Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Давидович Василь Васильович

УДК 517.95

Системи рівнянь реакції-дифузії: умовні симетрії, точні розв'язки та їх властивості

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Черніга Роман Михайлович
доктор фіз.–мат. наук, професор

Київ — 2013

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ДРЧП	диференціальне рівняння з частинними похідними
ДСЛВ	дифузійна система Лотки–Вольтера
ЗДР	звичайне диференціальне рівняння
МАІ	максимальна алгебра інваріантності
РД	реакції-дифузії
СВР	система визначальних рівнянь
ФЗП	формо-зберігаючі перетворення

Вступ

Актуальність теми. Протягом останніх десятиліть відбувається значне зростання кількості робіт, присвячених моделюванню процесів, які відбуваються в живій природі. Основою таких математичних моделей є нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) та системи таких рівнянь. Важливе місце серед вказаних систем належить системам рівнянь реакції-дифузії (РД), які широко використовуються при математичному моделюванні різноманітних процесів у фізиці [33], біології [39, 79, 80], екології [86] тощо.

Поштовхом до інтенсивного застосування систем рівнянь РД та їх детального дослідження було опублікування роботи А. Тюрінґа (A. Turing) [100], яка містить революційну ідею про механізм морфогенезу, а саме: при певних додаткових умовах процес дифузії може дестабілізувати просторово-однорідну структуру. Іншими словами, процес дифузії може взаємодіяти з хімічним реактивним процесом таким чином, що це може стимулювати розвиток і ріст неоднорідних форм і структур в організмі.

Оскільки системи рівнянь РД, які мають прикладне значення, як правило, є нелінійними, то при їх інтегруванні не можна використовувати такі класичні методи, як метод Фур'є, метод інтегральних перетворень, метод функції Ґріна, які ґрунтуються на принципі лінійної суперпозиції розв'язків. Таким чином, задача побудови точних розв'язків є однією з найактуальніших задач, які винникають при досліджені систем рівнянь РД аналітичними методами.

При побудові точних розв'язків нелінійних систем ДРЧП часто використовують сучасні теоретико-групові методи, які ґрунтуються на класичному методі Лі. Метод Лі інтенсивно застосовувався для дослідження систем ДРЧП типу РД з початку 80-х років минулого століття [105]. Зокрема, в роботах [26,27,63] знайдено класи рівнянь РД, які інваріантні відносно групи перетворень Ґалілея та їх узагальнень. У випадку двокомпонентних систем рівнянь РД задача вичерпного опису симетрій Лі бере свій початок з роботи [105], проте повністю була розв'язана лише в цьому столітті [49–51,81–83].

Важливим узагальненням методу Лі є метод умовної симетрії (некласичної симетрії), який вперше був запропонований в 1969 році в роботі Дж. Блумана (G. Bluman) та Дж. Коула (G. Cole) [38] і отримав широке застосування після його фактичного перевідкриття українським математиком В. І. Фущичем та його учнями [25] (які використовували термінологію Q-умовна симетрія), і незалежно П. Олвером (P. Olver) та П. Розенау (P. Rosenau) [89] (останні ввели поняття слабкої симетрії). Зауважимо, що В. І. Фущичем та його учнями були також запропоновані деякі інші типи неліївських симетрій (див. наприклад [22–25,103]).

На сьогоднішній день знаходження умовних симетрій для нелінійних ДРЧП та систем ДРЧП є одним із найефективніших методів, які використовуються для побудови точних розв'язків. Проте, на відміну від скалярних рівнянь, для яких задача пошуку Q-умовних симетрій розглядалася в багатьох роботах (див., наприклад [43,54,91] та цитовану там літературу), робіт, присвячених пошуку таких симетрій для систем, є небагато. Зокрема, застосування методу умовної симетрії до систем ДРЧП можна знайти в роботах [16,20,31,36,55,57,78].

Оскільки проблема побудови Q-умовних симетрій для систем ДРЧП є складною, що обумовлено необхідністю інтегрування нелінійної перевизначеної системи ДРЧП (системи визначальних рівнянь (СВР)) для побудови операторів у явному вигляді, то навіть для класу двокомпонентних систем рівнянь РД вона досі є невирішеною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертації виконувалися протягом 2009–2012 рр. у відділі прикладних досліджень Інституту математики

НАН України в рамках тем “Дослідження моделей класичної, квантової, статистичної механіки та інших моделей природничих наук функціонально-аналітичними, симетрійними та алгебраїчними методами” (номер держреєстрації 0107U000935, 2007–2011 рр.) і “Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь” (номер держреєстрації 0110U008615, 2011–2015 рр.).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова операторів Q-умовної симетрії для дво- і трикомпонентних дифузійних систем Лотки–Вольтера (ДСЛВ) та двох класів нелінійних систем рівнянь РД; знаходження точних розв’язків ДСЛВ і деяких систем рівнянь РД; дослідження властивостей отриманих розв’язків та їх інтерпретація.

Об’єктом дослідження є нелінійні системи рівнянь РД.

Предметом дослідження є побудова Q-умовних симетрій та Q-умовних симетрій першого типу і точних розв’язків вказаних вище нелінійних систем.

Методи дослідження: у роботі застосовуються метод Блумана–Коула, метод Лі, методи інтегрування лінійних ДРЧП та звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), для візуалізації отриманих розв’язків використовувалися сучасні пакети програми Maple.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Побудовано нові оператори Q-умовної симетрії двокомпонентної ДСЛВ. Знайдено неліївські точні розв’язки і наведено їх біологічну інтерпретацію.

2. Проведено опис симетрій Лі та Q-умовних симетрій першого типу трикомпонентної ДСЛВ. За допомогою отриманих симетрій знайдено приклади її точних розв’язків.

3. Побудовано нові точні розв’язки однієї системи рівнянь РД типу

Лотки–Вольтера, досліджено їх властивості і наведено біологічну інтерпретацію.

4. Описано Q-умовні симетрії першого типу для широкого класу нелінійних систем рівнянь РД. Для системи рівнянь РД, що описує потік тонких плівок в'язкої рідини крізь пористе середовище, побудовано точні розв'язки та наведено їх фізичну інтерпретацію.

Практичне значення одержаних результатів. Більшість результатів мають теоретичний характер. Проте точні розв'язки, отримані для окремих систем, можуть знайти практичне застосування при математичному моделюванні біофізичних процесів і розв'язанні числовими методами відповідних крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівнику — Р. М. Чернізі. Отримання та доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

У роботах [28, 45–48] співавторові, Р. М. Чернізі, належить постановка задач і біологічна інтерпретація окремих отриманих результатів, а також написання вступних частин та висновків.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2010–2013, керівник семінару — чл.-кор. НАН України, проф. А.Г. Нікітін), на Міжнародній науковій конференції молодих вчених "Фізика низьких температур" (МКМВ-ФНТ-2010) (м. Харків, 7–11 червня 2010 р.), на Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (м. Київ, 8–10 червня 2011 р.), на Міжнародному семінарі до 75-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (м. Київ, 18–19 грудня 2011 р.), на XIV Міжнародній науковій конференції імені акад. М. Кравчука (м. Київ, 19–21 квітня 2012 р.), на V Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (м. Кам'янець-Подільський, 4–5 квітня 2012 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в десяти наукових працях, з них п'ять статей [3, 28, 45–47] у наукових фахових виданнях, один препринт [48] та чотири тези доповідей [4–6, 60].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 105 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 145 сторінок, з них список використаних джерел займає 12 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання дослідження та коротко викладено основні результати роботи.

Основна частина роботи складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації. Зокрема, в цей розділ включено роботи, що стосуються симетрій Лі двокомпонентних систем рівнянь РД зі сталими та несталими коефіцієнтами дифузії, а також публікації, які присвячені побудові Q-умовних симетрій систем рівнянь реакції-дифузії-конвекції та дослідженню систем рівнянь Лотки–Вольтера аналітичними методами.

Другий розділ присвячено знаходженню всіх можливих операторів Q-умовної симетрії першого типу [44] дво- і трикомпонентних ДСЛВ та побудові точних розв'язків таких систем.

Нами також встановлено необхідні та достатні умови існування Q-умовних симетрій вигляду

$$Q = \partial_t + \xi\partial_x + \eta^1\partial_u + \eta^2\partial_v \tag{0.1}$$

та знайдено нові оператори Q-умовної симетрії у явному вигляді двокомпонентної дифузійної системи Лотки–Вольтера

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + b_1 u + c_1 v),\\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + b_2 u + c_2 v), \end{aligned} \tag{0.2}$$

де $\lambda_k > 0$, a_k, b_k та c_k — довільні дійсні сталі ($k = 1, 2$), $b_2^2 + c_1^2 \neq 0$; $u = u(t, x)$ та $v = v(t, x)$ — шукані функції, які інтерпретуються як концентрації популяцій, густини клітин тощо.

В розділі також досліджено симетрії та побудовано точні розв'язки однієї нелінійної системи рівнянь РД типу Лотки–Вольтера.

У *третьому розділі* здійснено вичерпний опис Q-умовних симетрій першого типу вигляду

$$Q = \ \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \eta^1\partial_u + \eta^2\partial_v, \ \xi^0 \neq 0, \tag{0.3}$$

нелінійних двокомпонентних систем рівнянь реакції-дифузії

$$\begin{aligned} u_{xx} &= d^1(u)u_t + C^1(u, v), \\ v_{xx} &= d^2(v)v_t + C^2(u, v), \end{aligned} \tag{0.4}$$

де всі функції припускаються достатньо гладкими в $\mathbb{R}^2$, або в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, функції d^1 та d^2 припускаються додатними.

Зокрема, нами встановлено, що при $d^k = const$ ($k = 1, 2$) існує 26 випадків, коли система (0.4) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, а при $d_u^1 d_v^2 \neq 0$ — 21 випадок.

У цьому розділі наведено приклади редукцій систем рівнянь РД до систем ЗДР та побудовано точні розв'язки для систем рівнянь РД, які можуть мати біологічну (взаємодія двох популяцій) та фізичну (потік тонких плівок в'язкої рідини крізь пористе середовище) інтерпретацію.

У кінці основної частини дисертації зроблено висновки до всієї роботи.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Чернізі Роману Михайловичу за постановку задач, постійну підтримку та допомогу в роботі. Автор дуже вдячний усім учасникам семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за конструктивні зауваження, висловлені під час обговорення результатів дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Симетрії Лі двокомпонентних систем рівнянь реакції-дифузії

Розглянемо двокомпонентну систему рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F(U,V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + G(U,V), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $U(t,x)$ та $V(t,x)$ — невідомі функції, які можуть описувати концентрації популяцій, густини клітин чи хімічних речовин, тиски в тонких плівках, температури різних середовищ. $F(U,V)$ та $G(U,V)$ — задані функції, що описують взаємодію (кінетику) між компонентами U і V та оточуючим середовищем, функції $D^1(U)$ і $D^2(V)$ — коефіцієнти дифузії (теплопровідності). Нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними. Тут і нижче всі функції припускаються достатньо гладкими в $\mathbb{R}^2$, або в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Системи рівнянь РД з класу (1.1) широко застосовуються при математичному моделюванні різноманітних процесів у фізиці [33], біології [39, 79, 80], екології [86] тощо. Поштовхом до інтенсивного застосування систем рівнянь РД та їх детального дослідження було опублікування роботи А. Тюрінґа [100], яка присвячена розв'язанню однієї з найбільших загадок біології: яким чином відбувається процес формування живих організмів (процес морфогенезу)? Шукаючи відповідь на вказану загадку А. Тюрінґ запропонував революційну ідею про механізм морфогенезу (процес виникнення та розвитку просторово-неоднорідних структур в організмі на протязі життя). Він встановив, що при певних додаткових умовах процес дифузії може дестабілізувати просторово-однорідну структуру. Іншими словами, процес дифузії може взаємодіяти з хімічним реактивним процесом таким чином, що це може стимулювати розвиток і ріст неоднорідних форм і структур в організмі.

Протягом десятиліть системи рівнянь РД з класу (1.1) інтенсивно досліджувалися як наближеними так і аналітичними методами. Оскільки, як правило, вони є нелінійними, то при їх інтегруванні не можна використовувати такі класичні методи, як метод Фур'є, метод інтегральних перетворень, метод функції Ґріна, які ґрунтуються на принципі лінійної суперпозиції розв'язків. Таким чином, задача побудови точних розв'язків таких систем є дуже актуальною. Зокрема, при розв'язанні нелінійних ДРЧП (систем ДРЧП) використовують такі методи, як метод Лі [8, 12, 22, 87], метод оберненої задачі розсіяння [11], метод умовної симетрії та його узагальнення [25, 62, 65, 90, 103], метод функціонального відокремлення змінних [77,96] та інші (ширший перелік методів див., наприклад, в [18]). Зауважимо, що у випадку додатних коефіцієнтів дифузії $D^1(U)$ та $D^2(V)$ система (1.1) є неінтегровною в сенсі теорії методу оберненої задачі розсіяння [10], тому при побудові точних розв'язків цієї системи дуже часто використовують сучасні теоретико-групові методи, які ґрунтуються на класичному методі Лі.

Розглянемо детальніше метод Лі та його застосування до побудови точних розв'язків систем рівнянь РД з класу (1.1). Оскільки система (1.1) містить довільні елементи (функції D^1, D^2, F та G), то при дослідженні симетрійних властивостей цієї системи виникає задача групової класифікації. Вперше сучасну постановку задачі групової класифікації сформулював Л. В. Овсянніков в роботі [13]. Він також запропонував метод розв'язання вказаної задачі (метод Лі–Овсяннікова). Зокрема, в роботі [13] була розв'язана задача групової класифікації нелінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = [f(u)u_x]_x, f(u) \neq const.$$

Детальніше ознайомитися з методом Лі–Овсяннікова та іншими методами теорії груп і алгебр Лі можна, наприклад, в монографіях [2, 9, 12, 22, 25, 87].

Розглянемо систему m еволюційних рівнянь ($m \geq 2$) з двома незалежними (t, x) та m залежними $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ змінними:

$$u^i_t = F^i\left(t, x, u, u_x, \dots, u^{(k)}_x\right),\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.2}$$

де функції F^i є гладкими, нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними; $u^i_t = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $u^{(j)}_x \equiv \frac{\partial^j u}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial^j u^1}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial^j u^m}{\partial x^j}\right)$, $j = 1, 2, \dots, k,\ k \geq 1$.

При побудові операторів симетрії Лі системи (1.2) потрібно розглядати цю систему як многовид $\mathcal{M} = \{S_1 = 0, S_2 = 0, \dots, S_m = 0\}$, де

$$S_i \equiv u^i_t - F^i\left(t, x, u, u_x, \dots, u^{(k)}_x\right)\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

у продовженому просторі змінних

$$t, x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}.$$

Тут символом $\underset{j}{u}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) позначено сукупність всеможливих похідних j-го порядку за змінними t та x.

Зокрема, згідно з критерієм інваріантності:

Означення 1.1. Система (1.2) інваріантна відносно перетворень, породжених інфінітезимальним оператором

$$Q = \xi^0(t, x, u)\partial_t + \xi^1(t, x, u)\partial_x + \eta^1(t, x, u)\partial_{u^1} + \dots + \eta^m(t, x, u)\partial_{u^m}, \tag{1.3}$$

якщо виконуються умови інваріантності

$$\underset{k}{Q}\,(S_i)\Big|_{\mathcal{M}} = 0\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

де оператор $\underset{k}{Q}$ — k-те продовження оператора Q (див., наприклад, [12, 87]).

При застосуванні означення (1.1) для побудови операторів класичної симетрії отримуємо деяку систему ДРЧП відносно шуканих функцій ξ^i та η^j $(i = 0, 1,\ j = 1, \dots, m)$. Ця система називається СВР. Зауважимо, що загальний розв'язок отриманої СВР дає змогу знайти всі оператори інваріантності системи (1.2), тобто побудувати її максимальну алгебру інваріантності (МАІ).

При досліджені симетрійних властивостей заданого класу систем ДРЧП важливу роль відіграють перетворення еквівалентності (див. наприклад [12, 70]), тобто такі невироджені локальні перетворення, які зводять *довільно вибрану систему* рівнянь з заданого класу до деякої іншої системи рівнянь з цього ж класу. Саме відносно перетворень еквівалентності, згідно з методом Лі–Овсяннікова, проводиться групова класифікація, результатом якої є перелік нееквівалентних систем та відповідних їм МАІ. Проте отриманий таким чином перелік може містити системи, які будуть локально еквівалентними відносно перетворень, що не належать до множини перетворень еквівалентності заданого класу систем. Для того, щоб виключити таку можливість були введені формозберігаючі перетворення (ФЗП) — невироджені локальні перетворення, якими можна звести *хоча б одну систему* рівнянь з заданого класу в деяку іншу систему рівнянь з цього класу. Вказані перетворення були введені в роботі [71] і зараз широко використовуються при проведенні групової класифікації (див. [53, 58, 101] та цитовані там роботи). Зауважимо, що в деяких роботах (див., наприклад, [93]) для позначення ФЗП використовують термінологію "допустимі перетворення".

Перейдемо до задачі групової класифікації систем рівнянь РД, яка бере свій початок з роботи [105]. Зокрема, в цій роботі досліджувалися симетрійні властивості систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії вигляду

$$u_t - u_{xx} = f(u),$$

де $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, $f(u)$ — довільна гладка функція, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Основний результат роботи [105] подаємо у вигляді теореми.

Теорема 1.1. *Система рівнянь РД*

$$Lu = f(u), \tag{1.4}$$

де $Lu \equiv u_t - u_{xx}$, *інваріантна відносно перетворень, породжених оператором*

$$X = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

тоді і тільки тоді, коли функції τ, ξ *та* η *мають вигляд*

$$\begin{aligned} &\tau = \tau(t), \\ &\xi = \tfrac{1}{2}\dot{\tau}(t)\cdot x + \xi_0(t), \\ &\eta = \bar{\delta}(t,x)\cdot u + \varepsilon(t,x), \end{aligned}$$

де $\bar{\delta}(t,x) = \delta(t) + (-\frac{1}{8}\ddot{\tau}(t)\cdot x^2 - \frac{1}{2}\xi_0(t)\cdot x)\cdot I$ *(*I *— одинична матриця), а вектор-функція* $f(u)$ *задовольняє рівняння*

$$L(\bar{\delta}u + \varepsilon) + (\bar{\delta} - \dot{\tau}\cdot I)\cdot f(u) = f'(u)\cdot(\bar{\delta}u + \varepsilon).$$

В теоремі 1.1: $\tau(t)$ та $\xi_0(t)$ — дійсні функції, $\varepsilon(t,x)$ — вектор-функція, $\delta(t)$ — матриця розмірності $n\times n$.

Теорема 1.1 описує лише структуру операторів симетрії Лі системи (1.4) та обмеження на функцію f.

Задача групової класифікації системи рівнянь РД (1.4) не була повністю розв'язана в [105]. Зокрема, у випадку двокомпонентних систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії, тобто систем вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= \lambda_1\Delta U + F(U,V), \\ V_t &= \lambda_2\Delta V + G(U,V), \end{aligned} \tag{1.5}$$

де λ_1 та λ_2 — довільні сталі, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, існує багато робіт, присвячених розв'язанню задачі групової класифікації [49, 50, 81, 83].

В роботах [81–83] А. Г. Нікітін розглядав задачу групової класифікації системи рівнянь РД з поперечною дифузією вигляду

$$U_t = \Delta(\lambda_{11}U + \lambda_{12}V) + F(U,V),$$
$$V_t = \Delta(\lambda_{21}U + \lambda_{22}V) + G(U,V),$$

яка у випадку діагональної дифузійної матриці ($\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$) збігається з системою (1.5). Зокрема, в роботі [82] досліджувався випадок

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = a, \ \lambda_{12} = -\lambda_{21} = -1.$$

На теперішній час можна стверджувати, що всеможливі симетрії Лі системи рівнянь РД (1.5) повністю описано у роботах [49,50,83]. Зокрема, в роботі [49] проведено групову класифікацію системи (1.5) у випадку різних коефіцієнтів дифузії ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), а в статті [50] було розглянуто випадок $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Задача групової класифікації системи (1.1) у випадку $(D^1_U)^2 + (D^2_V)^2 \neq 0$ була розв'язана в роботі [72]. Зокрема, в цій статті було отримано 30 систем рівнянь РД, які допускають розширення тривіальної алгебри з базисними операторами P_t та P_x, з точністю до перетворень еквівалентності системи (1.1)

$$\begin{aligned}
&\bar{t} = C_1 t + C_2, \quad \bar{x} = C_3 x + C_4,\\
&\bar{U} = C_5 U + C_6, \quad \bar{V} = C_7 V + C_8,\\
&\bar{D}^1 = \tfrac{C_3^2}{C_1} D^1, \quad \bar{D}^2 = \tfrac{C_3^2}{C_1} D^2, \quad \bar{F} = \tfrac{C_5}{C_1} F, \quad \bar{G} = \tfrac{C_7}{C_1} G,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

де C_l $(l = 1, \ldots, 8)$ — деякі сталі, $C_{2k-1} \neq 0, \ k = 1, \ldots, 4$.

У роботі [51] задача групової класифікації системи (1.1) була розв'язана з точністю до перетворень вигляду

$$\begin{aligned}
&t \to C_0 t + C_1 \exp(C_2 t), \ x \to C_3 x + C_4 \exp(C_5 x) + C_6 \tan(C_7 x),\\
&U \to C_8 + C_9 t + C_{10} V + C_{11} \exp(C_{12} t) U +\\
&\qquad C_4 \exp(C_{13} x) U + C_6 \cos^3(C_{14} x) U,\\
&V \to C_{15} + C_{16} t + C_{10} U + C_{17} \exp(C_{18} t) V +\\
&\qquad C_4 \exp(C_{13} x) V + C_6 \cos^3(C_{14} x) V,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

де сталі C з індексами визначаються конкретним виглядом системи.

Перетворення (1.7) містять як частинний випадок перетворення еквівалентності (1.6) та дозволяють скоротити кількість випадків, отриманих в статті [72], до 10 (див. таблицю 1.1).

Таблиця 1.1

Симетрії Лі системи (1.1) [51]

	Системи рівнянь РД	Базисні оператори МАІ
1.	$U_t = d_1U_{xx} + U^{1+\beta}f(V)$, $\beta \neq 0$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x + U^\beta g(V)$	P_t, P_x $D_0^\beta = D_{00} - \frac{2}{\beta}U\partial_U$
2.	$U_t = d_1U_{xx} + \exp(\gamma U)f(V)$, $\gamma \neq 0$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x + \exp(\gamma U)g(V)$	P_t, P_x $D_0^\gamma = D_{00} - \frac{2}{\gamma}\partial_U$
3.	$U_t = d_1U_{xx}$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x + g(V)$	$P_t, P_x, U\partial_U$ $X_0^\infty = P_0(t,x)\partial_U$
4.	$U_t = d_1U_{xx} + f(V)$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x$	P_t, P_x, X_0^∞ D_0^β з $\beta = -1$
5.	$U_t = d_1U_{xx} + \lambda U + f(V)$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x + g(V)$	P_t, P_x $X_\lambda^\infty = P_\lambda(t,x)\partial_U$
6.	$U_t = d_1U_{xx} + \gamma U\log U + Uf(V)$ $V_t = (D_2(V)V_x)_x + g(V)$	P_t, P_x $Q_\gamma = \exp(\gamma t)U\partial_U$
7.	$U_t = d_1(U^{\alpha_1}U_x)_x + U^{\gamma_1}f(\omega)$ $V_t = d_2(V^{\alpha_2}V_x)_x + V^{\gamma_2}g(\omega)$ $\omega = U^{-\alpha_1}V^{\alpha_2}, \gamma_k = 1 + \alpha_k - \gamma\alpha_k, k = 1,2$	P_t, P_x $D_1^\gamma = 2(\gamma-1)t\partial_t + \gamma x\partial_x +$ $\frac{2}{\alpha_1}U\partial_U + \frac{2}{\alpha_2}V\partial_V$
8.	$U_t = d_1(U^{\alpha_1}U_x)_x + U^{1+\beta}f(\omega)$ $V_t = d_2(\exp(\alpha_2 V)V_x)_x + U^\beta g(\omega)$ $\omega = U^{-\alpha_1}\exp(\alpha_2 V), \beta = \alpha_1 - \gamma\alpha_1$	P_t, P_x $D_2^\gamma = 2(\gamma-1)t\partial_t + \gamma x\partial_x +$ $\frac{2}{\alpha_1}U\partial_U + \frac{2}{\alpha_2}\partial_V$
9.	$U_t = d_1(\exp(\alpha_1 U)U_x)_x + \exp(\alpha_1(1-\gamma)U)g(\omega)$ $V_t = d_2(\exp(\alpha_2 V)V_x)_x + \exp(\alpha_2(1-\gamma)V)g(\omega)$ $\omega = \alpha_1 U - \alpha_2 V$	P_t, P_x $D_3^\gamma = 2(\gamma-1)t\partial_t + \gamma x\partial_x +$ $\frac{2}{\alpha_1}\partial_U + \frac{2}{\alpha_2}\partial_V$
10.	$U_t = d_1(U^{-4/3}U_x)_x + Uf(U/V)$ $V_t = d_2(V^{-4/3}V_x)_x + Vg(U/V)$	P_t, P_x $D_1^1 = x\partial_x - \frac{3}{2}(U\partial_U + V\partial_V)$ $K = x^2\partial_x - 3x(U\partial_U + V\partial_V)$

Зауваження 1.1. В таблиці 1.1: $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, β, γ, λ — довільні сталі; D_2, f та g — довільні гладкі функції своїх аргументів; функції $P_0(t,x)$ та $P_\lambda(t,x)$ є довільними розв'язками відповідно рівнянь $P_t = d_1P_{xx}$ та $P_t = d_1P_{xx} + \lambda P$; $D_{00} = 2t\partial_t + x\partial_x$.

Продовженням досліджень, проведених в роботі [51], є стаття [52], в якій проведено групову класифікацію системи рівнянь РД з несталими коефіцієнтами дифузії у випадку n просторових змінних. Зокрема, в цій роботі поряд з природнім узагальненням поданих в таблиці 1.1 систем та відповідних їм МАІ, отримано один *додатковий* випадок при $n = 2$, в якому система рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} &U_t = \nabla(U^{-1}\nabla U) + Uf(U/V), \\ &V_t = \nabla(V^{-1}\nabla V) + Vg(U/V), \end{aligned} \tag{1.8}$$

де $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, допускає нескінченновимірну алгебру Лі.

Базисні оператори МАІ системи (1.8) мають такий вигляд:

$$P_t,\ P_1 = \partial_{x_1},\ P_2 = \partial_{x_2},\ X^{\infty} = k^a \partial_{x_a} - 2k_1^1 (U\partial_U + V\partial_V)\ (a = 1, 2),$$

де функції $k^1(x_1, x_2)$ та $k^1(x_1, x_2)$ є довільним розв'язком системи Коші–Рімана:

$$k_1^1 = k_2^2,\ k_2^1 + k_1^2 = 0, \quad k_b^a \equiv \frac{\partial k^a}{\partial x^b}.$$

Отже, можна стверджувати, що на сьогоднішній день задача групової класифікації класу систем рівнянь РД (1.1) зі сталими та несталими коефіцієнтами дифузії є розв'язаною.

При побудові точних розв'язків конкретної нелінійної системи рівнянь РД з (1.1) необхідно виписати її МАІ (проаналізувавши роботи [49–51,83]) та використати відомий алгоритм (див., наприклад, [12, 25, 65, 87]), який дозволяє звести (провести редукцію) досліджувану систему ДРЧП до системи ЗДР. Таким чином, знайшовши розв'язки редукованої системи ЗДР, отримуємо розв'язки вихідної системи. Зазначимо також, що існує і інший спосіб побудови розв'язків ДРЧП (систем ДРЧП). Зокрема, у випадку, коли система ДРЧП допускає широку МАІ, можна будувати багатопараметричні сім'ї розв'язків (породжувати нові розв'язки) [87] з її відомих розв'язків. Опишемо коротко суть алгоритму побудови точних роз'язків на прикладі системи рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_t &= U_{xx} + \beta_1 U \big(U^{-\lambda_2} V^{\lambda_1}\big)^{4/(\lambda_1-\lambda_2)}, \\ \lambda_2 V_t &= V_{xx} + \beta_2 V \big(U^{-\lambda_2} V^{\lambda_1}\big)^{4/(\lambda_1-\lambda_2)}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

де $\beta_1 \neq 0$ та β_2 — довільні сталі.

В роботі [49] доведено, що система (1.9) допускає шестивимірну МАІ $AG_2(1.1)$ з такими базисними операторами:

$$\begin{aligned} &P_t = \partial_t,\ P_x = \partial_x,\ Q_\lambda = \lambda_1 U\partial_U + \lambda_2 V\partial_V, \\ &G = t\partial_x - \tfrac{1}{2}xQ_\lambda,\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - \tfrac{1}{2}(U\partial_U + V\partial_V), \\ &\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \tfrac{1}{4}x^2 Q_\lambda - \tfrac{1}{2}t(U\partial_U + V\partial_V). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Використавши нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри $AG_2(1.1)$ [12, 87], в [49] було проведено редукцію системи (1.9) до систем ЗДР. Розглянемо для прикладу оператор P_x. Для побудови анзацу (підстановки, яка зводить задане ДРЧП (систему ДРЧП) до деякого іншого рівняння (системи рівнянь) з меншою кількістю незалежних змінних), який породжуєтся оператором P_x, необхідно розв'язати таку систему характеристичних рівнянь (систему Ойлера-Лаґранжа):

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{dU}{0} = \frac{dV}{0}. \tag{1.11}$$

Розв'язок системи (1.11) (шуканий анзац) має вигляд

$$U = \varphi_1(t), \quad V = \varphi_2(t), \tag{1.12}$$

ду φ_1 та φ_2 — нові шукані функції.

Для проведення редукції потрібно підставити анзац (1.12) в систему (1.9), при цьому отримується редукована система ЗДР

$$\begin{aligned} \lambda_1 \dot\varphi_1 &= \beta_1 \varphi_1^{1-\gamma_1\lambda_2}\varphi_2^{\gamma_1\lambda_1}, \\ \lambda_2 \dot\varphi_2 &= \beta_2 \varphi_2^{1+\gamma_1\lambda_1}\varphi_1^{-\gamma_1\lambda_2}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

де $\gamma_1 = 4/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Проінтегрувавши систему (1.13) та врахувавши (1.12), маємо такі розв'язки системи рівнянь РД (1.9):

$$\begin{aligned} U^0 &= A^{\lambda_1}\left(\pm\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}\right)^{\frac14}(t_0 \pm t)^{\frac{\beta_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}}, \\ V^0 &= A^{\lambda_2}\left(\pm\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}\right)^{\frac14}(t_0 \pm t)^{\frac{\beta_2\lambda_1}{\gamma_1\kappa}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

якщо $\kappa = \beta_1\lambda_2^2 - \beta_2\lambda_1^2 \neq 0$, та

$$\begin{aligned} U^0 &= A^{\lambda_1}\left(\tfrac{\lambda_1^2\alpha}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp(\lambda_1\alpha t), \\ V^0 &= A^{\lambda_2}\left(\tfrac{\lambda_1^2\alpha}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp(\lambda_2\alpha t), \end{aligned} \tag{1.15}$$

якщо $\kappa = 0$; t_0, A та α — довільні сталі. Як бачимо, розв'язки (1.14) та (1.15) мають відносно просту структуру та не залежать від змінної x, що обумовлено виглядом анзацу (1.11). В [49] використано перетворення Ґалілея (породжені оператором G з (1.10)) для побудови нових розв'язків системи (1.9)

$$\begin{aligned} U_{new} &= A^{\lambda_1}\left(\pm\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}(t_0 \pm t)^{\frac{\beta_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}}\exp\left(\tfrac{\lambda_1}{2}\left(\varepsilon x + \tfrac{\varepsilon^2 t}{2}\right)\right), \\ V_{new} &= A^{\lambda_2}\left(\pm\tfrac{\lambda_1\lambda_2}{\gamma_1\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}(t_0 \pm t)^{\frac{\beta_2\lambda_1}{\gamma_1\kappa}}\exp\left(\tfrac{\lambda_2}{2}\left(\varepsilon x + \tfrac{\varepsilon^2 t}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} U_{new} &= A^{\lambda_1}\left(\tfrac{\lambda_1^2\alpha}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\lambda_1\alpha t + \tfrac{\lambda_1}{2}\left(\varepsilon x + \tfrac{\varepsilon^2 t}{2}\right)\right), \\ V_{new} &= A^{\lambda_2}\left(\tfrac{\lambda_1^2\alpha}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\lambda_2\alpha t + \tfrac{\lambda_2}{2}\left(\varepsilon x + \tfrac{\varepsilon^2 t}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

де ε — довільний параметр.

Таким чином, бачимо, що застосування методу Лі до побудови точних розв'язків нелінійних систем ДРЧП є ефективним у випадку, коли досліджувана система допускає нетривіальну алгебру Лі. Проте для багатьох нелінійних систем рівнянь РД з класу (1.1) шукана МАІ є тривіальною (оператори зсуву за змінним t та x). Для розв'язання таких систем можна використовувати інші методи (які згадувалися вище), серед яких і метод Q-умовної симетрії (некласичної симетрії).

1.2. Q-умовні симетрії систем рівнянь реакції-дифузії-конвекції

У 1969 році Дж. Блуман та Дж. Коул в роботі [38] запропонували важливе узагальнення симетрій Лі на прикладі лінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx}.$$

Протягом майже двадцяти років введений в [38] *новий тип симетрій* (який пізніше стали називати некласичною симетрію) залишався маловідомим та не застосовувався для дослідження ДРЧП. Лише після перевідкриття в роботах [66, 88, 89] симетрій, введених Блуманом і Коулом, робота [38] отримала належне визнання. Зокрема, В. І. Фущичем та його учнями було введено означення умовної симетрії [24, 25], яке суттєво узагальнює некласичну симетрію. Зазначимо також, що в роботі [38] замість терміну "некласична симетрія" вживається термінологія некласичний метод для знаходження інваріантних розв'язків.

На теперішній час для позначення симетрій запропонованих Блуманом і Коулом використовують дві основні назви, а саме : некласична симетрія [34, 35, 84, 90, 95] та Q-умовна симетрія [21, 25, 64, 65]. В дисертації ми вживаємо термінологію Q-умовна симетрія, яка була запропонована в монографії В. І. Фущича та його учнів [25]. Сформулюємо означення оператора Q-умовної симетрії у випадку скалярного диференціального рівняння.

Розглянемо рівняння

$$L(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \tag{1.16}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ u = u(x)$ — достатньо гладка функція, символом $\underset{s}{u}$ позначено сукупність всеможливих похідних s-го $(s = 1, 2, \ldots, r)$ порядку функції $u(x)$, тобто

$$\underset{s}{u} = \left\{ u_{i_1 \ldots i_s} = \frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}},\ 1 \le i_1 \le n, \ldots,\ 1 \le i_s \le n \right\}.$$

Означення 1.2. [19] Кажуть, що ДРЧП (1.16) Q-умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x, u) \partial_{x_i} + \eta(x, u) \partial_u$$

(у якого хоча б один коефіцієнт ξ^i не дорівнює 0), якщо виконується умова

$$\underset{r}{Q}\, L \Big|_{\mathcal{L}} = 0,$$

де оператор $\underset{r}{Q}$ — r-те продовження оператора Q, многовид $\mathcal{L}$ визначається рівняннями

$$L = 0, \quad Q(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_{x_i} - \eta = 0$$

та диференціальними наслідками рівняння $Q(u) = 0$ до порядку $r-1$ включно. При цьому оператор Q називають оператором Q-умовної симетрії рівняння (1.16).

Задача побудови операторів Q-умовної симетрії є значно складнішою ніж задача пошуку операторів класичної симетрії Лі. Це пов'язано з тим, що отримана в результаті пошуку операторів Q-умовної симетрії СВР є нелінійною, а отже, її не завжди вдається проінтегрувати. Навіть для випадку лінійного рівняння теплопровідності відповідна СВР не була розв'язана в роботі [38]. Найзагальніший результат розв'язання вказаної системи представлено, наприклад, в роботі [64]. Зокрема, в цій статті було доведено, що загальний розв'язок СВР виражається трьома розв'язками лінійного рівняння теплопровідності.

На відміну від скалярних рівнянь реакції-дифузії-конвекції, для яких задача побудови операторів Q-умовної симетрії розглядається в багатьох роботах (див., наприклад [15, 43, 54, 91] та цитовану там літературу), робіт, присвячених пошуку таких операторів для систем, є небагато. Переважна їх кількість була опублікована протягом останнього десятиліття і найбільш відомими є роботи [14, 36, 37, 55, 57, 78, 99].

Першою з відомих нам робіт, присвячених побудові операторів Q-умовної симетрії для систем ДРЧП, є робота [75], в якій досліджуються інваріантні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} &h_t + h_x u + h u_x = 0, \\ &u_t + u u_x + h_x + \nu h_{xxx} = 0, \end{aligned} \tag{1.17}$$

що описує поширення хвиль в мілководді. В системі (1.17) функція $h(t,x)$ означає глибину, функція $u(t,x)$ — швидкість, стала $\nu = \frac{1}{3}h_0$, h_0 — початкова глибина рідини в стані спокою.

Зокрема, в роботі [75] при побудові розв'язків системи (1.17) поряд із використанням некласичної симетрії застосовано прямий метод [59], згідно з яким інваріантні розв'язки системи (1.17) шукаються у вигляді

$$\begin{aligned} &u(t,x) = \alpha(t,x) + \beta(t,x)w\big(Z(t,x)\big),\\ &h(t,x) = A(t,x) + B(t,x)C\big(Z(t,x)\big), \end{aligned} \tag{1.18}$$

де α, β, A, B та Z — деякі задані функції, тоді як w та C — нові шукані функції, що задовольняють систему ЗДР, яка отримується шляхом підстановки анзацу (1.18) в систему (1.17).

У роботі [75] показано, що *лише один* із шести нееквівалентних інваріантних розв'язків системи (1.17) (отриманих прямим методом) є ліївським (тобто таким, який можна знайти з використанням класичної симтерії), тоді як інші п'ять типів розв'язків були знайдені з використанням некласичної симетрії. Це обумовлено тим, що метод некласичної симетрії є ширшим за прямий метод [85].

В роботах [20, 36, 57] побудовано оператори Q-умовної симетрії для системи рівнянь типу Бюргерса

$$\begin{aligned} &u_t = \lambda_1 u_{xx} + uu_x + F^1(u,v)v_x,\\ &v_t = \lambda_2 v_{xx} + vv_x + F^2(u,v)u_x, \end{aligned} \tag{1.19}$$

де F^1 та F^2 — довільні гладкі функції, λ_1 та λ_2 — довільні сталі.

Зокрема, у роботі [57] зроблено вичерпний опис симетрій Лі системи (1.19). В цій роботі також побудовано СВР для пошуку операторів Q-умовної симетрії системи (1.19) (теорема 3 [57]). Проте вказана СВР є дуже складною і не була розв'язана повністю в статті [57]. Частковий результат інтегрування отриманої системи подано у вигляді теореми.

Теорема 1.2. *Система дифузії-конвекції (1.19) є Q-умовно інваріантною відносно оператора*

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(u,v)\partial_u + \eta^2(u,v)\partial_v,\ \ \xi_u\xi_v \neq 0, \tag{1.20}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ F^1 = m_1 + u,\ F^2 = m_2 + v,\ m_1, m_2 \in \mathbb{R},$$

а коефіцієнти оператора (1.20) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\xi = \tfrac{1}{2}(u+v) + \alpha_0,\\
&\eta^1 = -\tfrac{1}{4}[u(u+v)^2 + 2\alpha_0 u(u+v)] + \beta_0 u + \gamma_1,\\
&\eta^2 = -\tfrac{1}{4}[v(u+v)^2 + 2\alpha_0 v(u+v)] + \beta_0 v + \gamma_2,
\end{aligned}$$

якщо $m_1 = m_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
&\xi = \tfrac{1}{2}(u+v),\\
&\eta^1 = -\tfrac{1}{4}[(u+m_1)(u+v)^2 + (m_2 - m_1)u^2] + \beta_0 u + \gamma_1,\\
&\eta^2 = -\tfrac{1}{4}[(v+m_2)(u+v)^2 + (m_1 - m_2)v^2] + \beta_0 v + \gamma_2,
\end{aligned}$$

якщо $m_1 \neq m_2$. *Тут* $\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_1$ *та* γ_2 *— довільні сталі.*

В роботі [36] узагальнено результат теореми 1.2 (див. (31)–(32) [36]) та знайдено нову пару функцій $\left(F^1, F^2\right) = (-\frac{u^2}{v}, -\frac{v^2}{u})$, для якої оператор Q-умовної симетрії системи (1.19) (у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) має вигляд

$$Q = \partial_t - \frac{3}{x}\partial_x - \frac{3u}{x^2}\partial_u - \frac{3v}{x^2}\partial_v.$$

В роботі [99] використано оператори класичної та некласичної симетрії для побудови точних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{aligned}
&u_t = \left(D_0 \tfrac{u}{u+kv}\, u_x\right)_x + \nu v + (\alpha - \mu)u,\\
&v_t = (\alpha - \nu)v + \mu u,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

де $D_0,\ \alpha,\ k,\ \mu$ та ν — довільні додатні сталі. Зокрема, при побудові операторів некласичної симетрії системи (1.21) були накладені такі обмеження на структуру оператора:

$$Q = \partial_x + u g_1(x)\partial_u + v g_2(x)\partial_v.$$

У випадку систем рівнянь РД (1.1) проблема побудови Q-умовних симетрій (некласичних симетрій) є досі невирішеною через її складність.

Деякі загальні результати, пов'язані з побудовою Q-умовних симетрій вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v)\partial_u + \eta^2(t,x,u,v)\partial_v, \tag{1.22}$$

для системи рівнянь РД зі степеневими коефіцієнтами дифузії

$$\begin{aligned} &u_t = (u^k u_x)_x + F^1(u,v),\ k \neq -1,\\ &v_t = (v^l v_x)_x + F^2(u,v),\ l \neq -1,\ k^2 + l^2 \neq 0, \end{aligned}$$

були отримані в роботах [16,55] та дисертації [14] (див. підрозділ 3.3 [14]).

У випадку систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії (1.5) (при $n = 1$) задача побудови операторів Q-умовної симетрії розглядалася в роботах [14, 37]. Зокрема, в статті [37] наведено приклади операторів некласичної симетрії для деяких систем з класу (1.5) та подано їх застосування для побудови точних розв'язків. В роботі [14] отримано оператори Q-умовної симетрії вигляду (1.22) системи (1.5) ($\lambda_1\lambda_2 \neq 0$) при таких додаткових обмеженнях:

$$\xi = \xi(u,v),\ \eta^1 = \eta^1(u,v),\ \eta^2 = \eta^2(v).$$

Отриманий в [14] результат узагальнено в теоремі 3.4.

Перейдемо до формулювання основних понять та тверджень, які будуть використані в роботі.

Означення 1.3. Оператор (1.3) називається оператором Q-умовної (некласичної) симетрії системи (1.2), якщо виконуються такі умови інваріантності:

$$\underset{k}{Q}\,(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_m} = 0,\ i = 1,2,\ldots,m,$$

де многовид $\mathcal{M}_m$ визначається рівняннями

$$S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Q(u^1) = 0, \ldots, Q(u^m) = 0$$

та диференціальними наслідками за незалежними змінними t та x рівнянь $Q(u^i) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ до порядку $k-1$ включно.

Означення 1.3 є природним узагальненням відомого означення Q-умовної симетрії для скалярного рівняння [19, 104] на випадок систем.

Розглянемо властивості операторів Q-умовної симетрії.

Властивість 1.1. Будь-який оператор Q-умовної симетрії помножений на довільну гладку функцію залишається оператором Q-умовної симетрії.

Властивість 1.2. На відміну від операторів Лі, оператори Q-умовної симетрії не завжди утворюють алгебру Лі.

Властивість 1.3. Оператор Q-умовної симетрії гарантує редукцію заданого ДРЧП (системи ДРЧП) до рівняння (системи рівнянь) з меншою кількість незалежних змінних.

Властивості 1.1 та 1.2 вказують на суттєву відмінність між операторами Q-умовної симетрії та операторами симетрії Лі.

У випадку систем еволюційних рівнянь, при побудові операторів Q-умовної симетрії вигляду (1.3) розглядають такі суттєво різні випадки:

a) $\xi^0 \neq 0$; *b)* $\xi^0 = 0,\ \xi^1 \neq 0$.

У випадку *a)*, врахувавши властивість 1.1, оператор Q-умовної симетрії (1.3) можна записати у вигляді

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta^1(t,x,u)\partial_{u^1} + \ldots + \eta^m(t,x,u)\partial_{u^m}. \tag{1.23}$$

У випадку *b)* отримуємо такий оператор:

$$Q = \partial_x + \eta^1(t,x,u)\partial_{u_1} + \ldots + \eta^m(t,x,u)\partial_{u_m}. \tag{1.24}$$

Оскільки в роботі [1] доведено, що пошук операторів Q-умовної симетрії вигляду (1.24) для систем еволюційних рівнянь зводиться до розв'язування вихідної системи, то розглядатимемо лише оператори з

$$\xi^0 \neq 0. \tag{1.25}$$

Зауважимо також, що у випадку еволюційних рівнянь (систем) при побудові операторів Q-умовної симетрії вигляду (1.23) диференціальні наслідки не приводять до отримання нових результатів. Зокрема, для систем рівнянь РД це доведено в дисертації [14]. Таким чином, при побудові операторів Q-умовної симетрії, використовуючи означення 1.3, розглядатимемо многовид

$$\mathcal{M}_m = \{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Q(u^1) = 0, \ldots, Q(u^m) = 0\}.$$

Поряд з означенням 1.3 при побудові операторів Q-умовної симетрії будемо використовувати нещодавно запропоновані в роботі [44] означення.

Означення 1.4. [44] Оператор (1.3) називається оператором Q-умовної симетрії першого типу системи (1.2), якщо виконуються такі умови інваріантності :

$$\underset{k}{Q}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.26}$$

де через $\mathcal{M}_1$ позначено один з многовидів $\{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Q(u^{i_1}) = 0\}$ з фіксованим номером $i_1\,(1 \le i_1 \le m)$.

Означення 1.5. [44] Оператор (1.3) називається оператором Q-умовної симетрії p-того типу системи (1.2), якщо виконуються такі умови інваріантності :

$$\underset{k}{Q}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_p} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

де через $\mathcal{M}_p$ позначено один з многовидів $\{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Q(u^{i_1}) = 0, \ldots, Q(u^{i_p}) = 0\}$ з фіксованими номерами $i_1, \ldots, i_p\,(1 \le p \le i_p \le m)$.

Розглянуті означення при $m = 1$ (тобто для випадку одного еволюційного рівняння) збігаються з означенням некласичної симетрії.

В роботі [44] було також показано, що оператори Q-умовної симетрії p-того типу не задовольняють властивість 1.1. Отже, оператори Q-умовної симетрії p-того типу будемо шукати у вигляді (1.3) при обмеженні (1.25).

У випадку $m > 1$ між перерахованими симетріями існує зв'язок, який логічно випливає з структури многовидів:

$$\mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}.$$

Таким чином: кожен оператор симетрії Лі є оператором Q-умовної симетрії першого та p-того типів; кожен оператор Q-умовної симетрії першого типу є оператором Q-умовної симетрії p-того типу. Очевидно, що знайшовши всі оператори Q-умовної (некласичної) симетрії заданої системи еволюційних рівнянь ми одночасно матимемо серед них всі симетрії Лі та Q-умовні симетрії p-того ($p = 1, 2, \ldots, m - 1$) типу. Проте задача знаходження операторів Q-умовної симетрії є незрівнянно складнішою, ніж задача знаходження операторів Q-умовні симетрії p-того типу.

Як випливає з властивості 1.2, лінійна комбінація двох операторів Q-умовної симетрії в загальному випадку не є оператором Q-умовної симетрії. З другого боку, використовуючи означення 1.1 та 1.4, неважко довести таке твердження.

Твердження 1.1. *Нехай $X_{i_1} = \sum\limits_{l \neq i_1,\ l=1}^{m} \eta^l(t, x, u)\partial_{u^l}$ (з фіксованим номером i_1, $1 \leq i_1 \leq m$) є оператором симетрії Лі системи еволюційних рівнянь (1.2), а Q_{i_1} є оператором Q-умовної симетрії першого типу цієї системи (знайденим для многовиду $\mathcal{M}_1 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Q_{i_1}(u^{i_1}) = 0\}$), тоді довільна лінійна комбінація $C_1 X_{i_1} + C_2 Q_{i_1}$ (C_1 та C_2 — довільні ненульові сталі) буде оператором Q-умовної симетрії першого типу системи (1.2).*

Доведення.

Покажемо, що оператор $Z = C_1 X_{i_1} + C_2 Q_{i_1}$ задовольняє означення 1.4 на многовиді $\mathcal{M}_1^* = \{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0, Z(u^{i_1}) = 0\}$, тобто він є оператором Q-умовної симетрії першого типу. Згідно з означенням, необхідно показати, що

$$\underset{k}{Z}\,(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1^*} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.27}$$

Оскільки $Z(u^{i_1}) = (C_1X_{i_1} + C_2Q_{i_1})(u^{i_1}) = C_2Q_{i_1}(u^{i_1})$, то многовиди $\mathcal{M}_1$ та $\mathcal{M}_1^*$ збігаються. Таким чином, отримуємо:

$$\begin{gathered}\underset{k}{Z}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1^*} = \underset{k}{Z}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} = (C_1\underset{k}{X_{i_1}} + C_2\underset{k}{Q_{i_1}})(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} = \\ C_1\underset{k}{X_{i_1}}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} + C_2\underset{k}{Q_{i_1}}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} = C_1\underset{k}{X_{i_1}}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1},\ i = 1, 2, \ldots, m.\end{gathered} \tag{1.28}$$

За умовою X_{i_1} — оператор симетрії Лі системи (1.2), тобто, згідно з означенням 1.1, маємо

$$\underset{k}{X_{i_1}}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.29}$$

де $\mathcal{M} = \{S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_m = 0\}$.

Оскільки очевидно, що $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, то

$$\underset{k}{X_{i_1}}(S_i)\Big|_{\mathcal{M}_1} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.30}$$

Отже, з (1.28) і (1.30) випливає виконання умови (1.27).
Твердження доведено.

1.3. Система рівнянь Лотки–Вольтера: основні властивості та застосування

В 20-х роках XX ст. А. Лотка (A. J. Lotka) [74] і В. Вольтера (V. Volterra) [102] незалежно один від одного запропонували систему звичайних диференціальних рівнянь, яка стала базовою системою для багатьох математичних моделей (див., наприклад, [79, 98]).

Отже, розглянемо класичну систему Лотки–Вольтера

$$\begin{aligned}\tfrac{du}{dt} &= u(a - bv),\\ \tfrac{dv}{dt} &= v(-c + du),\end{aligned} \tag{1.31}$$

де $a,\ b,\ c$ та d — додатні сталі.

Вольтера запропонував систему (1.31) для опису взаємодії двох видів типу хижак-жертва. В природі така взаємодія в чистому вигляді (взаємодія тільки двох видів) зустрічається дуже рідко, але очевидно, що зміна чисельності популяції хижаків перш за все пов'язана зі зміною чисельності популяції жертв, на представників якої полюють хижаки. Таким чином, згідно з [102]: $u(t)$ та $v(t)$ є відповідно чисельністю популяції жертв та хижаків в момент часу t; сталі a та $-c$ — різниці між народжуваністю та смертністю; доданки $-buv$ та duv характеризують біологічний закон переносу енергії від жертв до хижаків.

Розглянемо деякі властивості класичної системи Лотки–Вольтера. Для початку зазначимо, що система (1.31) заміною змінних

$$t \to \frac{1}{a}t,\ u \to \frac{c}{d}u,\ v \to \frac{a}{b}v$$

зводиться до системи

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} &= u(1-v), \\ \tfrac{dv}{dt} &= \alpha\, v(-1+u), \end{aligned} \tag{1.32}$$

де $\alpha = \frac{c}{a}$.

Система (1.32) має дві стаціонарні точки [79]: (0,0) — сідлова точка, $(1,1)$ — нейтрально стійкий центр.

Перший інтеграл системи (1.32) має вигляд

$$H = \alpha u + v - \ln u^{\alpha} v, \tag{1.33}$$

де H — довільна стала, $H > H_0$ (H_0 — мінімальне значення сталої H для довільних значень u та v). Стала H приймає своє мінімальне значення H_0 в точці $(u,v) = (1,1)$, а саме: $H_0 = \alpha + 1$. З фазової площини системи (1.32) (рис. 1.1) видно, що її розв'язки в околі точки $(1,1)$ є періодичними функціями, оскільки фазові криві — замкнуті.

Розглянемо узагальнення класичної системи Лотки–Вольтера для випадку m залежних змінних $u^1, u^2, \ldots, u^m$ з урахуванням дифузії в одновимірному просторі

$$u^i_t = \lambda_i u^i_{xx} + u^i\Big(a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u^j\Big), \tag{1.34}$$

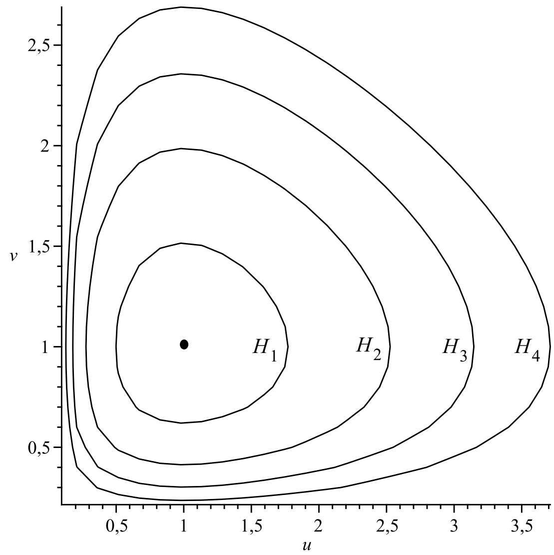

Рис. 1.1: Фазові криві з (1.33) системи (1.32) для таких сталих: $\alpha = 0.5$, $H_1 = 1.6$, $H_2 = 1.8$, $H_3 = 2$, $H_4 = 2.2$.

де $\lambda_i \geq 0$, a_i та b_{ij} — довільні дійсні сталі, $i, j = 1, \ldots, m$.

Система (1.34) у випадку $m = 1$ є класичним рівнянням Фішера [61]

$$u_t = \lambda u_{xx} + u(a - bu), \tag{1.35}$$

(тут a та b — додатні сталі).

Рівняння (1.35) є неінтегровним і допускає лише тривіальну алгебру Лі. Більше того, як випливає з [56], воно не допускає операторів Q-умовної симетрії відмінних від операторів симетрії Лі (при $\xi^0 \neq 0$). Єдиний відомий точний розв'язок рівняння (1.35), який допускає біологічну інтерпретацію, має вигляд [30]

$$u(t,x) = \frac{a}{b}\Big[1 + c\exp\Big(\pm\sqrt{\frac{a}{6\lambda}}(x - vt)\Big)\Big]^{-2},$$

де $v = \frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{\lambda a}$, c — довільна стала.

Розглянемо систему (1.34) у випадку $m = 2$:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \end{aligned} \tag{1.36}$$

(тут всі параметри є додатними сталими).

На сьогоднішній день існує дуже багато робіт, присвячених дослідженню системи (1.36). Зокрема, в багатьох статтях (див., наприклад, [67, 73] та цитовану там літературу) досліджуються умови існування плоскохвильових розв'язків двокомпонентних ДСЛВ. З іншого боку, на теперішній час є небагато робіт, присвячених побудові точних розв'язків системи (1.36) у явному вигляді [29, 69, 97].

У роботі [29] описано симетрії Лі системи (1.36) при довільно вибраних коефіцієнтах та знайдено її точні та числові розв'язки.

Теорема 1.3. *[29] Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для ДСЛВ (1.36) при $d_1 = d_2 = \lambda$ та початкових умовах*

$$\begin{array}{l} u = \frac{a}{4b}\left[1 - \tanh\left(\sqrt{\frac{a}{24\lambda}}x + c_0\right)\right]^2 \equiv u_0(x) \\ v = \beta_0 + \beta_1 u_0(x) \end{array} \tag{1.37}$$

і нульових крайових умовах Ноймана

$$u_x(t, -\infty) = u_x(t, +\infty) = v_x(t, -\infty) = v_x(t, +\infty) = 0$$

в області $\Omega = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)\}$ має вигляд

$$\begin{array}{l} u = \frac{a}{4b}\left[1 - \tanh\left(\sqrt{\frac{a}{24\lambda}}x - \frac{5a}{12}t + c_0\right)\right]^2 \\ v = \beta_0 + \beta_1 u. \end{array} \tag{1.38}$$

У формулах (1.37) і (1.38) c_0 — довільна стала, а коефіцієнти a, b, β_0, β_1 визначаються через (16)–(18) [29].

В статті [97] поряд з плоскохвильовими розв'язками системи (1.36) (з коефіцієнтами $a_1 = b_1 = c_2 = d_1 = 1,\ a_2 = a,\ c_1 = c,\ b_2 = b,\ d_2 = d$) отримано такий стаціонарний розв'язок :

$$\begin{array}{l} u(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{1-ac}\,\wp(x; g_1, g_2), \\ v(x) = a\left(\frac{1}{2} - \frac{6}{1-ac}\,\wp(x; g_1, g_2)\right), \end{array}$$

де $\wp$ — функція Ваєрштраса, $g_1 = \frac{1}{12}(-1+ac)^2,\ g_2 = -\frac{1}{216}(-1+ac)^2(-1+6a_0 + ac)$, a_0 — довільна дійсна стала.

У роботі [69] доведено ряд теорем (теореми 2.1–2.5 [69]), які описують точні розв'язки системи (1.36). Зокрема, в цій статті отримано такий новий (порівняно з відомими раніше) розв'язок:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (1-\tanh z)(m_1 - m_2 + \tfrac{1}{2} + m_1 \tanh z + m_2 \tan^2 z), \\ v(t,x) &= \tfrac{1}{8}(1+\tanh z)^3, \ z = px - \theta t, \end{aligned}$$

де $m_1,\ m_2,\ p$ та θ — фіксовані сталі.

Розв'язання ДСЛВ (1.34) у випадку багатокомпонентної системи ($m \geq 3$) є вкрай складним і, як правило, здійснюється лише числовими методами. У випадку $m = 3$ та $\lambda_i = 0$ ($i = 1,2,3$) можна знайти ряд робіт (наприклад, [32, 40, 41]), присвячених побудові перших інтегралів. Зокрема, у роботі [32] для побудови перших інтегралів використано оператори симетрії Лі, а в рстаттях [40, 41] використано метод Дарбу.

У випадку $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1,2,3$) робіт з дослідження багатокомпонентних ДСЛВ аналітичними методами вкрай мало [68, 76]. У роботі [76] досліджуються умови існування несталих стаціонарних точок трикомпонентної ДСЛВ, а в статті [68] описано умови існування плоскохвильових розв'язків трикомпонентної ДСЛВ та побудовано один такий розв'язок.

Таким чином, бачимо, що дослідженням класичної системи Лотки–Вольтера займається багато вчених. Проте більшість відомих нам робіт присвячено питанням існування розв'язків, а не побудові їх в явному вигляді. Крім того, відомі нам розв'язки знайдені із використанням плоскохвильового анзацу $u^i(t,x) = u^i(\alpha_1 t + \alpha_2 x)$ (α_1 та α_2 — довільні сталі), який дозволяє будувати розв'язки одного типу (плоскохвильові розв'язки). На наш погляд, це обумовлено тим, що ДСЛВ (1.34) (у випадку, коли всі параметри цієї системи є довільними додатними сталими) допускає лише тривіальну алгебру Лі з базисними операторами зсуву за змінними t та x. Отже, проблема побудови точних розв'язків ДСЛВ, зокрема з більш складною структурою, є актуальною задачею.

РОЗДІЛ 2

Системи рівнянь реакції-дифузії типу Лотки–Вольтера: симетрії та точні розв'язки

Цей розділ присвячено побудові операторів Q-умовної симетрії та Q-умовної симетрії першого типу для систем рівнянь РД типу Лотки–Вольтера. Отримані оператори використано для побудови анзаців та проведення редукції систем рівнянь РД до систем ЗДР. Побудовано точні розв'язки систем рівнянь типу Лотки–Вольтера та досліджено їх властивості.

У підрозділі 2.1 знайдено нові оператори Q-умовної симетрії двокомпонентної ДСЛВ, побудовано точні розв'язки та наведено їх біологічну інтерпретацію.

У підрозділі 2.2 описано всі симетрії Лі та, при обмеженні (1.25), Q-умовні симетрії першого типу трикомпонентної ДСЛВ і знайдено приклади її точних розв'язків.

У підрозділі 2.3 побудовано інваріантні та частково інваріантні точні розв'язки однієї системи рівнянь РД типу Лотки–Вольтера, досліджено їх властивості та наведено біологічну інтерпретацію.

2.1. Q-умовні симетрії та точні розв'язки двокомпонентної системи рівнянь Лотки–Вольтера

2.1.1. Оператори Q-умовної симетрії системи рівнянь Лотки–Вольтера

У цьому підрозділі будемо шукати оператори Q-умовної симетрії вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v)\partial_u + \eta^2(t,x,u,v)\partial_v \tag{2.1}$$

та Q-умовної симетрії першого типу (при $\xi^0 \neq 0$)

$$Q = \xi^0(t,x,u,v)\partial_t + \xi^1(t,x,u,v)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v)\partial_u + \eta^2(t,x,u,v)\partial_v \tag{2.2}$$

двокомпонентної ДСЛВ

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + b_1 u + c_1 v), \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + b_2 u + c_2 v), \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $\lambda_k > 0$, a_k, b_k та c_k — довільні дійсні сталі ($k = 1, 2$), $b_2^2 + c_1^2 \neq 0$; $u = u(t,x)$ та $v = v(t,x)$ — шукані функції (концентрації популяцій).

Оскільки система (2.3) належить до класу систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \lambda_1 u_t + C^1(u,v), \\ v_{xx} &= \lambda_2 v_t + C^2(u,v), \end{aligned} \tag{2.4}$$

то при побудові СВР для знаходження операторів Q-умовної симетрії системи (2.3) використаємо результат, отриманий для системи (2.4), тобто СВР (3.26) [14], яка після підстановки замість довільних функцій C^1 та C^2 відповідно виразів $-u(a_1 + b_1 u + c_1 v)$ та $-v(a_2 + b_2 u + c_2 v)$ має вигляд

$$\xi_{uu} = \xi_{vv} = \xi_{uv} = 0, \tag{2.5}$$

$$\eta^1_{vv} = 0, \tag{2.6}$$

$$\eta^2_{uu} = 0, \tag{2.7}$$

$$2\lambda_1 \xi \xi_u + \eta^1_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \tag{2.8}$$

$$2\lambda_2 \xi \xi_v + \eta^2_{vv} - 2\xi_{xv} = 0, \tag{2.9}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\xi \xi_v + 2\eta^1_{uv} - 2\xi_{xv} = 0, \tag{2.10}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\xi \xi_u + 2\eta^2_{uv} - 2\xi_{xu} = 0, \tag{2.11}$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\xi\eta^1_v+2\eta^1_{xv}+2u(a_1+b_1u+c_1v)\xi_v-2\lambda_1\xi_v\eta^1=0, \tag{2.12}$$

$$(\lambda_2-\lambda_1)\xi\eta^2_u+2\eta^2_{xu}+2v(a_2+b_2u+c_2v)\xi_u-2\lambda_2\xi_u\eta^2=0, \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1(2\xi_u\eta^1-\xi_t-\xi_v\eta^2-2\xi\xi_x)+\lambda_2\xi_v\eta^2-3\xi_u u(a_1+b_1u+c_1v)-\\ -\xi_v v(a_2+b_2u+c_2v)-2\eta^1_{xu}+\xi_{xx}=0,\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2(2\xi_v\eta^2-\xi_t-\xi_u\eta^1-2\xi\xi_x)+\lambda_1\xi_u\eta^1-3\xi_v v(a_2+b_2u+c_2v)-\\ -\xi_u u(a_1+b_1u+c_1v)-2\eta^2_{xv}+\xi_{xx}=0,\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1(\eta^1_t+\eta^2\eta^1_v+2\xi_x\eta^1)-\lambda_2\eta^2\eta^1_v-\eta_1(a_1+2b_1u+c_1v)-c_1\eta_2u+\\ +u(a_1+b_1u+c_1v)(\eta^1_u-2\xi_x)+\eta^1_v v(a_2+b_2u+c_2v)=\eta^1_{xx},\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2(\eta^2_t+\eta^2\eta^2_u+2\xi_x\eta^2)-\lambda_1\eta^1\eta^2_u-\eta_2(a_2+b_2u+2c_2v)-b_2\eta_1v+\\ +\eta^2_u u(a_1+b_1u+c_1v)+v(a_2+b_2u+c_2v)(\eta^2_v-2\xi_x)=\eta^2_{xx}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Перш за все встановимо, що функція ξ не залежить від u і v, а функції η^1 та η^2 є лінійними відносно цих змінних. Дійсно, здиференціювавши (2.10) та (2.11) відповідно за змінними v і u, отримуємо рівняння

$$(\lambda_1+\lambda_2)\xi^2_v=0, \quad (\lambda_1+\lambda_2)\xi^2_u=0,$$

з яких випливає $\xi_u=\xi_v=0$. Отже, розв'язавши рівняння (2.6)–(2.11) при $\xi=\xi(t,x)$, знаходимо загальний вигляд функцій η^1 та η^2, а саме:

$$\begin{aligned}\eta^1&=q^1(t,x)v+r^1(t,x)u+p^1(t,x)\\ \eta^2&=q^2(t,x)u+r^2(t,x)v+p^2(t,x),\end{aligned} \tag{2.18}$$

де q^k, r^k і p^k $(k=1,2)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, які необхідно знайти з визначальних рівнянь (2.12)–(2.17). Підставивши в ці рівняння вирази (2.18), проводимо розщеплення відносно змінних u, v, u^2, v^2 та uv. У підсумку початкова СВР (2.5)–(2.17) для пошуку оператора Q-умовної симетрії

$$Q=\partial_t+\xi\partial_x+(q^1v+r^1u+p^1)\partial_u+(q^2u+r^2v+p^2)\partial_v, \tag{2.19}$$

набуває вигляду

$$(c_1-c_2)q^1=0, \tag{2.20}$$

$$(b_1-b_2)q^2=0, \tag{2.21}$$
$$c_1q^2+b_1(r^1+2\xi_x)=0, \tag{2.22}$$
$$b_2q^1+c_2(r^2+2\xi_x)=0, \tag{2.23}$$
$$(2b_1-b_2)q^1+c_1(r^2+2\xi_x)=0, \tag{2.24}$$
$$(2c_2-c_1)q^2+b_2(r^1+2\xi_x)=0, \tag{2.25}$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)\xi q^1+2q^1_x=0, \tag{2.26}$$
$$(\lambda_2-\lambda_1)\xi q^2+2q^2_x=0, \tag{2.27}$$
$$\lambda_1(\xi_t+2\xi\xi_x)+2r^1_x-\xi_{xx}=0, \tag{2.28}$$
$$\lambda_2(\xi_t+2\xi\xi_x)+2r^2_x-\xi_{xx}=0, \tag{2.29}$$
$$\lambda_1(r^1_t+2r^1\xi_x)+(\lambda_1-\lambda_2)q^1q^2-c_1p^2-$$
$$-2b_1p^1-2a_1\xi_x-r^1_{xx}=0, \tag{2.30}$$
$$\lambda_2(r^2_t+2r^2\xi_x)+(\lambda_2-\lambda_1)q^1q^2-b_2p^1-$$
$$-2c_2p^2-2a_2\xi_x-r^2_{xx}=0, \tag{2.31}$$
$$\lambda_1(q^1_t+2q^1\xi_x)+(\lambda_1-\lambda_2)q^1r^2-(a_1-a_2)q^1-$$
$$-c_1p^1-q^1_{xx}=0, \tag{2.32}$$
$$\lambda_2(q^2_t+2q^2\xi_x)+(\lambda_2-\lambda_1)q^2r^1+(a_1-a_2)q^2-$$
$$-b_2p^2-q^2_{xx}=0, \tag{2.33}$$
$$\lambda_1(p^1_t+2p^1\xi_x)+(\lambda_1-\lambda_2)q^1p^2-a_1p^1-p^1_{xx}=0, \tag{2.34}$$
$$\lambda_2(p^2_t+2p^2\xi_x)+(\lambda_2-\lambda_1)q^2p^1-a_2p^2-p^2_{xx}=0. \tag{2.35}$$

Система (2.20)–(2.35) є перевизначеною системою нелінійних ДРЧП. Результат інтегрування цієї системи подамо у вигляді теорем.

Теорема 2.1. *У випадку $\lambda_1\neq\lambda_2$ ДСЛВ (2.3) Q-умовно інваріантна відносно оператора (2.19) тоді і тільки тоді, коли*

$$b_1=b_2=b,\ c_1=c_2=c. \tag{2.36}$$

У випадку $bc=0, b^2+c^2\neq 0$, з точністю до невироджених локальних перетворень вигляду

$$u\to c_{11}\exp(c_{12}t)u+c_{13}v,\ v\to c_{21}\exp(c_{22}t)v+c_{23}u, \tag{2.37}$$

(тут c_{ij} є деякими сталими) система (2.3) та відповідний оператор мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u), \\ &\lambda_2 v_t = v_{xx} + vu, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} Q = \partial_t + \tfrac{2\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\partial_x + \Big(&\varphi(t)\exp(\alpha_1 x)u + \\ &+ \exp(\alpha_1 x)\big(\lambda_2\varphi'(t) + a_1\varphi(t) - \alpha_1^2\varphi(t)\big) + \alpha_2 v\Big)\partial_v, \ \ \varphi \neq 0, \end{aligned} \tag{2.39}$$

де сталі α_1 і α_2 є довільними, а функція $\varphi(t)$ — розв'язок ЗДР

$$\lambda_2^2\varphi'' + \lambda_2(a_1 - 2\alpha_1^2)\varphi' + \alpha_1^2(\alpha_1^2 - a_1)\varphi = 0. \tag{2.40}$$

У випадку $bc \neq 0$ при додатковому обмеженні

$$q_x^1 = q_x^2 = 0 \tag{2.41}$$

існує лише три випадки, з точністю до невироджених локальних перетворень $u \to c_{11}u$, $v \to c_{21}v$, коли система (2.3) допускає оператори Q-умовної симетрії, а саме:

$$(i) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u + v), \\ &\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a_2 + u + v), \ \ a_1 \neq a_2, \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 v + a_2 u + a_1 a_2)(\partial_u - \partial_v), \ \ a_1 a_2 \neq 0, \tag{2.43}$$

$$Q_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t + (a_1 - a_2)u(\partial_u - \partial_v), \tag{2.44}$$

$$Q_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 - a_2)v(\partial_u - \partial_v). \tag{2.45}$$

$$(ii) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a + u + v), \\ &\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a + u + v), \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - a(v + u + a)(\partial_u - \partial_v), \ \ a \neq 0, \tag{2.47}$$

$$Q_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)t\partial_t - (\lambda_1 v + \lambda_2 u)(\partial_u - \partial_v). \tag{2.48}$$

$$(iii) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a\lambda_1 + u + v), \\ &\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a\lambda_2 + u + v), \quad a \neq 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - a(\lambda_1 v + \lambda_2 u + a\lambda_1\lambda_2)(\partial_u - \partial_v), \tag{2.50}$$

$$Q_2 = \partial_t + au(\partial_u - \partial_v), \tag{2.51}$$

$$Q_3 = \partial_t - av(\partial_u - \partial_v), \tag{2.52}$$

$$Q_4 = (e^{-at} - \alpha(\lambda_1 - \lambda_2))\partial_t + a\alpha(\lambda_1 v + \lambda_2 u + \\ + a\lambda_1\lambda_2)(\partial_u - \partial_v), \ \alpha \neq 0. \tag{2.53}$$

Доведення.

З рівнянь (2.20)–(2.21) випливає необхідність розгляду трьох випадків: *(a)* $b_1 \neq b_2$ та (або) $c_1 \neq c_2$; *(b)* $b_1 = b_2 = b \neq 0, \ c_1 = c_2 = 0$; *(c)* $b_1 = b_2 = b \neq 0, \ c_1 = c_2 = c \neq 0$. Зауважимо, що четвертий випадок $b_1 = b_2 = 0, \ c_1 = c_2 = c \neq 0$ дискретними перетвореннями $u \to v, \ v \to u$ зводиться до випадку *(b)*. Розглянемо кожен з отриманих випадків.

Випадок (a).

Для початку покажемо, що цей випадок веде до обмежень

$$q^1 = 0, \quad q^2 = 0, \tag{2.54}$$

при яких оператор Q буде оператором класичної симетрії ДСЛВ (2.3).

Справді, при $b_1 \neq b_2$ та $c_1 \neq c_2$ обмеження (2.54) отримується безпосередньо з рівнянь (2.20)–(2.21). Якщо $b_1 = b_2 = b$ і $c_1 \neq c_2$, то умова $q^1 = 0$ випливає з (2.20), тоді як умову $q^2 = 0$ можна отримати з рівняння $(c_2 - c_1)q^2 = 0$, яке є різницею рівнянь (2.22) та (2.25). Підвипадок $b_1 \neq b_2, \ c_1 = c_2 = c$ розглядається аналогічно і також веде до обмежень (2.54).

Покажемо, що обмеження (2.54) ведуть до умов

$$p^1 = p^2 = 0. \tag{2.55}$$

Дійсно, з рівнянь (2.32) і (2.33) (за умови (2.54)) отримуємо $c_1 p^1 = 0$ та $b_2 p^2 = 0$. Якщо $c_1 b_2 \neq 0$, то обмеження (2.55) є очевидними. Якщо ж $c_1 b_2 = 0$, наприклад $c_1 = 0, \ b_2 \neq 0$ (підвипадок $c_1 \neq 0, \ b_2 = 0$ розглядається аналогічно), то $p^2 = 0$, а перше рівняння системи (2.3) стає рівнянням Фішера

$$\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u). \tag{2.56}$$

Проте рівняння (2.56) допускає лише такі оператори симетрії Лі [7] :

$$Q = \alpha_1 \partial_t + \alpha_2 \partial_x, \tag{2.57}$$

при довільному значенні параметра a_1, та

$$Q = (2\alpha_0 t + \alpha_1)\partial_t + (\alpha_0 x + \alpha_2)\partial_x - 2\alpha_0 u \partial_u, \tag{2.58}$$

при $a_1 = 0$ (тут α_i — довільні сталі, $i = 0, 1, 2$), і не допускає жодного оператора Q-умовної симетрії [56]. З структури операторів (2.57) та (2.58) випливає умова $p^1 = 0$. Таким чином, розгляд підвипадку $c_1 b_2 = 0$ також приводить до обмежень (2.55).

Враховуючи умови (2.54) і (2.55), СВР (2.20)–(2.35) набуває такого вигляду :

$$b_1(r^1 + 2\xi_x) = 0, \tag{2.59}$$

$$b_2(r^1 + 2\xi_x) = 0, \tag{2.60}$$

$$c_1(r^2 + 2\xi_x) = 0, \tag{2.61}$$

$$c_2(r^2 + 2\xi_x) = 0, \tag{2.62}$$

$$\lambda_1(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^1_x - \xi_{xx} = 0, \tag{2.63}$$

$$\lambda_2(\xi_t + 2\xi\xi_x) + 2r^2_x - \xi_{xx} = 0, \tag{2.64}$$

$$\lambda_1(r^1_t + 2r^1\xi_x) - 2a_1\xi_x - r^1_{xx} = 0, \tag{2.65}$$

$$\lambda_2(r^2_t + 2r^2\xi_x) - 2a_2\xi_x - r^2_{xx} = 0. \tag{2.66}$$

Виявляється, що розв'язок системи рівнянь (2.59)–(2.66) веде лише до операторів класичної симетрії, отриманих в роботі [29].

Розв'язок цієї системи залежить від значення параметрів ДСЛВ (2.3). Зокрема, проаналізувавши рівняння (2.59)–(2.62), отримуємо два різні підвипадки : *(a1)* $b_2 c_1 \neq 0$ та *(a2)* $b_2 c_1 = 0$.

Оскільки аналіз підвипадків ідентичний, то розглянемо лише підвипадок *(a1)*. З рівнянь (2.60) і (2.61) знаходимо

$$r^1 = r^2 = -2\xi_x. \tag{2.67}$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то з рівнянь (2.63), (2.64) та (2.67) маємо систему

$$\xi_t + 2\xi\xi_x = 0,$$
$$\xi_{xx} = 0,$$

загальним розв'язком якої є функція

$$\xi(t,x) = \frac{\alpha_0 x + \alpha_2}{2\alpha_0 t + \alpha_1}, \tag{2.68}$$

де $\alpha_0,\ \alpha_1$ і α_2 — довільні сталі ($\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$).

Підставивши (2.67) та (2.68) в рівняння (2.65)–(2.66), отримуємо оператор $\partial_t + \frac{\alpha_0 x+\alpha_2}{2\alpha_0 t+\alpha_1}\partial_x - \frac{2\alpha_0}{2\alpha_0 t+\alpha_1}(u\partial_u + v\partial_v)$ при $a_1 = a_2 = 0$, який еквівалентний до оператора $(2\alpha_0 t+\alpha_1)\partial_t + (\alpha_0 x+\alpha_2)\partial_x - 2\alpha_0(u\partial_u + v\partial_v)$, що є оператором Лі ДСЛВ [29]. Якщо ж $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то з рівнянь (2.65)–(2.66) знаходимо оператор Лі $\partial_t + \alpha\partial_x$.

Отже, випадок *(a)* повністю проаналізовано.

Випадок (b).

При розгляді цього випадку система (2.3), після виконання перетворень $u \to \frac{u}{b},\ v \to \exp(\frac{a_2}{\lambda_2}t)v$ (з множини перетворень (2.37)), має вигляд (2.38). Подальший хід доведення буде спиратись на таке очевидне твердження: якщо оператор (2.19) є оператором Q-умовної симетрії напівзачепленої системи (2.38), то оператор $Q^* = \partial_t + \xi\partial_x + (q^1 v + r^1 u + p^1)\partial_u$ є оператором Q-умовної симетрії рівняння Фішера (2.56). Таким чином, використавши оператори (2.57) та (2.58) рівняння Фішера, отримуємо підвипадки, в яких система (2.38) може допускати оператори Q-умовної симетрії вигляду (2.19), а саме:

$$(b1)\ Q = \partial_t + \alpha\partial_x + (q^2 u + r^2 v + p^2)\partial_v,\ \alpha = const, \tag{2.69}$$

при довільно вибраній сталій a_1;

$$(b2)\ Q = \partial_t + \frac{\alpha_0 x + \alpha_2}{2\alpha_0 t + \alpha_1}\partial_x - \frac{2\alpha_0}{2\alpha_0 t + \alpha_1}u\partial_u + (q^2 u + r^2 v + p^2)\partial_v, \tag{2.70}$$

при $a_1 = 0$.

У кожному з підвипадків умова $q^2 \neq 0$ є необхідною та достатньою умовою того, що знайдені оператори не є ліївськими.

Розгляд *підвипадку (b1).*

Знайдемо невідомі функції $q^2,\ r^2$, та p^2 оператора (2.69) з СВР (2.20)–(2.35) :

$$\begin{aligned}
&r^2_x = r^2_t = 0,\\
&(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha\, q^2 + 2q^2_x = 0,\\
&\lambda_2 q^2_t + a_1 q^2 - p^2 - q^2_{xx} = 0,\\
&\lambda_2 p^2_t - p^2_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Загальний розв'язок системи (2.71), після виконання заміни $\alpha = \frac{2\alpha_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, має вигляд

$$\begin{aligned}
&r^2 = \alpha_2, \quad q^2 = \varphi(t)\exp(\alpha_1 x),\\
&p^2 = \exp(\alpha_1 x)\Big(\lambda_2\varphi'(t) + a_1\varphi(t) - \alpha_1^2\varphi(t)\Big),
\end{aligned}$$

де α_2 — довільна стала, а функція $\varphi(t)$ є розв'язком ЗДР (2.40).

Отже, при розгляді підвипадку *(b1)* отримано систему (2.38) і відповідний їй оператор Q-умовної симетрії (2.39).

Розгляд *підвипадку (b2)* при $\alpha_0 \neq 0$ (у протилежному випадку оператори (2.69) та (2.70) збігаються) приводить лише до умови $q^2 = 0$ та ліївських операторів.

Випадок (c).

Система (2.3), після виконання перетворень $u \to \frac{u}{b}$, $v \to \frac{v}{c}$, має вигляд (2.42). З рівнянь (2.26) та (2.27) при додаткових обмеженнях (2.41) маємо, що якщо $\xi \neq 0$, то $q^1 = q^2 = 0$ і отримані оператори будуть операторами Лі (випадок *(a)*). Отже, лише при $\xi = 0$ та $(q^1)^2 + (q^2)^2 \neq 0$ можна знайти оператори, нееквівалентні операторам класичної симетрії. СВР (2.20)–(2.35) при $\xi = 0$ має такий вигляд :

$$q^1 = -r^2 = -\psi(t), \tag{2.72}$$

$$q^2 = -r^1 = -\varphi(t), \tag{2.73}$$

$$\lambda_1 r^1_t + (\lambda_1 - \lambda_2) q^1 q^2 - p^2 - 2p^1 = 0, \tag{2.74}$$

$$\lambda_2 r^2_t + (\lambda_2 - \lambda_1) q^1 q^2 - p^1 - 2p^2 = 0, \tag{2.75}$$

$$\lambda_1 q^1_t + (\lambda_1 - \lambda_2) q^1 r^2 - (a_1 - a_2) q^1 - p^1 = 0, \tag{2.76}$$

$$\lambda_2 q^2_t + (\lambda_2 - \lambda_1) q^2 r^1 + (a_1 - a_2) q^2 - p^2 = 0, \tag{2.77}$$

$$p^1_x = p^2_x = 0, \tag{2.78}$$

$$\lambda_1 p^1_t + (\lambda_1 - \lambda_2) q^1 p^2 - a_1 p^1 = 0, \tag{2.79}$$

$$\lambda_2 p^2_t + (\lambda_2 - \lambda_1) q^2 p^1 - a_2 p^2 = 0. \tag{2.80}$$

З рівнянь (2.76)–(2.77) отримуємо

$$\begin{aligned} p^1 &= (a_1 - a_2)\psi(t) + (\lambda_2 - \lambda_1)\psi^2(t) - \lambda_1 \psi'(t), \\ p^2 &= (a_2 - a_1)\varphi(t) + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi^2(t) - \lambda_2 \varphi'(t). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Підставивши (2.72), (2.73) та (2.81) в рівняння (2.74)–(2.75), маємо таку систему ЗДР на функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = &-\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\big(a_2 - a_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi)\big) \times \\ &\times \big((3\lambda_1 - \lambda_2)\varphi + 2\lambda_2 \psi\big), \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} \psi'(t) = &\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\big(a_2 - a_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi)\big) \times \\ &\times \big(2\lambda_1 \varphi + (3\lambda_2 - \lambda_1)\psi\big). \end{aligned} \tag{2.83}$$

Оскільки в нас є ще нерозглянуті рівняння (2.79)–(2.80), то для отримання остаточного результату необхідно підставити в них (2.72)–(2.73) та (2.81)–(2.83). У підсумку отримуємо два алгебраїчні рівняння, різницю яких можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &\Big(a_1 - a_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi + \psi)\Big)\Big(a_1(4\lambda_1 + 5\lambda_2) - a_2(5\lambda_1 + 4\lambda_2) - \\ &-4(\lambda_1 - \lambda_2)\big((2\lambda_1 + \lambda_2)\varphi + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\psi\big)\Big)(\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi) = 0. \end{aligned} \tag{2.84}$$

З рівняння (2.84) випливають три підвипадки:

(c1) $\varphi = -\psi + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$;

(c2) $\varphi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\psi$;

(c3) $\varphi = \frac{1}{4(\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1+\lambda_2)}\Big((4a_1-5a_2)\lambda_1+(5a_1+4a_2)\lambda_2-4(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)\psi\Big).$

У підвипадку *(c1)* кожне з рівнянь (2.79) та (2.80) зводиться до рівняння

$$\Big(a_1-(\lambda_1-\lambda_2)\psi\Big)\psi\Big(a_1-a_2-(\lambda_1-\lambda_2)\psi\Big)=0.$$

Таким чином, якщо $\psi=\frac{a_1}{\lambda_1-\lambda_2}$, то $\varphi=-\frac{a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$. Знайшовши з (2.72)–(2.73) та (2.81) функції $q^1,\ q^2,\ p^1$ і p^2, отримуємо оператор (2.43).
Якщо $\psi=0$, то $\varphi=\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, що веде до оператора (2.44).

Якщо $\psi=\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, то $\varphi=0$, що веде до оператора (2.45).

Отже, при розгляді підвипадку *(c1)* знайдено всі оператори з випадку *(i)* теореми 2.1.

У підвипадку *(c2)* кожне з рівнянь (2.79) та (2.80) зводиться до рівняння

$$\psi(t)(a_1-a_2)(a_1\lambda_2-a_2\lambda_1)=0. \tag{2.85}$$

Оскільки при $\psi(t)=0$ отримуємо лише оператор Лі $Q=\partial_t$, то з рівняння (2.85) випливає: $a_1=a_2$ (система (2.46)) і $a_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_2$ (система (2.49)).

Якщо $a_1=a_2$, то з рівняння (2.83) знаходимо

$$\psi(t)=\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)t+\alpha},\ \alpha=const.$$

Не втрачаючи загальності можна покласти $\alpha=0$. Знайшовши функції p^1 та p^2 з (2.81), маємо оператор (2.48). Оператор (2.47) отримується з (2.43) при $a_1=a_2=a$. Отже, розгляд підвипадку *(c2)* при $a_1=a_2$ завершено, при цьому отримано всі оператори з випадку *(ii)* теореми 2.1.

Якщо $a_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_2,\ a_2\neq 0$ (при $a_2=0$ отримуємо оператори з випадку *(ii)* теореми 2.1), то з рівняння (2.83) знаходимо

$$\psi(t)=-\frac{\alpha_0a_2\lambda_1}{\exp(-\frac{a_2}{\lambda_2}t)-\alpha_0(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2},$$

де α_0 — довільна ненульова стала. Таким чином, перепозначивши $a_2 = a\lambda_2$ та $\lambda_2\alpha_0 = \alpha$, отримуємо оператор (2.53). Оператори (2.50), (2.51) і (2.52) отримуються відповідно з (2.43), (2.44) та (2.45) при $a_1 = a\lambda_1$ і $a_2 = a\lambda_2$. Отже, розгляд підвипадку *(c2)* при $a_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_2$ приводить до випадку *(iii)* теореми 2.1.

Розгляд підвипадку *(c3)* проводиться аналогічно і до нових операторів не приводить.

Теорему доведено.

Теорема 2.2. *У випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ ДСЛВ (2.3) допускає лише такі оператори Q-умовної симетрії вигляду (2.1), які еквіваленті операторам симетрії Лі цієї системи.*

Доведення теореми 2.2 ґрунтується на розв'язанні СВР (2.20)–(2.35) при $\lambda_1 = \lambda_2$. Оскільки рівняння (2.26)–(2.27) у випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ з необхідністю ведуть до умов (2.41), то доведення повністю аналогічне до теореми 2.1.

Оскільки навіть при побудові операторів Q-умовної симетрії (некласичної симетрії) для ДСЛВ (2.3) ми отримали нелінійну перевизначену систему ДРЧП, яку складно проінтегрувати (у випадку $bc \neq 0$, див. теорему 2.1, без виконання додаткового обмеження (2.41) система залишилася нерозв'язаною), то досить актуальним є використання нових типів симетрій (Q-умовна симетрія p-того типу, див. підрозділ 1.2), які дозволяють спростити відповідну СВР (проте система залишається нелінійною), що дає можливість знаходити повний опис операторів для значно ширших класів систем ДРЧП.

Отже, користуючись означенням 1.4, ми отримали таку теорему.

Теорема 2.3. *У випадку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ДСЛВ (2.3) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу вигляду (2.2), з точністю до невироджених локальних перетворень (2.37), лише у двох випадках:*

$$(i) \quad \begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u + v), \\ &\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a_2 + u + v), \qquad a_1 \neq a_2, \end{aligned}$$

$$Q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t + (a_1 - a_2)u(\partial_u - \partial_v),$$
$$Q_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (a_1 - a_2)v(\partial_u - \partial_v).$$

$$(ii) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + u), \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + vu, \end{aligned}$$

$$Q = \partial_t + \tfrac{2\alpha_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\partial_x + \Big(\varphi(t)\exp(\alpha_1 x)u +$$
$$+\exp(\alpha_1 x)\big(\lambda_2\varphi'(t) + a_1\varphi(t) - \alpha_1^2\varphi(t)\big) + \alpha_2 v\Big)\partial_v,\ \ \varphi \neq 0,$$

де сталі α_1 та α_2 є довільними, а функція $\varphi(t)$ — розв'язок ЗДР (2.40).

Доведення теореми ґрунтується на розв'язанні відповідної СВР, яка виявилася простішою, ніж СВР (2.20)–(2.35), тому була повністю проінтегрована. Деталі доведення ми опускаємо, оскільки в розділі 3 теорема буде узагальнена на клас систем рівнянь РД (2.4), який містить ДСЛВ (2.3).

Зауваження 2.1. Випадок *(i)* теореми 2.3 отримується з випадку 1 таблиці 3.1, тоді як випадок *(ii)* — із випадку 9 цієї таблиці.

2.1.2. Неліївські анзаци та редукція до систем звичайних диференціальних рівнянь

Застосуємо отримані оператори Q-умовної симетрії для побудови анзаців та проведення редукції ДСЛВ до систем ЗДР. Важливо відзначити, що подані в теоремі 2.1 системи (2.42) (при $a_1 \neq a_2$), (2.46) ($a \neq 0$) і (2.49) ($a \neq 0$) допускають лише тривіальну алгебру Лі з базисними операторами зсуву за змінними t та x. Отже, при їх застосуванні будуть отримані лише розв'язки у вигляді біжучої хвилі. Таким чином, знайдені для операторів некласичної симетрії анзаци (неліївські анзаци) будуть суттєво відрізнятися від ліївських, що в свою чергу дасть змогу побудувати нові точні розв'язки ДСЛВ.

Оскільки алгоритм побудови анзаців для операторів Q-умовної симетрії є відомий (див. наприклад [55, 57]), то ми зупинимось лише на проведені редукції для оператора (2.39) системи (2.38). Для всіх операторів з теореми 2.1 відповідні анзаци та редуковані системи подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Анзаци та редуковані системи ЗДР для ДСЛВ з теореми 2.1

№, Q	Анзаци	Системи ЗДР
1. (2.88)	$u=\varphi_1(\omega),\ \omega=x-C_1t,$ $v=\varphi_2(\omega)e^{C_2t}+\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega+At\right)\times$ $\Big((C_3+C_4\exp(-\frac{a_1}{\lambda_2}t))\varphi_1(\omega)+a_1C_3\Big)$	$\varphi_1''+C_1\lambda_1\varphi_1'+(a_1+\varphi_1)\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+C_1\lambda_2\varphi_2'+\varphi_2(\varphi_1-C_2\lambda_2)=0,$ $(A-C_2)(A-C_2-\frac{a_1}{\lambda_2})\neq 0$
2. (2.88)	$u=\varphi_1(\omega),\ \omega=x-C_1t,$ $v=\varphi_2(\omega)e^{At}+\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega+At\right)\times$ $\Big((C_3t+C_4\exp(-\frac{a_1}{\lambda_2}t))\varphi_1(\omega)+a_1C_3t\Big)$	$\varphi_1''+C_1\lambda_1\varphi_1'+(a_1+\varphi_1)\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+C_1\lambda_2\varphi_2'+\varphi_2(\varphi_1-A\lambda_2)+$ $C_3\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega\right)(\varphi_1-\lambda_2a_1)=0$
3. (2.88)	$u=\varphi_1(\omega),\ \omega=x-C_1t,$ $v=\varphi_2(\omega)\exp\left((A-\frac{a_1}{\lambda_2})t\right)+$ $\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega+At\right)\Big((C_3+$ $C_4\exp(-\frac{a_1}{\lambda_2}t))\varphi_1(\omega)+a_1C_3\Big)$	$\varphi_1''+C_1\lambda_1\varphi_1'+(a_1+\varphi_1)\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+C_1\lambda_2\varphi_2'+\varphi_2(\varphi_1+a_1-A\lambda_2)-$ $\lambda_2C_4\varphi_1\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega\right)=0$
4. (2.89)	$u=\varphi_1(\omega),\ \omega=x-C_1t,$ $v=\varphi_2(\omega)e^{C_2t}+\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega+At\right)\times$ $\Big((C_3+C_4t)\varphi_1(\omega)+\lambda_2C_4\Big)$	$\varphi_1''+C_1\lambda_1\varphi_1'+\varphi_1^2=0,$ $\varphi_2''+C_1\lambda_2\varphi_2'+\varphi_2(\varphi_1-C_2\lambda_2)=0,$ $C_2\neq A$
5. (2.89)	$u=\varphi_1(\omega),\ \omega=x-C_1t,$ $v=\varphi_2(\omega)e^{At}+\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega+At\right)\times$ $\Big((C_3+C_4t^2))\varphi_1(\omega)+2\lambda_2C_4t\Big)$	$\varphi_1''+C_1\lambda_1\varphi_1'+(a_1+\varphi_1)\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+C_1\lambda_2\varphi_2'+\varphi_2(\varphi_1-A\lambda_2)-$ $2\lambda_2^2C_4\exp\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega\right)=0$
6. (2.43)	$u=\frac{1}{a_1-a_2}\Big(-\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)\varphi_2(x)+$ $a_1\varphi_1(x)+a_1a_2\Big),$ $v=\frac{1}{a_1-a_2}\Big(\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)\varphi_2(x)-$ $a_2\varphi_1(x)-a_1a_2\Big)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+(a_1+a_2)\varphi_1+$ $a_1a_2=0,$ $\varphi_2''+\frac{a_2\lambda_1-a_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi_2+\varphi_1\varphi_2=0$
7. (2.44)	$u=\varphi_2(x)\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t),$ $v=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+a_2\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+\frac{a_2\lambda_1-a_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi_2+\varphi_1\varphi_2=0$

№, Q	Анзаци	Системи ЗДР
8. (2.45)	$u=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t),$ $v=\varphi_2(x)\exp(\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+a_1\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+\frac{a_2\lambda_1-a_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi_2+\varphi_1\varphi_2=0$
9. (2.47)	$u=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-\frac{a}{\lambda_1-\lambda_2}(\varphi_1(x)+a)t,$ $v=\varphi_2(x)+\frac{a}{\lambda_1-\lambda_2}(\varphi_1(x)+a)t$	$\varphi_1''+(a+\varphi_1)^2=0,$ $\varphi_2''+(\varphi_2-\frac{a\lambda 2}{\lambda_1-\lambda_2})(a+\varphi_1)=0$
10. (2.48)	$u=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big(\lambda_1\varphi_1(x)-t\varphi_2(x)\big),$ $v=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big(-\lambda_2\varphi_1(x)+t\varphi_2(x)\big)$	$\varphi_1''+\varphi_2+\varphi_1(a+\varphi_1)=0,$ $\varphi_2''+\varphi_2(a+\varphi_1)=0$
11. (2.50)	$u=\frac{1}{a(\lambda_1-\lambda_2)}\big(-e^{at}\varphi_2(x)+$ $a\lambda_1\varphi_1(x)-a^2\lambda_1\lambda_2\big),$ $v=\frac{1}{a(\lambda_1-\lambda_2)}\big(e^{at}\varphi_2(x)-a\lambda_2\varphi_1(x)-a^2\lambda_1\lambda_2\big)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+a(\lambda_1+\lambda_2)\varphi_1+$ $a^2\lambda_1\lambda_2=0,$ $\varphi_2''+\varphi_1\varphi_2=0$
12. (2.51)	$u=e^{at}\varphi_2(x),$ $v=\varphi_1(x)-e^{at}\varphi_2(x)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+a\lambda_2\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+\varphi_1\varphi_2=0$
13. (2.52)	$u=\varphi_1(x)-e^{at}\varphi_2(x),$ $v=e^{at}\varphi_2(x)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2+a\lambda_1\varphi_1=0,$ $\varphi_2''+\varphi_1\varphi_2=0$
14. (2.53)	$u=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big(\lambda_1\varphi_1(x)+a\lambda_1\lambda_2-$ $\varphi_2(x)(1-\alpha(\lambda_1-\lambda_2)e^{at})\big),$ $v=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\big(\varphi_2(x)(1-\alpha(\lambda_1-\lambda_2)e^{at})-$ $\lambda_2\varphi_1(x)-a\lambda_1\lambda_2\big)$	$\varphi_1''+\varphi_1^2-a\varphi_2+$ $a(\lambda_1+\lambda_2)\varphi_1+a^2\lambda_1\lambda_2=0,$ $\varphi_2''+\varphi_1\varphi_2=0$

Зауваження 2.2. У таблиці 2.1 в першому стовпчику поряд з номерами випадків подано номери формул операторів Q-умовної симетрії, для яких побудовано анзаци.

Для початку знайдемо функцію $\varphi(t)$, яка присутня в операторі (2.39), у явному вигляді. Проінтегрувавши рівняння (2.40), отримуємо його загальний розв'язок :

$$\varphi=\exp\Big(\frac{\alpha_1^2}{\lambda_2}t\Big)\big(\alpha_3+\alpha_4\exp(-\frac{a_1}{\lambda_2}t)\big),\ a_1\neq 0, \tag{2.86}$$

$$\varphi=\exp\Big(\frac{\alpha_1^2}{\lambda_2}t\Big)\big(\alpha_3+\alpha_4 t\big),\ a_1=0, \tag{2.87}$$

де α_3 та α_4 — довільні сталі ($\alpha_3^2 + \alpha_4^2 \neq 0$).

Для функцій з (2.86) і (2.87) отримуємо відповідно такі оператори системи (2.38):

$$\begin{aligned}Q_1 = \partial_t + \tfrac{2\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\partial_x + \Big(&\exp(\alpha_1 x + \tfrac{\alpha_1^2}{\lambda_2}t)\big((\alpha_3 + \alpha_4\exp(-\tfrac{a_1}{\lambda_2}t))u+\\ &+\alpha_3 a_1\big) + \alpha_2 v\Big)\partial_v,\ a_1 \neq 0,\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}Q_2 = \partial_t + \tfrac{2\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\partial_x + \Big(&\exp(\alpha_1 x + \tfrac{\alpha_1^2}{\lambda_2}t)\big((\alpha_3 + \alpha_4 t)u+\\ &+\alpha_4\lambda_2\big) + \alpha_2 v\Big)\partial_v,\ a_1 = 0.\end{aligned} \tag{2.89}$$

При побудові анзацу, який відповідатиме цим операторам, необхідно розв'язати таку лінійну систему ДРЧП:

$$Q_i(u) = 0, \quad Q_i(v) = 0,\ i = 1, 2. \tag{2.90}$$

Розв'язавши систему (2.90) для оператора (2.88), знаходимо загальний розв'язок (шуканий анзац) у вигляді

$$\begin{aligned}&u = \varphi_1(\omega), \qquad \omega = x - \tfrac{2\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2}t,\\ &v = e^{\alpha_2 t}\Big(\varphi_2(\omega) + \alpha_3(\varphi_1 + a_1)\int\Big(\exp\big(\alpha_1\omega + (A-\alpha_2)t\big)\Big)dt+\\ &\qquad \alpha_4\varphi_1\int\Big(\exp\big(\alpha_1\omega + (A-\alpha_2-\tfrac{a_1}{\lambda_2})t\big)\Big)dt\Big),\end{aligned} \tag{2.91}$$

де $A = \frac{2\alpha_1^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{\alpha_1^2}{\lambda_2}$. При обчислені інтегралів у виразі (2.91) необхідно розглянути три випадки: *(a)* $(A-\alpha_2)(A-\alpha_2-\frac{a_1}{\lambda_2}) \neq 0$; *(b)* $A = \alpha_2$; *(c)* $A = \alpha_2 + \frac{a_1}{\lambda_2}$. Розглянемо детальніше перший випадок. Ввівши позначення

$$C_1 = \frac{2\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2},\ C_2 = \alpha_2,\ C_3 = \frac{\alpha_3}{A-\alpha_2},\ C_4 = \frac{\alpha_4}{A-\alpha_2-\frac{a_1}{\lambda_2}}$$

та обчисливши інтеграли в (2.91), отримуємо такий анзац (випадок 1 таблиці 2.1):

$$\begin{aligned}&u = \varphi_1(\omega), \qquad \omega = x - C_1 t,\\ &v = \varphi_2(\omega)e^{C_2 t} + \exp\big(\tfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}C_1\,\omega + At\big)\Big((C_3+\\ &\qquad C_4\exp(-\tfrac{a_1}{\lambda_2}t))\varphi_1(\omega) + a_1 C_3\Big),\end{aligned} \tag{2.92}$$

де $A = \frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{4\lambda_2}C_1^2$.

Знайшовши з (2.92) вирази для похідних u_t, v_t, u_{xx} і v_{xx} та підставивши їх в систему (2.38), маємо редуковану систему ЗДР

$$\begin{aligned}&\varphi_1'' + C_1\lambda_1\varphi_1' + (a_1+\varphi_1)\varphi_1 = 0,\\ &\varphi_2'' + C_1\lambda_2\varphi_2' + \varphi_2(\varphi_1 - C_2\lambda_2) = 0.\end{aligned}$$

При розгляді випадків *(b)* і *(c)* отримано відповідно випадки 2 та 3 таблиці 2.1.

Аналогічним чином можна розглянути оператор (2.89) (веде до випадків 4 та 5 таблиці 2.1) і оператори з випадків (i) (випадки 6–8 таблиці 2.1), (ii) (випадки 9–10 таблиці 2.1) та (iii) (випадки 11–14 таблиці 2.1) теореми 2.1.

2.1.3. Точні розв'язки та їх біологічна інтерпретація

Спершу відзначимо, що довільний розв'язок $u_0(t,x)$, $v_0(t,x)$ цієї системи буде породжувати двопараметричну сім'ю розв'язків $u_0(t+t_0, x+x_0)$, $v_0(t+t_0, x+x_0)$, оскільки ДСЛВ (2.3) є інваріантною відносно зсувів за змінними t та x. Беручи це до уваги, в отриманих нижче розв'язках будемо класти $t_0 = x_0 = 0$.

Побудуємо точні розв'язки ДСЛВ, використавши деякі анзаци і редуковані системи з таблиці 2.1. Оскільки перші 5 випадків таблиці 2.1 стосуються системи (2.38), то ми їх не розглядаємо (ця система є напівзачепленою, а отже, мало цікавою щодо застосування).

Розглянемо анзац та відповідну систему ЗДР з шостого випадку таблиці 2.1:

$$\begin{aligned}&u(t,x) = \tfrac{1}{a_1-a_2}\big(-\exp(\tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)\varphi_2(x) + a_1\varphi_1(x) + a_1a_2\big),\\ &v(t,x) = \tfrac{1}{a_1-a_2}\big(\exp(\tfrac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}t)\varphi_2(x) - a_2\varphi_1(x) - a_1a_2\big),\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1'' + \varphi_1^2 + (a_1+a_2)\varphi_1 + a_1a_2 = 0,\\ &\varphi_2'' + \tfrac{a_2\lambda_1 - a_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 = 0.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Наголосимо, що (2.94) є нелінійною системою двох ЗДР 2-го порядку і на теперішній день відомо небагато випадків, коли вдається побудувати загальний розв'язок таких систем. Навіть попри те, що ця система зводиться до ЗДР 4-го порядку, його розв'язки не є відомими (див. [17]).

Оскільки загальний розв'язок системи (2.94) невідомий, то зупинимось на побудові її частинних розв'язків.

Припустивши, що $\varphi_1 = \alpha = const$, отримуємо

$$\alpha^2 + (a_1 + a_2)\alpha + a_1 a_2 = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 = -a_1, \ \alpha_2 = -a_2.$$

Таким чином, підставивши значення $\varphi_1 = -a_1$ (випадок $\varphi_1 = -a_2$ приводить до розв'язків з подібною структурою) в друге рівняння системи (2.94), маємо

$$\varphi_2'' - \beta\lambda_1\varphi_2 = 0, \tag{2.95}$$

де $\beta = \frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} \neq 0$. В залежності від знаку параметру β знаходимо дві сім'ї загальних розв'язків рівняння (2.95), яким відповідають такі точні розв'язки ДСЛВ (2.42) :

$$u(t,x) = -a_1 + \tfrac{1}{a_2-a_1}\big(C_1\exp(\sqrt{\beta\lambda_1}x) + C_2\exp(-\sqrt{\beta\lambda_1}x)\big)e^{\beta t},$$
$$v(t,x) = \tfrac{1}{a_1-a_2}\big(C_1\exp(\sqrt{\beta\lambda_1}x) + C_2\exp(-\sqrt{\beta\lambda_1}x)\big)e^{\beta t},$$

якщо $\beta > 0$, та

$$\begin{aligned} u(t,x) &= -a_1 + \tfrac{1}{a_2-a_1}\big(C_1\cos(\sqrt{-\beta\lambda_1}x) + C_2\sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x)\big)e^{\beta t}, \\ v(t,x) &= \tfrac{1}{a_1-a_2}\big(C_1\cos(\sqrt{-\beta\lambda_1}x) + C_2\sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x)\big)e^{\beta t}, \end{aligned} \tag{2.96}$$

якщо $\beta < 0$ (тут C_1 та C_2 — довільні сталі).

Очевидно, що випадок $\beta > 0$ не придатний для адекватної інтерпретації, оскільки передбачає необмежене зростання обох популяцій.

Таким чином, на особливу увагу заслуговує лише останній розв'язок. Справді, перепишемо ДСЛВ (2.42) та її розв'язок (2.96) (при $C_1 = 0$), виконавши заміну $u = -bU, \ v = -cV \ (b > 0, \ c > 0)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_t &= U_{xx} + U(a_1 - bU - cV), \\ \lambda_2 V_t &= V_{xx} + V(a_2 - bU - cV), \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned} &U(t,x) = \tfrac{a_1}{b} + \tfrac{1}{(a_1-a_2)b}\, C_2 \sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x)e^{\beta t}, \\ &V(t,x) = \tfrac{1}{(a_2-a_1)c}\, C_2 \sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x)e^{\beta t}, \end{aligned} \tag{2.98}$$

де $\beta = \frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2} < 0$. Добре відомо [39, 79], що система (2.97) при додатних параметрах є типовою математичною моделлю для опису змагання між популяціями. Проаналізувавши властивості розв'язку (2.98), результат можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема 2.4. *Класичний розв'язок крайової задачі для ДСЛВ (2.97) з початковими*

$$U(0,x) = \tfrac{a_1}{b} + \tfrac{1}{(a_1-a_2)b}\, C_2 \sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x),$$
$$V(0,x) = \tfrac{1}{(a_2-a_1)c}\, C_2 \sin(\sqrt{-\beta\lambda_1}x),$$

та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &x = 0: \ U = \tfrac{a_1}{b},\ V = 0, \\ &x = \tfrac{\pi}{\sqrt{-\beta\lambda_1}}: \ U = \tfrac{a_1}{b},\ V = 0, \end{aligned}$$

в області $\Omega = \left\{(t,x) \in (0,+\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{-\beta\lambda_1}}\right)\right\}$ *має вигляд (2.98).*

Добре видно, що розв'язок (2.98) прямує до стаціонарної точки $(\frac{a_1}{b}, 0)$ системи (2.97) при $t \to +\infty$. Отже, цей розв'язок описує змагання між двома видами, при якому вид U домінує, тоді як вид V вимирає. Приклад розв'язку (2.98) при фіксованих значеннях параметрів, представлено на рисунку 2.1.

Побудуємо тепер нові точні розв'язки системи (2.94) з складнішою структурою. Виконавши заміну

$$\varphi_1 = \varphi - a_1, \tag{2.99}$$

перепишемо перше рівняння системи (2.94) у вигляді

$$\varphi'' + \varphi^2 + (a_2 - a_1)\varphi = 0. \tag{2.100}$$

Розв'язок рівняння (2.100) в параметричній формі має такий вигляд [17] :

$$\begin{aligned} &\varphi = -\tfrac{3}{2}(a_1 - a_2)\tau, \\ &x = \pm(a_1 - a_2)^{-\frac{1}{2}} \int (C_1 + \tau^3 + \tau^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2,\ a_1 > a_2; \end{aligned}$$

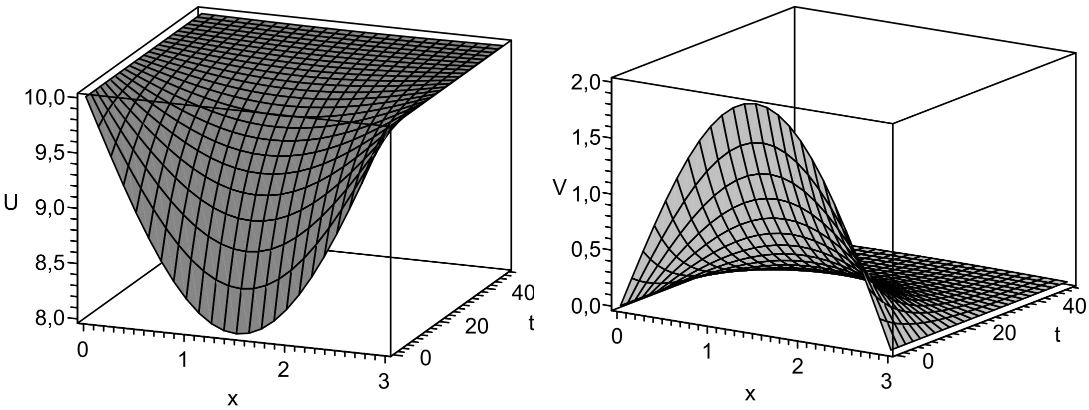

Рис. 2.1: Розв'язок (2.98) системи (2.97) з $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \lambda_1 = 11,\ \lambda_2 = 1,\ b = 0.1,\ c = 0.1,\ \ C_2 = 0.2,\ \beta = \ -0.1.$

$$\varphi = \tfrac{3}{2}(a_1 - a_2)\tau,$$
$$x = \pm(a_2 - a_1)^{-\frac{1}{2}} \int (C_1 + \tau^3 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2,\ a_1 < a_2.$$

Поклавши $C_1 = C_2 = 0$, знаходимо частинний розв'язок рівняння (2.100) у явному вигляді, а саме:

$$\varphi = \frac{3}{2}(a_1 - a_2)\big(1 - \tanh^2(\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)\big), \tag{2.101}$$

при $a_1 > a_2$, та

$$\varphi = \frac{3}{2}(a_1 - a_2)\big(1 + \tan^2(\frac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_1}\, x)\big), \tag{2.102}$$

при $a_1 < a_2$.

Підставивши функцію $\varphi(x)$ із (2.101) (з урахуванням (2.99)) в друге рівняння системи (2.94), отримуємо ЗДР

$$\varphi_2'' + \varphi_2(a_1 - a_2)\Big(\frac{\lambda_1 - 3\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3}{2}\tanh^2(\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)\Big) = 0,$$

загальний розв'язок якого при довільних параметрах λ_i $(i = 1, 2)$ є невідомий. Проте можна знайти його загальний розв'язок при певних обмеженнях на ці параметри. Зокрема, при $\lambda_1 = \frac{9}{5}\lambda_2$ та $\lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda_2$ відповідно отримуємо [92]

$$\varphi_2 = f_1(x)\Big(C_1 + C_2 \int \frac{1}{f_1^2(x)}\, dx\Big), \tag{2.103}$$

та

$$\varphi_2 = f_2(x)\Big(C_1 + C_2 \int \frac{1}{f_2^2(x)}\, dx\Big), \tag{2.104}$$

де C_1 та C_2 — довільні сталі, $f_1(x) = \cosh^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)$, $f_2(x) = \sinh(\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)\cosh^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)$.

Отже, підставивши знайдені функції φ_1 і φ_2 (див. формули (2.99), (2.101), (2.103) та (2.104)) в анзац (2.93), отримуємо точні розв'язки ДСЛВ (2.42):

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{3}{2}a_1\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x) - \\ &\quad - f_1(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{f_1^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{5(a_1-a_2)}{4\lambda_2}t), \\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2(1 - \tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)) + \\ &\quad + f_1(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{f_1^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{5(a_1-a_2)}{4\lambda_2}t), \end{aligned} \tag{2.105}$$

(тут і нижче $C_i^* = \frac{1}{a_1 - a_2}C_i$) при $a_1 > a_2$ та $\lambda_1 = \frac{9}{5}\lambda_2$;

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{3}{2}a_1\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x) - \\ &\quad - f_2(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{f_2^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{3(a_1-a_2)}{\lambda_2}t), \\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2(1 - \tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}\, x)) + \\ &\quad + f_2(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{f_2^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{3(a_1-a_2)}{\lambda_2}t), \end{aligned} \tag{2.106}$$

при $a_1 > a_2$ та $\lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda_2$.

Аналогічним чином можна побудувати точний розв'язок ДСЛВ (2.42) при $a_1 < a_2$, використавши знайдену функцію $\varphi(x)$ вигляду (2.102), а саме:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{3}{2}a_1\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_1}\, x) - \\ &\quad - g_1(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{g_1^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{5(a_1-a_2)}{4\lambda_2}t), \\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2(1 + \tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_1}\, x)) + \\ &\quad + g_1(x)\Big(C_1^* + C_2^* \textstyle\int \frac{1}{g_1^2(x)}\, dx\Big)\exp(\tfrac{5(a_1-a_2)}{4\lambda_2}t), \end{aligned} \tag{2.107}$$

при $a_1 < a_2$ та $\lambda_1 = \frac{9}{5}\lambda_2$;

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{3}{2}a_1\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_1}\,x) - \\ &\quad - g_2(x)\Big(C_1^* + C_2^*\int \tfrac{1}{g_2^2(x)}\,dx\Big)\exp(\tfrac{3(a_1-a_2)}{\lambda_2}t), \\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2(1+\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_1}\,x)) + \\ &\quad + g_1(x)\Big(C_1^* + C_2^*\int \tfrac{1}{g_2^2(x)}\,dx\Big)\exp(\tfrac{3(a_1-a_2)}{\lambda_2}t), \end{aligned} \tag{2.108}$$

при $a_1 < a_2$ та $\lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda_2$, де $g_1(x) = \cos^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_2-a_1}\,x)$, $g_2(x) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{a_2-a_1}\,x)\cos^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_2-a_1}\,x)$.

Таким чином, нам вдалось побудувати нові точні розв'язки (2.105)–(2.108) ДСЛВ (2.42), які є неліївськими. Ці розв'язки мають більш складну структуру, порівняно з відомими розв'язками ДСЛВ [29, 69, 97].

2.2. Симетрії Лі та Q-умовні симетрії трикомпонентної системи рівнянь Лотки–Вольтера

Розглянемо класичну систему Лотки–Вольтера для випадку взаємодії трьох видів з врахуванням дифузії в одновимірному просторі

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + b_1u + c_1v + d_1w), \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + b_2u + c_2v + d_2w), \\ \lambda_3 w_t &= w_{xx} + w(a_3 + b_3u + c_3v + d_3w), \end{aligned} \tag{2.109}$$

де a_k, b_k, c_k та d_k — довільні дійсні сталі. Надалі припускатимемо, що скрізь виконуються такі обмеження на параметри:

$$\lambda_i > 0\ (i=1,2,3),\ c_1^2 + d_1^2 \neq 0,\quad b_2^2 + d_2^2 \neq 0,\quad b_3^2 + c_3^2 \neq 0. \tag{2.110}$$

Система (2.109) належить до класу систем рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + C^1(u,v,w), \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + C^2(u,v,w), \\ \lambda_3 w_t &= w_{xx} + C^3(u,v,w), \end{aligned} \tag{2.111}$$

де $C^k(u,v,w)$ — деякі задані функції ($k = 1,2,3$).

2.2.1. Виведення систем визначальних рівнянь

Згідно з критерієм інваріантності для пошуку операторів класичної симетрії та означенням 1.4 оператора Q-умовної симетрії першого типу, ми побудували СВР для знаходження відповідних операторів системи (2.109). Зокрема, умова інваріантності (1.26) для пошуку оператора Q-умовної симетрії першого типу

$$Q = \xi^0(t,x,u,v,w)\partial_t + \xi^1(t,x,u,v,w)\partial_x + \eta^1(t,x,u,v,w)\partial_u + \\ \eta^2(t,x,u,v,w)\partial_v + \eta^3(t,x,u,v,w)\partial_w, \tag{2.112}$$

системи (2.111) має вигляд

$$\begin{aligned} \underset{2}{Q}(S_1)\Big|_{\mathcal{M}_1} &\equiv \underset{2}{Q}\big(\lambda_1 u_t - u_{xx} - C^1(u,v,w)\big)\Big|_{\mathcal{M}_1} = 0, \\ \underset{2}{Q}(S_2)\Big|_{\mathcal{M}_1} &\equiv \underset{2}{Q}\big(\lambda_2 v_t - v_{xx} - C^2(u,v,w)\big)\Big|_{\mathcal{M}_1} = 0, \\ \underset{2}{Q}(S_3)\Big|_{\mathcal{M}_1} &\equiv \underset{2}{Q}\big(\lambda_3 w_t - w_{xx} - C^3(u,v,w)\big)\Big|_{\mathcal{M}_1} = 0, \end{aligned} \tag{2.113}$$

де через $\mathcal{M}_1$ позначено один з многовидів: $\mathcal{M}_1^1 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, Q(u) = 0\}$, $\mathcal{M}_1^2 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, Q(v) = 0\}$, $\mathcal{M}_1^3 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, Q(w) = 0\}$.

Зазначимо, що ми шукатимемо оператори Q-умовної симетрії першого типу системи (2.111) вигляду (2.112) *лише за умови* $\xi^0 \neq 0$.

Таким чином, після проведення нескладних обчислень, маємо таку СВР для пошуку операторів Q-умовної симетрії першого типу системи (2.111) з використанням многовиду $\mathcal{M}_1^1$:

$$\xi^0_x = \xi^0_u = \xi^0_v = \xi^0_w = \xi^1_u = \xi^1_v = \xi^1_w = 0, \tag{2.114}$$

$$\eta^k_{uu} = \eta^k_{uv} = \eta^k_{vv} = \eta^k_{ww} = \eta^k_{uw} = \eta^k_{vw} = 0, \ k = 1,2, \tag{2.115}$$

$$\eta^1_{xv} = \eta^1_{xw} = \eta^2_{xw} = \eta^3_{xv} = 0, \tag{2.116}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^1_v = (\lambda_1 - \lambda_3)\eta^1_w = (\lambda_2 - \lambda_3)\eta^2_w = (\lambda_2 - \lambda_3)\eta^3_v = 0, \tag{2.117}$$

$$2\xi^1_x - \xi^0_t = 0, \tag{2.118}$$

$$2\xi^0\eta^2_{xu} + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi^1\eta^2_u = 0, \tag{2.119}$$

$$2\xi^0\eta^3_{xu} + (\lambda_3 - \lambda_1)\xi^1\eta^3_u = 0, \tag{2.120}$$

$$2\eta^1_{xu} + \lambda_1\xi^1_t = 0, \tag{2.121}$$
$$2\eta^2_{xv} + \lambda_2\xi^1_t = 0, \tag{2.122}$$
$$2\eta^3_{xw} + \lambda_3\xi^1_t = 0, \tag{2.123}$$
$$\eta^1 C^1_u + \eta^2 C^1_v + \eta^3 C^1_w + \eta^1_{xx} - \lambda_1\eta^1_t + (2\xi^1_x - \eta^1_u)C^1 - \\ -\eta^1_v C^2 - \eta^1_w C^3 = 0, \tag{2.124}$$
$$\eta^1 C^2_u + \eta^2 C^2_v + \eta^3 C^2_w + (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\eta^1}{\xi^0}\eta^2_u + \eta^2_{xx} - \lambda_2\eta^2_t + \\ +(2\xi^1_x - \eta^2_v)C^2 - \eta^2_u C^1 - \eta^2_w C^3 = 0, \tag{2.125}$$
$$\eta^1 C^3_u + \eta^2 C^3_v + \eta^3 C^3_w + (\lambda_1 - \lambda_3)\frac{\eta^1}{\xi^0}\eta^3_u + \eta^3_{xx} - \lambda_3\eta^3_t + \\ +(2\xi^1_x - \eta^3_w)C^3 - \eta^3_u C^1 - \eta^3_v C^2 = 0. \tag{2.126}$$

Оскільки нижче ми також отримаємо симетрії Лі ДСЛВ (2.109), то для їх пошуку нам необхідно мати СВР. Відповідні викладки (ми їх опускаємо, оскільки на теперішній час це добре відомий алгоритм) знову ведуть до системи (2.114)–(2.126) та двох додаткових рівнянь

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_u = (\lambda_1 - \lambda_3)\eta^3_u = 0. \tag{2.127}$$

Зауваження 2.3. Оскільки побудовані СВР для знаходження операторів Q-умовної симетрії першого типу для многовидів $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, Q(v) = 0\}$ та $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, Q(w) = 0\}$ легко отримуються з системи (2.114)–(2.126) (дискретними перетвореннями $u \to v$ і $u \to w$, та відповідною зміною верхніх індексів функцій η^k і C^k $(k = 1, 2, 3)$), то ми їх опускаємо.

2.2.2. Симетрії Лі системи рівнянь Лотки–Вольтера

Для того, щоб знайти МАІ ДСЛВ (2.109), необхідно розв'язати СВР (2.114)–(2.127), підставивши в неї замість довільних функцій C^i $(i = 1, 2, 3)$ такі нелінійності:

$$C^1 = u(a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w), \\ C^2 = v(a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 w), \\ C^3 = w(a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 w). \tag{2.128}$$

Таблиця 2.2

Оператори симетрії Лі ДСЛВ (2.109)

№	Реактивні члени	Обмеження	Додаткові базисні оператори
1.	$u(b_1u+c_1v+d_1w)$ $v(b_2u+c_2v+d_2w)$ $w(b_3u+c_3v+d_3w)$		$D=2t\partial_t+x\partial_x-2(u\partial_u+v\partial_v+w\partial_w)$
2.	$u(c_1v+d_1w)$ $v(a_2+c_2v+w)$ $w(a_3+v+d_3w)$		$u\partial_u$
3.	$u(c_1v+d_1w)$ $v(c_2v+w)$ $w(v+d_3w)$		$u\partial_u,\ D$
4.	$u(a_1+bu+v)$ $v(a_2+u+cv)$ $w(u+cv)$	$\lambda_2=\lambda_3=1$	$\exp(-a_2t)v\partial_w,\ w\partial_w$
5.	$u(bu+v)$ $v(u+cv)$ $w(u+cv)$	$\lambda_2=\lambda_3=1$	$v\partial_w,\ w\partial_w,\ D$
6.	$u(a_1+u+v)$ $v(a_2+u+v)$ $w(u+v)$	$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,$ $a_1a_2(a_1-a_2)\neq 0$	$\exp(-a_1t)u\partial_w,$ $w\partial_w,\ \exp(-a_2t)v\partial_w,$ $(a_2(u+a_1)+a_1v)\partial_w$
7.	$u(a+u+v)$ $v(u+v)$ $w(u+v)$	$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,$ $a\neq 0$	$\exp(-at)u\partial_w$ $w\partial_w,\ v\partial_w$ $(u+a+avt)\partial_w$
8.	$u(bu+v)$ $v(u+cv)$ $w(bu+cv)$	$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,$ $b\neq 1,\ c\neq 1$	$D,\ w\partial_w,\ \big((b-1)u+(1-c)v\big)\partial_w$

Результат інтегрування отриманої системи ДРЧП подамо у вигляді теореми.

Теорема 2.5. *ДСЛВ (2.109) при обмеженнях на коефіцієнти (2.110), допускає МАІ розмірності 3 і вище лише у випадках, наведених в таблиці 2.2. Якщо ДСЛВ (2.109) з деякими іншими коефіцієнтами допускає нетривіальну алгебру Лі, то вона зводиться до однієї з систем, поданих в таблиці 2.2, за допомогою невироджених локальних перетворень вигляду*

$$\begin{aligned}
&u \to c_{11}\exp(c_{10}t)u + c_{12}v + c_{13}w,\\
&v \to c_{21}\exp(c_{20}t)v + c_{22}u + c_{23}w,\\
&w \to c_{31}\exp(c_{30}t)w + c_{32}u + c_{33}v,\\
&t \to c_{40}t + c_{41},\ x \to c_{50}x + c_{51},
\end{aligned} \tag{2.129}$$

де c_{ki} ($k = 1, \dots, 5$, $i = 0, \dots, 3$) — деякі сталі.

Доведення.

Очевидно, що ДСЛВ (2.109) при довільно вибраних коефіцієнтах допускає двовимірну алгебру Лі, яку ми назвемо тривіальною, породжену операторами $P_t = \partial_t$ та $P_x = \partial_x$.

Задача полягає в тому, щоб встановити всі випадки, в яких ця система допускає МАІ розмірності 3 і вище.

Детальне доведення ми опускаємо через те, що на теперішній час воно не містить принципових труднощів.

Справді, СВР (2.114)–(2.127) при функціях C^i ($i = 1, 2, 3$) з (2.128) є лінійною, і алгоритм її розв'язання такий.

Перш за все було встановлено залежність функцій ξ^0, ξ^1 та η^i ($i = 1, 2, 3$) від змінних u, v і w. Зокрема, проінтегрувавши рівняння (2.114)–(2.116), знаходимо:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(t, x),\\
&\eta^1 = r^1(t, x)u + q^1(t)v + h^1(t)w + p^1(t, x),\\
&\eta^2 = r^2(t, x)v + q^2(t, x)u + h^2(t)w + p^2(t, x),\\
&\eta^3 = r^3(t, x)w + q^3(t, x)u + h^3(t)v + p^3(t, x),
\end{aligned} \tag{2.130}$$

де невідомі функції ξ^0, ξ^1, r^k, q^k, h^k та p^k ($k = 1, 2, 3$) визначаються шляхом інтегрування рівнянь (2.117)–(2.126).

Другий етап алгоритму ґрунтується на розщепленні рівнянь (2.117)–(2.127) відносно змінних u, v, w, u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw, враховуючи при цьому вирази (2.130).

На третьому етапі необхідно розв'язати отримані рівняння на функції ξ^0, ξ^1, r^k, q^k, h^k і p^k $(k = 1, 2, 3)$, що залежать лише від t та x, в залежності від можливих значень параметрів λ_k $(k = 1, 2, 3)$. При цьому ми отримали три суттєво різні випадки. Якщо λ_k — різні додатні числа (випадки 1–3 таблиці 2.2), то вигляд функцій η^k значно спроститься, а саме: $q^k = 0$ та $h^k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Необхідно також розглянути один з випадків $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_3$ і $\lambda_2 = \lambda_3$, які є рівносильними (з точністю до перетворень (2.129)), тому достатньо розглянути лише один з них. Зокрема, в таблиці 2.2 подано результат для випадку $\lambda_2 = \lambda_3$ (випадки 4 та 5). При розгляді випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ми також отримали нові оператори (випадки 6–8 таблиці 2.2).

Теорему доведено.

2.2.3. Q-умовні симетрії першого типу системи рівнянь Лотки–Вольтера

Нижче сформульовано та доведено основний результат цього підрозділу.

Теорема 2.6. *ДСЛВ (2.109) при обмеженнях на коефіцієнти (2.110) допускає лише ті оператори Q-умовної симетрії першого типу (відмінні від операторів симетрії Лі), які наведені в таблиці 2.3. Якщо ДСЛВ (2.109) з деякими іншими коефіцієнтами допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, то вона зводиться до однієї з систем, поданих в таблиці 2.3, за допомогою перетворень (2.129), а її оператори зводяться до операторів з таблиці 2.3 шляхом додавання операторів симетрії Лі системи (2.109) (згідно з твердженням 1.1).*

Доведення.

Доведення теореми ґрунтується на розв'язанні СВР (2.114)–(2.126) при функціях C^i $(i = 1, 2, 3)$ вигляду (2.128) та систематичному відкиданні всіх випадків, які ведуть до операторів симетрії Лі системи (2.109), поданих в таблиці 2.2.

На першому етапі ми розв'язали отриману СВР, виділивши при цьому всі можливі випадки, коли система (2.109) при обмеженнях (2.110) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу (№ 1–9 таблиці 2.3). Цей етап складається з декількох кроків.

Перший крок полягає у підстановці функцій C^i, ξ^0, ξ^1 і η^i (див. (2.128) та (2.130)) в рівняння (2.117)–(2.126) та їх подальшому розщепленні відносно змінних u, v, w, u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw. В результаті ми отримуємо перевизначену систему ДРЧП на функції ξ^0, ξ^1, r^k, q^k, h^k та p^k $(k = 1, 2, 3)$, що залежать лише від t і x.

На другому кроці необхідно проінтегрувати отриману систему, в залежності від можливих значень параметрів ДСЛВ. Зокрема, дуже суттєвими тут є коефіцієнти дифузії (див. рівняння (2.117)), в залежності від яких необхідно розглянути такі випадки: *(1)* λ_k — довільні додатні числа; *(2)* $\lambda_1 = \lambda_2$ або $\lambda_1 = \lambda_3$ (ці умови еквівалентні з точністю до перетворень (2.129)); *(3)* $\lambda_2 = \lambda_3$; *(4)* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Зазначимо, що розгляд випадку *(2)* не веде до отримання нових операторів, тобто операторів, які було би не можливо отримати з випадку *(1)*, а при розгляді випадку *(4)* СВР для знаходження операторів Q-умовної симетрії першого типу ДСЛВ (2.109) зводиться до системи для знаходження операторів симетрії Лі. Таким чином, суттєвими є два випадки, а саме *(1)* та *(3)*, які нижче буде проаналізовано.

Другий етап доведення полягає в аналізі отриманих підкласів ДСЛВ (випадки 1–9 таблиці 2.3) щодо наявності операторів Q-умовної симетрії першого типу, які задовольняють умови (2.113) на многовидах $\mathcal{M}_1^2$ і $\mathcal{M}_1^3$. Тобто для кожної системи з таблиці 2.3 ми розв'язали СВР, отримані з використанням вказаних многовидів.

Розглянемо *випадок (1)*, який веде до результатів, поданих у випадках 1–6 таблиці 2.3. Оскільки параметри λ_k $(k = 1,2,3)$ є довільними додатними числами, то з рівнянь (2.117) з урахуванням (2.130) отримуємо: $q^1 = h^k = 0$, $k = 1,2,3$. В цьому випадку, для побудови операторів відмінних від операторів Лі, необхідно та достатньо вимагати, щоб

$$(q^2)^2 + (q^3)^2 \neq 0. \tag{2.131}$$

Таким чином, нам потрібно розв'язати систему рівнянь на функції ξ^0, ξ^1, r^k, q^k, h^k та p^k при виконанні обмеження (2.131), яка набуває вигляду:

$$c_1 p^1 = d_1 p^1 = d_2 p^2 = c_3 p^3 = 0, \tag{2.132}$$

$$(b_1 - b_2) q^2 = 0, \quad (d_1 - d_2) q^2 = 0, \tag{2.133}$$

$$(b_1 - b_3) q^3 = 0, \quad (c_1 - c_3) q^3 = 0, \tag{2.134}$$

$$\xi^0_t - 2\xi^1_x = 0, \tag{2.135}$$

$$2r^k_x + \lambda_k \xi^1_t = 0, \tag{2.136}$$

$$c_k(r^2 + 2\xi^1_x) = 0, \quad d_k(r^3 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.137}$$

$$c_1 q^2 + d_1 q^3 + b_1(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.138}$$

$$(2c_2 - c_1) q^2 + d_2 q^3 + b_2(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.139}$$

$$c_3 q^2 + (2d_3 - d_1) q^3 + b_3(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.140}$$

$$(\lambda_j - \lambda_1)\xi^1 q^j + 2\xi^0 q^j_x = 0, \tag{2.141}$$

$$r^1_{xx} - \lambda_1 r^1_t + 2a_1 \xi^1_x + 2b_1 p^1 + c_1 p^2 + d_1 p^3 = 0, \tag{2.142}$$

$$r^2_{xx} - \lambda_2 r^2_t + 2a_2 \xi^1_x + b_2 p^1 + 2c_2 p^2 + d_2 p^3 = 0, \tag{2.143}$$

$$r^3_{xx} - \lambda_3 r^3_t + 2a_3 \xi^1_x + b_3 p^1 + c_3 p^2 + 2d_3 p^3 = 0, \tag{2.144}$$

$$q^j_{xx} - \lambda_j q^j_t + (a_j - a_1) q^j + b_j p^j + \frac{\lambda_1 - \lambda_j}{\xi^0} q^j r^1 = 0, \tag{2.145}$$

$$p^k_{xx} - \lambda_k p^k_t + a_k p^k + \frac{\lambda_1 - \lambda_k}{\xi^0} q^k p^1 = 0, \tag{2.146}$$

де $k = 1,2,3$, $j = 2,3$.

Аналіз рівнянь (2.133)–(2.134) приводить до необхідності окремо розглянути такі підвипадки: *(i)* $q^2 \neq 0$, $q^3 = 0$; *(ii)* $q^2 = 0$, $q^3 \neq 0$; *(iii)*

$q^2 \neq 0,\ q^3 \neq 0$. Проте достатньо розглянути лише один з підвипадків *(i)* або *(ii)*, оскільки вони еквівалентні, з точністю до дискретних перетворень

$$v \leftrightarrow w,\ a_2 \leftrightarrow a_3, b_2 \leftrightarrow b_3,\ c_2 \leftrightarrow d_3,\ d_2 \leftrightarrow c_3. \tag{2.147}$$

Отже, розглянемо *підвипадок (i)*. Оскільки $c_1^2 + d_1^2 \neq 0$ (див. обмеження (2.110)), то з рівнянь (2.132) випливає $p^1 = 0$, а з (2.135)–(2.137) отримуємо

$$\xi^1_{xx} = r^k_x = \xi^1_t = 0\ (k = 1, 2, 3). \tag{2.148}$$

З рівнянь (2.133) та (2.138)–(2.139) маємо: $b_1 = b_2 = b,\ c_1 = c_2 = c,\ d_1 = d_2 = d$. З рівняння (2.145) при $j = 3$ отримуємо: $b_3 p^3 = 0 \Rightarrow p^3 = 0,\ b_3 \neq 0$. Справді, якщо $b_3 = 0$, то з (2.140) знаходимо $c_3 = 0$, що суперечить обмеженням (2.110).

Подальший хід доведення суттєво залежить від значення сталої c_3 (див. рівняння (2.140)) та приводить до підвипадків:

(i1) $c_3 \neq 0$; *(i2)* $c_3 = 0$.

Розглянемо детальніше *підвипадок (i1)*. Здиференціювавши рівняння (2.140) за змінною x, отримуємо умову $q^2_x = 0$. З рівняння (2.141) при $j = 2$ випливає $\xi^1 = 0$, тоді як з рівнянь (2.137) маємо $r^2 = 0$. Врахувавши останні викладки, з (2.143) маємо рівняння $cp^2 = 0$, яке, разом з (2.132), приводить до умови $p^2 = 0$. Отже, рівняння (2.146) виконуються тотожно. З рівнянь (2.138) та (2.140) маємо: $q^2 = -\frac{b_3}{c_3} r^1,\ b = \frac{b_3}{c_3} c$. Оскільки $r^1 = \alpha = const$ (випливає з рівнянь (2.142) та (2.148)), то, підставивши знайдений вираз для q^2 в рівняння (2.145) (при $j = 2$), отримуємо $\alpha = \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$. З рівняння (2.144) випливає $r^3 = \beta = const$. Таким чином, ми отримали ДСЛВ

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_t &= u_{xx} + u(a_1 + \tfrac{b_3}{c_3} cu + cv + dw), \\ \lambda_2 v_t &= v_{xx} + v(a_2 + \tfrac{b_3}{c_3} cu + cv + dw), \\ \lambda_3 w_t &= w_{xx} + w(a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 w), \end{aligned} \tag{2.149}$$

та оператор

$$Q = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u(\partial_u - \frac{b_3}{c_3}\partial_v) + \beta w \partial_w. \qquad (2.150)$$

Врахувавши рівнянь (2.137), маємо такі обмеження на коефіцієнти: $d = d_3 = 0$ або $\beta = 0$. Проте у випадку $d = d_3 = 0$ оператор $X = \beta w \partial_w$ є оператором симетрії Лі системи (2.149). Отже, згідно з твердженням 1.1 про додавання операторів симетрії Лі до операторів Q-умовної симетрії першого типу, оператор (2.150) системи (2.149) запишеться у вигляді

$$Q = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u(\partial_u - \frac{b_3}{c_3}\partial_v). \qquad (2.151)$$

Виконавши перетворення $b_3 u \rightarrow u$, $c_3 v \rightarrow v$ в системі (2.149) та операторі (2.151) і перепозначивши c на $c_3 b$, отримуємо ДСЛВ з випадку 1 таблиці 2.3 та оператор Q_1^1. Зауважимо, що при використанні многовиду $\mathcal{M}_1^2$ ми отримали оператор Q_2^1, а при застосуванні многовиду $\mathcal{M}_1^3$ — випадок 2 таблиці 2.3. Отже, підвипадок *(i1)* повністю розглянуто.

При розгляді *підвипадку (i2)*, було отримано одну систему та відповідний їй оператор, які перетвореннями (2.147) і $v \rightarrow v \exp(\frac{a_2}{\lambda_2} t)$ зводяться до випадку 5 таблиці 2.3.

Таким чином, при розгляді підвипадку *(i)* ми отримали випадки 1, 2 та 5 таблиці 2.3.

Розгляд підвипадку *(iii)* проводиться аналогічно і приводить до випадків 3, 4 та 6.

Отже, у випадку *(1)* існує саме шість нееквівалентних ДСЛВ (з точністю до перетворень (2.129)), що допускають оператори Q-умовної симетрії першого типу, які наведено в таблиці 2.3 (див. № 1–6).

Розглянемо *випадок (3)*. З рівнянь (2.117) з урахуванням (2.130) отримуємо: $q^1 = h^1 = 0$. В цьому випадку, як і у випадку *(1)*, (2.131) є необхідною та достатньою умовою того, що знайдені оператори не будуть ліївськими. Виконавши в системі (2.109) при $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ перетворення $t \rightarrow \lambda t$ та перепозначивши λ_1 на $\lambda\lambda_1$, отримуємо систему з $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Отже, нам необхідно розв'язати СВР на функції ξ^0, ξ^1, r^k, q^k, h^k та p^k, яка має такий вигляд:

$$c_1p^1 = d_1p^1 = 0, \tag{2.152}$$

$$(b_1 - b_2)q^2 = 0, \quad (d_1 - d_2)q^2 + (b_3 - b_2)h^2 = 0, \tag{2.153}$$

$$(b_1 - b_3)q^3 = 0, \quad (c_1 - c_3)q^3 + (b_2 - b_3)h^3 = 0, \tag{2.154}$$

$$(d_2 - d_3)h^2 = 0, \quad (c_2 - c_3)h^3 = 0, \tag{2.155}$$

$$\xi^0_t - 2\xi^1_x = 0, \tag{2.156}$$

$$2r^1_x + \lambda_1\xi^1_t = 0,\ 2r^2_x + \xi^1_t = 0,\ 2r^3_x + \xi^1_t = 0, \tag{2.157}$$

$$c_1q^2 + d_1q^3 + b_1(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.158}$$

$$(2c_2 - c_1)q^2 + d_2q^3 + b_2(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.159}$$

$$c_3q^2 + (2d_3 - d_1)q^3 + b_3(r^1 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.160}$$

$$d_1h^3 + c_1(r^2 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.161}$$

$$d_2h^3 + c_2(r^2 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.162}$$

$$(2d_3 - d_2)h^3 + c_3(r^2 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.163}$$

$$c_1h^2 + d_1(r^3 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.164}$$

$$(2c_2 - c_3)h^2 + d_2(r^3 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.165}$$

$$c_3h^2 + d_3(r^3 + 2\xi^1_x) = 0, \tag{2.166}$$

$$r^1_{xx} - \lambda_1r^1_t + 2a_1\xi^1_x + 2b_1p^1 + c_1p^2 + d_1p^3 = 0, \tag{2.167}$$

$$r^2_{xx} - r^2_t + 2a_2\xi^1_x + b_2p^1 + 2c_2p^2 + d_2p^3 = 0, \tag{2.168}$$

$$r^3_{xx} - r^3_t + 2a_3\xi^1_x + b_3p^1 + c_3p^2 + 2d_3p^3 = 0, \tag{2.169}$$

$$(1 - \lambda_1)\xi^1q^2 + 2\xi^0q^2_x = 0,\ (1 - \lambda_1)\xi^1q^3 + 2\xi^0q^3_x = 0, \tag{2.170}$$

$$q^j_{xx} - q^j_t + (a_j - a_1)q^j + b_jp^j + \frac{\lambda_1 - 1}{\xi^0}q^jr^1 = 0,\ j = 2, 3, \tag{2.171}$$

$$p^1_{xx} - p^1_t + a_1p^1 = 0, \tag{2.172}$$

$$p^j_{xx} - p^j_t + a_jp^j + \frac{\lambda_1 - 1}{\xi^0}q^jp^1 = 0,\ j = 2, 3, \tag{2.173}$$

$$-h^2_t + (a_2 - a_3)h^2 + d_2p^2 = 0, \tag{2.174}$$

$$-h^3_t + (a_3 - a_2)h^3 + c_3p^3 = 0. \tag{2.175}$$

Зазначимо, що при $h^2 = h^3 = 0$ СВР (2.152)–(2.175) збігається з СВР (2.132)–(2.146), якщо в останній покласти $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Таким чином, при розв'язуванні системи (2.152)–(2.175) розглядатимемо лише випадок

$$(h^2)^2 + (h^3)^2 \neq 0.$$

З рівнянь (2.152) з врахуванням обмежень (2.110) отримуємо $p^1 = 0$. З рівнянь (2.153)–(2.155) випливає, що якщо функції $q^2,\ q^3,\ h^2$ та h^3 є довільними, то отримуємо такі обмеження на параметри системи (2.109) :

$$b_1 = b_2 = b_3 = b,\ c_1 = c_2 = c_3 = c,\ d_1 = d_2 = d_3 = d. \tag{2.176}$$

Таким чином, ДСЛВ (2.109) при умовах (2.176) має вигляд

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + bu + cv + dw), \\ &v_t = v_{xx} + v(a_2 + bu + cv + dw), \\ &w_t = w_{xx} + w(a_3 + bu + cv + dw). \end{aligned} \tag{2.177}$$

Для початку покажемо, що в системі (2.177) $b \neq 0$. Справді, припустивши $b = 0$, з обмежень (2.110) знаходимо $cd \neq 0$. З рівняння (2.158) маємо $q^3 = -\frac{c}{d}q^2$, тому з рівнянь (2.171) випливає $a_2 = a_3$. Проте, виконавши в системі (2.177) при $b = 0$ і $a_2 = a_3$ перетворення $cv+dw \to v$, отримуємо систему з автономним рівнянням

$$v_t = v_{xx} + v(a_2 + v),$$

яка виключається з розгляду за рахунок обмеження (2.110). Отже, $b \neq 0$. Виконавши в системі (2.177) перетворення $bu \to u$, отримуємо систему зі сталою $b = 1$, тому скрізь нижче розглядаємо систему (2.177) при $b = 1$.

Покажемо тепер, що незалежно від сталих c та d ($c^2 + d^2 \neq 0$), система (2.177) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу лише у випадку, коли вона зводиться до системи з випадку 9 таблиці 2.3.

Розглянемо випадок $cd \neq 0$. Виконавши в системі (2.177) перетворення $cv \to v$ і $dw \to w$, отримуємо $b = d = 1$.

Здиференціювавши (2.161) за змінною x, маємо $r^2_x = 0$. Таким чином, з рівнянь (2.157) отримуємо

$$r^1_x = r^2_x = r^3_x = \xi^1_t = 0. \tag{2.178}$$

Здиференціювавши (2.158) за змінною x та підставивши отриманий результат (тобто $q^2_x = -q^3_x$) в рівняння (2.170), отримуємо $\xi^1(q^2+q^3) = 0$. Якщо $q^2 + q^3 = 0$, то з рівнянь (2.171) маємо $(a_3 - a_2)q^2 = p^2 + p^3$. Оскільки з диференціального наслідку рівняння (2.167) за змінною x маємо $p^2_x + p^3_x = 0$, то $(a_3 - a_2)q^2_x = 0$. Якщо $a_2 = a_3$, то, виконавши в системі (2.177) при $c = d = 1$ перетворення $v + w \to v$ і $w \to \exp(a_3 t)w$, отримуємо систему з випадку 9 таблиці 2.3. Якщо $q^2_x = 0$, то $\xi^1 = 0$ (див. рівняння (2.170) та обмеження (2.131)). Проаналізувавши детально рівняння (2.161), (2.164), (2.168), (2.169), (2.174) та (2.175) при $\xi^1 = 0$, встановили, що лише у випадку $a_2 = a_3$ система (2.177) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, тобто ми отримуємо систему з випадку 9 таблиці 2.3.

Випадки $c = 0$ або $d = 0$ розглядаються аналогічно і також приводять до випадку 9 таблиці 2.3.

Знайдемо всі оператори Q-умовної симетрії першого типу системи з випадку 9 таблиці 2.3, розв'язавши (2.156)–(2.175) при $b = c = 1,\ d = 0$ і $a_3 = 0$. При вказаних обмеженнях на параметри $b,\ c$ та d, виконуються умови (2.178). Крім того, з рівнянь (2.158), (2.161) та (2.164) маємо:

$$q^2 = -2\xi^1_x - r^1 \Rightarrow q^2_x = 0,\ r^2 = -2\xi^1_x,\ h^2 = 0.$$

Таким чином, врахувавши перше з рівнянь (2.170), отримуємо умову $\xi^1 q^2 = 0 \Leftrightarrow$ *(i)* $\xi^1 = 0$; *(ii)* $\xi^1 \neq 0,\ q^2 = 0$.

Розглянемо *підвипадок (i).* Не порушуючи загальності можемо покласти $\xi^0 = 1$ (див. рівняння (2.156)). Оскільки в цьому підвипадку $r^2 = 0$, то з рівняння (2.168) випливає $p^2 = 0$. Здиференціювавши (2.175) за змінною x маємо $p^3_x = 0$. У підсумку, проінтегрувавши рівняння (2.173) при $j = 3$, знаходимо $p^3 = \alpha$ (α — довільна стала). З рівнянь (2.167) та (2.169) отримуємо рівняння $r^1_t = 0$ і $r^3_t = 0$, які разом із (2.178) приводять до умов: $r^1 = \gamma_1 = const$, $r^3 = \gamma_2 = const$. Таким чином, маємо $q^2 = -\gamma_1$. Оскільки оператор $X = \gamma_2 w\partial_w$ є оператором симетрії Лі системи з випадку 9 таблиці 2.3, то згідно з твердженням 1.1 можна покласти $\gamma_2 = 0$. Врахувавши останні викладки, рівняння (2.171) при $j = 2$ має вигляд

$$\gamma_1\big((\lambda_1 - 1)\gamma_1 + a_2 - a_1\big) = 0 \;\Rightarrow\; (i1)\; \gamma_1 = \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - 1}, \quad (i2)\; \gamma_1 = 0.$$

Отже, залишається знайти функції q^3 та h^3 відповідно з рівнянь (2.171) (при $j = 3$) та (2.175). Для підвипадків *(i1)* та *(i2)* рівняння (2.171) при $j = 3$ відповідно має вигляди $q^3_t + a_2 q^3 - \alpha = 0$ і $q^3_t + a_1 q^3 - \alpha = 0$.

Отже, проінтегрувавши останні рівняння та (2.175), отримуємо

$$Q_1 = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - 1} u(\partial_u - \partial_v) + (\varphi_1(t)u + \varphi_2^*(t)v + \alpha)\partial_w \quad \text{та}$$

$$Q_2 = \partial_t + (\varphi_3(t)u + \varphi_2^*(t)v + \alpha)\partial_w,$$

де функції φ_1 і φ_3 подані в (2.179) та (2.181), а функція $\varphi_2^*(t)$ має такий вигляд:

$$\varphi_2^*(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta_1^*, & \text{якщо } a_2 = 0, \\ \beta_1^* \exp(-a_2 t) + \frac{\alpha}{a_2}, & \text{якщо } a_2 \neq 0. \end{cases}$$

Остаточно врахувавши, що оператор $X = \beta_1^* \exp(-a_2 t) v\partial_w$ є оператором симетрії Лі системи з випадку 9 таблиці 2.3 (див. випадок 4 таблиці 2.2), отримуємо оператори Q_3^9 та Q_4^9 випадку 9 таблиці 2.3.

Розгляд підвипадку *(ii)* проводиться аналогічно і приводить до оператора Q_1^9.

Розв'язавши СВР для системи з випадку 9 таблиці 2.3 для многовидів $\mathcal{M}_1^2$ та $\mathcal{M}_1^3$ ми знайшли відповідно оператори Q_5^9 і Q_2^9. Отже, отримано всі оператори з випадку 9 таблиці 2.3.

Аналогічним чином ми проаналізували рівняння (2.153)–(2.155) у випадку, коли функції q^2, q^3, h^2 та h^3 не є довільними. В результаті ми отримали випадки 7 і 8 таблиці 2.3.

Теорему доведено.

Таблиця 2.3

Оператори Q-умовної симетрії першого типу ДСЛВ (2.109)

№	Реактивні члени	Обмеження	Оператори
1.	$u(a_1+bu+bv+dw)$ $v(a_2+bu+bv+dw)$ $w(a_3+u+v+d_3w)$	$a_1\neq a_2,$ $(b-1)^2+(d-d_3)^2\neq 0$	$Q_1^1=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}u(\partial_u-\partial_v),$ $Q_2^1=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}v(\partial_v-\partial_u)$
2.	$u(a_1+u+v+w)$ $v(a_2+u+v+w)$ $w(a_3+u+v+w)$	$(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$	$Q_i^2,\ i=1,\ldots,6$
3.	$u(a_1+u+v+w)$ $v(a_2+u+v+w)$ $w(a_3+u+v+w)$	$(\lambda_2-\lambda_3)a_1-\lambda_2a_3+$ $\lambda_3a_2=0,\ a_2\neq a_3,$ $\beta\neq 0$	$Q_i^2,\ i=1,\ldots,6,$ $\partial_t+\beta\exp\left(\frac{a_2-a_3}{\lambda_2-\lambda_3}t\right)u(\partial_v-\partial_w)$
4.	$u(a_1+u+v+w)$ $v(a_2+u+v+w)$ $w(a_3+u+v+w)$	$(\lambda_2-\lambda_3)a_1-(\lambda_1-\lambda_3)a_2+$ $(\lambda_1-\lambda_2)a_3=0,$ $(a_1-a_2)^2+\alpha^2\neq 0$	$Q_i^4,\ i=1,\ldots,6$
5.	$u(a_1+bu+v)$ $v(a_2+u+cv)$ $w(bu+v)$	$(b-1)^2+(c-1)^2\neq 0$	Q_1^5
6.	$u(a_1+u+v)$ $v(a_2+u+v)$ $w(u+v)$		$Q_1^5,\ Q_i^6,\ i=1,\ldots,4$
7.	$u(a_1+bu+cv)$ $v(a_2+u+v)$ $w(bu+v)$	$\lambda_2=\lambda_3=1,$ $b\neq 1,\ c\neq 1,$ $a_1(1-b)=a_2b(1-c)$	$\partial_t+\big((1-b)u+$ $(1-c)v+a_2(1-c)\big)\partial_w$

№	Реактивні члени	Обмеження	Оператори Q-умовної симетрії
8.	$u(a+bu+cv)$ $v(a+u+v)$ $w(bu+v)$	$\lambda_2=\lambda_3=1,$ $b\neq 1,\ c\neq 1,$ $b(2-c)=1$	$\partial_t+(1-c)\partial_w+$ $\big((1-b)u+(1-c)v\big)\varphi_4(t)\partial_w$
9.	$u(a_1+u+v)$ $v(a_2+u+v)$ $w(u+v)$	$\lambda_2=\lambda_3=1$	$Q_i^9,\ i=1,\ldots,5$

В таблиці 2.3 використано такі позначення

$$Q_i^2=Q_i^4 \text{ при } \alpha=0,\ i=1,\ldots,6;$$

$$Q_1^4=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}u(\partial_u-\partial_v)+\alpha u(\partial_v-\partial_w),$$

$$Q_2^4=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}v(\partial_v-\partial_u)+\alpha v(\partial_u-\partial_w),$$

$$Q_3^4=\partial_t+\frac{a_1-a_3}{\lambda_1-\lambda_3}u(\partial_u-\partial_w)+\alpha u(\partial_v-\partial_w),$$

$$Q_4^4=\partial_t+\frac{a_1-a_3}{\lambda_1-\lambda_3}w(\partial_w-\partial_u)+\alpha w(\partial_u-\partial_v),$$

$$Q_5^4=\partial_t+\frac{a_2-a_3}{\lambda_2-\lambda_3}v(\partial_v-\partial_w)+\alpha v(\partial_u-\partial_w),$$

$$Q_6^4=\partial_t+\frac{a_2-a_3}{\lambda_2-\lambda_3}w(\partial_w-\partial_v)+\alpha w(\partial_u-\partial_v);$$

$$Q_1^5=\partial_t+\alpha_1\partial_x+\exp\Big(\big(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2}{4}\alpha_1^2-a_1\big)\frac{t}{\lambda_3}+\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2}\alpha_1 x\Big)u\partial_w;$$

$$Q_1^6=\partial_t+\alpha_1\partial_x+\exp\Big(\big(\frac{(\lambda_2-\lambda_3)^2}{4}\alpha_1^2-a_2\big)\frac{t}{\lambda_3}+\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2}\alpha_1 x\Big)v\partial_w,$$

$$Q_2^6=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}u(\partial_u-\partial_v)+\beta\exp\Big(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)a_2-(\lambda_2-\lambda_3)a_1}{\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)}t\Big)u\partial_w,$$

$$Q_3^6=\partial_t+\frac{a_1-a_2}{\lambda_1-\lambda_2}v(\partial_v-\partial_u)+\beta\exp\Big(\frac{(\lambda_2-\lambda_3)a_1-(\lambda_1-\lambda_3)a_2}{\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)}t\Big)v\partial_w,$$

$$Q_4^6=\partial_t+\frac{a_2\lambda_1-a_1\lambda_2}{\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)}w\partial_w+\exp\Big(\frac{(\lambda_3-\lambda_2)a_1-(\lambda_3-\lambda_1)a_2}{\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)}t\Big)w(\partial_u-\partial_v);$$

$$Q_1^9 = Q_1^5 \text{ при } \lambda_3 = 1, \quad Q_2^9 = Q_4^6 \text{ при } \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$
$$Q_3^9 = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - 1} u(\partial_u - \partial_v) + (\varphi_1(t)u + \varphi_2(t)v + \alpha)\partial_w,$$
$$Q_4^9 = \partial_t + (\varphi_3(t)u + \varphi_2(t)v + \alpha)\partial_w, \quad Q_5^9 = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - 1} v(\partial_v - \partial_u);$$

де функції $\varphi_i(t)$ $(i = 1, \dots, 4)$:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta_1, & \text{якщо } a_2 = 0, \\ \beta_1 \exp(-a_2 t) + \frac{\alpha}{a_2}, & \text{якщо } a_2 \neq 0; \end{cases} \tag{2.179}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \alpha t, & \text{якщо } a_2 = 0, \\ \frac{\alpha}{a_2}, & \text{якщо } a_2 \neq 0; \end{cases} \tag{2.180}$$

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta_2, & \text{якщо } a_1 = 0, \\ \beta_2 \exp(-a_1 t) + \frac{\alpha}{a_1}, & \text{якщо } a_1 \neq 0; \end{cases} \tag{2.181}$$

$$\varphi_4(t) = \begin{cases} t + \beta_3, & \text{якщо } a = 0, \\ \beta_3 \exp(-a t) + \frac{1}{a}, & \text{якщо } a \neq 0; \end{cases}$$

а сталі α та β_k $(k = 1, 2, 3)$ є такими, що $(a_1 - a_2)^2 + \varphi_1^2 \neq 0$, $\varphi_3 \neq 0$.

Зауваження 2.4. Обмеження в другому стовпчику таблиці 2.3 гарантують: по-перше, подані в третьому стовпчику оператори не є ліївськими; по-друге, системи рівнянь Лотки–Вольтера з різних випадків цієї таблиці є локально нееквівалентними.

2.2.4. Приклади редукції та точних розв'язків

Як уже згадувалося в підрозділі 1.2, кожен оператор Q-мовної симетрії першого типу є одночасно і оператором Q-мовної симетрії (некласичної). Це означає, що алгоритм редукції той самий, який було застосовано в підрозділі 2.1.2. З другого боку, наскільки нам відомо, в літературі практично відсутні точні розв'язки для багатокомпонентних систем рівнянь РД. Оскільки ДСЛВ (2.109) є дуже поширеною при математичному моделюванні багатьох реальних процесів, то побудова її розв'язків є актуальною проблемою. Нижче ми наведемо приклад, який показує ефективність застосування знайдених Q-умовних симетрій для розв'язання цієї проблеми. Отже, розглянемо випадок 4 з таблиці 2.3, тобто систему

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_t = u_{xx} + u(a_1 + u + v + w),\\
&\lambda_2 v_t = v_{xx} + v(a_2 + u + v + w),\\
&\lambda_3 w_t = w_{xx} + w(a_3 + u + v + w),
\end{aligned} \tag{2.182}$$

та відповідний їй оператор

$$Q_1^4 \equiv Q = \partial_t + \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u(\partial_u - \partial_v) + \alpha u(\partial_v - \partial_w). \tag{2.183}$$

Для побудови анзацу, породженого оператором (2.183), необхідно розв'язати таку лінійну систему ДРЧП:

$$\begin{aligned}
&Q(u) \equiv u_t - \tfrac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u = 0,\\
&Q(v) \equiv v_t + (\tfrac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \alpha) u = 0,\\
&Q(w) \equiv w_t + \alpha u = 0.
\end{aligned} \tag{2.184}$$

Оскільки при $a_1 = a_2$ компонента u розв'язку системи (2.184) не залежить від змінної часу t, то цей випадок мало цікавий. Надалі припускаємо $a_1 \neq a_2$ і знаходимо анзац

$$\begin{aligned}
&u = \varphi_1(x) \exp\left(\tfrac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} t\right),\\
&v = \varphi_2(x) + (\alpha \tfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2} - 1)\, \varphi_1(x) \exp\left(\tfrac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} t\right),\\
&w = \varphi_3(x) - \alpha \tfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2}\, \varphi_1(x) \exp\left(\tfrac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} t\right),
\end{aligned} \tag{2.185}$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ та $\varphi_3(x)$ — нові шукані функції. Підставивши анзац (2.185) в систему (2.182) та врахувавши обмеження (див. таблицю 2.3)

$$(\lambda_2 - \lambda_3) a_1 - (\lambda_1 - \lambda_3) a_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) a_3 = 0, \tag{2.186}$$

отримуємо редуковану систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi_1'' + \varphi_1\big(\tfrac{\lambda_1 a_2 - \lambda_2 a_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \varphi_2 + \varphi_3\big) = 0, \\ &\varphi_2'' + \varphi_2\big(a_2 + \varphi_2 + \varphi_3\big) = 0, \\ &\varphi_3'' + \varphi_3\big(a_3 + \varphi_2 + \varphi_3\big) = 0. \end{aligned} \tag{2.187}$$

Оскільки система (2.187) є нелінійною системою трьох ЗДР 2-го порядку, то пошук її загального розв'язку є дуже складною задачею. Нам вдалося знайти частинні розв'язки системи (2.187) шляхом зведення її до двокомпонентної системи. Справді, поклавши $\varphi_3 = -\frac{a_3}{a_2}\varphi_2 - a_3$, та ввівши перепозначення $\varphi_1 \to \varphi$ і $\frac{a_2 - a_3}{a_2}\varphi_2 \to \psi$, з урахуванням (2.186), отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \varphi\big(\tfrac{\lambda_3(a_2 - a_3)}{\lambda_3 - \lambda_2} + \psi\big) = 0, \\ &\psi'' + \psi^2 + (a_2 - a_3)\psi = 0, \end{aligned} \tag{2.188}$$

частинні розв'язки якої (з точністю до позначень) отримано в підрозділі 2.3.1. (див. (2.101)–(2.102) та (2.103)–(2.104)).

Отже, система (2.188) має такі частинні розв'язки:

$$\begin{aligned} &\varphi = f_1(x)\big(C_1 + C_2 \textstyle\int \frac{1}{f_1^2(x)}\,dx\big), \\ &\psi = \tfrac{3}{2}(a_3 - a_2)\big(1 - \tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_2}\,x)\big), \end{aligned} \tag{2.189}$$

при $a_3 > a_2$ та $\lambda_3 = \frac{9}{5}\lambda_2$,

$$\begin{aligned} &\varphi = f_2(x)\big(C_1 + C_2 \textstyle\int \frac{1}{f_2^2(x)}\,dx\big), \\ &\psi = \tfrac{3}{2}(a_3 - a_2)\big(1 - \tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_2}\,x)\big), \end{aligned} \tag{2.190}$$

при $a_3 > a_2$ та $\lambda_3 = \frac{4}{3}\lambda_2$, де C_1 та C_2 — довільні сталі, $f_1(x) = \cosh^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_2}\,x)$, $f_2(x) = \sinh(\frac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_2}\,x)\cosh^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_2}\,x)$;

$$\begin{aligned} &\varphi = g_1(x)\big(C_1 + C_2 \textstyle\int \frac{1}{g_1^2(x)}\,dx\big), \\ &\psi = \tfrac{3}{2}(a_3 - a_2)\big(1 + \tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_3}\,x)\big), \end{aligned} \tag{2.191}$$

при $a_3 < a_2$ та $\lambda_3 = \frac{9}{5}\lambda_2$,

$$\begin{aligned} &\varphi = g_2(x)\big(C_1 + C_2 \textstyle\int \frac{1}{g_2^2(x)}\,dx\big), \\ &\psi = \tfrac{3}{2}(a_3 - a_2)\big(1 + \tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_3}\,x)\big), \end{aligned} \tag{2.192}$$

при $a_3 < a_2$ та $\lambda_3 = \frac{4}{3}\lambda_2$, де $g_1(x) = \cos^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_3}\, x)$, $g_2(x) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_3}\, x)\cos^3(\frac{1}{2}\sqrt{a_2 - a_3}\, x)$.

Отже, врахувавши (2.185), введені позначення та побудовані розв'язки (2.189)–(2.192), знаходимо такі точні розв'язки ДСЛВ (2.182) при виконанні обмежень на параметри (2.186) :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big),\\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2\big(1-\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3-a_2}\,x)\big)+\\ &\quad (\tfrac{4\lambda_2\alpha}{5(a_3-a_2)}-1)f_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big),\\ w(t,x) &= \tfrac{3}{2}a_3\big(\tfrac{1}{3}-\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3-a_2}\,x)\big)-\\ &\quad \tfrac{4\lambda_2\alpha}{5(a_3-a_2)}f_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big), \end{aligned} \tag{2.193}$$

якщо $a_3 > a_2$ та $\lambda_3 = \frac{9}{5}\lambda_2$;

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big),\\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2\big(1-\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3-a_2}\,x)\big)+\\ &\quad (\tfrac{\lambda_2\alpha}{3(a_3-a_2)}-1)f_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big),\\ w(t,x) &= \tfrac{3}{2}a_3\big(\tfrac{1}{3}-\tanh^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_3-a_2}\,x)\big)-\\ &\quad \tfrac{\lambda_2\alpha}{3(a_3-a_2)}f_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{f_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big), \end{aligned} \tag{2.194}$$

якщо $a_3 > a_2$ та $\lambda_3 = \frac{4}{3}\lambda_2$;

$$\begin{aligned} u(t,x) &= g_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big),\\ v(t,x) &= -\tfrac{3}{2}a_2\big(1+\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_3}\,x)\big)+\\ &\quad (\alpha\tfrac{4\lambda_2}{5(a_3-a_2)}-1)g_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big),\\ w(t,x) &= \tfrac{3}{2}a_3\big(\tfrac{1}{3}+\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_3}\,x)\big)-\\ &\quad \alpha\tfrac{4\lambda_2}{5(a_3-a_2)}\,g_1(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_1^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{5(a_3-a_2)}{4\lambda_2}t\big), \end{aligned} \tag{2.195}$$

якщо $a_3 < a_2$ та $\lambda_3 = \frac{9}{5}\lambda_2$;

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) = g_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big),\\
&v(t,x) = -\tfrac{3}{2}a_2\big(1+\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_3}\,x)\big)+\\
&\qquad(\alpha\tfrac{4\lambda_2}{5(a_3-a_2)}-1)g_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big),\\
&w(t,x) = \tfrac{3}{2}a_3\big(\tfrac{1}{3}+\tan^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{a_2-a_3}\,x)\big)-\\
&\qquad\alpha\tfrac{4\lambda_2}{5(a_3-a_2)}\,g_2(x)\Big(C_1 + C_2\int \tfrac{1}{g_2^2(x)}\,dx\Big)\exp\big(\tfrac{3(a_3-a_2)}{\lambda_2}t\big),
\end{aligned}
\tag{2.196}
$$

якщо $a_3 < a_2$ та $\lambda_3 = \frac{4}{3}\lambda_2$.

Таким чином, отримані нами точні розв'язки (2.193)–(2.196) трикомпонентоної ДСЛВ є нетривіальним узагальненням розв'язків (2.105)–(2.108) двокомпонентної системи рівнянь Лотки–Вольтера.

2.3. Інваріантні та частково інваріантні точні розв'язки однієї системи рівнянь типу Лотки–Вольтера

В роботі [98] було запропоновано нову модель для опису екологічних систем, у яких взаємодіє велика кількість видів. Модель ґрунтується на нелінійній системі ЗДР. Розглянемо узагальнення цієї системи для випадку врахування дифузії у просторі, але обмежимося двома видами, тобто систему

$$
\begin{aligned}
&U_t = d_1U_{xx} + U\Big(-a_1 + b_1\big(\tfrac{V}{U}\big)^{\lambda}\Big),\\
&V_t = d_2V_{xx} + V\Big(a_2 - b_2\big(\tfrac{U}{V}\big)^{1-\lambda}\Big),
\end{aligned}
\tag{2.197}
$$

де a_k, b_k та d_k — довільні додатні сталі ($k = 1, 2$), $0 < \lambda < 1$; $U = U(t,x)$ — концентрація популяції хижаків, $V = V(t,x)$ — концентрація популяції жертв. Модель (2.197) характеризує взаємодію популяцій типу хижак-жертва, і є нетривіальною модифікацією системи Лотки–Вольтера

$$
\begin{aligned}
&U_t = d_1U_{xx} + U\big(-a_1 + b_1V\big),\\
&V_t = d_2V_{xx} + V\big(a_2 - b_2U\big).
\end{aligned}
\tag{2.198}
$$

Особливістю системи (2.197) є те, що вона інваріантна відносно масштабних перетворень розміру обох популяцій

$$U = \epsilon u,\ V = \epsilon v,$$

де $\epsilon > 0$ — довільна стала.

Знерозміривши систему (2.197) заміною

$$U \to u,\ V \to \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} v,\ x \to \sqrt{\frac{d_1}{a_1}}\, x,\ t \to \frac{1}{a_1}\, t,$$

отримуємо систему

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} - u + u^{1-\lambda} v^{\lambda}, \\ &v_t = dv_{xx} + av - bu^{1-\lambda} v^{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.199}$$

де $d = \frac{d_2}{d_1},\ a = \frac{a_2}{a_1},\ b = \frac{b_2}{a_1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Очевидно, що стаціонарними точками системи (2.199) є всі точки прямої $u = v$ при $a = b$ та єдина точка (0,0) при довільних a і b. Тип точок прямої $u = v$ залежить від значення параметрів системи, тоді як точка (0,0) — сідлова точка (нестійка стаціонарна точка). Зокрема, при $\lambda > \frac{a}{a+1}$ всі точки прямої $u = v$, окрім (0,0), є стійкими вузлами, а при $\lambda < \frac{a}{a+1}$ — нестійкими вузлами. На відміну від системи (2.199), класична система Лотки–Вольтера (2.198) має дві стаціонарні точки, тип яких не залежить від значення параметрів, а саме: (0,0) — сідлова точка, $(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1})$ — центр. Цей факт вказує на те, що системи (2.198) та (2.199) мають суттєво різні властивості, тому по-різному описують взаємодію видів.

Перш ніж перейти до побудови точних розв'язків системи (2.199), зазначимо, що ця система (при додатних параметрах) не допускає операторів Q-умовної симетрії вигляду (2.1), відмінних від операторів Лі. Незважаючи на це, нам вдалось побудувати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків системи (2.199), використавши її МАІ.

2.3.1. Максимальна алгебра інваріантності, редукція та інваріантні розв'язки системи рівнянь типу Лотки–Вольтера

Для знаходження інваріантних та частково інваріантних розв'язків [12] системи (2.199) необхідно спочатку виписати її МАІ . Оскільки система (2.199) належить до класу систем рівнянь РД (2.4), групова класифікація яких вже проведена, то для опису МАІ цієї системи застосуємо висліди робіт [49, 50].

Теорема 2.7. *У випадку* $d = 1$ *МАІ системи (2.199) є алгеброю Ґалілея* $AG(1.1) = \langle P_t, P_x, I, G\rangle$, *з базовими операторами* $P_t = \partial_t,\ P_x = \partial_x,\ I = u\partial_u + v\partial_v,\ G = -2t\partial_x + x(u\partial_u + v\partial_v)$.

При $d \neq 1$ *система рівнянь РД (2.199) інваріантна відносно тривимірної МАІ з базовими операторами* P_t, P_x, I.

Проведемо редукцію системи (2.199) до систем ЗДР, використовуючи найзагальніший вигляд операторів інваріантності :

$$X = \alpha_0\partial_t + \alpha_1\partial_x + \alpha_2 u\partial_u + \alpha_2 v\partial_v, \tag{2.200}$$

при $d \neq 1$;

$$X = \alpha_0\partial_t + (-2\alpha_3 t + \alpha_1)\partial_x + (\alpha_3 x + \alpha_2)u\partial_u + (\alpha_3 x + \alpha_2)v\partial_v, \tag{2.201}$$

при $d = 1$.

Розглянемо оператор (2.200) системи (2.199).

Нехай $\alpha_0 \neq 0$. Ввівши позначення $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $\beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$ і розв'язавши систему характеристичних рівнянь [87] :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha} = \frac{du}{\beta u} = \frac{dv}{\beta v},$$

отримуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(\omega)e^{\beta t},\ \omega = x - \alpha t,\\ &v = \psi(\omega)e^{\beta t}, \end{aligned} \tag{2.202}$$

який зводить систему (2.199) до системи ЗДР

$$\begin{aligned}&\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} - \beta) = 0,\\ &d\psi'' + \alpha\psi' + \psi(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - \beta) = 0.\end{aligned} \tag{2.203}$$

Аналогічним чином проводимо редукцію системи (2.199) для операторів (2.200) та (2.201) при всіх можливих значення параметрів α_i $(i = 0, \ldots, 3)$. Результат подано у таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Анзаци та редуковані системи ЗДР для системи (2.199)

№	Анзаци	Системи ЗДР	Обмеження та позначення
1.	$u = \varphi(\omega)e^{\beta t}$ $v = \psi(\omega)e^{\beta t}$	$\varphi'' + \alpha\varphi' = \varphi(1 - \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \beta)$ $d\psi'' + \alpha\psi' = \psi(b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - a + \beta)$	$\omega = x - \alpha t,\ \alpha_0 \neq 0,$ $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_0},\ \beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$
2.	$u = \varphi(t)e^{\alpha x}$ $v = \psi(t)e^{\alpha x}$	$\varphi' = \varphi\Big(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \alpha^2\Big)$ $\psi' = \psi\Big(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} + d\alpha^2\Big)$	$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \neq 0,$ $\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$
3.	$u = \varphi(t)\exp\big(-\frac{x^2}{4t}\big)$ $v = \psi(t)\exp\big(-\frac{x^2}{4t}\big)$	$\varphi' = \varphi(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} - \frac{1}{2t})$ $\psi' = \psi(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - \frac{1}{2t})$	$d = 1,\ \alpha_0 = 0,$ $\alpha_3 \neq 0$
4.	$u = \varphi(\omega)f(t,x)$ $v = \psi(\omega)f(t,x)$	$\varphi'' = \varphi(1 - \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \frac{1}{2}\alpha\omega)$ $\psi'' = \psi(b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - a + \frac{1}{2}\alpha\omega)$	$\omega = \frac{\alpha}{2}t^2 - x,\ d = 1,$ $\alpha_0\alpha_3 \neq 0,\ \alpha = -\frac{2\alpha_3}{\alpha_0},$ $f = \exp\big(\frac{\alpha^2 t^3 - 3\alpha x t}{6}\big)$

Знайдемо точні розв'язки системи (2.199), використовуючи побудовані анзаци і редуковані системи ЗДР.

Для початку розглянемо систему (2.203). Як добре відомо, розв'язування нелінійних систем ЗДР другого порядку є окремою складною задачею. Нам вдалося знайти розв'язок (2.203) при додатковому припущенні

$$\psi(\omega) = \mu\varphi(\omega), \tag{2.204}$$

де μ — довільна ненульова стала, тобто функції φ та ψ є лінійно залежними.

При виконанні умови (2.204) система (2.203) має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(\mu^\lambda - 1 - \beta) = 0, \\ &d\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(a - b\mu^{\lambda-1} - \beta) = 0. \end{aligned} \tag{2.205}$$

Лінійна комбінація рівнянь (2.205) дозволяє отримати ЗДР 1-го порядку:

$$\alpha(1-d)\varphi' = \varphi\big(d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d\big). \tag{2.206}$$

При $\alpha = 0$ рівняння (2.206) має нетривіальні розв'язки тільки у випадку, коли стала μ є розв'язком трансцендентного рівняння

$$d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d = 0. \tag{2.207}$$

Проведемо дослідження функції $f(\mu) = d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d$ при $\mu > 0$ щодо наявності нулів.

Оскільки $f'(\mu) < 0$ при $\mu < \frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}$ та $f'(\mu) > 0$ при $\mu > \frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}$, то кількість коренів рівняння (2.207) буде залежати від значення виразу $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right)$, а саме:

1) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) < 0$, то рівняння (2.207) має два дійсі корені;

2) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) = 0$, то рівняння (2.207) має один дійсний корінь;

3) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) > 0$, то рівняння (2.207) не має дійсних коренів.

Зауважимо, що при деяких значеннях λ (наприклад: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$) рівняння (2.207) можна розв'язати аналітично.

Нехай μ_0 розв'язок рівняння (2.207). Тоді система (2.205) при $\alpha = 0$ еквівалентна лінійному ЗДР 2-го порядку

$$\varphi'' + \varphi(\mu_0^\lambda - 1 - \beta) = 0, \tag{2.208}$$

розв'язок якого добре відомий і залежить від знаку виразу $\delta = \mu_0^\lambda - 1 - \beta$.

Таким чином, врахувавши (2.202) та (2.204), отримуємо такий розв'язок системи (2.199) :

$$u(t,x) = \varphi(x)e^{\beta t},$$
$$v(t,x) = \mu_0\varphi(x)e^{\beta t},$$

де $\varphi(x)$ — розв'язок ЗДР (2.208).

Розв'язок рівняння (2.206) при $\alpha \neq 0$ та $d \neq 1$ має вигляд: $\varphi(\omega) = C\exp\left(\frac{f(\mu)}{\alpha(1-d)}\omega\right)$, де C — довільна стала. Для того щоб функція φ була розв'язком системи (2.205) необхідно, щоб $\alpha = \frac{f(\mu)}{\sqrt{(d-1)f_1(\mu)}}$, де $f_1(\mu) = \mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} - a - 1$.

Отже, знаходимо такий розв'язок системи (2.199) при $d \neq 1$:

$$u(t,x) = C\exp\Big(-\sqrt{\frac{f_1(\mu)}{(d-1)}}\,x + (\frac{f(\mu)}{d-1} + \beta)\,t\Big),\ \frac{f_1(\mu)}{(d-1)} > 0,$$
$$v(t,x) = \mu\, u(t,x).$$

Побудуємо розв'язок системи (2.205) при $d = 1$. Система (2.205) за умови $d = 1$ має нетривіальні розв'язки лише у випадку, коли стала μ є розв'язком трансцендентного рівняння

$$f_1(\mu) \equiv \mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} - a - 1 = 0. \tag{2.209}$$

Рівняння (2.209) є частинним випадком рівняння (2.207) при $d = 1$, тому кількість його коренів залежить від значення виразу $f_1\Big(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda}\Big)$.

Нехай μ_0 — розв'язок рівняння (2.209). Система (2.205) ($d = 1$) буде еквівалентна ЗДР зі сталими коефіцієнтами

$$\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(\mu_0^\lambda - 1 - \beta) = 0, \tag{2.210}$$

розв'язок якого добре відомий і залежить від знаку виразу $D = \alpha^2 - 4(\mu_0^\lambda - 1 - \beta)$.

Таким чином, врахувавши (2.202) та (2.204), знаходимо такий розв'язок системи (2.199) при $d = 1$:

$$u(t,x) = \varphi(\omega)e^{\beta t},\ \omega = x - \alpha t,$$
$$v(t,x) = \mu_0\varphi(\omega)e^{\beta t},$$

де $\varphi(\omega)$ — розв'язок рівняння (2.210).

Побудуємо розв'язок системи (2.199), використовуючи анзац і редуковану систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi(1 - \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \tfrac{1}{2t}) = 0, \\ &\psi' + \psi(b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - a + \tfrac{1}{2t}) = 0, \end{aligned} \tag{2.211}$$

з випадку 3 таблиці 2.4. Розв'язки системи (2.211) будемо шукати, виконавши заміну

$$\psi(t) = \nu(t)\varphi(t), \tag{2.212}$$

де $\nu(t) \neq const$ — поки що невідома функція.

Врахувавши (2.212), перепишемо систему (2.211) у вигляді

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi(1 - \nu^{\lambda} + \tfrac{1}{2t}) = 0, \\ &\nu\varphi' + \nu'\varphi + \nu\varphi(b\nu^{\lambda-1} - a + \tfrac{1}{2t}) = 0. \end{aligned} \tag{2.213}$$

Лінійна комбінація рівнянь (2.213) дозволяє отримати нелінійне ЗДР 1-го порядку

$$\nu' + \nu(\nu^{\lambda} + b\nu^{\lambda-1} - a - 1) = 0. \tag{2.214}$$

Знайти розв'язки рівняння (2.214) у явному вигляді при довільному λ не вдається. Нам вдалося знайти функцію ν при $\lambda = \frac{1}{2}$, коли її значення залежатиме від знаку виразу $\Delta = 4b - (1+a)^2$:
якщо $\Delta = 0$, то $\nu = \left(\frac{2}{t+t_0} + \frac{1+a}{2}\right)^2$,
якщо $\Delta > 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\Big(1 + a - \sqrt{\Delta}\tan\frac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\Big)^2$,
якщо $\Delta < 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\Big(1 + a + \sqrt{-\Delta}\tanh\frac{\sqrt{-\Delta}}{4}(t+t_0)\Big)^2$.

Беручи до уваги той факт, що система (2.199) інваріантна відносно перетворень зсуву за змінною t, можемо у виразах для ν покласти $t_0 = 0$.

Щоб знайти функцію $\varphi(t)$ потрібно підставити знайдені функції $\nu(t)$ у перше рівняння системи (2.213). Розглянемо випадок $\Delta = 0$. Отримуємо лінійне ЗДР

$$\varphi' + \varphi\Big(\frac{1-a}{2} - \frac{3}{2t}\Big) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(t) = C\,t^{\frac{3}{2}} \exp\big(\frac{a-1}{2}t\big), \tag{2.215}$$

де C — довільна стала. Аналогічно можна знайти функцію $\varphi(t)$ при $\Delta >$ 0 та $\Delta < 0$. Зокрема, отримуємо :

$$\varphi(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}\cos^2\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{4}t\Big)\exp\big(\frac{a-1}{2}t\big),\ \Delta > 0; \tag{2.216}$$

$$\varphi(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}\cosh^2\Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{4}t\Big)\exp\big(\frac{a-1}{2}t\big),\ \Delta < 0. \tag{2.217}$$

Отже, врахувавши (2.212), (2.215)–(2.217) та анзац з випадку 3 таблиці 2.4, знаходимо такі розв'язки системи (2.199) при $\lambda = \frac{1}{2}$ і $d = 1$:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= C\,t^{\frac{3}{2}}\exp\big(\tfrac{a-1}{2}\,t - \tfrac{x^2}{4t}\big),\ \Delta = 0,\\ v(t,x) &= \tfrac{C}{\sqrt{t}}\big(\tfrac{1+a}{2}\,t + 2\big)^2\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}\big); \end{aligned} \tag{2.218}$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{C}{\sqrt{t}}\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}t\Big)\exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}),\ \Delta > 0,\\ v(t,x) &= \tfrac{C}{\sqrt{t}}\Big(\tfrac{a+1}{2}\cos\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}t\big) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\sin\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}t\big)\Big)^2\exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}); \end{aligned} \tag{2.219}$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{C}{\sqrt{t}}\cosh^2\Big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{4}t\Big)\exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}),\ \Delta < 0,\\ v(t,x) &= \tfrac{C}{\sqrt{t}}\Big(\tfrac{a+1}{2}\cosh\big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{4}t\big) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\sinh\big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{4}t\big)\Big)^2\times\\ &\quad\exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}). \end{aligned} \tag{2.220}$$

Для побудови розв'язків з більш складною структурою, зокрема, в термінах спеціальних функцій, розглянемо випадок 4 таблиці 2.4, тобто систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \varphi(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0,\\ &\psi'' + \psi(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0. \end{aligned} \tag{2.221}$$

Переписавши систему (2.221) з врахуванням умови (2.204), отримуємо перевизначену систему

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \varphi(\mu^\lambda - 1 - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0,\\ &\varphi'' + \varphi(a - b\mu^{\lambda-1} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0, \end{aligned} \tag{2.222}$$

яка буде мати нетривіальні розв'язки лише у випадку, коли μ є розв'язком рівняння (2.209).

Нехай μ_0 — розв'язок рівняння (2.209). Тоді система (2.222) еквівалентна диференціальному рівнянню

$$\varphi'' - \varphi\big(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1 - \mu_0^\lambda\big) = 0. \tag{2.223}$$

Виконавши заміну $\tau = \big(\frac{1}{2}\alpha\big)^{-\frac{2}{3}}\big(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1 - \mu_0^\lambda\big)$, зводимо рівняння (2.223) до рівняння Ейрі [17]

$$\varphi''_{\tau\tau} - \tau\varphi = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(\tau) = c_1 Ai(\tau) + c_2 Bi(\tau), \tag{2.224}$$

де $Ai(\tau)$ і $Bi(\tau)$ відповідно функція Ейрі та функція Ейрі другого роду.

Отже, врахувавши (2.204), (2.224) і анзац з випадку 4 таблиці 2.4, отримуємо такий розв'язок системи (2.199) при $d = 1$:

$$\begin{aligned} u &= \Big(c_1 Ai\big(p(t,x)\big) + c_2 Bi\big(p(t,x)\big)\Big) \exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha x t\big),\\ v &= \mu_0\Big(c_1 Ai\big(p(t,x)\big) + c_2 Bi\big(p(t,x)\big)\Big) \exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha x t\big), \end{aligned}$$

де $p(t,x) = \big(\frac{1}{2}\alpha\big)^{-\frac{2}{3}}\big(\frac{1}{4}\alpha^2 t^2 - \frac{1}{2}\alpha x + 1 - \mu_0^\lambda\big)$.

2.3.2. Частково інваріантні точні розв'язки системи рівнянь типу Лотки–Вольтера

Перейдемо до побудови частково інваріантних розв'язків [12] системи

(2.199). Розглянемо її тривимірну МАІ $L_3 = \langle P_t, P_x, I\rangle$ при довільному параметрі d та випишемо оптимальну систему підалгебр цієї алгебри [9]. Одновимірні підалгебри: $\langle I\rangle$, $\langle P_x + \alpha_1 I\rangle$, $\langle P_t + \alpha_1 P_x + \alpha_2 I\rangle$; двовимірні підалгебри: $\langle P_t{+}\alpha_1 I, P_x{+}\alpha_2 I\rangle$, $\langle P_t{+}\alpha_1 P_x, I\rangle$, $\langle P_x, I\rangle$, де α_1 і α_2 — довільні сталі.

Отже, для того щоб побудувати всі можливі частково інваріантні розв'язки, нам необхідно розглянути підгрупи: $G_1^1 = G(I)$, $G_2^1 = G(P_x + \alpha_1 I)$, $G_3^1 = G(P_t + \alpha_1 P_x + \alpha_2 I)$, $G_1^2 = G(P_x, I)$, $G_2^2 = G(P_t + \alpha_1 P_x, I)$, $G_3^2 = G(P_t + \alpha_1 I, P_x + \alpha_2 I)$ групи $G^3 = G(P_t, P_x, I)$, породжені відповідними підалгебрами алгебри L_3.

Для того, щоб існували частково інваріантні G_j^i–розв'язки ($i = 1,2,\ j = 1,2,3$), необхідно, щоб виконувалися такі умови [12]:

$$\max\{r_* - n, 0\} \le \delta \le \min\{r_* - 1, m - 1\}, \quad m - \delta \le r_*(\partial_{u,v} J), \tag{2.225}$$

де δ — дефект частково інваріантного G_j^i–розв'язку, J — універсальний інваріант групи G_j^i, n — кількість незалежних змінних, m — кількість залежних змінних, r_* — загальний ранг, $r_*(\partial_{u,v} J)$ — ранг матриці $(\partial_{u,v} J)$.

Зокрема, при розгляді груп G_2^1 та G_3^1 ми отримали лише ліївські анзаци, а для групи G_1^1 не виконуються умови (2.225). Нам вдалось побудувати частково інваріантні G_1^2–розв'язки системи (2.199) та встановити, що у випадку $d = 1$ частково інваріантні G_2^2–розв'язки є інваріантними розв'язками вигляду (2.202).

Отже, розглянемо групу G_1^2 і знайдемо всі можливі частково інваріантні G_1^2–розв'язки системи (2.199). Перевіримо чи виконуються умови (2.225): $J = (t, \frac{v}{u})$ — універсальний інваріант групи G_1^2, $n = 2$, $m = 2$, $r_* = 2$, $r_*(\partial_{u,v} J) = 1$. Таким чином, підставивши всі необхідні величини в нерівності (2.225), бачимо, що вказані умови виконуються, а також отримуємо єдине значення дефекту частково інваріантного G_1^2–розв'язку, а саме $\delta = 1$, яке приводить до рангу $\rho \equiv \delta + n - r_* = 1$.

Отже, будемо шукати частково інваріантні G_1^2–розв'язки системи

(2.199) рангу $\rho = 1$ та дефекту $\delta = 1$ у вигляді

$$v = \nu(t)u(t,x),\ u = u(t,x), \tag{2.226}$$

де $\nu(t)$ — нова шукана функція.

Аналогічним чином можна перевірити виконання умов (2.225) для груп G_2^2 та G_3^2. Зокрема, частково інваріантні G_2^2 і G_3^2–розв'язки необхідно шукати відповідно у вигляді

$$u = \varphi(x - \alpha_1 t)v,\ v = v(t,x) \tag{2.227}$$

та

$$u = \varphi\big(v\exp(-\alpha_1 t - \alpha_2 x)\big)v,\ v = v(t,x). \tag{2.228}$$

Покажемо тепер, що частково інваріантні G_2^2–розв'язки вигляду (2.227) системи (2.199) при $d = 1$ є інваріантними розв'язками цієї системи вигляду (2.202). При доведенні цього факту зупинимось на розгляді випадку $\alpha_1 = 0$ (випадок $\alpha_1 \neq 0$ розглядається аналогічно), тобто коли $u = \varphi(x)v$. Система (2.199) при $d = 1$ і $u = \varphi(x)v$ має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi v_t = \varphi'' v + 2\varphi' v_x + \varphi v_{xx} - \varphi v + \varphi^{1-\lambda} v, \\ &v_t = v_{xx} + (a - b\varphi^{1-\lambda})v. \end{aligned} \tag{2.229}$$

Підставивши в перше рівняння системи (2.229) вираз v_t з другого рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{v_x}{v} = -\frac{1}{2\varphi'}(\varphi'' + (1 + b\varphi)\varphi^{1-\lambda} - (1 + a)\varphi),$$

розв'язок якого має вигляд $v = g(t)\exp(\int f(x)dx)$, де $f(x) = -\frac{1}{2\varphi'}(\varphi'' + (1 + b\varphi)\varphi^{1-\lambda} - (1 + a)\varphi)$, $g(t)$ — довільна гладка функція. Проте, підставивши знайдену функцію v в друге рівняння системи (2.229), отримуємо $g(t) = C\,e^{\beta t}$ (C та β — довільні сталі), що і веде до ліївського анзацу (2.202).

Аналогічним чином можна розглянути анзаци (2.227) (при $d \neq 1$) та (2.228), проте отримані в результаті редукції системи рівнянь виявляються занадто громіздкими і складними для інтегрування.

Перейдемо тепер до побудови частково інваріантного G_1^2–розв'язку системи (2.199). Зокрема, анзац (2.226) зводить (2.199) до системи вигляду

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + (\nu^\lambda - 1)u, \\ &\nu u_t = d\nu u_{xx} + (-\nu' + a\nu - b\nu^\lambda)u, \end{aligned} \tag{2.230}$$

з якої отримуємо рівняння

$$(1-d)\nu u_t = (-\nu' + (a+d)\nu - d\nu^{\lambda+1} - b\nu^\lambda)u. \tag{2.231}$$

При $d = 1$ рівняння (2.231) еквівалентне рівнянню (2.214), загальний розв'язок якого побудовано для $\lambda = \frac{1}{2}$. Підставляючи знайдені значення функції ν (при різних значеннях $\Delta = 4b - (1+a)^2$) в перше рівняння системи (2.230) при $\lambda = \frac{1}{2}$, отримуємо:

$$u_t = u_{xx} + \Big(\frac{2}{t} + \frac{a-1}{2}\Big)u, \ \Delta = 0, \tag{2.232}$$

$$u_t = u_{xx} + \Big(\frac{a-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\tan\big(\frac{\sqrt{\Delta}\,t}{4}\big)\Big)u, \ \Delta > 0, \tag{2.233}$$

$$u_t = u_{xx} + \Big(\frac{a-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\tanh\big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{4}\,t\big)\Big)u, \ \Delta < 0. \tag{2.234}$$

Рівняння (2.232)–(2.234) ведуть до таких частково інваріантних розв'язків системи (2.199) при $d = 1$ та $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &u(t,x) = t^2 \exp(\tfrac{a-1}{2}\,t) z(t,x), \ \Delta = 0, \\ &v(t,x) = \big(\tfrac{1+a}{2}\,t + 2\big)^2 \exp\big(\tfrac{a-1}{2}\,t\big) z(t,x), \end{aligned} \tag{2.235}$$

$$\begin{aligned} &u(t,x) = \cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{\Delta}\,t}{4}\Big)\exp(\tfrac{a-1}{2}\,t) z(t,x), \ \Delta > 0, \\ &v(t,x) = \Big(\tfrac{a+1}{2}\cos\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}\,t}{4}\big) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\sin\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}\,t}{4}\big)\Big)^2 \exp(\tfrac{a-1}{2}\,t) z(t,x), \end{aligned} \tag{2.236}$$

$$\begin{aligned} &u(t,x) = \cosh^2\Big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}\,t}{4}\Big)\exp(\tfrac{a-1}{2}\,t) z(t,x), \ \Delta < 0, \\ &v(t,x) = \Big(\tfrac{a+1}{2}\cosh\big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}\,t}{4}\big) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\sinh\big(\tfrac{\sqrt{-\Delta}\,t}{4}\big)\Big)^2 \times \\ &\qquad \exp(\tfrac{a-1}{2}\,t) z(t,x), \end{aligned} \tag{2.237}$$

де $z(t,x)$ — довільний розв'язок класичного рівняння дифузії (рівняння теплопровідності)

$$z_t = z_{xx}. \tag{2.238}$$

Зауважимо, що розв'язки (2.218)–(2.220) є частинним випадком розв'язків (2.235)–(2.237) при $z(t,x) = \frac{C}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$.

При $d \neq 1$ рівняння (2.231) можна проінтегрувати, знайшовши

$$u = H(x)\exp\Big(\int \frac{1}{(1-d)\nu}\,(-\nu' + (a+d)\nu - d\nu^{\lambda+1} - b\nu^{\lambda})dt\Big), \tag{2.239}$$

де H(x) — довільна гладка функція. Підставивши (2.239) в перше рівняння системи (2.230), отримуємо рівняння

$$H''(x) = H(x)\frac{1}{(1-d)\nu}\,(-\nu' + (a+1)\nu - \nu^{\lambda+1} - b\nu^{\lambda}),$$

з якого випливає

$$H'' - \gamma H = 0, \tag{2.240}$$

$$\nu' + \nu(\nu^{\lambda} + b\nu^{\lambda-1} - a - 1 + \gamma - d\gamma) = 0,\ \gamma = const. \tag{2.241}$$

Структура рівняння (2.241) така ж як і рівняння (2.214). Тут ми знову зупинимося на спеціальному випадку $\lambda = \frac{1}{2}$, коли його розв'язок залежатиме від знаку виразу $\Theta = 4b - h^2$, де $h = a + 1 - \gamma + d\gamma$, а саме:
якщо $\Theta = 0$, то $\nu = \big(\frac{2}{t} + \frac{h}{2}\big)^2$,
якщо $\Theta > 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\big(h - \sqrt{\Theta}\tan(\frac{\sqrt{\Theta}t}{4})\big)^2$,
якщо $\Theta < 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\big(h + \sqrt{-\Theta}\tanh(\frac{\sqrt{-\Theta}t}{4})\big)^2$.

Отже, для того щоб отримати розв'язки системи (2.199) при $\lambda = \frac{1}{2}$ та $d \neq 1$, потрібно лише обчислити значення інтегралу в (2.239), підставивши в підінтегральний вираз знайдені функції ν. Провівши нескладні обчислення, отримуємо такі розв'язки системи (2.199) при $\lambda = \frac{1}{2}$ та $d \neq 1$:

$$u(t,x) = H(x)\,t^2\exp\big(\frac{a - 1 + (1+d)\gamma}{2}t\big),\ \Theta = 0,$$

$$v(t,x) = \frac{H(x)}{4}\big(4 + h\,t\big)^2 \exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}\,t\big),$$
$$u(t,x) = H(x)\cos^2\Big(\frac{\sqrt{\Theta}}{4}\,t\Big)\exp\Big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}\,t\Big),\ \Theta > 0,$$
$$v(t,x) = \frac{1}{4}\Big(h - \sqrt{\Theta}\tan\big(\frac{\sqrt{\Theta}}{4}\,t\big)\Big)^2 u(t,x),$$
$$u(t,x) = H(x)\cosh^2\Big(\frac{\sqrt{-\Theta}}{4}\,t\Big)\exp\Big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}\,t\Big),\ \Theta < 0,$$
$$v(t,x) = \frac{1}{4}\Big(h + \sqrt{-\Theta}\tanh\big(\frac{\sqrt{-\Theta}}{4}\,t\big)\Big)^2 u(t,x),$$

де функція $H(x)$ є розв'язком лінійного ЗДР (2.240).

Розглянемо детальніше розв'язок (2.237). Оскільки система (2.199) має стійкі стаціонарні точки (пряма $u = v$) лише при $a = b,\ \lambda > \frac{a}{a+1}$, то перепишемо розв'язок (2.237) при виконанні цих умов. Зокрема, з того що $\lambda > \frac{a}{a+1}$ випливає $a < 1$, оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$. Тоді розв'язок (2.237) має вигляд

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \Big(\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t\big) + 1\Big)^2 z(t,x),\\ v(t,x) &= \Big(a\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t\big) + 1\Big)^2 z(t,x), \end{aligned} \tag{2.242}$$

де z — довільний розв'язок рівняння (2.238).

Виявляється, що з множини точних розв'язків (2.242) можна виділити такі, які задовольняють біологічно вмотивовані додаткові умови: збіжність популяцій до стійкої стаціонарної точки, обмеженість росту популяцій та відсутність дифузії популяцій через границю області. Зокрема, поклавши $z = \exp(-\beta_1^2 t)\cos(\beta_1 x) + \beta_2$ (β_1 та β_2 — довільні сталі) можна сформулювати теорему.

Теорема 2.8. *Нелінійна система рівнянь РД (2.199), з параметрами* $a = b < 1,\ d = 1,\ \lambda = \frac{1}{2}$, *допускає в області* $\{(t,x) \in (0,+\infty)\times(0,\frac{\pi}{\beta_1})\}$ *обмежений періодичний (в просторі) розв'язок*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \Big(\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t\big) + 1\Big)^2\big(\exp(-\beta_1^2 t)\cos(\beta_1 x) + \beta_2\big),\\ v(t,x) &= \Big(a\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t\big) + 1\Big)^2\big(\exp(-\beta_1^2 t)\cos(\beta_1 x) + \beta_2\big), \end{aligned} \tag{2.243}$$

що задовольняє нульові умови Ноймана

$$u_x|_{x=0} = 0,\ v_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{\beta_1}} = 0, v_x|_{x=\frac{\pi}{\beta_1}} = 0,$$

де $\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 1.$

Добре видно, що розв'язок вигляду (2.243) прямує до стійкої стаціонарної точки $(u, v) \to (\beta_2, \beta_2)$ при $t \to +\infty$. Отже, цей розв'язок описує змагання між двома видами, при якому вони співіснують.

2.4. Висновки до другого розділу

В цьому розділі побудовано оператори Q-умовної симетрії та Q-умовної симетрії першого типу для систем рівнянь Лотки–Вольтера. Зокрема, було встановлено, що двокомпонентна ДСЛВ допускає оператори Q-умовної (некласичної) симетрії лише у випадку різних коефіцієнтів дифузії. Знайдені оператори використано для побудови анзаців та проведення редукції дво- та трикомпонентних ДСЛВ до систем ЗДР. Незважаючи на нелінійність отриманих систем ЗДР, нам вдалося побудувати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків. Досліджено властивості окремих розв'язків та наведено біологічну інтерпретацію.

Побудовано інваріантні та частково інваріантні розв'язки однієї системи рівнянь РД типу Лотки–Вольтера. Наведено біологічну інтерпретацію розв'язків, що прямують до стійкої стаціонарної точки досліджуваної системи.

Нові результати розділу 2 опубліковано у роботах [3, 45, 47].

РОЗДІЛ 3

Q-умовні симетрії першого типу та точні розв'язки класу систем рівнянь реакції-дифузії

В цьому розділі розглядатимемо клас нелінійних систем рівнянь РД

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F(U,V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + G(U,V), \end{aligned} \qquad (3.1)$$

де коефіцієнти дифузії $D^1(U)$ та $D^2(V)$ припускаються додатними функціями.

Система (3.1) після застосування заміни Кірхгофа

$$u = \int D^1(U)dU, \quad v = \int D^1(V)dV, \qquad (3.2)$$

де $u(t,x)$ та $v(t,x)$ — нові невідомі функції, має вигляд

$$\begin{aligned} u_{xx} &= d^1(u)u_t + C^1(u,v), \\ v_{xx} &= d^2(v)v_t + C^2(u,v). \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Функції $d^1,\ d^2$ і $C^1,\ C^2$ системи (3.3) визначаються відповідно через $D^1,\ D^2$ та $F,\ G$ такими формулами:

$$\begin{aligned} & d^1(u) = \tfrac{1}{D^1(U)},\ d^2(v) = \tfrac{1}{D^2(V)}, \\ & C^1(u,v) = -F(U,V),\ C^2(u,v) = -G(U,V), \end{aligned}$$

де $U = D^1_*(u) \equiv \left(\int D^1(u)du\right)^{-1}, \quad V = D^2_*(v) \equiv \left(\int D^2(v)dv\right)^{-1}$ (верхній індекс -1 означає обернену функцію).

Розділ організовано таким чином. В підрозділі 3.1 описано ФЗП системи (3.3). Підрозділ 3.2 містить СВР для знаходження операторів Q-умовні симетрії першого типу системи (3.3). В підрозділі 3.3 знайдено всі Q-умовні симетрії першого типу (при обмеженні (1.25)) для класу систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії. В підрозділі 3.4 описано всі можливі Q-умовні симетрії першого типу (при обмеженні (1.25)) для класу систем рівнянь РД у випадку двох несталих коефіцієнтів дифузії. Застосування отриманих операторів для побудови анзаців та проведення редукції систем рівнянь РД до систем ЗДР, а також приклади точних розв'язків таких систем, подано в підрозділі 3.5. Підрозділ 3.6 присвячено побудові точних розв'язків та їх фізичній інтерпретації для системи рівнянь РД, яка моделює потік тонких плівок.

3.1. Формо-зберігаючі перетворення

При дослідженні певного класу ДРЧП (систем ДРЧП) на наявність операторів симетрії (ліївської, некласичної, умовної тощо) виникає проміжна задача (яка часто не є тривіальною): з точністю до яких перетворень здійснювати дослідження заданого класу? Зокрема, при проведенні групової класифікації класу ДРЧП (систем ДРЧП) використовують метод Лі–Овсяннікова, який передбачає побудову перетворень еквівалентності (див. наприклад [12, 70]) досліджуваного класу, тобто таких невироджених локальних перетворень, які зводять довільно вибране рівняння (систему рівнянь) з заданого класу до деякого іншого рівняння (системи рівнянь) з цього ж класу. Проте для багатьох класів систем рівнянь множина перетворень еквівалентності має тривіальну структуру (наприклад перетворення розтягу та зсуву для класу рівнянь РД, див. наслідок 3.1). У зв'язку з цим, все частіше з'являються роботи в яких використовують ФЗП — невироджені локальні перетворення, якими можна звести хоча б одне рівняння (систему рівнянь) з заданого класу в інше рівняння (систему рівнянь) з цього класу. Вказані перетворення були введені в роботі [71] і зараз широко використовуються при проведенні групової класифікації (див. [53, 101] і цитовані там роботи). Задача побудови ФЗП не є тривіальною навіть для класів ДРЧП [58]. У випадку систем ДРЧП проблема знаходження ФЗП різко ускладнюється і робіт, присвячених її розв'язанню, є небагато [53, 94]. В цьому підрозділі описано ФЗП для класу систем рівнянь РД зі сталими та несталими коефіцієнтами дифузії.

Перш за все зазначимо, що систему (3.3) зі сталими коефіцієнтами d^1 та d^2, а саме:

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \lambda_1 u_t + C^1(u,v),\\
v_{xx} &= \lambda_2 v_t + C^2(u,v),
\end{aligned}
$$

де λ_1 і λ_2 — довільні сталі ($\lambda_k \neq 0,\ k = 1, 2$), можна звести до системи

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_t + C^1(u,v),\\
v_{xx} &= d v_t + C^2(u,v),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

виконавши перетворення

$$
t \to \lambda_1 t
$$

та ввівши позначення $d = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Таким чином, при побудові ФЗП для класу систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії, розглядатимемо системи вигляду (3.4), для яких знайдені перетворення подано в теоремі.

Теорема 3.1. *Довільно вибрану систему рівнянь РД вигляду (3.4) при $d \neq 1$ можна звести до системи такого самого вигляду:*

$$
\begin{aligned}
w_{yy} &= w_\tau + F^1(w,z),\\
z_{yy} &= \lambda z_\tau + F^2(w,z),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

за допомогою невироджених локальних перетворень

$$
\tau = a(t,x,u,v),\ \ y = b(t,x,u,v),
\tag{3.6}
$$

$$w = \varphi(t, x, u, v), \;\; z = \psi(t, x, u, v), \tag{3.7}$$

тоді і тільки тоді, коли гладкі функції a, b, φ *та* ψ *мають вигляд:*

$$\begin{array}{ll} (I) & a = \alpha(t), \;\; b = \beta(t)x + \gamma(t), \;\; \alpha\beta \neq 0, \\ & \varphi = f(t)\exp\Big(-\frac{1}{4\beta}(\dot{\beta}x^2 + 2\dot{\gamma}x)\Big)u + P(t, x), \;\; f \neq 0, \\ & \psi = g(t)\exp\Big(-\frac{d}{4\beta}(\dot{\beta}x^2 + 2\dot{\gamma}x)\Big)v + Q(t, x), \;\; g \neq 0, \end{array} \tag{3.8}$$

де функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $P(t,x)$ *і* $Q(t,x)$ *задовольняють такі співвідношення:*

$$\dot{\alpha} = \beta^2, \quad \lambda = d, \tag{3.9}$$

$$\beta^2 F^1(\varphi, \psi) = \varphi_u C^1(u, v) + \varphi_{xx} - \varphi_t - 2\frac{\varphi_x}{\varphi_u}\varphi_{xu}, \tag{3.10}$$

$$\beta^2 F^2(\varphi, \psi) = \psi_v C^2(u, v) + \psi_{xx} - d\psi_t - 2\frac{\psi_x}{\psi_v}\psi_{xv}, \tag{3.11}$$

або

$$\begin{array}{ll} (II) & a = \alpha(t), \;\; b = \beta(t)x + \gamma(t), \;\; \alpha\beta \neq 0, \\ & \varphi = f(t)\exp\Big(-\frac{d}{4\beta}(\dot{\beta}x^2 + 2\dot{\gamma}x)\Big)v + P(t, x), \;\; f \neq 0, \\ & \psi = g(t)\exp\Big(-\frac{1}{4\beta}(\dot{\beta}x^2 + 2\dot{\gamma}x)\Big)u + Q(t, x), \;\; g \neq 0, \end{array} \tag{3.12}$$

де функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $P(t,x)$ *і* $Q(t,x)$ *задовольняють такі співвідношення:*

$$\dot{\alpha} = \lambda\beta^2, \quad \lambda = \frac{1}{d}, \tag{3.13}$$

$$\beta^2 F^1(\varphi, \psi) = \varphi_v C^2(u, v) + \varphi_{xx} - d\varphi_t - 2\frac{\varphi_x}{\varphi_v}\varphi_{xv}, \tag{3.14}$$

$$\beta^2 F^2(\varphi, \psi) = \psi_u C^1(u, v) + \psi_{xx} - \psi_t - 2\frac{\psi_x}{\psi_u}\psi_{xu}. \tag{3.15}$$

В теоремі (та скрізь нижче) крапкою позначено диференціювання за змінною t.

Доведення.

Для того, щоб перетворення (3.6) та (3.7) зводили систему рівнянь РД

(3.4) до системи (3.5), необхідно, щоб вони були невиродженими, тобто:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_x & a_t & a_u & a_v \\ b_x & b_t & b_u & b_v \\ \varphi_x & \varphi_t & \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_x & \psi_t & \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.16}$$

Використовуючи вигляд перетворень (3.6) та (3.7), знайдемо вирази для похідних u_{xx}, v_{xx}, u_t, v_t. Для цього необхідно здиференціювати нові залежні змінні w і z з (3.7) за змінними x та t, враховуючи при цьому перетворення (3.6). Оскільки отримані формули дуже громіздкі, то обмежимося лише похідними змінної u, тобто переходом першого рівняння системи (3.4) у відповідне йому рівняння системи (3.5). Зокрема, вирази для перших похідних мають такий вигляд:

$$\begin{gathered} u_x = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x - a_x w_\tau - b_x w_y & a_v w_\tau + b_v w_y - \varphi_v \\ \psi_x - a_x z_\tau - b_x z_y & a_v z_\tau + b_v z_y - \psi_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_u w_\tau + b_u w_y - \varphi_u & a_v w_\tau + b_v w_y - \varphi_v \\ a_u z_\tau + b_u z_y - \psi_u & a_v z_\tau + b_v z_y - \psi_v \end{vmatrix}}, \\ u_t = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_t - a_t w_\tau - b_t w_y & a_v w_\tau + b_v w_y - \varphi_v \\ \psi_t - a_t z_\tau - b_t z_y & a_v z_\tau + b_v z_y - \psi_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_u w_\tau + b_u w_y - \varphi_u & a_v w_\tau + b_v w_y - \varphi_v \\ a_u z_\tau + b_u z_y - \psi_u & a_v z_\tau + b_v z_y - \psi_v \end{vmatrix}}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

При повторному диференціюванні u_x за змінною x було отримано громіздкий вираз, який містить похідні $w_{\tau\tau}$, $w_{\tau y}$, $z_{\tau\tau}$ і $z_{\tau y}$. Проте вказаних похідних немає в жодному з рівнянь системи (3.5). Отже, прирівнявши до нуля коефіцієнти при відповідних похідних, отримуємо таке обмеження на функцію a:

$$a_x = a_u = a_v = 0 \;\Rightarrow\; a = \alpha(t), \tag{3.18}$$

де $\alpha(t)$ — довільна гладка функція.

Зазначимо, що у випадку скалярного рівняння обмеження (3.18) були отримані, наприклад, в роботі [58].

Вираз для похідної u_{xx} містить похідні w_{yy} і z_{yy}, коефіцієнти при яких відповідно рівні

$$\frac{1}{\delta}\,(b_x + b_u u_x + b_v v_x)\big(b_x\psi_v - b_v\psi_x + u_x(b_u\psi_v - b_v\psi_u)\big) \tag{3.19}$$

та

$$\frac{1}{\delta}\,(b_x + b_u u_x + b_v v_x)\big(b_v\varphi_x - b_x\varphi_v + u_x(b_v\varphi_u - b_u\varphi_v)\big), \tag{3.20}$$

де $\delta = \begin{vmatrix} b_u w_y - \varphi_u & b_v w_y - \varphi_v \\ b_u z_y - \psi_u & b_v z_y - \psi_v \end{vmatrix}$.

Підставивши в (3.19) та (3.20) замість u_x і v_x їх вирази (з (3.17) для u_x та аналогічний для v_x), отримуємо, що вираз для похідної u_{xx} містить добутки похідних w_{yy} і z_{yy} на похідні w_y, w_y^2, $w_y z_y$, z_y, z_y^2. Оскільки вказаних добутків немає в жодному з рівнянь системи (3.5), то отримуємо таке обмеження на функцію b:

$$b_u = b_v = 0 \;\Rightarrow\;\; b = b(t,x). \tag{3.21}$$

Враховуючи отримані обмеження (3.18) і (3.21) на функції a та b, умова невиродженості (3.16) зводиться до таких умов:

$$\dot\alpha\; b_x \neq 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.22}$$

Таким чином, вирази для похідних u_{xx} і u_t мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \tfrac{\psi_v b_x^2}{\Delta_2} w_{yy} - \tfrac{\varphi_v b_x^2}{\Delta_2} z_{yy} + \tfrac{(\psi_v b_x)_x \Delta_2 - (\Delta_2)_x \psi_v b_x}{\Delta_2^2} w_y - \\ &\qquad \tfrac{(\varphi_v b_x)_x \Delta_2 - (\Delta_2)_x \varphi_v b_x}{\Delta_2^2} z_y + \tfrac{(\psi_x\varphi_v - \psi_v\varphi_x)_x \Delta_2 - (\Delta_2)_x(\psi_x\varphi_v - \psi_v\varphi_x)}{\Delta_2^2}, \\ u_t &= \tfrac{1}{\Delta_2}\big(\psi_v(\dot\alpha w_\tau + b_t w_y - \varphi_t) - \varphi_v(\dot\alpha z_\tau + b_t z_y - \psi_t)\big). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Підставивши (3.23) в перше рівняння системи (3.4), отримуємо рівняння, в якому присутні такі вирази:

$$(i)\;\; -\frac{\varphi_v b_x^2}{\Delta_2}\Big(z_{yy} - \frac{\dot\alpha}{b_x^2} z_\tau\Big), \qquad (ii)\;\; \frac{\psi_v b_x^2}{\Delta_2}\Big(w_{yy} - \frac{\dot\alpha}{b_x^2} w_\tau\Big),$$

а частина рівняння, що залишилася, не містить похідних z_{yy}, w_{yy}, z_τ та w_τ. У випадку, коли перше рівняння системи (3.4) переходить в перше рівняння системи (3.5), отримуємо

$$\dot\alpha = b_x^2,\ \varphi_v = 0. \tag{3.24}$$

Якщо ж перше рівняння системи (3.4) переходить в друге рівняння системи (3.5), то

$$\dot\alpha = \lambda b_x^2,\ \psi_v = 0. \tag{3.25}$$

Оскільки розгляд кожного з отриманих випадків є практично ідентичним, то обмежимося лише дослідженням умов (3.24).

Врахувавши (3.22) при $\varphi_v = 0$, отримуємо обмеження $\varphi_u\psi_v \neq 0$. З (3.24) випливає $b_{xx} = 0 \ \Rightarrow\ b(t,x) = \beta(t)x + \gamma(t)$, де β та γ — довільні гладкі функції. Таким чином, маємо першу умову з (3.9), а саме:

$$\dot\alpha = \beta^2.$$

При виконанні умов (3.24), вирази для похідних u_{xx} і u_t мають такий вигляд:

$$\begin{array}{l} u_{xx} = \frac{\beta^2}{\varphi_u}w_{yy} - 2\frac{\beta\varphi_{xu}}{\varphi_u^2}w_y + \frac{2\varphi_x\varphi_{xu}-\varphi_u\varphi_{xx}}{\varphi_u^2} - \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u^3}(\beta w_y - \varphi_x)^2,\\ u_t = \frac{1}{\varphi_u}(\dot\alpha w_\tau + (\dot\beta x + \dot\gamma)w_y - \varphi_t). \end{array} \tag{3.26}$$

Оскільки перше рівняння системи (3.5) не містить похідної w_y, а також її квадрату, то, прирівнявши до нуля відповідні коефіцієнти, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{array}{l} \varphi_{uu} = 0,\\ 2\frac{\beta\varphi_{xu}}{\varphi_u^2} + \frac{\dot\beta x+\dot\gamma}{\varphi_u} = 0, \end{array}$$

загальний розв'язок якої має вигляд

$$\varphi = f(t)\exp\Big(-\frac{1}{4\beta}(\dot\beta x^2 + 2\dot\gamma x)\Big)u + P(t,x), \tag{3.27}$$

де $f(t) \neq 0$ та $P(t,x)$ — довільні гладкі функції.

Очевидно, що (3.27) збігається з відповідною формулою в (3.8).

Для отримання умови (3.10) підставляємо (3.26) і (3.27) в перше рівняння системи (3.4)

$$w_{yy} = w_\tau + \frac{\varphi_u}{\beta^2}\Big(C^1(u,v) - \frac{\varphi_t}{\varphi_u} - \frac{2\varphi_x\varphi_{xu} - \varphi_u\varphi_{xx}}{\varphi_u^2}\Big). \tag{3.28}$$

Рівняння (3.28) збігається з першим рівнянням системи (3.5) лише за умови (3.10).

Провівши аналогічні обчислення для другого рівняння системи (3.4), отримуємо: рівняння $\dot{\alpha} = \frac{\lambda}{d}\beta^2$, яке (разом із рівнянням $\dot{\alpha} = \beta^2$) приводить до умов (3.9), вигляд функції ψ з (3.8) та співвідношення (3.11).

При розгляді умов (3.25) було отримано перетворення (3.12) та співвідношення (3.13)–(3.15).

Теорему доведено.

Розглянемо тепер систему рівнянь РД (3.3) з несталими коефіцієнтами дифузії.

Теорема 3.2. *Довільно вибрану систему рівнянь РД вигляду (3.3) при $d_u^1 d_v^2 \neq 0$ можна звести до системи такого самого вигляду:*

$$\begin{aligned} w_{yy} &= \lambda^1(w)w_\tau + F^1(w,z),\\ z_{yy} &= \lambda^2(z)z_\tau + F^2(w,z), \end{aligned} \tag{3.29}$$

за допомогою невироджених локальних перетворень (3.6)–(3.7), тоді і тільки тоді, коли гладкі функції a, b, φ і ψ мають вигляд

$$\begin{aligned} &a = \alpha(t),\ b = \beta(x), && \dot{\alpha}\beta' \neq 0,\\ &\varphi = \sqrt{\beta'}f(t)u + P(t,x), && f \neq 0,\\ &\psi = \sqrt{\beta'}g(t)v + Q(t,x), && g \neq 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

де функції $\alpha(t)$, $\beta(x)$, $f(t)$, $g(t)$, $\gamma(t)$, $P(t,x)$ та $Q(t,x)$ задовольняють такі співвідношення:

$$\dot{\alpha}d^1(u) = (\beta')^2\lambda^1(\varphi), \quad d^1(u)\lambda^2(\psi) = d^2(v)\lambda^1(\varphi), \tag{3.31}$$

$$(\beta')^2 F^1(\varphi,\psi) = \varphi_u C^1(u,v) + \varphi_{xx} - d^1(u)\varphi_t - 2\frac{\varphi_x}{\varphi_u}\varphi_{xu}, \tag{3.32}$$

$$(\beta')^2 F^2(\varphi,\psi) = \psi_v C^2(u,v) + \psi_{xx} - d^2(v)\psi_t - 2\frac{\psi_x}{\psi_v}\psi_{xv}. \tag{3.33}$$

Доведення теореми 3.2 опускаємо, оскільки воно проводиться аналогічно до доведення теореми 3.1.

Зауваження 3.1. Перетворення (3.30) та співвідношення (3.31)–(3.33) отримано у випадку, коли перетворення (3.6)–(3.7) зводить перше рівняння системи (3.4) в перше рівняння системи (3.5). У випадку, коли перше рівняння системи (3.3) переходить в друге рівняння системи (3.29) формули отримуються аналогічними (див. теорему 3.1) і ми їх опускаємо.

Оскільки ФЗП заданого класу рівнянь (системи рівнянь) містять як частинний випадок перетворення еквівалентності цього ж класу, то з перетворень (3.8) і (3.30) при виконанні співвідношень (3.9)–(3.11) та (3.31)–(3.33) можна отримати перетворення еквівалентності класу систем рівнянь РД [72].

Наслідок 3.1. *Перетворення еквівалентності системи рівнянь РД (3.3) мають вигляд*

$$\begin{aligned} &\tau = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad y = \alpha_3 x + \alpha_4, \\ &w = \alpha_5 u + \alpha_6, \quad z = \alpha_7 v + \alpha_8, \end{aligned} \tag{3.34}$$

де α_l $(l = 1, \dots, 8)$ *— деякі сталі* ($\alpha_{2k-1} \neq 0,\ k = 1, \dots, 4$)*, при виконанні таких співвідношень:*

$$\begin{aligned} &\alpha_1 d^1(u) = \alpha_3^2 \lambda^1(w), \\ &d^1(u)\lambda^2(z) = d^2(v)\lambda^1(w), \\ &\alpha_3^2 F^1(w,z) = \alpha_5 C^1(u,v), \\ &\alpha_3^2 F^2(w,z) = \alpha_7 C^2(u,v). \end{aligned}$$

Доведення наслідку ґрунтується на спрощенні співвідношень (3.31)–(3.33) за умови, що вони повинні виконуватися для довільно вибраних функцій d^k, C^k, λ^k і F^k $(k = 1, 2)$.

3.2. Системи визначальних рівнянь

Згідно з означенням 1.4 оператора Q-умовної симетрії першого типу, було побудовано СВР для знаходження відповідних операторів вигляду (2.2) системи рівнянь РД (3.3). Зокрема, при $\xi^0 \neq 0$ та з використанням многовиду $\mathcal{M}_1 = \{S_1 = 0, S_2 = 0, Q(u) = 0\}$, отримана СВР має такий вигляд:

$$\xi^0_x = \xi^0_u = \xi^0_v = \xi^1_u = \xi^1_v = 0, \tag{3.35}$$

$$\eta^1_{uu} = \eta^1_{uv} = \eta^1_{vv} = \eta^2_{uu} = \eta^2_{uv} = \eta^2_{vv} = 0, \tag{3.36}$$

$$(d^1 - d^2)\eta^1_v = 0, \quad \eta^1_{xv} = 0, \tag{3.37}$$

$$\xi^1\eta^2_u(d^2 - d^1) + 2\xi^0\eta^2_{xu} = 0, \tag{3.38}$$

$$(\xi^0_t\xi^1 - \xi^0\xi^1_t - 2\xi^1\xi^1_x)d^1 - \xi^1\eta^1 d^1_u - 2\xi^0\eta^1_{xu} + \xi^0\xi^1_{xx} = 0, \tag{3.39}$$

$$(2\xi^1_x - \xi^0_t)d^2 + \eta^2 d^2_v = 0, \tag{3.40}$$

$$\xi^1_t d^2 + 2\eta^2_{xv} - \xi^1_{xx} = 0, \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}\eta^1 C^1_u + \eta^2 C^1_v - \eta^1_v C^2 + (2\xi^1_x - \eta^1_u)C^1 + \frac{\eta^1}{\xi^0}\eta^1 d^1_u + \\ (\eta^1_t + 2\xi^1_x\frac{\eta^1}{\xi^0} - \xi^0_t\frac{\eta^1}{\xi^0})d^1 - \eta^1_{xx} = 0,\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\eta^1 C^2_u + \eta^2 C^2_v - \eta^2_u C^1 + (2\xi^1_x - \eta^2_v)C^2 + \\ (\eta^2_t + \frac{\eta^1}{\xi^0}\eta^2_u)d^2 - \frac{\eta^1}{\xi^0}\eta^2_u d^1 - \eta^2_{xx} = 0.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Оскільки групова класифікація класу систем рівнянь РД (3.3) зі сталими [49, 50, 81, 83] і несталими [51, 72] коефіцієнтами дифузії вже проведена, то при побудові операторів Q-умовної симетрії першого типу цієї системи ми систематично виключатимемо з розгляду оператори, які є операторами Лі, або зводяться до таких операторів. З цією метою використаємо СВР для знаходження операторів класичної симетрії системи (3.3)

$$\xi^0_x = \xi^0_u = \xi^0_v = \xi^1_u = \xi^1_v = 0,$$

$$\eta^1_{uu} = \eta^1_{uv} = \eta^1_{vv} = \eta^2_{uu} = \eta^2_{uv} = \eta^2_{vv} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&(d^1-d^2)\eta^1_v=0, \quad (d^1-d^2)\eta^2_u=0, \quad \eta^1_{xv}=\eta^2_{xu}=0,\\
&(2\xi^1_x-\xi^0_t)d^1+\eta^1 d^1_u=0,\\
&(2\xi^1_x-\xi^0_t)d^2+\eta^2 d^2_v=0,\\
&\xi^1_t d^1+2\eta^1_{xu}-\xi^1_{xx}=0,\\
&\xi^1_t d^2+2\eta^2_{xv}-\xi^1_{xx}=0,\\
&\eta^1 C^1_u+\eta^2 C^1_v-\eta^1_v C^2+(2\xi^1_x-\eta^1_u)C^1+\eta^1_t d^1-\eta^1_{xx}=0,\\
&\eta^1 C^2_u+\eta^2 C^2_v-\eta^2_u C^1+(2\xi^1_x-\eta^2_v)C^2+\eta^2_t d^2-\eta^2_{xx}=0,
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

яку можна легко вивести, використавши статтю [51] та перетворення (3.2).

Теорема 3.3. *Система рівнянь РД (3.3) у випадку $d^1 = d^2$ не допускає операторів Q-умовної симетрії першого типу (при $\xi^0 \neq 0$) відмінних від операторів симетрії Лі.*

Доведення теореми є очевидним, оскільки у випадку $d^1 = d^2$ СВР (3.35)–(3.43) для пошуку операторів Q-умовної симетрії першого типу (при $\xi^0 \neq 0$) та СВР (3.44) для пошуку операторів класичної симетрії *збігаються.*

Легко помітити, що СВР (3.35)–(3.43) і (3.44) (у випадку $d^1 \neq d^2$) будуть збігатися при виконанні таких додаткових обмежень:

$$
\eta^2_u = 0, \quad (2\xi^1_x-\xi^0_t)d^1+\eta^1 d^1_u=0. \tag{3.45}
$$

Таким чином, при побудові операторів Q-умовної симетрії першого типу системи (3.3) необхідно вимагати, щоб принаймні одна з умов (3.45) не виконувалась.

3.3. Q-умовні симетрії класу систем рівнянь реакції-дифузії зі сталими коефіцієнтами дифузії

При побудові операторів Q-умовні симетрії першого типу для класу систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії розглядатимемо *лише* нелінійні системи вигляду (3.4) з *додатнім* коефіцієнтом $d \neq 1$.

Перш за все встановимо структуру шуканого оператора відносно змінних u та v. Розв'язавши рівняння (3.35) і (3.36), отримуємо

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \xi^0(t),\ \xi^1 = \xi^1(t,x),\\ &\eta^1 = r^1(t,x)u + p^1(t,x),\ \eta^2 = q(t,x)u + r^2(t,x)v + p^2(t,x), \end{aligned} \tag{3.46}$$

де $\xi^0(t)$, $\xi^1(t,x)$, $q(t,x)$, $r^k(t,x)$, $p^k(t,x)$ — поки що невідомі гладкі функції ($k = 1,2$). Таким чином, будемо шукати оператор Q-умовної симетрії першого типу у вигляді

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + (r^1u + p^1)\partial_u + (qu + r^2v + p^2)\partial_v.$$

Підставивши вирази (3.46) та значення коефіцієнтів $d^1 = 1,\ d^2 = d$ в рівняння (3.38)–(3.43), отримуємо таку нелінійну систему ДРЧП:

$$\xi^1(d-1)q + 2\xi^0 q_x = 0, \tag{3.47}$$

$$2r^1_x + \xi^1_t = 0, \tag{3.48}$$

$$2r^2_x + d\xi^1_t = 0, \tag{3.49}$$

$$2\xi^1_x - \xi^0_t = 0, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} &(r^1u + p^1)C^1_u + (qu + r^2v + p^2)C^1_v + (2\xi^1_x - r^1)C^1 =\\ &(r^1_{xx} - r^1_t)u + p^1_{xx} - p^1_t, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} &(r^1u + p^1)C^2_u + (qu + r^2v + p^2)C^2_v + (2\xi^1_x - r^2)C^2 = qC^1 +\\ &\frac{r^1u + p^1}{\xi^0}q(1-d) + (r^2_{xx} - dr^2_t)v + (q_{xx} - dq_t)u + p^2_{xx} - dp^2_t, \end{aligned} \tag{3.52}$$

для знаходження коефіцієнтів ξ^0, ξ^1, q, r^k і p^k ($k = 1,2$) оператора Q-умовної симетрії першого типу системи (3.4).

Зауважимо, що з обмежень (3.45) випливає необхідна та достатня умова того, що знайдені оператори не будуть ліївськими, а саме:

$$q \neq 0. \tag{3.53}$$

Теорема 3.4. *Нелінійна система рівнянь РД (3.4) при $d \neq 1$ ($d > 0$) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу лише у випадках, поданих в таблиці 3.1. Будь-яка інша система рівнянь РД,* *яка допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, зводиться до отриманих систем невиродженими локальними перетвореннями вигляду*

$$\begin{aligned} &t \to C_1 t + C_2, \\ &x \to C_3 x + C_4, \\ &u \to C_5 e^{C_6 t} u + C_7 t + C_8, \\ &v \to C_9 e^{C_{10} t} v + C_{11} t^2 + C_{12} t + C_{13}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

(тут C_l $(l = 1, \ldots, 13)$ — деякі сталі), або дискретними перетвореннями

$$u \to v, \ v \to u, \tag{3.55}$$

а відповідні їй оператори зводяться до операторів з таблиці 3.1 з точністю до додавання операторів симетрії Лі системи (3.4) вигляду $(h_1(t,x)v + h_0(t,x))\partial_v$, де $h_0,\ h_1$ — деякі відомі функції.

Доведення.

Доведення теореми ґрунтується на розв'язанні СВР (3.47)–(3.52) при обмежені (3.53). Зокрема, аналіз класифікаційних рівнянь (3.51) і (3.52), як рівнянь для знаходження функцій C^1 та C^2, веде до розгляду таких випадків:

$$\begin{aligned} &(1) \quad r^1 = r^2 = p^1 = 0, \\ &(2) \quad r^1 = r^2 = 0,\ p^1 \neq 0, \\ &(3) \quad r^1 = p^1 = 0,\ r^2 \neq 0, \\ &(4) \quad r^1 = 0,\ p^1 \neq 0,\ r^2 \neq 0, \\ &(5) \quad r^2 = 0,\ r^1 \neq 0, \\ &(6) \quad r^1 \neq 0,\ r^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Ці випадки отримуються природнім чином при розв'язанні (3.51)–(3.52), оскільки доводиться розв'язувати рівняння для знаходження інваріантної змінної ω, а саме:

$$\frac{du}{r^1 u + p^1} = \frac{dv}{qu + r^2 v + p^2}.$$

В результаті розгляду кожного з випадків *(1)–(6)*, отримуємо оператори Q-умовної симетрії з різною структурою.

Розглянемо детальніше випадки *(1)* і *(6)* (всі інші розглядаються аналогічно).

Випадок (1). У цьому випадку рівняння (3.51) та (3.52) мають вигляд

$$\begin{aligned}&(qu+p^2)C^1_v+2\xi^1_xC^1=0,\\&(qu+p^2)C^2_v+2\xi^1_xC^2=qC^1+(q_{xx}-dq_t)u+p^2_{xx}-dp^2_t.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Здиференціювавши перше рівняння системи (3.56) за змінною x, отримуємо рівняння $(q_xu+p^2_x)C^1_v=0$, з якого випливає $C^1_v=0$ при $q_x\neq 0$. Якщо ж $q_x=0$, то з рівняння (3.47) маємо $\xi^1=0$, а значить і $C^1_v=0$. Отже, перше рівняння системи (3.56) має такий вигляд: $\xi^1_xC^1=0$. Таким чином, необхідно розглянути два суттєво різні підвипадки, а саме: $\xi^1_x\neq 0$ і $\xi^1_x=0$.

Оскільки функція C^2 залежать від змінних u та v, то при інтегруванні другого рівняння системи (3.56) за змінною v на змінну u будемо дивитися як на параметр. Таким чином, загальний розв'язок системи (3.56) при $\xi^1_x\neq 0$ має вигляд

$$C^1=0,\ C^2=\exp\Big(-\frac{2\xi^1_x}{qu+p^2}v\Big)g(u)+\frac{q_{xx}-dq_t}{2\xi^1_x}u+\frac{p^2_{xx}-dp^2_t}{2\xi^1_x},\tag{3.57}$$

де $g(u)$ — довільна гладка функція. Оскільки функція C^2 явно не залежить від змінних t і x, то при $g(u)\neq 0$ з (3.57) випливає: $q=\alpha_1\xi^1_x$, $p^2=\alpha_2\xi^1_x$, де α_1 та α_2 — довільні сталі. Здиференціювавши рівняння (3.50) за змінною x, отримуємо $\xi^1_{xx}=0$. Таким чином, $q_x\equiv\alpha_1\xi^1_{xx}=0$, що суперечить умові $\xi^1_x\neq 0$ (див. рівняння (3.47)). Отже, при $g(u)\neq 0$ приходимо до суперечності. Якщо ж $g(u)=0$, то система рівнянь РД (3.4) стає лінійною.

Загальний розв'язок системи (3.56) при $\xi^1_x=0$ має вигляд

$$C^1=f(u),\ C^2=\frac{qf(u)+(q_{xx}-dq_t)u+p^2_{xx}-dp^2_t}{qu+p^2}v+g(u),\tag{3.58}$$

де $f(u),\ g(u)$ — довільні гладкі функції.

Якщо функція $f(u)$ є довільною, то отримуємо $p^2 = \beta q$ (β – довільна стала). Таким чином, маємо $C^2 = \frac{f(u)}{u+\beta}v + \alpha v + g(u)$, де $\alpha = \frac{q_{xx}-dq_t}{q}$. Отже, перепозначивши $\frac{f(u)}{u+\beta}$ на $f(u)$ і розв'язавши систему рівнянь на функцію $q(t,x)$, а саме:

$$\frac{q_{xx}-dq_t}{q} = \alpha,$$
$$2q_x + \xi^1(d-1)q = 0,$$

де $\xi^1 = \lambda_1$ (λ_1 — довільна стала), отримуємо систему рівнянь РД

$$u_{xx} = u_t + (u+\beta)f(u),$$
$$v_{xx} = dv_t + f(u)v + \alpha v + g(u),$$

та оператор Q-умовної симетрії першого типу $Q = \partial_t + \lambda_1\partial_x + \lambda_2 \exp\left(\frac{\lambda_1(1-d)}{2}x + \frac{\lambda_1^2(1-d)^2-4\alpha}{4d}t\right)(u+\beta)\partial_v$, де $\lambda_2 \neq 0$ — довільна стала. Перепозначивши $\frac{\lambda_1(1-d)}{2} \to \lambda_1$ і виконавши перетворення

$$u \to u - \beta, \tag{3.59}$$

отримуємо випадок 6 таблиці 3.1. Таким чином, при довільній функції $f(u)$ було отримано лише один випадок.

Для встановлення тих виглядів функції $f(u)$, при яких отримаємо додаткові оператори, проаналізуємо диференціальні наслідки другого рівняння (3.58). Оскільки $C^2_{vx} = C^2_{vt} = 0$, то маємо систему рівнянь

$$(q_t p^2 - qp^2_t)f = ((q_{xx} - dq_t)u + p^2_{xx} - dp^2_t)(q_t u + p^2_t) -$$
$$((q_{xx} - dq_t)_t u + (p^2_{xx} - dp^2_t)_t)(qu + p^2),$$
$$(q_x p^2 - qp^2_x)f = ((q_{xx} - dq_t)u + p^2_{xx} - dp^2_t)(q_x u + p^2_x) -$$
$$((q_{xx} - dq_t)_x u + (p^2_{xx} - dp^2_t)_x)(qu + p^2),$$

на функцію $f(u)$, з якої випливає (при $p^2 \neq \beta q$), що ця функція може бути лише поліномом другого степеня відносно u, тобто $f(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2$ (α_i — довільні сталі). Провівши нескладні обчислення, отримуємо випадки 8 та 9 таблиці 3.1 відповідно при $\alpha_3 \neq 0$ і $\alpha_3 = 0$. Таким чином, випадок *(1)* повністю розглянуто.

Випадок (6). При розв'язуванні відповідних характеристичних рівнянь для системи (3.51)–(3.52), отримано два суттєво різних вирази для інваріантної змінної ω :

(i) $r^1 = r^2 = r$,

$$\omega = \frac{rv + qu + p^2}{ru + p^1} - \frac{q}{r}\ln(u + \frac{p^1}{r}); \tag{3.60}$$

(ii) $r^1 \neq r^2$,

$$\omega = \Big(u + \frac{p^1}{r^1}\Big)^{-\frac{r^2}{r^1}}\big(v - \frac{q}{r^1 - r^2}(u + \frac{p^1}{r^1}) + \frac{r^1p^2 - qp^1}{r^1r^2}\big). \tag{3.61}$$

В результаті інтегрування рівняння (3.51), знаходимо такий вираз для функції $C^1(u, v)$:

$$\begin{gathered} C^1 = \Big(u + \tfrac{p^1}{r^1}\Big)^{1 - \frac{2\xi^1_x}{r^1}}\Big(f(\omega) + \tfrac{r^1_{xx} - r^1_t}{r^1}\int u\Big(u + \tfrac{p^1}{r^1}\Big)^{\frac{2\xi^1_x}{r^1} - 2}du + \\ \tfrac{p^1_{xx} - p^1_t}{r^1}\int\Big(u + \tfrac{p^1}{r^1}\Big)^{\frac{2\xi^1_x}{r^1} - 2}du\Big), \end{gathered} \tag{3.62}$$

де $f(\omega)$ — довільна гладка функція, а вираз для змінної ω подано в (3.60)–(3.61). При обчисленні інтегралів в (3.62) необхідно розглянути три підвипадки :

$$\xi^1_x = 0,\ 2\xi^1_x = r^1,\ \xi^1_x(2\xi^1_x - r^1) \neq 0. \tag{3.63}$$

Отже, для того щоб знайти всі оператори Q-умовної симетрії першого типу, необхідно розглянути підвипадки (i) та (ii) при виконання кожної з умов (3.63).

Оскільки розгляд кожного з отриманих підвипадків є практично ідентичним, то обмежимося лише *підвипадками* (i) *при* $\xi^1_x = 0$ та (ii) *при* $\xi^1_x(2\xi^1_x - r^1) \neq 0$.

У підвипадку (i) при $\xi^1_x = 0$, шляхом інтегрування рівнянь (3.48)–(3.50), отримуємо $r = r(t)$, $\xi^1 = \lambda_1$ (λ_1 — довільна стала) і $\xi^0 = 1$. Таким чином, в цьому підвипадку функція C^1 має вигляд

$$C^1(u, v) = (u + \frac{p^1}{r})f(\omega) + \frac{\dot r}{r}u - \frac{\dot r}{r}(u + \frac{p^1}{r})\ln(u + \frac{p^1}{r}) - \frac{p^1_{xx} - p^1_t}{r}, \tag{3.64}$$

де змінна ω подана в (3.60).
Нам необхідно проаналізувати вираз (3.64) за умови, що функція C^1 явно не залежить від змінних t та x.

Якщо $f(\omega)$ — довільна функція, то з необхідністю

$$p^1 = \beta_1 r,\ p^2 = \beta_2 r,\ q = \beta_3 r,\ \dot{r} = \beta_4 r, \tag{3.65}$$

де β_i — довільні сталі ($i = 1, ..., 4$), $\beta_3 \neq 0$. Проте, підставивши (3.65) в (3.52), отримуємо $\dot{r} = 0$. Отже, всі функції в (3.65) є сталими. Проінтегрувавши (3.52), знаходимо функцію C^2. У підсумку отримуємо систему рівнянь РД

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = u_t + (u + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}) f(\omega),\\
&v_{xx} = dv_t + (u + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1})\Big(g(\omega) + \ln(u + \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1})\big(\tfrac{\alpha_3}{\alpha_1} f(\omega) + \alpha_3(1-d)\big)\Big),
\end{aligned}$$

та оператор Q-умовної симетрії першого типу

$$Q = \partial_t + (\alpha_1 u + \alpha_2)\partial_u + (\alpha_1 v + \alpha_3 u + \alpha_4)\partial_v,$$

де $\omega = \frac{\alpha_1 v + \alpha_3 u + \alpha_4}{\alpha_1 u + \alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\ln(u + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})$, α_i — довільні сталі ($i = 1, \ldots, 4$), $\alpha_1\alpha_3 \neq 0$. Обмеження $\alpha_3 \neq 0$ гарантує, що знайдений оператор не є ліївським.

Виконавши перетворення

$$u \to u - \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \ v \to \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2} \tag{3.66}$$

та перепозначивши α_1 на α, отримуємо випадок 2 таблиці 3.1.

Встановимо тепер всі можливі вигляди функції $f(\omega)$ при яких система рівнянь РД допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу. Для цього спочатку здиференціюємо вираз (3.64) за змінною v, отримавши $C^1_v = f_\omega$, а потім, врахувавши що $C^1_{vx} = C^1_{vt} = 0$, маємо рівняння $f_{\omega\omega}\omega_t = 0$ і $f_{\omega\omega}\omega_x = 0$. Оскільки випадок $\omega_t = \omega_x = 0$ приводить до вже розглянутого випадку 2 таблиці 3.1, то отримуємо $f_{\omega\omega} = 0$. Отже, $f(\omega) = f^1(t,x)\,\omega + f^2(t,x)$, де f^1 та f^2 — довільні гладкі функції.

Підставивши знайдену функцію f в (3.64), маємо

$$C^1 = f^1 v + (f^1\tfrac{q}{r} + f^2 + \tfrac{\dot r}{r})u - (f^1\tfrac{q}{r} + \tfrac{\dot r}{r})(u + \tfrac{p^1}{r})\ln(u + \tfrac{p^1}{r}) + \tfrac{1}{r}(f^1p^2 + f^2p^1 - p^1_{xx} + p^1_t). \qquad (3.67)$$

З (3.67) випливає $f^1 = const$. Також отримуємо, що якщо $f^1\frac{q}{r} + \frac{\dot r}{r} \neq 0$, то $p^1 = \alpha_1 r \;\Rightarrow\; p^1 = 0$ (за рахунок перетворення $u + \alpha_1 \to u$). Якщо $p^1 \neq \alpha_1 r$, тобто $p^1 \neq 0$, то маємо $f^1\frac{q}{r} + \frac{\dot r}{r} = 0$. Проте в цьому підвипадку було отримано лише лінійну систему рівнянь РД.

Нехай $p^1 = 0$. Вираз для функції C^1 має такий вигляд:

$$C^1 = f^1 v - \alpha_2 u \ln u + \alpha_3 u + f^1\frac{p^2}{r}, \qquad (3.68)$$

де $\alpha_2 = f^1\frac{q}{r} + \frac{\dot r}{r}$, α_3 — довільна стала. З виразу (3.68) отримуємо такі підвипадки:
$(i1)$ $f^1 \neq 0$, $\quad (i2)$ $f^1 = 0$.

Підвипадок $(i1)$. Оскільки $f^1 \neq 0$, то з необхідністю отримуємо $\frac{p^2}{r} = const$, а значить $p^2 = \beta r$ (β — довільна стала). Проте, виконавши перетворення $v \to v - \beta$, маємо $p^2 = 0$. Підставивши (3.68) в рівняння (3.52), знаходимо такий вираз для функції C^2:

$$C^2 = u\Big(g(\omega) + \tfrac{1}{r}(\alpha_3 q + (1-d)rq - dq_t + (f^1q - d\dot r)u^{-1}v)\Big)\ln u - \tfrac{1}{2r^2}\big(\alpha_2 rq + f^1q^2 - d\dot r q\big)\ln^2 u, \qquad (3.69)$$

де $g(\omega)$ — довільна гладка функція.

При довільній функції $g(\omega)$ отримуємо частинний випадок випадку 2 таблиці 3.1. Здиференціювавши вираз (3.69) двічі за змінною v, отримуємо рівність $C^2_{vv} = u^{-1}g_{\omega\omega}$, диференціальні наслідки якої приводять до рівнянь $g_{\omega\omega\omega}\,\omega_t = g_{\omega\omega\omega}\,\omega_x = 0$. Остаточно маємо: $g(\omega) = g^1(t,x)\,\omega^2 + g^2(t,x)\,\omega + g^3(t,x)$, де g^i — довільні гладкі функції ($i = 1,2,3$). Підставивши знайдену функцію $g(\omega)$ у вираз (3.69), отримуємо випадок 11 таблиці 3.1.

Розгляд *підвипадку* $(i2)$ проводиться аналогічно і приводить до випадку 19 таблиці 3.1.

Отже, в результаті розгляду *підвипадку* (i) *при* $\xi^1_x = 0$ отримано випадки 2, 11 та 19 таблиці 3.1.

Розглянемо тепер *підвипадок* (ii) при $\xi^1_x(2\xi^1_x - r^1) \neq 0$, для якого функція C^1 з (3.62) має вигляд

$$C^1(u,v) = \Big(u+\frac{p^1}{r^1}\Big)^{1-\frac{2\xi^1_x}{r^1}} f(\omega)+\frac{r^1_{xx}-r^1_t}{2\xi^1_x}u+\frac{p^1_{xx}-p^1_t}{2\xi^1_x-r^1}-\frac{p^1(r^1_{xx}-r^1_t)}{2\xi^1_x(2\xi^1_x-r^1)}, \quad (3.70)$$

де змінна ω подана в (3.61).

Розгляд цього підвипадку розіб'ємо на дві частини, а саме:
$(ii1)$ $\xi^1_t = 0$; $(ii2)$ $\xi^1_t \neq 0$.

Оскільки розгляд підвипадку $(ii1)$ є простішим і не веде до операторів Q-умовної симетрії першого типу, то зупинимося лише на розгляді підвипадку $(ii2)$. Таким чином, проаналізувавши рівняння (3.48)–(3.49), отримуємо такі обмеження:

$$r^1_x r^2_x \neq 0.$$

Якщо в правій частині (3.70) функція f є довільною, то маємо умову $\frac{\xi^1_x}{r^1} = const$, з якої випливає суперечність $r^1_x = 0$. Шляхом аналізу рівнянь, отриманих диференціюванням (3.70) за змінними v і x, встановлено, що лише при $f = 0$ права частина (3.70) не залежатиме від t та x. Таким чином, знаходимо

$$C^1 = \alpha_1 u + \alpha_2,$$

де α_1 і α_2 — довільні сталі, та виконуються рівності

$$\frac{r^1_{xx}-r^1_t}{2\xi^1_x} = \alpha_1, \quad \frac{p^1_{xx}-p^1_t}{2\xi^1_x-r^1} - \frac{p^1(r^1_{xx}-r^1_t)}{2\xi^1_x(2\xi^1_x-r^1)} = \alpha_2. \quad (3.71)$$

Для знаходження функції $C^2(u,v)$ інтегруємо рівняння (3.52):

$$\begin{gathered} C^2 = \big(u+\tfrac{p^1}{r^1}\big)^{\frac{r^2-2\xi^1_x}{r^1}}\Big(g(\omega)+\tfrac{q_{xx}-dq_t+\alpha_1 q}{r^1}\int u\big(u+\tfrac{p^1}{r^1}\big)^{\frac{2\xi^1_x-r^2}{r^1}-1}du+ \\ \tfrac{1}{r^1}(p^2_{xx}-dp^2_t+\alpha_2 q+\tfrac{(r^2_{xx}-dr^2_t)(qp^1-r^1p^2)}{r^1r^2})\int\big(u+\tfrac{p^1}{r^1}\big)^{\frac{2\xi^1_x-r^2}{r^1}-1}du+ \\ q(\tfrac{1-d}{\xi^0}+\tfrac{r^2_{xx}-dr^2_t}{r^1(r^1-r^2)})\int\big(u+\tfrac{p^1}{r^1}\big)^{\frac{2\xi^1_x-r^2}{r^1}}du+\tfrac{r^2_{xx}-dr^2_t}{r^1}\omega\int\big(u+\tfrac{p^1}{r^1}\big)^{\frac{2\xi^1_x}{r^1}-1}du\Big), \end{gathered} \quad (3.72)$$

де $g(\omega)$ — довільна гладка функція, а вираз для ω поданий в (3.61).

Зауважимо, що в правій частині (3.72) $g(\omega) \neq 0$ (в іншому випадку функція C^2, а значить і отримана система рівнянь РД, стає лінійною). Якщо функція $g(\omega)$ є довільною, то коефіцієнт при цій функції і вираз для змінної ω не повинні містити змінних t та x. Таким чином, отримуємо рівняння $\frac{r^2-2\xi^1_x}{r^1} = \beta$ та $\frac{r^2}{r^1} = \gamma$ (β і γ — відмінні від нуля сталі), з яких випливає $\frac{2\xi^1_x}{r^1} = \gamma-\beta$. Проте останнє рівняння веде до суперечності $r^1_x = 0$.

Для того, щоб знайти всі можливі вигляди функції $g(\omega)$ при яких отримана система рівнянь РД допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, ми розглянули диференціальні наслідки рівняння (3.72), тобто $C^2_{vx} = C^2_{vt} = 0$, та встановили, що з необхідністю $g(\omega) = g_1$, де g_1 — відмінна від нуля стала. Виконавши перетворення $v \to g_1 v$, отримуємо $g_1 = 1$.

Після обчислення інтегралів в (3.72) знаходимо вигляд функції C^2 :

$$C^2(u,v) = \big(u + \frac{p^1}{r^1}\big)^\beta + \alpha_3 v + \alpha_4 u + \alpha_5 \tag{3.73}$$

де довільні сталі β і α_k $(k = 3,4,5)$ задовольняють такі співвідношення :

$$\frac{r^2-2\xi^1_x}{r^1} = \beta, \tag{3.74}$$

$$\frac{r^2_{xx} - dr^2_t}{r^2 - \beta r^1} = \alpha_3, \tag{3.75}$$

$$\frac{1}{(1-\beta)r^1}\Big(q_{xx} - dq_t + (\alpha_1 - \alpha_3)q + \frac{(1-d)r^1 q}{\xi^0}\Big) = \alpha_4, \tag{3.76}$$

$$-\frac{1}{\beta r^1}\Big(p^2_{xx} - dp^2_t + \alpha_2 q + \frac{(1-d)p^1 q}{\xi^0} - \alpha_3 p^2 - \alpha_4 p^1\Big) = \alpha_5. \tag{3.77}$$

Виконавши перетворення $v \to v - \frac{\alpha_5}{\alpha_3}$ при $\alpha_3 \neq 0$ або

$$v \to v - \frac{\alpha_5}{d} t \tag{3.78}$$

при $\alpha_3 = 0$, отримуємо $\alpha_5 = 0$ в (3.73) та (3.77).

З рівнянь (3.48), (3.49) та (3.74) маємо $\beta = d$. Оскільки $d \neq 1$, то з (3.73) випливає, що лише при $d = 2$ функція p^1 може бути відмінною від нуля. Проте в цьому випадку ми не отримали жодного оператора. Отже, з (3.73) випливає, що $\frac{p^1}{r^1} = const$, а значить $p^1 = 0$.

Таким чином, після розв'язання перевизначеної системи ДРЧП (3.47)–(3.50), (3.71) та (3.74)–(3.77) при $\beta = d$ і $p^1 = 0$, отримуємо систему

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_t + \alpha_1 u, \\ &v_{xx} = 5v_t + u^5 + 25\alpha_1 v \end{aligned} \tag{3.79}$$

та оператор

$$\begin{aligned} Q = t^2\partial_t + tx\partial_x - \big(\tfrac{x^2+2t}{4} + \alpha_1 t^2\big)u\partial_u + \\ \Big(\lambda \exp\big(-\tfrac{x^2}{t} - 4\alpha_1 t\big)u - \big(\tfrac{5x^2+2t}{4} + 5\alpha_1 t^2\big)v + p^2\Big)\partial_v, \end{aligned} \tag{3.80}$$

де $\lambda \neq 0$ — довільна стала, а функція $p^2(t,x)$ є розв'язком рівняння теплопровідності $p^2_{xx} = 5p^2_t + 25\alpha_1 p^2$. Очевидно, що оператор $p^2\partial_v$ є оператором Лі системи (3.79). Таким чином, згідно з твердженням 1.1 можна покласти $p^2 = 0$. Остаточно, виконавши в (3.79)–(3.80) перетворення

$$u \to e^{-\alpha_1 t}u, \; v \to e^{-5\alpha_1 t}v, \tag{3.81}$$

отримуємо випадок 26 таблиці 3.1.

Об'єднуючи перетворення (3.59), (3.66), (3.78) і (3.81) та перетворення вигляду $u \to e^{\beta t}u, \; v \to v - \frac{\beta}{2d}t^2$ (використовувалося у випадку № 17 при $\alpha_3 = 0$, див. таблицю 3.1), отримуємо їхній загальний вигляд (3.54).

Теорему доведено.

Зауваження 3.2. Перетворення (3.54) є частинним випадком ФЗП системи (3.4) (див. теорему 3.1, формули (3.8)).

Таблиця 3.1

Оператори Q-умовної симетрії першого типу системи рівнянь РД (3.4) з $d \neq 1$

№	$C^1(u,v)$	$C^2(u,v)$	Q
1.	$uf(\omega)$	$u^k g(\omega) + u\big(f(\omega) + \alpha(1-d)\big)$ $\omega = u^{-k}(v-u)$	$\partial_t + \alpha u\partial_u + \alpha\big((1-k)u + kv\big)\partial_v,$ $\alpha \neq 0,\ k \neq 1$
2.	$uf(\omega)$	$u(g(\omega) + \alpha(1-d)\ln u +$ $f(\omega)\ln u),\ \omega = u\exp(-\frac{v}{u})$	$\partial_t + \alpha u\partial_u + \alpha(u+v)\partial_v,\ \alpha \neq 0$
3.	$uf(\omega)$	$g(\omega) + u(f(\omega) + \alpha(1-d))$ $\omega = u\exp(u-v)$	$\partial_t + \alpha u\partial_u + \alpha(u+1)\partial_v,\ \alpha \neq 0$
4.	$f(\omega)$	$e^u g(\omega) - f(\omega) - \alpha(1-d)$ $\omega = e^{-u}(u+v)$	$\partial_t + \alpha\partial_u + \alpha(u+v-1)\partial_v,\ \alpha \neq 0$
5.	$f(\omega)$	$uf(\omega) + g(\omega) + (1-d)u$ $\omega = u^2 - 2v$	$\partial_t + \partial_u + u\partial_v$
6.	$uf(u)$	$vf(u) + g(u) + \alpha v$	$\partial_t + \frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x + qu\partial_v,\ \lambda_2 \neq 0$ $q = \lambda_2\exp\left(\lambda_1 x + \frac{\lambda_1^2-\alpha}{d}t\right)$
7.	$f(u)$	$(u+v)\Big(g(u) + \alpha\ln(u+v)\Big) -$ $f(u)$	$\partial_t + \lambda\exp(-\frac{\alpha}{d}t)(u+v)\partial_v,$ $\lambda \neq 0$
8.	$\alpha_1 + \alpha_2 u +$ u^2	$g(u) + uv$	$\partial_t + \frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x + (qu + p^2)\partial_v,$ $q = \varphi_1(t)\exp(\lambda_1 x),\ \varphi_1 \neq 0$ $p^2 = \Big((\lambda_1^2 + \alpha_2)\varphi_1 - d\dot{\varphi}_1\Big)\exp(\lambda_1 x)$
9.	$\alpha_1 + \alpha_2 u$	$g(u) + \alpha_3 v$	$\partial_t + \frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x + (qu + p^2)\partial_v,$ $q = \lambda_2\exp\left(\lambda_1 x + \frac{\lambda_1^2+\alpha_2-\alpha_3}{d}t\right),$ $p^2_{xx} = dp^2_t + \alpha_3 p^2 - \alpha_1 q,\ \lambda_2 \neq 0$

№	$C^1(u,v)$	$C^2(u,v)$	Q
10.	$\alpha_1+\alpha_2 u+$ $\alpha_4\ln(u+v)$	$\alpha_3 v+(\alpha_3-\alpha_2)u-$ $\alpha_4\ln(u+v)$	$\partial_t+\big(\psi(x)\exp\big(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4(1-d)}t\big)-\frac{\alpha_1}{1-d}\big)(\partial_u-$ $\partial_v)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4(1-d)}(u+v)\partial_v,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4\neq 0$
11.	$\alpha_2 u+v$	$\alpha_3 v+\frac{1}{2}(1+d)\frac{v^2}{u}+$ $\alpha_1 u\ln u+\alpha_4 u$	$\partial_t+\varphi_2(t)(u\partial_u+v\partial_v)-\dot\varphi_2(t)u\partial_v,$ $\alpha_2\dot\varphi_2(t)\neq 0$
12.	$\alpha_2 u$	$\alpha_3 v+\alpha_4 u+u^k$	$\partial_t+\lambda_2 u\partial_u+(\varphi_3(t)u+\lambda_2 kv)\partial_v,$ $\alpha_4\lambda_2\varphi_3\neq 0,\ k\neq 1$
13.	$\alpha_1 u\ln u$	$\alpha_3 v+\alpha_1 v\ln u+$ $\alpha_2 u^{\frac{1}{d}}$	$\partial_t+\frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x+\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}u\partial_u+(qu+$ $\frac{\lambda_2}{d}e^{-\alpha_1 t}v)\partial_v,\ q=\lambda_3\exp\Big(\lambda_1 x+\frac{\lambda_1^2-\alpha_3}{d}t+$ $\frac{d-1}{\alpha_1 d}\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}\Big),\quad \alpha_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$
14.	$\alpha_1 u\ln u$	$\alpha_3 v+\alpha_1 v\ln u+\alpha_4 u$	$\partial_t+\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}u\partial_u+\big(\varphi_4(t)u+(\frac{\lambda_2}{d}e^{-\alpha_1 t}+$ $\lambda_3)v\big)\partial_v,\ \alpha_1\lambda_2\varphi_4\neq 0$
15.	$\alpha_1 u\ln u$	$\alpha_3 v+\alpha_1 v\ln u+$ $\alpha_4 u+\alpha_2 u^{\frac{1}{d}}$	$\partial_t+\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}u\partial_u+(\varphi_5(t)u+\frac{\lambda_2}{d}e^{-\alpha_1 t}v)\partial_v,$ $\alpha_1\alpha_2\alpha_4\lambda_2\varphi_5\neq 0$
16.	$\alpha_1 u\ln u$	$\alpha_3 v+\alpha_1 dv\ln u+$ $\alpha_1(1-d)u\ln u-\alpha_3 u$	$\partial_t+\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}u\partial_u+$ $(\alpha_1 u+(\lambda_2 e^{-\alpha_1 t}-\alpha_1)v)\partial_v,\ \alpha_1\lambda_2\neq 0$
17.	0	$\alpha_3 v+\ln u$	$\partial_t+\frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x+\lambda_2 u\partial_u+(qu+p^2)\partial_v,$ $q=\lambda_3\exp\Big(\lambda_1 x+\frac{\lambda_1^2-\alpha_3+\lambda_2(1-d)}{d}t\Big),$ $p_{xx}^2=dp_t^2+\alpha_3 p^2+\lambda_2,\ \lambda_2\lambda_3\neq 0$
18.	$\alpha_2 u$	$\alpha_3 v+\ln u+\alpha_4 u$	$\partial_t+\lambda_2 u\partial_u+(\varphi_6(t)u+p^2)\partial_v,\ \alpha_4\lambda_2\varphi_6\neq 0,$ $p_{xx}^2=dp_t^2+\alpha_3 p^2+\lambda_2$
19.	$\alpha_2 u$	$\alpha_3 v+u\ln u$	$\partial_t+\lambda_2 u\partial_u+(\varphi_7(t)u+\lambda_2 v)\partial_v,\ \lambda_2\varphi_7\neq 0$
20.	$\alpha_1+\alpha_2 u+$ u^2	$uv+\alpha_3$	$\partial_t+\lambda\big(v+\varphi_8(t)u+\alpha_2\varphi_8(t)-d\dot\varphi_8(t)\big)\partial_v,$ $\lambda\varphi_8\neq 0$

№	$C^1(u,v)$	$C^2(u,v)$	Q
21.	$\alpha_1+\alpha_2 u$	$\alpha_3 v+u^2$	$\partial_t+\frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x+p^1\partial_u+(qu+p^2)\partial_v,$ $q=\varphi_9(t)\exp(\lambda_1 x),\ \varphi_9\neq 0,$ $p^2_{xx}=dp^2_t+\alpha_3 p^2+(d-1)qp^1-\alpha_1 q,$ $p^1=\frac{1}{2}\Big((\lambda_1^2+\alpha_2-\alpha_3)\varphi_9-d\dot\varphi_9\Big)\exp(\lambda_1 x)$
22.	0	$\alpha_3 v+e^u$	$\partial_t+\frac{2\lambda_1}{1-d}\partial_x+\lambda_2\partial_u+(qu+\lambda_2 v+p^2)\partial_v,$ $p^2_{xx}=dp^2_t+\alpha_3 p^2-\lambda_2(1-d)q,$ $q=\lambda_3\exp\Big(\lambda_1 x+\frac{\lambda_1^2-\alpha_3}{d}t\Big),\ \lambda_3\neq 0$
23.	α_1	$\alpha_3 v+\alpha_4 u+$ e^u	$\partial_t+\lambda_2\partial_u+(\varphi_{10}(t)u+\lambda_2 v+p^2)\partial_v,\ \alpha_4\lambda_2\varphi_{10}\neq 0,$ $p^2_{xx}=dp^2_t+\alpha_3 p^2-(\lambda_2(1-d)+\alpha_1)q+\alpha_4\lambda_2$
24.	0	$\alpha_1(u+v)\times$ $\ln(u+v)+\alpha_2$	$\partial_t+\frac{\alpha_2}{d-1}(\partial_u-\partial_v)+\lambda\exp(-\frac{\alpha_1}{d}t)(u+v)\partial_v,$ $\alpha_1\alpha_2\lambda\neq 0$
25.	0	u^2	$2t\partial_t+x\partial_x+\frac{2t-x^2}{4\sqrt{t^5}}\exp(-\frac{x^2}{4t})\partial_u+\big(\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})u+$ $2v+p^2\big)\partial_v,\ d=3,\ p^2_{xx}=3p^2_t+\frac{2t-x^2}{4t^4}\exp(-\frac{x^2}{2t}),$
26.	0	u^5	$t^2\partial_t+tx\partial_x-\frac{x^2+2t}{4}u\partial_u+\big(\lambda\exp(-\frac{x^2}{t})u-$ $\frac{5x^2+2t}{4}v\big)\partial_v,\ d=5,\ \lambda\neq 0$

В таблиці 3.1 функції $\psi(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$, $\varphi_8(t)$ та $\varphi_9(t)$ є відповідно загальними розв'язками рівнянь

$$\psi''-\big(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4(1-d)}+\alpha_2\big)\psi=0,$$

$$d\ddot\varphi_1-(2\lambda_1^2+\alpha_2)\dot\varphi_1+\frac{\lambda_1^4+\alpha_2\lambda_1^2+\alpha_1}{d}\varphi_1=0,$$

$$d\ddot\varphi_2-(\alpha_2-\alpha_3+(1-d)\varphi_2)\dot\varphi_2-\alpha_1\varphi_2=0,$$

$$d\dot\varphi_4+(\alpha_3+\lambda_2(d-1)e^{-\alpha_1 t})\varphi_4-\alpha_4\big(\lambda_3+\lambda_2\frac{1-d}{d}e^{-\alpha_1 t}\big)=0,$$

$$d\dot\varphi_5+(\alpha_3+\lambda_2(d-1)e^{-\alpha_1 t})\varphi_5-\alpha_4\lambda_2\frac{1-d}{d}e^{-\alpha_1 t}=0,$$

$$d\ddot\varphi_8-\alpha_2\dot\varphi_8+\frac{\alpha_1}{d}\varphi_8+\frac{\alpha_3}{d}=0,$$

та

$$d\ddot{\varphi}_9 - \big(\lambda_1^2(1+d) + \alpha_2(1-d) - \alpha_3\big)\dot{\varphi}_9 + \big(\lambda_1^4 - \alpha_3\lambda_1^2 - \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)\big)\varphi_9 = 0.$$

Функція

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \lambda_3 \exp\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3+\lambda_2(1-d)}{d}t\right) + \frac{\alpha_4\lambda_2(1-k)}{\alpha_2-\alpha_3+\lambda_2(1-d)}, & \text{якщо}\, \alpha_2 \neq \alpha_3 - \lambda_2(1-d), \\ -\frac{\alpha_4\lambda_2(1-k)}{d}t + \lambda_3, & \text{якщо}\, \alpha_2 = \alpha_3 - \lambda_2(1-d). \end{cases}$$

Функція $\varphi_6(t) = \varphi_3(t)$ при $k = 0$, а функція $\varphi_7(t) = \varphi_3(t)$ при $k = 0$ і $\alpha_4 = 1$.

$$\varphi_{10}(t) = \begin{cases} \lambda_3 \exp(-\frac{\alpha_3}{d}t) + \frac{\alpha_4\lambda_2}{\alpha_3}, & \text{якщо}\, \alpha_3 \neq 0, \\ \frac{\alpha_4\lambda_2}{d}t, & \text{якщо}\, \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Зауваження 3.3. В таблиці 3.1 деякі з систем, вказаних у випадках з більшими номерами, можуть міститися як частинні випадки у випадках з меншими номерами. Зокрема, система з випадку 20 є частинним випадком системи з випадку 8; системи з випадків 14–16 — випадку 6; системи з випадків 12, 18, 19, 23, 25 та 26 — випадку 9; 25 та 26 — випадку 12; 25 — випадку 21. Таким чином, для того, щоб знайти всі оператори Q-умовної симетрії першого типу, які допускає фіксована система таблиці 3.1, необхідно додатково встановити всі системи більш загального вигляду з цієї ж таблиці, які містять цю систему.

3.4. Q-умовні симетрії класу систем рівнянь реакції-дифузії з несталими коефіцієнтами дифузії

При побудові операторів Q-умовні симетрії першого типу для класу систем рівнянь РД з несталими коефіцієнтами дифузії, розглядатимемо системи вигляду (3.3) при обмеженні $d_u^1 d_v^2 \neq 0$.

Теорема 3.5. *Система рівнянь РД (3.3) при $d_u^1 d_v^2 \neq 0$ допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу лише у випадках, поданих* *в таблиці 3.2. Будь-яка інша система рівнянь РД вигляду (3.3), яка допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу, зводиться до отриманих систем перетвореннями еквівалентності*

$$\begin{aligned} &t \to C_1 t + C_2, \quad x \to C_3 x + C_4, \\ &u \to C_5 u + C_6, \quad v \to C_7 v + C_8, \end{aligned} \tag{3.82}$$

(тут C_l $(l = 1, \ldots, 8)$ – деякі сталі, $C_{2k-1} \neq 0$, $k = 1, \ldots, 4$), або дискретними перетвореннями (3.55).

Доведення.

Для доведення теореми необхідно розв'язати СВР (3.38)–(3.43) у випадку $d^1_u d^2_v \neq 0$, врахувавши при цьому вирази (3.46).

Оскільки $d^2_v \neq 0$, то з рівняння (3.41) випливає $\xi^1_t = 0$. Розглянемо рівняння (3.40). При $\eta^2 \neq 0$ це рівняння буде ЗДР першого порядку відносно функції $d^2(v)$. Здиференціювавши його за змінною u отримуємо $\eta^2_u d^2_v = 0$, а отже, $\eta^2_u = 0$. Якщо ж $\eta^2 = 0$, то з (3.40) випливає $2\xi^1_x - \xi^0_t = 0 \Rightarrow \xi^1_{xx} = 0$.

Доведення теореми почнемо з розгляду *випадку* $\eta^2 = 0$. Беручи до уваги умови (3.45), зауважимо, що в цьому випадку при побудові операторів Q-умовної симетрії першого типу (з необхідністю) повинна виконуватися умова $\eta^1 \neq 0$. З (3.39) маємо рівняння

$$\xi^1 \eta^1 d^1_u + 2\xi^0 r^1_x = 0, \tag{3.83}$$

яке приводить до *підвипадків*: *a)* $\xi^1 \neq 0 \Leftrightarrow r^1_x \neq 0$; *b)* $\xi^1 = 0 \Leftrightarrow r^1_x = 0$.

Підвипадок a). Здиференціювавши (3.43) за змінною x, отримуємо

$$(r^1_x u + p^1_x) C^2_u = 0 \;\Rightarrow\; C^2_u = 0.$$

Таким чином, рівняння (3.43) має вигляд $\xi^1_x C^2 = 0$.

При $\xi^1_x \neq 0$ маємо $C^2 = 0$. Здиференціювавши (3.42) за змінними v, u та x, отримуємо $C^1_v = 0$. Отже, підвипадок $\xi^1_x \neq 0$ веде до незачепленої системи.

Нехай $\xi^1_x = 0$. З рівняння (3.40) випливає $\xi^0_t = 0$. Таким чином, маємо $\xi^1 = \alpha$ і $\xi^0 = 1$ ($\alpha \neq 0$ — довільна стала). З (3.83) знаходимо: $d^1_u = -\frac{2\beta}{\alpha(u+\gamma)}$, де $\beta = \frac{r^1_x}{r^1}$, $\gamma = \frac{p^1}{r^1}$. Використавши перетворення з класу (3.82) $u \to u - \gamma$, можна покласти $p^1 = 0$. Отже, $d^1 = -\frac{2\beta}{\alpha} \ln u + \delta$, δ — довільна стала. На завершення розгляду підвипадку *a)*, проінтегруємо рівняння (3.42) та отримуємо такий розв'язок:

$$C^1(u,v) = uf(v) + u\ln(u)\big(\beta^2 + \frac{2}{\alpha}r^1_x - \delta\frac{r^1_t}{r^1}\big) + \frac{\beta}{\alpha}\frac{r^1_t}{r^1}u\ln^2(u),$$

де $f(v)$ — довільна гладка функція. Оскільки $\beta \neq 0$, то $\frac{r^1_t}{r^1} = const$ і $r^1_x = const$. З рівняння $\beta = \frac{r^1_x}{r^1}$ маємо $r^1 = const$, що суперечить умові $r^1_x \neq 0$. Отже, підвипадок *a)* розглянуто.

Підвипадок b). З рівняння (3.43) отримуємо $\eta^1 C^2_u = 0 \Rightarrow C^2 = g(v)$, де $g(v)$ — довільна гладка функція. При розв'язуванні рівняння (3.42)

$$(r^1u + p^1)C^1_u - r^1C^1 = p^1_{xx} - (r^1u + p^1)^2 d^1_u - (r^1_t u + p^1_t)d^1, \qquad (3.84)$$

необхідно розглянути підвипадки $r^1 = 0$, $p^1 \neq 0$; $r^1 \neq 0$. Оскільки розгляд кожного з них є практично ідентичним, то розглянемо лише другий підвипадок.

При $r^1 \neq 0$ розв'язок рівняння (3.84) має вигляд

$$C^1 = (r^1u + p^1)\Big(f(t,x,v) + \int \frac{p^1_{xx} - (r^1_t u + p^1_t)d^1}{(r^1u + p^1)^2} du - d^1\Big), \qquad (3.85)$$

де $f(t,x,v)$ — довільна гладка функція, $f_v \neq 0$. Зауважимо, що при $f_v = 0$ отримана система рівнянь РД є незачепленою.

Проаналізувавши диференціальний наслідок рівняння (3.85), а саме: $C^1_{vx} \equiv 0 = p^1_x f_v + (r^1u + p^1)f_{vx}$, маємо $p^1_x = 0$ та $f_{vx} = 0$. Таким чином, в правій частині (3.85) жодна з функцій r^1 і p^1 не залежить від змінної x, тому $f_x = 0$.

З іншого диференціального наслідку рівняння (3.85), а саме:

$$C^1_{vt} \equiv 0 = (r^1_t u + p^1_t)f_v + (r^1u + p^1)f_{vt}, \qquad (3.86)$$

випливає, що або функції p^1 і r^1 є одночасно сталими (випадок 9 таблиці 3.2.), або $p^1 = 0$. Справді, якщо $p^1_t = 0$, то з рівняння (3.86) випливає $p^1 f_{vt} = 0$, що веде до випадків $p^1 = 0$ або $f_{vt} = 0 \Rightarrow r^1_t = 0$. Якщо $p^1_t \neq 0$, то нескладно показати, що $p^1 = \gamma r^1$. Таким чином, оператор Q-умовної симетрії першого типу має вигляд $Q = \partial_t + r^1(u+\gamma)\partial_u$. Виконавши перетворення $u \to u - \gamma$, отримуємо $p^1 = 0$. Отже, врахувавши останні викладки та здиференціювавши (3.85) за змінними t і u, отримуємо таке рівняння на функцію d^1: $\;r^1_t d^1_u + \left(\frac{r^1_t}{r^1}\right)_t \frac{d^1}{u} = 0$. У підсумку знаходимо $d^1 = \delta u^\beta$, де δ — довільна додатна стала, а стала β задовольняє таке рівняння:

$$\beta = -\frac{1}{r^1_t}\left(\frac{r^1_t}{r^1}\right)_t, \; r^1_t \neq 0. \tag{3.87}$$

Зауважимо, що перетворення $u \to (\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\beta}} u$ дозволяють покласти $\delta = 1$. Знайшовши з рівняння (3.87) функцію $r^1(t)$ та підставивши її у (3.85), отримуємо випадки 10 та 11 таблиці 3.2.

Отже, у *підвипадку b)* при $r^1 \neq 0$ система рівнянь РД (3.3) допускає оператори Q-умовної симетрії першого типу лише у випадках 8–11 таблиці 3.2.

Якщо $r^1 = 0$, то з необхідністю $p^1 \neq 0$ (в іншому випадку маємо ліївський оператор ∂_t). Провівши подібний аналіз, отримуємо випадки 12–15 таблиці 3.2. Таким чином, випадок $\eta^2 = 0$ повністю розглянуто.

Розглянемо тепер *випадок* $\eta^2 \neq 0$. Розв'язавши рівняння (3.40) і виконавши перетворення $v \to v + C$, отримуємо:

$$d^2 = \alpha_1 e^{\beta v}, \; \eta^2 = \frac{1}{\beta}(\xi^0_t - 2\xi^1_x), \tag{3.88}$$

$$d^2 = \alpha_1 v^\beta, \; \eta^2 = \frac{1}{\beta}(\xi^0_t - 2\xi^1_x)v, \tag{3.89}$$

де α_1 та β — відмінні від нуля сталі.

З рівняння (3.41) випливає, що якщо функції d^2 і η^2 мають вигляд (3.88), то $\xi^1_{xx} = 0$. Для функції η^2 з (3.89) рівняння (3.41) має такий вигляд: $(4+\beta)\xi^1_{xx} = 0$. Таким чином, степінь $\beta = -4$ є особливою. Проте додаткові дослідження показали, що при $\xi^1_{xx} \neq 0$ $(\beta = -4)$ операторів Q-умовної симетрії першого типу, відмінних від операторів Лі, не буде. Отже, серед рівнянь СВР (3.35)–(3.43) залишається розглянути класифікаційні рівняння (3.39) та (3.42)–(3.43) :

$$\xi^1\big((r^1u+p^1)d^1_u+(2\xi^1_x-\xi^0_t)d^1\big)+2\xi^0r^1_x=0, \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}(r^1u+p^1)C^1_u+\eta^2C^1_v &= (r^1-\xi^1_x)C^1+r^1_{xx}u+p^1_{xx}-(r^1_tu+p^1_t)d^1-\\ &\frac{r^1u+p^1}{\xi^0}\big((r^1u+p^1)d^1_u+(2\xi^1_x-\xi^0_t)d^1\big),\\ (r^1u+p^1)C^2_u+\eta^2C^2_v &= (r^2-\xi^1_x)C^2+p^2_{xx}-(r^2_tv+p^2_t)d^2.\end{aligned} \tag{3.91}$$

Для того щоб розв'язати систему рівнянь (3.91) відносно невідомих функцій $C^1(u,v)$ і $C^2(u,v)$, необхідно розглянути підвипадки :

(*1*) $r^1 = p^1 = 0$,
(*2*) $r^1 = 0,\ p^1 \neq 0$,
(*3*) $r^1 \neq 0$,

які отримуються при розв'язанні рівняння для знаходження інваріантної змінної ω, а саме :

$$\frac{du}{r^1u+p^1}=\frac{dv}{\eta^2}.$$

Розглянемо *підвипадок (2)*. З рівняння (3.90) випливає $\xi^1 = 0$ (при $\xi^1 \neq 0$ отримуємо лише оператори Лі, див. обмеження (3.45)).

Розв'язок системи (3.91) для функцій d^2 та η^2 з (3.88) має вигляд

$$\begin{aligned}&C^1(u,v)=f(\omega)+\tfrac{p^1_{xx}}{p^1}u-\tfrac{p^1}{\xi^0}d^1+\big(\tfrac{\xi^0_t}{\xi^0}-\tfrac{p^1_t}{p^1}\big)\textstyle\int d^1du,\\ &C^2(u,v)=g(\omega)-\tfrac{\alpha_1}{\beta}\tfrac{\xi^0_{tt}}{\xi^0_t}e^{\beta v},\end{aligned} \tag{3.92}$$

де $f(\omega)$ і $g(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = u-\beta\frac{p^1}{\xi^0_t}v$.
При довільній функції $g(\omega)$ маємо $\frac{p^1}{\xi^0_t} = \beta_1$ та $\frac{\xi^0_{tt}}{\xi^0_t} = \beta_2$ (β_1 і β_2 — довільні сталі, $\beta_1 \neq 0$). У випадку $\beta_2 = 0$ отримуємо лише ліївські оператори, оскільки диференціальний наслідок $C^1_{ut} = 0$ збігається з другою умовою (3.45). Отже, $\beta_2 \neq 0$. Знайшовши ξ^0 і p^1 та виконавши

відповідні перетворення, отримуємо випадок 3 таблиці 3.2. Важливо також зазначити, що в цьому випадку існує обмеження на функцію $d^1(u)\colon d^1 \neq \lambda e^u$, яке виникає внаслідок інтегрування другої умови (3.45), при якій отриманий оператор є ліївським.

Для встановлення всіх можливих виглядів функції $g(\omega)$, при яких ми отримаємо нові оператори, необхідно проаналізувати такі диференціальні наслідки: $C^2_{ux} \equiv g''\omega_x = 0,\ C^2_{ut} \equiv g''\omega_t = 0$.

Таким чином, при $g'' \neq 0$ приходимо до вже отриманого випадку 3 таблиці 3.2. Якщо ж $g'' = 0 \quad \Rightarrow g(\omega) = g_1(t,x) + g_2(t,x)\omega$, то, проаналізувавши значення функції C^2 з (3.92), отримуємо: $g_2 = 0$, $g_1 = const$. Отже, залишається дослідити випадок $g(\omega) = g_1$, $\frac{\xi^0_{tt}}{\xi^0_t} = \beta_2$. Провівши аналогічний аналіз функції C^1, маємо $f(\omega) = f_1(t,x) + f_2(t,x)\omega$, де f_1 і f_2 — довільні гладкі функції. Підставивши значення функції f у (3.92), знаходимо

$$C^1 = f_1 + f_2 u - \beta f_2 \frac{p^1}{\xi^0_t} v + \frac{p^1_{xx}}{p^1} u - \frac{p^1}{\xi^0} d^1 + \left(\frac{\xi^0_t}{\xi^0} - \frac{p^1_t}{p^1}\right) \int d^1 du. \qquad (3.93)$$

З (3.93) випливає, що $f_2(t,x)\frac{p^1}{\xi^0_t} = \gamma$, де γ — довільна стала. Для знаходження функції $d^1(u)$ потрібно проаналізувати рівняння $C^1_{ut} = 0$. Легко встановити, що лише при $d^1 = \delta_1 + \delta_2 u$ (δ_1 та δ_2 — довільні сталі, $\delta_2 \neq 0$) можна отримати нові випадки, а саме — випадок 16 таблиці 3.2.

Для завершення розгляду підвипадку *(2)* потрібно підставити функції d^2 та η^2 з (3.89) в (3.91). Отже, розв'язок системи (3.91) має вигляд

$$\begin{aligned} &C^1(u,v) = f(\omega) + \tfrac{p^1_{xx}}{p^1} u - \tfrac{p^1}{\xi^0} d^1 + \left(\tfrac{\xi^0_t}{\xi^0} - \tfrac{p^1_t}{p^1}\right) \textstyle\int d^1 du, \\ &C^2(u,v) = v\big(g(\omega) - \tfrac{\alpha_1}{\beta}\tfrac{\xi^0_{tt}}{\xi^0_t} v^\beta\big)\big), \end{aligned} \qquad (3.94)$$

де $f(\omega),\ g(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = \exp\big(-\frac{\xi^0_t}{p^1}u\big)v^\beta$.
При довільній функції $g(\omega)$ отримуємо, як і вище, $\frac{\xi^0_t}{p^1} = \beta_1$ і $\frac{\xi^0_{tt}}{\xi^0_t} = \beta_2$. Знайшовши ξ^0 та p^1 і виконавши відповідні перетворення, отримуємо випадок 4 таблиці 3.2. Детальний розгляд диференціальних наслідків $C^2_{ut} = 0$ та $C^2_{ux} = 0$ приводить до єдино можливого значення функції

$g(\omega) = g_1$ (g_1 — довільна стала), при якому система рівнянь РД може допускати оператори, відмінні від оператора з випадку 4 таблиці 3.2. Проаналізувавши рівняння $C^1_{vx} = 0$, $C^1_{vt} = 0$, маємо $f'(\omega) + \omega f''(\omega) = 0 \ \rightarrow \ f(\omega) = f_1(t,x) + f_2(t,x)\ln(\omega)$, де f_1, f_2 — довільні гладкі функції. Підставивши значення функції f у (3.94), знаходимо

$$C^1 = f_1 + \beta f_2 \ln(v) - f_2 \frac{\xi^0_t}{p^1} u + \frac{p^1_{xx}}{p^1} u - \frac{p^1}{\xi^0} d^1 + \left(\frac{\xi^0_t}{\xi^0} - \frac{p^1_t}{p^1} \right) \int d^1 du. \quad (3.95)$$

Права частина виразу (3.95) має таку ж структуру відносно u, як і відповідна частина виразу (3.93). Подальший аналіз (3.95) веде до оператора і системи РД, поданих у випадку 17 таблиці 3.2.

Таким чином, підвипадок *(2)* повністю проаналізовано і отримано оператори та системи РД, подані у випадках 3, 4, 16 і 17 таблиці 3.2. Підвипадки *(1)* та *(3)* розглядаються аналогічно. Зокрема, при розгляді підвипадку *(1)* отримано випадки 5–8 таблиці 3.2, а при розгляді підвипадку *(3)* — випадки 1, 2 і 18–21 таблиці 3.2.

Теорему доведено.

Таблиця 3.2

Оператори Q-умовної симетрії першого типу системи рівнянь РД (3.3) з $d^1_u\, d^2_v \neq 0$

№	$d^1(u)$	$d^2(v)$	$C^1(u,v)$	$C^2(u,v)$	Q
1.	$d^1(u)$	v^β	$uf(v^\beta u^{-\alpha}) - \frac{u}{\alpha} d^1(u)$	$vg(v^\beta u^{-\alpha}) - \frac{v^{\beta+1}}{\beta}$	$e^t\big(\partial_t + \frac{1}{\alpha} u\partial_u + \frac{1}{\beta} v\partial_v\big)$
2.	$d^1(u)$	e^v	$uf(e^v u^{-\alpha}) - ud^1(u)$	$g(e^v u^{-\alpha}) - \alpha e^v$	$e^{\alpha t}\big(\partial_t + u\partial_u + \alpha\partial_v\big)$
3.	$d^1(u)$	e^v	$f(v - \alpha u) - d^1(u)$	$g(v - \alpha u) - \alpha e^v$	$e^{\alpha t}\big(\partial_t + \partial_u + \alpha\partial_v\big)$
4.	$d^1(u)$	v^β	$f(v^\beta e^{-u}) - d^1(u)$	$vg(v^\beta e^{-u}) - \frac{v^{\beta+1}}{\beta}$	$e^t\big(\partial_t + \partial_u + \frac{1}{\beta} v\partial_v\big)$
5.	$d^1(u)$	v^β	$f(u)$	$vg(u) - \frac{\alpha v^{\beta+1}}{\beta}$	$(\lambda + e^{\alpha t})\partial_t + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} v\partial_v$
6.	$d^1(u)$	e^v	$f(u)$	$g(u) - \alpha e^v$	$(\lambda + e^{\alpha t})\partial_t + \alpha e^{\alpha t}\partial_v$

№	$d^1(u)$	$d^2(v)$	$C^1(u,v)$	$C^2(u,v)$	Q
7.	$d^1(u)$	v^β	$f(u)$	$vg(u)$	$t\partial_t + \frac{1}{\beta}v\partial_v$
8.	$d^1(u)$	e^v	$f(u)$	$g(u)$	$t\partial_t + \partial_v$
9.	$d^1(u)$	$d^2(v)$	$u\big(f(v) - \alpha d^1(u)\big)$	$g(v)$	$\partial_t + \alpha u\partial_u$
10.	u^β	$d^2(v)$	$u\big(f(v) - \frac{\alpha}{\beta}u^\beta\big)$	$g(v)$	$\partial_t + \frac{e^{\alpha t}}{\lambda + e^{\alpha t}}\frac{\alpha}{\beta}u\partial_u,\ \lambda \neq 0$
11.	u^β	$d^2(v)$	$uf(v)$	$g(v)$	$\partial_t + \frac{1}{\beta t}u\partial_u$
12.	$d^1(u)$	$d^2(v)$	$f(v) - \alpha d^1(u)$	$g(v)$	$\partial_t + \alpha\partial_u$
13.	e^u	$d^2(v)$	$f(v) - \alpha e^u$	$g(v)$	$\partial_t + \frac{\alpha e^{\alpha t}}{\lambda + e^{\alpha t}}\partial_u,\ \lambda \neq 0$
14.	e^u	$d^2(v)$	$f(v)$	$g(v)$	$\partial_t + \frac{1}{t}\partial_u$
15.	u	$d^2(v)$	$f(v) + \alpha_1 u$	$g(v)$	$\partial_t + p(x)\partial_u, p'' = p^2 + \alpha_1 p$
16.	u	e^v	$\alpha_1 v + \alpha_2 u + \alpha_3$	$\alpha_4 - e^v$	$e^t(\partial_t + p(x)\partial_u + \partial_v),\ \alpha_1 \neq 0,$ $p'' = p^2 + \alpha_2 p + \alpha_1$
17.	u	v^β	$\alpha_1 \ln v + \alpha_2 u +$ α_3	$v(\alpha_4 - v^\beta)$	$e^{\beta t}(\partial_t + p(x)\partial_u + v\partial_v),$ $p'' = p^2 + \alpha_2 p + \alpha_1,\ \alpha_1 \neq 0$
18.	u	v^β	$\alpha_2 v^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha_1 u +$ $\alpha_2 - u^2$	$v(\alpha_3 - \alpha v^\beta)$	$\exp(\alpha\beta t)\Big(\partial_t + (p(x) + u)\partial_u +$ $\alpha v\partial_v\Big),\ p'' = p^2 + \alpha_1 p - \alpha_2$
19.	u	e^v	$\beta e^{\frac{v}{\alpha}} + \alpha_1 u +$ $\alpha_2 - u^2$	$\alpha_3 - \alpha e^v$	$e^{\alpha t}\big(\partial_t + (p(x) + u)\partial_u + \alpha\partial_v\big),$ $p'' = p^2 + \alpha_1 p - \alpha_2$
20.	u^{-1}	v^β	$\alpha_1 v^{-\beta} + \alpha_2 u^{-1}$	$\alpha_3 v$	$t\partial_t - (u + \alpha_2 t)\partial_u + \frac{1}{\beta}v\partial_v,$ $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$
21.	u^{-1}	e^v	$\alpha_1 e^{-v} + \alpha_2 u^{-1}$	α_3	$t\partial_t - (u + \alpha_2 t)\partial_u + \partial_v,$ $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$

Зауваження 3.4. В таблиці 3.2 у випадках 1 та 2 : $d^1 \neq \lambda u^\alpha$, у випадку 3 : $d^1 \neq \lambda e^{\alpha u}$, у випадку 4 : $d^1 \neq \lambda e^u$; сталі α_i $(i = 1, 2, ...)$, $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$ є довільними.

Зауваження 3.5. Оскільки оператори Q-умовної симетрії першого типу є також операторами звичайної Q-умовної симетрії (некласичної симетрії), для яких має місце властивість множення на довільну гладку функцію, то (з точністю до дискретних перетворень $u \to v$, $v \to u$) випадки 5, 6, 7 та 8 є еквівалентними відповідно до випадків 10, 13, 11 і 14. Проте для операторів Q-умовної симетрії першого типу вказана властивість не виконується [44].

3.5. Приклади редукції та точних розв'язків деяких систем рівнянь реакції-дифузії

Використовуючи знайдені оператори, які подані в таблицях 3.1 і 3.2, можна провести редукцію систем ДРЧП до систем ЗДР. Розглянемо лише найзагальніші випадки, в яких система рівнянь РД є зачепленою та містить довільні функції, а саме: випадки 1–5 таблиці 3.1 і 1–4 таблиці 3.2. Оскільки оператори Q-умовної симетрії першого типу є також операторами Q-умовної симетрії (некласичної симетрії), то процес побудови анзаців є аналогічним до вже розглянутого в другому розділі. Тому ми опускаємо відповідні викладки, а лише подаємо результат у вигляді таблиць 3.3 та 3.4.

Незважаючи на те, що задача інтегрування систем ЗДР, поданих в таблицях 3.3 та 3.4, є суттєво простішою, ніж вихідних систем рівнянь РД, проте у випадку довільно вибраних функцій f і g вона розв'язується лише наближеними методами.

Зауваження 3.6. Номери 1–5 таблиці 3.3 відповідають таким самим номерам систем рівнянь РД, поданим в таблиці 3.1, тоді як номери 1–4 таблиці 3.4 — номерам систем рівнянь з таблиці 3.2.

Таблиця 3.3

Анзаци та редуковані системи ЗДР для систем рівнянь РД з таблиці 3.1

№	Анзаци	Системи ЗДР
1.	$u=\varphi(x)e^{\alpha t}$ $v=\psi(x)e^{k\alpha t}+\varphi(x)e^{\alpha t}$	$\varphi''=\varphi\big(\alpha+f(\chi)\big),\ \chi=\psi\varphi^{-k}$ $\psi''=\varphi^k g(\chi)+\alpha k\,d\psi$
2.	$u=\varphi(x)e^{\alpha t}$ $v=e^{\alpha t}\big(\psi(x)+\alpha\varphi(x)t\big)$	$\varphi''=\varphi\big(\alpha+f(\chi)\big),\ \chi=\varphi\exp\left(\frac{-\psi}{\varphi}\right)$ $\psi''=\varphi g(\chi)+\alpha d(\varphi+\psi)+\varphi\ln\varphi\,\big(f(\chi)+\alpha-\alpha d\big)$
3.	$u=\varphi(x)e^{\alpha t}$ $v=\psi(x)+\varphi(x)e^{\alpha t}+\alpha t$	$\varphi''=\varphi\big(\alpha+f(\chi)\big),\ \chi=\varphi\,e^{-\psi}$ $\psi''=g(\chi)+\alpha d$
4.	$u=\varphi(x)+\alpha t$ $v=\psi(x)e^{\alpha t}-\varphi(x)-\alpha t$	$\varphi''=f(\chi)+\alpha,\ \chi=\psi e^{-\varphi}$ $\psi''=\alpha d\psi+e^{\varphi}g(\chi)$
5.	$u=\varphi(x)+t$ $v=\psi(x)+\varphi(x)t+\frac{1}{2}t^2$	$\varphi''=f(\chi)+1,\ \chi=\varphi^2-2\psi$ $\psi''=g(\chi)+\varphi\big(f(\chi)+1\big)$

Таблиця 3.4

Анзаци та редуковані системи ЗДР для систем рівнянь РД з таблиці 3.2

№	Анзаци	Системи ЗДР
1.	$u=\varphi(x)\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $v=\psi(x)\exp\left(\frac{t}{\beta}\right)$	$\varphi''=\varphi f(\chi),\ \chi=\varphi^{-\alpha}\psi^{\beta}$ $\psi''=\psi g(\chi)$
2.	$u=\varphi(x)e^{t}$ $v=\psi(x)+\alpha t$	$\varphi''=\varphi f(\chi),\ \chi=\varphi^{-\alpha}e^{\psi}$ $\psi''=g(\chi)$
3.	$u=\varphi(x)+t$ $v=\psi(x)+\alpha t$	$\varphi''=f(\chi),\ \chi=\psi-\alpha\varphi$ $\psi''=g(\chi)$
4.	$u=\varphi(x)+t$ $v=\psi(x)\exp\left(\frac{t}{\beta}\right)$	$\varphi''=f(\chi),\ \chi=\psi^{\beta}e^{-\varphi}$ $\psi''=\psi g(\chi)$

Перейдемо до побудови точних розв'язків систем рівнянь РД з використанням отриманих анзаців та редукованих систем ЗДР. Зокрема, розглянемо систему з випадку 1 таблиці 3.1, яка після перепозначень $f \to -f$, $g \to -g$ і $d \to \frac{1}{d}$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + uf(\omega), \qquad \omega = u^{-k}(v-u), \\ &v_t = dv_{xx} + u^k g(\omega) + u(d\,f(\omega) + \alpha(1-d)), \end{aligned} \tag{3.96}$$

та відповідну їй система ЗДР з випадку 1 таблиці 3.3

$$\begin{aligned} &\varphi'' = \varphi\big(\alpha - f(\psi\varphi^{-k})\big), \\ &d\psi'' = \alpha k\psi - \varphi^k g(\psi\varphi^{-k}). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Очевидно, що система ЗДР (3.97) не інтегрується в загальному випадку, проте, поклавши $f(\omega) = -\gamma\omega^{\frac{1}{k}} + \alpha$ і $g(\omega) = -d\beta\omega$ (β та γ — довільні сталі), отримуємо систему рівнянь РД

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} - \gamma(v-u)^{\frac{1}{k}} + \alpha u, \\ &v_t = dv_{xx} - d\gamma(v-u)^{\frac{1}{k}} - d\beta v + (\alpha + d\beta)u, \end{aligned} \tag{3.98}$$

і відповідну їй систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi'' = \gamma\psi^{\frac{1}{k}}, \\ &\psi'' = (\beta + \tfrac{\alpha k}{d})\psi. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Оскільки друге рівняння системи (3.99) є лінійним, то легко знаходимо її загальний розв'язок:

$$\varphi(x) = \gamma \int \Big(\int \psi^{\frac{1}{k}}(x)dx \Big) dx + c_1 x + c_2,$$

де функція $\psi(x)$ приймає одне з трьох значень:

$$\psi(x) = \begin{cases} c_3\exp(\mu x) + c_4\exp(-\mu x), & \mu^2 = \beta + \frac{\alpha k}{d} > 0, \\ c_3\cos(\nu x) + c_4\sin(\nu x), & \nu^2 = -(\beta + \frac{\alpha k}{d}) > 0, \\ c_3 x + c_4, & \beta + \frac{\alpha k}{d} = 0, \end{cases}$$

(тут і нижче c_i — довільні сталі, $i = 1, 2\ldots$).

Розглянемо детальніше отриманий розв'язок системи (3.98) при $k = \frac{1}{3}$ та $c_1 = c_2 = c_4 = 0,\ c_3 = -c_0 > 0,\ \psi = -c_0\cos(\nu x)$. За вказаних умов відповідний розв'язок нелінійної системи рівнянь РД (3.98) має вигляд

$$\begin{aligned} u &= \gamma\frac{c_0^3}{9\nu^2}(\cos^2(\nu x) + 6)\cos(\nu x)e^{\alpha t},\\ v &= \gamma\frac{c_0^3}{9\nu^2}(\cos^2(\nu x) + 6)\cos(\nu x)e^{\alpha t} - c_0\cos(\nu x)e^{\frac{\alpha}{3}t}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Неважко помітити, що розв'язок (3.100) задовольняє нульові умови Ноймана і Діріхле

$$u_x|_{x=0} = 0,\ v_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\frac{\pi}{2\nu}} = 0,\ v|_{x=\frac{\pi}{2\nu}} = 0 \tag{3.101}$$

на кінцях інтервалу $[0, \frac{\pi}{2\nu}]$. Наголосимо, що такі крайові умови є найбільш типовими при математичному моделюванні взаємодії популяцій біовидів (типу хижак-жертва, змагання, мутуалізм тощо) [79, 86]. Отже, якщо взаємодія двох видів з концентраціями u та v описується моделлю (3.98), (3.101) на відрізку $[0, \frac{\pi}{2\nu}]$, то знайдений розв'язок показує, що їх еволюція в часі може мати такі два різні сценарії: обидва види вимирають зі швидкістю спадання показникової функції (при $\alpha < 0$) або необмежено зростають (при $\alpha > 0$).

Покладімо тепер $f(\omega) = a_1 + b\omega,\ g(\omega) = (\alpha(1-d) + a_1 d)\omega$. В цьому випадку система (3.96) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + a_1 u - bu^{2-k} + bvu^{1-k},\\ v_t &= dv_{xx} - a_2 v - dbu^{2-k} + dbvu^{1-k}, \end{aligned} \tag{3.102}$$

де a_1 і b — відмінні від нуля сталі, $a_2 = \alpha(d-1) - a_1 d$ ($a_2 \neq 0$). Тоді відповідна їй редукована система (3.97) має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi'' + b\psi\varphi^{1-k} + (a_1 - \alpha)\varphi = 0,\\ &\psi'' = \tfrac{1}{d}(\alpha k + a_2)\psi. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Опускаючи процедуру знаходження загального розв'язку системи (3.103), можна легко помітити її частинні розв'язки при $\psi = -\delta$, де δ — довільна ненульова стала. Таким чином, з другого рівняння системи

(3.103), врахувавши значення сталої a_2, знаходимо

$$\alpha = \frac{a_1 d}{k + d - 1}. \tag{3.104}$$

Понизивши порядок першого рівняння системи (3.103), ми отримали ЗДР першого порядку

$$\varphi' = \pm\sqrt{(\alpha - a_1)\varphi^2 + \frac{2b\delta}{2-k}\varphi^{2-k} + c_1}, \quad k \neq 2 \tag{3.105}$$

(при $k = 2$ отримується рівняння $\varphi' = \pm\sqrt{(\alpha - a_1)\varphi^2 + 2b\delta \ln\varphi + c_1}$).

У випадку $c_1 \neq 0$ розв'язок рівняння (3.105) можна подати через гіпергеометричні функції. При $c_1 = 0$ та $k \neq 0$ (випадок $k = 0$ веде до суперечності $a_2 = 0$) рівняння легко інтегрується і отримуються функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Big(\beta(\tan^2\big(\frac{k\sqrt{a_1-\alpha}}{2}(x \pm c_2)\big) + 1)\Big)^{-\frac{1}{k}}, & a_1 > \alpha, \\ \Big(-\beta(\tanh^2\big(\frac{k\sqrt{\alpha-a_1}}{2}(x \pm c_2)\big) - 1)\Big)^{-\frac{1}{k}}, & a_1 < \alpha, \end{cases}$$

де $\beta = \frac{(a_1-\alpha)(2-k)}{2b\delta}$, в яких (без зменшення загальності) можна покласти $c_2 = 0$. Зауважимо, що випадок $a_1 = \alpha$, з урахуванням умови (3.104), веде до суперечності $k = 1$.

Для біологічної інтерпретації отриманих розв'язків, обмежимося розглядом випадку $a_1 > \alpha$.

Застосувавши дискретну заміну $v \to -v$ до системи (3.102), маємо

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(a_1 - bu^{1-k}) - bvu^{1-k}, \\ v_t &= dv_{xx} - a_2 v + dbu^{2-k} + dbvu^{1-k}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Система рівнянь РД (3.106) описує взаємодію видів типу хижак (популяція з концентрацією v) — жертва (популяція з концентрацією u) за умови, що коефіцієнти a_1, a_2 та b є додатними. Зауважимо, що при $k = 0$ ця система є ДСЛВ для моделювання взаємодії типу хижак-жертва, якщо додатково знехтувати доданком dbu^2.

Використавши знайдені вище функції φ, ψ і анзац з випадку 1 таблиці 3.3, розв'язок системи (3.106) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u &= \Big(\beta(\tan^2(\tfrac{k\sqrt{a_1-\alpha}}{2}x)+1)\Big)^{-\frac{1}{k}}e^{\alpha t},\\ v &= \delta e^{\alpha k t} - \Big(\beta(\tan^2(\tfrac{k\sqrt{a_1-\alpha}}{2}x)+1)\Big)^{-\frac{1}{k}}e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Можна помітити, що розв'язок (3.107) задовольняє нульові умови Ноймана

$$u_x|_{x=0}=0,\ v_x|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=\epsilon}=0,\ v_x|_{x=\epsilon}=0 \tag{3.108}$$

на кінцях інтервалу $[0,\epsilon]$, де $\epsilon=\frac{2\pi j}{k\sqrt{a_1-\alpha}},\ j\in\mathbb{N}$.

Отже, нелінійна математична модель (3.106), (3.108) для опису взаємодії типу хижак-жертва має точний розв'язок (3.107). Цей розв'язок показує, що еволюція в часі хижака і жертви може мати ті самі два сценарії, які наведено вище для розв'язку (3.100). Зокрема, обмеження

$$0<k<1-d,\ 0<\delta\le\Big(\frac{(2-k)(a_1-\alpha)}{2b}\Big)^{\frac{1}{1-k}}$$

забезпечують невід'ємність концентрацій обох видів в будь-який момент часу $t>0$ та їх швидке вимирання з плином часу (рис. 3.1).

3.6. Точні розв'язки однієї системи рівнянь реакції-дифузії для опису течії тонких плівок

Розглянемо систему рівнянь РД з випадку 1 таблиці 3.2

$$\begin{aligned} u_{xx} &= d^1(u)u_t + u\Big(f(v^\beta u^{-\alpha}) - \tfrac{1}{\alpha}d^1(u)\Big),\\ v_{xx} &= v^\beta v_t + v\Big(g(v^\beta u^{-\alpha}) - \tfrac{1}{\beta}v^\beta\Big), \end{aligned} \tag{3.109}$$

та відповідну їй редуковану систему ЗДР (див. таблицю 3.4)

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \varphi f(\varphi^{-\alpha}\psi^\beta),\\ \psi'' &= \psi g(\varphi^{-\alpha}\psi^\beta). \end{aligned} \tag{3.110}$$

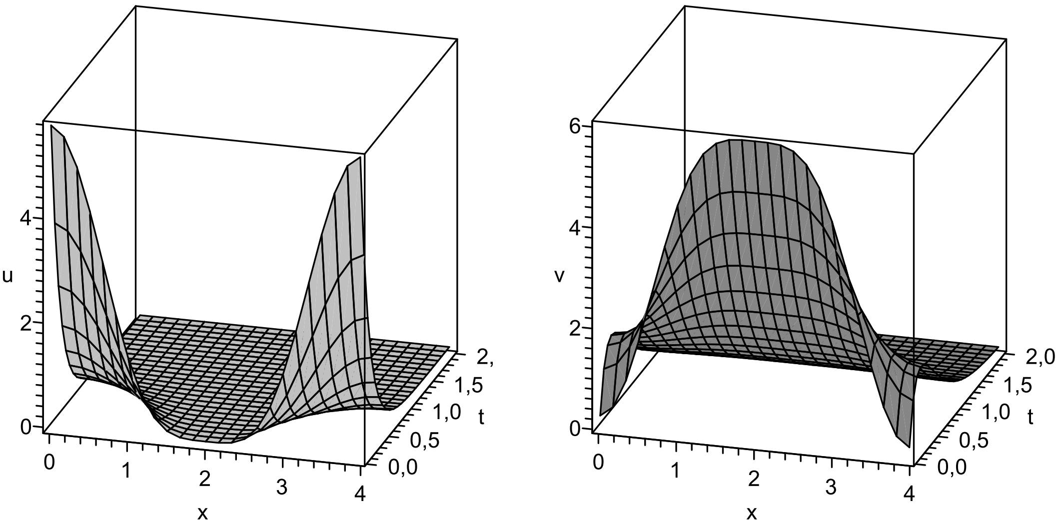

Рис. 3.1: Розв'язок (3.107) з $k = 0.5,\ \delta = 6,\ d = 0.25,\ a_1 = 5,\ b = 3.$

Система (3.110) при $\alpha = \beta$, $f = \lambda_{11} + \lambda_{12}\varphi^{-1}\psi$ і $g = \lambda_{22} + \lambda_{21}\varphi\psi^{-1}$ зводиться до лінійної

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \lambda_{11}\varphi + \lambda_{12}\psi, \\ \psi'' &= \lambda_{21}\varphi + \lambda_{22}\psi, \end{aligned} \tag{3.111}$$

де λ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — довільні сталі.

При такому виборі функцій f та g, система рівнянь РД (3.109) має вигляд

$$\begin{aligned} u_{xx} &= d^1(u)u_t + \lambda_{11}u + \lambda_{12}v - \tfrac{1}{\alpha}ud^1(u), \\ v_{xx} &= v^{\alpha}v_t + \lambda_{21}u + \lambda_{22}v - \tfrac{1}{\alpha}v^{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Оскільки при $\lambda_{12} = 0$ або $\lambda_{21} = 0$ система (3.112) стає напівзачепленою, то нижче вважатимемо, що $\lambda_{12}\lambda_{21} \neq 0$.

Таким чином, виразивши з рівняння (3.111) одну з функцій через іншу, наприклад ψ через φ, отримуємо лінійне ЗДР 4-го порядку зі сталими коефіцієнтами :

$$\varphi'''' - (\lambda_{11} + \lambda_{22})\varphi'' + (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21})\varphi = 0, \tag{3.113}$$

загальний розв'язок якого (в залежності від значення параметрів λ_{ij}) подано, наприклад, в роботі [14] (див. підрозділ 3.5).

Отже, розв'язок системи рівнянь РД (3.112) має вигляд:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x)\exp\left(\tfrac{t}{\alpha}\right), \\ v &= \psi(x)\exp\left(\tfrac{t}{\alpha}\right), \end{aligned} \tag{3.114}$$

де функція $\varphi(x)$ є довільним розв'язком рівняння (3.113), а функція $\psi(x) = \frac{1}{\lambda_{12}}\big(\varphi''(x) - \lambda_{11}\varphi(x)\big)$.

Для подальшої інтерпретації нас цікавить розв'язок рівняння (3.113)

$$\varphi(x) = C_1\cos(hx) + C_2\sin(hx) + C_3x + C_4,$$

де C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ — довільні сталі, $h = \sqrt{-(\lambda_{11} + \lambda_{22})}$, який отримується при $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} = 0,\ \lambda_{11} + \lambda_{22} < 0$.

Цей розв'язок (після підстановки в (3.114)) породжує такий розв'язок системи рівнянь РД (3.112):

$$\begin{aligned} u &= \big(C_1\cos(hx) + C_2\sin(hx) + C_3x + C_4\big)\exp\left(\tfrac{t}{\alpha}\right), \\ v &= \left(\tfrac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}}\big(C_1\cos(hx) + C_2\sin(hx)\big) - \tfrac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}(C_3x + C_4)\right)\exp\left(\tfrac{t}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Для інтерпретації отриманого розв'язку конкретизуємо систему рівнянь РД (3.112), поклавши $d^1 = u^\gamma$ та виконавши заміну

$$u = U^{k+1},\ v = V^{l+1}, \tag{3.116}$$

де $k = -\frac{\gamma}{\gamma+1},\ l = -\frac{\alpha}{\alpha+1},\ \gamma \neq -1,\ \alpha \neq -1$, отримуємо таку систему:

$$\begin{aligned} U_t &= (U^kU_x)_x - \tfrac{1}{k+1}\left(\lambda_{11}U^{k+1} + \lambda_{12}V^{l+1} + \tfrac{l+1}{l}U\right), \\ V_t &= (V^lV_x)_x - \tfrac{1}{l+1}\left(\lambda_{21}U^{k+1} + \lambda_{22}V^{l+1} + \tfrac{l+1}{l}V\right). \end{aligned} \tag{3.117}$$

Ввівши позначення $\lambda^*_{1i} = -\frac{\lambda_{1i}}{k+1}$ і $\lambda^*_{2i} = -\frac{\lambda_{2i}}{l+1}$ $(i = 1, 2)$, система (3.117) та відповідний їх розв'язок (3.115) (після заміни (3.116) і при $C_3 = 0$) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_t &= (U^kU_x)_x - \tfrac{l+1}{l(k+1)}U + \lambda^*_{11}U^{k+1} + \lambda^*_{12}V^{l+1}, \\ V_t &= (V^lV_x)_x - \tfrac{1}{l}V + \lambda^*_{21}U^{k+1} + \lambda^*_{22}V^{l+1}, \end{aligned} \tag{3.118}$$

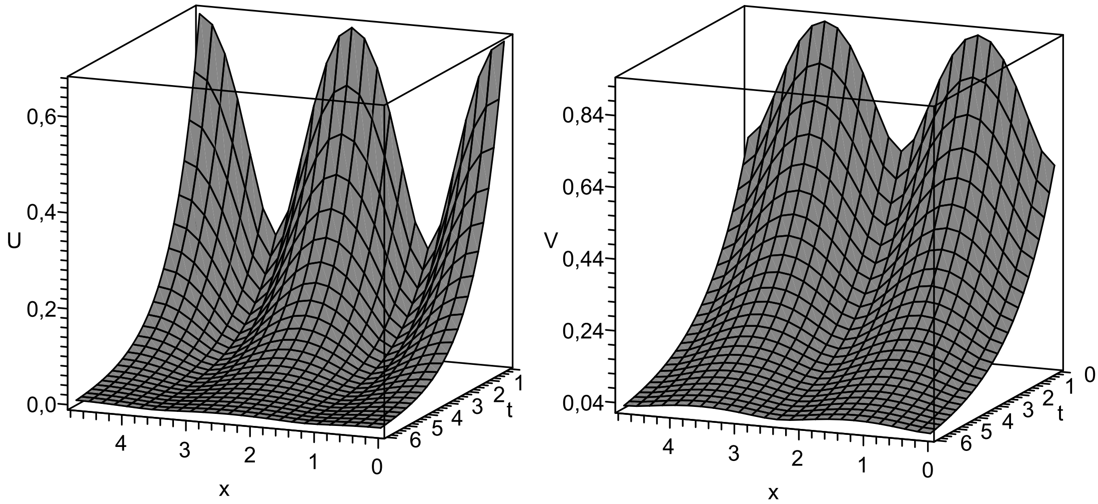

Рис. 3.2: Розв'язок (3.119) з $k = 1,\ l = 2,\ \lambda^*_{11} = 2,\ \lambda^*_{12} = -1,\ \lambda^*_{21} = -2,\ \lambda^*_{22} = 1, C_1 = 0.2,\ C_2 = 0,\ C_4 = 0.25,\ h = \sqrt{7}$.

та

$$\begin{aligned} U &= \big(C_1\cos(hx) + C_2\sin(hx) + C_4\big)^{\frac{1}{k+1}} \exp\big(-\tfrac{l+1}{l(k+1)}t\big), \\ V &= \big(\tfrac{(l+1)\lambda^*_{22}}{(k+1)\lambda^*_{12}}\big(C_1\cos(hx) + C_2\sin(hx)\big) - \tfrac{\lambda^*_{11}}{\lambda^*_{12}}C_4\big)^{\frac{1}{l+1}} \exp\big(-\tfrac{t}{l}\big), \end{aligned} \tag{3.119}$$

де $h = \sqrt{(k+1)\lambda^*_{11} + (l+1)\lambda^*_{22}},\ (k+1)\lambda^*_{11} + (l+1)\lambda^*_{22} > 0,\ \lambda^*_{11}\lambda^*_{22} - \lambda^*_{12}\lambda^*_{21} = 0$.

Зауваження 3.7. Система (3.118) є частинним випадком системи (34) [55]. Зокрема, якщо в системі (34) [55] покласти $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, то отримуємо систему (3.118). Проте цей випадок в роботі [55] не розглядається, оскільки він при $k = l$ приводить до ліївських розв'язків.

Система (3.118) та її розв'язок (3.119) є цікавими з точки зору фізичної інтерпретації. Зокрема, поклавши $k = 1$, отримуємо систему

$$\begin{aligned} U_t &= (UU_x)_x - \tfrac{l+1}{2l}U + \lambda^*_{11}U^2 + \lambda^*_{12}V^{l+1}, \\ V_t &= (V^lV_x)_x - \tfrac{1}{l}V + \lambda^*_{21}U^2 + \lambda^*_{22}V^{l+1}, \end{aligned}$$

яка при $\lambda^*_{11} + \lambda^*_{21} = 0$ і $\lambda^*_{12} + \lambda^*_{22} = 0$ може описувати потік тонких плівок в'язкої рідини крізь пористе середовище з двома системами пор $(U(t,x)$

та $V(t,x)$ описують тиски в рідині; товщини плівок є пропорційними до тисків) під дією гравітації [51]. Між системами пор припускається певний масообмін, який виражається нелінійними доданками. Зауважимо, що в роботі [51] перенос маси виражається лінійними доданками.

Зазначимо, що розв'язок вигляду (3.119) при $l > 0$ і $k > -1$ прямує до стійкої стаціонарної точки $(0,0)$ системи (3.118) при $t \to +\infty$. Цей розв'язок при коректно вибраних значеннях сталих є невід'ємним та задовольняє нульові умови Ноймана. Зокрема, поклавши $C_2 = 0$, бачимо, що розв'язок (3.119) задовольняє умови

$$U_x|_{x=0} = 0,\ V_x|_{x=0} = 0,\ U_x|_{x=j\frac{\pi}{h}} = 0, V_x|_{x=j\frac{\pi}{h}} = 0 \qquad (3.120)$$

на кінцях інтервалу $[0, j\frac{\pi}{h}]$, $j \in \mathbb{N}$, а його компоненти є додатними при виконанні таких обмежень: $\lambda_{11}^*\lambda_{12}^* < 0$, $C_4 > \max\{|\frac{(l+1)\lambda_{22}^*}{(k+1)\lambda_{11}^*}C_1|, |C_1|\}$.

Таким чином, з отриманих властивостей розв'язку (3.119) випливає, що він задовольняє типові обмеження, які відповідають фізично мотивованим моделям. Зокрема, виконання умов (3.120) означає, що на потік тонких плівок впливає лише гравітація, тобто відсутня дія інших зовнішніх сил. Приклад розв'язку (3.119) при фіксованих значеннях параметрів представлено на рисунку 3.2.

3.7. Висновки до третього розділу

В цьому розділі описано всі оператори Q-умовної симетрії першого типу (при обмеженні (1.25)) для класу нелінійних систем рівнянь РД зі сталими та несталими коефіцієнтами дифузії. Знайдені оператори використано для побудови анзаців та проведення редукції систем рівнянь РД до систем ЗДР.

Побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійної системи рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії і встановлено, що деякі з них можуть описувати взаємодію видів типу хижак-жертва.

Знайдено багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійної системи рівнянь РД з несталими коефіцієнтами дифузії, які можуть описувати потік тонких плівок в'язкої рідини крізь пористе середовище під дією гравітації.

Нові результати розділу 3 опубліковано у роботах [28, 46, 48].

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

Побудовано нові оператори Q-умовної симетрії двокомпонентної ДСЛВ. Знайдено нові неліївські точні розв'язки та наведено їх біологічну інтерпретацію.

Здійснено вичерпний опис симетрій Лі та, при обмеженні (1.25), Q-умовних симетрій першого типу трикомпонентної ДСЛВ. Отримані симетрії використано для побудови точних розв'язків досліджуваної системи.

Побудовано нові точні розв'язки однієї системи рівнянь РД типу Лотки–Вольтера, досліджено їх властивості та наведено біологічну інтерпретацію.

Знайдено багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійної системи рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії і встановлено, що деякі з них можуть описувати взаємодію видів типу хижак-жертва.

Описано всі можливі Q-умовні симетрії першого типу (при обмеженні (1.25)) для класу систем рівнянь РД у випадку двох несталих коефіцієнтів дифузії. Для однієї системи рівнянь РД, що описує потік тонких плівок в'язкої рідини крізь пористе середовище, побудовано точний розв'язок, який задовольняє фізично вмотивовані обмеження.

Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування конкретних задач математичної фізики, математичної біології та теорії ДРЧП.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Василенко О. Ф. О классе редуцирующих операторов и решениях еволюционных уравнений / О. Ф. Василенко, Р. Е. Попович // Вестник ПГТУ. – 1999. – № 8. – С. 269-273.

[2] Голод П. И. Математические основы теории симметрий / П. И. Голод, А. У. Климык. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 528 с.

[3] Давидович В. В. Точні розв'язки однієї системи рівнянь реакції-дифузії для моделювання взаємодії типу хижак-жертва / В. В. Давидович // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 43–59.

[4] Давидович В. В. Точні розв'язки системи рівнянь реакції-дифузії для опису процесу взаємодії типу хижак-жертва / В. В. Давидович // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", 8–10 червня 2011 р. : матеріали конф. – Київ, 2011. – С. 70.

[5] Давидович В. В. Клас нелінійних систем реакції-дифузії: оператори Q-умовної симетрії першого типу, точні розв'язки та їх властивості / В. В. Давидович // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р. : матеріали конф. Т. 1. – Київ, 2012. – С. 157–158.

[6] Давидович В. В. Нелінійні системи реакції-дифузії: побудова точних розв'язків та їх біофізична інтерпретація / В. В. Давидович, Р. М. Черніга // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей V Міжнародної наукової конференції, 4–5 квітня 2012 р. – Кам'янець-Подільський, 2012. – С. 32.

[7] Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником / В. А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1393–1400.

[8] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – М. : Наука, 1983. – 280 с.

[9] Лагно В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В. І. Лагно, С. В. Спічак, В. І. Стогній. – К. : Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.

[10] Михайлов А. В. Условия интегрируемости систем двух уравнений. I / А. В. Михайлов, А. Б. Шабат // Теор. мат. физика. – 1985. – Т. 62. – С. 163–185.

[11] Нижник Л. П. Обратные задачи рассеивания для гиперболических уравнений / Л. П. Нижник – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.

[12] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

[13] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л. В. Овсянников // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 125. – С. 492–495.

[14] Плюхін О. Г. Умовні симетрії та точні розв'язки систем типу реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії : дис. ... канд. фіз.–мат. наук : 01.01.03 / Плюхін Олексій Геннадійович. – Київ, 2008. – 154 с.

[15] Плюхін О. Г. Умовні симетрії та точні розв'язки одного рівняння реакції-дифузії-конвекції / О. Г. Плюхін // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 378–390.

[16] Плюхін О. Г. Q-умовні симетрії і точні розв'язки систем рівнянь реакції-дифузії / О. Г. Плюхін // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 4, № 3. – 2007. – С. 159-170.

[17] Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.

[18] Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.

[19] Попович Р. О. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності / Р. О. Попович, І. П. Корнєва // Праці Інституту математики НАН України. – Т. 19. – 1998. – С. 200-211.

[20] Сєров М. І. Симетрії Лі, Q-умовні симетрії та точні розв'язки системи нелінійних рівнянь дифузії-конвекції / М. І. Сєров, Р. М. Черніга // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. – С. 1340–1355.

[21] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 11. – С. 1456–1470.

[22] Фущич В. И. Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фущич, А. Г. Никитин. – К. : Наук. думка, 1983. – 200 с.

[23] Фущич В. І. Про нелокальні симетрії нелінійного рівняння теплопровідності / В. І. Фущич, М. І. Сєров, В. А. Тичинін, Т. К. Амеров // Доклады АН Украины. – 1992. – № 11. – С. 27—33.

[24] Фущич В. І. Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності / В. І. Фущич, М. І. Сєров, В. І. Чопик // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17–21.

[25] Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. – К. : Наук. думка, 1989. – 336 с.

[26] Фущич В. И. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения, I / В. И. Фущич, Р. М. Чернига // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – С. 1349–1357.

[27] Чернига Р. М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Р. М. Чернига // Симметрийный анализ и решения уравнений мат. физики. – К.: Ин-т математики. – 1988. – С. 49–53.

[28] Черніга Р. М. Нелінійні системи реакції-дифузії: побудова точних розв'язків та їх біологічна інтерпретація / Р. М. Черніга, В. В. Давидович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2012. – Випуск 7. – С. 259–265.

[29] Черніга Р. М. Дифузійна система Лотки–Вольтера: симетрії Лі, точні та числові розв'язки / Р. М. Черніга, В. А. Дутка // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56. – С. 1395–1404.

[30] Ablowitz M. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed / M. Ablowitz, A. Zeppetella // Bull. Math. Biol. – 1979. – Vol. 41. – P. 835–840.

[31] Allassia F. Symmetries and heir equations for the laminar boundary layer model / F. Allassia, M. C. Nucci // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – Vol. 201. – P. 911–942.

[32] Almeida M. A. Lie symmetries and invariants of the Lotka–Volterra system / M. A. Almeida, M. E. Magalhães, I. C. Moreira // J. Math. Phys. – 1995. – Vol. 36. – P. 1854–1867.

[33] Ames W. F. Nonlinear partial differential equations in engineering / W. F. Ames. – New York : Academic Press, 1972. – 495 p.

[34] Arrigo D. J. Nonclassical symmetries for nonlinear diffusion and absorption / D. J. Arrigo, J. M. Hill // Stud. Appl.Math. – 1995. – Vol. 94.– P. 21–39.

[35] Arrigo D. J. Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman-Cole and Clarkson-Kruskal / D. J. Arrigo, P. Broadbridge, J. M. Hill // J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34. – P. 4692–4703.

[36] Arrigo D. J. Nonclassical symmetries of a class of Burgers' systems / D. J. Arrigo, D. A. Ekrut, J. R. Fliss, Le Long // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – Vol. 371. – P. 813–820.

[37] Barannyk T. Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction-diffusion equations / T. Barannyk // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2002. – Vol. 43. – № 1. – P. 80–85.

[38] Bluman G. W. The general similarity solution of the heat equation / G. W. Bluman, J. D. Cole // J. Math. Mech. – 1969. – Vol. 18. – № 11. – P. 1025–42.

[39] Britton N. F. Essential mathematical biology / N. F. Britton. – Berlin : Springer, 2003. – 335 p.

[40] Cairó L. Darboux first integral conditions and integrability of the 3D Lotka-Volterra system / L. Cairó // J. Nonlinear Math. Phys. – 2000. – Vol. 7. – P. 511–531.

[41] Cairó L. Darboux integrability for 3D Lotka-Volterra systems / L. Cairó, J. Llibre // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 2395—2406.

[42] Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems / R. Cherniha // Rept. Math. Phys. – 2000. – Vol. 46. – P. 63–76.

[43] Cherniha R. New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology / R. Cherniha // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – № 2. – P. – 783–799.

[44] Cherniha R. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definition and their application for reaction-diffusion systems / R. Cherniha // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43. – 405207 (19 pp).

[45] Cherniha R. Conditional symmetries and exact solutions of the diffusive Lotka–Volterra system / R. Cherniha, V. Davydovych // Math. Comput. Modelling. – 2011. – Vol. 54. – P. 1238–1251.

[46] Cherniha R. Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion systems with non-constant diffusivities / R. Cherniha, V. Davydovych // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2012. – Vol. 17. – P. 3177–3188.

[47] Cherniha R. Lie and conditional symmetries of the three-component diffusive Lotka–Volterra system / R. Cherniha, V. Davydovych // J. Phys. A : Math. Theor. – 2013. – Vol. 46. – 185204 (14 pp).

[48] Cherniha R. Reaction-diffusion systems with constant diffusivities: conditional symmetries and form-preserving transformations / R. Cherniha, V. Davydovych // arXiv: 1304.6595v3 [math-ph]. – 2013. – 19 p.

[49] Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A : Math. Gen. – 2000. – Vol. 33. – P. 267–282, P. 7839–41.

[50] Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A : Math. Gen. – 2003. – Vol. 36. – P. 405–425.

[51] Cherniha R. Nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions / R. Cherniha, J. R. King // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – Vol. 308. – P. 11–35.

[52] Cherniha R. Lie symmetries and conservation laws of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems with variable diffusivities / R. Cherniha, J. R. King // IMA J. Appl. Math. – 2006 – Vol. 71. – P. 391–408.

[53] Cherniha R. Lie symmetries and exact solutions of a class of thin film equations / R. Cherniha, L. Myroniuk // Journal of Physical Mathematics. – 2010. – Vol. 2. – 100508 (19 pp).

[54] Cherniha R. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations / R. Cherniha, O. Pliukhin // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – Vol. 40. – 10049 (22 pp).

[55] Cherniha R. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion systems with power diffusivities / R. Cherniha, O. Pliukhin // J. Phys. A : Math. Theor. – 2008. – Vol. 41. – 185208 (14 pp).

[56] Cherniha R. M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term / R. M. Cherniha, M. I. Serov // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – Vol. 9. – P. 527–542.

[57] Cherniha R. M. Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, ansatze and solutions / R. M. Cherniha, M. I. Serov // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 282. – P. 305–328.

[58] Cherniha R. M. Lie symmetries and form–preserving transformations of reaction—diffusion—convection equations / R. M. Cherniha, M. I. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 342. – P. 1363—1379.

[59] Clarkson P. A. New similarity reductions of the Boussinesq equation / P. A. Clarkson, M. D. Kruskal // J. Math. Phys. – 1989. – Vol. 30. – P. 2201–2213.

[60] Davydovych V. V. Conditional symmetry and exact solutions of the Lotka–Volterra system / V. V. Davydovych // Low Temperature Physics : International Conference for Young Scientists, 7–11 June 2010 : Conference programme and Abstracts book. – Kharkiv, 2010. – P. 183.

[61] Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes / R. A. Fisher // Ann. Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 353–369.

[62] Fokas A. S. Generalized conditional symmetries and exact solutions of nonitegrable equations / A. S. Fokas, Q. M. Liu // Теор. и матем. физика. – 1994. – Т. 99, № 2 – С. 571–582.

[63] Fushchych W. I. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equation / W. I. Fushchych, R. M. Cherniha // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – Vol. 18. – P. 3491–3503.

[64] Fushchych W. I. Q-conditional symmetry of the linear heat equation / W. I. Fushchych, W. M. Shtelen, M. I. Serov, R. O. Popovych // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. – 1992. – Vol. 12. – P. 28–33.

[65] Fushchych W. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics / W. Fushchych, W. Shtelen, M. Serov. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993. – 430 p.

[66] Fushchych W. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. Fushchych, I. Tsyfra // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – Vol. 20. – P. 45–47.

[67] Hou X. Traveling wave solutions for a competitive reaction–diffusion system and their asymptotics / X. Hou, A. W. Leung // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2008. – Vol. 9. – P. 2196–2213.

[68] Hung L.-C. Traveling wave solutions of competitive–cooperative Lotka–Volterra systems of three species / L.-C. Hung // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2011. – Vol. 12. – P. 3691–3700.

[69] Hung L.-C. Exact traveling wave solutions for diffusive Lotka–Volterra systems of two competing species / L.-C. Hung // Japan J. Indust. Appl. Math. – 2012. – Vol. 29. – P. 237–251.

[70] Ibragimov N. H. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ / N. H. Ibragimov, M. Torrisi, A. Valenti // J. Math. Phys. – 1991. – Vol. 32, № 11. – P. 2988–2995.

[71] Kingston J. G. On point transformations of evolution equations / J. G. Kingston // J.Phys. A. – 1991. – Vol. 24. – P. 769–774.

[72] Knyazeva I. V. A system of two diffusion equations / I. V. Knyazeva, M. D. Popov// Lie Group Analysis of Differential Equations, Editor N. Ibragimov. Boca Raton : CRC Press. – 1994. – Vol. 1. – P. 171–176.

[73] Leung A. W. Traveling wave solutions for Lotka–Volterra system revisited / A. W. Leung, X. Hou, W. Feng // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. – 2011. – Vol. 15. – P. 171—196.

[74] Lotka A. J. Undamped oscillations derived from the law of mass action / A. J. Lotka // J. Amer. Chem. Soc. – 1920. – Vol. 42. – P. 1595 – 1599.

[75] Lou S.-y. Nonclassical symmetry reductions for the dispersive wave equations in shallow water / S.-y. Lou // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33. – P. 4300–4305.

[76] Martinez S. The effect of diffusion for the multispecies Lotka–Volterra competition model / S. Martinez // Nonlinear Anal. RWA. – 2003. – Vol. 4. – P. 409—436.

[77] Miller W. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions / W. Miller, L. A. Rubel // J. Phys. A. – 1993. Vol. 26. – P. 1901–1913.

[78] Murata S. Non-classical symmetry and Riemann invariants / S. Murata // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2006. – Vol. – 41. – P. 242–246.

[79] Murray J. D. Mathematical biology / J. D. Murray. – Berlin : Springer, 1989. – 767 p.

[80] Murray J. D. Mathematical biology, II / J. D. Murray. – Berlin : Springer, 2003. – 801 p.

[81] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations / A. G. Nikitin // Ukranian Mathematical Bulletin. – 2005. – Vol. 2, № 2. – P. 153—204.

[82] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Turing systems / A. G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – Vol. 324. – P. 615–628.

[83] Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems / A. G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 332, № 1. – P. 666–690.

[84] Nucci M. C. Nonclassical symmetries and Bäcklund transformations / M. C. Nucci // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – Vol. 178. – P. 294–300.

[85] Nucci M. C. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the FitzHugh-Nagumo equation / M. C. Nucci, P. A. Clarkson// Phys. Lett. A – 1992. – Vol. 164. – P. 49–56.

[86] Okubo A. Diffusion and ecological problems. Modern perspectives / A. Okubo, S. A. Levin. – Berlin : Springer, 2001. – 444 p.

[87] Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations / P. J. Olver. – Berlin : Springer, 1986. – 510 p.

[88] Olver P. J. The construction of special solutions to partial differential equations / P. J. Olver, P. Rosenau // Phys. Lett. A – 1986. – Vol. 114. – P. 107–112.

[89] Olver P. J. Group-invariant solutions of differential equations / P. J. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – Vol. 47. – P. 263–278.

[90] Olver P. J. Nonclassical and conditional symmetries / P. J. Olver, E. M. Vorob'ev // CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, vol. 3. – Boca Raton : CRC Press, 1996. – Ch. XI. – P. 291–328.

[91] Pocheketa O. A. Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations / O. A. Pocheketa, R. O. Popovych // Physics Letters A. – 2012. – Vol. 376. – P. 2847–2850.

[92] Polyanin A. D. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev // London : CRC Press Company. – 2003. – 802 p.

[93] Popovych R. O. Classification of admissible transformations of differential equations / R. O. Popovych // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2006. – Vol. 3, № 2. – P. 255–269.

[94] Popovych R. O. Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations / R. O. Popovych, M. Kunzinger, N. M. Ivanova // Acta Appl. Math. – 2008. – Vol. 100. – P. 113—185.

[95] Pucci E. Similarity reductions of partial differential equations / E. Pucci // J. Phys. A : Math. Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 2631–2640.

[96] Pucci E. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables / E. Pucci, G. Saccomandi // Phys. D. – 2000. – Vol. 139. – P. 28–47.

[97] Rodrigo M. Exact solutions of a competition-diffusion system / M. Rodrigo, M. Mimura // Hiroshima Math. J. – 2000. – Vol. 30. – P. 257–270.

[98] Shimada T. Self-organization in an ecosystem / T. Shimada, S. Yukava, N. Ito // Artif. Life Robotics. – 2002. – Vol. 6. – P. 78–81.

[99] Torrisi M. Exact solutions of a reaction–diffusion system for Proteus mirabilis bacterial colonies / M. Torrisi, R. Tracinà // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2011. – Vol. 12. – P. 1865–1874.

[100] Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis / A. M. Turing // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. – 1952. – Vol. 237. – P. 37–72.

[101] Vaneeva O. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source / O. Vaneeva, R. Popovych, C. Sophocleous // Acta Appl. Math. – 2009. – Vol. 106. – P. 1–46.

[102] Volterra V. Variazionie fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi / V. Volterra // Mem. Acad. Lincei. – 1926. – Vol. 2. – P. 31–113.

[103] Zhdanov R. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reduction of evolutions equations / R. Zhdanov // J. Phys. A. – 1995. – Vol. 28. – P. 3841–3850.

[104] Zhdanov R. Z. A precise definition of reduction of partial differential equations / R. Z. Zhdanov, I. M. Tsyfra, R. O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – Vol. 238, № 1. – P. 101–123.

[105] Zulehner W. Group analisys of a semilinear vector diffusion equation / W. Zulehner, W. F. Ames // Nonlinear Anal. – 1983. – Vol. 7. – P. 945–969.