Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЧАПОВСЬКИЙ ЄВГЕНІЙ ЮРІЙОВИЧ

УДК 512.554.35

ДИСЕРТАЦІЯ
НІЛЬПОТЕНТНІ І РОЗВ'ЯЗНІ АЛГЕБРИ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ КІЛЕЦЬ МНОГОЧЛЕНІВ

111 математика

Подається на здобуття ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________ Чаповський Є.Ю.

Науковий керівник: **Петравчук Анатолій Петрович**,
доктор фіз.-мат. наук, професор.

Київ — 2023

АНОТАЦІЯ

Чаповський Є.Ю. Нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань кілець многочленів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вивченню розв'язних і нільпотентних підалгебр алгебри Лі диференціювань комутативних кілець над полем характеристики 0.

Алгебри Лі диференціювань є фундаментальним об'єктом і знаходять застосування в числених розділах математики і фізики, зокрема, в диференціальній геометрії, теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, алгебраїчній геометрії, теоретичній фізиці, тощо. Особливо варто відзначтити декілька прикладів, що стосуються симетрійного аналізу диференціальних рівнянь — науки, що досліджує симетрії диференціальних рівнянь і використовує їх властивості для розв'язання важливих питань про саме рівняння.

Так, якщо звичайне диференціальне рівняння порядку n має розв'язну алгебру Лі симетрій розмірності n, то знаючи таку алгебру Лі симетрій рівняння можна розв'язати в квадратурах. Користуючись схожою ідеєю, звичайні диференціальні рівняння другого порядку які можна розв'язати таким чином були класифіковані і їх класифікація звелася до класифікації двовимірних алгебр Лі векторних полів на площині.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними апарат симетрійного аналізу дозволяє знаходити сім'ї спеціальних частинних розв'язків, знаючи якусь алгебру Лі симетрій таких рівнянь, а як відомо знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними є, взагалі кажучи, проблематичним. Більш точно, розглянувши деяку підалгебру симетрій диференціального рівняння з частинними похідними можна задатися пошуком

розв'язків, що є інваріантними відносно цієї підалгебри Лі симетрій. Це дозволяє зробити редукцію, тобто перейти до нової системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, у якої кількість незалежних змінних менше на порядок підалгебри Лі симетрій.

Симетрійний аналіз має ще багато інших важливих застосувань, таких як наприклад теорема Нетер, але вже наведених прикладів достатньо для ілюстрації релевантності теми дослідження, тому перейдемо до огляду змістовного матеріалу дисертації.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле, а A — поле алгебраїчних функцій від n змінних над $\mathbb{K}$ (тобто A є скінченновимірним алгебраїчним розширенням поля $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$).

Якщо D є $\mathbb{K}$-диференціюванням від A, то його дивергенція $\operatorname{div} D$ є важливою геометричною характеристикою D (D можна розглядати як векторне поле з коефіцієнтами в A). Крім того, поняття дивергенції тісно пов'язане з такими важливими об'єктами як бездивергентні диференціювання та якобіанні диференціювання. Бездивергентні та якобіанні диференціювання мають багато гарних властивостей, наприклад, множина бездивергентних диференціювань є алгеброю Лі, що у випадку поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел відповідає локальній группі дифеоморфізмів $\mathbb{R}^n$, що зберігають форму об'єму, кожне якобіанне диференціювання є бездивергентним, за набором $a_1, \ldots, a_{n-1}$ алгебраїчно незалежних функцій від n змінних можна побудувати якобіанне диференціювання $D_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ яке занулюється на елементах a_i і, більше того, будь яке диференціювання D яке занулюється на елементах a_i є кратним $D_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$. Техніка якобіанних диференціювань використовується в подальших розділах.

В роботі вказано на зв'язок між виразами $\operatorname{div} D$ у різних базах трансцендентності A. Доведено також, що будь-яке бездивергентне диференціювання D на кільці поліномів $\mathbb{K}[x, y, z]$ є сумою щонайбільше двох якобіанних диференціювань.

Нехай $\mathbb{K}$ — поле нульової характеристики, A — область цілісності над $\mathbb{K}$ із полем часток $R = \operatorname{Frac}(A)$ і $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ алгебра Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань на A.

Позначимо через $W(A)$ підалгебру $R\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ алгебри Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ і для будь-якої підалгебри $L \subseteq W(A)$ через $\operatorname{rank}_R L$ ранг R над R, де $\operatorname{rank}_R L := \dim_R RL$. Досліджуються нільпотентні підалгебри $L \subseteq W(A)$ рангу n над R із центром $Z = Z(L)$ рангу $\geqslant n-2$ над R. Для таких алгебр Лі L вказано природний базис над полем $F = F(L)$ констант L в R. Доведено, що таку алгебру Лі L можна ізоморфно вкласти в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$, яку активно вивчали багато авторів.

Нехай $\mathbb{K}[X]$ — алгебра многочленів від n зміннних. Векторний простір $T_n = \mathbb{K}[X]$ є, очевидно, $\mathbb{K}[X]$-модулем відносно дії $x_i \cdot v = v'_{x_i}$ для $v \in T_n$. Кожен скінченновимірний підмодуль V із T_n нільпотентний, тобто, кожен елемент $f \in \mathbb{K}[X]$ діє нільпотентно (множенням) на V. Доведено, що кожен нільпотентний $\mathbb{K}[X]$-модуль V скінченної розмірності над $\mathbb{K}$ з одновимірним цоколем ізоморфно вкладається в модуль T_n. Знайдено групи автоморфізмів модуля T_n і його скінченновимірних мономіальних підмодулів. Аналогічні результати отримано для (ненільпотентних) скінченновимірних $\mathbb{K}[X]$-модулів з одновимірним цоколем.

Нехай тепер $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — кільце многочленів і $R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій від n змінних. Позначимо через $W_n = W_n(\mathbb{K})$ алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань на A (у випадку $\mathbb{C}$ це алгебра Лі всіх векторних полів на $\mathbb{C}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами). Для заданого $D \in W_n(\mathbb{K})$ будова централізатора $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ залежить від поля констант $\operatorname{Ker} D = \{\phi \in R \mid D(\phi) = 0\}$ (тут природнім чином розширюємо кожне диференціювання D на A на поле R). Досліджено випадок, коли $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D \leqslant 1$, охарактеризована будова підалгебри $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$, зокрема доведено, що якщо $\operatorname{Ker} D$ не містить несталих многочленів, то $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ скінченновимірний над $\mathbb{K}$. Отримано деякі результати про централізатори лінійних диференціювань в $W_n(\mathbb{K})$.

Нарешті, покладемо $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ — кільце поліномів від трьох змінних і $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$ поле раціональних функцій. Якщо L є підалгеброю алгебри Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань A, то RL є алгеброю Лі над $\mathbb{K}$ і $\dim_R RL$ буде називатися рангом L над R. вивчаємо розв'язні підалгебри L алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$

рангу 3 над R. Доведено, що L ізоморфна підалгебрі загальної афінної алгебри Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$, якщо L містить абелев ідеал I рангу 3 над R. Якщо L має ідеал I з $\mathrm{rank}_R I = 2$, то L міститься в підалгебрі $\bar{L}$ алгебри Лі $\tilde{W}_3(\mathbb{K}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ такий, що $\bar{L}$ є розширенням підалгебри $\mathrm{aff}_2(F)$ за допомогою підалгебри розмірності $\leqslant 2$, де F — поле констант ідеала I в R.

Ключові слова: алгебра Лі, нільпотентна алгебра Лі, розв'язна алгебра Лі, загальна лінійна алгебра Лі, загальна афінна алгебра Лі, диференціювання, дивергенція, бездивергентне диференціювання, якобіанне диференціювання, лінійне диференціювання, централізатор диференціювання, кільце многочленів, модуль над кільцем многочленів, поліномільно трансляційний підмодуль, мономіальний підмодуль, алгебра ендоморфізмів модуля над кільцем многочленів, группа автоморфізмів модуля над кільцем многочленів.

ABSTRACT

Chapovskyi Ye. Yu. Nilpotent and solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings. — Manuscript. The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on the speciality 111 Mathematics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2023.

The dissertation is devoted to studying nilpotent and solvable subalgebras of the Lie algebra of derivations of associative commutative ring over a field of characteristic 0.

Lie algebras of derivations are a fundamental object and find applications in numerous branches of mathematics and physics, in particular, in differential geometry, theory of ordinary differential equations, theory of differential equations with partial differential equations, algebraic geometry, theoretical physics, etc. Several examples related to the symmetric analysis of differential equations are particularly noteworthy. Symmetry analysis of differential equations — a science that studies the symmetries of differential equations and uses their properties to solve important questions about the equation itself.

For example, if an ordinary differential equation of order n has a solvable Lie algebra of symmetries of dimension n, then knowing such a Lie algebra of symmetries the equation can be solved in quadrature. Using a similar idea, ordinary differential equations of the second order that can be solved in this way have been classified and their classification was reduced to the classification of two-dimensional Lie algebras of vector fields on the plane.

For partial differential equations, the apparatus of symmetric analysis allows us to find families of special partial solutions, by knowing some Lie algebra of symmetries of such equations, and as we know finding exact solutions of partial differential equations is, generally speaking, problematic. More precisely, by considering some subalgebra of symmetries of the differential equation with partial differential equations, we can set out to find solutions that are invariant with respect to this Lie subalgebra of symmetries. This allows us to make a reduction, i.e. move to a new system of partial differential equations, in which the number of independent variables

is less by an order of magnitude of the subalgebra of the Lie symmetries.

There are many other important applications of symmetry analysis, such as, for example, the Neter theorem, but these examples are enough to illustrate the relevance of the research topic, so let's move on to review the content of the thesis.

Let K be an algebraically closed field, and A be a field of algebraic functions of n variables over $\mathbb{K}$ (that is, A is a finite-dimensional algebraic extension of the field $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$).

If D is a $\mathbb{K}$-derivation of A, then its divergence $\operatorname{div} D$ is an important geometric characteristic of D (D can be considered as a vector field with coefficients in A). In addition, the concept of divergence is closely related to such important objects such as divergence-free derivations and Jacobian derivations. Divergence-free and Jacobian derivations have many nice properties, for example, the set of divergence-free derivations is a Lie algebra, which is in the case of a field $\mathbb{R}$ of real numbers corresponds to a local group of diffeomorphisms of $\mathbb{R}^n$ preserving the volume form, every Jacobian derivation is divergence-free, given a set $a_1, \ldots, a_{n-1}$ of algebraically independent functions of n variables we can construct the Jacobian derivation $D_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ which is zero on the elements a_i and, moreover, any derivation D that is zero on elements a_i is a multiple of $D_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$. The technique of Jacobian derivation is used in the following sections.

In the thesis the connection between expressions $\operatorname{div} D$ in different bases of transcendence A is indicated. It is also proved that any non-divergent derivation D on the ring of polynomials $\mathbb{K}[x, y, z]$ is by the sum of at most two Jacobian derivations.

Let $\mathbb{K}$ be a field of zero characteristic, A be an integral domain over $\mathbb{K}$ with a fraction field $R = \operatorname{Frac}(A)$ and $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ the Lie algebra of all $\mathbb{K}$-derivations on A. Denote by $W(A)$ the subalgebra $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ of the Lie algebra $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ and for any subalgebra $L \subseteq W(A)$ by $\operatorname{rank}_R L$ is the rank of R over R, where $\operatorname{rank}_R L := \dim_R RL$. We study nilpotent subalgebras $L \subseteq W(A)$ of rank n over R with center $Z = Z(L)$ of rank $\geqslant n-2$ over R. For such Lie algebras L, a natural basis over the field $F = F(L)$ of constants L in R is specified. It is proved that the following

Lie algebra L can be isomorphically embedded in the triangular Lie algebra $u_n(F)$, which was actively studied by many authors.

Let $\mathbb{K}[X]$ is an algebra of polynomials in n variables. The vector space $T_n = \mathbb{K}[X]$ is obviously a $\mathbb{K}[X]$-module with respect to the action $x_i \cdot v = v'_{x_i}$ for $v \in T_n$. Each finite-dimensional submodule V of T_n is nilpotent, that is, each element $f \in \mathbb{K}[X]$ acts nilpotently (by multiplication) on V. It is proved that every nilpotent $\mathbb{K}[X]$-module V of finite dimension over $\mathbb{K}$ with a one-dimensional base is isomorphically embedded in the module T_n. Automorphism groups of the module T_n and its finite-dimensional monomial submodules have been found. Similar results are obtained for (nonnilpotent) finite-dimensional $\mathbb{K}[X]$-modules with a one-dimensional base.

Next, let $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ is a ring of polynomials and $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ is the field of rational functions of n variables. We denote by $W_n = W_n(\mathbb{K})$ the Lie algebra of all $\mathbb{K}$-derivations on A (in the case of $\mathbb{C}$, it is the Lie algebra of all vector fields on $\mathbb{C}^n$ with polynomial coefficients). For a given $D \in W_n(\mathbb{K})$, the structure of the centralizer $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ depends on the field of constants $\operatorname{Ker} D = \{\phi \in R \mid D(\phi) = 0\}$ (here we naturally extend every derivation of D on A to the field R). We studied the case when $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D \leqslant 1$, the structure of the subalgebra $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ is characterized, in particular, it is proved that if $\operatorname{Ker} D$ does not contain unstable polynomials, then $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ is finite-dimensional over $\mathbb{K}$. Some results on centralizers of linear derivations in $W_n(\mathbb{K})$ have been obtained.

Finally, let us put $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ — a ring of polynomials from three variables and $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$ is the field of rational functions. If L is a subalgebra of the Lie algebra of all $\mathbb{K}$-derivations A, then RL is a Lie algebra over $\mathbb{K}$ and $\dim_R RL$ will be called the rank of L over R. We study solvable subalgebras L of Lie algebra $W_3(\mathbb{K})$ is of rank 3 over R. It is proved that L is an isomorphic subalgebra of the general affine Lie algebra $\operatorname{aff}_3(\mathbb{K})$ if L contains an Abelian ideal I of rank 3 over R. If L has an ideal I with $\operatorname{rank}_R I = 2$, then L is contained in the subalgebra $\bar{L}$ of Lie algebra $\tilde{W}_3(\mathbb{K}) = \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ such that $\bar{L}$ is an extension of the subalgebra $\operatorname{aff}_2(F)$ by means of the dimension subalgebra $\leqslant 2$, where F is the field of I constants in R.

Key words: Lie algebra, nilpotent Lie algebra, solvable Lie algebra, general

linear Lie algebra, general affine Lie algebra, derivation, divergence, divergence-free derivation, Jacobian derivation, linear derivation, centralizer of a derivation, polynomial ring, module over polynomial ring, polynomial translational submodule, monomial submodule, endomorphism algebra of module over polynomial ring, automorphism group of module over polynomial ring.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Chapovskyi, Y., Shevchyk, O.: On divergence and sums of derivations. Algebra Discrete Math. **24**(1) (2017), 99–105.

2. Chapovskyi, Y. Y., Maschenko, L. Z., Petravchuk, A.P.: Nilpotent Lie algebras of derivations with the center of small corank. Carpathian Math. Publ. **12**(1), 189–198 (2020).

3. Петравчук, А., Клименко, І., Чаповський, Є., Сидоров, М.: Нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка **1**, 20–25 (2020).

4. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proc. Int. Geom. Cent. **14**(4), 257–270 (2022).

5. Chapovskyi, Y. Y., Efimov, D. I., Petravchuk, A. P.: Solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables Прикл. проблеми механіки і математики **16**, 7–13 (2018).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Chapovskyi, Y., On divergence-free and jacobian derivations, 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko. July 03–07, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 2017, p. 29.

2. Chapovskyi, Y., Petravchuk, A.: Nilpotent modules over polynomial rings. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України

Ярослава Степановича Підстригача. 22–25 травня 2018 року, Львів, Україна. Тези доповідей. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача (2018). – С. 258.

3. Chapovskyi, Y., Petravchuk A.: Metabelian nilpotent Lie algebras of derivations. International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv. July 14–17, 2020, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine National University of "Kyiv-Mohyla Academy" (2020). – P. 29.

4. Chapovskyi, Y. Y., Petravchuk, A. P.: Centralizers of linear derivations. The international algebraic conference "At the End of the Year" 2021. December 27–28, 2021, Kyiv, Ukraine. Abstracts – Kyiv: Institute of Mathematics of NASU (2021). – P. 10.

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$	алгебра Лі всіх диференціювань $\mathbb{K}$-алгебри A
$\dim_{\mathbb{K}} A$	розмірність над полем $\mathbb{K}$ алгебри A
$\mathrm{Frac}(A)$	поле часток над областю цілісності A
$W(A)$	алгебра Лі $R\,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$
$\mathrm{rank}_R L$	ранг алгебри Лі L над полем R
$\mathrm{Ker}\, D$	ядро диференціювання D
$\mathrm{LND}(A)$	множина всіх локально нільпотентних диференціювань алгебри A
$\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$	лінійна оболонка елементів $\{x_1, \dots, x_n\}$ над полем $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$	кільце многочленів від n змінних над полем $\mathbb{K}$
$W_n(\mathbb{K})$	алгебра Лі всіх диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$
$u_n(\mathbb{K})$	алгебра Лі всіх трикутних диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	частинна похідна за змінною x_i в кільці многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$
$\deg f$	степінь многочлена $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$
D_f	диференціювання Якобі індуковане многочленом $f \in \mathbb{K}[x, y]$

Вступ

Актуальність теми. Алгебри Лі диференціювань є фундаментальним об'єктом і знаходять застосування в численних розділах математики і фізики, зокрема в диференціальній геометрії, теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, алгебраїчній геометрії, теоретичній фізиці, тощо. Гарним прикладом важливості і фундаментальності алгебри Лі диференціюваннь може служити той факт що алгебра Лі гладких векторних полів на n-вимірному гладкому многовиді M (над полем $\mathbb{R}$) є в точності алгеброю Лі диференціювань асоціативного і комутативного кільця гладких функцій $C^{\infty}(M)$ заданих на цьому многовиді. Ця алгебра Лі містить повну інформацію про многовид: існує бієкція між точками з многовиду M і множини всіх максимальних ідеалів з $\operatorname{Der} A(M)$ і більше того, алгебраїчна структура алгебри Лі $\operatorname{Der} C^{\infty}(M)$ однозначно визначає структуру гладкого многовиду на множині M (див. [56]). Існують аналогічні результати, що стосуються інших геометричних об'єктів, зокрема аналітичних многовидів(див. [25]). Ідея дослідження геометричних властивостей гладкого многовиду M задопомогою застосування інструментів теорії алгебр Лі до відповідних обієктів алгебри Лі $\operatorname{Der} C^{\infty}(M)$ виявилася плідною та породила низку результатів. Зокрема, Т. Зібертом [57] було отримано критерій гладкості афінного многовиду. А саме, афінний многовид X з координатним кільцем $A(X)$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 є гладким тоді і тільки тоді, коли Лі алгебра $\operatorname{Der} A(X)$ усіх $\mathbb{K}$-диференціювання в $A(X)$ є простою. Наведені приклади ілюструють актуальність задачі всебічного дослідження алгебр Лі диференціювання асоціативних і комутативних кілець і пов'язаних з нею об'єктів — підалгебр Лі, груп автоморфізмів, тощо.

Особливо цікавою для досліджень є алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$ усіх диференціювань кільця поліномів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над полем $\mathbb{K}$. Кожне диференціювання із алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ можна записати у вигляді

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{$*$}$$

де $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — частинна похідна, а коефіцієнти $f_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ однозначно визначаються дією диференціювання D на змінну x_i

$$D(x_i) = f_i$$

для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо $D \in W_n(\mathbb{K})$, то централізатор $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є підалгеброю $W_n(\mathbb{K})$, що складається з усіх векторних полів, що комутують з D. Інформація про $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ може бути корисною в багатьох випадках. Наприклад, кожне векторне поле $D \in W_n(\mathbb{C})$, $D = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n)\partial x_i$ визначає автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

з поліноміальними коефіцієнтами і інформація про $\operatorname{Ker} D$ і $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ може бути дуже корисною для пошуку розв'язків (1), див., наприклад, [43]. Так, множина $\operatorname{Ker} D \setminus \mathbb{K}$, де $\operatorname{Ker} D$ є ядром диференціювання D, збігається з множиною перших інтегралів. Пошук перших інтегралів є важливою задачею у багатьох застосуваннях.

Якщо маємо k комутуючих лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторних полів на гладкому n-вимірному многовиді M, можемо побудувати локальну систему координат на M, у якій ці векторні поля мають вигляд $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, k$ (див., наприклад, [34, Theorem 9.46]).

Для випадків $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ та $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ то диференціювання D може бути інтерпретоване як векторне поле з поліноміальними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ відповідно.

Однією з важливих проблем пов'язаних із алгеброю Лі векторних полів є проблема класифікації всіх скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на гладких многовидах, зокрема $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$. Перша така класифікація для дійсної прямої, комплексної прямої та комплексної площини була отримана С. Лі [35,36]. Він започаткував дослідження алгебр Лі векторних полів виходячи з вивчення симетрій диференціальних рівнянь, зокрема розробив алгоритм знаходження алгебр Лі симетрій диференціальних рівнянь.

Після нього А. Гонсалес-Лопес, Н. Камран і П. Олвер уточнили класифікацію на комплексній площині [23], а також отримали класифікацію алгебр Лі векторних полів для дійсної площини $\mathbb{R}^2$ [24] (локально, з точністю до заміни системи координат).

Більш загальна проблема дослідження будови алгебри Лі диференціювань довільного асоціативного кільця A була досліджена такими математиками, як Н. Джекобсон, К. Джордан, Д. Джордан, А. Новіцкі та іншими (див. [1, 26, 28–31, 39, 44]). У цій дисертації вивчаються нільпотентні і розв'язні підалгебри L з алгебри Лі $W(A) = R\,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$, де A — асоціативна комутативна $\mathbb{K}$-алгебра, з одиницею та без дільників нуля над алгебраїчно замкнутим полем $\mathbb{K}$ характеристики 0, а R — поле часток області цілісності A. Алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ усіх диференціювань $\mathbb{K}$-алгебри A може бути вкладена природнім чином в алгебру Лі $W(A)$, крім того $W(A)$ є підалгеброю алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$. Вивчення нільпотентних підалгебр алгебри Лі $W(A)$ було розпочато в роботах Є. Македонського та А. Петравчука [39, 48]. Для локально нільпотентних підалгебр $L \subseteq W(A)$, скінченного рангу над R, К .Сисак були узагальнені деякі твердження із [39], наприклад було перевірено, що L має ненульовий центр, і побудовано ланцюг ідеалів монотонно зростаючих рангів, а також було досліджено будови локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань малих рангів.

Існує тісний зв'язок між алгеброю Лі диференціювань комутативної $\mathbb{K}$-алгебри A і групою автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ алгебри A, оскільки, як відомо, $\exp D$ локально нільпотентного диференціювання D є автоморфізмом $\mathbb{K}$-алгебри A. Більше того, група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ діє спряженням на множині $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$

(LND(A)) усіх (локально нільпотентних) диференціювань кільця A. Кожному локально нільпотентному диференціюванню $D \in \mathrm{LND}(A)$ можна поставити у відповідність однопараметричну групу автоморфізмів алгебри A, визначену як $\mathbb{K} \ni t \mapsto \exp(tD) \in \mathrm{Aut}(A)$. Отже, вибір локально нільпотентного диференціювання визначає дію адитивної групи поля $\mathbb{K}$ на $\mathbb{K}$-алгебру A.

Р. Рентшлером [53] була отримана характеризація всіх локально нільпотентних диференціювань кільця $\mathbb{K}[x, y]$ многочленів від двох змінних. Більш точно, він показав, що кожне локально нільпотентне диференціювання $D \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$ може бути зведене до форми $f(x)\partial_y$ за допомогою спряження автоморфізмом кільця $\mathbb{K}[x, y]$. Потім, він використав цю характеризацію для класифікації всіх алгебраїчних дій адитивної групи поля $\mathbb{K}$ на площині $\mathbb{K}^2$ для поля $\mathbb{K}$ характеристики 0.

Крім того, результати Рентшлера дали можливість отримати суттєво простіше доведення відомої теореми Юнга (1942) про структуру групи алгебраїчних автоморфізмів кільця $\mathbb{K}[x, y]$. Вищезазначені результати переконливо показують важливість вивчення локально-нільпотентних диференціювань кілець. Ідея про відповідність між локалько нільпотентними диференціюваннями і однопараметричними групами автоморфізмів була використана і розвинена такими математиками, як А. Коен і Я. Драйсма [15]. Вони пов'язали між собою дію афінних алгебраїчних груп на алгебраїчних многовидах і алгебрами Лі векторних полів.

Локально нільпотентні диференціювання також пов'язані з відомими проблемами в сучасній математиці, такими як гіпотеза якобіана [20, 45, 61] і 14-та проблема Гільберта [17, 19, 20, 47].

В. Бавула [2,3] вивчав алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ всіх трикутних диференціювань поліноміальних кілець $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0. Він довів, що вони локально нільпотентні, але не нільпотентні, і встановив ряд їх важливих властивостей.

Взагалі кажучи, множина локально нільпотентних диференціювань не є замкненою відносно додавання, оскільки сума локально нільпотентних диференціювань не обов'язково є локально нільпотентним диференціюванням. Наприклад, диференціювання $y\partial_x - x\partial_y \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}[x,y]$ не є нільпотентним, хоча доданки $y\partial_x, x\partial_y \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x,y])$. І з огляду на це, алгебри Лі, які складаються з локально нільпотентних диференціювань є цікавим для дослідження об'єктом. Ж. Фройденбург в своїй монографії [20], присвяченій локально нільпотентним диференціюванням, поставив питання про опис структури алгебр Лі, які одночасно є підмножинами в множині локально нільпотентних диференціювань комутативного кільця [20, ст. 238, проблема 11.7].

А.П. Петравчук і К.Я. Сисак отримали низку результатів стосовно цієї проблеми. Зокрема, було показано що кожна скінченновимірна алгебра Лі диференціювань комутативної асоціативної алгебри A, що складається з локально нільпотентних диференціювань є нільпотентною алгеброю Лі. Також був узагальнений вищевказаний результат Рентшлера на випадок кільця многочленів від двох змінних, а саме було отримано, що кожна така підалгебра Лі з $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}[x,y]$ є спряженою за допомогою автоморфізма кільця многочленів до підалгебри трикутної алгебри Лі.

Дивергенція divD диференціювання D є дуже важливою геометричною характеристикою D (диференціювання D можна розглядати як векторне поле з коефіцієнтами в A). У першій частині розділу вказано на зв'язок між виразами $\mathrm{div}\,D$ у різних базисах трансцендентності (див. теорема 1.1). Ця теорема узагальнює результат роботи [49]. Природно, що дивергенція диференціювання не змінюється, якщо переходимо від однієї системи координат у поліноміальному кільці до іншої системи координат. Зокрема, множина всіх бездивергентних диференціюваннь кільця поліномів $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ є інваріантною щодо дії автоморфізмів цього кільця. Такі диференціювання утворюють дуже важливу підалгебру L_0 алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n])$ усіх $\mathbb{K}$-диференціюваннь на $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$. Алгебру Лі L_0 вивчали багато авторів (див., наприклад, [2,49,50]). Зауважимо, що алгебра L_0 містить усі якобіанні диференціювання $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, які є найпростішими бездивергентними диференціюваннями. Отже, цікаво знати співвідношення між бездивергентними диференціюваннями і якобіанними диференціюваннями. Доведено, що будь-яке бездивергентне диференціювання кільця поліномів $\mathbb{K}[x, y, z]$ є сумою щонайбільше двох якобіанних диференціювань (теорема 1.3). Зауважимо, що будь-яке бездивергентне диференціювання кільця $\mathbb{K}[x, y]$ є якобіанним. Побудовано приклад бездивергентного диференціювання кільця поліномів $\mathbb{K}[x, y, z]$, яке вже не є якобіанним (твердження 1.4).

З алгебрами Лі диференціювань поліноміальних кілець тісно повязані модулі над такими кільцями. Нагадаємо, що кожен скінченновимірний модуль V над кільцем многочленів $\mathbb{K}[X]$ визначає n попарно комутуючих матриць $A_1, \ldots, A_n$, які задають дію елементів $x_1, \ldots, x_n$ алгебри $\mathbb{K}[X]$ на V у фіксованому базисі простору V. Задача класифікації таких наборів $(A_1, \ldots, A_n)$ квадратних матриць з точністю до подібності є дикою при $n \geqslant 2$ (див. [22]) і тому задача класифікації скінченновимірних (над $\mathbb{K}$) модулів над алгеброю $\mathbb{K}[X]$ також є дикою. Природнім обмеженням на модулі V над $\mathbb{K}[X]$ є умова одновимірністі їх цоколя (це еквівалентно тому, що модуль V містить єдиний мінімальний підмодуль). Природнім прикладом такого модуля є векторний простір $T_n := \mathbb{K}[X]$ над полем $\mathbb{K}$ з наступною дією $\mathbb{K}[X]$ на T_n: $x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$ для $f \in T_n$ (цей модуль нескінченновимірний, але всі його скінченновимірні підмодулі мають одновимірні цоколі). Використовуючи звязок між такими модулями і алгебрами Лі диференціювань в роботі [5] доведено, що задача класифікації скінченновимірних алгебр Лі диференціювань кільця многочленів від $n \geqslant 4$ змінних є дикою. Це підкреслює важливість вивчення модулів над поліноміальними кільцями. В роботі [23] вивчалися скінченновимірні підмодулі модуля T_2, там вони називалися поліноміально трансляційними. Властивості модулів над поліноміальними кільцями вивчалися в роботах [52, 59]. Відзначимо також, що ендоморфізми модулів над кільцем многочленів від однієї змінної вивчались в роботі [4].

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка з науково-дослідної теми №21БНН-06 "Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму "Математичні науки і природничі науки”” (номер державної реєстрації 0121U112941).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей та опис структури нільпотентних підалгебр алгебр Лі диференціювань поліноміальних кілець.

Об'єктом дослідження є алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$, всіх диференціювань кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленів від n змінних над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$.

Предметом дослідження є нільпотентні і розв'язні підалгебри алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$. Для вивчення підалгебр алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ в багатьох випадках можуть корисними модулі над поліноміальними кільцями, і бездивергентні диференціювання (тобто диференціювання з нульовою дивергенцією).

Методи дослідження — методи і підходи з диференціальної алгебри, які пов'язані з поняттями диференціювання і автоморфізму кільця, методи теорії алгебр Лі, методи лінійної алгебри і комутативної алгебри, методи теорії модулів.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації одержано наступні основні нові результати:

- доведено, що кожне бездивергентне диференціювання поля алгебраїчних функцій від трьох змінних розкладається у суму двох якобіанних диференціюваннь;

- досліджено будову скінченновимірних розв'язних алгебр Лі L диференціювань кільця многочленів від трьох змінних з абелевими ідеалами рангу не менше двох;

- детально досліджена будова нільпотентних підалгебр $W(A)$ з центром корангу $\leqslant 2$;

- показано, що кожен скінченновимірний нільпотентний модуль над кільцем поліномів від n змінних з одновимірним цоколем вкладається у модуль T_n, тобто модуль T_n є, в деякому сенсі, універсальним;

- дослілжена будова централізаторів поліноміальних диференціювань із ядром в раціональних функціях ступеня трансцендентності один;
- досліджені централізатори діагоналізовних лінійних диференціювань.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер і можуть бути використані в дослідженнях з диференціальної алгебри, теорії кілець, теорії алгебр Лі, в суміжних розділах математики таких, як теорія диференціальних рівнянь, математична фізика та алгебраїчна геометрія.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно і опубліковані в п'яти роботах, з яких п'ять у співавторстві [7, 8, 13, 14, 63]. В усіх роботах, опублікованих у співавторстві, внески авторів є рівними і нероздільними. Визначення напрямку дослідження та постановка задач належать науковому керівнику А. П. Петравчуку.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися

- on 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. (Kyiv, Ukraine, July 03–07, 2017);
- на Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача (Львів, Україна, 22–25 травня 2018 року);
- on International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine, July 14–17, 2020);
- on The international algebraic conference "At the End of the Year" 2021 (Kyiv, Ukraine, December 27–28, 2021).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 9 наукових працях, з них дві статті в наукових фахових виданнях України [8, 63], три статті, опубліковані у виданнях, включених до науковометричої бази даних Scopus [7, 13, 14], і чотири тези доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [9–12].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг роботи — 109 сторінок, обсяг основного тексту дисертації — 100 сторінок. Список використаних джерел викладений на 7-ми сторінках і містить 64 найменування.

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок з науковими програмами, встановлено об'єкт, предмет та методи дослідження, визначено його мету і завдання. Крім того, розкрито наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, вказано особистий внесок здобувача.

Також у вступі наведено огляду літератури, пов'язаною з тематикою дисертації. Тут вказано ким і коли були отримані перші результати, зазначено задачі, споріднені з проблематикою дослідження, та автори, які ними займалися.

З огляду на значну близькість тематики і суттєвий перетин за базовими поняттями, частина історичного огляду і базових загальновідомих означень запозичена із дисертаційної роботи К. Сисак [64].

Завершують вступ основні означення, приклади та попередні результати, що широко застосовуються в подальшому викладі матеріалу. Нагадаємо деякі з них.

Нехай A — алгебра (не обов'язково асоціативна) над деяким полем $\mathbb{K}$. *Диференціюванням (або $\mathbb{K}$-диференціюванням)* алгебри A називають $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D\colon A \to A$, яке задовільняє правило Лейбніца:

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

для всіх $x, y \in A$.

Множина $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ всіх диференціювань алгебри A з операцією комутатору

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1,$$

$D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ є алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$ і її називають *алгеброю Лі диференціювань* $\mathbb{K}$-алгебри A.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і A — асоціативна комутативна $\mathbb{K}$-алгебра з одиницею і без дільників нуля, тобто область цілісності. За областю цілісності A можна побудувати відповідне поле часток $\mathrm{Frac}(A) =: R$ Кожне диференціювання D алгебри A можна продовжити єдиним чином до диференціювання поля R. Можна легко переконатися, що для довільного елемета $a \in A$ і диференціювання $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ лінійне перетворення aD визначене як $aD : A \in x \mapsto aD(x) \in A$ задовольняє правило Лейбніца, а отже теж є диференціюванням. Множина

$$R \,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A = \{rD \mid r \in R, D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A\}$$

утворює підалгебру Лі в алгебрі Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ усіх диференціювань поля R. Зауважимо, що множина $R \,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ не є, взагалі кажучи, алгеброю Лі над полем R, бо її елементи можуть не бути R-лінійними відображеннями. Далі будемо позначати підалгебри $R \,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ через $W(A)$.

Для підалгебри Лі L алгебри Лі $W(A)$ її рангом $\mathrm{rank}_R L$ над полем R називають розмірність $\dim_R RL$ лінійного простору

$$RL = R\langle rD \mid r \in R, D \in L\rangle$$

над R. Множина $F = F(L)$ всіх елементів $r \in R$ таких, що $D(r) = 0$ для всіх диференціювань $D \in L$, є підполем в R і називається *полем констант* для алгебри Лі диференціювань L. Лінійні оболонки RL та

$$FL = F\langle fD \mid f \in F, D \in L\rangle$$

утворюють підалгебри Лі (над $\mathbb{K}$) в $W(A)$. Більше того, вони також є алгебрами Лі над полем F.

В **розділі 1** вивчаються властивості дивергенції диференціювань кілець алгебраїчних функцій над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, бездивергентні диференціювання (тобто диференціювання з нульовою дивергенцією), а також централізатори елементів $D \in W_n(\mathbb{K})$.

В підрозділі 1.1 встановлено поведінку дифергенції при зміні базису трансцендентності в кільці алгебраїчних функцій.

Теорема 1.1. *Нехай* $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. *Тоді*

$$\operatorname{div}_X D = \operatorname{div}_Y D + \frac{D(\Delta)}{\Delta},$$

де $\Delta = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$.

В підрозділі 1.2 отримано розклад бездивергентного диференціювання в суму якобіанних.

Теорема 1.3. *Нехай* D — $\mathbb{K}$*-диференціювання кільця поліномів* $\mathbb{K}[x, y, z]$ *з* $\operatorname{div} D = 0$. *Тоді існують якобіанні диференціювання* D_1 *і* D_2 *кільця* $\mathbb{K}[x, y, z]$ *такі, що* $D = D_1 + D_2$.

Наступні підрозділи **розділу 1** присвячено вивченню централізаторів елементів $D \in W_n(\mathbb{K})$.

В підрозділі 1.3 розглядаються випадок, коли поле констант диференціювання має степінь трансцендентності один над основним полем .

Теорема 1.12. *Нехай* D — *диференціювання кільця* $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *з полем констант* $F = \operatorname{Ker} D$ *у* $R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ *у вигляді* $F = \mathbb{K}(p)$ *для деякого незвідного полінома* p *і нехай* $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. *Тоді*

1. *Якщо* $\mathrm{rk}_R C = 1$, *то* $C = \mathbb{K}[p]D_0$ *для деякого* p*-вільного диференціювання* D_0 *з* $D = f(p)D_0$ *для деякого* $f(t) \in \mathbb{K}[t]$;

2. *Якщо* $\mathrm{rk}_R C \geqslant 2$, *то* C *є або алгеброю Лі рангу* k *над кільцем* $\mathbb{K}[p]$, *або* C *містить ідеал* I *рангу* $k-1$, *який є алгеброю Лі над* $\mathbb{K}[p]$ *і* $C = I + \mathbb{K}[p]S$ *для деяко диференціювання* $S \in C$.

Теорема 1.14. *Нехай* $D \in W_n(\mathbb{K})$ *є диференціюванням з* $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D = 1$ *і* $(\operatorname{Ker}_R D) \cap A = \mathbb{K}$. *Тоді* $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ *для деяких незвідних алгебраїчно незалежних поліномів* $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *диференціювання* D *має вигляд* $D = hf(p,q)D_0$ *для деякого редукованого диференціювання* D_0, *однорідного за* p, q *полінома* f *і* p-q-*вільного полінома* h, *а централізатор* $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ *є скінченновимірним над* $\mathbb{K}$, *будучи одним із наступних типів:*

$$C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0,$$

де $\mathbb{K}[p,q]_m$ — *лінійний простір однорідних за* p, q *поліномів ступеня* $m = \deg_{p\text{-}q} f$, *зокрема* $\dim_{\mathbb{K}} C = m + 1$, *або*

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K})$$

для деяких елементів $D_2, \ldots, D_k$, $k \leqslant n$ *в* C, *де* $D, D_2, \ldots, D_k$ *є лінійно незалежними над полем* R.

В підрозділі 1.4 розглядається випадок лінійних диференціювань.

Теорема 1.16. *Нехай* $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ — *лінійне диференціювання кільця многочленів* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *власні числа матриці* (a_{ij}). *Тоді справедливі наступні твердження:*

1. *Якщо власні значення* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *лінійно незалежні над* $\mathbb{Z}$, *то*

$$C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D).$$

2. *Якщо* $C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D)$, *то власні значення* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *є лінійно незалежними над* $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розділ 2 присвячений дослідженню нільпотентних та розв'язних алгебр Лі диференціювань. Зокрема, підпозділ 2.1 присвячено дослідженню нільпотентних підалгебр $L \subseteq W(A)$ рангу $n \geqslant 3$ над R з центром $Z = Z(L)$ рангу $\geqslant n - 2$ над R, тобто з центром корангу $\leqslant 2$ над R, де A — область цілісності над $\mathbb{K}$, $R = \operatorname{Frac}(A)$.

Теорема 2.7. *Нехай L — нільпотентна підалгебра рангу $n \geqslant 3$ над R з алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ — центр L з $\operatorname{rank}_R Z \geqslant n-2$, F поле констант L в R. Тоді справедливе одне з тверджень:*

1. $\dim_F FL = n$,

2. *FL знаходиться в одній з локальних нільпотентних підалгебр L_2, L_3 $W(A)$ рангу n над R, які мають базис $D_1, \ldots, D_n$ над R, що задовольняє співвідношення $[D_i, D_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ і мають вигляд*

$$L_2 = F\left\langle \left\{ \frac{b^i}{i!} D_1 \right\}_{i=0}^{\infty}, \ldots, \left\{ \frac{b^i}{i!} D_{n-1} \right\}_{i=0}^{\infty}, D_n \right\rangle$$

для деяких $b \in R$, таких що $D_i(b) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ і $D_n(b) = 1$,

$$L_3 = F\left\langle \left\{ \frac{a^i b^j}{i!j!} D_1 \right\}_{i,j=0}^{\infty}, \ldots, \left\{ \frac{a^i b^j}{i!j!} D_{n-2} \right\}_{i,j=0}^{\infty}, \left\{ \frac{b^i}{i!} D_{n-1} \right\}_{i=0}^{\infty}, D_n \right\rangle$$

для деяких $a, b \in R$, таких що

$$D_{n-1}(a) = 1, \quad D_n(a) = 0, \quad D_{n-1}(b) = 0, \quad D_n(b) = 1,$$
$$D_i(a) = D_i(b) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-2.$$

Теорема 2.9. *Нехай L — нільпотентна підалгебра рангу n над R алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ центр L з $\operatorname{rank}_R Z \geqslant n-2$ (тобто корангу $\leqslant 2$), і F поле констант L в R . Тоді алгебра Лі FL може бути ізоморфно вкладена в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$.*

У підрозділі 2.2 досліджуються скінченновимірні розв'язні підалгебри рангу 3 над R алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$.

Зокрема, розглядаються такі підалгебри, що мають абелевий ідеал рангу три.

Теорема 2.14. *Нехай L — розв'язна підалгебра алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$. Якщо L має абелевий ідеал I рангу 3 над R, тоді L ізоморфна розв'язній підалгебрі загальної афінної алгебри Лі $\operatorname{aff}_3(\mathbb{K})$. Зокрема $3 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} L \leqslant 9$.*

Також розглядаються такі підалгебри, що мають абелевий ідеал рангу два.

Теорема 2.16. *Нехай L — розв'язна скінченновимірна підалгебра алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$ з $\operatorname{rank}_R L = 3$. Якщо L має ідеал I рангу 2 над R і $F = F(L)$ є полем констант I в R, то алгебра Лі L міститься в підалгебрі $\overline{L} = F\overline{I} + L$ алгебри Лі $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$, де $\overline{I} = (RI) \cap L$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розв'язною, $F\overline{I}$ — її ідеал рангу 2 над R, який ізоморфний підалгебрі $\mathrm{aff}_2(F)$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розширенням ідеалу $F\overline{I}$ за допомогою алгебри Лі розмірності 1 або 2 над $\mathbb{K}$.*

В **розділі 3** досліджуються нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями.

Модуль V над поліноміальним кільцем $\mathbb{K}[X]$ будемо називати нільпотентним, якщо існує таке натуральне число k, що $(\mathbb{K}_0[X])^k v = 0$ для всіх $v \in V$, де $\mathbb{K}_0[X]$ — несуттєвий ідеал із $\mathbb{K}[X]$, тобто ідеал, який складається із многочленів без вільного члена.

Модуль V називається локально нільпотентним, якщо для довільних $a \in \mathbb{K}_0[X], v \in V$ існує таке натуральне число $k = k(a, v)$, що виконується рівність $a^k v = 0$.

Через T_n позначимо $\mathbb{K}[X]$-модуль на векторному просторі $\mathbb{K}[X]$ з дією твірних x_i кільця на T_n за правилом:

$$x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f), \quad i = 1, \ldots, n, \quad f \in T_n.$$

В підрозділі 3.1 розглядаються нільпотентні модулі з одновимірним цоколем.

Теорема 3.2. *Нехай V — скінченновимірний нільпотентний $\mathbb{K}[X]$-модуль з одновимірним цоколем. Тоді модуль V ізоморфно вкладається в $\mathbb{K}[X]$-модуль T_n.*

В підрозділі 3.2 вказано будову кільця ендоморфізмів модуля T_n.

Теорема 3.6. *Лінійне перетворення φ векторного простору $\mathbb{K}[X]$ є ендоморфізмом $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\varphi = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ \alpha_i \geqslant 0}} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathbb{K}$$

при цьому виконуються рівності

$$c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \varphi\left(\frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdots\frac{x_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}\right)(0).$$

Підмодуль M модуля T_n будемо називати *мономіальним*, якщо він має базис над полем $\mathbb{K}$ із одночленів.

Теорема 3.14.

1. *Алгебра* $\mathrm{End}(T_n)$ *всіх ендоморфізмів модуля* T_n *ізоморфна алгебрі формальних степеневих рядів* $\mathbb{K}[[X]]$ *і тому група автоморфізмів* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *ізоморфна мультиплікативній групі* $\mathbb{K}[[X]]^*$ *алгебри* $\mathbb{K}[[X]]$.

2. *Група автоморфізмів скінченновимірного мономіального підмодуля* M *із* T_n *розмірності* m *над* $\mathbb{K}$ *ізоморфна прямому добутку* $\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^+)^{m-1}$, *де* $\mathbb{K}^+$ *— адитивна група поля* $\mathbb{K}$.

3. *Група автоморфізмів довільного скінченновимірного* $\mathbb{K}[X]$*-модуля* V *з одновимірним цоколем ізоморфна факторгрупі групи* $\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^+)^m$, *для деякого* $m \geqslant 0$.

У висновках перелічено основні результати роботи. У додатку 1 вказано статті та тези наукових доповідей, де були опубліковані отримані результати, і назви наукових конференцій, на яких ці результати були представлені.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору Петравчуку Анатолію Петровичу за постановку розглянутих в дисертації задач, постійну увагу, всебічну підтримку та допомогу в роботі.

Огляд літератури

Поняття диференціювання алгебри було введено у 1936 році Н. Джекобсоном у роботі [26]. Більш точно, було розглянуто перетворення довільної алгебри A над довільним полем $\mathbb{K}$, які були лінійні та задовільняли правило Лейбніца, тобто

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

для всіх елементів алгебри $x, y \in A$. Такі перетворення були названі диференціюваннями алгебри A узагальнюючи випадок диференціювань полів аналітичних функцій. Було показано, що довільна лінійна комбінація диференціювань $\mathbb{K}$-алгебри A знову є диференціюваням, навідміну від їх композиції. Крім того, виявилося, що для диференціювань D_1, D_2 їх комутатор $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ задовольняє правило Лейбніца, тобто є диференціюванням. Таким чином, множина всіх диференціювань алгебри A є алгеброю Лі відносно комутатора.

Після того, як такі видатні математики,як Колчин і Ріт, у спробі знайти нові алгебраїчні підходи до вивчення диференціальних рівняннь започаткували диференціальну алгебри у роботах [33, 54], вивчення алгебр Лі диференціювань стало важливою проблемою диференціальної алгебри зокрема, і лінійної алгебри взагалі.

У 1978 році Д. Джорданом і К. Джорданом було отримано низку результатів у роботах [28–30], які стосувилися вивчення будови алгебри Лі $\operatorname{Der} R$ всіх диференціювань асоціативного кільця R. Більш точно, автори зосередилися на вивченні будови ідеалів кільця $\operatorname{Der} R$ і її зв'язку з будовою ідеалів кільця R. У випадку, коли кільце R комутативне, ключову роль відіграла така конструкція як підалгебра Лі диференціювань вигляду $RD = \{rD \colon r \in R\}$ для фіксованого диференціювання D кільця R. Було зазначено, що підалгебри такого вигляду мають схожі властивості і відіграють таку саму роль у комутативному випадку, що і кільце $I(R)$ всіх внутрішніх диференціювань у випадку некомутативного кільця R.

У 1986 році зазначені вище результати були узагальнені. Зокрема, для ненульових підалгебр Лі алгебри Лі $\operatorname{Der} R$, які також є модулями над кільцем R була наведена достатня умова для того, щоб вони були простими алгебрами Лі. Більше того, Д. Джордан показав, що, у випадку поля характеристики нуль, алгебра Лі $\operatorname{Der} R$ буде простою, якщо R – регулярне локальне кільце. Виявилося, як потім показав Т. Зіберт [57], що останнє твердження справедливе в обидва боки.

Особливо цікавим для розгляду є випадок коли кільце R є кільцем $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленів від n змінних. Підалгебри алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ які є $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$-модулями називаються поліноміальними алгебрами Лі. Такі підалгебри було вперше розглянуто в роботі [62] В. Бухштабера та Д. Лейкіна в 2002 році. Поліноміальні алгебри Лі рангу один в $W_n(\mathbb{K})$ були більш детально досліджені у роботі [1] І. Аржанцева, Є. Македонського і А. Петравчука. Зокрема були прокласифіковані всі їх скінченновимірні підалгебри. В 2013 році Є. Македонський і А. Петравчук у роботі [1] дали опис всіх скінченновимірних підалгебр Лі із $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x, y))$.

В 2014 році Є. Македонський і А. Петравчук [39] отримали низку результатів стосовно загальних властивостей і будови нільпотентних і розв'язних підалгебр скінченного рангу з алгебри Лі $W(A) = R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ для асоціативно-комутативної області цілісності A над полем $\mathbb{K}$ з полем часток R. Зокрема, фундаментальним результатом, що відноситься до будови нільпотентних алгебр Лі диференціювань виявилося, що кожна нільпотентна підалгебра Лі L скінченного рангу, яка також є замкненою відносно множення на елементи з її поля констант $F = F(L)$ є скінченновимірною нільпотентою алгеброю Лі над F. Більше того, для кожної нільпотентної підалгебри диференціювань скінченного рангу із $W(A)$ була побудована серія ідеалів з зростаючими рангами. Ця серія ідеалів має схожі властивості з верхньоцентральним рядом скінченновимірної нільпотентної алгебри Лі. В роботі [51] ці результати були узагальнені на випадок локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань. Окремого розгляду заслуговує випадок коли алгебра A є кільцем многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. В такому разі важливими прикладами локально нільпотентних підалгебр Лі виступають підалгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ усіх трикутних поліноміальних диференціювань. Вони були досліджені у роботах В. Бавули [2, 3]. Ним було показано, що ці алгебри Лі є локально нільпотентні та локально скінченні.

Клас алгебр Лі диференціювань, що складається з локально нільпотентних диференціювань має тісний зв'язок з класом локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань і теж є цікавим сам по собі. Диференціювання $D\colon A \to A$ алгебри A називається локально нільпотентним, тоді і тільки тоді, коли кожен елемент $a \in A$ зануляється деяким ступенем $n \in \mathbb{N}$ диференціювання D, тобто $D^n(a) = 0$, або, що те саме, $A = \cup_{n\geqslant 1} \operatorname{Ker} D^n$. Найпростішим прикладом локально нільпотентних диференціювань є частинні похідні на алгебрі многочленів. Одна з причин важливості локально нільпотентних диференціювань полягає у їх зв'язку з автоморфізмами алгебр. Більш точно, довільному локальному диференціюванню $D\colon A \to A$ можна поставити у відповідність автоморфізм алгебри A визначений як

$$\exp D\colon A \ni a \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{D^n}{n!}(a),$$

де для кожного окремо взятого a сума скінченна з локальної нільпотентності диференціювання D. Також кожному локально нільпотентному диференціюванню відповідає дія адитивної групи поля $(\mathbb{K}, +)$ автоморфізмами на алгебрі A задана як $\mathbb{K} \ni t \mapsto \exp tD \in \operatorname{Aut} A$.

За кожним автоморфізмом кільця многочленів $\mathbb{K}[x, y]$ від двох змінних можна побудувати пару диференціювань, а саме частинні похідні відповідні до нових координатних функцій, записані в старих координатах. У випадку поля характеристики нуль Ренштлер у роботі [53] показав, що для довільного локально нільпотентного диференціювання $D\colon A \to A$ існує такий автоморфізм $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathbb{K}[x, y]$, що

$$\varphi D \varphi^{-1} = f(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

З урахуванням наведених вище міркувань стає прозорим геометрична тлумачення цього результату. А саме, для довільної дії адитивної групи поля $(\mathbb{K}, +)$ на афінній площині $\mathbb{K}^2$ можна вибрати (поліноміальні) координати (x, y) таким чином, що ця дія запишеться як

$$t \cdot (x, y) = (x, y + tf(x)).$$

Випадок поля характеристики $p > 0$ було досліджено М. Мiянiшi [41]. В такому разi дiю дiї адитивної групи поля $(\mathbb{K}, +)$ на афiннiй площинi $\mathbb{K}^2$ можна записати як

$$t \cdot (x, y) = (x, y + tf_0(x) + t^p f_1(x) + \cdots + t^{p^n} f_n(x)).$$

Канонiчнi форми локально нiльпотентних диференцiювань були дослiдженi i для старших розмiрностей. Так, для випадку $n = 3$ була отримана низка важливих результатiв такими математиками, як М. Мiянiшi [42], Д. Даглi [16], Ш. Калiман [18]. В 2004 роцi Л. Макар-Лiманов [37] розв'язав цю проблему для випадку афiнної областi $\mathbb{C}^n$.

З огляду на наведенi вище зв'язки мiж поняттям локально нiльпотентного диференцiювання i автоморфiзмами та однопараметричними групами, недивним є той факт, що локально нiльпотентнi диференцiювання знаходять своє мiсце в деяких формулюваннях знаменитих проблем в математицi. Яскравим прикладом такої проблеми є гiпотеза якобiана. Гiпотеза полягає в тому, що многочлени $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ породжують алгебру многочленiв, якщо якобiан $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ є ненульовим елементом поля $\mathbb{K}$. Гiпотеза якобiана залишається вiдкритою для випадку $n \geqslant 2$.

Гiпотеза має численi еквiвалентнi формулювання, деякi з яких в термiнах локально нiльпотентних диференцiювань. Так, наприклад А. Новiцкi [44] показав, що гiпотеза якобiана еквiвалентна припущенню, що довiльний базис $D_1, \ldots, D_n \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\,\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ алгебри Лi полiномiальних диференцiювань як модуля над кiльцем многочленiв, що складається з попарно комутуючих елементiв є локально нiльпотентним, тобто кожен його елемент є локально нiльпотентнии. Ж. Фройденбург [20] навiв ще одне еквiвалентне формулювання в термiнах якобiанних диференцiювань.

Якобiанним називається таке диференцiювання $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ кiльця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленiв вiд n змiнних, для якого iснують многочлени $f_1, \ldots, f_{n-1}$, такi що

$$D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(f_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

для всіх поліномів $f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Тоді вказане вище еквівалентне формулювання гіпотези якобіана полягає в тому, що кожне якобіанне диференціювання $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$, яке має слайс, тобто елемент $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, такий що $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(g) = 1$ є локально нільпотентним і, більше того, його ядро $\operatorname{Ker} D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ породжується многочленами $f_1, \ldots, f_{n-1}$ як підалгебра. Більш детально про гіпотезу якобіана можна подивитися у монографії А. Ван ден Ессена [61].

Ще однією проблемою, для якої апарат локально нільпотентних диференціювань дозволив отримати числені результати є 15-та проблема Гільберта. А саме, для підполя P у полі раціональних функцій $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ чи є алгебра $P \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ скінченнопородженою над полем $\mathbb{K}$? Широко відомий контрприклад М. Нагати дав негативну відповідь на це питання. Дерксеном [19] було показано, що кільце $P \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ є ядром деякого поліноміального диференціювання. Більше того, виявилося, що 15-та проблема Гільберта може бути переформульована наступним чином: чи вірним є твердження, що кожне локально нільпотентне диференціювання алгебри многочленів має скінченно породжене ядро (як алгебра)? Таке переформулювання дозволило отримати низку контрприкладів (див. [17, 47]) у випадку $n \geqslant 5$. У випадку $n = 3$ відомим є результат М. Міяніші [42], а для випадку $n = 4$ проблема залишається відкритою.

Означення та допоміжні результати

Наведемо спочатку загально відомі означення і твердження з теорії алгебр Лі, які будуть широко використовуватися в роботі. Їх можна знайти в класичній літературі присвяченій алгебрам Лі, наприклад, [27, 58].

Означення 1. Лінійний простір L над полем $\mathbb{K}$ разом з білінійною операцією добутку $(x, y) \to [x, y]$, називають *алгеброю Лі* над $\mathbb{K}$, якщо виконується такі умови

(1) $[x, x] = 0$ для всіх $x \in L$;

(2) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ для всіх $x,\ y,\ z\in L$.

Друге співвідношення називають тотожністю Якобі.

Білінійну операцію із означення алгебри Лі називають операцією комутування, а елемент $[x,y]$ — комутатором елементів x та y. Принциповим є той факт, що операція комутування в загальному випадку неасоціативна. Перше співвідношення можемо еквівалентним чином переписати як

$$[x,y]=-[y,x] \text{ для всіх } x,\ y\in L.$$

якщо характеристика поля не дорівнює двом.

Означення 2. Нехай L — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$.

1. Підпростір M лінійного простору L називають *підалгеброю алгебри Лі* L, якщо для довільних елементів $x,\ y\in M$ їх комутатор $[x,y]$ належить M.

2. Підпростір I алгебри Лі L називають *ідеалом* в L, якщо для довільних $x\in I$ і $y\in L$ їх комутатор $[x,y]$ належить I.

3. Нехай I — ідеал алгебри Лі L, тоді лінійний факторпростір $L/I=\{x+I \mid x\in L\}$ разом з операцією $[x+I,y+I]=[x,y]+I,\ x,y\in L$ називають *фактор-алгеброю* алгебри Лі L за ідеалом I.

4. *Центром* $Z(L)$ *алгебри Лі* L називають множину всіх елементів $z\in L$ таких, що $[z,x]=0$ для всіх елементів $x\in L$.

Для лінійних підпросторів H і K з алгебри Лі L будемо позначати через $[H,K]$ лінійну оболонку всіх комутаторів $[h,k]$ і через $H+K$ множину всіх сум $h+k$, де $h\in H$ і $k\in K$.

Означення 3. Нехай L та M — алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$. Лінійне відображення $\varphi\colon L\to M$ називають *гомоморфізмом алгебр Лі* якщо виконується тотожність $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$ для всіх елементів $x,\ y\in L$. Якщо гомоморфізм φ є ін'єкцією, сюр'єкцією або біекцію, то він називається моно-, епі-, або ізоморфізмом відповідно. Якщо існує ізоморфізм $\varphi\colon L\to M$, то кажуть, що алгебри Лі L та M є ізоморфними і позначають цей факт, як $L\simeq M$.

Для всіх ідеалів I з алгебри Лі L відображення $\pi\colon L \to L/I$, задане як $\pi(x) = x + I$ для всіх елементів $x \in L$, є епіморфізмом алгебр Лі.

Теорема 4. *Нехай $\varphi\colon L \to M$ гомоморфізм алгебр Лі. Тоді*

(1) Образ $\varphi(L)$ є підалгеброю Лі в алгебри Лі M, ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ є ідеалом алгебри Лі L та виконується, що $L/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \varphi(L)$;

(2) Для будь-якого ідеалу H в алгебрі Лі L і будь-якої підалгебри K в алгебрі Лі L виконується, що H є ідеалом в алгебрі Лі $H+K$, підалгебра Лі $H\cap K$ є ідеалом в K і

$$H + K/K \simeq K/H \cap K.$$

(3) Для будь-яких ідеалів H і K алгебри Лі L, таких що H міститься K, виконується, що

$$(L/K)/(H/K) \simeq L/H.$$

(4) Для будь-якого ідеалу I з L, що міститься в ядрі $\operatorname{Ker}\varphi$, існує і єдиний гомоморфізм $\theta\colon L/I \to M$, такий що $\varphi = \theta\circ\pi$, де $\pi\colon L \to L/I$ — канонічна проекція.

Означення 5. Нехай L — алгебра Лі над деяким полем $\mathbb{K}$. Розглянемо послідовність ідеалів, задану за наступним рекурентним співвідношенням:

$$L^1 = L,\ L^{n+1} = [L^n, L]$$

в L для всіх натуральних $n \geqslant 1$.

1. Серію ідеалів

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq L^{n+1} \supseteq \cdots$$

називають *нижнім центральним рядом* алгебри Лі L.

2. Підалгебру $L^2 = [L, L]$ алгебри Лі L називають *похідною підалгеброю* або *комутантом* алгебри Лі L. Якщо $[L, L] = 0$, то кажуть, що L є *абелевою* алгеброю Лі.

3. Кажуть, що алгебру Лі L є *нільпотентною*, якщо $L^{n+1} = 0$ для деякого натурального n. Найменше таке число n називається *класом* або *ступенем* нільпотентності алгебри Лі L.

4. Кажуть, що алгебра Лі L є *локально нільпотентною*, якщо кожна її скінченнопороджена підалгебра Лі є нільпотентною.

Означення 6. Нехай L — алгебра Лі над деяким полем $\mathbb{K}$. Розглянемо послідовність ідеалів, задану за таким рекурентним співвідношенням:

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]$$

в L для всіх цілих $n \geqslant 0$.

1. Серію ідеалів

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)} \supseteq L^{(n+1)} \supseteq \cdots$$

називають *похідною серією* алгебри Лі L.

2. Кажуть, що алгебра Лі L є *розв'язною*, якщо $L^{(n)} = 0$ для деякого натурального n. Найменше таке число n називається *ступенем розв'язності* алгебри Лі L і позначається через $s(L)$.

Розглянемо лінійний простір V над полем $\mathbb{K}$ і його алгебру ендоморфізмів $\operatorname{End} V$. Визначимо на множині $\operatorname{End} V$ множення, задане як

$$[T, S] = T \cdot S - S \cdot T,$$

де $T, S \in \operatorname{End} V$ і $\cdot$ є множенням в асоціативній алгебрі $\operatorname{End} V$. Тоді лінійний простір $\operatorname{End} V$ разом з цією операцією є алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$, яка позначається $\mathfrak{gl}(V)$.

Означення 7. Нехай A — алгебра над полем $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D\colon A \to A$ називають *диференціюванням (або $\mathbb{K}$-диференціюванням)* алгебри A, якщо для нього виконується правило Лейбніца: $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для всіх елементів $a, b \in A$.

Множина $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань алгебри A у сукупності комутатором, заданим як

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

для всіх диференціювань $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ є підалгеброю в алгебрі Лі $gl(A)$. Її називають *алгеброю Лі диференціювань* $\mathbb{K}$*-алгебри* A.

Означення 8. Для довільної алгебри Лі L над полем $\mathbb{K}$ і довільного елемента $x \in L$ можна виділити лінійний оператор $\mathrm{ad}\, x \colon L \to L$, заданий за правилом $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y]$ для всіх елементів $y \in L$. Таким чином визначені оператори виявляється диференціюваннями і їх називають *внутрішніми диференціюваннями* алгебри Лі L.

Відповідність $\mathrm{ad} \colon L \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} L$, яка кожному елементу $x \in L$ співставляє внутрішнє диференціювання $\mathrm{ad}\, x$ є природнім гомоморфізмом алгебр Лі

Означення 9.

1. Нехай L_1, L_2 — алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$ і $\varphi \colon L_1 \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} L_2$ — гомоморфізм алгебр Лі. Тоді лінійний простір $L_1 \oplus L_2$ разом з операцією

$$[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2], \varphi(a_1)(b_2) - \varphi(a_2)(b_1)),$$

   $a_1, a_2 \in L_1$, $b_1, b_2 \in L_2$, називають *зовнішнім напівпрямим добутком* і позначають через $L_1 \leftthreetimes_{\varphi} L_2$ або $L_1 \leftthreetimes L_2$.

2. Якщо алгебра Лі L містить ідеал N і підалгебру B таку, що $L = N + B$ та $N \cap B = 0$, то L називають *внутрішнім напівпрямим добутком* алгебр Лі B і N і позначають $L = B \leftthreetimes N$.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і A — асоціативна комутативна $\mathbb{K}$-алгебра з одиницею і без дільників нуля, тобто область цілісності. За областю цілісності A можна побудувати відповідне поле часток $\mathrm{Frac}(A) =: R$. Кожне диференціювання D алгебри A можна продовжити єдиним чином до диференціювання поля R за правилом:

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2}$$

для всіх $a, b \in A$, $b \neq 0$. Можна легко переконатися, що для довільного елемета $a \in A$ і диференціювання $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ лінійне перетворення aD визначене як $aD : A \in x \mapsto aD(x) \in A$ задовольняє правило Лейбніца, а отже теж є диференціюванням, тобто простір $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ є також A-модулем. Множина

$$R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A = \{rD \mid r \in R, D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A\}$$

утворює підалгебру Лі в алгебрі Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ усіх диференціювань поля R. Зауважимо, що множина $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ не є, взагалі кажучи, алгеброю Лі над полем R, бо її елементи можуть не бути R-лінійними відображеннями. Далі будемо позначати підалгебри $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ через $W(A)$.

Для підалгебри Лі L алгебри Лі $W(A)$ її рангом $\operatorname{rank}_R L$ над полем R називають розмірність $\dim_R RL$ лінійного простору

$$RL = R\langle rD \mid r \in R, D \in L\rangle$$

над R. Множина $F = F(L)$ всіх елементів $r \in R$ таких, що $D(r) = 0$ для всіх диференціювань $D \in L$, є підполем в R і називається *полем констант* для алгебри Лі диференціювань L. Лінійні оболонки RL та

$$FL = F\langle fD \mid f \in F, D \in L\rangle$$

утворюють підалгебри Лі (над $\mathbb{K}$) в $W(A)$. Більше того, вони також є алгебрами Лі над полем F.

Має місце наступне твердження.

Лема 10 ([39, Lemma 4]). Нехай L — підалгебра з алгебри Лі $W(A)$ та I — ідеал в L. Тоді векторний простір $RI \cap L$ над полем $\mathbb{K}$ буде також ідеалом в L.

Далі будемо позначати алгебру Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ всіх поліноміальних диференціювань через $W_n(\mathbb{K})$. Кожне диференціювання D з $W_n(\mathbb{K})$ можна подати у вигляді

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

де $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ і $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ — звичайні частинні похідні (тобто такі диференціювання алгебри многочленів, що задаються співвідношеннями $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$ і $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$ для всіх $j \neq i$). Зауважимо, що коефіцієнти f_i можна однозначно визначити як $f_i = D(x_i)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

Означення 11. Диференціювання алгебри поліномів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ вигляду

$$D = f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

де $f_i \in \mathbb{K}[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ для всіх $i = 1, \ldots, n-1$ і $f_n \in \mathbb{K}$, називаються *трикутними диференціюваннями*. Множина всіх трикутних диференціювань є важливою підалгеброю Лі в $W_n(\mathbb{K})$, її позначають через $u_n(\mathbb{K})$.

Алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ були досліджені Бавулою в роботах [2, 3]. Було показано, що алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ попарно неізоморфні для різних $n \geqslant 2$. Вони є розв'язними, але не є нільпотентними алгебрами Лі. Також було показано, що всі їхні внутрішні диференціювання є локально нільпотентними операторами. Наприкінець, в цих роботах було доведено, що $u_n(\mathbb{K})$, $n \geqslant 1$, є локально нільпотентними і локально скінченними алгебри Лі.

Означення 12. Диференціювання $D\colon A \to A$ називається *локально нільпотентним,* якщо для кожного елемента a алгебри A існує таке ціле число $n = n(a) > 0$ що $D^n(a) = 0$, або що те саме $A = \cup_{n\geqslant 1} \operatorname{Ker} D^n$.

Зокрема, в алгебрі поліномів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ частинні похідні $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ і трикутні диференціювання є прикладами локально нільпотентних диференціювань. Множину всіх локально нільпотентних диференціювань алгебри A позначатимемо через $\mathrm{LND}(A)$. За означенням, $\mathrm{LND}(A)$ є підмножиною в алгебрі Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$, однак вона взагалі кажучи не є замкненою ні відносно суми, ні відносно комутатора, тобто не утворює в ній підалгебри чи підпростору в загальному випадку.

Твердження 13 (див. [20, Principles 7 and 10])**.** Нехай $\mathbb{K}$ — поле характеристики нуль і A — (комутативна) область цілісності над полем $\mathbb{K}$.

1. Для диференціювання $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ і елемента $f \in A$, диференціювання fD є локально нільпотентним тоді і лише тоді, коли D є локально нільпотентним, а елемент f належить ядру $\mathrm{Ker}\, D$.

2. Якщо локально нільпотентні диференціювання $D, E \in \mathrm{LND}(A)$ комутують, то їх сума $D+E$ також є локально нільпотентним диференціюванням.

Обернене твердження до другого пункта взагалі кажучи не вірне, тобто можуть існувати такі локально нільпотентні диференціювання D і E на A, що $[D, E] \neq 0$, а сума $D + E$ теж є локально нільпотентим диференціюванням. Приклади можна знайти в алгебрі Лі трикутних диференціювань кільця многочленів.

Твердження 14 (див. [20, Principle 1])**.** Нехай D — локально нільпотентне диференціювання комутативної алгебри A над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Тоді група $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ всіх автоморфізмів $\mathbb{K}$-алгебри A діє на множині локально нільпотентних диференціювань $\mathrm{LND}(A)$ спряженням, тобто $\alpha \cdot D = \alpha D \alpha^{-1}$ для всіх автоморфізмів $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ і локально нільпотентних диференціювань $D \in \mathrm{LND}(A)$.

Теорема 15 (див. [53])**.** *Нехай $\mathbb{K}$ — поле характеристики нуль. Якщо D — локально нільпотентне диференціювання алгебри $\mathbb{K}[x, y]$ многочленів від двох змінних, то існує поліном $f \in \mathbb{K}[x]$ і автоморфізм $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ такі, що*

$$\alpha D \alpha^{-1} = f(x) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Розділ 1

Бездивергентні диференціювання і централізатори елементів в алгебрах Лі диференціювань

Результати цього розділу було опубліковано у працях [7, 13].

Позначимо через A поле алгебраїчних функцій від n змінних над полем $\mathbb{K}$. Нехай $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — базис трансцендентності A (над $\mathbb{K}$). Тоді кожне диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_i}$ підполя $\mathbb{K}(y_1, \ldots, y_n) \subseteq A$ може бути однозначно продовжено до диференціювання поля A. Ми позначимо це розширення для зручності тими ж самими символами $\frac{\partial}{\partial y_i}$. Позначимо через Y множину $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ $\mathbb{K}$-диференціювань A. Нехай $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — довільні елементи поля A. Тоді якобіанне диференціювання $D_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ поля A визначається за допомогою наступного правила:

$$D_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}(h) = \det J(a_1, \ldots, a_{n-1}, h),$$

де $J(a_1, \ldots, a_{n-1}, h)$ — матриця Якобі функцій $a_1, \ldots, a_{n-1}, h \in A$.

Дивергенція $\operatorname{div} D$ диференціювання $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}}(A)$, $D = \sum p_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ визначається за правилом:

$$\operatorname{div} D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial y_i}, \quad p_i \in A.$$

1.1 Про поведінку дивергенції при зміні базису трансцендентності

Нехай $A \supseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ — поле алгебраїчних функцій. Відомо, що алгебра Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ усіх $\mathbb{K}$-диференціювань A є векторним простором над A розмірності n (але не алгеброю Лі над A). Набір $X = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ частинних похідних є базисом $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ над A. Таким чином, кожен елемент $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ можна однозначно записати у формі

$$D = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad p_1, \dots, p_n \in A. \tag{1.1}$$

Нехай $y_1, \dots, y_n \in A$ — базис трансцендентності поля A над полем $\mathbb{K}$. Тоді $Y = \{\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ також є базисом лінійного простору $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ над полем A. Тому для заданого диференціювання $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ існують елементи $q_1, \dots, q_n \in A$ такі, що

$$D = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad q_1, \dots, q_n \in A. \tag{1.2}$$

Позначимо дивергенцію диференціювання D в базах трансцендентності $x_1, \dots,$ x_n і $y_1, \dots, y_n$ відповідно через

$$\mathrm{div}_X D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}, \quad \mathrm{div}_Y D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial y_i}.$$

Теорема 1.1. *Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Тоді*

$$\mathrm{div}_X D = \mathrm{div}_Y D + \frac{D(\Delta)}{\Delta},$$

де $\Delta = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$.

Доведення. Оскільки $\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$ маємо з (1.2) наступні тотожності

$$q_i = D(y_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Диференціювання $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ складають базис векторного простору $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$, отже можемо написати

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} r_i^j \frac{\partial}{\partial y_i}, j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

для деяких $r_i^j \in A$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ці елементи можуть бути знайдені з (1.4):

$$r_i^j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Отже, маємо

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Використавши рівняння (1.3) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_Y\, D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big) = \\ = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Перший доданок правої частини (1.5) можна записати (з (1.3)) у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big)(p_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(p_j) = \mathrm{div}_X\, D.$$

Запишемо другий доданок правої частини (1.5) (використавши (1.4) і рівність $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$) у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big) = \sum_{i,j,k=1}^{n} p_j \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\Big) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\Big) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} D\Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\Big).$$

Матриця $\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)_{k,i=1}^{n}$ обернена до матриці $\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)_{k,i=1}^{n}$, отже маємо

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{A_k^i}{\Delta}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

де A_i^k доповнення елемента $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ у визначнику $\Delta = \det\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)_{k,i=1}^{n}$. Отже,

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} D\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k=1}^{n} A_k^i D\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & D\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\right) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & D\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_k}\right) & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \end{vmatrix} = \frac{D(\Delta)}{\Delta},$$

Доведення завершене. $\square$

1.2 Бездивергентні і якобіанні диференціювання

Деякі відомі результати про бездивергентні диференціювання зібрані в наступній лемі (див., наприклад, [20]) або [46]:

Лема 1.2.

1. *Якщо* D *є якобіанним диференціюванням кільця* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$*, то тоді* $\operatorname{div} D = 0$;

2. *Кожне бездивергентне диференціювання кільця поліномів* $\mathbb{K}[x, y]$ *є якобіанним диференціюванням;*

3. *Якщо* D_1*,* D_2 *є бездивергентними диференціюваннями кільця* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$*, то* $D_1 + D_2$ *і* $[D_1, D_2]$ *також є бездивергентними.*

Теорема 1.3. *Нехай* D *—* $\mathbb{K}$*-диференціювання кільця поліномів* $\mathbb{K}[x, y, z]$ *з* $\operatorname{div} D = 0$*. Тоді існують якобіанні диференціювання* D_1 *і* D_2 *кільця* $\mathbb{K}[x, y, z]$ *такі, що* $D = D_1 + D_2$*.*

Доведення. Запишемо D як

$$D = p(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z},$$

де $p, q, r \in \mathbb{K}[x,y,z]$. Тоді за умовами теореми $p'_x + q'_y + r'_z = \operatorname{div} D = 0$. Спочатку знайдемо якобіанне диференціювання D_1 кільця $\mathbb{K}[x,y,z]$ у вигляді

$$D_1 = p(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + q_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}$$

для деякого $q_1 \in \mathbb{K}[x,y,z]$. Позначимо через $s = s(x,y,z)$ поліном від $\mathbb{K}[x,y,z]$ такий, що $s'_y = p$, тобто $s = \int p(x,y,z)dy$ (очевидно, що такий поліном існує). Позначимо $D_1 = D_{(s,z)}$ якобіанне диференціювання, визначене поліномами $s, z \in \mathbb{K}[x,y,z]$. Легко побачити, що

$$D_1 = p(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} - s'_x(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Покладемо $D_2 = D - D_1$. Покажемо, що D_2 є якобіанним диференціюванням кільця $\mathbb{K}[x,y,z]$. Очевидно, що

$$D_2 = q_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{де } q_2 = q - s'_x.$$

Розглянемо $q_2(x,y,z)$ і $r(x,y,z)$ як поліноми від змінних y, z з коефіцієнтами в кільці $\mathbb{K}[x]$. Оскільки

$$\operatorname{div} D_2 = \operatorname{div} D - \operatorname{div} D_1 = 0,$$

отримуємо

$$\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Позначимо для зручності $\varphi = -r$, $\psi = q_2$. Тоді векторне поле $\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \psi\frac{\partial}{\partial z}$ є потенціальним, оскільки виконується рівність $\varphi'_z = \psi'_y$. Отже, існує поліном $t(x,y,z)$ такий, що $t'_y = \varphi$, $t'_z = \psi$ (поліном t можна отримати формальним інтегруванням поліномів ψ і φ на змінні y і z відповідно).

$$t(x,y,z) = \int_{0,0,0}^{M(x,y,z)} \varphi(x,y,z)\mathrm{d}y + \psi(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Таким чином $t'_y = -r(x,y,z)$, $t'_z = q_2(x,y,z)$. Розглянемо якобіанне диференціювання $D_{(t,x)}$. Очевидно, що

$$D_{(t,x)} = t'_z \frac{\partial}{\partial y} - t'_y \frac{\partial}{\partial z} = q_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} = D_2.$$

Отже, $D = D_1 + D_2$, де D_1, D_2 є якобіанними диференціюваннями. □

Твердження 1.4. *Диференціювання*

$$D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z}$$

кільця $\mathbb{K}[x,y,z]$ *є бездивергентним, але не якобіанним.*

Доведення. Згідно з теоремою 10.1.1 з [46], маємо $\operatorname{Ker} D \neq \mathbb{K}$. Візьмемо будь-який поліном $f \in \operatorname{Ker} D$ і запишимо його як суму $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ однорідних компонент. Оскільки диференціювання D є однорідним, усі поліноми f_i також знаходяться в $\operatorname{Ker} D$. Тому можемо вважати без втрати загальності, що f є однорідним поліномом степеня k. Рівність $D(f) = 0$ означає, що

$$xf'_x + yf'_y - 2zf'_z = 0$$

і виконується рівність

$$kf - 3zf'_z = 0 \tag{1.6}$$

(тут $xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf$, оскільки $\deg f = k$). Розглянемо поліном f як поліном від z з коефіцієнтами в $\mathbb{K}[y,z]$ і запишемо

$$f = \varphi_0 + \varphi_1 z + \cdots + \varphi_m z^m, \quad \varphi_i \in \mathbb{K}[x,y], \quad m = \deg_z f.$$

Тоді

$$3zf'_z = 3z\varphi_1 + 6z^2\varphi_2 + \cdots + 3m\varphi_m z^m$$

і використовуючи (1.6) отримуємо

$$\varphi_0 = 0,\ z\varphi_1(k-3) = 0,\ z^2\varphi_2(k-6) = 0, \ldots, z^m\varphi_m(k-3m) = 0. \tag{1.7}$$

Оскільки $\varphi_m \neq 0$ (з рівності $m = \deg_z f$), маємо $k = 3m$ і

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_{m-1} = 0.$$

Останнє означає, що $f = z^m \varphi_m$, де $k = 3m$. Рівність $\deg f = k$ передбачає $\deg \varphi_m = 2m$ і, отже, $\varphi_m = \varphi_m(x, y)$ — однорідний поліном ступеня $2m$. Позначимо для зручності $\psi_{2m} = \varphi_m$. Тоді $f = z^m \cdot \psi_{2m}$ є однорідним поліномом ступеня $3m$.

І навпаки, якщо $f = z^m \cdot \psi_{2m}$ є однорідним поліномом ступеня $3m$, де поліном $\psi_{2m} = \psi_{2m}(x, y)$ залежить лише від змінних x, y, тоді $3zf'_z = 3mf'$. Поклавши $k = 3m$, отримаємо $zh'_z = 3kf$, тобто поліном f задовольняє рівність (1.6). Далі,

$$xf'_x + yf'_y - 2zf'_z = 0$$

і тому $f \in \operatorname{Ker} D$. Таким чином $\operatorname{Ker} D$ є лінійною комбінацією однорідних поліномів виду $z^m \psi_{2m}$, де ψ_{2m} — однорідний поліном ступеня $2m$ від змінних x, y.

Тепер припустимо $D = D_{(a,b)}$ для деяких $a, b \in \mathbb{K}[x, y, z]$. Тоді $a, b \in \operatorname{Ker} D$ і опускаючи постійні члени в поліномах a і b, отримуємо

$$a = \alpha_1 z\varphi_2 + \alpha_2 z^2 \varphi_4 + \cdots + \alpha_m z^m \varphi_{2m},$$
$$b = \beta_1 z\psi_2 + \beta_2 z^2 \psi_4 + \cdots + \beta_s z^s \psi_{2s}$$

для деяких $\varphi_i, \psi_j \in \mathbb{K}[x, y]$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $\alpha_m \neq 0$, $\beta_s \neq 0$. Тоді

$$D(x) = D_{(a,b)}(x) = a'_y b'_y - a'_z b'_y.$$

З іншого боку, $D(x) = x$ і тому $a'_y b'_y - a'_z b'_y = x$. Поліноми a'_y і b'_y діляться на z, тому поліном x також ділиться на z. Отримане протиріччя показує, що D не є якобіанним диференціюванням. Доведення завершено. □

1.3 Централізатори елементів в алгебрі Лі $\boldsymbol{W_n}(\mathbb{K})$

В цьому підрозділі вивчаються о централізатори елементів $D \in W_n(\mathbb{K})$ у випадку коли ядро $\operatorname{Ker} D$ (у полі $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$) має степінь трансцендентності $\leqslant 1$ над полем $\mathbb{K}$, тобто будь-які дві раціональні функцій f, g які анулюються диференціювнням D є алгебраїчно залежними над полем $\mathbb{K}$.

У випадку $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D = 0$ маємо $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}$ і тоді $C_{W_n}(D)$ є векторним простором розмірності $\leqslant n$ над $\mathbb{K}$.

Якщо $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D = 1$, то за теоремою Гордана (див., наприклад, [55]) або $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p)$ або $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$, де p, q — незвідні поліноми які є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}$.

Якщо $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p)$, то централізатор C є модулем над кільцем $\mathbb{K}[p]$ рангу k, $1 \leqslant k \leqslant n$ і C є або алгеброю Лі над $\mathbb{K}[p]$, або містить ідеал I рангу $k-1$, який є алгеброю Лі над $\mathbb{K}[p]$ і $C = I + \mathbb{K}[p]T$ для деякого диференціювання $T \in C$ (теорема 1.12).

У випадку $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ маємо

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_{k-1}) \cap W_n(\mathbb{K})$$

і C є скінченновимірним над $\mathbb{K}$ (теорема 1.14).

Нижче використовуються стандартні позначення. Кожне диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ можна однозначно записати у формі

$$D = f_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

для деяких $f_i \in A$. Можна також показати, що кожне ненульове диференціювання D можна записати у вигляді $D = hD_0$, де диференнціювання D_0 вже є редукованим, тобто якщо $D_0 = h_1 D_1$ для деяких $D_1 \in W_n(\mathbb{K})$ і $h_1 \in A$, то тоді $h_1 \in \mathbb{K}^*$. Позначимо через $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціюваннь поля $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Легко бачити, що $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ — векторний простір розмірності n над полем R (зі стандартним базисом $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$), але не алгебра Лі над R. Раціональна функція $\varphi \in R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ називається замкненою, якщо підполе $\mathbb{K}(\varphi)$ є алгебраїчно замкнутим у полі R.

Лема 1.5. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, нехай F — поле констант диференціювання D у полі R і $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді*

$$C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D) = FD$$

або

$$C = FD + FD_2 + \cdots + FD_k$$

для деяких $D_2, \ldots, D_k \in C$ *таких, що диференціювання* $D, D_2, \ldots, D_k$ *лінійно незалежні над полем* R.

Доведення. Зауважимо, що C є підалгеброю алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ і $D \in C$. Виберемо базис $D, \ldots, D_k$ (може бути $k = 0$) для векторного простору RC над полем R. Кожне диференціювання $T \in C$ (зауважимо, що $C \subseteq RC$) можна записати у вигляді

$$T = rD + r_2D_2 + \cdots + r_kD_k$$

для деяких $r, r_i \in R$. Але тоді з рівності $[D, T] = 0$ випливає, що виконуються рівності

$$D(r_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

тобто $r_i \in \operatorname{Ker} D = F$.

Навпаки, легко бачити, що будь-який елемент із підпростору $FD + \cdots + FD_k$ належить C. Тому

$$C = FD + \cdots + FD_k.$$

Якщо $F \subseteq \operatorname{Ker} D_i$ для всіх $i \geqslant 2$, то тоді C є не лише k-вимірним векторним простором над F, а й алгеброю Лі над полем F. $\square$

Наслідок 1.6. *За умов леми 1.5, якщо* $F = \mathbb{K}$, *то* C *є* k*-вимірною алгеброю Лі над полем* $\mathbb{K}$.

Приклад 1.7. Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — лінійне диференціювання,

$$D = f_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = D(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

і нехай жорданова нормальна форма матриці (a_{ij}) є діагональною матрицею

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

де λ_i — лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$ власні значення матриці (a_{ij}). Застосовуючи лінійну заміну змінних за потреби, можна вважати матрицю диференціювання D діагональною. Тоді $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ має ранг n над R і розмірність n над $\mathbb{K}$. Дійсно, $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}$ згідно з теоремою 10.1.2 з [46]. Розглянемо алгебру

$$L = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \,\Big|\, \mu_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

Неважко переконатись, що $L \subseteq C$ і $\operatorname{rank}_R L = n$. Дійсно, диференціювання, що лежать в алгебрі Лі L відповідають діагональним матрицям, а отже комутують с D, і крім того диференціювання $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ є лінійно незалежними над полем R. Тому $\operatorname{rank}_R C = n$ і $\dim_{\mathbb{K}} C = n$ за лемою 1.5.

Лема 1.8. *Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, L – алгебраїчно замкнуте підполе поля $R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ з $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} L = 1$. Якщо L містить несталий поліном із кільця $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \subset R$, то тоді $L = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного полінома $p \in A$. Якщо $L \cap A = \mathbb{K}$, то $L = \mathbb{K}(p/q)$ для деяких незвідних поліномів $p, q \in A$, які є алгебраїчно незалежними над полем $\mathbb{K}$.*

Доведення. За теоремою Гордана (див., наприклад, [55, теорема 3]) маємо, що $L = \mathbb{K}(\varphi)$ для деякої раціональної функції $\varphi \in R$.

Нехай спочатку $L \cap A = \mathbb{K}$. За наслідком 1 із [50] маємо $L = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$ для деяких незвідних поліномів p, q які є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}$. Тепер нехай $L \cap A \neq \mathbb{K}$ і $r \in (L \cap A) \setminus \mathbb{K}$. Тоді $r = F(\frac{p}{q})$ або $r = F(p)$ для деякої раціональної функції

$$F(t) \in \mathbb{K}(t), \quad F(t) = \frac{a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_n}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{K}, \quad a_0 b_0 \neq 0.$$

Нехай спочатку $r = F(p/q)$. Тоді

$$F(p/q) = \frac{a_0p^m + \cdots + a_mq^m}{b_0p^n + \cdots + b_nq^n}q^{n-m},$$

а чисельник і знаменник тут є однорідними поліномами від p і q степеня $\max\{m, n\}$. Припустимо для простоти, що $n \geqslant m$. Тоді

$$r = F(p/q) = \frac{(\alpha_1p + \beta_1q)\cdots(\alpha_np + \beta_nq)}{(\gamma_1p + \delta_1q)\cdots(\gamma_np + \delta_nq)} \tag{1.8}$$

для деяких $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{K}$, оскільки основне поле $\mathbb{K}$ алгебраїчно замкнуте.

Зауважимо, що поліноми $\alpha_ip + \beta_iq$ і $\gamma_jp + \delta_jq$ або взаємно прості, якщо

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix} \neq 0,$$

або пропорційні з множником у $\mathbb{K}^*$, якщо

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки раціональну функцію $F(t)$ можна вибрати незвідною, рівність (1.8) неможлива, оскільки її чисельник і знаменник є взаємно простими, а r є несталим поліномом. Таким чином, випадок $L = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$ неможливий і $L = \mathbb{K}(p)$ для незвідного полінома $p(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

Твердження 1.9. *Нехай $D_1 \in \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ — таке диференціювання поля R, що ядро $F = \operatorname{Ker} D_1$ у полі R має степінь трансцендентності 1 над $\mathbb{K}$. Тоді $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D_1)$ є підалгеброю алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ рангу $\operatorname{rank}_R C = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, і*

$$C = FD_1 + FD_2 + \cdots + FD_k$$

для деяких $D_2, \ldots, D_k \in C$. Крім того, або C є алгеброю Лі над F розмірності k, або C містить ідеал корангу один над R який є алгеброю Лі розмірності $k - 1$ над полем F.

Доведення. За теоремою Гордана (див., наприклад, [55, Theorem 3]) маємо рівність $F = \mathbb{K}(\varphi)$ для деякої замкненої раціональної функції $\varphi \in R$. Виберемо базис $D_1, D_2, \ldots, D_k$ алгебри C над полем R. Оскільки $[D_1, D_i] = 0$, $i = 1, \ldots, k$, то виконуються включення

$$D_i(\operatorname{Ker} D_1) \subseteq \operatorname{Ker} D_1.$$

Отже, $D_i(\varphi) = f_i(\varphi)$ для деяких раціональних функцій $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$.

Якщо $f_1(t) = \cdots = f_n(t) = 0$, то $F \subseteq \operatorname{Ker} D_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ і тоді

$$C = FD_1 + \cdots + FD_k$$

є k-вимірною алгеброю Лі над полем F.

Тепер припустимо, що $f_i(t) \neq 0$ для деяких i, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тоді можна легко довести, що $f_i(\varphi) \neq 0$. Дійсно, з рівності $f_i(\varphi) = 0$ випливало б, що φ є алгебраїчним елементом над полем $\mathbb{K}$, а отже лежить в $\mathbb{K}$ з алгебраїчної замкненості поля $\mathbb{K}$, що суперечить припущенню, що поле $F = \operatorname{Ker} D_1$ має степінь трансцендентності один над полем $\mathbb{K}$.

Позначимо через

$$C_0 = \{T \in C \mid T(\varphi) = 0\}$$

аннулятор елемента φ в C. Оскільки $D_i(\operatorname{Ker} D) \subseteq \operatorname{Ker} D$, то легко бачити, що C_0 є ідеалом в алгебрі Лі C. Покажемо, що $\operatorname{rank}_R C_0 = k - 1$. Дійсно, якщо $T, S \in C \setminus C_0$, то тоді $T(\varphi) = g(\varphi)$ і $S(\varphi) = h(\varphi)$ для деяких ненульових раціональних функцій $g(t)$ і $h(t)$. Але тоді маємо, що $h(\varphi)T - g(\varphi)S \in C_0$ і, отже, $\operatorname{rank}_R C/C_0 = 1$. Таким чином, виконується рівність $\operatorname{rank}_R C_0 = k - 1$. □

Вкажемо тепер серію $D_2, \ldots, D_n$ диференціювань на поліноміальному кільці $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ з централізаторами $C_i = C_{W_n}(D_i)$ такими, що $\operatorname{rank}_R C_i = n - i + 1$, $i = 2, \ldots, n$. Для цього використаємо відоме твердження із роботи [46, приклад 13.4.3].

Лема 1.10. *Нехай*

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_1} + (1 + x_1 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (1 + x_{k-1}x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

диференціювання кільця поліномів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], 2 \leqslant k \leqslant n$. *Тоді*

$$(1) \quad \operatorname{Ker} D_k = \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n], \quad k < n, \quad \operatorname{Ker} D_n = \mathbb{K};$$

$$(2) \quad C_k = C_{W_n(\mathbb{K})}(D_k) = \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]D_k + \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots$$
$$+ \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad k < n, \quad C_n = \mathbb{K}D_n.$$

Зокрема, $\operatorname{rank}_R(C_k) = n - k + 1$.

Доведення. (1) Кільце поліномів $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ можна розглядати як кільце поліномів від змінних $x_1, \ldots, x_k$ над поліноміальним кільцем $F := \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Оскільки згідно з [46], приклад 13.4.3, D_k є простим диференціюванням кільця $F[x_1, \ldots x_k]$ (зауважимо, що $F \subseteq Ker D_k$), то ядро D_k в $F[x_1, \ldots x_k]$ збігається з F. Тому ядро диференціювання D_k в кільці A збігається з $\mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$.

(2) Нехай тепер $T \in C = C_{W_n(\mathbb{K})}$,

$$T = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Тоді з рівності $[T, D_k] = 0$ випливають рівності

$$D_k(f_1) = T(1) = 0$$

і тому $f_1 \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$,

$$\begin{aligned} D_k(f_2) &= x_1 f_2 + x_2 f_1, \\ &\vdots \\ D_k(f_k) &= x_{k-1} f_k + x_k f_{k-1}, \\ D_k(f_{k+1}) &= 0, \\ &\vdots \\ D_k(f_n) &= 0. \end{aligned}$$

Останні $n - k$ рівності випливають з того, що

$$f_{k+1} \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n], \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Якщо $f_1 \neq 0$, то $f_1 D_k \in C_k$ і $T - f_1 D_k \in C_k$. Тому без втрати загальності можна припустити, що $f_1 = 0$. Але тоді $D_k(f_2) = x_1 f_2$. Останнє можливо, лише якщо $f_2 = 0$, оскільки D_k є простим диференціюванням кільця $F[x_1, \ldots, x_k]$. Повторюючи це міркування, можна зробити висновок, що $f_3 = 0, \ldots, f_k = 0$. Останнє означає, що

$$T - f_1 D_k \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots + \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Враховуючи співвідношення $f_1 \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ отримуємо потрібне твердження. □

Щоб виокремити множники полінома, які належать до ядра диференціювання, розглянемо такі поняття: нехай $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — незвідний поліном. Поліном $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ будемо називати *p-вільним*, якщо f не ділиться на жоден поліном від p додатнього степеня. Неважко переконатися, що кожен поліном $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ можна записати у вигляді $g = g_0 g_1$, де g_0 — p-вільний поліном, а $g_1 = g_1(p)$ — поліном від p (може бути $g_1 = \mathrm{const}$). Степінь p полінома $g_1(p)$ буде називатися *p-степенем* g і позначатися $\deg_p g$.

Нехай p і q алгебраїчно незалежні незвідні поліноми кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Поліном $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ будемо називати *p-q-вільним*, якщо f не ділиться на будь-який однорідний поліном від p і q додатнього степеня. Як і раніше, кожен поліном $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ можна записати у вигляді $g_0 g_1$, де g_0 є p-q-вільним поліномом, а g_1 є однорідним поліномом від p, q. (Повний) ступінь g_1 у p, q називатимемо *p-q-ступенем* g і позначатимемо $\deg_{p-q} g$.

Якщо D є диференціюванням на кільці поліномів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, то D можна записати у вигляді hD_0, де D_0 є редукованим диференціюванням на $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ і $h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Ми називатимемо D p-вільним, якщо поліном h є p-вільним. Ми підсумовуємо всі ці зауваження в наступному твердженні, яке міститься в роботі [13, Lemma 2.7].

Лема 1.11. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — ненульове диференціювання. Тоді існують єдині (з точністю до множника від $\mathbb{K}^*$) поліноми $f(p, q)$ і h такі, що $D =$*

$f(p,q)hD_0$, де D_0 — редуковане диференціювання, $f(p,q)$ — однорідний поліном від p,q, а поліном h — p- q-вільний.

Теорема 1.12. *Нехай D — диференціювання кільця $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ з полем констант $F = \operatorname{Ker} D$ у полі $R = \mathbb{K}(x_1,\ldots,x_n)$ вигляду $F = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного полінома p і нехай $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді*

(1) *Якщо $\mathrm{rk}_R C = 1$, то $C = \mathbb{K}[p]D_0$ для деякого p-вільного диференціювання D_0 з $D = f(p)D_0$ для деякого $f(t) \in \mathbb{K}[t]$;*

(2) *Якщо $\mathrm{rk}_R C \geqslant 2$, то C є або алгеброю Лі рангу k над кільцем $\mathbb{K}[p]$, або C містить ідеал I рангу $k-1$, який є алгеброю Лі над $\mathbb{K}[p]$ і $C = I + \mathbb{K}[p]S$ для деяко диференціювання $S \in C$.*

Доведення. Відповідно до вищезазначеного диференціювання D можна записати у вигляді $D = f(p)D_0$, де D_0 — p-вільне диференціювання, а поліном $f \in \mathbb{K}[t]$ однозначно визначається D з точністю до ненульового множника в $\mathbb{K}^*$.

(1) Спочатку, нехай $\mathrm{rk}_R C = 1$. Візьмемо довільний елемент $T \in C$. Тоді $T = \varphi(p)D_0$ для деякої раціональної функції $\varphi \in \mathbb{K}(t)$, де $\varphi(p) = g(p)/h(p)$ для деяких поліномів $g(t)$, $h(t) \in \mathbb{K}[t]$. Без втрати загальності можна припустити, що $\varphi(t) = g(t)/h(t)$ — нескоротний дріб. З рівності $T = \varphi(p)D_0$ випливає, що $h(p)T = g(p)D_0$. Запишемо D_0 і T у вигляді

$$D_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$T = \sum_{j=1}^{n} Q_j(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

де $P_i, Q_j \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$. Припустимо, що поліном h несталий. Оскільки D_0 не містить p, принаймні один із коефіцієнтів D_0 не є кратним $h(p)$. Без втрати загальності можна вважати, що P_1 є таким коефіцієнтом. Тоді з рівності $h(p)T = g(p)D_0$ випливає, що $hQ_1 = gP_1$ і з урахуванням рівності $(g(p), h(p)) = 1$ бачимо, що $h|P_1$, що дає протиріччя. Тому $h \in \mathbb{K}^*$ і $\varphi = g(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$. Але тоді $T = g(p)D_0$ і $C = \mathbb{K}[p]D_0$, оскільки T вибрано довільним чином.

(2) Нехай $\mathrm{rk}_R C = k \geqslant 2$. Якщо для кожного $D_1 \in C$ маємо $D_1(F) = 0$, то легко побачити, що C — алгебра Лі рангу k над кільцем $\mathbb{K}[p]$. Відзначимо, що в цьому випадку C може не бути нульовим $\mathbb{K}[p]$-модулем. Припустимо, що існує такий елемент $S \in C$, що $S(F) \neq 0$. Тоді $S(p) \neq 0$. Виберемо S так, щоб p-степінь полінома $S(p)$ був мінімальним. Для довільного елемента $T \in C$ поліном $T(p)$ є кратним $S(p)$. Дійсно нехай

$$S(p) = v(p), \quad T(p) = u(p)$$

для деяких поліномів $v(t), u(t) \in \mathbb{K}[t]$. Запишемо

$$u(t) = v(t)q(t) + r(t)$$

для деяких поліномів $q(t), r(t)$, де $\deg r(t) < \deg v(t)$. Тоді

$$u(p) = v(p)q(p) + r(p)$$

і

$$T - q(p)S \in C.$$

Оскільки

$$(T - q(p)S)(p) = r(p)$$

і $\deg_p r(p) < \deg_p S(p)$, то маємо за вибором S, що $r(p) = 0$ і диференціювання $T - q(p)S$ анулює ядро $\ker D$. Позначимо через C_0 підалгебру C усіх диференціювань, які діють на $\mathbb{K}[p]$ як нульове диференціювання. Тоді, як було показано вище $T - q(p)S \in C_0$ і $C = C_0 + \mathbb{K}[p]S$. □

Наслідок 1.13. *Якщо $k = 2$ і $C(F) \neq 0$, то $C = \mathbb{K}[p]D_0 + \mathbb{K}[p]S$ є вільним модулем рангу 2 над $\mathbb{K}[p]$.*

Теорема 1.14. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — диференціювання, що задовольняє умови $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}\,\mathrm{Ker} D = 1$ і $(\mathrm{Ker}_R D) \cap A = \mathbb{K}$. Тоді $\mathrm{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ для деяких незвідних алгебраїчно незалежних поліномів $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, диференціювання D має вигляд $D = hf(p,q)D_0$ для деякого редукованого диференціювання D_0, однорідного за p, q полінома f і p-q-вільного полінома h, а централізатор $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є скінченновимірним над $\mathbb{K}$, будучи одним із наступних* *типів:*

$$C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0,$$

де $\mathbb{K}[p,q]_m$ *— лінійний простір однорідних за* p*,* q *поліномів ступеня* $m = \deg_{p\text{-}q} f$*, зокрема* $\dim_{\mathbb{K}} C = m+1$*, або*

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K})$$

для деяких елементів $D_2, \ldots, D_k$*,* $k \leqslant n$ *в* C*, де* $D, D_2, \ldots, D_k$ *є лінійно незалежними над полем* R*.*

Доведення. За лемою 1.8 маємо $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ для деяких незвідних алгебраїчно незалежних над $\mathbb{K}$ поліномів p, q. За лемою 1.11 існують єдині (з точністю до ненульового множника від $\mathbb{K}$) поліноми $f(p,q)$ і h такі, що $D = f(p,q)hD_0$, де D_0 — редуковане диференціювання, $f(p,q)$ — однорідний поліном по p, q, а поліном h — p-q-вільний.

Нехай спочатку $\operatorname{rank}_R C = 1$. Тоді для будь-якого $D_1 \in C$ маємо $D_1 = rD_0$ для деякого $r \in A$ (оскільки D_0 є редукованим диференціюванням). Як згадувалося вище, $r = f_1h_1$ для деякого однорідного полінома $f_1(p,q)$ по p, q і p-q-вільного полінома h_1. За вибором D_1 маємо , що

$$0 = [D, D_1] = [f_1h_1D_0, fhD_0].$$

З останнього співвідношення випливає рівність $D_0(fh/(f_1h_1)) = 0$. За лемою 1.8 має місце рівність $fh/(f_1h_1) = u(p,q)/v(p,q)$ для деяких однорідних поліномів u, v від p, q з $\deg u = \deg v$. Отримуємо рівність $hfv = h_1f_1u$, де fv і f_1u однорідні по p, q і h, h_1 є p-q-вільні поліноми. Нагадаємо, що розклад полінома в добуток однорідного по p, q і p-q-вільного полінома є однозначним з точністю до множника із $\mathbb{K}^*$. Отже, $h_1 = hc$, $c \in \mathbb{K}^*$ і $fv = c^{-1}f_1u$. Тоді $\deg_{p-q} f = \deg_{p-q} f_1 = m$. Це означає, що має місце співвідношення

$$D = f_1h_1D_0 \in \mathbb{K}[p,q]_m hD_0.$$

Оскільки D_1 було обрано довільним чином в C, отримаємо включення $C \subseteq \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$. Легко бачити, що $\mathbb{K}[p,q]_m hD_0 \subseteq C$ і, тому $C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$.

Далі нехай $\operatorname{rank}_R C = k \geqslant 2$. Виберемо базис $D, D_2, \dots, D_k$ для C над R. Тоді згідно з твердженням 1.9 маємо

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \dots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K}).$$

Доведемо індукцією по k, що централізатор $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є скінченновимірним над $\mathbb{K}$. Для $k = 1$ (тобто у випадку $\operatorname{rank}_R C = 1$) це було доведено вище, тому можна припустити, що $k \geqslant 2$. Позначимо для зручності $D_1 = D$. Тоді кожен елемент D_i можна записати у вигляді $D_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ для деяких поліномів $P_{ij} \in A$, $i = 1, \dots, k$. Візьмемо довільний елемент T централізатора C і запишемо його у вигляді $T = \sum_{i=1}^k \alpha_i D_i$ для деяких раціональних функцій $\alpha_i \in R$. З іншого боку, це саме диференціювання можна записати у стандартній формі $T = \sum_{j=1}^n Q_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ для деяких поліномів $Q_1, \dots, Q_n \in A$. Розглянемо диференціювання $D_1, \dots, D_{k-1}, T$ і позначимо через (P'_{ij}) поліноміальну матрицю, перші $k-1$ рядків якої складаються з коефіцієнтів диференціювань $D_1, \dots, D_{k-1}$ і k-й рядок має форму $(Q_1, \dots, Q_n)$, тобто

$$P'_{ij} = P_{ij}, \quad i = 1, \dots k-1, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$P'_{kj} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Розглянемо мінор $\delta = \delta_{i_1,\dots,i_k}$ на довільно вибраних стовпчиках $i_1, \dots, i_k$ матриці (P_{ij}) і аналогічний мінор $\mu = \mu_{i_1,\dots,i_k}$ на тих же стовпчиках матриці (P'_{ij}). Оскільки $T = \sum_{i=1}^k \alpha_i D_i$ ми, очевидно, маємо рівність $\mu = \alpha_k\delta$. Повторюючи міркування з доведення леми 1.8, можна довести, що існують однорідні поліноми u, v від p, q з $\deg_{p-q} u = \deg_{p-q} v$ такі, що $\alpha_k = u/v$. З рівності $\mu = \alpha_k\delta$ (записаної у вигляді $v\mu = u\delta$) випливає, що $\deg_{p-q}\mu = \deg_{p-q}\delta$. Крім того, ці поліноми мають однакову p-q-вільну частину з точністю до множника від $\mathbb{K}^*$ через згадану вище рівність $v\mu = u\delta$. Можна вважати, що p-q-вільні частини u і v однакові, позначимо їх спільне значення через h. Занумеруємо яким небудь способом усі мінори розміру $k \times k$ матриці (P'_{ij}), нехай вони будуть $M_1, \dots, M_s$ (очевидно, $s = \binom{n}{k}$), це поліноми із A. Нехай $m = m_i$ — p-q-степінь мінора M_i, а f_i — відповідний однорідний поліном, який є p-q-частиною мінора M_i. Поставимо у відповідність диференціюванню T послідовність однорідних поліномів $\theta(T) = (f_1, \ldots, f_s)$ степенів $m_1, \ldots, m_s$ відповідно. Розглянемо відображення

$$\theta \colon C \to N = \mathbb{K}[p, q]_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{K}[p, q]_{m_s},$$

де m_i — p-q-степінь мінора $M_i, i = 1, \ldots, s$. Відображення θ є $\mathbb{K}$-лінійним і відображає C в N, зауважимо, що $\dim_{\mathbb{K}} N < \infty$. Очевидно, ядро цього лінійного відображення $\operatorname{Ker}\theta$ складається з таких диференціювань T, для яких усі мінори порядку k є нулями. Але тоді

$$T \in (\mathbb{K}(p/q)D_1 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_{k-1}) \cap W_n(\mathbb{K}) = C_{k-1}.$$

Отже, $\dim C/C_{k-1} < \infty$. За індуктивним припущенням підпростір C_{k-1} є скінченновимірним над полем $\mathbb{K}$. Тому $\dim_{\mathbb{K}} C < \infty$. $\square$

1.4 Централізатори деяких лінійних диференціювань

Нагадаємо, що диференціювання $D = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ називається лінійним, якщо всі поліноми P_i є лінійними формами від n змінних, тобто $P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, a_{ij} \in \mathbb{K}$. Лінійне диференціювання $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ визначається квадратною матрицею (a_{ij}) порядку n і якщо $D' = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, то $[D, D']$ є лінійним і визначається матрицею $(c_{ij}) = [(a_{ij}), (b_{ij})]$. Тому всі лінійні диференціювання утворюють підалгебру із $W_n(\mathbb{K})$, яка ізоморфна повній лінійній алгебрі Лі $gl_n(\mathbb{K})$, також позначаємо її через $gl_n(\mathbb{K})$, для простоти. Нехай $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in W_n(\mathbb{K})$ — лінійне диференціювання. Можна розглянути два централізатори: $C_0 = C_{gl_n(\mathbb{K})}(D)$ і $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ (звичайно, $C_0 \subseteq C$). Структура централізатора C_0 добре відома, оскільки він складається з усіх лінійних диференціювань, визначених матрицями, комутуючими з матрицею (a_{ij}). Як знайти централізатор даної матриці (a_{ij}) — це класична проблема лінійної алгебри, її було вирішено багато років тому (див., наприклад, [21], Розділ VIII, § 2]). Тому цікаво вивчити випадок, коли $C = C_0$, тому що тоді матимемо повний опис централізатора $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Ми формулюємо в теоремі 1.16 необхідну умову та достатню умову для того, щоб лінійне диференціювання D задовольняло рівність $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{gl_n(\mathbb{K})}(D)$ (на жаль, ці умови не збігаються).

Лема 1.15. *Нехай $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $T = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — елементи $\in W_n(\mathbb{K})$, де $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i = g_i(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Диференціювання D і T комутують тоді і тільки тоді, коли $D(g_i) = T(f_i)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Очевидно, $DT = TD$ тоді і тільки тоді, коли $DT(x_i) = TD(x_i)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Але $T(x_i) = g_i(x_1, \ldots, x_n)$ and $D(x_i) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Отже, маємо $D(g_i) = T(f_i)$. □

Теорема 1.16. *Нехай $D = \sum_{i,j=1}^n a_{i\,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ — лінійне диференціювання кільця многочленів $K[x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ власні числа матриці (a_{ij}). Тоді справедливі наступні твердження:*

1. *Якщо власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$, то*
$$C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D).$$
2. *Якщо*
$$C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D),$$
то власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лінійно незалежні над $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доведення. (1) Нехай власні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці(a_{ij}) лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$. Візьмемо довільне

$$T \in C_{W_n(\mathbb{K})}(D), \quad T = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Без втрати загальності можна вважати, що матриця (a_{ij}) діагональна вигляду

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно різні, отже матриця (a_{ij}) діагоналізовна). В силу цієї умови диференціювання D має вигляд

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Маємо очевидні рівності

$$D(f_i) = T(\lambda x_i) = \lambda_i f_i,$$

тобто коефіцієнти f_i диференціювання T є многочленами Дарбу для D з кофакторами λ_i, $i = 1, \dots, n$. Крім того, $D(x_i) = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$. Але тоді

$$D\left(\frac{f_i}{x_i}\right) = \frac{D(f_i)x_i - f_i D(x_i)}{x_i^2} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

тобто раціональна функція f_i/x_i належить ядру D, $i = 1, \dots, n$. Оскільки всі власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$ маємо з теореми 10.1.2 в [46], що $f_i/x_i = \mu_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. З останньої рівності випливає, що

$$T = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in gl_n(\mathbb{K}),$$

а отже $C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D)$.

(2) Тепер, покладемо $C_{W_n(K)}(D) = C_{gl_n(K)}(D)$. З цієї рівності випливає, що $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}$. Справді, якщо $h \in \operatorname{Ker} D \backslash \mathbb{K}$, то $hD \in C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ і диференціювання hD очевидно нелінійне. З теореми 10.1.1 із [46] маємо, що власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ лінійно незалежні над $\mathbb{N}_0$. $\square$

Зауваження 1.17. Зауважимо, що лінійне диференціювання

$$D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ з власними значеннями 1, 2 має нелінійні елементи в своєму централізаторі in $W_2(\mathbb{K})$, наприклад $x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Тому умова (2) не є достатньою.

1.5 Висновки

В першій частині розділу була отримана формула для виразу дивергенції диференціювання при зміні базису трансцендентності. Також був побудований розклад бездивергентного диференціювання в суму якобіанних диференціювань, наведено приклад бездивергентного, але не якобіанного диференціювання.

Подальшими напрямками дослідження можуть виступати узагальнення результату про розклад бездивергентного диференціювання на випадок n змінних. Схоже, що застосування апарату диференціальних форм може вирішити цю задачу, але ймовірно виникнуть складності з побудовою прикладів бездивергентних диференціювань, що можуть бути подані у вигляді щонайменше k бездивергентних диференціювань.

У другій частині розділу була досліджена будова централізаторів поліноміальних диференціювань з ядром в раціональних функціях степеня трансцендентності один. Також були досліджені централізатори діагоналізовних лінійних диференціювань.

Отримані результати щодо лінійних диференціювань можуть бути узагальнені. А саме, можна шукати зв'язок між централізаторами в алгебрі Лі $W_n(\mathbb{K})$ і в алгебрі Лі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ для довільного лінійного чи афінного лінійного диференціювання.

На жаль, результати, що стосуються диференціювань з ядром в раціональних функціях степеня трансцендентності один узагальнити набагато складніше. Якщо у випадку степеня трансцендентності два ядро набуває більш складної структури, але хоча б є скінченнопородженим, то у випадку степеня трансцендентності три і вище і цього вже немає, що робить техніку цього розділу малоефективною.

Розділ 2

Нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань поліноміальних кілець

Результати цього розділу були опубліковані у роботах [8, 14].

В першій частині цього розділу вивчаються нільпотентні підалгебри $L \subseteq W(A)$ рангу $n \geqslant 3$ над R з центром $Z = Z(L)$ рангу $\geqslant n-2$ над R, тобто з центром корангу $\leqslant 2$ над R. Вказано природний базис для FL над R, який визначає серію ідеалів з «хорошими» властивостями (теорема 1). Як наслідок, отримано вкладення алгебри Лі FL над F у трикутну алгебру Лі $u_n(F)$ над F (теорема 2). Ці результати узагальнюють основні результати робіт [60] та [48]. Зауважимо, що проблема класифікації скінченновимірних алгебр Лі із теореми 1 з точністю до ізоморфізму є дикою (тобто вона містить безнадійну проблему класифікації пар квадратних матриць з точністю до подібності, див. [6]). Трикутні алгебри Лі вивчалися в [2] і [3], вони локально нільпотентні, але не нільпотентні.

Ми використовуємо стандартні позначення. Основне поле $\mathbb{K}$ довільне нульової характеристики. Якщо F є підполем поля R і $r_1, \ldots, r_k \in R$, тоді через $F\langle r_1, \ldots, r_k\rangle$ позначимо набір усіх лінійних комбінацій r_i з коефіцієнтами в F, це підпростір у F-просторі R, для нескінченної множини $r_1, \ldots, r_k, \ldots$ використовується позначення $F\langle \{r_i\}_{i=1}^{\infty}\rangle$. Трикутна підалгебра $u_n(\mathbb{K})$ алгебри Лі $W_n(\mathbb{K}) :=$

$\operatorname{Der}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ складається із усіх диференціюваннь на $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ вигляду

$$D = f_1(x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n\frac{\partial}{\partial x_1},$$

де $f_i \in \mathbb{K}[x_{i+1},\ldots,x_n]$, $f_n \in \mathbb{K}$. Якщо $D \in W(A)$, то $\operatorname{Ker} D$ позначає поле констант для D у полі R, тобто

$$\operatorname{Ker} D = \{r \in R \mid D(r) = 0\}.$$

2.1 Нільпотентнии підалгебри $W(A)$

Ми використовуємо наступні добре відомі співвідношення для диференціювань.

Нехай $D_1, D_2 \in W(A)$ і $a, b \in R$. Тоді

1) $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$;

2) якщо $a, b \in \operatorname{Ker} D_1 \cap \operatorname{Ker} D_2$, то $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.

Наступні дві леми містять деякі результати про диференціювання та алгебри Лі диференціювань (див., наприклад, [38, 46]).

Лема 2.1. *Нехай L — підалгебра алгебри Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ і F поле констант для L в R. Тоді FL є алгеброю Лі над F, і якщо L є абелевою, нільпотентною або розв'язною, то такою ж буде і алгебра Лі FL.*

Лема 2.2. *Нехай L — нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$ рангу $\operatorname{rank}_R L < \infty$ і $F = F(L)$ — поле констант для L в R. Тоді*

1) *FL є скінченновимірною над F;*

2) *якщо $\operatorname{rank}_R L = 1$, то L є абелевою і $\dim_F FL = 1$;*

3) *якщо $\operatorname{rank}_R L = 2$, то FL є або абелевою з $\dim_F FL = 2$ або FL має вигляд*

$$FL = F\left\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, \frac{a^k}{k!}d_1 \right\rangle,$$

для деяких $D_1, D_2 \in FL$ і $a \in R$ таких, що $[D_1, D_2] = 0$, $D_2(a) = 1$, $D_1(a) = 0$.

Лема 2.3. *Нехай L — нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$ рангу n над полем R з центром $Z = Z(L)$ рангу k над полем R, де $k \leqslant n$. Тоді $I := RZ \cap L$ є абелевим ідеалом в L рангу k над R.*

Доведення. За лемою 4 із [38] I є ідеалом алгебри Лі L. Покажемо, що ідеал I є абелевим. Виберемо довільний базис $D_1, \dots, D_k$ центру Z над R (тобто максимальну за включенням лінійно незалежну над R підмножину Z). Легко бачити, що $D_1, \dots, D_k$ також є базисом ідеалу I, тому можемо подати кожен елемент $D \in I$ у вигляді

$$D = a_1 D_1 + \cdots + a_k D_k$$

для деяких $a_1, \dots, a_k \in R$. Оскільки $D_j \in Z$, $j = 1 \dots, k$, то виконується рівність

$$[D_j, D] = \left[D_j, \sum_{i=1}^{k} a_i D_i \right] = \sum_{i=1}^{k} D_j(a_i) D_i = 0 \tag{2.1}$$

для $j = 1, \dots, k$. Оскільки $D_1, \dots, D_n$ є лінійно незалежними, то з (2.1) випливає, що

$$D_j(a_i) = 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Тому для кожного елемента

$$\overline{D} = b_1 D_1 + \cdots + b_k D_k$$

ідеалу I виконуються наступні рівності

$$[D, \overline{D}] = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i D_i, \sum_{j=1}^{k} b_j D_j \right] = \sum_{i,j=1}^{k} a_i b_j [D_i, D_j] = 0,$$

оскільки

$$D_i(b_j) = D_j(a_i) = 0,$$

як зазначено вище. З цього випливає, що I є абелевим ідеалом. Крім того, очевидно $\operatorname{rank}_R I = k$. $\square$

Лема 2.4. *Нехай L — нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ — центр алгебри Лі L, $I := RZ \cap L$ і F — поле констант для L в R. Якщо* *для деякого $D \in L$ виконуються співвідношення $[D, FI] \subseteq FI$, $[D, FI] \neq 0$, то тоді існує базис $D_1, \ldots, D_m$ ідеалу FI алгебри Лі FL над R і $a \in R$ такі, що*

$$D(a) = 1, \quad D_i(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Крім того, кожен елемент $\overline{D} \in FI$ має вигляд

$$\overline{D} = f_1(a)D_1 + \cdots + f_m(a)D_m$$

для деяких поліномів $f_i \in F_1[t]$, де F_1 — поле констант для підалгебри $L_1 = FI + FD$ в R.

Доведення. За лемою 2.3 перетин $I = RZ \cap L$ є абелевим ідеалом алгебри Лі L і тому FI є абелевим ідеалом алгебри Лі FL. Виберемо базис $D_1, \ldots, D_m$ ідеалу FI над полем R таким чином, щоб $D_1, \ldots, D_m \in Z$. Тоді FZ є центром алгебри Лі FL. Тепер візьмемо довільний базис $T_1, \ldots, T_s$ F-простору FI над F (зверніть увагу, що алгебра Лі FL є скінченновимірною над полем F за [38]). Кожен базисний елемент T_i можна записати у вигляді $T_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} D_j$, $i = 1, \ldots s$ для деяких $r_{ij} \in R$. Позначимо через B підкільце $B = F[r_{ij}, i = 1, \ldots s, j = 1, \ldots, m]$ поля R, породжене F та елементами r_{ij}. Оскільки лінійний оператор $\operatorname{ad} D$ є нільпотентним на FI, диференціювання D є локально нільпотентним на кільці B. Дійсно,

$$[D, T_i] = \left[D, \sum_{j=1}^{m} r_{ij} D_j \right] = \sum_{j=1}^{m} D(r_{ij}) D_j$$

і, отже

$$(\operatorname{ad} D)^{k_i}(T_i) = \sum_{j=1}^{m} D^{k_i}(r_{ij}) D_j = 0$$

для деякого натурального k_i, $i = 1, \ldots, s$. Зауважимо, що звуження диференціювання D на кільце B ненульове, оскільки за умовою леми $[D, FI] \neq 0$. Тоді можна легко показати, що існує такий елемент $p \in B$ (преслайс), що $D(p) \in \operatorname{Ker} D$, $D(p) \neq 0$ (взявши довільний елемент $b \in B$, що не лежить в ядрі диференціювання D можна покласти $p = D^k(b)$, де k – найбільше натуральне число, таке що $D^{k+1}(b) \neq 0$).

Тоді, позначаючи $a := p/D(p)$, маємо $D(a) = 1$ (такий елемент a називається слайсом для D). Кільце B міститься в локалізації $B[c^{-1}]$, де $c := D(p)$ і диференціювання D є локально нільпотентним на $B[c^{-1}]$. Зауважимо, що $B[c^{-1}] \subseteq F_1$. Крім того, згідно з Принципом 11 з [20] має місце $B[c^{-1}] = B_0[a]$, де B_0 — це ядро D у $B[c^{-1}]$. Це завершує доведення, оскільки $B \subseteq B[c^{-1}]$ і кожен елемент $\overline{D}$ FI має форму

$$\overline{D} = b_1 D_1 + \ldots b_m D_m, \quad b_i \in B. \qquad \square$$

Лема 2.5. *Нехай L — нільпотентна підалгебра $W(A)$, $Z = Z(L)$ центр алгебри Лі L, F поле констант алгебри L в полі R і $I = RZ \cap L$. Нехай* $\operatorname{rank}_R Z = n - 2$. *Тоді фактор-алгебра Лі FL/FI задовольняє одну з наступних умов:*

1) *якщо FL/FI є абелевим, тоді* $\dim_F FL/FI = 2$;

2) *якщо FL/FI є неабелевим, то існують елементи $D_{n-1}, D_n \in FL$, $b \in R$ такі, що*

$$FL/FI = F\left\langle D_{n-1} + FI,\, bD_{n-1} + FI,\, \ldots,\, \frac{b^k}{k!} D_{n-1} + FI,\, D_n + FI \right\rangle$$

де $k \geqslant 1$, $D_n(b) = 1$, $D_{n-1}(b) = 0$, $D(b) = 0$ для всіх $D \in FI$.

Доведення. Виберемо базис $D_1, \ldots, D_n$ центру Z над полем R і будь-яким центральним ідеалом $FD_{n-1} + FI$ факторалгебри FL/FI. Позначаємо перетин $R(I + \mathbb{K}D_{n-1}) \cap L$ на I_1. Тоді легко побачити, що FI_1 — ідеал алгебри Лі FL рангу $n - 1$ над R, а FL/FI_1 — одновимірна алгебра Лі над F (за лемою 5 з [38]). Виберемо довільний елемент $D_n \in FL \setminus FI_1$. Тоді $D_1, \ldots, D_n$ є базисом алгебри Лі FL над R.

<u>Випадок 1:</u> Фактор-алгебра FL/FI є абелевою. Давайте покажемо, що

$$FL/FI = F\langle D_{n-1} + FI,\, D_n + FI \rangle.$$

Дійсно, візьмемо будь-які елементи $S_1 + FI$, $S_2 + FI$ з FL/FI і запишемо

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i D_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i, \quad r_i, s_i \in R, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

З рівностей $[D_i, S_1] = [D_i, S_2] = 0$, $i = 1, \ldots, n-2$ (нагадаємо, що $D_i \in Z(L)$, $i = 1, \ldots, n-2$) випливає, що

$$D_i(r_j) = D_i(s_j) = 0, \quad i = 1 \ldots, n-2, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Оскільки $[FL, FI] \subseteq FI$ маємо $[D_i, S_1], [D_i, S_2] \in FI$ для $i = n-1$, n. Враховуючи рівності (2.2) отримуємо, що

$$D_i(s_j) = D_i(r_j) = 0, \quad i = n-1, n, \quad j = n-1, n.$$

Тому виконується $s_i, r_i \in F$ для $i = n-1$, n і отже $D_{n-1}+FI, D_n+FI$ є базисом для FL/FI над полем F.

Випадок 2: FL/FI є неабелевим. Далі, $\dim_F FL/FI \geqslant 3$, оскільки алгебра Лі FL/FI нільпотентна. Покажемо, що ідеал FI_1/FI алгебри Лі FL/FI є абелевим (нагадаємо, що $I_1 = R(I + \mathbb{K}D_{n-1}) \cap L$). Оскільки $D_{n-1} + FI$ лежить у центрі факторалгебри FL/FI, для будь-якого елемента $rD_{n-1} + FI$ ідеала FI_1/FI справедлива наступна рівність:

$$[D_{n-1} + FI, rD_{n-1} + FI] = FI$$

і, отже,

$$D_{n-1}(r)D_{n-1} + FI = FI.$$

З останньої рівності випливає, що $D_{n-1}(r) = 0$. Але тоді для будь-яких елементів $rD_{n-1} + FI$, $sD_{n-1} + FI$ із FI_1/FI, маємо

$$[rD_{n-1} + FI, sD_{n-1} + FI] = [rD_{n-1}, sD_{n-1} + FI =$$
$$= (D_{n-1}(s)r - sD_{n-1}(r))D_{n-1} + FI = FI.$$

Останнє означає, що FI_1/FI є абелевим ідеалом FL/FI.

Далі, помітимо, що нільпотентний лінійний оператор $\operatorname{ad} D_n$ діє на лінійному просторі FI_1/FI, причому

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} D_n) = FD_{n-1} + FI.$$

Дійсно, нехай

$$\operatorname{ad} D_n(rD_{n-1} + FI) = FI.$$

Більше того, $[D_n, rD_{n-1}] \in FI$ і, як наслідок, $D_n(r)D_{n-1} \in FI$. З цього співвідношення випливає, що $D_n(r) = 0$ і з урахуванням рівностей $D_i(r) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ ми отримуємо, що $r \in F$. Останнє означає

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} D_n) = FD_{n-1} + FI.$$

Звідси випливає, що лінійний оператор $\operatorname{ad} D_n$ на FI/FI_1 має лише один жорданів ланцюг і жордановий базис можна вибрати за допомогою першого елемента $D_{n-1} + FI$. Оскільки $\dim FI_1/FI \geqslant 2$ (нагадаємо, що $\dim_F FL/FI \geqslant 3$) ланцюг має довжину не менше двох. Візьмемо другий елемент жорданового ланцюга у вигляді $bD_{n-1} + FI$, $b \in R$. Далі маємо

$$\operatorname{ad} D_n(bD_{n-1} + FI) = D_{n-1} + FI$$

і, отже, $D_n(b) = 1$. Із включення $[D_{n-1}, bD_{n-1}] \in FI$ випливає рівність $D_{n-1}(b) = 0$, і аналогічно $D_i(b) = 0$, $i = 1, \ldots, n-2$.

Якщо $\dim FI_1/FI \geqslant 3$ і $cD_{n-1} + FI$ є третім елементом жорданового ланцюга $\operatorname{ad} D_n$, тоді, повторюючи наведені вище міркування, отримуємо $D_n(c) = b$. Розглянемо елемент $\alpha = \frac{b^2}{2!} - c \in R$. Зі сказаного випливає, що

$$D_{n-1}(\alpha) = D_n(\alpha) = 0$$

і

$$D_i(\alpha) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-2,$$

оскільки

$$D_i(b) = D_i(c) = 0.$$

тому $\alpha = \frac{b^2}{2!} - c \in F$ і $c = \frac{b^2}{2!} + \alpha$. Оскільки $\alpha D_{n-1} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} D_n)$, можемо взяти третій елемент жорданового ланцюга у вигляді $\frac{b^2}{2!} D_{n-1} + FI$. Повторюючи міркування, можна побудувати необхідний базис алгебри Лі FL/FI. $\square$

Лема 2.6. *Нехай L — нільпотентна підалгебра $W(A)$ з центром $Z = Z(L)$, $\operatorname{rank}_R Z = n-2$, F поле констант алгебри Лі L в R і $I = RZ \cap L$. Якщо S, T є такими елементами L, що $[S,T] \in I$, ранг підалгебри L_1, породженої I, S, T, дорівнює n і $C_{FL}(FI) = FI$, то існують елементи $a, b \in R$ такі, що*

$$S(a) = 1, \quad T(a) = 0,$$
$$S(b) = 0, \quad T(b) = 1,$$
$$D(a) = D(b) = 0.$$

для кожного $D \in I$. Крім того, кожен елемент $D \in FI$ можна записати у вигляді

$$D = f_1(a,b)D_1 + \cdots + f_{n-2}(a,b)D_{n-2}$$

для деяких поліномів $f_i(u,v) \in F[u,v]$.

Доведення. Виберемо базис $D_1, \ldots, D_{n-2}$ з Z над кільцем R. За умовами леми $D_1, \ldots, D_{n-2}, S, T$ є базисом L над R. Ідеал FI алгебри Лі FL є абелевим за лемою 2.3 і $\operatorname{ad} S, \operatorname{ad} T$ є комутуючими лінійними операторами у векторному просторі FI (над F). Візьмемо базис $T_1, \ldots, T_s$ ідеалу FI над F (нагадаємо, що $\dim_F FI < \infty$ за теоремою 1 з [38]) і запишемо $T_i = \sum_{j=1}^{n-2} r_{ij} D_j$ для деяких $r_{ij} \in R$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, n-2$. Позначимо

$$B = F[r_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, n-2],$$

підкільце R, породжене F і всіма коефіцієнтами r_{ij}. Тоді B є інваріантним відносно диференціювань S і T, і ці диференціювання лінійно незалежні над R (за умовою $C_{FL}(FI) = FI$ леми). За лемою 2.4 існує такий елемент $a \in B[c^{-1}]$, що

$$S(a) = 1, \quad D_i(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-2$$

(тут $c = S(p)$ для преслайса p для S у B). Оскільки $c \in \operatorname{Ker} S$, можна припустити без втрати загальності, що $T(c) \in \operatorname{Ker} T$. Але тоді T є локально нільпотентним диференціюванням на підкільці $B[c^{-1}]$. Повторюючи ці міркування, можемо знайти елемент $b \in B[C^{-1}][d^{-1}]$ з $T(b) = 1$ (тут d є преслайс для диференціювання T в $B[c^{-1}]$). Позначимо $B_1 = B[c^{-1}, d^{-1}]$, підкільце R. Потім, використовуючи стандартні факти про локально нільпотентні диференціювання (див., наприклад, Принцип 11 у [20]), можна показати, що $B_1 = B_0[a, b]$, де $B_0 = \operatorname{Ker} S \cap \operatorname{Ker} T$. Тому кожен елемент h з B_1 можна записати у формі $h = f(a, b)$ з $f(u, v) \in F[u, v]$ (зауважимо, що

$$F = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} S \cap_{i=1}^{n-2} \operatorname{Ker} D_i)$$

З цього представлення елементів B_1 випливає, що кожен елемент ідеалу FI можна записати у вигляді

$$D = f_1(a, b)D_1 + \cdots + f_{n-2}(a, b)D_{n-2}$$

для деяких поліномів $f_i(u, v) \in F[u, v]$. $\square$

Теорема 2.7. *Нехай L — нільпотентна підалгебра рангу $n \geqslant 3$ над R з алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ — центр L з $\operatorname{rank}_R Z \geqslant n - 2$, F поле констант L в R. Тоді справедливе одне з тверджень:*

1. $\dim_F FL = n$,

2. *FL знаходиться в одній з локальних нільпотентних підалгебр L_2, L_3 алгебри Лі $W(A)$ рангу n над R, які мають базис $D_1, \ldots, D_n$ над R, що задовольняє співвідношення $[D_i, D_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ і мають вигляд*

$$L_2 = F\left\langle \left\{\frac{b^i}{i!}D_1\right\}_{i=0}^{\infty}, \ldots, \left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}\right\}_{i=0}^{\infty}, D_n \right\rangle$$

для деяких $b \in R$, таких що $D_i(b) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ і $D_n(b) = 1$,

$$L_3 = F\left\langle \left\{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_1\right\}_{i,j=0}^{\infty}, \ldots, \left\{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_{n-2}\right\}_{i,j=0}^{\infty}, \left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}\right\}_{i=0}^{\infty}, D_n \right\rangle$$

для деяких $a, b \in R$, таких що

$$D_{n-1}(a) = 1, \quad D_n(a) = 0,$$
$$D_{n-1}(b) = 0, \quad D_n(b) = 1,$$
$$D_i(a) = D_i(b) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-2.$$

Доведення. Згідно з лемою 2.3, $I = RZ \cap L$ є абелевим ідеалом в L і, отже, FI є абелевим ідеалом алгебри Лі FL (тут алгебра Лі FL розглядається над полем F).

Випадок 1: $\mathrm{rank}_R Z = n-1$. Тоді FI має корозмірність 1 у FL згідно з лемою 5 з [38]. Це означає нерівність $\dim_F FI > n-1$ (в іншому випадку FL буде абелевим) і, отже, $FZ \subset FI$ (із сильним включенням). Візьмемо базис $D_1, \dots, D_{n-1}$ Z над R і елемент $D_n \in FL \setminus FI$. Тоді $D_1, \dots, D_n$ є основою для FL над R і $[D_n, FI] \neq 0$. Використовуючи лему 2.4 можна легко показати, що FL міститься в підалгебрі типу L_2 з $W(A)$.

Випадок 2: $\mathrm{rank}_R Z = n-2$ і $\dim_F FI = n-2$. Згідно з лемою 2.5 факторалгебра FL/FI або є абелевою двовимірною (над F), або має вигляд

$$FL/FI = F\langle\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1} + FI\}_{i=0}^{k}, D_n + FI\rangle \tag{2.3}$$

для деякого $b \in R$ такого, що $D_n(b) = 1,\ D_{n-1}(b) = 0$ і $D(b) = 0$ для кожного $D \in FI$.

З рівності $\dim_F FI = n-2$ випливає рівність $FI = FZ$. Якщо FL/FI є абелевою, то $\dim_F FL/FI = 2$ і FL є нільпотентною підалгеброю розмірності n над F, тобто задовольняє умову 1) твердження теореми. Нехай FL/FI неабелеві. За лемою 2.5 FL/FI має вигляд (2.3). Тоді F-лінійний простір

$$J = F\left\langle \left\{\frac{b^i}{i!}D_1\right\}_{i=0}^{\infty}, \dots, \left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}\right\}_{i=0}^{\infty} \right\rangle$$

є абелевою підалгеброю $W(A)$ і $[FL, J] \subseteq J$. З останнього включення випливає, що сума

$$J + F\left\langle \left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}\right\}_{i=0}^{\infty}, D_n \right\rangle$$

є підалгеброю алгебри Лі $W(A)$. Якщо $[D_n, D_{n-1}] \neq 0$, тод враховуючи відношення $[D_n, D_{n-1}] \in FI$ можна записати

$$[D_n, D_{n-1}] = r_1 D_1 + \dots + r_{n-2} D_{n-2}$$

для деяких $r_i \in R$. Розглянемо елемент $W(A)$ форми

$$\widetilde{D}_{n-1} = D_{n-1} - r_1 b D_1 - \dots - r_{n-2} b D_{n-2}.$$

Оскільки $[D_n, \widetilde{D}_{n-1}] = 0$, $\widetilde{D}_{n-1}(b) = 0$ можна без втрати загальності замінити елемент D_{n-1} на елемент $\widetilde{D}_{n-1}$ і отримати алгебру Лі типу L_2 з твердження теореми.

Випадок 3: $\operatorname{rank}_R Z = n-2$ і $\dim_F FI > n-2$. Припустимо, FL/FI є абелевою алгеброю Лі. Як було зазначено вище $\dim_F FL/FI = 2$. Спочатку припустимо $C_{FL}(FI) = FI$. Тоді за лемою 2.6 існує базис $D_1, \ldots, D_{n-2}$ ідеалу FI над R та елементи $a, b \in R$ такі що

$$D_{n-1}(a) = 1, \quad D_n(a) = 0, \quad D_{n-1}(b) = 0, \quad D_n(b) = 1$$

і

$$D_i(a) = D_i(b) = 0, \ i = 1, \ldots, n-2$$

і кожен елемент $D \in FI$ можна записати у вигляді

$$D = f_1(a,b)D_1 + \cdots + f_{n-2}(a,b)D_{n-2}$$

для деяких поліномів $f_i(u,v) \in F[u,v]$.

Розглянемо F-підпростір

$$J = F[a,b]D_1 + \cdots + F[a,b]D_{n-2}$$

алгебри Лі $W(A)$. Легко побачити, що J є абелевою підалгеброю $W(A)$ і $[FL, J] \subseteq J$. Якщо $[D_n, D_{n-1}] = 0$, то очевидно, що підалгебра $FL + J$ належить до типу L_2 з формулювання теореми. Нехай $[D_n, D_{n-1}] \neq 0$. Оскільки $[D_n, D_{n-1}] \in FI$, маємо

$$[D_n, D_{n-1}] = h_1(a,b)D_1 + \cdots + h_{n-2}D_{n-2}$$

для деяких поліномів $h_i(u,v) \in F[u,v]$. Тоді підалгебра J має такий елемент

$$T = u_1(a,b)D_1 + \ldots u_{n-2}(a,b)D_{n-2}$$

що $D_n(u_i(a,b)) = h_i(a,b)$ (нагадаємо, що $D_n(a) = 0$, $D_n(b) = 1$), і, отже, елемент $\widetilde{D}_{n-1} = D_{n-1} - T$ задовольняє рівність $[D_n, T] = 0$. Замінивши D_{n-1} на

$\widetilde{D}_{n-1}$, отримаємо необхідний базис алгебри Лі $FL+J$ і бачимо, що FL можна вкладати в L_3 Лі типу 3). Отже, у випадку $C_{FL}(FI)=FI$ алгебра Лі FL можна ізоморфно вкладати в алгебру Лі типу L_3 з формулювання теореми.

Далі, припустимо $C_{FL}(FI)\neq FI$. Оскільки $C_{FL}(FI)\supseteq FI$, можна легко показати, що $D_{n-1}\in C_{FL}(FI)\setminus FI$ (звернемо увагу, що FL/FI має єдиний мінімальний ідеал $FD_{n-1}+FI$). Тоді $[D_{n-1},FI]=0$, а тому $[D_n,FI]\neq 0$. Але тоді за лемою 2.4 існує такий елемент $c\in R$ що

$$D_n(c)=1,\quad D_{n-1}(c)=0,\quad D_i(c)=0,\quad i=1,\dots,n-2.$$

Крім того, кожен елемент FI має вигляд $g_1(c)D_1+\cdots+g_{n-2}(c)D_{n-2}$ для деяких поліномів $g_i(u)\in F[u]$. Відповідно до леми 2.5, факторалгебра FL/FI має вигляд

$$FL/FI=F\left\langle\left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}+FI\right\}_{i=0}^{k},D_n+FI\right\rangle$$

для деякого $b\in R$, такого, що $D_n(b)=1,\ D_{n-1}(b)=0$. Але з іншого боку

$$D_{n-1}(b-c)=0,\quad D_n(b-c)=0,\quad D_i(b-c)=0,$$

і отже $b-c=\alpha$ для деякого $\alpha\in F$. Без втрати загальності ми можемо припустити $b=c$. Тоді локально нільпотентна підалгебра

$$L'=F\left\langle\left\{\frac{a^ib^j}{i!j!}D_1\right\}_{i,j=0}^{\infty},\dots\left\{\frac{a^ib^j}{i!j!}D_{n-2}\right\}_{i,j=0}^{\infty},\left\{\frac{b^i}{i!}D_{n-1}\right\}_{i=0}^{\infty},D_n\right\rangle$$

алгебри Лі $W(A)$ містить L і задовольняє умови типу L_3 з формулювання теореми, можливо, за винятком умови $[D_n,D_{n-1}]=0$. Якщо $[D_n,D_{n-1}]\neq 0$, то від включення $[D_n,D_{n-1}]\in FI$ випливає, що

$$[D_n,D_{n-1}]=f_1(b)D_1+\cdots+f_{n-2}(b)D_{n-2}$$

для деяких поліномів $f_i(u)\in F[u]$.

Можна легко показати, що елемент є

$$\overline{D}=h_1(b)D_1+\cdots+h_{n-2}(b)D_{n-2}\in L',$$

так, що $[D_n, \overline{D}] = [D_n, D_{n-1}]$ (для поліномів f_i можна взяти первісні h_i). Заміноюа D_{n-1} на $D_{n-1} - \overline{D}$ отримуємо необхідний базис над R алгебри Лі L_3. □

Зауваження 2.8. Будь-яка алгебра Лі розмірності n над F може бути реалізована як алгебра Лі диференціювань рангу n над R за теоремою 2 з [40]. Отже, алгебра Лі типу 1) з теореми 1 може бути обрана довільним чином.

Як наслідок отримуємо наступне твердження про вкладення алгебр Лі диференціювань.

Теорема 2.9. *Нехай L — нільпотентна підалгебра рангу n над R алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ центр L з $\operatorname{rank}_R Z \geqslant n-2$ (тобто корангу $\leqslant 2$), і F поле констант L в R . Тоді алгебра Лі FL може бути ізоморфно вкладена в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $\dim_F FL = n$. Якщо FL є абелевою, то FL ізоморфно вкладається в $u_n(F)$ (підалгебра $F\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$ алгебри Лі $u_n(F)$ є абелевою рангу n над полем F). Отже, можна припустити, що FL неабелева. Тоді $Z(FL)$ має ранг $n-2$ (і, звичайно, $\dim_F Z(F) = n-2$). Можна легко показати, що $FL = M_1 \oplus M_2$, де M_1 — тривимірна неабелева нільпотентна алгебра Лі над F, а M_2 — абелева алгебра Лі розмірності $n-3$. Розглянемо підалгебру $H_1 = F\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\rangle$ алгебри Лі $W_n(F)$. Очевидно, H_1 має ранг 3 над $R = F(x_1, \ldots, x_n)$ а H_1 — неабелева нільпотентна алгебра Лі розмірності 3. Далі, розглянемо підалгебру $M = F\langle \frac{\partial}{\partial x_4}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$ якщо $\dim_F FL \geqslant 4$. Тоді M є абелевою алгеброю Лі рангу $n-3$ над R і $\dim_F M = n-3$. Легко бачити, що $H_1 + M = H_1 \oplus M$ — підалгебра із $W_n(F)$, яка є ізоморфною до алгебри Лі FL.

Далі припустимо $\dim_F FL > n$. За теоремою 2.7, алгебра Лі FL лежить в одній з підалгебр типів L_2 або L_3. Тому достатньо показати, що підалгебри L_2, L_3 алгебри Лі $W(A)$ можна ізоморфно вкласти в $u_n(F)$. На L_2 визначаємо відображення φ на базисі $D_1, \ldots, D_n$ над R за правилом

$$\varphi(D_i) = \frac{\partial}{\partial x_i},\ \varphi(\frac{b^i}{i!}D_i) = \frac{x_n^i}{i!}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

а далі продовжимо його на L_2 за лінійністю.

Легко бачити, що відображення φ є ізоморфним вкладенням алгебри Лі L_2 в $u_n(F)$. Аналогічно на L_3 визначимо $\psi\colon L_3 \to W_n(F)$ за правилом

$$\psi(D_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n-2, \quad \psi\left(\frac{a^i b^j}{i!j!} D_k\right) = \frac{x_{n-1}^i x_n^j}{i!j!}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n-2, \quad \psi\left(\frac{b^i}{i!} D_{n-1}\right) = \frac{x_n^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \quad \psi(D_n) = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

і далі за лінійністю. Тоді ψ є ізоморфним вкладенням алгебри Лі L_3 в алгебру Лі $u_n(F)$. $\square$

2.2 Розв'язні підалгебри із $W_3(\mathbb{K})$ рангу 3

В цьому підрозділі вивчаються скінченновимірні розв'язні підалгебри рангу 3 над R алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$ (нільпотентні підалгебри $W_3(\mathbb{K})$ досліджено в [48]. Основні результати роботи: у теоремі 2.14 доведено, що розв'язна скінченновимірна підалгебра L із $W_3(\mathbb{K})$, яка містить абелевий ідеал рангу 3 над R ізоморфна підалгебрі загальної афінної алгебри Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. Якщо L має абелев ідеал I рангу 2 над R, то L можна вкласти в підалгебру $\bar{L}$ алгебри Лі диференціювань $\widetilde{W_3}(\mathbb{K}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ таку, що $\widetilde{L}$ розширення підалгебри $\mathrm{aff}_2(F)$ за допомогою підалгебри розмірності $\leqslant 2$, де F — поле констант для ідеалу I в полі R.

Тут основне поле $\mathbb{K}$ є алгебраїчно замкненим нульової характеристики і якщо L — підалгебра алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$, то через $F = F(L)$ позначається поле констант для L у $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$. Якщо V є n-вимірним векторним простором над $\mathbb{K}$ і $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Лі всіх лінійних операторів на V, то можна розглянути напівпрямий добуток $\mathfrak{gl}(V) \leftthreetimes V$, де V розглядається як абелева Алгебра Лі. Алгебра Лі $\mathfrak{gl}(V) \leftthreetimes V$ називається загальною афінною алгеброю Лі і позначається $\mathrm{aff}_n(\mathbb{K})$ (зауважимо, що у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ алгебра Лі $\mathrm{aff}_n(\mathbb{R})$ відповідає загальній афінній групі Лі $GA_n(\mathbb{R})$).

Наступні дві леми містять стандартні факти про диференціювання (див., наприклад, [38]).

Лема 2.10. *Нехай $D_1, D_2 \in W_3(\mathbb{K})$ і $a, b \in R$. Тоді,*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Якщо $[D_1, D_2] = 0$, то

$$[aD_1, bD_2] = aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Лема 2.11. *Якщо $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$ і $F = F(L)$ — поле констант для L в R, то FL — алгебра Лі над полем F. Якщо L абелева, нільпотентна або розв'язна то FL має таку ж властивість.*

Лема 2.12. *Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — базис лінійного простору $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ над полем R. Тоді*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i = \mathbb{K}.$$

Доведення. Припустимо, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i \neq \mathbb{K}$$

і нехай

$$f_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i, \quad f_1 \in R \setminus \mathbb{K}.$$

Тоді існує базис трансцендентності $\{f_1, \ldots, f_n\}$ поля R над $\mathbb{K}$ і підполе $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_n)$ ізоморфне полю $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Функція f_1 визначає диференціювання $\frac{\partial}{\partial f_1}$ поля $\mathbb{K}(f_1, \ldots, f_n)$ і це диференціювання можна однозначно розширити до диференціювання $\frac{\partial}{\partial f_1}$ поля $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ (ми зберігаємо те саме позначення для розширеного диференціювання). Але

$$\frac{\partial}{\partial f_1} = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i$$

для деяких $s_i \in R$ і тому

$$\frac{\partial}{\partial f_1}(f_1) = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i(f_1) = 0$$

за вибором елемента f_1. Це неможливо, оскільки $\frac{\partial f_1}{\partial f_1} = 1$. Отримана суперечність показує, що

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i = \mathbb{K}. \qquad \square$$

Наслідок 2.13. *Якщо L є абелевою підалгеброю алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ і $\operatorname{rank}_R L = n$, то тоді $\dim_{\mathbb{K}} L = n$.*

Доведення. Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — базис алгебри Лі L над R. Тоді будь-який елемент $D \in L$ має вигляд

$$D = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i$$

для деяких $s_i \in R$. Оскільки

$$[D_i, D] = 0 = \sum_{j=1}^{n} D_i(s_j) D_j,$$

то звідси отримаємо, що $D_i(s_j) = 0,\ i, j = 1, \ldots, n$. За лемою 2.12, $s_i \in \mathbb{K}$ і $D_1, \ldots, D_n$ є базисом L над $\mathbb{K}$. Таким чином, $\dim_{\mathbb{K}} L = n$. $\square$

Теорема 2.14. *Нехай L — розв'язна підалгебра алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$. Якщо L містить абелевий ідеал I рангу 3 над R, то тоді L ізоморфна розв'язній підалгебрі загальної афінної алгебри Лі $\operatorname{aff}_3(\mathbb{K})$. Зокрема $3 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} L \leqslant 9$.*

Доведення. Візьмемо будь-який базис D_1, D_2, D_3 ідеалу I над полем R. Тоді будь-який елемент $D \in L$ можна записати у вигляді

$$D = s_1 D_1 + s_2 D_2 + s_3 D_3, \quad s_i \in R.$$

Оскільки

$$[D_i, D] = D_i(s_1) D_1 + D_i(s_2) D_2 + D_i(s_3) D_3 \in I,$$

то за лемою 2.12 маємо, що $D_i(s_j) \in \mathbb{K},\ i, j = 1, 2, 3$. Таким чином, можемо поставити у відповідність будь-якому елементу $D \in L$ матрицю

$$B_D = \begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) & D_1(s_3) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) & D_2(s_3) \\ D_3(s_1) & D_3(s_2) & D_3(s_3) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}). \tag{2.4}$$

Позначимо через S множину всіх стовпчиків таких матриць B_D, де D пробігає підалгебру L. Оскільки $S \subseteq \mathbb{K}^3$, де $\mathbb{K}^3$ – тривимірний векторний простір над $\mathbb{K}$, то отримаємо нерівність $d = \operatorname{rank}_{\mathbb{K}} S \leqslant 3$. Якщо $d = 0$, то всі стовпчики для всіх $D \in L$ дорівнюють нулю, тому $s_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, 3$ за лемою 2.12. Це означає $L = I$. Отже, можемо припустити, що $d \geqslant 1$.

Випадок 1. $d = 1$. Тоді існує елемент $D \in L \setminus I$, який можна записати у вигляді

$$D = s_1 D_1 + s_2 D_2 + s_3 D_3$$

так, що всі стовпчики S є пропорційні стовпчику $(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^{\mathrm{T}}$ (тут $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ позначає транспонування рядка) відповідної матриці B_D. Візьмемо будь-який елемент $(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^{\mathrm{T}} \in S$. Тоді існує $\gamma \in \mathbb{K}$, таке що

$$(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^{\mathrm{T}} = \gamma \left(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1)\right)^{\mathrm{T}}.$$

З останньої рівності випливає, що

$$D_1(t - \gamma s_1) = D_2(t - \gamma s_1) = D_3(t - \gamma s_1) = 0$$

За лемою 2.12 отримуємо рівність $t - \gamma s_1 = \delta$ для деякого $\delta \in \mathbb{K}$, або що те саме $t = \gamma s_1 + \delta$. Остання рівність означає, що для будь-якого елемента D алгебри Лі L,

$$D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + t_3 D_3, \quad t_i \in R,$$

відповідна матриця B_D має стовпчики

$$(D_1(t_i), D_2(t_i), D_3(t_i))^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де коефіцієнти t_i виражаються через s_1 лінійним чином:

$$t_i = f_i(s_1), \quad f_i \in \mathbb{K}[t], \quad \deg f_i \leqslant 1.$$

Оскільки $(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^{\mathrm{T}}$ не дорівнює нулю ми можемо припустити без втрати загальності, що

$$D_1(s_1) = 1, \quad D_2(s_1) = \gamma_2, \quad D_3(s_1) = \gamma_3$$

для деяких $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}$. Покладемо

$$D_1' = D_1, \quad D_2' = D_2 - \gamma_2 D_1, \quad D_3' = D_3 - \gamma_3 D_1.$$

Тоді

$$D_1'(s_1) = 1, \quad D_2'(s_1) = 0, \quad D_3'(s_1) = 0$$

і D_1', D_2', D_3' утворюють базис ідеалу I над R. Нехай

$$D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + t_3 D_3$$

— довільний елемент алгебри Лі L і $t_i = \gamma_i s_i + \delta_i$, $i = 1, 2, 3$. Тоді відображення $\varphi \colon L \to \mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$, що визначається за правилом:

$$\varphi(D_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \varphi(s_1 D_i) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_i}$$

і далі за лінійністю є вкладенням L в алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$.

Випадок 2. $d = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S = 2$. Тоді існують лінійно незалежні стовпчики із множини S вигляду

$$(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^{\mathrm{T}}, \quad (D_1(s_2), D_2(s_2), D_3(s_2))^{\mathrm{T}} \tag{2.5}$$

(ці стовпчики можуть належати до різних матриць B_D, $D \in L$). Тому будь-який стовпчик $(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^{\mathrm{T}} \in S$ є лінійною комбінацією стовпчиків, зазначених у формулі (2.5). Можна легко показати, що елемент t може бути виражений як $t = f(s_1, s_2)$ для деякого полінома $f \in \mathbb{K}[u, v]$, $\deg f \leqslant 1$. Зауважимо, що ранг матриці

$$\begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) \\ D_3(s_1) & D_3(s_2) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

дорівнює 2. Без втрати загальності можна припустити що перший і другий рядки цієї матриці лінійно незалежні. Але тоді існують такі $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$, що

$$(1, 0) = \gamma_1 \left(D_1(s_1), D_1(s_2)\right) + \gamma_2 \left(D_2(s_1), D_2(s_2)\right). \tag{2.7}$$

Позначаючи $D_1' = \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2$, маємо

$$D_1'(s_1) = 1, \quad D_1'(s_2) = 0.$$

Аналогічно можна знайти $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{K}$ такі, що елемент $D_2' = \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2$ має властивості

$$D_2'(s_1) = 0, \quad D_2'(s_2) = 1.$$

Крім того, третій рядок матриці (2.6) є лінійною комбінацією першого і другого рядів і тому для деяких елементів $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ маємо

$$(D_3 - \mu_1 D_1 - \mu_2 D_2)(s_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Позначаючи $D_3' = D_3 - \mu_1 D_1 - \mu_2 D_2$, отримуємо

$$D_i'(s_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

Якщо $D \in L$ є довільним елементом, то

$$D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + t_3 D_3$$

для деякого $t_1, t_2, t_3 \in R$. Оскільки $t_i = f_i(s_1, s_2)$, $\deg f_i \leqslant 1$, то бачимо, що L можна вкласти в алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$.

Випадок 3. $\mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S = 3$ може бути розглянутий аналогічно. $\square$

Лема 2.15. *Нехай L — підалгебра алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$, I — ідеал L. Якщо $F = F(I)$ є полем констант для I в R, то тоді $D(F) \subseteq F$ для довільного елемента $D \in L$.*

Доведення. Нехай $D \in L$ і $r \in F$ вибрані довільно. Тоді для будь-якого $D_1 \in I$ маємо $D_1(r) = 0$, отже

$$0 = D(D_1(r)) = D_1(D(r)) + [D, D_1](r).$$

Оскільки $[D, D_1] \in I$, маємо $[D, D_1](r) = 0$ і, отже, $D_1(D(r)) = 0$. Останнє означає, що $D(r) \in F$, оскільки елемент D_1 вибрано довільно в ідеалі I. Таким чином $D(F) \subseteq F$. $\square$

Теорема 2.16. *Нехай L — розв'язна скінченновимірна підалгебра алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$ з $\operatorname{rank}_R L = 3$. Якщо L має ідеал I рангу 2 над R і $F = F(L)$ є полем констант I в R, то алгебра Лі L міститься в підалгебрі $\overline{L} = F\overline{I} + L\ \widetilde{W}_3(\mathbb{K})$, де $\overline{I} = (RI) \cap L$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розв'язною, $F\overline{I}$ — її ідеал рангу 2 над R, який ізоморфний підалгебрі $\mathrm{aff}_2(F)$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розширенням ідеалу $F\overline{I}$ за допомогою алгебри Лі розмірності 1 або 2 над $\mathbb{K}$.*

Доведення. Перетин $\overline{I} = (RI) \cap L$ є ідеалом алгебри Лі L з $\operatorname{rank}_R \overline{L} = 2$ і $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} \leqslant 2$ (див. [38]). Нехай F — поле констант для I в R. Оскільки $D(F) \subseteq F$ для будь-якого $D \in L$ (за лемою 2.15), підалгебра $F\overline{I}$ алгебри $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$ є ідеалом алгебри Лі $F\overline{I} + L$. Можна легко показати, що $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \overline{I} = 2$. Згідно з теоремою 1 статті [32], алгебра Лі $F\overline{I}$ (як алгебра Лі над полем F) ізоморфна підалгебрі алгебри Лі $\mathrm{aff}_2(F)$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} \leqslant 2$, очевидно, що

$$\dim_{\mathbb{K}} L + F\overline{I}/F\overline{I} \leqslant 2.$$

Зауважимо, що алгебра Лі $L + F\overline{I}$ у загальному випадку має нескінченну розмірність над $\mathbb{K}$, хоча $\dim_F F\overline{I} \leqslant 7$ (сума $F\overline{I} + L$ загалом не є алгеброю Лі над F, а лише над полем $\mathbb{K}$). □

Подальші позначення взяті з теореми 2.16. Нехай $I_1 = \mathbb{K}D_1$ — одновимірний ідеал L, що лежить в I $\mathbb{K}D_2 + I_1$ — ідеал факторалгебри L/I_1 що лежить в I/I_1 (такі ідеали дійсно існують, тому що L є розв'язним і $\mathbb{K}$ є алгебраїчно замкнутим). Нехай $\mathbb{K}D_3 + \overline{I}$ є одновимірним ідеалом алгебри Лі $L/\overline{I}$. Потім D_1, D_2, D_3 лінійно незалежні над R і утворюють базис RL над R. За вибором D_1 і D_2 існують $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ і $g_2 \in F$ такі, що

$$[D_3, D_1] = \lambda_1 D_1, \quad [D_3, D_2] = \lambda_2 D_2 + g_2 D_1.$$

Наступне твердження дає більш детальний опис алгебри Лі $\overline{L} = F\overline{I} + L$.

Твердження 2.17. *Нехай $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$ — розв'язна скінченновимірна підалгебра рангу 3 над R з $\dim L > 6$. За умов теореми 2.16 або існують елементи*

$r_1, r_2 \in R$, такі що $D_i(r_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$ і кожен елемент $D \in F\overline{I}$ має вигляд

$$D = f_1(r_1, r_2)D_1 + f_2(r_1, r_2)D_2, \quad f_i \in \mathbb{K}[t_1, t_2], \quad \deg f_i \leqslant 1$$

або існують $r_i \in R$, $i = 1$ або $i = 2$ з $D_i(r_j) = \delta_{ij}$ і кожен елемент $D \in F\overline{I}$ має вигляд

$$D = g_1(r_i)D_1 + g_2(r_i)D_2, \quad \deg g_j \leqslant 1.$$

Далі,

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2, \quad D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2.$$

Якщо $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} = 2$, то існує $\overline{D} \in L \setminus (\mathbb{K}D_3 + \overline{I})$ таке, що

$$\begin{aligned} &\overline{D} = r_3 D_3 + s_2 D_2, \quad r_3 \in R, \quad D_3(r_3) = 1, \\ &D_1(r_3) = D_2(r_3) = 0, \quad D_1(s_2) = 0, \end{aligned}$$

і в цьому випадку $\lambda_1 = 0,\ g_2 = 0,\ s_2 = \lambda_2 r_2 r_3 + f,\ f \in \mathbb{K}$.

Доведення. Повторюючи міркування з доведення теореми 2.14 можна знайти елементи r_1, r_2, такі що $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$ або такий елемент $r \in R$, що або $D_1(r) = 1,\ D_2(r) = \gamma$ або $D_1(r) = \delta,\ D_2(r) = 1$ використовуючи лише перетворення стовпців матриці $B_D = \begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) \end{pmatrix}$. Якщо $\delta \neq 0$ можемо розглядати елементи $D_2' = D_2 - \delta D_1$, $D_1' = D_1$, і в цьому випадку $D_1'(r) = 0$, $D_2'(r) = 1$. Отже, можемо припустити, що або $D_1(r) = 1$, $D_2(r) = 0$ або $D_1(r) = 0$, $D_2(r) = 1$ і r дорівнює r_1 або r_2.

Розглянемо дію елементів D_i на $r_i,\ s_j,\ i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3$.

Оскільки $D_1(r_1) = 1$, то $D_3(D_1(r_1)) = 0$ і тому

$$D_1(D_3(r_1)) = D_3(D_1(r_1)) - [D_3, D_1](r_1) = 0 - \lambda_1 D_1(r_1) = -\lambda_1.$$

Це випливає з рівностей $D_1(D_3(r_1)) = -\lambda_1$ і $D_1(-\lambda_1 r_1) = -\lambda_1$, що $D_1(D_3(r_1) + \lambda_1 r_1) = 0$, тобто $D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 + s'$ для деяких $s' \in \operatorname{Ker} D_1$. Аналогічно рівність

$$D_2(d_3(r_1)) = D_3(D_2(r_1)) - [D_3, D_2](r_1)$$

означає $D_3(r_1) = -g_2r_2 + s''$ для деяких $s'' \in \operatorname{Ker} D_2$. Застосовуючи D_1 до обох частин отриманої рівності $-\lambda_1 r_1 + s' = -g_2r_2 + s''$ отримуємо $-\lambda_1 = D_1(s'')$. Після застосування D_2 до тієї самої рівності отримуємо $D_2(s') = -g_2$. Але з іншого боку $s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_1$. Оскільки $s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_2$ можемо зробити висновок, що $s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_1 \cap \operatorname{Ker} D_2 = F$. Таким чином $s'' = -\lambda_1 r_1 + v_1$ для деякого $v_1 \in F$. З рівності $-\lambda_1 r_1 + s' = -g_2 - \lambda_1 r_1 + v_1$, випливає що $s' = -g_2r_2 + v_1$. Нарешті отримуємо

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2r_2 + v_1,\ v_1 \in F.$$

Аналогічно з наступних рівностей

$$D_2(D_3(r_2)) = D_3(D_2(r_2)) - [D_3, D_2](r_2) = 0 - (\lambda_2 D_2 + g_2 D_1)(r_2) = -\lambda_2$$

випливає, що $D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2 + t'$ для деякого $t' \in \operatorname{Ker} D_2$ і, нарешті

$$D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2 + v_2, v_2 \in F.$$

Без втрати загальності можемо змінити D_3 на $D_3' = D_3 - v_1D_1 - v_2D_2$. Тоді $D_3'(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2r_2, D_3'(r_2) = -\lambda_2 r_2$. Повертаючись до старих познчень, отримаємо

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2r_2, \quad D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2.$$

Нехай тепер $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} = 2$ і $\overline{D} = r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2$ — будь-який елемент $L \setminus (\mathbb{K}D_3 + I)$. Далі

$$\begin{aligned}[\overline{D}, D_3] &= [r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_3] = \\ &= -D_3(r_3)D_3 - D_3(s_1)D_1 - s_1[D_1, D_3] - D_3(s_2)D_2 - s_2[D_2, D_3] = \\ &= -D_3(r_3)D_3 + (-D_3(s_1) + \lambda_1 s_1 + s_2g_2)D_1 + (-D_3(s_2) + \lambda_2 s_2)D_2.\end{aligned}$$

З цих рівностей випливає, що $D_3(r_3) = -\gamma$, де γ можна знайти із рівності $[\overline{D}, D_3] = \gamma D_3 + \widetilde{D}$, де $\widetilde{D} \in \overline{I}$. Аналогічно рівність

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_1] = \mu D_1$$

для деяких $\mu \in \mathbb{K}$ означає $D_1(r_3) = 0, D_1(s_2) = 0$. Рівність

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_2] = f_1D_1 + f_2D_2$$

для деяких $f_1, f_2 \in F$ дає $D_3(r_3) = 0$. Підсумовуючи, отримуємо

$$D_1(r_3) = D_2(r_3) = 0, \quad D_3(r_3) = 1, \quad D_1(s_2) = 0. \tag{2.8}$$

Оскільки $[\overline{D}, D_1] = \theta D_1$ для деяких $\theta \in \mathbb{K}$ маємо

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_3] = (\lambda_1 r_3 - D_1(s_1))D_1$$

і тому $\lambda_1 r_3 - D_1(s_1) = \theta$. Таким чином $D_1(s_1) = \lambda_1 r_3 + \theta, \theta \in \mathbb{K}$.

Далі, $[\overline{D}, D_2] = f_1D_1 + f_2D_2$ для деяких $f_1, f_2 \in F$. Аналогічно,

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_2] = (r_3g_2 - D_2(s_1))D_1 + (\lambda_2 r_2 - D_2(s_2))D_2$$

і, отже

$$D_2(s_1) = g_2r_3 - f_2, \quad D_2(s_2) = \lambda_2 r_3 - f_2. \tag{2.9}$$

Але маємо

$$s_1 = g_2r_2r_3 - r_2f_2 + f_3,$$
$$s_2 = \lambda_2 r_2r_3 - r_2f_2 + f_4$$

для деяких $f_3, f_4 \in F$. Як було доведено раніше $D_1(s_1) = \lambda_1 r_3 + \theta, \theta \in \mathbb{K}$, тому маємо $s_1 = \lambda_1 r_1r_3 + \theta r_1 + f_5$ для деяких $f_5 \in F$. Застосувавши D_2 до обох частин рівності

$$\lambda_1 r_1r_3 + \theta r_1 + f_5 = g_2r_2r_3 - r_2f_2 + f_3 \tag{2.10}$$

отримуємо $g_2r_3 - f_2 = 0$. Але r_1, r_2, r_3 є лінійно незалежними над F, тому остання рівність дає $g_2 = 0$. Тепер рівність (2.10) має вигляд

$$\lambda_1 r_1r_3 + \theta r_1 + f_5 = -r_2f_2 + f_3.$$

Застосовуючи D_2 до обох частин цієї рівності, отримуємо $f_2 = 0$. Тому $\lambda_1 r_1r_3 + \theta r_1 + f_5 = f_3$. Застосовуючи D_1 до обох частин останньої рівності, отримуємо

$\lambda_1 r_3 + \theta = 0$. Оскільки $r_3 \notin \mathbb{K}$ маємо $\lambda_1 = 0$ і, отже, $s_1 = 0$. Аналогічно можна припустити, що $f_4 = 0$ і $s_2 = \lambda_2 r_2 r_3$. Отже, маємо

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \lambda_2 r_2 r_3, \quad g_2 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0.$$

Ці рівності означають, що

$$[D_3, D_1] = 0, \quad [D_3, D_2] = \lambda_2 D_2, \quad \overline{D} = r_3 D_3 + s_2 D_2,$$

де $s_2 = \lambda_2 r_2 r_3, D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Доведення завершено. □

2.3 Висновки

У першій частині розділу була детально досліджена будова нільпотентних підалгебр алгебри Лі диференціювань $W(A)$ з центром корангу $\leqslant 2$. Також було показано, що кожна така підалгебра може бути ізоморфно вкладена в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$.

З огляду на отримані результати природньо припустити, що обмеження на центр алгебри Лі не є суттєвим, і насправді всі нільпотентні підалгебри Лі диференціювань із алгебри Лі $W(A)$ можуть бути вкладені в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$. Технічно це може бути важко довести зразу, тому можливо варто почати з інших частинних випадків. Наприклад, можна спробувати довести, що це твердження виконується для алгебр Лі диференціювань, що складаються з локально нільпотентних диференціювань.

У другій частині розділу була досліджена будова скінченновимірних розв'язних підалгебр алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$ з абелевими ідеалами рангу не менше двох. Зокрема, у випадку рангу 3 підалгебра вкладається в загальну афінну алгебру Лі $\mathfrak{aff}_3(\mathbb{K})$. В іншому випадку така підалгебра є розширенням підалгебри $\mathfrak{aff}_2(F)$ за допомогою підалгебри розмірності не більше двох.

Природніми напрямками для подальшого дослідження можуть бути розв'язні підалгебри алгебр Лі $W_n(\mathbb{K})$ з абелевими ідеалами рангу не менше, ніж $n-2$. Можливо, методи, що використовувалися в цьому розділі можна застосувати також і у випадку, коли абелеві ідеали мають менший ранг, але це ймовірно дозволить отримати лише інформацію про більш грубу структуру досліджуваних алгебр Лі.

Розділ 3

Нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями

Результати цього розділу були опубліковані у статті [63].

Нехай $\mathbb{K}$ — довільне алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленів від n змінних. Кожен скінченновимірний модуль V над $\mathbb{K}[X]$ визначає n попарно комутуючих матриць $A_1, \ldots, A_n$, які задають дію елементів $x_1, \ldots, x_n$ алгебри $\mathbb{K}[X]$ на V у фіксованому базисі простору V. Задача класифікації таких наборів $(A_1, \ldots, A_n)$ квадратних матриць з точністю до подібності є дикою при $n \geqslant 2$ (див. [22]) і тому задача класифікації скінченновимірних (над $\mathbb{K}$) модулів над алгеброю $\mathbb{K}[X]$ також є дикою. Природнім обмеженням на модулі V над $\mathbb{K}[X]$ є умова одновимірністі їх цоколя (це еквівалентно тому, що модуль V містить єдиний мінімальний підмодуль). Природнім прикладом такого модуля є векторний простір $T_n := \mathbb{K}[X]$ над полем $\mathbb{K}$ з наступною дією $\mathbb{K}[X]$ на T_n: $x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$ для $f \in T_n$ (цей модуль нескінченновимірний, але всі його скінченновимірні підмодулі мають одновимірні цоколі). В роботі [23] вивчалися скінченновимірні підмодулі модуля T_2, там вони називалися поліноміально трансляційними. Властивості модулів над поліноміальними кільцями вивчалися в роботах [52, 59]. Відзначимо також, що ендоморфізми модулів над кільцем многочленів від однієї змінної вивчались в роботі [4].

Для зручності модуль V над поліноміальним кільцем $\mathbb{K}[X]$ будемо називати нільпотентним, якщо існує таке натуральне число k, що $(\mathbb{K}_0[X])^k v = 0$ для всіх $v \in V$, де $\mathbb{K}_0[X]$ — ідеал із $\mathbb{K}[X]$, який складається із многочленів з нульовим сталим членом. Згадані вище скінченновимірні поліноміальні трансляційні модулі є, очевидно, нільпотентними.

Основні результати роботи: в теоремі 1 показано, що кожен нільпотентний скінченновимірний модуль з одновимірним цоколем ізоморфний деякому підмодулю із T_n. Цей результат переноситься і на ненільпотентні модулі з одновимірним цоколем. Доведено, що кожен скінченновимірний модуль з одновимірним цоколем ізоморфно вкладається в модуль $D_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ для деяких $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (див., Наслідок 3.3). Досліджено групу автоморфізмів $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n і його скінченновимірних підмодулів. Зокрема доведено, що $\mathrm{Aut}(T_n) \simeq \mathbb{K}[[X]]^*$, де $\mathbb{K}[[X]]^*$ — мультиплікативна група алгебри $\mathbb{K}[[X]]$ формальних степеневих рядів від n змінних (див. теорема 3.14). Звідси випливає, що в T_n лежить точно одна ізоморфна копія кожного скінченновимірного нільпотентного $\mathbb{K}[X]$-модуля з одновимірним цоколем (Наслідок 3.13).

Позначення в роботі стандартні. Основне поле $\mathbb{K}$ характеристики нуль, $\mathbb{K}_0[X]$ — ідеал із $\mathbb{K}[X]$, породжений змінними $x_1, \dots, x_n$, $\mathbb{K}[[X]] := \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ — кільце формальних степеневих рядів від n змінних. Нагадаємо, що цоколем $\mathrm{Soc}(M)$ модуля M називається сума всіх його мінімальних підмодулів. Модуль V над алгеброю $\mathbb{K}[X]$ будемо називати нільпотентним, якщо $(\mathbb{K}_0[X])^k V = 0$ для деякого натурального k. Модуль V називається локально нільпотентним, якщо для довільних $a \in \mathbb{K}_0[X], v \in V$ існує таке натуральне число $k = k(a, v)$, що виконується рівність $a^k v = 0$. Для нільпотентних скінченновимірних $\mathbb{K}[X]$-модулів цоколь складається з перетину ядер $\bigcap_{i=1}^n \ker S_i$, де S_i — лінійний оператор на модулі, індукований множенням на елемент $x_i \in \mathbb{K}[X]$. Якщо цоколь $\mathrm{Soc}(V)$ одновимірний, то це означає, що V містить тільки один одновимірний підмодуль. $\mathbb{K}$-алгебру всіх ендоморфізмів модуля V будемо позначати через $\mathrm{End}(V)$. Якщо V — модуль над алгеброю $\mathbb{K}[X]$ і θ — автоморфізм алгебри $\mathbb{K}[X]$, то через V_θ будемо позначати "підкручений" $\mathbb{K}[X]$-модуль, дія на якому задається за правилом: $f \circ v = \theta(f) \cdot v, \ f \in \mathbb{K}[X], v \in V$, де в правій частині крапкою позначено множення елементів із V на елементи із $\mathbb{K}[X]$.

3.1 Універсальний модуль з одновимірним цоколем над поліноміальним кільцем

Нагадаємо, що через T_n позначено $\mathbb{K}[X]$-модуль на векторному просторі $\mathbb{K}[X]$ з дією твірних x_i кільця на T_n за правилом: $x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$, $i = 1, \ldots, n$, $f \in T_n$. Легко бачити, що T_n — локально нільпотентний $\mathbb{K}[X]$-модуль і $\mathrm{Soc}(T_n) = \mathbb{K}[1]$ — одновимірний підмодуль. Наступне твердження є відомим, його можна вивести із стандартних фактів про когомології деРама.

Лема 3.1 (див. [46, Lemma 2.5.3]). *Нехай многочлени $f_1, \ldots, f_k$, $k \leqslant n$ із $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ задовольняють умову $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \ldots, k$. Тоді існує $h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ такий, що $\frac{\partial h}{\partial x_i} = f_i$, $i = 1, \ldots, k$. Многочлен h визначається многочленами $f_1, \ldots, f_k$ однозначно з точністю до доданку з $\mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$.*

Наступне твердження показує, що T_n містить ізоморфну копію кожного скінченновимірного нільпотентного модуля з одновимірним цоколем.

Теорема 3.2. *Нехай V — скінченновимірний нільпотентний $\mathbb{K}[X]$-модуль із одновимірним цоколем. Тоді модуль V ізоморфно вкладається в $\mathbb{K}[X]$-модуль T_n.*

Доведення. Індукція по $k = \dim_{\mathbb{K}} V$. Якщо $k = 1$, то $V = K\langle v\rangle$ для довільного ненульового елемента $v \in V$. Вкладення $\varphi\colon V \to T_n$ задаємо за правилом $\varphi(v) = 1$ і далі за лінійністю. Нехай $\dim_{\mathbb{K}} V = k > 1$ і W — який-небудь підмодуль із V ковимірності 1 в V (з огляду на нільпотентність модуля V такий підмодуль існує). Візьмем довільний елемент $v_0 \in V \setminus W$. Тоді $x_i v_0 \neq 0$ для деякого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Дійсно, в протилежному випадку $\mathbb{K}\langle v_0\rangle$ — одновимірний підмодуль, який збігається з цоколем модуля V. Цоколь $\mathrm{Soc}(V)$ модуля V одновимірний, і тому $\mathrm{Soc}(V) = \mathbb{K}\langle v_0\rangle$, що неможливо, бо $\mathrm{Soc}(V)$, очевидно, міститься в W. Отримана суперечність показує, що для деякого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ маємо $x_i v_0 \neq 0$. За індуктивним припущенням існує ізоморфізм $\varphi\colon W \to M$, де M — деякий підмодуль із T_n. Позначимо через S_i лінійні оператори на V, які індуковані множенням V на x_i, тобто

$$S_i(v) = x_i v, \quad v \in V, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тоді $S_1, \dots, S_n$ — попарно комутуючі нільпотентні оператори на V і $\bigcap_{i=1}^{n} \ker S_i$ — одновимірний підмодуль, який збігається з цоколем $\mathrm{Soc}(V)$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} V/W = 1$, то $S_i(v_0) \in W$, $i = 1 \dots, n$. Як наслідок отримаємо включення $\varphi(S_i(v_0)) \in M$, $i = 1, \dots n$ і $\varphi(S_i(v_0))$ многочлени від $x_1, \dots x_n$. Позначимо $f_i = \varphi(S_i(v_0))$. Оскільки φ — ізоморфізм $\mathbb{K}[X]$-модулів, то виконуються рівності

$$\varphi(S_i(S_j(v_0))) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(S_j(v_0))\right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$
$$\varphi(S_j(S_i(v_0))) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi(S_i(v_0))\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Оскільки $S_i S_j = S_j S_i$, то мають місце ріності

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Це означає, що для векторного поля $\vec{v} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ на $\mathbb{K}^n$ виконуються умови існування потенціалу. За лемою 3.1 існує многочлен $h \in \mathbb{K}[X]$ такий, що $\frac{\partial h}{\partial x_i} = f_i, i = 1, \dots, n$. Але тоді, як неважко переконатися, $M + \mathbb{K}\langle h \rangle$ — підмодуль модуля T_n. Легко бачити, що $h \notin M$. Дійсно, нехай це не так і $h \in M$. Позначимо $v_1 = \varphi^{-1}(h) \in W$ і зауважимо, що φ^{-1} — ізоморфізм $\mathbb{K}[X]$-модулів M і W. Тому виконуються рівності

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = S_i(\varphi^{-1}(h)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Але з іншого боку маємо

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = \varphi^{-1}(f_i) = S_i(v_0),$$

і тому $S_i(v_1 - v_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$. Останнє означає, що $v_1 - v_0 \in \mathrm{Soc}(V) = \mathbb{K}\langle v_0 \rangle$, і тому $v_1 - v_0 \in W$. Оскільки $v_1 \in W$ за попереднім, то і $v_0 \in W$, що суперечить вибору елемента v_0. Отримана суперечність показує, що $h \notin M$. Визначимо $\mathbb{K}$-лінійне відображення

$$\psi\colon\ V = W + \mathbb{K}\langle v_0\rangle \to M + \mathbb{K}\langle h\rangle$$

за правилом:

$$\psi(w) = \varphi(w), \quad w \in W, \quad \psi(v_0) = h$$

і далі за лінійністю.

Безпосередньо перевіряється, що ψ — ізоморфізм $\mathbb{K}[X]$-модуля V на підмодуль $M + \mathbb{K}\langle h\rangle$ із $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n. Теорему доведено. □

Теорема 1 легко переноситься і на ненільпотентні модулі. Для цього розглянемо векторний простір $P_n := \mathbb{K}[[X]]$ алгебри формальних степеневих рядів і визначимо на ньому дію поліноміальної алгебри $\mathbb{K}[X]$ таким самим чином як і для модуля T_n. В отриманому $\mathbb{K}[X]$-модулі P_n позначимо через $D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ підмодуль вигляду

$$D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \exp(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)T_n,$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — довільні елементи поля $\mathbb{K}$. Легко бачити, що тоді $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — власні числа операторів, індукованих $x_1, \ldots, x_n$ відповідно на $D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$.

Наслідок 3.3. *Нехай V — скінченновимірний $\mathbb{K}[X]$-модуль з одновимірним цоколем. Тоді V — ізоморфний підмодулю модуля $D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ для деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.*

Доведення. Позначимо через $\mathbb{K}\langle v_0\rangle$ цоколь $\mathbb{K}[X]$-модуля V. Тоді $x_i v_0 = \alpha_i v_0$ для деяких $\alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n$. Розглянемо автоморфізм θ кільця многочленів $\mathbb{K}[X]$, заданий за правилом $x_i \mapsto x_i - \alpha_i$ і нехай V_θ — відповідний підкручений $\mathbb{K}[X]$-модуль. Легко бачити, що $\mathbb{K}[X]$-модуль V_θ нільпотентний (бо елементи $x_1, \ldots, x_n$ із $\mathbb{K}[X]$ індукують на V_θ нільпотентні лінійні оператори). За теоремою 3.2 $\mathbb{K}[X]$-модуль V_θ ізоморфний деякому підмодулю W із $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n. Розглянемо $\mathbb{K}[X]$-модуль $\exp(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)W$, який є підмодулем модуля $D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Безпосередньо перевіряється, що $\exp(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)W \simeq W_\sigma$, де σ

— автоморфізм кільця $\mathbb{K}[X]$, заданий за правилом $\sigma(x_i) = x_i + \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$. Але тоді $W_\sigma \simeq (V_\theta)_\sigma \simeq V_{\theta\sigma} \simeq V$. Таким чином $V \simeq W_\sigma$, для автоморфізма σ і W_σ — підмодуль модуля $\exp(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) T_n = D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. □

Зауваження 3.4. Використовуючи лему Цорна, можна довести аналогічні твердження для локально нільпотентних модулів над $\mathbb{K}[X]$ з одновимірним цоколем, які мають зліченну розмірність над $\mathbb{K}$.

3.2 Група автоморфізмів модуля T_n

Лема 3.5. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{End}(T_n)$. *Тоді* $\deg_{x_i} \varphi(f) \leqslant \deg_{x_i} f$ *для довільного многочлена* $f \in T_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Оскільки φ — ендоморфізм модуля T_n, то для довільного $f \in T_n$ маємо

$$\varphi\left(\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f\right) = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k}\varphi(f), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а отже для довільного $f \in T_n$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}\deg_{x_i} \varphi(f) &= \max\left\{k \geqslant 0\colon \frac{\partial^k}{\partial x_i^k}\varphi(f) \neq 0\right\} = \\ &= \max\left\{k \geqslant 0\colon \varphi(\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f) \neq 0\right\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{k \geqslant 0\colon \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f \neq 0\} = \deg_{x_i} f, \quad i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$ □

Введемо позначення, використовуючи мультиіндекси:

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!, \quad x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Теорема 3.6. *Лінійне перетворення* φ *векторного простору* $\mathbb{K}[X]$ *є ендоморфізмом* $\mathbb{K}[X]$*-модуля* T_n *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\varphi = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ \alpha_i \geqslant 0}} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathbb{K}$$

при цьому виконуються рівності

$$c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}=\varphi\left(\frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdots\frac{x_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}\right)(0).$$

Доведення. Необхідність. Нехай лінійне перетворення φ є ендоморфізмом $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n. Розглянемо відображення $N\colon T_n\to T_n$ задане за правилом:

$$N(f)=\varphi(f)-\sum_{\alpha\colon\alpha_i\geqslant 0}\varphi\left(\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right)(0)\,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f,\quad f\in T_n$$

(це відображення коректно визначене, враховуючи локальну нільпотентність лінійних операторів $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ на T_n). Покажемо, що це відображення є тотожньо нульовим, використовуючи індукцію за тотальним степенем многочлена f. Нехай спочатку $\deg f=0$. Маємо $N(f)=\varphi(f)-\varphi(f)(0)=0$, оскільки за лемою 3.5 ендоморфізм φ не збільшує степінь многочлена. Нехай тепер $\deg f>0$. Відображення N є ендоморфізмом $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n (як лінійна комбінація ендоморфізмів). Маємо

$$\frac{\partial}{\partial x_i}N(f)=N(\frac{\partial}{\partial x_i}f)=0,\quad i=1,\ldots n,$$

за припущенням індукції, отже

$$\begin{aligned}N(f)=N(f)(0)&=\varphi(f)(0)-\sum_{\alpha\colon\alpha_i\geqslant 0}\varphi\left(\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right)(0)\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0)=\\&=\varphi(f)(0)-\sum_{\alpha\colon\alpha_i\geqslant 0}\varphi\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right)(0)=\\&=\varphi\left(f-\sum_{\alpha\colon\alpha_i\geqslant 0}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0)\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right)(0).\end{aligned}$$

З останньої тотожності та формули Тейлора для многочлена f випливає, що $N(f)=0$, що і потрібно було довести. Достатність очевидна. □

Наслідок 3.7. *Лінійне перетворення φ лінійного простору $\mathbb{K}[X]$ є автоморфізмом $\mathbb{K}[X]$-модуля T_n тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\varphi=\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \alpha_i\geqslant 0}}c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

де $c_{(0,\dots,0)} \neq 0$.

Наслідок 3.8. *Підмодулі* $\mathbb{K}[X]$*-модуля* T_n *інваріантні відносно групи автоморфізмів модуля* T_n.

Лема 3.9. *Нехай* V *— модуль над поліноміальною алгеброю* $\mathbb{K}[X]$ *і* θ *— автоморфізм алгебри* $\mathbb{K}[X]$. *Тоді* $\operatorname{Aut}(V) = \operatorname{Aut}(V_\theta)$, *де* V_θ *— підкручений модуль.*

Доведення. Зауважимо, що векторний простір для модулів V і V_θ один і той самий — це V. Тому $\operatorname{Aut}(V)$ і $\operatorname{Aut}(V_\theta)$ — підгрупи повної лінійної групи $GL(V)$. Нехай $\varphi \in \operatorname{Aut}(V_\theta)$ — довільний автоморфізм. Тоді для довільного елементів $a \in \mathbb{K}[X]$ і $v \in V_\theta$ виконується рівність: $\varphi(a \circ v) = a \circ \varphi(v)$. Враховуючи закон множення в модулі V_θ звідси отримаємо $\varphi(\theta(a) \cdot v) = \theta(a) \cdot \varphi(v)$, де крапкою позначено множення елементів із V на елементи із $\mathbb{K}[X]$. Якщо елемент a пробігає всю алгебру $\mathbb{K}[X]$, то елемент $\theta(a)$ також пробігає всю алгебру $\mathbb{K}[X]$. Тому позначаючи елемент $\theta(a)$ через b, із останнього співвідношення отримаємо $\varphi(b \cdot v) = b \cdot \varphi(v)$ для довільних $b \in \mathbb{K}[X]$ і $v \in V_\theta$. Це означає, що φ — автоморфізм модуля V. Таким чином, $\operatorname{Aut}(V_\theta) \subseteq \operatorname{Aut}(V)$. Аналогічно можна довести, що $\operatorname{Aut}(V) \subseteq \operatorname{Aut}(V_\theta)$. □

Для зручності будемо записувати мономи із $\mathbb{K}[X]$ у вигляді $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$, де $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — мультиіндекс. Наступне твердження є добре відомим.

Лема 3.10. *Нехай* $\mathbb{K}_0[X]$ *— адитивна група степеневих рядів з нульовим вільним членом із* $\mathbb{K}[[X]]$, *і нехай* $\mathbb{K}_1[X]^*$ *— мультиплікативна група степеневих рядів з вільним членом рівним* 1. *Тоді* $\exp\colon \mathbb{K}_0[X] \to \mathbb{K}_1[X]^*$ *— груповий ізоморфізм, а отже*

$$\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}^* \times \exp(\sum_{\lambda, \lambda \neq 0} \mathbb{K}x^\lambda) \simeq \mathbb{K}^* \times \prod_{\lambda} \mathbb{K}.$$

Лема 3.11. *Нехай* M, N *— ізоморфні власні підмодулі модуля* T_n *і* $\varphi\colon M \to N$ *— який-небудь ізоморфізм. Тоді існують такі підмодулі* $M_1, N_1 \subset T_n$, *що* $M_1 \supsetneq M$, $N_1 \supsetneq N$ *і ізоморфізм* $\varphi_1\colon M_1 \to N_1$ *такий, що* $\varphi_1|_M = \varphi$.

Доведення. Оскільки $M \neq T_n$, то існують мономи, що не належать M. Виберемо який-небудь моном $x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n} \in T_n \setminus M$ найменшого (тотального) степеня. Нехай

$$g_i = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Оскільки φ — ізоморфізм підмодулів, то за означенням g_i маємо

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

а отже за лемою 3.1 про існування потенціалу існує поліном $g \in \mathbb{K}[X]$, такий що

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Зауважимо, що $g \notin N$. Дійсно, нехай це не так і $g \in N$. Позначимо $f = \varphi^{-1}(g)$. Тоді $f \in M$ і

$$\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}(f - x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi(f)) - g_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(g) - g_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Це означає, що

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f - x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

і тому $f = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} + C$, де $C \in \mathbb{K}$ — деяка константа. Оскільки кожен ненульовий підмодуль із T_n місить, очевидно, поле $\mathbb{K}$, то $x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} = f - C \in M$, що суперечить вибору цього монома. Отримана суперечність показує, що $g \notin N$. Покладемо

$$M_1 = M \oplus \mathbb{K}\langle x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\rangle, \quad N_1 = N \oplus \mathbb{K}\langle g\rangle.$$

Легко бачити, що M_1, N_1 — підмодулі із T_n. Визначимо лінійне відображення $\varphi_1\colon M_1 \to N_1$ за правилом: $\varphi_1(m) = \varphi(m)$, $m \in M$, $\varphi_1(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}) = g$ і далі за лінійністю. Безпосередня перевірка показує, що φ_1 — потрібний ізоморфізм модулів. $\square$

Теорема 3.12. *Нехай $M \subset T_n$ — власний підмодуль, $\varphi\colon M \to T_n$ — який-небудь мономорфізм. Тоді існує автоморфізм $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(T_n)$, такий що $\widetilde{\varphi}|_M = \varphi$.*

Доведення. Розглянемо множину Ψ всіх пар вигляду (V,ψ), де $V \supseteq M$ — підмодуль із T_n і $\psi\colon V \to T_n$ — мономорфізм такий, що $\psi|_M = \varphi$.

Введемо на цій множині частковий порядок наступним чином

$$(V_1,\psi_1) \preccurlyeq (V_2,\psi_2) \leftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \ \text{ і } \ \psi_2|_{V_1} = \psi_1.$$

Тоді для будь-якого ланцюга $Z \subseteq \Psi$ існує максимальний елемент (V^*,ψ^*), де

$$V^* = \bigcup_{(V,\psi)\in Z} V, \ \text{ і } \ \psi^*\colon V^* \to T_n$$

задане за правилом $\psi^*(v) = \psi(v)$ якщо $v \in V$, і $(V,\psi) \in Z$. За лемою Цорна в Ψ існує максимальний елемент $(\widetilde{V},\widetilde{\psi})$. Припустивши, що $\widetilde{V} \neq T_n$ та застосувавши лему 3.11, отримаємо суперечність з максимальністю елемента $(\widetilde{V},\widetilde{\psi})$. Тому $\widetilde{V} = T_n$. Далі, якщо $\widetilde{\psi}$ не є епіморфізмом, то, застосувавши лему 3.11 до $(\widetilde{\psi})^{-1}\colon \widetilde{\psi}(T_n) \to T_n$, отримаємо суперечність з тим фактом, що $\widetilde{\psi}$ є мономорфізмом. Таким чином, $\widetilde{\psi}$ є автоморфізмом модуля T_n і звуження $\widetilde{\psi}$ на підмодуль M збігається з мономорфізмом φ. □

Наслідок 3.13. *Якщо V_1 і V_2 підмодулі модуля T_n і $V_1 \neq V_2$, то модулі V_1 і V_2 неізоморфні.*

Підмодуль M модуля T_n будемо називати *мономіальним*, якщо він має базис над полем $\mathbb{K}$ із одночленів.

Теорема 3.14.

1. *Алгебра* $\mathrm{End}(T_n)$ *всіх ендоморфізмів модуля T_n ізоморфна алгебрі формальних степеневих рядів $\mathbb{K}[[X]]$ і тому група автоморфізмів* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *ізоморфна мультиплікативній групі $\mathbb{K}[[X]]^*$ алгебри $\mathbb{K}[[X]]$.*

2. *Група автоморфізмів скінченновимірного мономіального підмодуля M із T_n розмірності m над $\mathbb{K}$ ізоморфна прямому добутку $\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^+)^{m-1}$, де $\mathbb{K}^+$ — адитивна група поля $\mathbb{K}$.*

3. *Група автоморфізмів довільного скінченновимірного $\mathbb{K}[X]$-модуля V з одновимірним цоколем ізоморфна факторгрупі групи $\mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^+)^m$, для деякого $m \geqslant 0$.*

Доведення. Твердження 1 теореми випливає із теореми 3.6. Доведемо твердження 2. Нехай $\mathrm{Aut}_1(M)$ — група всіх автоморфізмів модуля M, які діють тотожньо на підмодулі $\mathbb{K}\langle 1\rangle \subseteq M$, також через $\mathrm{Aut}_1 T_n$ позначимо групу автоморфізмів, які діють тривіально на підмодулі $\mathbb{K}\langle 1\rangle \subseteq T_n$. Покажемо, що $\mathrm{Aut}_1(M) \simeq (\mathbb{K}^+)^{m-1}$, де $m = \dim_{\mathbb{K}} M$. Нехай $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — мультиіндекс і нехай $M = \mathbb{K}\langle x^{\lambda^1}, \ldots, x^{\lambda^m}\rangle$, де $\lambda^1, \ldots, \lambda^m$ — множина мультиіндексів, яка визначає базис $\{x^{\lambda^1}, \ldots, x^{\lambda^m}\}$ мономіального модуля M. Неважко переконатися, що автоморфізм $\varphi = \sum_\lambda c_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ модуля T_n є тотожнім на M тоді і лише тоді, коли

$$c_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = (0, \ldots, 0), \\ 0, & \lambda \in \{\lambda^1, \ldots, \lambda^m\} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}. \end{cases}$$

Легко бачити, що кожен такий автоморфізм записується у вигляді

$$\varphi = \exp\left(\sum_{\lambda \neq \{\lambda^1, \ldots, \lambda^m\}} c_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right),$$

і навпаки автоморфізми такого вигляду такого вигляду є тотожніми на M. Ці автоморфізми складають ядро $\mathrm{Ker}\,\psi$ природнього гомоморфізму (звуження) $\psi\colon \mathrm{Aut}_1(T_n) \to \mathrm{Aut}_1(M)$. З огляду на лему 3.10 підгрупі $\mathrm{Ker}\,\psi$ при ізоморфізмі $\log(1-x)\colon \mathbb{K}_1[X]^* \to \mathbb{K}_0[X]$ відповідає підгрупа G адитивної групи $\mathbb{K}_0[X]$ з базисом із мономів x^λ, $\lambda \notin \{\lambda^1, \ldots, \lambda^m\}, \lambda \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Легко бачити, що $\mathbb{K}_0[X]/G \simeq (\mathbb{K}^+)^{m-1}$. Звідси отримаємо, що $\mathrm{Aut}_1(M) \simeq (\mathbb{K}^+)^{m-1}$. Але тоді $\mathrm{Aut}(M) \simeq \mathbb{K}^* \times (\mathbb{K}^+)^{m-1}$. Доведемо твердження 3. Легко бачити, що кожен скінченновимірний підмодуль W модуля T_n міститься в деякому скінченовимірному мономіальному підмодулі $\overline{W}$ із T_n. Використовуючи теорему 3.12 можна показати, що $\mathrm{Aut}(W)$ є фактор-групою групи $\mathrm{Aut}(\overline{W})$. Звідси з урахуваннями леми 3.9 і п. 2 теореми випливає п. 3 теореми. $\square$

3.3 Висновки

У цьому розділі було показано, що кожен скінченновимірний нільпотентний модуль над кільцем поліномів від n змінних з одновимірним цоколем вкладається у модуль T_n, тобто модуль T_n є в деякому сенсі універсальним. Також, була досліджена будова групи автоморфізмів модуля T_n.

Хоча в розділі були розглянуті не тільки нільпотентні модулі, все рівно були накладені суттєві обмеження на форму модуля. Тому, природнім напрямом подальшого дослідження було б поширення результатів про вкладення на ширшиу сім'ю модулів над кільцем многочленів. Або можна спробувати знайти гарну сім'ю модулів елементи якої б розкладалися в суму модулів типу T_n або D_λ.

Висновки

У дисертації було отримано наступні нові результати, пов'язані з вивченням нільпотентних алгебр Лі диференціювань.

- Доведено, що кожне бездивергентне диференціювання поля алгебраїчних функцій від 3 змінних розкладається у суму двох якобіанного диференціювання.

- Досліджено будову скінченновимірних розв'язних алгебр Лі L диференціювань кільця многочленів від трьох змінних з абелевими ідеалами рангу не менше двох. Зокрема, було встановлено, що у випадку рангу два алгебра Лі вкладається в загальну афінну алгебру Лі $\mathfrak{aff}_3(\mathbb{K})$. В іншому випадку вона має структуру розширення підалгебри $\mathfrak{aff}_2(\mathbb{F})$ за допомогою підалгебри розмірності не більше двох, де F — поле констант абелевого ідеалу.

- Детально досліджена будова нільпотентних підалгебр $W(A)$ з центром корангу $\leqslant 2$. Також було показано, що кожна така підалгебра може бути ізоморфно вкладена в трикутну алгебру Лі $u_n(F)$, де F — поле констант підалгебри.

- Показано, що кожен скінченновимірний нільпотентний модуль над кільцем поліномів від n змінних з одновимірним цоколем вкладається у модуль T_n, тобто модуль T_n є в деякому сенсі універсальним. Також, була досліджена будова групи автоморфізмів модуля T_n.

- Досліджена будова централізаторів поліноміальних диференціювань із ядром в раціональних функціях ступеня трансцендентності один.

- Досліджені централізатори діагоналізовних лінійних диференціювань.

Список використаних джерел

[1] I. V. Arzhantsev, E. A. Makedonskii, and A. P. Petravchuk, *Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one*, Ukrainian Math. J. **63** (2011), no. 5, 827–832.

[2] V. V. Bavula, *Lie algebras of triangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **77** (2013), no. 6, 3–44.

[3] ———, *The groups of automorphisms of the Lie algebras of triangular polynomial derivations*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 5, 829–851.

[4] Paul Best, Marco Gualtieri, and Patrick Hayden, *Orbits of the centralizer of a linear operator*, J. Lie Theory **22** (2012), no. 4, 1039–1048. MR 3052681

[5] Vitalij M. Bondarenko and Anatoliy P. Petravchuk, *Wildness of the problem of classifying nilpotent lie algebras of vector fields in four variables*, Linear Algebra and its Applications **568** (2019), 165–172, In Honor of Vladimir Sergeichuk.

[6] Vitalij M. Bondarenko and Anatoliy P. Petravchuk, *Wildness of the problem of classifying nilpotent Lie algebras of vector fields in four variables*, Linear Algebra Appl. **568** (2019), 165–172. MR 3958130

[7] E. Chapovsky and O. Shevchyk, *On divergence and sums of derivations*, Algebra Discrete Math. **24** (2017), no. 1, 99–105.

[8] Ie. Chapovskyi, D. Efimov, and A. Petravchuk, *Solvable lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables*, Прикладні проблеми механіки і математики **16** (2018), no. 1, 7–13.

[9] Yevhenii Chapovskyi, *On divergence-free and jacobian derivations*, 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. July 03–07, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 2017, p. 29.

[10] Yevhenii Chapovskyi and Anatoly Petravchuk, *Nilpotent modules over polynomial rings*, Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача. 22–25 травня 2018 року, Львів, Україна, Тези доповідей, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів, 2018, p. 258.

[11] ______, *Metabelian nilpotent lie algebras of derivations*, International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv. July 14–17, 2020, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, National University of "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, 2020, p. 29.

[12] ______, *Centralizers of linear derivations*, The international algebraic conference "At the End of the Year" 2021. December 27-28, 2021, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 2021, p. 10.

[13] Y. Chapovskyi, D. Efimov, and A. Petravchuk, *Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients*, Proc. Int. Geom. Cent. **14** (2021), no. 4, 257–270.

[14] Y. Y. Chapovskyi, L. Z. Mashchenko, and A. P. Petravchuk, *Nilpotent Lie algebras of derivations with the center of small corank*, Carpathian Math. Publ. **12** (2020), no. 1, 189–198.

[15] Arjeh M. Cohen and Jan Draisma, *From Lie algebras of vector fields to algebraic group actions*, Transform. Groups **8** (2003), no. 1, 51–68.

[16] D. Daigle, *On some properties of locally nilpotent derivations*, J. Pure Appl. Algebra **114** (1997), no. 3, 221–230.

[17] Daniel Daigle and Gene Freudenburg, *A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension* 5, J. Algebra **221** (1999), no. 2, 528–535.

[18] Daniel Daigle and Shulim Kaliman, *A note on locally nilpotent derivations and variables of* $k[X, Y, Z]$, Canad. Math. Bull. **52** (2009), no. 4, 535–543.

[19] H. G. J. Derksen, *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra **84** (1993), no. 1, 13–16.

[20] Gene Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 136, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[21] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices. Vol. 1*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1998, Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1959 translation. MR 1657129

[22] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite-dimensional space*, Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), no. 4, 81–82.

[23] Artemio González-López, Niky Kamran, and Peter J. Olver, *Lie algebras of differential operators in two complex variables*, Amer. J. Math. **114** (1992), no. 6, 1163–1185.

[24] ———, *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc. (3) **64** (1992), no. 2, 339–368.

[25] J. Grabowski, *Isomorphisms and ideals of the Lie algebras of vector fields*, Invent. Math. **50** (1978/79), no. 1, 13–33.

[26] Nathan Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), no. 2, 206–224.

[27] ______, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10, Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.

[28] C. R. Jordan and D. A. Jordan, *Lie rings of derivations of associative rings*, J. London Math. Soc. (2) **17** (1978), no. 1, 33–41.

[29] ______, *The Lie structure of a commutative ring with a derivation*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), no. 1, 39–49.

[30] D. A. Jordan, *Simple Lie rings of derivations of commutative rings*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), no. 3, 443–448.

[31] ______, *On the ideals of a Lie algebra of derivations*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), no. 1, 33–39.

[32] I. S. Klymenko, S. V. Lysenko, and A. P. Petravchuk, *Lie algebras of derivations with large abelian ideals*, Algebra Discrete Math. **28** (2019), no. 1, 123–129. MR 4037223

[33] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54, Academic Press, New York-London, 1973.

[34] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043

[35] Sophus Lie, *Theorie der transformationsgruppen abschn. 3*, Teubner, 1893 (ger).

[36] Sophus Lie, *Sophus Lie's 1880 transformation group paper*, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. I, Math Sci Press, Brookline, Mass., 1975.

[37] L. Makar-Limanov, *Locally nilpotent derivations of affine domains*, Affine algebraic geometry, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 221–229.

[38] Ie. Makedonskyi and A. Petravchuk, *On finite dimensional Lie algebras of planar vector fields with rational coefficients*, Methods Funct. Anal. Topology **19** (2013), no. 4, 376–388.

[39] Ie. O. Makedonskyi and A. P. Petravchuk, *On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations*, J. Algebra **401** (2014), 245–257.

[40] Ievgen Makedonskyi, *On noncommutative bases of free modules of derivations over polynomial rings*, Comm. Algebra **44** (2016), no. 1, 11–25. MR 3413668

[41] Masayoshi Miyanishi, *G_a-action of the affine plane*, Nagoya Math. J. **41** (1971), 97–100.

[42] ———, *Normal affine subalgebras of a polynomial ring*, Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984), Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 37–51.

[43] Joel Nagloo, Alexey Ovchinnikov, and Peter Thompson, *Commuting planar polynomial vector fields for conservative newton systems*, Communications in Contemporary Mathematics **22** (2019).

[44] Andrzej Nowicki, *The Lie structure of a commutative ring with a derivation*, Arch. Math. (Basel) **45** (1985), no. 4, 328–335.

[45] ———, *Commutative bases of derivations in polynomial and power series rings*, J. Pure Appl. Algebra **40** (1986), no. 3, 275–279.

[46] ———, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1994.

[47] ———, *The fourteenth problem of Hilbert for polynomial derivations*, Differential Galois theory (Będlewo, 2001), Banach Center Publ., vol. 58, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2002, pp. 177–188.

[48] A. P. Petravchuk, *On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields*, Algebra Discrete Math. **22** (2016), no. 1, 116–128. MR 3573548

[49] A. P. Petravchuk and V. V. Stepukh, *On bases of Lie algebras of derivations*, Visnyk of Taras Shechenko National University of Kyiv Ser. Phys-Math. **2015** (2015), no. 2, 28–32.

[50] Anatoliy Petravchuk and Oleksandr Iena, *On closed rational functions in several variables*, Algebra and Discrete Mathematics (2007), 115 – 124.

[51] Anatoliy Petravchuk, O. Shevchyk, and K. Sysak, *Locally nilpotent lie algebras of derivations of integral domains*, 09 2017, pp. 7–15.

[52] Daniel Quillen, *Projective modules over polynomial rings*, Invent. Math. **36** (1976), 167–171.

[53] Rudolf Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plan affine*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **267** (1968), A384–A387.

[54] Joseph Fels Ritt, *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950.

[55] A. Schinzel, *Polynomials with special regard to reducibility*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 77, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, With an appendix by Umberto Zannier. MR 1770638

[56] M. E. Shanks and Lyle E. Pursell, *The Lie algebra of a smooth manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 468–472.

[57] Thomas Siebert, *Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic* 0, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 271–286.

[58] Ian Stewart, *Lie algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 127, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[59] A. A. Suslin, *Projective modules over polynomial rings are free*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **229** (1976), no. 5, 1063–1066.

[60] Kateryna Sysak, *On nilpotent Lie algebras of derivations with large center*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 1, 153–162. MR 3537490

[61] Arno van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[62] Д. В. Лейкин В. М. Бухштабер, *Полиномиальные алгебры Ли*, Функц. анализ и его прил. **36** (2002), no. 4, 267–280.

[63] А. Петравчук, І. Клименко, Є. Чаповський, and М. Сидоров, *Нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями.*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка **41** (2020), no. 1, 20–25.

[64] Катерина Сисак, *Локально нільпотентні алгебри лі диференціювань комутативних кілець*, Ph.D. thesis, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2018.

ДОДАТОК 1

Список опублікованих праць

1. Chapovskyi, Y. Y., Shevchyk O. M.: On divergence and sums of derivations. Algebra and Discrete Mathematics **24**(1), 54-60 (2017).

2. Chapovskyi, Y. Y., Maschenko, L. Z., Petravchuk, A.P.: Nilpotent Lie algebras of derivations with the center of small corank. Carpathian Math. Publ. **12**(1), 189–198 (2020).

3. Петравчук, А., Клименко, І., Чаповський, Є., Сидоров, М.: Нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка **1**, 20-25 (2020).

4. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proceedings of the International Geometry Center **14** (4) , 257-270 (2022).

5. Chapovskyi, Y. Y., Efimov, D. I., Petravchuk, A. P.: Solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables Прикл. проблеми механіки і математики **16**, 7–13 (2018).

Апробація результатів дисертації

1. Yevhenii Chapovskyi, On divergence-free and jacobian derivations, 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. July 03–07, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 2017, p. 29.

2. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача (Львів, Україна, 22 – 25 травня 2018 року)

3. International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine, July 14–17, 2020)

4. The international algebraic conference "At the End of the Year" 2021 (Kyiv, Ukraine, December 27-28, 2021)