F\left(u_{(4)}\right) = \lambda_1\left(u_{(4)}\right)^k + \lambda_0$, *де*

$$Y_5 = (3k+1)t\partial_t + \left((2-k)x + \frac{7}{2}\lambda_0 kt^2\right)\partial_x + \left((1-4k)u + 7\lambda_0 kt\right)\partial_u,$$

$k = const$; $k \neq 0$; $k \neq \frac{3}{5}$;
3. $< P_0, P_1, G, Y_6 >$, *якщо* $F\left(u_{(4)}\right) = \ln \lambda_1 u_{(4)}$, *де*

$$Y_6 = t\partial_t + \left(2x - \frac{7}{2}t^2\right)\partial_x + (u - 7t)\partial_u,$$

4. $< P_0, P_1, G, Z_1, Z_2 >$, *якщо* $F\left(u_{(4)}\right) = \lambda_1\left(u_{(4)}\right)^{3/5} + \lambda_0$, *в умовах теореми* $\lambda_0 = 0; 1$, $\lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.

Доведення теореми 1.3 проводиться аналогічно, як і для теореми 1.1. Теореми 1.1–1.3 дають повну симетрійну класифікацію рівнянь (1.7)–(1.9). На основі цих тверджень сформулюємо деякі узагальнення для (1.6).

Зауваження. Легко переконатися, що рівняння (1.6) при довільній функції $F\left(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ інваріантне відносно алгебри Галілея, яка визначається операторами $< P_0, P_1, G >$.

Проведемо тепер симетрійний аналіз наступного рівняння з класу (1.6)

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F\left(u_{(n)}\right). \tag{1.30}$$

Теорема 1.4 *Для довільного натурального $n \geq 2$ максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \ln \lambda_1 u_{(n)} \tag{1.31}$$

є 4-вимірна алгебра $< P_0, P_1, G, A_1 >$, де

$$A_1 = t\partial_t + \left(2x - \frac{2n-1}{2}t^2\right)\partial_x + \Big(u - (2n-1)t\Big)\partial_u,$$

$\lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.

Теорема 1.5 *Для довільного натурального $n \geq 2$ максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \big(u_{(n)}\big)^k + \lambda_0 \tag{1.32}$$

є 4-вимірна алгебра $< P_0, P_1, G, A_2 >$, де

$$A_2 = ((n-1)k+1)\,t\partial_t + \left((2-k)x + \frac{2n-1}{2}\lambda_0 k t^2\right)\partial_x + \Big((1-nk)u + (2n-1)\lambda_0 k t\Big)\partial_u,$$

k, λ_1 — дійсні константи, $\lambda_0 = 0; 1$, $k \neq 0$, $k \neq \frac{3}{n+1}$, $\lambda_1 \neq 0$, при $n = 2$ додаткова умова $k \neq \frac{1}{3}$(дивись випадок 5 теореми 1.1)

Теорема 1.6 *Для довільного натурального $n \geq 2$ максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \big(u_{(n)}\big)^{3/(n+1)} + \lambda_0 \tag{1.33}$$

є 5-вимірна алгебра з базисними елементами

$$\begin{aligned}
P_0 &= \partial_t, \\
P_1 &= \partial_x, \\
G &= t\partial_x + \partial_u, \\
Z_1 &= 2t\partial_t + \left(x + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_x + (-u + 3\lambda_0 t)\partial_u, \\
Z_2 &= t^2\partial_t + \left(tx + \tfrac{1}{2}\lambda_0 t^3\right)\partial_x + \left(x - tu + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\partial_u,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$\lambda_0 = 0; 1$, $\lambda_1 = const$, $\lambda_1 \neq 0$.

Зауваження. Якщо в (1.33) $n = 1$, то одержуємо

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_1 \left(u_{(1)}\right)^{3/2} + \lambda_0. \tag{1.35}$$

Теорема 1.7 *Максимальною алгеброю інваріантності (1.35) є 4-вимірна алгебра* $< P_0, P_1, G, Z_1 >$.

Доведення теорем 1.4 – 1.7 проводиться за допомогою алгоритму Лі. В таблиці наведено комутаційні співвідношення для операторів (1.34).

	P_0	P_1	G	Z_1	Z_2
P_0	0	0	P_1	$2P_0 + 3\lambda_0 G$	Z_1
P_1	0	0	0	P_1	G
G	$-P_1$	0	0	$-G$	0
Z_1	$-2P_0 - 3\lambda_0 G$	$-P_1$	G	0	$2Z_2$
Z_2	$-Z_1$	$-G$	0	$-2Z_2$	0

Зауваження. Якщо $\lambda_0 = 0$, тоді оператори (1.34) визначають зображення узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ [50].

Скінчені групові перетворення, що відповідають операторам Z_1, Z_2 в зображені (1.34):

$$\begin{aligned}
Z_1 : t &\to \tilde{t} = t\exp(2\theta),\\
x &\to \tilde{x} = \left(x - \frac{1}{2}\lambda_0 t^2\right)\exp(\theta) + \frac{1}{2}\lambda_0 t^2 \exp(4\theta),\\
u &\to \tilde{u} = (u - \lambda_0 t)\exp(-\theta) + \lambda_0 t \exp(2\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 : t &\to \tilde{t} = \frac{t}{1-\theta t},\\
x &\to \tilde{x} = \frac{x}{1-\theta t} + \frac{\theta\lambda_0 t^3}{2(1-\theta t)^2},\\
u &\to \tilde{u} = u + \left(x - ut + \frac{1}{2}\lambda_0 t^2\right)\theta + \frac{\theta\lambda_0 t^2}{1-\theta t},
\end{aligned}$$

θ – груповий параметр.

Зауваження. Досить цікавим є той факт, що (1.34) визначає алгебру інваріантності (1.33) для будь-якого натурального $n \geq 2$.

Дослідимо інваріантність (1.6) відносно зображення (1.34). Має місце теорема:

Теорема 1.8 *Рівняння (1.6) інваріантне відносно алгебри Лі, яка визначається операторами (1.34), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_0 + u_{(2)}\Phi\Big(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n\Big), \tag{1.36}$$

де Φ – *довільна гладка функція,* $\lambda_0 = 0; 1$,

$$\omega_k = \frac{1}{u_{(2)}}\big(u_{(k)}\big)^{3/(k+1)}, \quad u_{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Доведення Галілеївська інваріантність (1.6) очевидна. Вияснимо при яких $F\left(u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ рівняння (1.6) інваріантне відносно перетворень, що визначаються операторами Z_1, Z_2. Використовуємо алгоритм Лі. Подіявши n–тим продовженням оператора Z_2 на рівняння (1.6), одержимо

$$\left(x - tu + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right) u_{(1)} + \left(-u - 3tu_{(0)} + 3\lambda_0 t - u_{(1)}\left(x + \tfrac{3}{2}\lambda_0 t^2\right)\right) +$$
$$\left(1 - 2tu_{(1)}\right) u + 3tu_{(2)}F_{u_{(2)}} + 4tu_{(3)}F_{u_{(3)}} + \cdots + (n+1)tu_{(n)}F_{u_{(n)}} = 0.$$

Врахувавши (1.6), після деяких спрощень отримуємо на F лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$3u_{(2)}F_{u_{(2)}} + 4u_{(3)}F_{u_{(3)}} + \cdots + (n+1)u_{(n)}F_{u_{(n)}} = 3F - 3\lambda_0. \tag{1.37}$$

Загальний розв'язок (1.37) можна записати наступним чином

$$F = \lambda_0 + u_{(2)}\Phi\left(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n\right), \tag{1.38}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\lambda_0 = 0; 1$,

$$\omega_k = \frac{1}{u_{(2)}}\big(u_{(k)}\big)^{3/(k+1)}, \quad u_{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Отже, якщо $F\left(u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}\right)$ визначається (1.38), тоді рівняння (1.6) буде інваріантним відносно оператора Z_2, але з комутаційного співвідношення $[P_0, Z_2] = Z_1$ випливає, що в цьому випадку будемо мати також інваріантність відносно Z_1. Теорема доведена.

До класу рівнянь (1.36) знову належить рівняння Бюргерса (1.3) (при $\lambda_0 = 0, \Phi = const$) та рівняння (1.33).

Рівняння (1.36) включає, як частинний випадок, наступне рівняння, яке можна трактувати як узагальнення рівняння Бюргерса та використовувати для опису хвильових процесів

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda_0 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(u_{(k)}\right)^{3/(k+1)}, \tag{1.39}$$

$\lambda_0 = 0; 1$, λ_k – довільні дійсні константи.

В таблиці наведені анзаци, що редукують рівняння (1.33) до звичайних диференціальних рівнянь.

оператор	анзац	редук. рівняння
1. P_0	$u = \varphi(x)$	$\varphi\varphi' = \lambda_1\left(\varphi^{(n)}\right)^{3/(n+1)} + \lambda_0$
2. P_1	$u = \varphi(t)$	$\varphi' = \lambda_0$
3. G	$u = \varphi(t) + \frac{x}{t}$	$\varphi' + \frac{1}{t}\varphi = \lambda_0$
4. Z_1	$u = t^{-1/2}\varphi(\omega) + \lambda_0 t$ $\omega = 2xt^{-1/2} - \lambda_0 t^{3/2}$	$2\varphi\varphi' - \frac{1}{2}\omega\varphi' - \frac{1}{2}\varphi =$ $\lambda_1 2^{3n/(n+1)}\left(\varphi^{(n)}\right)^{3/(n+1)}$
5. Z_2	$u = t^{-1}\varphi(\omega) + \frac{x}{t} + \frac{1}{2}\lambda_0 t$ $\omega = 2xt^{-1} - \lambda_0 t$	$\varphi\varphi' = \lambda_1 2^{(2n-1)/(n+1)}\left(\varphi^{(n)}\right)^{3/(n+1)}$

Розв'завши редуковані рівняння, отримуємо розв'язки (1.33). Так для випадку 5, що вказаний в таблиці, знайдено частинний степеневий розв'язок

$$\varphi = -2\left(\lambda_1{}^{(n+1)}(n!)^3\right)^{1/(2n-1)}\omega^{-1}.$$

Записавши його в термінах (t, x, u), одержуємо розв'язок рівняння (1.33)

$$u = -2\left(\lambda_1{}^{(n+1)}(n!)^3\right)^{1/(2n-1)}\frac{1}{2x - \lambda_0 t^2} + \frac{x}{t} + \frac{1}{2}\lambda_0 t$$

1.2 Узагальнення рівняння Бюргерса та Кортевега–де–Фріза.

Розлядаємо наступне узагальнення рівняння Бюргерса (1.3)

$$u_0 + uu_1 = u_{11} + g(u), \tag{1.40}$$

$u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{11} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $g(u)$ – довільна гладка функція ($g(u) \neq const$). Випадок $g(u) = const$ роглянуто в теоремі 1.1.

Теорема 1.9 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.40) в залежності від $g(u)$ є алгебри*
1. $< P_0, P_1 >$, *якщо $g(u)$ – довільна, де*

$$P_0 = \partial_t, \qquad P_1 = \partial_x,$$

2. $< P_0, P_1, A >$, *якщо* $g(u) = C_1(u + C_2)^3 - 2C_1(C_2)^3$, *де*

$$A = 2t\partial_t + (x - C_2 t)\partial_x - (u + C_2)\partial_u,$$

3. $< P_0, P_1, B >$, *якщо* $g(u) = C_1 u + C_2$, *де*

$$B = \exp(C_1 t)(\partial_x + C_1 \partial_u),$$

В умовах теореми $C_1, C_2 = const$, $C_1 \neq 0$.

Доведення. Записуємо умову інваріантності для (1.40)

$$\underset{2}{X}\Big(u_0 + uu_1 - u_{11} - g(u)\Big)\Bigg|_{\,u_0 = -uu_1 + u_{11} + g(u)} \equiv 0,$$

де $\underset{2}{X}$ – друге продовження оператора (1.10). Після розщеплення по похідним, отримуємо на $\xi^0, \xi^1, \eta, g(u)$ систему визначальних рівнянь

$$\begin{array}{l} \xi^0_u = 0, \qquad \xi^0_1 = 0, \qquad \xi^1_u = 0, \qquad \eta_{uu} = 0, \qquad \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \\ \eta - \xi^1_0 + u(\xi^0_0 - \xi^1_1) + (\xi^1_{11} - 2\eta_{1u}) = 0, \\ \eta g_u + \eta_0 + (\eta_u - \xi^0_0)g + u\eta_1 - \eta_{11} = 0. \end{array} \tag{1.41}$$

Через вижні індекси позначено диференціювання по відповідній змінній (t, x, u). Розв'язавши (1.41), отримуємо випадки теореми 1.9.

Зауважимо, що оператор A у випадку 2 теореми 1.9 можна представити у вигляді лінійної комбінації комутуючих операторів дилатації та Галілея, хоча розширена алгебра Галілея не є алгеброю інваріантності рівняння (1.40) у цьому випадку:

$$A = \Big(2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u\Big) - C_2\Big(t\partial_x + \partial_u\Big) = D - C_2 G.$$

Таким чином, рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1(u + C_2)^3 - 2C_1(C_2)^3$$

інваріантне відносно перетворень, які можна інтерпретувати як композицію дилатаційних та галілеївських перетворень, тобто як композицію розтягу по змінних t, x, u та перетворень Галілея.

Нижче, ми проведемо симетрійну класифікацію наступних нелінійних узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза:

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\Big(F(u_1)\Big), \tag{1.42}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\Big(F(u_{11})\Big), \tag{1.43}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\Big(F(u)u_1\Big), \tag{1.44}$$

де $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}, u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, F – довільна гладка функція свого аргументу.

Рівняння (1.42) можна переписати у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_1)u_{11}, \tag{1.45}$$

де $f(u_1)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u_1) = const$ упускаємо з розгляду, оскільки тоді (1.45) співпадає з рівняння Бюргерса (1.3).

Теорема 1.10 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.45) в залежності від $f(u_1)$ є алгебри*
1. $< P_0, P_1, G >$, якщо $f(u_1)$ – довільна,
2. $< P_0, P_1, G, D >$, якщо $f(u_1) = C(u_1)^k$, де

$$D = 2t\partial_t + (1-k)x\partial_x - (k+1)u\partial_u,$$

$C, k = const;\ C \neq 0;\ k \neq 0; k \neq -2,$

3. якщо $f(u_1) = C(u_1)^{-2}$, $C = const, C \neq 0$, *тоді алгебра нескінченновимірна з базисними операторами (1.10), де*

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = K_1 t^2 + K_2 t + K_3,\\
&\xi^1 = \left(-\frac{K_1}{4C}u^2 - \frac{K_4}{2C}u - \frac{K_1}{2}t + K_5\right)x + q(u,t),\\
&\eta = \frac{1}{2}(2K_1 t + K_2)u + K_4 t + K_6,\\
&K_1, \ldots, K_6 = const,
\end{aligned}
$$

$q(u,t)$ – *довільний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності*

$$q_0 - Cq_{uu} = \frac{K_1}{4C}u^3 + \frac{K_4}{2C}u^2 + \left(\frac{7}{2}K_1 t + \frac{3}{2}K_2 - K_5\right)u + K_4 t + K_6.$$

Доведення. Використовуємо лієвський критерій інваріантності. Після розщеплення по похідним другого порядку отримуємо систему визначальних рівнянь на $\xi^0, \xi^1, \eta, f(u_1)$.

$$
\begin{aligned}
&\xi^0_1 = 0, \qquad \xi^0_u = 0,\\
&f_{u_1}\left(\xi^1_u (u_1)^2 + (\xi^1_1 - \eta_u)u_1 - \eta_1\right) + f\left(2\xi^1_1 - \xi^0_0 + 2\xi^1_u u_1\right) = 0,\\
&\eta_0 + \eta u_1 + u\eta_1 - u_1\xi^1_0 + uu_1\xi^0_0 - uu_1\xi^1_1 -\\
&f\left(\eta_{11} + 2u_1\eta_{1u} + (u_1)^2\eta_{uu} - u_1\xi^1_{11} - 2(u_1)^2\xi^1_{1u} - (u_1)^3\xi^1_{uu}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Розв'язки цієї системи й визначають випадки теореми.

Розглянемо випадок 3 теореми 1.10, тобто рівняння

$$u_0 + uu_1 = C(u_1)^{-2}u_{11}. \tag{1.46}$$

В (1.46) виконаємо перетворення годографа [17, 65]

$$
\begin{cases}
u = \omega,\\
t = \tau,\\
x = v(\tau, \omega).
\end{cases} \tag{1.47}
$$

Внаслідок заміни змінних (1.47)

$$u_1 = \frac{1}{v_\omega}, \quad u_0 = -\frac{v_\tau}{v_\omega}, \quad u_{11} = -\frac{v_{\omega\omega}}{(v_\omega)^3},$$

а (1.46) зводиться до рівняння теплопровідності

$$v_\tau - Cv_{\omega\omega} = \omega. \tag{1.48}$$

Якщо в (1.48) виконати заміну

$$v = z - \frac{1}{6C}\omega^3, \tag{1.49}$$

то отримаємо лінійне однорідне рівняння теплопровідності

$$z_\tau - Cz_{\omega\omega} = 0. \tag{1.50}$$

Таким чином, заміни змінних (1.47), (1.49) лінеаризують рівняння (1.46) і задача побудови його розв'язків зводиться до розв'язання лінійного рівняння теплопровідності (1.50).

Рівняння (1.43) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_{11})u_{111}, \tag{1.51}$$

де $f(u_{11})$ – довільна гладка функція.
Випадок $f(u_{11}) = const$ не розглядаємо, оскільки (1.51) у цьому випадку є класичне рівняння Кортевега–де–Фріза (1.4).

Теорема 1.11 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.51) в залежності від $f(u_{11})$ є алгебри*
1. $< P_0, P_1, G >$, якщо $f(u_{11})$ – довільна,
2. $< P_0, P_1, G, D >$, якщо $f(u_{11}) = Cu_{11}$, де

$$D = t\partial_t - u\partial_u,$$

$C = const;\ C \neq 0.$

Доведення. Записуємо умову інваріантності для (1.51)

$$\underset{3}{X}\Big(u_0 + uu_1 - f(u_{11})u_{111}\Big)\Bigg|_{u_0 = -uu_1 + f(u_{11})u_{111}} \equiv 0,$$

де $\underset{3}{X}$ – третє продовження оператора (1.10). Після розщеплення по похідним, отримуємо на $\xi^0, \xi^1, \eta, f(u_{11})$ систему визначальних рівнянь

$$\begin{array}{l}
\xi^0_1 = 0,\ \xi^0_u = 0,\ \xi^1_{uu} = 0,\ \eta_{uu} = 2\xi^1_{1u},\ \eta_{1uu} = \xi^1_{11u}, \\
3\xi^1_u f + f_{u_{11}}\left(3u_{11}\xi^1_u + \xi^1_{11} - 2\eta_{1u}\right) = 0, \\
f_{u_{11}}\left(2u_{11}\xi^1_1 - u_{11}\eta_u - \eta_{11}\right) + f\left(3\xi^1_1 - \xi^0_0\right) = 0, \\
\eta + u\xi^0_0 - u\xi^1_1 - \xi^1_0 - f\left(3u_{11}\eta_{uu} - 6u_{11}\xi^1_{1u} + 3\eta_{11u} - \xi^1_{111}\right) = 0, \\
\eta_0 + u\eta_1 - f\left(\eta_{111} + 3u_{11}\eta_{1u} - 3u_{11}\xi^1_{11} - 3(u_{11})^2\xi^1_u\right) = 0.
\end{array}$$

Розв'язавши систему визначальних рівнянь, знаходимо випадки теореми.

Рівняння (1.44) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u)u_{11} + f_u(u)(u_1)^2, \tag{1.52}$$

де $f(u)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u) = const$ не розглядаємо, оскільки у цьому випадку маємо рівняння Бюргерса (1.3).

Теорема 1.12 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.52) в залежності від $f(u)$ є алгебра* и
1. $< P_0, P_1, G >$, *якщо $f(u)$ – довільна,*
2. $< P_0, P_1, G, Y >$, *якщо $f(u) = a\exp(bu)$, де*

$$Y = t\partial_t + \left(x + \frac{1}{b}t\right)\partial_x + \frac{1}{b}\partial_u,$$

$a, b = const;\ a, b \neq 0.$

Доведення проводиться аналогічно, як і для попередніх теорем.

Слід зауважити, що оператор Y можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея

$$Y = t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{b}(t\partial_x + \partial_u) = D + \frac{1}{b}G.$$

Перетворення, що відповідають Y представляють собою комбінацію дилатаційних і галілеївських перетворень, хоча рівняння не є інваріантним відносно розширеної алгебри Галілея.

1.3 Рівняння другого порядку, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

Розглянемо зображення узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\\
&P_1 = \partial_x,\\
&G = t\partial_x + \partial_u,\\
&D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Оператори (1.53) визначають максимальну алгебру інваріантності рівняння Бюргерса (1.3). В даному параграфі ми опишемо всі рівняння другого порядку, що інваріантні відносно

алгебри Галілея $AG(1,1) =< P_0, P_1, G >$,

розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1) =< P_0, P_1, G, D >$,

узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1) =< P_0, P_1, G, D, \Pi >$.

Знайдемо спочатку інваріанти другого порядку для оператора G. Функція $\Phi\left(t, x, u, u_0, u_1, u_{00}, u_{01}, u_{11}\right)$ буде інваріантом другого порядку для G, якщо дія другого продовження G на Φ є тотожній нуль. Таким чином, для визначення інваріантів G необхідно розв'язати квазілінійне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$\underset{2}{G}\Phi = \left\{t\partial_x + \partial_u - u_1\partial_{u_0} - 2u_{01}\partial_{u_{00}} - u_{11}\partial_{u_{01}}\right\}\Phi = 0. \tag{1.54}$$

Система рівнянь характеристик для (1.54) має вигляд

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{t} = \frac{du}{1} = \frac{du_0}{-u_1} = \frac{du_1}{0} = \frac{du_{00}}{-2u_{01}} = \frac{du_{01}}{-u_{11}} = \frac{du_{11}}{0}. \tag{1.55}$$

Перші інтеграли системи характеристик (1.55) можна вибрати наступним чином

$$t;\ tu - x;\ u_1;\ u_{11};\ u_0 + uu_1;\ u_{00}u_{11} - (u_{01})^2;\ u_{01} + uu_{11}. \tag{1.56}$$

Співвідношення (1.56) визначають повний набір незалежних інваріантів другого порядку для оператора G. Якщо додатково вимагати інваріантність відносно P_0, P_1, тоді зникнуть інваріанти, що залежать від t, x, тому має місце теорема:

Теорема 1.13 *Рівняння другого порядку інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\Big(u_1;\ u_{11};\ u_0 + uu_1;\ u_{00}u_{11} - (u_{01})^2;\ u_{01} + uu_{11}\Big) = 0, \qquad (1.57)$$

де Φ – довільна функція.

Вияснимо, коли рівняння (1.57) буде інваріантним відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$. Подіявши другим продовженням оператора D

$$\underset{2}{D} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u - 3u_0\partial_{u_0} - 2u_1\partial_{u_1} - 5u_{00}\partial_{u_{00}} - 4u_{01}\partial_{u_{01}} - 3u_{11}\partial_{u_{11}}$$

на праву частину (1.57), одержуємо рівняння в частинних похідних першого порядку

$$2\omega_1\Phi_{\omega_1} + 3\omega_2\Phi_{\omega_2} + 3\omega_3\Phi_{\omega_3} + 8\omega_4\Phi_{\omega_4} + 4\omega_5\Phi_{\omega_5} = 0, \qquad (1.58)$$

де

$$\omega_1 = u_1, \omega_2 = u_{11}, \omega_3 = u_0 + uu_1, \omega_4 = u_{00}u_{11} - (u_{01})^2, \omega_5 = u_{01} + uu_{11}.$$

Перші інтеграли рівняння (1.58) можна вибрати наступним чином

$$I_1 = \frac{(\omega_2)^2}{(\omega_1)^3},\ I_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2},\ I_3 = \frac{\omega_4}{(\omega_1)^4},\ I_4 = \frac{\omega_5}{(\omega_1)^2},$$

або в термінах u

$$I_1 = \frac{(u_{11})^2}{(u_1)^3},\ I_2 = \frac{u_0 + uu_1}{u_{11}},\ I_3 = \frac{u_{11}u_{00} - (u_{01})^2}{(u_1)^4},\ I_4 = \frac{u_{01} + uu_{11}}{(u_1)^2}.$$

Отже має місце теорема

Теорема 1.14 *Рівняння другого порядку інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\left(\frac{(u_{11})^2}{(u_1)^3}; \frac{u_0 + uu_1}{u_{11}}; \frac{u_{11}u_{00} - (u_{01})^2}{(u_1)^4}; \frac{u_{01} + uu_{11}}{(u_1)^2}\right) = 0, \qquad (1.59)$$

де Φ – довільна функція.

Аналогічно, вимагаючи інваріантність (1.59) відносно проективних перетворень, які визначаються оператором П, ми описуємо клас рівнянь другого порядку, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$.

Друге продовження оператора П має вигляд

$$\underset{2}{\Pi} = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u - (u + 3tu_0 + xu_1)\,\partial_{u_0} +$$
$$(1 - 2tu_1)\,\partial_{u_1} - (4u_0 + 5tu_{00} + 2xu_{01})\,\partial_{u_{00}} \tag{1.60}$$
$$-\,(2u_1 + 4tu_{01} + xu_{11})\,\partial_{u_{01}} - 3tu_{11}\partial_{u_{11}}.$$

Рівняння (1.59) інваріантне відносно П, якщо дія (1.60) на праву частину (1.59) є тотожній нуль, тобто

$$(x - tu)\left(\frac{u_1}{u_{11}}\Phi_{z_2} + \frac{u_{11}}{(u_1)^2}\Phi_{z_4}\right) - (u + 3tu_0 + xu_1)\,\frac{1}{u_{11}}\Phi_{z_2} +$$
$$(1 - 2tu_1)\left(-\frac{3(u_{11})^2}{(u_1)^4}\Phi_{z_1} + \frac{u}{u_{11}}\Phi_{z_2} - \frac{4\left(u_{11}u_{00} - (u_{01})^2\right)}{(u_1)^5}\Phi_{z_3} -\right.$$
$$\left.\frac{2\left(u_{01} + uu_{11}\right)}{(u_1)^3}\Phi_{z_4}\right) - (4u_0 + 5tu_{00} + 2xu_{01})\,\frac{u_{11}}{(u_1)^4}\Phi_{z_3} - \tag{1.61}$$
$$(2u_1 + 4tu_{01} + xu_{11})\left(-\frac{2u_{01}}{(u_1)^4}\Phi_{z_3} + \frac{1}{(u_1)^2}\Phi_{z_4}\right) -$$
$$-3tu_{11}\left(\frac{2u_{11}}{(u_1)^3}\Phi_{z_1} - \frac{u_0 + uu_1}{(u_{11})^2}\Phi_{z_2} + \frac{u_{00}}{(u_1)^4}\Phi_{z_3} + \frac{u}{(u_1)^2}\Phi_{z_4}\right) = 0,$$

де

$$z_1 = \frac{(u_{11})^2}{(u_1)^3},\ z_2 = \frac{u_0 + uu_1}{u_{11}},\ z_3 = \frac{u_{11}u_{00} - (u_{01})^2}{(u_1)^4},\ z_4 = \frac{u_{01} + uu_{11}}{(u_1)^2}.$$

Виконавши досить громіздкі спрощення рівняння (1.61), одержуємо

$$3z_1\Phi_{z_1} + 4\left(z_1z_2 + z_3 - z_4\right)\Phi_{z_3} + 2\left(z_4 + 1\right)\Phi_{z_4} = 0. \tag{1.62}$$

Перші інтеграли квазілінійного рівняння в частинних похідних (1.62) можна вибрати наступним чином

$$I_1 = z_2,\ I_2 = \frac{(z_1)^2}{(1 + z_4)^3},\ I_3 = (z_1)^{-4/3}\left(z_3 + 4z_1z_2 - 2z_4 + 1\right),$$

або в термінах u

$$I_1 = \frac{u_0 + uu_1}{u_{11}},$$

$$I_2 = \frac{\left(u_{01} + uu_{11} + (u_1)^2\right)^3}{(u_{11})^4},$$

$$I_3 = \frac{\left(u_{00}u_{11} - (u_{01})^2 + 4u_0u_1u_{11} + 2uu_{11}(u_1)^2 - 2u_{01}(u_1)^2 - (u_1)^4\right)^3}{(u_{11})^8}.$$

Отже, має місце теорема

Теорема 1.15 *Рівняння другого порядку інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\left(\frac{\left(u_{00}u_{11} - (u_{01})^2 + 4u_0u_1u_{11} + 2uu_{11}(u_1)^2 - 2u_{01}(u_1)^2 - (u_1)^4\right)^3}{(u_{11})^8};\right.$$
$$\left.\frac{u_0 + uu_1}{u_{11}}; \frac{\left(u_{01} + uu_{11} + (u_1)^2\right)^3}{(u_{11})^4}\right) = 0, \tag{1.63}$$

де Φ – довільна функція.

Таким чином співвідношення (1.57, 1.59, 1.63) дають повний опис галілей-інваріантних рівняння другого порядку, що визначаються базисними операторами (1.53). Рівняння Бюргерса (1.3) є частинним випадком (1.63). Виходячи з теореми 1.15, розглянемо питання про лііївську симетрію одного частинного випадку рівняння (1.63)

$$u_{01} + uu_{11} + (u_1)^2 = C(u_{11})^{4/3}, \tag{1.64}$$

де $C = const, C \neq 0$.

Теорема 1.16 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.64) є нескінченновимірна алгебра з базисними операторами*

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\\
&D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&A = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u,\\
&X = f(t)\partial_x + f'(t)\partial_u,
\end{aligned} \tag{1.65}$$

де $f(t)$ – довільна гладка функція.

Доведення теореми проводиться за допомогою алгоритму Лі.
Зауваження. В (1.65) можна виділити розширення узагальненої алгебри Галілея довільної розмірності. Серед операторів X виділимо

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x,\\
&X_t = t\partial_x + \partial_u,\\
&X_{t^2} = t^2\partial_x + 2t\partial_u,\\
&X_{t^3} = t^3\partial_x + 3t^2\partial_u,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

і розглянемо наступну послідовність підалгебр (1.65)

$$
\begin{aligned}
&A_t = < P_0, X_1, X_t, D, A > = AG_2(1,1)\\
&A_{t^2} = < P_0, X_1, X_t, D, A, X_{t^2} >\\
&A_{t^3} = < P_0, X_1, X_t, D, A, X_{t^2}, X_{t^3} >\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

Для (1.66) мають місце наступні включення

$$
A_t \subset A_{t^2} \subset A_{t^3} \subset \cdots
$$

Отже, в (1.65) можна виділити розширення узагальненої алгебри Галілея довільно~~го~~ї ~~порядку~~ розмірності.

Розділ 2

Симетрійна класифікація систем гідродинамічного типу другого порядку.

В роботах [56, 57] запропоновано наступне узагальнення рівняння Нав'є–Стокса

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}) = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v} + \lambda_4 \nabla p, , \tag{2.1}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \lambda_3 \triangle, \quad l = 1, 2, 3,$$

$\vec{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$, $v^l = v^l(t, \vec{x})$, $p = p(t, \vec{x})$, ∇ – градієнт, $\triangle$ – оператор Лапласа, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні дійсні параметри, $F\left(\vec{v}^2\right)$ – довільна гладка функція. В дисертації розглядається рівняння (2.1) у випадку $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$.

2.1 Симетрійна класифікація одновимірного рівняння другого порядку.

В одновимірному скалярному випадку (при $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$) рівняння (2.1) має вигляд

$$\lambda_1 Lu + \lambda_2 L(Lu) = F(u), \tag{2.2}$$

де $u = u(t, x)$, $L \equiv \partial_t + u\partial_x$.
У тому випадку, коли $\lambda_2 = 0$ та $F(u) = 0$, рівняння (2.2), як відомо, описує просту хвилю

$$u = \varphi(x - tu). \tag{2.3}$$

Формула (2.3) задає загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то рівняння (2.2) можна переписати у вигляді

$$L(Lu)+\lambda Lu=F(u), \lambda=const. \tag{2.4}$$

В розгорнутому записі рівняння (2.4) запишеться таким чином

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2u\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F(u).$$

Очевидно, що при довільній $F(u)$ рівняння (2.4) інваріантне відносно двовимірної алгебри трансляцій, яка визначається операторами

$$P_0=\partial_t, \qquad P_1=\partial_x. \tag{2.5}$$

У цьому параграфі ми проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2.4), тобто опишемо функції $F(u)$, при яких рівняння (2.4) допускає більш широкі алгебри Лі, ніж двовимірна алгебра трансляцій (2.5). Наведемо деякі класи точних розв'язків рівняння (2.4), що задаються неявно.

Симетрійна класифікація.

Симетрійна класифікація (2.4) проводиться з допомогою алгоритму Лі в класі диференціальних операторів першого порядку

$$X=\xi^0(t,x,u)\partial_t+\xi^1(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u. \tag{2.6}$$

Умова інваріантності для (2.4) має вигляд

$$\underset{2}{X}\left(L(Lu)+\lambda Lu-F(u)\right)\Big|_{L(Lu)+\lambda Lu=F(u)}\equiv 0. \tag{2.7}$$

Розписавши умову (2.7), отримуємо (через нижні індекси позначено диференціювання по відповідній змінній)

$$
\begin{aligned}
&\eta\left[2u_{01}+(u_1)^2+2uu_{11}+\lambda u_1-F_u\right]+(u_1+\lambda)\left[\eta_0+\eta_u u_0-\right.\\
&\left.u_j(\xi^j_0+\xi^j_u u_0)\right]+(u_0+2uu_1+\lambda u)\left[\eta_1+\eta_u u_1-u_j(\xi^j_1+\xi^j_u u_1)\right]+\\
&u^2\left[\eta_{11}+2\eta_{1u}u_1+\eta_{uu}(u_1)^2+\eta_u u_{11}-2u_{1j}(\xi^j_1+\xi^j_u u_1)-\right.\\
&\left.u_j(\xi^j_{11}+2\xi^j_{1u}u_1+\xi^j_{uu}(u_1)^2+\xi^j_u u_{11})\right]+\left[\eta_{00}+2\eta_{0u}u_0+\eta_{uu}(u_0)^2+\right.\\
&(\eta_u-2(\xi^0_0+\xi^0_u u_0))(-2uu_{01}-u_0u_1-u(u_1)^2-u^2u_{11}-\lambda(u_0+uu_1)+F)\\
&-2u_{01}(\xi^1_0+\xi^1_u u_0)-u_j(\xi^j_{00}+2\xi^j_{0u}u_0+\xi^j_{uu}(u_0)^2+\xi^j_u(-2uu_{01}-u_0u_1-\\
&\left.u(u_1)^2-u^2u_{11}-\lambda(u_0+uu_1)+F))\right]+2u\left[\eta_{01}+\eta_{0u}u_1+\eta_{1u}u_0+\eta_{uu}u_0u_1\right.\\
&+\eta_u u_{01}-u_{1j}(\xi^j_0+\xi^j_u u_0)-u_j(\xi^j_{01}+\xi^j_{0u}u_1+\xi^j_{1u}u_0+\xi^j_{uu}u_0u_1+\xi^j_u u_{01})-\\
&u_{01}(\xi^1_1+\xi^1_u u_1)-(-2uu_{01}-u_0u_1-u(u_1)^2-u^2u_{11}-\lambda(u_0+uu_1)+F)\cdot\\
&\left.(\xi^0_1+\xi^0_u u_1)\right]\equiv 0.
\end{aligned}
$$

Оскільки ξ^0, ξ^1, η не залежать від u_0, u_1, u_{01}, u_{11}, то після розщеплення по степенням похідних отримуємо систему визначальних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&u\xi^0_u=\xi^1_u,\ \xi^0_u=\xi^1_{uu},\ \xi^0_{uu}=0,\\
&\eta=\xi^1_0+u(\xi^1_1-\xi^0_0)-u^2\xi^0_1,\\
&\eta_{uu}=\xi^0_1+2\xi^0_{0u}-2\lambda\xi^0_u,\\
&\eta-\xi^1_0+u\eta_u+2u(\xi^0_0-\xi^1_1)+u^2\eta_{uu}-2u^2\xi^1_{1u}-2u\xi^1_{0u}+\\
&2u^2\xi^0_1+2\lambda u^2\xi^0_u=0,\\
&\eta_u+\xi^0_0-\xi^1_1-2u^2\xi^0_{1u}+4\lambda u\xi^0_u-2\xi^1_{0u}+2u\eta_{uu}-2u\xi^0_{0u}-2u\xi^1_{1u}=0,\\
&\lambda\xi^0_0+\eta_1+\lambda u\xi^0_1-u^2\xi^0_{11}+2\eta_{0u}-\xi^0_{00}+2u\eta_{1u}-2u\xi^0_{01}-3\xi^0_uF=0,\\
&\lambda\eta+\eta_0-\lambda\xi^1_0+2u\eta_1-\lambda u\xi^1_1+2u^2\eta_{1u}-u^2\xi^1_{11}+2\lambda u\xi^0_0-\\
&\xi^1_{00}+2u\eta_{0u}-2u\xi^1_{01}+2\lambda u^2\xi^0_1-3u\xi^0_uF=0,\\
&-\eta F_u+\lambda\eta_0+\lambda u\eta_1+u^2\eta_{11}+\eta_{00}+(\eta_u-2\xi^0_0)F+2u\eta_{01}-2u\xi^0_1F=0.
\end{aligned}
$$

Розв'язуючи систему визначальних рівнянь, в залежності від $F(u)$, знаходимо (ξ^0, ξ^1, η), а отже визначаємо вид базисних елементів (2.6) алгебри інваріантності рівняння (2.4).

Зауваження. В випадках **1.4**, **2.3**, **2.4** ми додатково вимагаємо

$$\frac{\partial \xi^0}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial \xi^1}{\partial u}=0.$$

Зрозуміло, що для дослідження симетрії рівняння (2.4) принципово різними будуть випадки $\lambda=0$ та $\lambda\neq 0$. Якщо $\lambda\neq 0$, то завжди можна вважати $\lambda \equiv 1$ (існує заміна змінних), тому ми розглянемо випадки $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$. Нижче ми наводимо отримані випадки симетрійної класифікації (2.4), вказуємо скінчені групові перетворення та комутаційні співвідношення для базисних елементів побудованих алгебр інваріантності.

I. Розглядаємо рівняння (2.4), у випадку $\lambda = 0$, тобто рівняння

$$L(Lu) = F(u). \tag{2.8}$$

Симетрійна класифікація (2.8) дає 5 принципово різних випадків.

Випадок 1.1. $F(u)$ – довільна неперервно–диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.8) у цьому випадку є двовимірна алгебра трансляцій (2.5).

Випадок 1.2. $F(u) = a\exp(bu)$, $a, b - const$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
Не обмежуючи загальності можна вважати, що $b \equiv 1$ (існує заміна змінних). Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = a\exp(u) \tag{2.9}$$

є 3–вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \\ &P_1 = \partial_x, \\ &Y = t\partial_t + (x - 2t)\partial_x - 2\partial_u. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Оператори (2.10) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

	P_0	P_1	Y
P_0	0	0	$P_0 - 2P_1$
P_1	0	0	P_1
Y	$-P_0 + 2P_1$	$-P_1$	0

Скінчені групові перетворення, що породжуються оператором Y в (2.10) мають вигляд:

$$\begin{aligned} &t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ &x \to \tilde{x} = (x - 2\theta t)\exp(\theta), \\ &u \to \tilde{u} = u - 2\theta, \end{aligned}$$

тут і надалі θ – груповий параметр відповідної групи Лі.
Слід відмітити, що Y в (2.10) можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея

$$Y = (t\partial_t + x\partial_x) - 2(t\partial_x + \partial_u) = D - 2G.$$

Оператори D та G комутують, тому перетворення, що відповідають Y, можна інтерпретувати як деяку композицію дилатаційних та галілеївських перетворень, тобто як композицію розтягу по t і x і перетворень Галілея, хоча розширена алгебра Галілея не є алгеброю інваріантності рівняння (2.9). Аналогічні результати мають місце й для інших випадків рівняння (2.4).

Випадок 1.3. $F(u) = a(u+b)^p, \quad a, b, p - const, a \neq 0, p \neq 0, p \neq 1.$
Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = a(u+b)^p \tag{2.11}$$

є 3–вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \\ &P_1 = \partial_x, \\ &R = t\partial_t + \left(\frac{p-3}{p-1}x - \frac{2b}{p-1}t\right)\partial_x - \frac{2}{p-1}(u+b)\partial_u. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Оператори (2.12) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

	P_0	P_1	R
P_0	0	0	$P_0 - \frac{2b}{p-1}R$
P_1	0	0	$\frac{p-3}{p-1}P_1$
R	$-P_0 + \frac{2b}{p-1}R$	$-\frac{p-3}{p-1}P_1$	0

Скінчені групові перетворення, що відповідають оператору R в (2.12):

$$\begin{aligned} &t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ &x \to \tilde{x} = x\exp\left(\frac{p-3}{p-1}\theta\right) - bt\exp(\theta), \\ &u \to \tilde{u} = (u+b)\exp\left(-\frac{2}{p-1}\theta\right) - b. \end{aligned}$$

Якщо $b \neq 0$, то знову можна представити R як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея.

Випадок 1.4. $F(u) = au + b, \quad a, b - const,\ a \neq 0$
Внаслідок заміни змінних, завжди можна покласти $a \equiv 1$ або $a \equiv -1$. Розглянемо ці випадки

а) Алгеброю інваріантності рівняння ($\xi_u^0 = 0, \xi_u^1 = 0$)

$$L(Lu) = u + b \tag{2.13}$$

є 7–вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\\
&P_1 = \partial_x,\\
&Y_1 = (x + bt)\partial_x + (u + b)\partial_u,\\
&Y_2 = \mathrm{ch}t\partial_x + \mathrm{sh}t\partial_u,\\
&Y_3 = \mathrm{sh}t\partial_x + \mathrm{ch}t\partial_u,\\
&Y_4 = \mathrm{ch}t\partial_t + (x + bt)\mathrm{sh}t\partial_x + ((x + bt)\mathrm{ch}t + b\mathrm{sh}t)\partial_u,\\
&Y_5 = \mathrm{sh}t\partial_t + (x + bt)\mathrm{ch}t\partial_x + ((x + bt)\mathrm{sh}t + b\mathrm{ch}t)\partial_u.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Комутаційні співвідношення для (2.14) наведено у таблиці:

	P_0	P_1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
P_0	0	0	bP_1	Y_3	Y_2	$Y_5 + bY_3$	$Y_4 + bY_2$
P_1	0	0	P_1	0	0	Y_3	Y_2
Y_1	$-bP_1$	$-P_1$	0	$-Y_2$	$-Y_3$	$-bY_2$	$-bY_3$
Y_2	$-Y_3$	0	Y_2	0	0	0	P_1
Y_3	$-Y_2$	0	Y_3	0	0	$-P_1$	0
Y_4	$-Y_5 - bY_3$	$-Y_3$	bY_2	0	P_1	0	$P_0 - bP_1$
Y_5	$-Y_4 - bY_2$	$-Y_2$	bY_3	$-P_1$	0	$-P_0 + bP_1$	0

Для операторів $Y_1 - Y_3$ в (2.14) вкажемо відповідні скінчені групові перетворення (із–за громіздкості групові перетворення для Y_4, Y_5 не приводяться):

$$\begin{aligned}
Y_1 :\ & t \to \tilde{t} = t,\\
& x \to \tilde{x} = (x + bt)\exp(\theta) - bt,\\
& u \to \tilde{u} = (u + b)\exp(\theta) - b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 :\ & t \to \tilde{t} = t,\\
& x \to \tilde{x} = x + \theta\mathrm{ch}t,\\
& u \to \tilde{u} = u + \theta\mathrm{sh}t.
\end{aligned}$$

$$Y_3: \begin{aligned} & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta \mathrm{sh} t, \\ & u \to \tilde{u} = u + \theta \mathrm{ch} t. \end{aligned}$$

Оператор Y_1 в (2.14) знову ж таки є лінійною комбінацією операторів дилатації та Галілея.

b) Алгеброю інваріантності рівняння ($\xi^0_u = 0, \xi^1_u = 0$)

$$L(Lu) = -u + b \tag{2.15}$$

є 7–вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned} & P_0 = \partial_t, \\ & P_1 = \partial_x, \\ & R_1 = (x - bt)\partial_x + (u - b)\partial_u, \\ & R_2 = \cos t \partial_x - \sin t \partial_u, \\ & R_3 = \sin t \partial_x + \cos t \partial_u, \\ & R_4 = -\cos t \partial_t + (x - bt) \sin t \partial_x + ((x - bt) \cos t - b \sin t)\partial_u, \\ & R_5 = \sin t \partial_t + (x - bt) \cos t \partial_x - ((x - bt) \sin t + b \cos t)\partial_u. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Комутаційні співвідношення для (2.16) наведено у таблиці:

	P_0	P_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
P_0	0	0	$-bP_1$	$-R_3$	R_2	$R_5 - bR_3$	$-R_4 - bR_2$
P_1	0	0	P_1	0	0	R_3	R_2
R_1	bP_1	$-P_1$	0	$-R_2$	$-R_3$	$-bR_2$	$-bR_3$
R_2	R_3	0	R_2	0	0	0	P_1
R_3	$-R_2$	0	R_3	0	0	P_1	0
R_4	$-R_5 + bR_3$	$-R_3$	bR_2	0	$-P_1$	0	$-P_0 + bP_1$
R_5	$R_4 + bR_2$	$-R_2$	bR_3	$-P_1$	0	$P_0 - bP_1$	0

Для операторів R_1 – R_3 в (2.16) вкажемо відповідні скінчені групові перетворення (із–за громіздкості групові перетворення для R_4, R_5 не приводяться):

$$R_1: \begin{aligned} & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = (x - bt)\exp(\theta) + bt, \\ & u \to \tilde{u} = (u - b)\exp(\theta) + b. \end{aligned}$$

$$R_2: \begin{aligned} & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta \cos t, \\ & u \to \tilde{u} = u - \theta \sin t. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_3: \ & t \to \tilde{t} = t, \\
& x \to \tilde{x} = x + \theta \sin t, \\
& u \to \tilde{u} = u + \theta \cos t.
\end{aligned}
$$

Оператор R_1 в (2.16) знову ж таки є лінійною комбінацією операторів дилатації та Галілея.

Випадок 1.5. $F(u) = a, \quad a = const.$

У випадку $a \neq 0$ (існує заміна змінних) не обмежуючи загальності можна покласти $a \equiv 1$. Тому окремо розглянемо випадки $a = 0$ та $a = 1$.

а) Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$
L(Lu) = 0 \tag{2.17}
$$

є 10–вимірна алгебра з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
& P_0 = \partial_t, \\
& P_1 = \partial_x, \\
& G = t\partial_x + \partial_u, \\
& D = t\partial_t + x\partial_x, \\
& D_1 = x\partial_x + u\partial_u, \\
& A_1 = \frac{1}{2}t^2\partial_t + tx\partial_x + x\partial_u, \\
& A_2 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + t\partial_u, \\
& A_3 = u\partial_t + \frac{1}{2}u^2\partial_x, \\
& A_4 = (tu - x)\partial_t + \frac{1}{2}tu^2\partial_x + \frac{1}{2}u^2\partial_u, \\
& A_5 = \left(t^2u - 2tx\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}t^2u^2 - 2x^2\right)\partial_x + \left(tu^2 - 2xu\right)\partial_u.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

В таблиці на сторінці 42 наведено комутаційні співвідношення для алгебри Лі з базисними операторами (2.18).

Слід зазначити, що підалгебри $< P_0, P_1, G >$ та $< A_1, -A_2, G >$ в зображенні (2.18) задають два різних нееквівалентних зображення алгебри Галілея $AG(1,1)$.

	P_0	P_1	G	D	D_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
P_0	0	0	P_1	P_0	0	D	G	0	A_3	$2A_4$
P_1	0	0	0	P_1	P_1	G	0	0	$-P_0$	$-2D-2D_1$
G	$-P_1$	0	0	0	G	A_2	0	P_0	D_1	$-2A_1$
D	$-P_0$	$-P_1$	0	0	0	A_1	A_2	$-A_3$	0	A_5
D_1	0	$-P_1$	$-G$	0	0	0	$-A_2$	A_3	A_4	A_5
A_1	$-D$	$-G$	$-A_2$	$-A_1$	0	0	0	A_4	$\frac{1}{2}A_5$	0
A_2	$-G$	0	0	$-A_2$	A_2	0	0	$D-D_1$	A_1	0
A_3	0	0	$-P_0$	A_3	$-A_3$	A_4	$-D+D_1$	0	0	0
A_4	$-A_3$	P_0	$-D_1$	0	$-A_4$	$-\frac{1}{2}A_5$	$-A_1$	0	0	0
A_5	$-2A_4$	$2D+2D_1$	$2A_1$	$-A_5$	$-A_5$	0	0	0	0	0

Наведемо скінчені групові перетворення, що відповідають операторам в зображенні (2.18)(із за громіздкості групові перетворення для A_4, A_5 не приводяться):

$$G:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x + \theta t, \\ u &\to \tilde{u} = u + \theta. \end{aligned} \qquad D:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ x &\to \tilde{x} = x\exp(\theta), \\ u &\to \tilde{u} = u. \end{aligned}$$

$$D_1:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x\exp(\theta), \\ u &\to \tilde{u} = u\exp(\theta). \end{aligned} \qquad A_1:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = \frac{2t}{2-\theta t}, \\ x &\to \tilde{x} = \frac{4x}{(2-\theta t)^2}, \\ u &\to \tilde{u} = u + \frac{2x\theta}{2-\theta t}. \end{aligned}$$

$$A_2:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x + \frac{1}{2}\theta t^2, \\ u &\to \tilde{u} = u + \theta t. \end{aligned} \qquad A_3:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t + \theta u, \\ x &\to \tilde{x} = x + \frac{1}{2}\theta u^2, \\ u &\to \tilde{u} = u. \end{aligned}$$

b) Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = 1 \tag{2.19}$$

є 10 вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u, \\
&B_1 = t\partial_t + 3x\partial_x + 2u\partial_u, \quad B_2 = \left(x - \frac{1}{6}t^3\right)\partial_x + \left(u - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_u, \\
&B_3 = \frac{1}{2}t^2\partial_t + \left(tx + \frac{1}{12}t^4\right)\partial_x + \left(x + \frac{1}{3}t^3\right)\partial_u, \\
&A_2 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + t\partial_u, \\
&B_4 = \left(u - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}t^4\right)\partial_x + \left(tu - \frac{1}{2}t^3\right)\partial_u, \\
&B_5 = \left(tu - x - \frac{1}{3}t^3\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}tu^2 - \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{24}t^5\right)\partial_x + \\
&\qquad\qquad \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}t^2u - tx - \frac{5}{24}t^4\right)\partial_u, \\
&B_6 = \left(t^2u - 2tx - \frac{1}{6}t^4\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}t^2u^2 - 2x^2 - \frac{1}{3}t^3x - \frac{1}{72}t^6\right)\partial_x + \\
&\qquad\qquad \left(tu^2 - 2xu + \frac{1}{3}t^3u - t^2x - \frac{1}{12}t^5\right)\partial_u.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

В таблиці на сторінці 44 наведено комутаційні співвідношення для алгебри Лі з базисними операторами (2.20).

	P_0	P_1	G	B_1	B_2	B_3	A_2	B_4	B_5	B_6
P_0	0	0	P_1	P_0	$-A_2$	$B_1 - 2B_2$	G	$3B_2 - B_1$	$B_4 - B_3$	$2B_5$
P_1	0	0	0	$3P_1$	P_1	G	0	0	$-P_0 - A_2$	$2B_2 - 2B_1$
G	$-P_1$	0	0	$2G$	G	A_2	0	$P_0 + A_2$	B_2	$-2B_3$
B_1	$-P_0$	$-3P_1$	$-2G$	0	0	B_3	$-A_2$	B_4	$2B_5$	$3B_3$
B_2	A_2	$-P_1$	$-G$	0	0	0	$-A_2$	B_4	B_5	B_6
B_3	$-B_1 + 2B_2$	$-G$	$-A_2$	$-B_3$	0	0	0	$-B_5$	$-\frac{1}{2}B_6$	0
A_2	$-G$	0	0	A_2	A_2	0	0	$B_1 - 3B_2$	B_3	0
B_4	$B_1 - 3B_2$	0	$-P_0 - A_2$	$-B_4$	$-B_4$	B_5	$3B_2 - B_1$	0	0	0
B_5	$B_3 - B_4$	$P_0 + A_2$	$-B_2$	$-2B_5$	$-B_5$	$\frac{1}{2}B_6$	$-B_3$	0	0	0
B_6	$-2B_5$	$2B_1 - 2B_2$	$2B_3$	$-3B_3$	$-B_6$	0	0	0	0	0

Слід знову ж таки зазначити, що підалгебри $< P_0, P_1, G >$ та $< B_3, -A_2, G >$ в зображенні (2.20) визначають два різних нееквівалентних зображення алгебри Галілея $AG(1,1)$.

Таким чином, ми отримали дві принципово нові алгебри Лі, з нелінійними базисними операторами (2.18) та (2.20). Дані алгебри є новими нелінійними розширеннями алгебри Галілея.

Наведемо скінчені групові перетворення, що відповідають операторам в зображенні (2.20)(із–за громіздкості групові перетворення для B_4, B_5, B_6 не приводяться):

$$\begin{aligned} B_1: \;\; & t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ & x \to \tilde{x} = x\exp(3\theta), \\ & u \to \tilde{u} = u\exp(2\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2: \;\; & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = \left(x - \frac{1}{6}t^3\right)\exp(\theta) + \frac{1}{6}t^3, \\ & u \to \tilde{u} = \left(u - \frac{1}{2}t^2\right)\exp(\theta) + \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3: \;\; & t \to \tilde{t} = \frac{2t}{2-\theta t}, \\ & x \to \tilde{x} = \frac{12x - 2t^3}{3(2-\theta t)^2} + \frac{4t^3}{3(2-\theta t)^3}, \\ & u \to \tilde{u} = u + \frac{2t^2}{(2-\theta t)^2} + \frac{12x - 2t^3}{3t(2-\theta t)} - \frac{12x + t^3}{6t}. \end{aligned}$$

II. Розглядаємо рівняння (2.4) у випадку $\lambda \neq 0$, як уже відмічалось, можна покласти $\lambda \equiv 1$. Симетрійна класифікація дає у цьому випадку 4 принципово різні випадки.

Випадок 2.1. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = F(u), \tag{2.21}$$

якщо $F(u)$ – довільна функція, є 2–вимірна алгебра (2.5).

Випадок 2.2. $F(u) = au^3 - \frac{2}{9}u, \quad a = const, a \neq 0.$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = au^3 - \frac{2}{9}u \tag{2.22}$$

є 3–вимірна алгебра з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \\
&P_1 = \partial_x, \\
&Z = \exp\left(\frac{1}{3}t\right)\left(\partial_t - \frac{1}{3}u\partial_u\right).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Комутаційні співвідношення для (2.23) наведено у таблиці:

	P_0	P_1	Z
P_0	0	0	$\frac{1}{3}Z$
P_1	0	0	0
Z	$-\frac{1}{3}Z$	0	0

Скінчені групові перетворення, що породжуються оператором Z в (2.23) мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&t \to \tilde{t} = -3\ln\left(\exp\left(-\frac{1}{3}t\right) - \frac{\theta}{3}\right), \\
&x \to \tilde{x} = x, \\
&u \to \tilde{u} = u\left(1 - \frac{1}{3}\theta\exp\left(\frac{1}{3}t\right)\right).
\end{aligned}
$$

Випадок 2.3. $F(u) = au + b,\ a, b$ – $const$, $a \neq 0$.
Алгеброю інваріантності рівняння ($\xi^0_u = 0, \xi^1_u = 0$)

$$
L(Lu) + Lu = au + b \tag{2.24}
$$

є 5–вимірна алгебра з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \\
&P_1 = \partial_x, \\
&Z_1 = \left(x + \frac{b}{a}t\right)\partial_x + \left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u,
\end{aligned}
$$

а два інші оператори в залежності від значення константи a мають вигляд
а) $a = -\frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
&Z_2 = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\left(\partial_x - \frac{1}{2}\partial_u\right), \\
&Z_3 = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\left(t\partial_x + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\partial_u\right),
\end{aligned}
$$

b) $a > -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$

$$Z_4 = \exp(\alpha t)(\partial_x + \alpha \partial_u),$$
$$Z_5 = \exp(\beta t)(\partial_x + \beta \partial_u),$$

де

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{4a+1}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

c) $a < -\frac{1}{4}$

$$Z_6 = \exp(\gamma t)(\sin \delta t \partial_x + (\gamma \sin \delta t + \delta \cos \delta t)\partial_u),$$
$$Z_7 = \exp(\gamma t)(\cos \delta t \partial_x + (\gamma \cos \delta t - \delta \sin \delta t)\partial_u),$$

де

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{\sqrt{-(4a+1)}}{2}.$$

Для принципово різних операторів вкажемо скінчені групові перетворення

$$\begin{aligned} Z_1: \ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = \left(x + \frac{b}{a}t\right)\exp(\theta) - \frac{b}{a}t, \\ & u \to \tilde{u} = \left(u + \frac{b}{a}\right)\exp(\theta) - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_4: \ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta \exp(\alpha t), \\ & u \to \tilde{u} = u + \alpha\theta \exp(\alpha t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3: \ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta t \exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \\ & u \to \tilde{u} = u + \theta\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_6: \ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta \sin \delta t \exp(\gamma t), \\ & u \to \tilde{u} = u + \theta(\gamma \sin \delta t + \delta \cos \delta t)\exp(\gamma t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_7: \ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta \cos \delta t \exp(\gamma t), \\ & u \to \tilde{u} = u + \theta(\gamma \cos \delta t - \delta \sin \delta t)\exp(\gamma t). \end{aligned}$$

Комутаційні співвідношення алгебри $< P_0, P_1, Z_1, Z_2, Z_3 >$ (в операторі Z_1 $a = -1/4$):

	P_0	P_1	Z_1	Z_2	Z_3
P_0	0	0	$-4bP_1$	$-\frac{1}{2}Z_2$	$Z_2 - \frac{1}{2}Z_3$
P_1	0	0	P_1	0	0
Z_1	$4bP_1$	$-P_1$	0	$-Z_2$	$-Z_3$
Z_2	$\frac{1}{2}Z_2$	0	Z_2	0	0
Z_3	$-Z_2 + \frac{1}{2}Z_3$	0	Z_3	0	0

Комутаційні співвідношення алгебри $< P_0, P_1, Z_1, Z_4, Z_5 >$ $(a > -\frac{1}{4}, a \neq 0)$:

	P_0	P_1	Z_1	Z_4	Z_5
P_0	0	0	$\frac{b}{a}P_1$	αZ_4	βZ_5
P_1	0	0	P_1	0	0
Z_1	$-\frac{b}{a}P_1$	$-P_1$	0	$-Z_4$	Z_5
Z_4	$-\alpha Z_4$	0	Z_4	0	0
Z_5	$-\beta Z_5$	0	Z_5	0	0

Комутаційні співвідношення алгебри $< P_0, P_1, Z_1, Z_6, Z_7 >$ $(a < -\frac{1}{4})$:

	P_0	P_1	Z_1	Z_6	Z_7
P_0	0	0	$\frac{b}{a}P_1$	$\gamma Z_6 + \delta Z_7$	$\gamma Z_7 - \delta Z_6$
P_1	0	0	P_1	0	0
Z_1	$-\frac{b}{a}P_1$	$-P_1$	0	$-Z_6$	Z_7
Z_6	$-\gamma Z_6 - \delta Z_7$	0	Z_6	0	0
Z_7	$-\gamma Z_7 + \delta Z_6$	0	Z_7	0	0

Випадок 2.4. $F(u) = a, \quad a = const.$
Алгеброю інваріантності рівняння $(\xi^0_u = 0, \xi^1_u = 0)$

$$L(Lu) + Lu = a \tag{2.25}$$

є 5-вимірна алгебра з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t,\\
&P_1 = \partial_x,\\
&G = t\partial_x + \partial_u,\\
&Q_1 = \left(x - \frac{a}{2}t^2\right)\partial_x + (u - at)\partial_u,\\
&Q_2 = \exp(-t)(\partial_x - \partial_u).
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

За допомогою таблиці вкажемо комутаційні співвідношення для операторів (2.26):

	P_0	P_1	G	Q_1	Q_2
P_0	0	0	P_1	$-aG$	$-Q_2$
P_1	0	0	0	P_1	0
G	$-P_1$	0	0	G	0
Q_1	aG	$-P_1$	$-G$	0	$-Q_2$
Q_2	Q_2	0	0	Q_2	0

Скінчені групові перетворення для операторів Q_1, Q_2:

$$
\begin{aligned}
Q_1:\ & t \to \tilde{t} = t,\\
& x \to \tilde{x} = \left(x - \frac{a}{2}t^2\right)\exp(\theta) + \frac{a}{2}t^2,\\
& u \to \tilde{u} = (u - at)\exp(\theta) + at.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2:\ & t \to \tilde{t} = t,\\
& x \to \tilde{x} = x + \theta\exp(-t),\\
& u \to \tilde{u} = u - \theta\exp(-t).
\end{aligned}
$$

Таким чином, проведена симетрійна класифікація рівняння (2.4) (описані максимальні алгебри інваріантності за виключенням випадків 1.4, 2.3, 2.4). Отримані нові, сутт'єво нелінійні, зображення алгебр Лі, зокрема нелінійні розширення алгебри Галілея $AG(1,1)$ (див. (2.18), (2.20)) та нестандартні групові перетворення, цікаві з фізичної точки зору.

Поряд з (2.4) природно розглянути рівняння

$$L^-(L^+u) = 0, \tag{2.27}$$

де $u = u(t,x)$, $L^+ = \partial_t + u\partial_x$, $L^- = \partial_t - u\partial_x$.
Зауваження. Якщо виконати заміну $x \to -x$, тоді $L^+ \to L^-$, $L^- \to L^+$.

Рівняння (2.27) в розгорнутому записі можна переписати у вигляді

$$u_{00} + u_0 u_1 - u(u_1)^2 - u^2 u_{11} = 0.$$

Дослідимо ліївську симетрію рівняння (2.27).

Теорема 2.1 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.27) є 4–вимірна алгебра, базис якої визначається операторами*

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \\ &P_1 = \partial_x, \\ &D_0 = t\partial_t - u\partial_u, \\ &D_0 = x\partial_x + u\partial_u. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Доведення проводиться за допомогою методу Лі.

Побудова розв'язків.

У випадку, коли рівняння (2.4) має вигляд

$$L(Lu) + \lambda Lu = a, \quad a, \lambda - const \tag{2.29}$$

заміна змінних

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x = \omega + u\tau, \\ u = u \end{cases} \tag{2.30}$$

дає можливість побудови загального розв'язку (2.29). Внаслідок заміни змінних (2.30)

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \partial_\tau,$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{u_\tau}{1 + \tau u_\omega}.$$

Рівняння (2.29) після виконання заміни матиме вигляд

$$\partial_\tau \left(\frac{u_\tau}{1 + \tau u_\omega}\right) + \lambda \left(\frac{u_\tau}{1 + \tau u_\omega}\right) = a. \tag{2.31}$$

Один раз проінтегрувавши рівняння (2.31), необхідно враховувати випадки $\lambda, a = 0$ або $\neq 0$, отримуємо лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних першого порядку. Знайшовши перші інтеграли відповідної системи рівнянь характеристик і виконавши обернену заміну змінних, знаходимо розв'язки (2.29).

Зауваження. Слід зауважити, що розв'язком рівняння $1 + \tau u_\omega = 0$ в змінних (t, x, u) є $x = f(t)$, де $f(t)$ – довільна функція, тому (2.29) в цьому особливому випадку еквівалентне звичайному диференціальному рівнянню.

Проілюструємо описаний алгоритм ~~це на~~ прикладі рівняння (2.17). Після заміни змінних (2.30), (2.17) перепишеться у вигляді

$$\partial_\tau \left(\frac{u_\tau}{1 + \tau u_\omega} \right) = 0. \tag{2.32}$$

Інтегруючи (2.32), отримуємо

$$\frac{u_\tau}{1 + \tau u_\omega} = g(\omega), \tag{2.33}$$

де $g(\omega)$ – довільна функція.

Якщо $g(\omega) \equiv 0$, тоді $u_\tau = 0$ і ми отримуємо розв'язки типу (2.3) (очевидний факт, оскільки розв'язок рівняння $Lu = 0$ є розв'язком (2.17)). У випадку, коли $g(\omega) \neq 0$, внаслідок довільності $g(\omega)$ можна покласти $g(\omega) = -2(dh(\omega)/d\omega)^{-1}$. Після чого (2.33) матиме вигляд

$$u_\tau + \frac{2\tau}{h'(\omega)} u_\omega = -\frac{2}{h'(\omega)}. \tag{2.34}$$

Система рівнянь характеристик для (2.34):

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{h'(\omega) d\omega}{2\tau} = \frac{h'(\omega) du}{-2}. \tag{2.35}$$

Звідси знаходимо два перших інтеграли

$$\begin{aligned} &\tau^2 - h(\omega) = C_1, \\ &u \pm \int \frac{d\omega}{\sqrt{h(\omega) + C_1}} = C_2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Інтегруючи (2.36) і виражаючи C_1, C_2 через (τ, ω, u), знаходимо розв'язки (2.33) у вигляді

$$\Phi\left(C_1, C_2\right) = 0, \tag{2.37}$$

де Φ – довільна функція. Виконавши в (2.37) обернену заміну змінних, знаходимо розв'язки (2.17). Так, якщо, наприклад, покласти $h(\omega) = \omega$, тоді співвідношення

$$x - ut - t^2 = \Psi(u + 2t),$$

де Ψ – довільна функція, задає клас неявних розв'язків рівняння (2.17).

Аналогічні результати можна отримати і для інших випадків рівняння (2.29).

Зауваження. Якщо в (4) $F(u) \neq const$, то запропонована заміна не приводить до розв'язків.

Наведемо деякі класи побудованих нами розв'язків для (2.29):

1. $L(Lu) = 0$

$$1.1 \quad x - ut + \frac{C}{2}t^2 = \varphi(u - Ct)$$

$$1.2 \quad u \pm \ln(x - ut \mp t) = \varphi\left(t^2 - (x - ut)^2\right)$$

$$1.3 \quad u + \frac{t(x-ut)^3}{t^2(x-ut)^2 - 1} = \varphi\left(t^2 - \frac{1}{(x-ut)^2}\right)$$

$$1.4 \quad u = \varphi\left(\frac{x - ut}{\exp\left(t^2\right)}\right) - \frac{x - ut}{\exp\left(t^2\right)} \int \exp\left(t^2\right) dt$$

2. $L(Lu) = a$

$$x - ut + \frac{a}{3}t^3 + \frac{C}{2}t^2 = \varphi\left(u - \frac{a}{2}t^2 - Ct\right)$$

3. $L(Lu) + Lu = a$

$$x - ut - C(t+1)\exp(-t) + \frac{a}{2}t^2 = \varphi\left(u + C\exp(-t) - at\right)$$

$C = const$, φ – довільна функція.

Зауваження. Наведено лише класи розв'язків, оскільки в загальному випадку не вдається до кінця проінтегрувати отриману систему рівнянь характеристик (в загальному випадку розв'язки можна задавати параметрично).

2.2 Симетрійна класифікація багатовимірної системи рівнянь гідродинамічного типу.

В випадку векторного поля (при $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$) рівняння (2.1) матиме вигляд

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}) = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v}, \tag{2.38}$$

де $\vec{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$,
$L \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_0} + v^k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $\vec{v}^2 = \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2$, $\lambda_1, \lambda_2 = const$,
$F\left(\vec{v}^2\right)$ – довільна гладка функція свого аргументу. Тут і надалі, під індексами, що повторюються, розуміємо сумування від 1 до 3.

У ~~тому~~ випадку, коли $\lambda_2 = 0$, $F\left(\vec{v}^2\right) = 0$, рівняння (2.38) описує рух нев'язкої, нестисливої рідини (система рівнянь Ойлера).

Якщо $\lambda_2 \neq 0$, тоді (2.38) можна переписати у вигляді

$$L\left(L\vec{v}\right) + \lambda L\vec{v} = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v}, \quad \lambda = const, \tag{2.39}$$

або в розгорнутому записі

$$v^l_{00} + 2v^k v^l_{0k} + v^k_0 v^l_k + v^m v^k_m v^l_k + v^m v^k v^l_{mk} + \lambda\left(v^l_0 + v^k v^l_k\right) = F\left(v^k v^k\right) v^l,$$

де $k, m, l = 1, 2, 3$; верхні індекси відповідають компонентам вектора швидкості $\vec{v}$, а нижні індекси визначають диференціювання по відповідній незалежній змінній.

У цьому параграфі ми проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2.39), тобто опишемо функції $F\left(\vec{v}^2\right)$, при яких рівняння (2.39) допускає розширення алгебри інваріантності.

Симетрійна класифікація.

Симетрійна класифікація (2.39) проводиться з допомогою алгоритму Лі в класі диференціальних операторів першого порядку

$$X = \xi^\mu(x, \vec{v})\partial_{x_\mu} + \eta^k(x, \vec{v})\partial_{v^k}, \mu = 0, 1, 2, 3; k = 1, 2, 3. \tag{2.40}$$

Очевидно, що для дослідження симетрії рівняння (2.39) принципово різними будуть випадки $\lambda = 0$ та $\lambda \neq 0$. Якщо $\lambda \neq 0$, то завжди можна вважати $\lambda \equiv 1$ (існує заміна змінних). Тому ми розглянемо окремо два випадки $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$. Ми приводимо лише результати

симетрійної класифікації, упускаючи досить громіздке доведення.
I. Розглядаємо (2.39), у випадку $\lambda = 0$, тобто систему рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v}. \tag{2.41}$$

Симетрійна класифікація (2.41) дає 4 принципово різних випадки.
Випадок 1.1. $F\left(\vec{v}^2\right)$ – довільна неперервно–диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.41) є 7–вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) =< P_\mu, J_{ab} >$, де

$$\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a},\\
&\mu = \overline{0,3};\ a, b = \overline{1,3}; a \neq b.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^2\right) = C\left(v^2\right)^n$, $C, n = const, C \neq 0, n \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = C\left(\vec{v}^2\right)^n\vec{v} \tag{2.43}$$

є 8–вимірна алгебра $AE_1(1,3) =< P_\mu, J_{ab}, D >$ (розширена алгебра Евкліда), де

$$D = x_0\partial_{x_0} + \frac{n-1}{n}x_b\partial_{x_b} - \frac{1}{n}v^b\partial_{v^b}$$

Випадок 1.3. $F\left(\vec{v}^2\right) = C$, $C = const$, $C \neq 0$.
Внаслідок заміни змінних, можна покласти, у цьому випадку $C = 1$ або $C = -1$, тому ми розглянемо ці випадки окремо.
a) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = \vec{v} \tag{2.44}$$

є 21–вимірна алгебра $< P_\mu, M_{ab}, R_a, Z_a, B_1, B_2 >$, де

$$\begin{aligned}
&M_{ab} = x_a\partial_{x_b} + v^a\partial_{v^b},\\
&R_a = \mathrm{sh}x_0\partial_{x_a} + \mathrm{ch}x_0\partial_{v^a},\\
&Z_a = \mathrm{ch}x_0\partial_{x_a} + \mathrm{sh}x_0\partial_{v^a},\\
&B_1 = \mathrm{sh}x_0\partial_{x_0} + x_a\mathrm{ch}x_0\partial_{x_a} + x_a\mathrm{sh}x_0\partial_{v^a},\\
&B_2 = \mathrm{ch}x_0\partial_{x_0} + x_a\mathrm{sh}x_0\partial_{x_a} + x_a\mathrm{ch}x_0\partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

b) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = -\vec{v} \tag{2.45}$$

є 21–вимірна алгебра $< P_\mu, M_{ab}, \widetilde{R_a}, \widetilde{Z_a}, \widetilde{B_1}, \widetilde{B_2} >$, де

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R_a} = \sin x_0 \partial_{x_a} + \cos x_0 \partial_{v^a},\\
&\widetilde{Z_a} = -\cos x_0 \partial_{x_a} + \sin x_0 \partial_{v^a},\\
&\widetilde{B_1} = \sin x_0 \partial_{x_0} + x_a \cos x_0 \partial_{x_a} - x_a \sin x_0 \partial_{v^a},\\
&\widetilde{B_2} = \cos x_0 \partial_{x_0} - x_a \sin x_0 \partial_{x_a} - x_a \cos x_0 \partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

Випадок 1.4. $F\left(\vec{v}^2\right) = 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = 0 \tag{2.46}$$

є 21–вимірна алгебра $< P_\mu, M_{ab}, D_0, G_a, K_a, A >$, де

$$\begin{aligned}
&D_0 = x_0 \partial_{x_0} - v^a \partial_{v^a},\\
&G_a = x_0 \partial_{x_a} + \partial_{v^a},\\
&K_a = (x_0)^2 \partial_{x_a} + 2x_0 \partial_{v^a},\\
&A = (x_0)^2 \partial_{x_0} + 2x_0 x_a \partial_{x_a} + 2x_a \partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

II. Розглядаємо (2.39) у випадку $\lambda \neq 0$, як уже відмічалося можна вважати $\lambda = 1$, тобто систему рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) + L\vec{v} = F\left(\vec{v}^2\right)\vec{v}. \tag{2.47}$$

Симетрійна класифікація (2.46) дає 4 принципово різних випадки.
Випадок 2.1. $F\left(\vec{v}^2\right)$ – довільна неперервно–диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.47) є 7–вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) =< P_\mu, J_{ab} >$.
Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^2\right) = C\vec{v}^2 - \dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$, $C = const, C \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) = \left(C\vec{v}^2 - \frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)\vec{v} \tag{2.48}$$

є 8–вимірна алгебра $< P_\mu, J_{ab}, Q >$, де

$$Q = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_0\right)\left(\partial_{x_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} v^a \partial_{v^a}\right).$$

Випадок 2.3. $F\left(\vec{v}^2\right) = C$, $C = const$, $C \neq 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) + L\vec{v} = C\vec{v} \tag{2.49}$$

є 19–вимірна алгебра $< P_\mu, M_{ab}, Y_{1a}, Y_{2a} >$, де

$$\begin{aligned} Y_{1a} &= \exp\left(\alpha x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \alpha\partial_{v^a}\right), \\ Y_{2a} &= \exp\left(\beta x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \beta\partial_{v^a}\right), \end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}}$, $\beta = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2\sqrt{3}}$.
Випадок 2.4. $F\left(\vec{v}^2\right) = 0$.
Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\right) + L\vec{v} = 0 \tag{2.50}$$

є 19–вимірна алгебра $< P_\mu, M_{ab}, G_a, T_a >$, де

$$T_a = \exp\left(-x_0\right)\left(\partial_{x_a} - \partial_{v^a}\right).$$

Таким чином, проведена симетрійна класифікація системи (2.39), отримано нові розширення алгебри Евкліда.

1.3, 1.4. 2.3 2.4)

2.3 Симетрійна класифікація нелінійної моделі розповсюдження коротковхвильових збурень в релаксуючому середовищі.

В роботі [82] нелінійне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u+u=0 \tag{2.51}$$

використовується для опису розповсюдження коротковхвильових збурень у релаксуючому середовищі, там же побудовані деякі солітонні розв'язки (2.51). В [75] досліджена стійкість цих розв'язків. Ми розглядаємо наступне узагальнення (2.51)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F(u), \tag{2.52}$$

де $F(u)$ – довільна гладка функція. Очевидно, що при довільній $F(u)$ рівняння (2.52) інваріантне відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами $P_0=\partial_t,\ P_1=\partial_x$. Проведемо симетрійну класифікацію (2.52) в розумінні Лі, тобто опишемо всі функції $F(u)$ при яких (2.52) допускає більш широкі алгебри інваріантності.

Теорема 2.2 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.52) в залежності від $F(u)$ є алгебри*

1. $<P_0,P_1>$, *якщо $F(u)$ – довільна*

2. $<P_0,P_1,Y>$, *якщо* $F(u)=a(u+b)^p,\ a,b,p\in R,\ a,p\neq 0,$

$$Y=t\partial_t+\left(\frac{p-2}{p}x-\frac{2b}{p}t\right)\partial_x-\frac{2}{p}(u+b)\partial_u$$

3. $<P_0,P_1,Z>$, *якщо* $F(u)=a\exp(u),\ a\in R,\ a\neq 0,$

$$Z=t\partial_t+(x-2t)\partial_x-2\partial_u$$

4. $<P_0,D,X>$, *якщо* $F(u)=1,$

$$D=x\partial_x+u\partial_u,\ X=g(t)\partial_x+g'(t)\partial_u$$

$g(t)$ – довільна гладка функція

5. $<P_0,D,D_1,A,X>$, *якщо* $F(u)=0$

$$D_1=t\partial_t-u\partial_u,\ A=t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u$$

Доведення проводиться за допомогою алгоритму Лі.

Зауваження. Випадки (4), (5) теореми мають загальний розв'язок. При $F(u) = const$, рівняння (2.52) один раз інтегрується і зводиться до квазілінійного рівняння в частинних похідних.

Слід зазначити, що кожен з операторів Y та Z можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея, тому групові перетвореня, що відповідають операторам Y і Z можна інтерпретувати як деяку композицію дилатаційних та галілеївських перетворень.

Наведемо скінчені групові перетворення для операторів Y та Z:

$$\begin{aligned} Y:\ & t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ & x \to \tilde{x} = x\exp\left(\frac{p-2}{p}\theta\right) - bt\exp(\theta), \\ & u \to \tilde{u} = (u+b)\exp\left(-\frac{2}{p}\theta\right) - b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z:\ & t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \\ & x \to \tilde{x} = (x - 2\theta t)\exp(\theta), \\ & u \to \tilde{u} = u - 2\theta. \end{aligned}$$

Наведемо два приклади редукції для рівняння (2.52):

$$1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(u+b)^p. \tag{2.53}$$

Анзац побудований по оператору

$$Y = t\partial_t + \left(\frac{p-2}{p}x - \frac{2b}{p}t\right)\partial_x - \frac{2}{p}(u+b)\partial_u$$

має вигляд

$$u = t^{-2/p}\varphi(\omega) - b, \ \ \omega = (x+bt)t^{(2-p)/p}. \tag{2.54}$$

Він редукує (2.53) до звичайного диференціального рівняння виду

$$\varphi\varphi'' + \frac{2-p}{p}\omega\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\varphi^p.$$

$$2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a\exp(u). \tag{2.55}$$

Анзац побудований по оператору

$$Z = t\partial_t + (x - 2t)\partial_x - 2\partial_u$$

має вигляд

$$u = \varphi(\omega) - \ln t^2, \quad \omega = \frac{x}{t} + \ln t^2. \tag{2.56}$$

Він редукує (2.55) до звичайного диференціального рівняння виду

$$\varphi\varphi'' + (2 - \omega)\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\exp(\varphi).$$

2.4 Симетрія деяких одновимірних систем гідродинамічного типу.

Розглянемо одновимірну систему гідродинамічного типу у випадку двох залежних змінних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.57}$$

де $u = u(t,x), v = v(t,x)$.

Вивчимо ліївську симетрію системи (2.57) у класі операторів першого порядку виду

$$\begin{aligned} X = \xi^0(t,x,u,v)\partial_t + \xi^1(t,x,u,v)\partial_x + \\ \eta(t,x,u,v)\partial_u + \beta(t,x,u,v)\partial_v. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Теорема 2.3 *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (2.57) є нескінченновимірна алгебра, базисні елементи якої визначаються операторами*

$$\begin{aligned} &G = t\partial_x + \partial_u + \partial_v, \\ &G^{(1)} = x\partial_t - u^2\partial_u - v^2\partial_v, \\ &D = t\partial_t + x\partial_x, \\ &D_1 = x\partial_x + u\partial_u + v\partial_v, \\ &X_1 = f'(u)\partial_t + (uf'(u) - f(u))\partial_x, \\ &X_2 = g'(v)\partial_t + (vg'(v) - g(v))\partial_x, \end{aligned} \tag{2.59}$$

де $f(u), g(v)$ – довільні гладкі функції, $f'(u) = \dfrac{df(u)}{du}$, $g'(v) = \dfrac{dg(v)}{dv}$.

Доведення. Згідно критерію Лі, діючи першим продовженням оператора (2.58)

$$\begin{aligned} \underset{1}{X} = X + \left(D_i(\eta) - u_j D_i(\xi^j)\right)\partial_{u_i} + \\ \left(D_i(\beta) - v_j D_i(\xi^j)\right)\partial_{v_i}, \quad i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{2.60}$$

на кожне з рівнянь системи (2.57) та перейшовши на многовид системи (2.57), після розщеплення по похідним отримуємо систему визначальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\xi^1_u = u\xi^0_u, \quad \xi^1_v = v\xi^0_v,\\
&\eta_v = 0, \quad \beta_u = 0,\\
&\eta = \xi^1_0 + (\xi^1_1 - \xi^0_0)u - \xi^0_1 u^2,\\
&\beta = \xi^1_0 + (\xi^1_1 - \xi^0_0)v - \xi^0_1 v^2,\\
&\eta_0 + v\eta_1 = 0, \quad \beta_0 + u\beta_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Загальний розв'язок системи (2.61) можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = f'(u) + g'(v) + C_1 x + C_2 t,\\
&\xi^1 = uf'(u) - f(u) + vg'(v) - g(v) + C_3 x + C_4 t,\\
&\eta = -C_1 u^2 + (C_3 - C_2)u + C_4,\\
&\beta = -C_1 v^2 + (C_3 - C_2)v + C_4,
\end{aligned}
$$

де $f(u), g(v)$ – довільні гладкі функції, $C_1, C_2, C_3, C_4 = const$.
Що й визначає алгебру інваріантності (2.59).

В (2.59) можна виділити зображення розширених алгебр Галілея та Пуанкаре:

1) $AG_1(1,1) =< P_0, P_1, G, \widetilde{D} >$,
$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x$,
$\widetilde{D} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u - v\partial_v$;

2) $\widetilde{AG}^{(1)}_1(1,1) =< P_0, P_1, G^{(1)}, D^{(1)} >$,
$D^{(1)} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + v\partial_v$;

3) $AP_1(1,1) =< P_0, P_1, J_{01}, D >$,
$J_{01} = G + G^{(1)} = x\partial_t + t\partial_x + (1-u^2)\partial_u + (1-v^2)\partial_v$.

Зауваження. Слід зазначити, що оператори $G^{(1)}$ та J_{01} сутт'єво нелінійні.
Зауваження. Оператор J_{01}, заміною змінних

$$u \to \tilde{u} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},$$

$$v \to \tilde{v} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v},$$

зводиться до канонічного вигляду

$$\widetilde{J_{01}} = x\partial_t + t\partial_x + \partial_{\tilde{u}} + \partial_{\tilde{v}},$$

при цьому система (2.57) перепишеться наступним чином

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \mathrm{th}\tilde{v}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \mathrm{th}\tilde{u}\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

Наведемо скінчені групові перетворення для операторів $G, G^{(1)}, J_{01}$:

$$\begin{aligned} G:\ & t \to \tilde{t} = t, \\ & x \to \tilde{x} = x + \theta t, \\ & u \to \tilde{u} = u + \theta, \\ & v \to \tilde{v} = v + \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}:\ & t \to \tilde{t} = t + \theta x, \\ & x \to \tilde{x} = x, \\ & u \to \tilde{u} = \frac{u}{1+\theta u}, \\ & v \to \tilde{v} = \frac{v}{1+\theta v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{01}:\ & t \to \tilde{t} = t\mathrm{ch}\theta + x\mathrm{sh}\theta, \\ & x \to \tilde{x} = x\mathrm{ch}\theta + t\mathrm{sh}\theta, \\ & u \to \tilde{u} = \frac{u + \mathrm{th}\theta}{1 + u\mathrm{th}\theta}, \\ & v \to \tilde{v} = \frac{v + \mathrm{th}\theta}{1 + v\mathrm{th}\theta} \end{aligned}$$

Інваріанти алгебр Галілея та Пуанкаре:

$$\begin{aligned} AG(1,1):\ & I_1 = u - v, \\ \widetilde{AG}(1,1):\ & I_2 = \frac{u-v}{uv}, \\ AP(1,1):\ & I_3 = \frac{u - v - uv + 1}{v - u - uv + 1}. \end{aligned}$$

Розглянемо систему, що є узагальненням (2.57)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = G(u,v). \end{cases} \tag{2.62}$$

де $F(u,v), G(u,v)$ — довільні гладкі функції.

Вивчимо питання інваріантності системи (2.62) відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$.

Теорема 2.4 *Система (2.62) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = C_1(u-v)^3, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = C_2(u-v)^3, \end{cases} \tag{2.63}$$

де $C_1, C_2 = const$.

Доведення. Достатність доводиться беспосередньо перевіркою інваріантності системи (2.63) відносно базисних операторів зображення алгебри $AG_1(1,1)$.

Доведемо необхідність. Інваріантність (2.62) відносно P_0, P_1 для довільних $F(u,v), G(u,v)$ очевидна. Далі, діючи першим продовженням оператора G

$$\underset{1}{G} = t\partial_x + \partial_u + \partial_v - u_1\partial_{u_0} - v_1\partial_{v_0}$$

на систему (2.62) отримуємо на F та G систему рівнянь в частинних похідних

$$F_u + F_v = 0, \qquad G_u + G_v = 0.$$

Отже $F \equiv F(u-v), \qquad G \equiv G(u-v)$, а звідси будь-яка галілей-інваріантна система (2.62) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(u-v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = G(u-v). \end{cases} \tag{2.64}$$

Додатково вимагаємо для (2.64) інваріантність відносно $\widetilde{D}$. Діючи першим продовженням $\widetilde{D}$

$$\underset{1}{\widetilde{D}} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u - v\partial_v - 3u_0\partial_{u_0} - 2u_1\partial_{u_1} - 3v_0\partial_{v_0} - 2v_1\partial_{v_1}$$

на систему (2.64), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь на F та G

$$\omega F_\omega = 3F, \qquad \omega G_\omega = 3G,$$

де $\omega = u - v$. Розв'язок цих рівнянь і визначає вигляд системи (2.63).

Виконаємо перехід від системи (2.57) до рівняння другого порядку відносно однієї залежної змінної, виконавши заміну

$$v = -\frac{\partial u}{\partial t}\Big/\frac{\partial u}{\partial x},$$

тоді отримуємо рівняння

$$\left(\frac{u_0}{u_1}\right)_0 + u\left(\frac{u_0}{u_1}\right)_1 = 0, \tag{2.65}$$

через нижні індекси позначено диференціювання по відповідній змінній. В розгорнутому записі (2.65) має вигляд

$$u_0u_{01} - u_1u_{00} + u(u_0u_{11} - u_1u_{01}) = 0. \tag{2.66}$$

Рівняння (2.66) можна дещо згорнути, використовуючи визначники

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_{00} & u_{01} \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_{01} & u_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

або у вигляді визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} -u & u_{00} & u_{01} \\ 1 & u_{01} & u_{11} \\ 0 & u_0 & u_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вивчимо ліївську симетрію (2.65). Наступна теорема доводиться на основі алгоритму Лі.

Теорема 2.5 *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.65) є 5–вимірна алгебра, базисні елементи якої визначаються операторами*

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \qquad P_1 = \partial_x, \\ &G = t\partial_x + \partial_u, \\ &D_1 = t\partial_t - u\partial_u, \\ &D_2 = x\partial_x + u\partial_u. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Зауваження. Слід зауважити, що при переході від системи (2.57) до (2.65) сутт'єво втрачається ліївська симетрія.

Структура рівняння (2.65) дає можливість побудови загального розв'язку системи (2.57). Перепишемо (2.65) у вигляді

$$L\left(\frac{u_0}{u_1}\right) = 0, \tag{2.68}$$

де $L \equiv \partial_t + u\partial_x$.

Якщо в (2.68) виконати заміну змінних (2.30), тоді отримуємо рівняння

$$\partial_\tau\left(\frac{u_\tau - uu_\omega}{u_\omega}\right) = 0. \tag{2.69}$$

Один раз проінтегрувавши (2.69), отримуємо квазілінійне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$u_\tau = (u + g(\omega))u_\omega, \tag{2.70}$$

де $g(\omega)$ – довільна функція.

Записуємо для (2.70) систему рівнянь характеристик

$$\frac{d\tau}{-1} = \frac{d\omega}{u + g(\omega)} = \frac{du}{0}. \tag{2.71}$$

Два перших інтеграли (2.71)

$$\int \frac{1}{g(\omega) + u} d\omega + \tau = C_1,$$

$$u = C_2;$$

визначають загальний розв'язок (2.69) у вигляді

$$\int \frac{1}{g(\omega) + u} d\omega + \tau = \varphi(u), \tag{2.72}$$

де φ – довільна функція, u під час інтегрування (2.72) вважається параметром.

Враховуючи попередні заміни змінних, одержуємо загальний розв'язок системи (2.57)

$$\begin{cases} \int \dfrac{1}{g(x-ut) + u}\, d(x - ut) + t = \varphi(u), \\ v = -g(x - ut). \end{cases} \tag{2.73}$$

Наведемо ще дві теореми про максимальну ліївську симетрію наступних систем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.74}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.75}$$

Теорема 2.6 *Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.74) є 6–вимірна алгебра з базисними елементами*

$$\begin{array}{l} P_0 = \partial_t, \qquad P_1 = \partial_x, \qquad P_2 = \partial_u, \\ D_1 = t\partial_t - v\partial_v,\ D_2 = u\partial_u,\ Y = x\partial_u. \end{array} \tag{2.76}$$

Теорема 2.7 *Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.75) є 5–вимірна алгебра з базисними елементами*

$$\begin{array}{l} P_0 = \partial_t, \qquad P_1 = \partial_x, \qquad P_2 = \partial_u, \\ D_1 = t\partial_t - v\partial_v,\ D_2 = u\partial_u. \end{array} \tag{2.77}$$

Доведення теорем 2.6 і 2.7 проводиться за допомогою алгоритму Лі.

Розглянемо наступну одновимірну систему

$$u_0^a + \delta_{ab}R^b(\vec{u})u_1^a = F^a(\vec{u}), \tag{2.78}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$; $u^a = u^a(t, x)$, $a = 1, 2, 3$; $u_0^a = \dfrac{\partial u^a}{\partial t}$; $u_1^a = \dfrac{\partial u^a}{\partial x}$; $F^a, R^b (a, b = 1, 2, 3)$ – довільні гладкі функції; δ_{ab} – символ Кронекера. Вивчимо питання інваріантності системи (2.78) відносно

алгебри Галілея $AG(1,1) =< P_0, P_1, G >$,

розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1) =< P_0, P_1, G, D >$,

узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1) =< P_0, P_1, G, D, \Pi >$, де

$$\begin{array}{l} P_0 = \partial_t, \\ P_1 = \partial_x, \\ G = t\partial_x + \partial_{u^1} + \partial_{u^2} + \partial_{u^3}, \\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^a\partial_{u^a}, \\ \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu^1)\partial_{u^1} + (x - tu^2)\partial_{u^2} + (x - tu^3)\partial_{u^3}. \end{array} \tag{2.79}$$

Використовуючи алгоритм Лі, доведено наступні три теореми.

Теорема 2.8 *Система (2.78) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$u_0^a + \delta_{ab}\left\{R^b\left(u^2 - u^1, u^3 - u^1\right) + u^b\right\}u_1^a = F^a\left(u^2 - u^1, u^3 - u^1\right). \quad (2.80)$$

Теорема 2.9 *Система (2.78) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$u_0^a + \delta_{ab}\left\{(u^2 - u^1)R^b\left(\frac{u^3 - u^1}{u^2 - u^1}\right) + u^b\right\}u_1^a = (u^2 - u^1)^3 F^a\left(\frac{u^3 - u^1}{u^2 - u^1}\right). \quad (2.81)$$

Теорема 2.10 *Система (2.78) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд*

$$u_0^a + \delta_{ab}u^b u_1^a = (u^2 - u^1)^3 F^a\left(\frac{u^3 - u^1}{u^2 - u^1}\right). \quad (2.82)$$

Зауважимо, що системи типу (2.78) часто зустрічаються при моделюванні біологічних систем. [ ]

Розділ 3

Нелінійні зображення алгебр Пуанкаре, Галілея та рівняння для електромагнітного поля.

Як відомо, принципи відносності Галілея, Лоренца–Пуанкаре–Айнштайна можуть бути сформульовані в теоретико–групових термінах [50, 44]. Якщо диференціальне рівняння інваріантне відносно групи Галілея або групи Пуанкаре, то для нього буде виконуватись один з принципів відносності. На даний час побудова нелінінійних зображень алгебр Пуанкаре та Галілея зовсім відкрита проблема. Опис деяких нелінійних зображень цих алгебр у випадку скалярного поля дано в роботах [66, 76, 84]. В даному розділі побудовані деякі нелінійні зображення алгебр Пуанкаре і Галілея та їх розширень для векторних полів, зокрема для вектор–потенціалу. Побудовані нелінійні рівняння, що інваріантні відносно цих зображень. Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [3, 52, 64].

3.1 Нелінійні рівняння та нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея для вектор–потенціалу.

Добре відомі [50] лінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре $AP_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, J_{0a}, D\rangle$ і Галілея $AG_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D_1\rangle$, $\widetilde{AG}_1^{(1)}(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, \widetilde{G}_a^{(1)}, D_2\rangle$ для вектор–потенціалу, базисні елементи яких визначаються операторами

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^b} - A^b\partial_{A^a},\\
&J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a},\\
&G_a = x_0\partial_{x_a} + A^0\partial_{A^a},\\
&\tilde{G}^{(1)}_a = x_a\partial_{x_0} + A^a\partial_{A^0},\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu} + kA^\mu\partial_{A^\mu},\\
&D_1 = 2x_0\partial_{x_0} + x_b\partial_{x_b} + kA^0\partial_{A^0} + (k-1)A^b\partial_{A^b},\\
&D_2 = x_0\partial_{x_0} + 2x_b\partial_{x_b} + (k-1)A^0\partial_{A^0} + kA^b\partial_{A^b},
\end{aligned}
$$

де $\mu = 0, 1, 2, 3$; $a, b = 1, 2, 3$; $k = const$, а під індексами, що повторюються, розуміємо сумування.

В даному параграфі розглядаються нелінійні зображення цих алгебр та нелінійні рівняння, інваріантні відносно отриманих зображень.

Будемо шукати нелінійне зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$ у такому вигляді

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^b} - A^b\partial_{A^a},\\
&J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a},\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu} + R(w)A^\mu\partial_{A^\mu},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

де $R(\omega)$ – довільна функція, ω – інваріант алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$

$$w = A^{0^2} - \vec{A}^2. \tag{3.2}$$

Розглядаємо систему рівнянь для вектор–потенціалу

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = F(w)A^\mu, \tag{3.3}$$

де $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; ω визначається (3.2); $F(\omega)$ – довільна гладка функція.

Теорема 3.1 *Система (3.3) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$ з базисними операторами (3.1) лише у наступних випадках*
(i) $R(\omega)=0$,

$$F(w)\equiv 0, \tag{3.4}$$

(ii) $R(\omega)\neq 0$,

$$F(w)=Cw^{1/2}R(w)\exp\left(-\int\frac{1}{2wR(w)}\,dw\right), \tag{3.5}$$

$C=const.$

Доведення. По–перше, безпосередньою перевіркою комутаційних співвідношень розширенної алгебри Пуанкаре, легко переконатися, що оператори (3.1) визначають зображення розширенної алгебри Пуанкаре.
Пуанкаре–інваріантність системи (3.3) з довільною функцією $F(\omega)$ очевидна. Вияснємо для яких $F(\omega)$ (3.3) інваріантна відносно масштабних перетворень, що породжуються оператором дилатації (3.1). Подіявши першим продовженням D на (3.3), отримуємо дифференціальне рівняння на $F(\omega)$ та $R(\omega)$

$$-2wRF'+(2wR'+R-1)F=0, \tag{3.6}$$

де $F'=\dfrac{d\,F(\omega)}{d\,\omega}$, $R'=\dfrac{d\,R(\omega)}{d\,\omega}$.
Розвязавши (3.6), дістанемо випадки (3.4) та (3.5).

Таким чином, нелінійна система рівнянь для вектор–потенціалу

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}=Cw^{1/2}R(w)\exp\left(-\int\frac{1}{2wR(w)}\,dw\right)A^{\mu}, \tag{3.7}$$

інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре з базисними елементами (3.1) ($R(\omega)\neq 0$).

Систему (3.7) можна спростити, виконавши заміну

$$\int\frac{1}{2wR(w)}\,dw=\ln\varphi(w), \tag{3.8}$$

$\varphi(\omega)$ – нова функція, $\varphi \neq const$.
Внаслідок заміни (3.8) система (3.7) матиме вигляд

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \widetilde{C}\,\frac{w^{-1/2}}{\varphi'(w)}A^{\mu}, \tag{3.9}$$

де $\widetilde{C} = const$, $\varphi'(\omega) = \dfrac{d\,\varphi(\omega)}{d\,\omega}$,
а оператор дилатації в (3.1) перепишеться у вигляді

$$D = x_{\mu}\partial_{x_{\mu}} + \frac{\varphi(w)}{2w\varphi'(w)}A^{\mu}\partial_{A^{\mu}}. \tag{3.10}$$

Зображення (3.1), як частинний випадок, включає в себе лінійне зображення $AP_1(1,3)$ ($R(\omega) = k = const, k \neq 0$). При цьому рівняння (3.7) матиме вигляд

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \widetilde{C}w^{(k-1)/2k}A^{\mu}. \tag{3.11}$$

Будемо шукати нелініне зображення розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,3)$ у вигляді

$$\begin{aligned}
&P_{\mu} = \partial_{x_{\mu}},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^b} - A^b\partial_{A^a},\\
&G_a = x_0\partial_{x_a} + A^0\partial_{A^a},\\
&D_1 = 2x_0\partial_{x_0} + x_b\partial_{x_b} + R(w_1)A^0\partial_{A^0} + (R(w_1) - 1)A^b\partial_{A^b},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

де $R(\omega_1)$ – довільна функція, ω_1 – інваріант алгебри Галілея $AG(1,3)$

$$w_1 = A^0. \tag{3.13}$$

Розглядаємо систему рівнянь для вектор–потенціалу

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = F(w_1)A^{\mu}, \tag{3.14}$$

де ω_1 визначається згідно (3.13), $F(\omega_1)$ – довільна гладка функція.

Теорема 3.2 *Система (3.14) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,3)$, яка визначається операторами (3.12), лише*

у наступних випадках
(i) $R(\omega_1) = 0$,

$$F(w_1) \equiv 0, \tag{3.15}$$

(ii) $R(\omega_1) \neq 0$,

$$F(w_1) = Cw_1 R(w_1) \exp\left(-\int \frac{1}{2w_1 R(w_1)}\, dw_1\right), \tag{3.16}$$

$C = const.$

Доведення проводиться аналогічно як і для теореми 3.1.

Таким чином, система рівнянь для вектор–потенціалу

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = Cw_1 R(w_1) \exp\left(-\int \frac{1}{2w_1 R(w_1)}\, dw_1\right) A^\mu, \tag{3.17}$$

інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея з базисними елементами (3.12) ($R(\omega_1) \neq 0$). В (3.17) виконаємо заміну

$$\int \frac{1}{2w_1 R(w_1)}\, dw_1 = \ln \varphi(w_1), \tag{3.18}$$

$\varphi(\omega_1)$ – нова функція, $\varphi \neq const.$
Внаслідок заміни (3.18), система (3.17) матиме вигляд

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\widetilde{C}}{\varphi'(w_1)} A^\mu, \tag{3.19}$$

де $\widetilde{C} = const, \varphi'(\omega_1) = \dfrac{d\,\varphi(\omega_1)}{d\,\omega_1}$, а оператор дилатації в (3.12) перепишеться у вигляді

$$D_1 = 2x_0\partial_{x_0} + x_b\partial_{x_b} + \frac{\varphi(w_1)}{2w_1\varphi'(w_1)} A^0\partial_{A^0} + \left(\frac{\varphi(w_1)}{2w_1\varphi'(w_1)} - 1\right) A^b\partial_{A^b}. \tag{3.20}$$

Зображення (3.12) включає в себе, як частинний випадок, лінійне зображення $AG_1(1,3)$, якщо $R(\omega_1) = k = const$, $k \neq 0$. При цьому рівняння (3.14) матиме вигляд

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \widetilde{C} {w_1}^{(2k-1)/2k} A^\mu. \tag{3.21}$$

Розглянемо тепер нелінійне зображення розширеної алгебри Галілея $\widetilde{AG}_1^{(1)}(1,3)$ з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^b} - A^b\partial_{A^a},\\
&\tilde{G}_a^{(1)} = x_a\partial_{x_0} + A^a\partial_{A^0},\\
&D_2 = x_0\partial_{x_0} + 2x_b\partial_{x_b} + (R(w_2)-1)A^0\partial_{A^0} + R(w_1)A^b\partial_{A^b},
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

де $R(\omega_2)$ – довільна гладка функція, а ω_2 – інваріант алгебри Галілея $\widetilde{AG}^{(1)}(1,3)$

$$
w_2 = \vec{A}^2. \tag{3.23}
$$

Розглянемо систему рівнянь для вектор–потенціалу виду

$$
A^\nu\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = F(w_2)A^\mu, \tag{3.24}
$$

де ω_2 визначається згідно (3.23), $F(\omega_2)$ – довільна гладка функція.

Теорема 3.3 *Система (3.24) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $\widetilde{AG}_1^{(1)}(1,3)$, базисні елементи якої задаються операторами (3.22), лише у наступних випадках*
(i) $R(\omega_2) = 0$,

$$
F(w_2) \equiv 0, \tag{3.25}
$$

(ii) $R(\omega_2) \neq 0$,

$$
F(w_2) = C{w_2}^{1/2}R(w_2)\exp\left(-\int\frac{1}{w_2R(w_2)}\,dw_2\right), \tag{3.26}
$$

$C = const.$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3.1.

Таким чином, система рівнянь для вектор–потенціалу

$$
A^\nu\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = C{w_2}^{1/2}R(w_2)\exp\left(-\int\frac{1}{w_2R(w_2)}d\,w_2\right)A^\mu, \tag{3.27}
$$

інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $\widetilde{AG}_1^{(1)}(1,3)$ з базисними елементами (3.22) ($R(\omega_2) \neq 0$). В (3.22) виконаємо заміну

$$
\int\frac{1}{w_2R(w_2)}\,dw_2 = \ln\varphi(w_2), \tag{3.28}
$$

$\varphi(\omega_2)$ – нова функція, $\varphi \neq const$.
Внаслідок заміни (3.28), система (3.27) і оператор дилатації в (3.22) матимуть вигляд

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \widetilde{C}\, \frac{{w_2}^{-1/2}}{\varphi'(w_2)} A^\mu, \tag{3.29}$$

$$D_2 = x_0\partial_{x_0} + 2x_b\partial_{x_b} + \left(\frac{\varphi(w_2)}{w_2\varphi'(w_2)} - 1\right) A^0\partial_{A^0} + \frac{\varphi(w_2)}{w_2\varphi'(w_2)} A^b\partial_{A^b}, \tag{3.30}$$

де $\widetilde{C} = const, \varphi'(\omega_2) = \dfrac{d\,\varphi(\omega_2)}{d\,\omega_2}$.
Зображення (3.22) включає, як частинний випадок, лінійне зображення $\widetilde{AG}_1^{(1)}(1,3)$ $(R(\omega_2) = k = const, k \neq 0)$. При цьому рівняння (3.27) матиме вигляд

$$A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \widetilde{C} {w_2}^{(k-2)/2k} A^\mu. \tag{3.31}$$

Ми показали, що система (3.9) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$. Природнім натупним кроком є дослідження інваріантністі цієї системи відносно конформної алгебри

$$AC(1,3) = AP_1(1,3) \oplus \langle K_\mu \rangle, \tag{3.32}$$

де

$$K_\mu = 2x_\mu D - x_\alpha x^\alpha \widetilde{P}_\mu + 2x^\alpha S_{\mu\alpha},$$

по α – коваріантне підсумовування, D визначається (3.10),
$\widetilde{P}_\mu = g_{\mu\nu}\partial_{x_\nu}$, $\qquad S_{\mu\nu} = A^\mu P_{A^\nu} - A^\nu P_{A^\mu}$,
$P_{A^\mu} = g_{\mu\nu}\partial_{A^\nu}$, $\qquad g_{\mu\nu} = (1; -1; -1; -1) \times \delta_{\mu\nu}$.
$\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$.
Діючи першим продовженням K_μ на (3.9) отримуємо умову

$$\frac{\varphi(w)}{w\varphi'(w)} A^{0^2} + 2A^b A^b = 0. \tag{3.33}$$

Вимагаючи, щоб рівняння (3.33) було лоренц–інваріантним, одержуємо на $\varphi(\omega)$ дифференціальне рівняння

$$\frac{\varphi(w)}{w\varphi'(w)} = -2. \tag{3.34}$$

Проінтегрувавши (3.34), знаходимо $\varphi(\omega)$

$$\varphi(w) = Cw^{-1/2}. \tag{3.35}$$

Внаслідок (3.35), система (3.9) і оператор дилатації (3.10) матимуть вигляд

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = CwA^{\mu}, \tag{3.36}$$

$$D = x_{\mu}\partial_{x_{\mu}} - A^{\mu}\partial_{A^{\mu}}. \tag{3.37}$$

Таким чином, система (3.36) інваріантна відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, якщо виконується умова

$$A^{0^2} - \vec{A}^2 = 0. \tag{3.38}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.4 *Система рівнянь*

$$A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{3.39}$$

інваріантна відносно конфорної алгебри $AC(1,3)$ (3.32) тільки тоді, коли вектор–потенціал A задовільняє умові (3.38), конформна степінь при цьому $k = -1$.

На завершення наведемо результати про максимальну симетрію Лі деяких систем для вектор–потенціалу. Ліївську симетрію досліджуємо в класі операторів першого порядку

$$X = \xi^{\mu}(x,A)\partial_{x_{\mu}} + \eta^{\mu}(x,A)\partial_{A^{\mu}}. \tag{3.40}$$

Теорема 3.5 *Алгеброю інваріантності (3.39) є нескінченновимірна алгебра, коефіцієнти базисних елементів ξ^{μ}, η^{μ} якої визначаються з системи рівнянь*

$$\begin{aligned} &-\eta^0 A^a + \eta^a A^0 + A^0 A^a \xi^0_0 - A^{0^2}\xi^a_0 + A^a A^b \xi^0_b - A^0 A^b \xi^a_b = 0,\\ &\quad A^{\nu}\eta^{\mu}_{\nu} = 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

де $a, b = 1,2,3$; $\mu,\nu = 0,1,2,3$; $\xi^0_0 = \dfrac{\partial \xi^0}{\partial_{x_0}}$; $\eta^{\mu}_{\nu} = \dfrac{\partial \eta^{\mu}}{\partial_{x_{\nu}}}$; ...

Можна перевірити, що коефіцієнти операторів в зображеннях (3.1), (3.12), (3.22) будуть задовольняти (3.41), тому підалгебрами алгебри інваріантності системи (3.39) є отримані нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея.

Теорема 3.6 *Максимальною алгеброю інваріантності системи*

$$\Box A^{\mu} + A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{3.42}$$

є розширена алгебра Пуанкаре $AP_1(1,3)$ з базисними операторами (3.1), де $R(\omega) = -1$.

Узагальненням (3.42) є система

$$\Box A^{\mu} + A^{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = F(w)A^{\mu}, \tag{3.43}$$

де ω визначається (3.2), а $F(\omega)$ – довільна гладка функція.

Теорема 3.7 *Система (3.43) інваріантна відносно розширеної алгебри Пуанкаре (3.1) ($R(\omega) = -1$) тоді і тільки тоді, коли $F(\omega) = const$.*

Теорема 3.8 *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.39), якщо на A накласти додаткову умову*

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{3.44}$$

є 20–вимірна алгебра $IGL(1,3)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned} &P_{\mu} = \partial_{x_{\mu}}, \\ &M_{\mu\nu} = x_{\mu}\partial_{x_{\nu}} + A^{\mu}\partial_{A^{\nu}}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Умова (3.44) відома в електродинаміці, як калібровка Лоренца для електромагнітного поля. Підалгебрами (3.45) є розширені алгебри Пуанкаре та Галілея.

Доведення теорем 3.5–3.8 проводиться за допомогою алгоритму Лі.

3.2 Нелінійні рівняння та нелінійні зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу.

Класичне лінійне зображення алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ для вектор–потенціалу $A = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$ має вигляд [50]

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \tag{3.46}$$

$$J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a} + A^a \partial_{A^b} - A^b \partial_{A^a}, \tag{3.47}$$

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + A^k \partial_{A^0} + A^0 \partial_{A^k}, \tag{3.48}$$

де $\mu = \overline{0,3};\ \ a, b, k = \overline{1,3}.$

Інваріант алгебри $AP(1,3)$ у цьому випадку визначається співвідношенням (3.2). Скінчені групові перетворення, що породжуються операторами Лоренца (3.48), мають вигляд

$$\begin{aligned} &x_0 \to \widetilde{x_0} = x_0 \mathrm{ch}\theta_k + x_k \mathrm{sh}\theta_k, \\ &x_k \to \widetilde{x_k} = x_k \mathrm{ch}\theta_k + x_0 \mathrm{sh}\theta_k, \\ &x_a \to \widetilde{x_a} = x_a, \qquad a \neq k \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned} &A^0 \to \widetilde{A^0} = A^0 \mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k, \\ &A^k \to \widetilde{A^k} = A^k \mathrm{ch}\theta_k + A^0 \mathrm{sh}\theta_k, \\ &A^a \to \widetilde{A^a} = A^a, \qquad a \neq k \end{aligned} \tag{3.50}$$

θ_k – дійсний груповий параметр, що відповідає групі перетворень, яка визначається оператором J_{0k}. В (3.49) і (3.50) по k не має сумування.

В даному параграфі пропонуються два нових нелінійних зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу. Фіксуючи зображення (3.46), (3.47) для операторів P_μ, J_{ab} і опираючись на комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре, знайдено частинні випадки нових зображень алгебри Пуанкаре

Випадок 1.

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + \partial_{A^k} - A^k A^\mu \partial_{A^\mu}. \tag{3.51}$$

Оператори (3.46), (3.47), (3.51) визначають нелінійне зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу.

а) Інваріант цієї алгебри має вигляд

$$I = \frac{1 - A^b A^b}{\left(A^0\right)^2}, \qquad A^0 \neq 0. \tag{3.52}$$

b) Скінчені групові перетворення, що породжуються операторами (3.51) (наводимо лише перетворення для A, оскільки перетворення для x_μ задаються формулами (3.49))

$$
\begin{aligned}
&A^k \to \widetilde{A^k} = \frac{A^k \mathrm{ch}\theta_k + \mathrm{sh}\theta_k}{\mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k}, \\
&A^\mu \to \widetilde{A^\mu} = \frac{A^\mu}{\mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k}, \qquad \mu \neq k,
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

по k не має сумування.

Випадок 2.

$$
J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + A^k \partial_{A^0} + A^0 \partial_{A^k} \mp A^k A^\mu \partial_{A^\mu}. \tag{3.54}
$$

Оператори (3.46), (3.47), (3.54) визначають нелінійне зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу.

a) Інваріант цієї алгебри має вигляд

$$
I = \frac{A^b A^b \mp 2A^0 + 1}{\left(A^0 \mp 1\right)^2}, \qquad A^0 \neq \pm 1. \tag{3.55}
$$

b) Скінчені групові перетворення, що породжуються операторами (3.54) (наводимо лише перетворення для A, оскільки перетворення для x_μ задаються формулами (3.49))

$$
\begin{aligned}
&A^0 \to \widetilde{A^0} = \frac{A^0 \mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k}{1 \mp A^0 \pm \left(A^0 \mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k\right)}, \\
&A^k \to \widetilde{A^k} = \frac{A^k \mathrm{ch}\theta_k + A^0 \mathrm{sh}\theta_k}{1 \mp A^0 \pm \left(A^0 \mathrm{ch}\theta_k + A^k \mathrm{sh}\theta_k\right)}, \\
&A^a \to \widetilde{A^a} = A^a, \qquad a \neq k,
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

по k не має сумування.

Справедливі наступні теореми:

Теорема 3.9 *Система рівнянь*

$$
\frac{\partial A^\mu}{\partial x_0} + A^b \frac{\partial A^\mu}{\partial x_b} = 0 \tag{3.57}
$$

інваріантна відносно нелінійного зображення алгебри Пуанкаре, яке визначається операторами (3.46), (3.47), (3.51).

Доведення. Згідно алгоритму Лі отримуємо, що координати ξ^μ, η^μ базисних елементів (3.40) алгебри інваріантності (3.57) повинні задовільняти систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\eta^b = \xi_0^b + A^a\xi_a^b - A^b\xi_0^0 - A^bA^a\xi_a^0, \\ &\eta_0^\mu + A^b\eta_b^\mu = 0, \end{aligned} \tag{3.58}$$

де $\xi_0^b = \dfrac{\partial \xi^b}{\partial x_0}$; $\eta_b^\mu = \dfrac{\partial \eta^\mu}{\partial x_b}$; ...
Зокрема, коефіцієнти операторів (3.46), (3.47), (3.51) задовольняють (3.58).

Теорема 3.10 *Система рівнянь (3.39) інваріантна відносно нелінійного зображення алгебри Пуанкаре, яке визначається операторами (3.46), (3.47), (3.54).*

Доведення. Ми показали (теорема 3.5), що алгебра інваріантності системи (3.39) нескінченновимірна і визначається (3.41). Зокрема, коефіцієнти операторів (3.46), (3.47), (3.54) теж будуть задовольняюти (3.41).

3.3 Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля.

В роботах [43, 44] показано, що система рівнянь

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H}, \qquad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E} \tag{3.59}$$

не є інваріантною відносно алгебри Лоренца, базисні оператори якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} J_{ab} &= x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a}, \\ J_{0a} &= x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{H^c} - H^b\partial_{E^c}\right), \end{aligned} \tag{3.60}$$

$a, b, c = \overline{1,3}$, ε_{abc} – повністю антисиметричний тензор третього порядку, $x_0 = t$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Система (3.59) допускає алгебру Лоренца (3.60) тоді і тільки тоді, коли $\vec{E}$ і $\vec{H}$ додатково задовольняють систему рівнянь [43, 44]

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0. \tag{3.61}$$

(3.59), (3.61) утворюють повну систему рівнянь Максвела для електромагнітного поля.

Далі ми дослідимо симетрію рівняння неперервності

$$\rho_0 + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0, \tag{3.62}$$

де $\rho_0 = \dfrac{\partial\rho}{\partial x_0}$; $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$; ρ та ρv^k є функціями від $\vec{E}, \vec{H}$.

Згідно Пойтингу, густина та імпульс для електромагнітного поля визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right), \\ \rho v^a &= \varepsilon_{akn}E^kH^n, \qquad a, k, n = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Для рівняння (3.62), де $\rho, \rho\vec{v}$ визначаються співвідношеннями (3.63), справедлива теорема.

Теорема 3.11 *Рівняння неперервності (3.62), (3.63) не є інваріантним відносно алгебри Лоренца з базисними елементами (3.60).*

Доведення. Підставивши (3.63) в (3.62), отримуємо рівняння

$$L\left(\vec{E},\vec{H}\right)=0, \tag{3.64}$$

де

$$L \equiv E_0^l E^l + H_0^l H^l + \varepsilon_{lkn}\left(E_l^k H^n + E^k H_l^n\right)$$

$$E_k^l = \frac{\partial E^l}{\partial x_k},\ H_k^l = \frac{\partial H^l}{\partial x_k}, \ldots$$

Для доведення теореми використовуємо ліївський критерій інваріантності до рівняння (3.64)

$$\widetilde{J_{\mu\nu}} L\left(\vec{E},\vec{H}\right)\Bigg|_{L\left(\vec{E},\vec{H}\right)=0} \equiv 0, \tag{3.65}$$

де $\widetilde{J_{\mu\nu}}$ – перше продовження операторів (3.60) $J_{\mu\nu}, \mu, \nu = \overline{0,3}$.

Легко переконатися, що умова (3.65) виконується для операторів J_{ab}:

$$\widetilde{J_{ab}} L\left(\vec{E},\vec{H}\right)\Bigg|_{L\left(\vec{E},\vec{H}\right)=0} \equiv 0. \tag{3.66}$$

Для операторів J_{0a} отримуємо

$$\begin{gathered}
\widetilde{J_{0a}} L\left(\vec{E},\vec{H}\right) = \varepsilon_{abc}\left[E^b\left(H_0^c + \varepsilon_{lkc}E_l^k\right) - H^b\left(E_0^c + \varepsilon_{lcn}H_l^n\right)\right] + \\
\left(-\varepsilon_{abc}H_0^b - E_a^c\right)E^c + \left(\varepsilon_{abc}E_0^b - H_a^c\right)H^c + \left(-\varepsilon_{abc}H_a^b - E_0^c\right)\varepsilon_{acn}H^n \\
+\left(\varepsilon_{abc}E_a^b - H_0^c\right)\varepsilon_{akc}E^k - \varepsilon_{abc}H_d^b\varepsilon_{dcn}H^n + \varepsilon_{abc}E_d^b\varepsilon_{dkc}E^k = \\
\varepsilon_{abc}E^b\left(H_0^c + \varepsilon_{ckl}E_l^k\right) - \varepsilon_{abc}H^b\left(E_0^c - \varepsilon_{cnl}H_l^n\right) - \\
E^a \mathrm{div}\vec{E} - H^a \mathrm{div}\vec{H}, \\
a,b,c,d,k,l,n = \overline{1,3};\ a \neq d.
\end{gathered} \tag{3.67}$$

Таким чином, для рівняння (3.62), (3.63) критерій (3.65) не виконується. Теорема доведена.

Оскільки рівняння (3.62), (3.63) не інваріантне відносно групи Лоренца в класичному розумінні, природно виникає питання, чи не є воно лоренц–інваріантним разом з додатковими умовами на $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Іншими словами, вивчимо умовну симетрію рівняння (3.62), (3.63) відносно алгебри Лоренца (3.60).

Теорема 3.12 *Рівняння неперервності (3.62), (3.63) інваріантне відносно алгебри Лоренца з базисними елементами (3.60) тоді і тільки тоді, коли $\vec{E}$ і $\vec{H}$ задовольняють систему рівнянь Максвела (3.59), (3.61).*

Доведення. Для інваріантності рівняння (3.64) відносно алгебри Лоренца (3.60), згідно критерію (3.65) та співвідношень (3.67), (3.66) необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} &H_0^c + \varepsilon_{ckl} E_l^k = 0, \\ &E_0^c - \varepsilon_{cnl} H_l^n = 0, \\ &\mathrm{div}\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Але ж система (3.68) є покомпоненентним записом рівнянь Максвела (3.59), (3.61), які є лоренц–інваріантними. Теорема доведена.

Отже, рівняння неперервності (3.62), (3.63), що виражає закон збереження для електромагнітного поля, не є лоренц–інваріантним в класичному розумінні інваріантності диференціального рівняння. Воно є лише умовно інваріантним відносно групи Лоренца, причому як додаткова умова виступає система рівнянь Максвела.

Тепер розглянемо рівняння неперервності (3.62), (3.63) з додатковою умовою (3.61), тобто за додаткову умову ми взяли не всю систему рівнянь Максвела, а лише одну пару рівнянь.

Теорема 3.13 *Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.61)–(3.63) є нескінченновимірна алгебра, базисні елементи якої визначаються операторами*

$$\begin{aligned} &P_\mu = \partial_{x_\mu}, \\ &J_{ab} = x_a \partial_{x_b} - x_b \partial_{x_a} + E^a \partial_{E^b} - E^b \partial_{E^a} + H^a \partial_{H^b} - H^b \partial_{H^a}, \\ &D = x_0 \partial_{x_0} + x_a \partial_{x_a} + 2E^a \partial_{E^a} + 2H^a \partial_{H^a}, \\ &M = f(x_0) \left(H^a \partial_{E^a} - E^a \partial_{H^a} \right), \end{aligned} \tag{3.69}$$

де $f(x_0)$ — довільна гладка функція.

Доведення. Лiївську симетрію досліджуємо в класі операторів

$$X = \xi^\mu(x, \vec{E}, \vec{H}) \partial_{x_\mu} + \eta^k(x, \vec{E}, \vec{H}) \partial_{E^k} + \beta^k(x, \vec{E}, \vec{H}) \partial_{H^k}. \tag{3.70}$$

Діючи першим продовженням (3.70) на систему (3.61)–(3.63) та перейшовши на многовид (3.61)–(3.63), після розщеплення по похідним, розв'язуємо систему визначальних рівнянь на ξ^μ, η^k, β^k (ми упускаємо досить громіздкі обчислення).

Отже, система (3.61)–(3.63) не є лоренц–інваріантною.

Нехай в (3.62)

$$\begin{aligned} & v^a = v^a(x), \ \ \rho = F(\Psi^m), \ \ m = \overline{1,6}; \\ & \Psi^a = E^a, \qquad \Psi^{a+3} = H^a, \ \ a = \overline{1,3}; \end{aligned} \tag{3.71}$$

Тоді справедлива теорема.

Теорема 3.14 *Рівняння (3.62), (3.71) інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри з базисними операторами*

$$Q = \xi^0(x)\partial_{x_0} + \xi^b(x)\partial_{x_b} + \eta^a\partial_{v^a} + \beta^m\partial_{\Psi^m}, \tag{3.72}$$

де $\xi^0, \xi^b, \eta^a, \beta^m$ *визначаються з співвідношень*

$$\eta^a = \left(\xi^a_b - \xi^0_b\right) v^b - \left(\frac{g(x)}{F} + \xi^0_0\right) v^a + \xi^a_0 + \frac{A^a(x)}{F},$$

$$\beta^m F_{\Psi^m} = CF + F\xi^0_a v^a + g(x),$$

$$\xi^b_b = C, C = const,$$

а функції $A^a(x), g(x)$ *задовольняють рівняння*

$$g_0 + A^b_b = 0$$

Якщо в рівнянні (3.62) розглядати $\rho, \vec{v}$, як довільні функції від $x = (x_0, \vec{x})$ і шукати симетрію в класі операторів

$$Q = \xi^\mu(x, \vec{v}, \rho)\partial_{x_\mu} + \eta^a(x, \vec{v}, \rho)\partial_{v^a} + \beta(x, \vec{v}, \rho)\partial_\rho, \tag{3.73}$$

тоді справедлива теорема

Теорема 3.15 *Алгеброю інваріантності рівняння неперервності (3.62) є нескінченновимірна алгебра Лі, що породжується оператором*

$$Q = \xi^\mu\partial_{x_\mu} + \eta^a\partial_{v^a} + \beta\partial_\rho,$$

де

$$\eta^a = \left(\xi^a_b - v^a\xi^0_b\right) v^b - \left(\frac{g(x)}{\rho} + \xi^0_0\right) v^a + \xi^a_0 + \frac{f^a(x)}{\rho},$$

$$\beta = \rho\xi^0_a v^a + (C - \xi^a_a)\rho + g(x),$$

$$g_0 + f^a_a = 0, C = const.$$

Доведення теорем 3.14, 3.15 проводиться за допомогою алгоритму Лі.

Розглянемо тепер рівняння (3.62) у випадку, коли $\rho, \vec{v}$ деякі невідомі функції від $\vec{E}$ та $\vec{H}$, тобто вважаємо

$$\rho = F^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \rho v^a = F^a\left(\vec{E}, \vec{H}\right), a = \overline{1,3} \tag{3.74}$$

де F^0, F^a – гладкі функції, які одночасно не є тотожними нулями.

Шукаємо оператори лоренцових поворотів J_{0a} у вигляді

$$J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k}, \tag{3.75}$$

де η^{ak}, β^{ak} – невідомі функції від $\vec{E}, \vec{H}$, які будемо визначати з умов інваріантності рівняння (3.62), (3.74) відносно операторів (3.75).

Оскільки в (3.62) $\rho, \rho\vec{v}$ можна розглядати як чотирьох–вектор, то побудова операторів симетрії J_{0a} (3.75) для (3.62), (3.74) еквівалентна знаходженню операторів $\overline{J_{oa}}$ виду

$$\overline{J_{0a}} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k} \tag{3.76}$$

для системи

$$\frac{\partial A^0}{\partial x_0} + \frac{\partial A^a}{\partial x_a} = 0, \tag{3.77}$$

$$A^\mu = F^\mu\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \mu = \overline{0,3}. \tag{3.78}$$

Очевидно, що рівняння (3.77) інваріантне відносно операторів $\overline{J_{0a}}$, тому дослідження інваріантності системи (3.77), (3.78) відносно операторів (3.76) зводиться до дослідження інваріантності алгебраїчної системи (3.78).

Для того, щоб система (3.78) була інваріантною відносно перетворень, що генеруються операторами $\overline{J_{0a}}$, неохідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення

$$\overline{J_{0a}}\left(A^{\mu}-F^{\mu}\left(\vec{E},\vec{H}\right)\right)\Bigg|_{A^{\mu}=F^{\mu}\left(\vec{E},\vec{H}\right)}\equiv 0. \tag{3.79}$$

З (3.79) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} F^{a} &= \eta^{ak}F^{0}_{E^{k}}+\beta^{ak}F^{0}_{H^{k}},\\ \delta_{ab}F^{0} &= \eta^{ak}F^{b}_{E^{k}}+\beta^{ak}F^{b}_{H^{k}}, \end{aligned} \tag{3.80}$$

де δ_{ab} – символ Кронекера, $F^{0}_{E^{k}}=\dfrac{\partial F^{0}}{\partial E^{k}},\ldots$

Таким чином, щоб знайти η^{ak},β^{ak}, нам неохідно розв'язати лінійну алгебраїчну систему рівнянь (3.80). Очевидно, що (3.80) можна розглядати як три незачеплені алгебраїчні системи розмірності 4×6 відносно η^{ak},β^{ak}. Запишемо (3.80) в матричному вигляді

$$B\begin{pmatrix}\eta^{a}\\ \beta^{a}\end{pmatrix}=b^{a},\qquad a=\overline{1,3} \tag{3.81}$$

де

$$B=\left(F^{\mu}_{E^{k}},\ F^{\mu}_{H^{k}}\right),$$

B – матриця Якобі функцій F^{μ} розмірності 4×6,

$$\eta^{a}=\begin{pmatrix}\eta^{a1}\\ \eta^{a2}\\ \eta^{a3}\end{pmatrix},\qquad \beta^{a}=\begin{pmatrix}\beta^{a1}\\ \beta^{a2}\\ \beta^{a3}\end{pmatrix},$$

$$b^{1}=\begin{pmatrix}F^{1}\\ F^{0}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\qquad b^{2}=\begin{pmatrix}F^{2}\\ 0\\ F^{0}\\ 0\end{pmatrix},\qquad b^{3}=\begin{pmatrix}F^{3}\\ 0\\ 0\\ F^{0}\end{pmatrix}.$$

Отже, нам потрібно знайти розв'язки (η^{a},β^{a}) алгебраїчних систем (3.81). (3.81) мають розв'язки, коли виконується умова

$$r(B)=r(B|b^{a}),\qquad a=\overline{1,3}. \tag{3.82}$$

Умова (3.82) — умова рівності рангів однорідної та розширеної системи.

Зауваження. Ранг кожної з систем (3.81) ≤ 4 (4 рівняння, 6 невідомих), причому $r(B) \leq r(B|b^a)$. Отже, якщо розв'язок існує, то не єдиний.

Для рангів однорідної і розширеної системи можливий один з п'яти варіантів $r = 0; 1; 2; 3; 4$. При $r \leq 3$, оскільки F^μ не є одночасно тотожніми нулями, легко переконатися, що (3.81) не має розв'язків. Справедлива теорема.

Теорема 3.16 *Рівняння неперервності (3.62), (3.74) інваріантне відносно групи Лоренца тоді і тільки тоді, коли*

$$r(B) = 4. \tag{3.83}$$

Доведення. Очевидна інваріантність рівняння (3.77) відносно операторів $\overline{J_{0a}}$. Умова (3.83) забезпечує інваріантність (3.78) відносно $\overline{J_{0a}}$. Але оскільки виконуються комутаційні співвідношення

$$[\overline{J_{0a}}, \overline{J_{0b}}] = \overline{J_{ab}},$$

тоді й оператори $\overline{J_{ab}}$ є операторами симетрії системи (3.77), (3.78). А отже й система (3.62), (3.74) є лоренц-інваріантною. Отже, знаходження операторів Лоренца зводиться до розв'язання алгебраїчної системи (3.81).

Тепер наведемо декілька конкретних прикладів (наводимо в кожному випадку лише один з сім'ї розв'язків (3.81), для заданих F^μ):

1. $F^0 = H^1$, $F^a = E^a$

Рівняння (3.62) матиме вигляд

$$H_0^1 + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + H^1\partial_{E^1} + E^1\partial_{H^1},$$

$$J_{02} = x_2\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_2} + H^1\partial_{E^2} + E^2\partial_{H^1},$$

$$J_{03} = x_3\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_3} + H^1\partial_{E^3} + E^3\partial_{H^1}.$$

2. $F^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^a = E^a$
Рівняння (3.62) матиме вигляд

$$E^a E_0^a + H^a H_0^a + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + F^0 \partial_{E^k} + \frac{E^k(1 - F^0)}{H^k} \partial_{H^k},$$

по k не має сумування.
3. $F^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^k = \frac{1}{2}\left({E^k}^2 + {H^k}^2\right)$,
Оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + \frac{F^k + F^0}{2E^k} \partial_{E^k} + \frac{F^k - F^0}{2H^k} \partial_{H^k},$$

по k не має сумування.

3.4 Деякі нелінійні узагальнення рівнянь Максвела.

Розглянемо систему рівнянь Максвела з нелінійними доданками

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_0} = \mathrm{rot}\vec{H} + \vec{F}\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x_0} = -\mathrm{rot}\vec{E} + \vec{G}\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \tag{3.85}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = F^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \mathrm{div}\vec{H} = G^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right). \tag{3.86}$$

Теорема 3.17 *Система рівнянь (3.84)–(3.86) інваріантна відносно алгебри Лоренца з базисними елементами*

$$\begin{aligned} J_{ab} &= x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a}, \\ J_{0a} &= x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{H^c} - H^b\partial_{E^c}\right), \end{aligned} \tag{3.87}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\vec{F} \equiv \vec{0},\ \vec{G} \equiv \vec{0},\ F^0 \equiv 0,\ G^0 \equiv 0.$$

Доведення. Достатність теореми очевидна [43], [44].
Необхідність. Діємо першим продовження оператора J_{0k} на (3.84), тоді отримуємо

$$J_{0k}F^a = 0, \qquad a \neq k, \tag{3.88}$$

$$J_{0k}F^k = -F^0(\text{ по } k \text{ не має підсумовування }) \tag{3.89}$$

Подіявши першим продовженням операторів J_{ab} на перше рівняння в (3.86), одержимо

$$J_{ab}F^0 = 0. \tag{3.90}$$

Отже $F^0 = F^0(\vec{E}^2, \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H})$. Подіявши першим продовженням J_{0k} на (3.86), отримуємо

$$J_{0k}F^0 = -F^k. \tag{3.91}$$

З (3.91) випливає

$$F^k = \varepsilon_{kbc} H^b E^c \left(F^0_{\omega_1} + F^0_{\omega_2} \right), \tag{3.92}$$

де $\omega_1 = \vec{E}^2, \ \omega_2 = \vec{H}^2$

З умов (3.88) ~~слідує~~ $F^0_{\omega_1} + F^0_{\omega_2} = 0$, а отже, $F^k \equiv 0$. З (3.89) отримуємо $F^0 \equiv 0$. Аналогічно, розглядаючи (3.85) та друге рівняння (3.86), доводимо $G^k \equiv 0, \ G^0 \equiv 0$.

Розлянемо рівняння

$$\operatorname{div} \left(R\vec{E} + N\vec{H} \right) = 0, \tag{3.93}$$

де R, N – довільні гладкі функції від інваріантів алгебри Лоренца

$$\omega_1 = \vec{E}^2 \cancel{+} \vec{H}^2, \qquad \omega_2 = \vec{E}\vec{H}. \tag{3.94}$$

Досліджуємо умовну симетрію рівняння (3.93) відносно алгебри Лоренца, базисні елементи якої визначаються операторами (3.87).

Теорема 3.18 *Рівняння (3.93) інваріантне відносно алгебри Лоренца (3.87) тоді і тільки тоді, коли $\vec{E}, \vec{H}$ задовольняють систему рівнянь*

$$\frac{\partial \left(R\vec{E} + N\vec{H} \right)}{\partial x_0} = \operatorname{rot} \left(R\vec{H} - N\vec{E} \right). \tag{3.95}$$

Доведення. Подіявши першим продовженням J_{0k}

$$\overline{J_{0k}} = J_{0k} + \left(\varepsilon_{kmn} E^m_\alpha - H^n_j \xi^j_\alpha \right) \partial_{H^n_\alpha} - \left(\varepsilon_{kmn} H^m_\alpha + E^n_j \xi^j_\alpha \right) \partial_{E^n_\alpha}$$

на (3.93) і враховуючи, що R і N залежать від інваріантів групи Лоренца, отримуємо систему рівнянь, яка після деяких (досить громіздких) алгебраїчних спрощень матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
&-RE^k_0 - NH^k_0 - \left[\left(H^b R_{\omega_2} + 2E^b R_{\omega_1} \right) E^k + \right. \\
&\left. \left(H^b N_{\omega_2} + 2E^b N_{\omega_1} \right) H^k \right] E^b_0 + \left[\left(E^b R_{\omega_2} - 2H^b R_{\omega_1} \right) E^k + \right. \\
&\left. \left(E^b N_{\omega_2} - 2H^b N_{\omega_1} \right) H^k \right] H^b_0 + N\varepsilon_{kma} E^m_a - R\varepsilon_{kma} H^m_a - \\
&\varepsilon_{kma} H^m \left[2R_{\omega_1} \left(E^b E^b_a - H^b H^b_a \right) + R_{\omega_2} \left(E^b_a H^b + E^b H^b_a \right) \right] + \\
&\varepsilon_{kma} E^m \left[2N_{\omega_1} \left(E^b E^b_a - H^b H^b_a \right) + N_{\omega_2} \left(E^b_a H^b + E^b H^b_a \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Система (3.96) є покомпонентним записом (3.95), отже система (3.95) визначає додаткову умову при якій буде лоренц–інваріантною система (3.93). Аналогічно доводимо інваріантність системи (3.95) відносно алгебри Лоренца при додатковій умові (3.93).

Оскільки R, N в системі (3.93), (3.95) є довільними функціями від інваріантів групи Лоренца (3.87), то очевидно, що система рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left(R\vec{E}\right)}{\partial x_0}=\mathrm{rot}\left(R\vec{H}\right),\quad \frac{\partial\left(N\vec{H}\right)}{\partial x_0}=-\mathrm{rot}\left(N\vec{E}\right),\\ \mathrm{div}\left(R\vec{E}\right)=0,\qquad\qquad \mathrm{div}\left(N\vec{H}\right)=0\end{gathered}\tag{3.97}$$

є лоренц–інваріантною. Система (3.97) є нелінійним узагальненням рівнянь Максвела у вакумі.

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_0}=\mathrm{rot}\vec{H}+R_1\vec{\nabla}p_1,\\ &\frac{\partial\vec{H}}{\partial x_0}=-\mathrm{rot}\vec{E}+R_2\vec{\nabla}p_2,\end{aligned}\tag{3.98}$$

де R_1, R_2, p_1, p_2 – довільні гладкі функції від інваріантів групи Лоренца (3.94).

Теорема 3.19 *Система (3.98) інваріантна відносно алгебри Лоренца (3.87) тоді і тільки тоді, коли $\vec{E}$ і $\vec{H}$ задовольняють рівняння*

$$R_1\frac{\partial p_1}{\partial x_0}=\mathrm{div}\vec{E},\quad R_2\frac{\partial p_2}{\partial x_0}=\mathrm{div}\vec{H}.\tag{3.99}$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 3.18.

Таким чином, ми отримали ще одне нелінійне узагальнення системи рівнянь Максвела, що також є інваріантним відносно перетворень Лоренца

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_0}=\mathrm{rot}\vec{H}+R_1\vec{\nabla}p_1,\quad \frac{\partial\vec{H}}{\partial x_0}=-\mathrm{rot}\vec{E}+R_2\vec{\nabla}p_2,\\ R_1\frac{\partial p_1}{\partial x_0}=\mathrm{div}\vec{E},\qquad\qquad R_2\frac{\partial p_2}{\partial x_0}=\mathrm{div}\vec{H}.\end{gathered}$$

Повернемось знову до системи рівнянь Максвела в вакумі (3.59), (3.61). Оскільки $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\vec{H} = 0$, тому векторні поля напруженості електричного та магнітного поля соленоїдальні і їх можна представити через ротори деяких нових векторних полів, тобто

$$\vec{E} = \mathrm{rot}\vec{u}, \qquad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{v}, \tag{3.100}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $\vec{v} = \vec{v}(x)$ – деякі векторні поля. Враховуючи (3.100), перші дві системи рівнянь Максвела (3.59) перепишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0}\right) &= \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{v}\right), \\ \mathrm{rot}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0}\right) &= -\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{u}\right). \end{aligned} \tag{3.101}$$

Оскільки рівність роторів визначається з точністю до градієнта, тому систему (3.101) можна записати у вигляді системи першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0} &= \mathrm{rot}\vec{v} + \vec{\nabla}\varphi, \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0} &= -\mathrm{rot}\vec{u} + \vec{\nabla}\psi, \end{aligned} \tag{3.102}$$

де $\varphi(x), \psi(x)$ – довільні гладкі функції.

Отже, нелокальна заміна змінних (3.100) зводить (3.59), (3.61) до лінійної системи (3.102) (6 рівнянь на 8 невідомих функцій). Зауважимо, що відповідність між розв'язками (3.59), (3.61) та (3.102) не взаємно однозначна. Розв'зку (3.59), (3.61) відповідає сім'я розв'язків (3.102). Це пояснюється тим, що заміна (3.100) визначається з точністю до градієнта двох довільних функцій.

Досліджуємо ліївську симетрію системи (3.102) у класі операторів

$$X = \xi^{\mu}\partial_{x_\mu} + \eta^k\partial_{E^k} + \beta^k\partial_{H^k} + \lambda\partial_{\varphi} + \gamma\partial_{\psi}, \qquad k = \overline{1,3} \tag{3.103}$$

де $\xi^{\mu}, \eta^k, \beta^k, \lambda, \gamma$ – функції від $x, \vec{u}, \vec{v}, \varphi, \psi$.

Використовуючи алгоритм Лі, доведено теорему.

Теорема 3.20 *Алгеброю інваріантності системи рівнянь (3.102) в класі операторів (3.103) є алгебра, базисні елементи якої мають вигляд*

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a} + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a},\\
&J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} - \varphi\partial_{u^a} - u^a\partial_\varphi - \psi\partial_{v^a} - v^a\partial_\psi,\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu},\\
&D_1 = u^a\partial_{u^a} + v^a\partial_{v^a} + \varphi\partial_\varphi + \psi\partial_\psi,\\
&D_2 = v^a\partial_{u^a} - u^a\partial_{v^a} + \psi\partial_\varphi - \varphi\partial_\psi,\\
&K_0 = 2x_0x_a\partial_{x_a} - x_\mu x_\mu\partial_{x_0} + \left(2x_0u^a + 2x_a\varphi\right)\partial_{u^a} +\\
&\quad \left(2x_0v^a + 2x_a\psi\right)\partial_{v^a} + \left(2x_0\varphi + 2x_au^a\right)\partial_\varphi + \left(2x_0\psi + 2x_av^a\right)\partial_\psi,\\
&K_a = \left(2x_\mu x_a + x_\nu x^\nu\delta_{\mu a}\right)\partial_{x_\mu} - \big(2x_au^k + 2x_nu^n\delta_{ka} - 2x_ku^a +\\
&\quad 2x_0\varphi\delta_{ka}\big)\partial_{u^k} - \left(2x_av^k + 2x_nv^n\delta_{ka} - 2x_kv^a + 2x_0\psi\delta_{ka}\right)\partial_{v^k} -\\
&\quad \left(2x_a\varphi + 2x_0u^a\right)\partial_\varphi - \left(2x_a\psi + 2x_0v^a\right)\partial_\psi.
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

Підалгебрами (3.104) є $AP(1,3)$, $AP_1(1,3)$, $AC(1,3)$.

Легко переконатися, що система

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0} = \mathrm{rot}\vec{v} + \vec{\nabla}\varphi, \quad &&\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0} = -\mathrm{rot}\vec{u} + \vec{\nabla}\psi,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \mathrm{div}\vec{u}, &&\frac{\partial\psi}{\partial x_0} = \mathrm{div}\vec{v},
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

теж буде інваріантною відносно алгебри Лоренца, яка визначається операторами J_{ab}, J_{0a} з (3.104).

Додаток А

Симетрія та деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду.

Як уже відмічалось у вступі, теорія неперевних груп Лі виникла як теорія інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Досить повно ці питання висвітлено в роботах [72, 20, 27, 29]. В даному додатку ми розглядаємо клас нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що часто зустрічається при редукції рівнянь в частинних похідних [50], проблема побудови точних розв'язків яких залишається відкритою і досить актуальною [11]. З допомогою групових методів ми вивчимо симетрію та опишемо деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду

$$p'\left(p + F_0(y)\right) = p^3 F_4(y) + p^2 F_3(y) + pF_2(y) + F_1(y), \tag{A.1}$$

де $p = p(y)$, $p' = \dfrac{d\,p}{d\,y}$.

Рівняння (А.1) має широке застосування для прикладних задач.

Деякі випадки інтегровності рівнянь виду (А.1) та їх застосувань описано, на основі дискретно–групових методів, в роботах [8, 9, 10, 11, 30].

Задача опису випадків інтегровності (А.1) розв'язується наступним чином. Замість рівняння (А.1) розглядається еквівалентне йому рівняння другого порядку

$$\ddot{y}\left(\dot{y} + F_0(y)\right) = \dot{y}^4 F_4(y) + \dot{y}^3 F_3(y) + \dot{y}^2 F_2(y) + \dot{y} F_1(y), \tag{A.2}$$

де $y = y(x)$, $\dot{y} = \dfrac{d\,y}{d\,x}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}$,

((А.2) заміною $\dot{y} = p(y)$ зводиться до рівняння (А.1)) і досліджуються його симетрійні властивості.

Згідно підходу Лі, в загальному випадку звичайне диференціальне рівняння другого порядку інтегровне в квадратурах, якщо воно допускає двовимірну алгебру Лі (детальніше див. [72, 20, 29]).

Очевидно, що (A.2) інваріантне відносно групи зсувів по x, що визначається оператором

$$X_1 = \partial_x. \tag{A.3}$$

Нехай поряд з зсувами дане рівняння допускає ще й групу інваріантності з деяким оператором

$$X_2 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y. \tag{A.4}$$

Завжди можна вважати, що X_1, X_2 утворюють двовимірну алгебру Лі [20]. Справедлива теорема.

Теорема A.1 *Оператори X_1, X_2 можуть утворювати двовимірну алгебру Лі тільки одного з 6 нееквівалентних видів:*

1. $[X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 = 0,$
2. $[X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0,$
3. $[X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 = 0,$
4. $[X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0,$
5. $[X_1, X_2] = \lambda X_2, \quad X_1 \vee X_2 = 0,$
6. $[X_1, X_2] = \lambda X_2, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0, \quad \lambda = const, \lambda \neq 0.$

Доведення теореми A.1 випливає з класифікації двовимірних алгебр Лі приведеної в [20], та вигляду операторів X_1, X_2.

Розглянемо деякі допоміжні формули. Нехай задано два довільні оператори виду

$$Y_k = \xi_k(x,y)\partial_x + \eta_k(x,y)\partial_y, \qquad k = 1, 2.$$

Тоді

$$[Y_1, Y_2] = Y_1Y_2 - Y_2Y_1 = (Y_1(\xi_2) - Y_2(\xi_1)) + (Y_1(\eta_2) - Y_2(\eta_1)), \tag{A.5}$$

$$Y_1 \vee Y_2 = \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2. \tag{A.6}$$

При заміні змінних $t = t(x, y)$, $u = u(x, y)$

$$Y_k \Rightarrow \overline{Y_k} = \left(\xi_k \frac{\partial t}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial t}{\partial y}\right) \partial_t + \left(\xi_k \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial u}{\partial y}\right) \partial_u. \tag{A.7}$$

Скориставшись співвідношеннями (A.5), (A.6) і теоремою A.1, конкретизуємо вигляд оператора (A.4):

Теорема A.2 *Диференціальне рівняння (A.2) допускає двовимірну алгебру Лі тільки одного з 6 нееквівалентних типів з базисними елементами*

1. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = \xi(y)\partial_x, \;\; \xi(y) \neq const,$
2. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y,$
3. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = (x + \xi(y))\,\partial_x,$
4. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = (x + \xi(y))\,\partial_x + \eta(y)\partial_y,$
5. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = \exp(\lambda x)\xi(y)\partial_x,$
6. $X_1 = \partial_x, \; X_2 = \exp(\lambda x)\left(\xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y\right),$

$\eta(y) \neq 0$; *в 2, 3, 4 випадках* $\xi(y) \neq const$ *або* $\xi(y) \equiv 0$.

Тепер при фіксованій структурі двовимірної алгебри (теорема A.2), що допускається (A.2), ми можемо описати інтегровні випадки (A.2) (визначаємо явний вигляд $F_0(y), \ldots, F_4(y)$ при яких X_1, X_2 є операторами симетрії рівняння (A.2)). Нижче наведено одержані результати для (A.2) у випадку, коли оператори X_1, X_2 комутують (випадки 1 та 2 теореми A.2).

I. Нехай (A.2) допускає двовимірну алгебру Лі з операторами

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \xi(y)\partial_x, \;\; \xi(y) \neq const. \tag{A.8}$$

Згідно [20] у цьому випадку існує заміна змінних (t, u), така що

$$X_1 \Rightarrow \overline{X_1} = \partial_u, \qquad X_2 \Rightarrow \overline{X_2} = t\partial_u,$$

а рівняння (A.2) матиме вигляд

$$\ddot{u} = f(t). \tag{A.9}$$

Скориставшись (A.7), знаходимо

$$t = \xi(y), \qquad u = x. \tag{A.10}$$

Виконавши в (А.2) перетворення (А.10) і врахувавши (А.9), отримуємо

Теорема А.3 *Диференціальне рівняння (А.2) допускає двовимірну алгебру Лі з базисними операторами (А.8) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\ddot{y} = -f\left(\xi(y)\right)\left(\xi'(y)\right)^2 \dot{y}^3 - \frac{\xi''(y)}{\xi'(y)}\dot{y}^2, \tag{А.11}$$

де f – довільна гладка функція.

Виконавши в (А.11) заміну (А.10), отримуємо (А.9), проінтегрувавши яке і повернувшись до старих змінних знаходимо розв'язок (А.11).

II. Нехай (А.2) допускає двовимірну алгебру Лі з операторами

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y, \\ &\xi(y) \neq const \text{ або } \xi(y) = 0, \eta(y) \neq 0. \end{aligned} \tag{А.12}$$

Згідно [20] у цьому випадку існує заміна змінних (t, u), така що

$$X_1 \Rightarrow \overline{X_1} = \partial_t, \qquad X_2 \Rightarrow \overline{X_2} = \partial_u,$$

а рівняння (А.2) матиме вигляд

$$\ddot{u} = f(\dot{u}). \tag{А.13}$$

Скориставшись (А.7), знаходимо

$$t = x - \int \frac{\xi(y)}{\eta(y)}\, dy, \qquad u = \int \frac{1}{\eta(y)} dy. \tag{А.14}$$

Виконавши в (А.2) перетворення (А.14) і врахувавши (А.13), отримуємо два випадки 1)$F_0(y) \equiv 0$, 2) $F_0(y) \not\equiv 0$ (теореми А.4 та А.5).

Теорема А.4 *Нехай $F_0(y) \equiv 0$. Тоді диференціальне рівняння (А.2) допускає двовимірну алгебру Лі з базисними елементами (А.12) тоді і тільки тоді, коли $F_k(y), k = \overline{1,4}$, $\xi(y)$, $\eta(y)$ задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned} &F_1(y) = a\eta(y), \\ &F_2(y) = b - 3a\xi(y), \\ &F_3(y) = \frac{c - 2b\xi(y) + 3a\xi^2(y) + \eta'(y)}{\eta^2(y)}, \\ &F_4(y) = \frac{q - c\xi(y) + b\xi^2(y) - a\xi^3(y)}{\eta^2(y)} - \frac{\xi'(y)}{\eta(y)}, \end{aligned} \tag{А.15}$$

де $a, b, c, q = const$, при цьому після заміни змінних (A.14) рівняння (A.2) матиме вигляд

$$\ddot{u} = q\dot{u}^3 + c\dot{u}^2 + b\dot{u} + a. \tag{A.16}$$

Доведення. Неохідність. Виконаємо в (A.2) перетворення (A.14) (вважаємо $u = u(t)$), тоді

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{\dot{y}}{\eta(y) - \xi(y)\dot{y}} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\eta(y)\dot{u}}{1 + \xi(y)\dot{u}},$$

$$\ddot{u} = \frac{\eta(y)\left(\ddot{y}\eta(y) - \eta'(y)\dot{y}^2 + \xi'(y)\dot{y}^3\right)}{\left(\eta(y) - \xi(y)\dot{y}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{u}\left(\eta(y) - \xi(y)\dot{y}\right)^3}{\eta^2(y)} + \frac{\eta'(y)}{\eta(y)}\dot{y}^2 - \frac{\xi(y)}{\eta(y)}\dot{y}^3.$$

Підставивши дані співвідношення в (A.2), отримуємо при $F_0(y) \equiv 0$

$$\begin{gathered}\ddot{u} = \dot{u}^3\left[\left(F_4(y) + \frac{\xi'(y)}{\eta(y)}\right)\eta^2(y) + \xi(y)\eta(y)\left(F_3(y) - \frac{\eta'(y)}{\eta(y)}\right) + \right.\\ \left.\xi^2(y)F_2(y) + \frac{\xi^3(y)}{\eta(y)}F_1(y)\right] + \dot{u}^2\left[\eta(y)\left(F_3(y) - \frac{\eta'(y)}{\eta(y)}\right) + \right.\\ \left.2\xi(y)F_2(y) + \frac{3\xi^2(y)}{\eta(y)}F_1(y)\right] + \dot{u}\left[F_1(y) + \frac{3\xi(y)}{\eta(y)}F_1(y)\right] + \\ \frac{1}{\eta(y)}F_1(y).\end{gathered} \tag{A.17}$$

Оскільки права частина (A.17) повинна бути лише функцією від $\dot{u}$ [20], тому (A.2) внаслідок заміни (A.14) зводиться до рівняння вигляду (A.16). Прирівнюючи праві частини співідношень (A.17) та (A.16), отримуємо (A.15).

Достатність випливає безпосередньо з алгоритму Лі.

Теорема A.5 *Нехай $F_0(y) \not\equiv 0$. Тоді диференціальне рівняння (A.2) допускає двовимірну алгебру Лі з базисними елементами (A.12) тоді* *і тільки тоді, коли* $F_k(y), k=\overline{0,4}$, $\xi(y)$, $\eta(y)$ *задовольняють співвідношення*

$$
\begin{aligned}
&F_0(y)=\frac{\eta(y)}{p-\xi(y)},\\
&F_1(y)=\frac{a\eta(y)}{p-\xi(y)},\\
&F_2(y)=\frac{b-3a\xi(y)+\eta'(y)}{p-\xi(y)},\\
&F_3(y)=\frac{c-2b\xi(y)+3a\xi^2(y)+\eta'(y)}{(p-\xi(y))\eta(y)}-\frac{\xi'(y)}{p-\xi(y)}+\frac{\eta'(y)}{\eta(y)},\\
&F_4(y)=\frac{q-c\xi(y)+b\xi^2(y)-a\xi^3(y)}{(p-\xi(y))\eta^2(y)}-\frac{\xi'(y)}{\eta(y)},
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

де $a, b, c, q, p = const$, $p \neq 0$, *при цьому після заміни змінних (A.14) рівняння (A.2) матиме вигляд*

$$
\ddot{u}=\frac{q\dot{u}^4+c\dot{u}^3+b\dot{u}^2+a\dot{u}}{p\dot{u}+1}. \tag{A.19}
$$

Процедура доведення цієї теореми аналогічна доведенню теореми А.4.

Нехай тепер для (А.2) має місце теорема А.4, тобто (А.2) має вигляд

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y}=\dot{y}^3\left(\frac{q-c\xi(y)+b\xi^2(y)-a\xi^3(y)}{\eta^2(y)}-\frac{\xi'(y)}{\eta(y)}\right)+\\
&\dot{y}^2\frac{c-2b\xi(y)+3a\xi^2(y)+\eta'(y)}{\eta^2(y)}+\dot{y}\left(b-3a\xi(y)\right)+a\eta(y),
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

де $\xi(y), \eta(y)$ – довільні функції такі, що $\eta(y)\neq 0$, $\xi(y)\not\equiv C (C\neq 0)$. Рівняння (А.20) заміною змінних (А.14) зводиться до (А.16). Розв'язавши (А.16) і повернувшись до старих змінних , знаходимо розв'язки (А.20).

Нехай тепер для (А.2) має місце теорема А.5, тобто (А.2) має вигляд

$$\ddot{y}\left(\dot{y}+\frac{\eta(y)}{p-\xi(y)}\right)=\dot{y}^4\left(\frac{q-c\xi(y)+b\xi^2(y)-a\xi^3(y)}{(p-\xi(y))\eta^2(y)}-\frac{\xi'(y)}{\eta(y)}\right)+$$
$$\dot{y}^3\left(\frac{c-2b\xi(y)+3a\xi^2(y)+\eta'(y)}{(p-\xi(y))\eta(y)}-\frac{\xi'(y)}{p-\xi(y)}+\frac{\eta'(y)}{\eta(y)}\right)+ \tag{A.21}$$
$$+\dot{y}^2\frac{b-3a\xi(y)+\eta'(y)}{p-\xi(y)}+\dot{y}\frac{a\eta(y)}{p-\xi(y)},$$

де $\xi(y), \eta(y)$ – довільні функції такі, що $\eta(y)\neq 0$, $\xi(y)\not\equiv C (C\neq 0)$. Рівняння (А.21) заміною змінних (А.14) зводиться до (А.19). Розв'язавши (А.19) і повернувшись до старих змінних , знаходимо розв'язки (А.21).

Таким чином, зафіксувавши клас рівнянь (А.2) та вигляд допустимої двовимірної алгебри, одержано класи інтегровних випадків рівняння (А.2) (дивись (А.11), (А.20), (А.21)), а отже й еквівалентного йому рівняння (А.1).

Запропонований алгоритм (зокрема теорема А.2) може бути використаний для класифікації інших нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Висновки

Перерахуємо основні результати, отримані в дисертації:

1. Побудовано нелінійні узагальнення рівнянь Бюргерса та Кортевега–де–Фріза, в тому числі високого порядку, що допускають широкі алгебри інваріантності, зокрема, алгебри з нелінійними базисними операторами. Наведено деякі розв'язки.

2. Описано одновимірні рівняння другого порядку, на множині розв'язків яких реалізується зображення узагальненої алгебри Галілея.

3. Розглянуто одновимірне скалярне рівняння $L(Lu) + \lambda Lu = F(u)$, $L = \partial_t + u\partial_x$, досліджена симетрія, побудовані нові нелінійні зображення алгебр Лі, зокрема нелінійні розширення алгебри Галілея. Для $F(u) = const$ побудовані деякі класи неявних розв'язків. Результати узагальнено для багатовимірної системи.

4. Проведена симетрійна класифікація нелінійної моделі розповсюдження короткохвильових збурень в релаксуючому середовищі.

5. Досліджено симетрійні властивості одновимірної системи двох рівнянь гідродинамічного типу.

6. Побудовано нелінійні зображення розширених алгебр Пуанкаре та Галілея для вектор–потенціалу з нелінійними операторами дилатації.

7. Отримано два нееквівалентних нелінійних зображення алгебри Пуанкаре для вектор–потенціалу з нелінійними операторами Лоренца.

8. Досліджена умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля.

9. Розглянуто деякі нелінійні узагальнення рівнянь Максвела.

10. Запропоновано підхід для класифікації інтегровних випадків звичайних диференціальних рівнянь. Побудовані деякі інтегровні класи рівнянь Абеля другого роду.

Всі результати, отримані в дисертації, нові і можуть бути використані в прикладних задачах гідродинаміки.

Література

[1] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики,* Москва, Наука, 1974, 432 с.

[2] Биркгоф Г. *Гидродинамика,* Москва, Из–во иностр. лит., 1963, 400с.

[3] Бойко В. *Нелінійні рівняння та нелінійні зображення для вектор–потенціалу,* Доповіді НАН України, 1995, N6, с.33–35

[4] Бойко В. *Симетрійна класифікація одновимірного рівняння гідродинамічного типу,* Тези IV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука, Київ, 11–12 травня 1995, с.46

[5] Бронштейн И.Н.,Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов,* Москва, Наука, 1981, 720с.

[6] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики,* Москва, Наука, 1988, 512 с.

[7] Емельянова И.С. *Проблема "симметрия–интегралы движения" в аналитической механике,* Н.Новгород, Издательство ННГУ, 1992, 171 с.

[8] Зайцев В.Ф. *Дискретно–групповые методы теории дифференциальных уравнений,* Ч.1, 1982, Деп. ВИНИТИ N 5739–82, 130с.

[9] Зайцев В.Ф.,Кормилицына Т.В. *Дискретно–групповые методы теории дифференциальных уравнений,* Ч.2, 1985, Деп. ВИНИТИ N 3720–85, 152с.

[10] Зайцев В.Ф.,Полянин А.Д. *Дискретно–групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики,* Москва, Препринт N 339, ИПМ АН СССР, 1988, 44с.

[11] Зайцев В.Ф.,Полянин А.Д. *Справочник по нелийным дифференциальным уравнениям. Приложение в механике, точные решения,* Москва, Наука,1993, 462с.

[12] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям,* Москва, Наука, 1976, 576 с.

[13] Корн Г.,Корн Т. *Сравочник по математике для научных работников и инженеров,* Москва, Наука, 1977, 832с.

[14] Костенко В.Г. *Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом,* Львів, Вид–во Льв. ун–ту, 1959, 22с.

[15] Красильников В.А.,Крылов В.А. *Введение в физическую акустику,* Москва, Наука, 1988,

[16] Кузьмичев В.Е. *Законы и формулы физики,* Киев, Наукова думка, 1989, 864с.

[17] Курант Р.,Гильберт Д. *Методы математической физики,* Москва, Гостехиздат, 1951, Т.1 – 476 с., Т.2 – 544 с.

[18] Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа,* Москва, Знание, 1989, 48с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика", N8)

[19] Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике,* Москва, Наука, 1983, 280 с.

[20] Ибрагимов Н.Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике,* Успехи математических наук, т.47, выпуск 4(286), 1992, с.83–144

[21] Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа,* Москва, Знание, 1991, 48с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика", N7)

[22] Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. *Гидродинамика, Теоретическая физика, Т6,* Москва, Наука, 1988, 736с.

[23] Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошних сред, Теоретическая физика, Т8,* Москва, Наука, 1982, 620с.

[24] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа,* Москва, Наука, 1978, 727с.

[25] Мелешко С.В. *Групповая класификация уравнений двумерных движений газа,* Прикладная математика и механика, Том 58, Вып. 4, 1994, с.56–62

[26] Мешков А.Г. *Групповой анализ уравнений нелинейной электродинамики,* Изв. вузов, Физ.,1990, Т.33, N7, с.27–31

[27] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений,* Москва, Наука, 1978, 400 с.

[28] Овсянников Л.В. *Программа Подмодели. Газовая динамика,* Прикладная математика и механика, Том 58, Вып. 4, 1994, с.30–55

[29] Олвер П. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям,* Москва, Мир, 1989, 581 с.

[30] Полянин А.Д. *Уравнение Абеля и связанные с ним уравнения нелинейной механики,* Москва, Препринт N 271, ИПМ АН СССР, 1986, 68с.

[31] Ревенко І.,Бойко В. *Симетрія і деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду,* Доповіді НАН України, 1995, N7, с.16–18

[32] Руденко О.В.,Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики,* Москва, Наука, 1975, 320с.

[33] Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике,* Москва, Наука, 1972, 440с.

[34] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны,* Москва, Мир, 1977, 624с.

[35] Фущич В.И. *Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?* в:"Симметрия и решения нелинейных уравнений

математической физики.", Киев, Ин–т математики, 1987, с.4–16.

[36] Фущич В.И. *О пуакаре–, галилеево–инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений,* в:"Теоретико–груповые исследования уравнений математической физики.", Киев, Ин–т математики, 1985, с.4–13.

[37] Фущич В.И. *Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики,* УМЖ, 1991, N11, с.1456–1470

[38] Фущич В.И.,Баранник Л.Ф.,Баранник А.Ф. *Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений,* Киев, Наукова думка, 1991, 301с.

[39] Фущич В.И.,Егорченко И.А. *Дифференциальные инварианты алгебры Галилея,* Доклады АН Украины, 1989, сер. А, N4, с.19–34

[40] Фущич В.И.,Егорченко И.А. *Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре,* Доклады АН Украины, 1989, сер. А, N5, с.46–53

[41] Фущич В.И.,Жданов Р.З.,Ревенко И.В. *Общие решение нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала,* УМЖ, 1991, N11, с.1471–1487

[42] Фущич В.І.,Миронюк П.Й. *Умовна симетрія і точні розв'язки рівняння нелінійної акустики,* Доповіді АН УРСР, 1991, N6, с.23–29

[43] Фущич В.И.,Никитин А.Г. *Симметрия уравнений квантовой механики,* Москва, Наука, 1990, 400с.

[44] Фущич В.И.,Никитин А.Г. *Симметрия уравнений Максвелла,* Киев, Наукова думка, 1983, 199с.

[45] Фущич В.И.,Репета В.К., Серов Н.И. *Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики,* Доклады АН Украины, 1991, N11, с.27–33.

[46] Фущич В.И.,Серов Н.И.,Амеров Т.К. *О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности,* Доклады АН Украины, 1992, N1, с.26–30.

[47] Фущич В.И.,Тычинин В.А. *О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований,* Киев, Институт математики, Препринт 82–33, 1982, 53с.

[48] Фущич В.И.,Цифра И.М. *О симметрии нелинейных уравнений электродинамики,* Теор. и мат. физика, 1985, т.64, N1, с.41–50.

[49] Фущич В.І.,Чопик В.І. *Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь,* УМЖ, 1993, Т.45, N10, с.1433–1443

[50] Фущич В.И.,Штелень В.М.,Серов Н.И. *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики,* Киев, Наукова думка, 1989, 335 с.

[51] Цифра И.М. *Симетрийные свойства и некоторые точные решения нелинейных уравнений для электромагнитного и спинорного полей,* в: "Теоретико–групповые исследования уравне~~ни~~ний математической физики", Киев, Институт математики, 1985, с.89–96

[52] Цифра І.,Бойко В. *Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля,* Доповіді НАН України, 1995, N5, с.35–36

[53] Штелень В.М. *О связи между решениями уравнений Максвела и Дирака,* в: "Симметрия и решения уравнений математической физики", Киев, Институт математики, 1989, с.110–113

[54] Bluman G.W.,Kumei S. *Symmetries and differential equations,* New York, Springer–Verlag, 1989.

[55] Fushchych W.I. *Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics,* in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Inst. of Math., 1992, p.7–27.

[56] Fushchych W.I. *New nonlinear equation for electromagnetic field having the velocity different from c,* Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1992, N1, p.24–27

[57] Fushchych W.I. *Symmetry analysis,* in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Inst. of Math., 1992, p.5–6.

[58] Fushchych W.,Boyko V. *Symmetry Classification of the One–Dimensional Second Order Equation of Hydrodynamical Type,* Preprint, Linköping University, Sweden, LiTH–MAT–R–95–19, 11p.

[59] Fushchych W.I.,Cherniha R.M. *The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations,* J. Phys. A, 1985, V.18, p.3491–3503

[60] Fushchych W.I. and Nikitin A.G. *Symmetries of Maxwell's Equations,* Dordrecht, Reidel Publ. Comp.,1987, 214p.

[61] Fushchych W.I. and Nikitin A.G. *Symmetry of Equation of Quantum Mechanics,* New York, Allerton Press, 1994, 460p.

[62] Fushchych W.,Shtelen W. and Serov N. *Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.

[63] Fushchych W.,Tsyfra I. *On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry,* J. Phys. A., 1987, V.20, N2, p.L45–L47.

[64] Fushchych W.,Tsyfra I. and Boyko V. *Nonlinear Representations for Poincare and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields,* Journal of Nonlinear Math. Physics, 1994, V.1., N2, p.210–221.

[65] Fushchych W.I.,Tychynyn V.A.. *Hodograph transformations and generating of solutions for nonlinear differential equations,* Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1993, N10, p.52–58

[66] Fushchych W.,Zhdanov R. and Lahno V. *On Linear and Non–Linear Representations of the Generalized Poincare Groups in the Class of Lie Vector Fields,* Journal of Nonlinear Math. Physics, 1994, V.1, N3, p.295–308.

[67] Fushchych W.,Zhdanov R.,Revenko I. *On the general solution of the D'alambert equation with nonlinear eikonal constraint,* in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Inst. of Math., 1992, p.68–90.

[68] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Smalij V.F. *On the new exact solutions of the nonlinear Maxwell–Born–Infeld equations,* Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1992, N 10, p.28–33

[69] Joseph K.T.,Sachdev P.L. *On the solution of the equation* $u_t+u^n u_x+H(x,t.u)=0$, Quarterly of Applied Mathematics, V. LII, 1994, N3, p.519–527

[70] King J.R. *Exact results for the nonlinear diffusion equations* $u_t=\left(u^{-4/3}u_x\right)_x$ *and* $u_t=\left(u^{-2/3}u_x\right)_x$, J. Phys. A: Math. Gen, 1991, V.24, p.5721–5745

[71] Lie S.,Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen,* Bd. 1–3, Leipzig, Teubner, 1883–1893, 623s.;554s.;830s.

[72] Lie S.,Scheffers G. *Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen,* Leipzig, Teubner, 1891, 568s.

[73] Olver P. *Application of Lie Groups to Differential Equations,* New York: Springer, 1986, 497 p.

[74] Ovsyannikov L.V. *Group analysis of differential equations,* Academic Press, New York, 1982, 400p.

[75] Parkes E.J. *The stability of solutions of Vakhnenko's equation,* J. Phys A: Math. Gen, 26, 1993, p.6469–6475

[76] Rideau G.,Winternitz P. *Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and conformal groups in two–dimensional spase–time,* Journ. Math. Phys., 1990, V.31, p.1095–1105.

[77] Sachdev P.L. *Nonlinear diffusive waves,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987

[78] Serov N.I.,Fushchych B.W. *On the new nonlinear equation with unique symmetry,* Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1994, N9, p.49–50

[79] Serov N.I.,Tulupova L.A. *Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations,* Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1994, N12, p.42–44

[80] Sionoid P.N.,Cates A.T. *The generalized Burgers and Zabolotskaya–Khokhlov equations: transformations, exact solutions and qualitative properties,* Proceedings the Royal Society, Math. and Ph., 1994, V.447, N1930, p.253–270

[81] Tychinin V.A. *The group classification of equations* $u_0 = u^p u_{111}$ *and* $w_0 = w_{11}^k w_{111}$, Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1992, N 10, p.24–28

[82] Vakhnenko V.A. *Solitons in a nonlinear model medium,* J. Phys. A: Math. Gen, 1992, V.25, N15, p.4181–4187

[83] Webb G.M. *Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system,* J. Phys. A: Math. Gen, 1990, V.23, N17, p.3885–3894

[84] Yehorchenko I. *Nonlinear representation of the Poincare algebra and invariant equations,* in:"Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics", Kiev, Inst. of Math., 1992, 62–66.

Бойко В.Н.'Симметриянелинейных уравнений гидродинамического типа”

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1995.

Защищается диссертация, посвященная исследованию симетрийных свойств нелинейных уравнений гидродинамического типа. Предложен целый ряд нелинейных уравнений, допускающих широкие алгебры инвариантности, в том числе уравнения, на множестве решений которых реализуютъся нелинейные представления алгебр Ли.

Boyko V.M.”Symmetry of Nonlinear Equations of Hydrodynamical Type”

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraïna, Kyïv, 1995.

This thesis is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear equations of hydrodynamical type. A number of nonlinear equations admitting wide invariance algebras are proposed, including equations with nonlinear representation of Lie algebras realized other sets of solutions.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, група Лі, алгебра Лі, нелінійний, рівняння, система, зображення, інваріант, анзац, редукція, алгебра Галілея, алгебра Пуанкаре.