АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ФЕДОРЧУК Василий Максимович

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(01.01.02. - дифференциальные уравнения и математическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор В.И.ФУЩИЧ

Киев - 1983

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих задач современной теоретической и математической физики важно знать не только группу симметрии, допускаемую системой, но и подгрупповую структуру этой группы.

Описание всех подгрупп группы Лоренца позволило с теоретико-групповой точки зрения подойти к задаче о разделении переменных в уравнении Лапласа [1] . В работе [2] доказана следующая теорема: каждому разбиению группы Лоренца на подгруппы, обладающие инвариантами, соответствует одна координатная система, в которой уравнение Лапласа допускает полное разделение переменных. Таким образом найдены все координатные системы, обладающие одним геометрическим центром. Для получения остальных координатных систем исследованы выражения, в которых генераторы группы входят квадратично. Этот подход развит и применен к решению задач о разделении переменных для многих уравнений теоретической и математической физики [5, 19-21, 30-41, 43-45] .

Во многих задачах математической физики рассматриваются сначала уравнения, описывающие идеализированные движения объекта, не взаимодействующего с внешней средой. Эти уравнения обладают, как правило, нетривиальной симметрией. Учет взаимодействия производится с помощью введения в уравнение некоторых потенциалов, которые обычно нарушают исходную симметрию системы, но иногда сохраняется симметрия относительно одной из подгрупп исходной группы.

Описание всех подгрупп группы симметрии позволяет дать групповую классификацию потенциалов и граничных условий. В работе [18] подгруппы Эвклидовой группы $E(3)$ применены для изучения нарушений симметрии в нерелятивистской квантовой механике скалярной и спинорной частиц. Для каждой подгруппы группы $E(3)$ найдены все системы координат, в которых уравнение Шредингера с соответствующим взаимодействием допускает полное или частичное разделение переменных.

Существует прямая связь между теорией представлений данной группы и ее подгрупповой структурой. Эта связь используется в теории индуцированных представлений, где различные подгруппы могут быть применены для индуцирования представлений группы. Цепочки подгрупп обеспечивают нас также базисами для представлений групп. Действительно, базис представления группы определяется как общая система собственных функций операторов Казимира всех подалгебр в определенной цепочке. Каждая несопряженная цепочка подгрупп дает различный базис.

Различным подгруппам G_i данной группы G соответветствуют разные подалгебры P_i , генераторы которых могут быть отождествлены с некоторыми физическими наблюдаемыми. Поэтому классификация подалгебр P_i дает нам различные возможные системы наблюдаемых для исследуемой системы.

Знание подгрупповой структуры группы позволяет решать задачу о редукции представлений группы по подгруппам. В работе [7, 14] произведена редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре $P(1,n)$ по их подгруппам $P(1,n-k)$. В этих работах также найден явный вид унитарного оператора, связывающего канонический базис представления с $P(1,n-k)$ базисом, и подробно рассмотрен случай неоднородной группы де-Ситтера. Редукция неприводимых унитарных представлений группы $P(1,4)$ по ее подгруппе Галилея $G(3)$ произведена в работе [27].

Инварианты различных подгрупп (если они существуют) группы G дают различные наборы квантовых чисел для квантовомеханической системы описываемой группой G или различные интегралы движения для соответствующей классической системы.

Зная подгрупповую структуру группы симметрии нелинейных дифференциальных уравнений, можно находить точные решения этих уравнений [8] . Помимо этого, подгруппы группы симметрии могут быть использованы для построения целого семейства решений исследуемого уравнения по известному одному решению.

В работе [3] произведена классификация конкретных форм релятивистской динамики на основании известной подгрупповой структуры группы Пуанкаре $P(1,3)$. Таким образом, исследование подгрупповой структуры групп является важным как с математической так и с физической точки зрения.

К настоящему времени опубликована серия работ, посвященных изучению подгрупповой структуры важных для математической физики групп [16, 17, 22, 42, 46–54, 56].

Решение многих задач теоретической и математической физики в явной или неявной форме связано с расширением четырехмерного пространства Минковского, а следовательно связано с расширением группы Пуанкаре.

В работах Кадышевского и его учеников [4, 6, 23–25] с целью выхода за массовую поверхность используется четырехмерное пространство постоянной кривизны (пространство де Ситтера).

За последнее время в различных направлениях и для различных целей (например для описания спектра масс элементарных частиц) широко изучалась проблема расширения группы Пуанкаре $P(1,3)$ и объединения ее с группами внутренних симметрий.

В работах [15, 28, 29] в качестве такого расширения предложено использовать обобщенную группу Пуанкаре, которую в дальнейшем будем обозначать $P(1,4)$.

Группа $P(1,4)$ представляет собой совокупность линейных неоднородных преобразований пятимерного пространства $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \ , \quad \mu = 0,1,2,3,4, \qquad (0.1)$$

где $\Lambda_{\mu\nu}$ и a_μ - вещественные числа, которые оставляют инвариантной следующую квадратичную форму

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = S^2 \qquad (0.2)$$

При таком подходе оператор массы M рассматривается как независимая динамическая переменная, которая определяется как

$$M^2 = x^2 + P_4^2 , \qquad (0.3)$$

где x^2 - инвариант группы $P(1,4)$, а P_4 - оператор типа 3 - импульса $\vec{P}$, такой, что $[P_4, \vec{P}] = 0$. Таким образом, неприводимому представлению группы $P(1,4)$ можно поставить в соответствие физическую систему с переменной массой и переменным спином.

В данной диссертационной работе исследована подгрупповая структура группы $P(1,4)$. Некоторые из найденных подалгебр применены для нахождения точных решений волновых уравнений. Диссертация состоит из введения и трех глав. Изложим вкратце содержание диссертации.

Первая глава. В первом параграфе дается краткое изложение метода [48] для нахождения всех непрерывных подалгебр произвольной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N. Второй параграф посвящен описанию алгебры Ли группы $P(1,4)$. В третьем параграфе приведены результаты изучения подгрупповой структуры однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ [35]. В четвертом параграфе, применив известный метод, найдены представители всех сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр $P_{j,k}$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. (Число их равно 278). Сопряжение рассматривалось относительно группы внутрeнних автоморфизмов. Среди этих подалгебр имеются такие интересные с физической точки зрения алгебры как алгебра Ли группы Пуанкаре $P(1,3)$ и алгебра Ли расширенной группы Галилея $G(3)$.

Таким образом, алгебра Ли группы $P(1,4)$ естественно содержит алгебры Ли групп движений релятивистской и нерелятивистской квантовой механики. Для каждой из найденных подалгебр $P_{j,k}$ вычислен нормализатор в однородной группе $O(1,4)$.

Вторая глава. В первом параграфе кратко изложен метод для описания нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли L с абелевым идеалом N [48]. Во втором параграфе, применив этот метод, найдены представители всех сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. (Число их равно 370). Сопряжение рассматривалось относительно группы внутренних автоморфизмов. Для каждой из найденных подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ указано, является ли она изоморфной одной из подалгебр $P_{j,k}$.

В третьей главе рассмотрены приложения некоторых из найденных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ для исследования обобщенного пятимерного уравнения Даламбера

$$L\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=0,$$
$$L=\Box_5+\varkappa^2+\alpha V(x_0,\vec{x},x_4)+\beta A_\mu(x_0,\vec{x},x_4)P', \qquad (0.4)$$

где

$$\Box_5=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

V, A_μ $(\mu=0,1,2,3,4)$ и φ – произвольные дифференцируемые функции координат 5-мерного пространства Минковского, α и β – некоторые коэффициенты (константы взаимодействия). При $\alpha=\beta=0$ получается свободное уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,4)$. При $\alpha\neq\beta\neq 0$ это уравнение описывает движение частицы с переменной массой.

В первом параграфе получены уравнения инвариантные относительно некоторых из найденных подалгебр. Используя свойства симметрии полученных уравнений для некоторых из них методом разделения переменных найдены точные решения. В других примерах, когда свойства симметрии позволяют произвести полное разделение переменных, исследуемые уравнения сведены к обыкновенным. В тех случаях, когда симметрия уравнений недостаточна для полного разделения переменных они сведены к более простым.

Для уравнения инвариантного относительно алгебры Ли группы $P(1,3)$ проведено полное разделение переменных. Полученная при этом система уравнений, при определенных ограничениях на допустимый потенциал, решена полностью. Получен релятивистски инвариантный дискретный спектр масс.

Во втором параграфе некоторые из подалгебр использованы для нахождения точных решений нелинейного волнового уравнения

$$\Box_5 u = \lambda u^n \quad , \quad n \neq 1 \tag{0.5}$$

с помощью метода [8] . Использовались подалгебры,общий ранг r_* которых равен 4. При этом уравнение (0.5) сводилось к обыкновенным дифференциальным уравнениям типа Эмдена-Фаулера. Таким путем, найдены несколько частных решений исследуемого уравнения.

Результаты, содержащиеся в диссертации опубликованы в работах [9-12] . Некоторые результаты,полученные в диссертации, уже нашли применение [55] .

Материалы диссертации докладывались на семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН УССР, на конференциях молодых ученых в Институте математики АН УССР, на конференциях молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР (г.Львов), на семинарах отдела алгебры и теории систем Института ППММ АН УССР, на международном семинаре "Теоретико-групповые методы в физике" (Звенигород, 1979).

ГЛАВА I

РАСЩЕПЛЯЮЩИЕСЯ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ЛИ ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$.

В этой главе изложим вкратце метод [48] нахождения представителей всех сопряженных классов непрерывных подалгебр произвольной алгебры Ли L конечной размерности $d(L)$ с нетривиальным абелевым идеалом N, размерности $d(N)$ $[0 < d(N) < d(L)]$. Сопряжение рассматривается относительно некоторой группы автоморфизмов A. Воспользуемся этим методом для описания представителей $P_{j,k}$ сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$. Сопряжение рассмотрим относительно группы внутренних автоморфизмов. Для каждой из найденных подалгебр $F_{j,k}$ вычислим нормализатор в однородной группе $O(1,4)$.

§ I. Алгоритм для описания подалгебр алгебры Ли L с абелевым идеалом N.

В работе [48] предложен общий метод для описания представителей всех сопряженных классов непрерывных подалгебр произвольной алгебры Ли L с нетривиальным идеалом N. Сопряжение рассматривается относительно некоторой группы автоморфизмов A. Так как алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит абелевый идеал, то мы приведем упомянутый выше метод для случая алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N. Он состоит в следующем:

I. Находим представители F_i всех сопряженных классов подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$. Сопряжение рассматриваем относительно группы автоморфизмов $\bar{A}$.

2. Для каждой подалгебры F_i находим все инвариантные подпространства в N, т.е. все подпространства $N'_{i,a}$, удовлет-

воряющие условию

$$[F_i, N'_{ia}] \subseteq N'_{i,a}. \qquad (I.I)$$

Классифицируем все $N'_{i,a}$ в сопряженные классы по отношению к нормализатору $Nor_A F_i$ и выбираем по одному представителю N_{ia} из каждого класса. Нормализатор $Nor_A F_i$ – подгруппа группы A, которая оставляет подалгебру F_i инвариантной. Каждый представитель N_{ia} дает нам подалгебру $P_{i,a}$ алгебры Ли L:

$$P_{i,a} = F_i \mathbin{\supset\!\!\!\!+} N_{ia}, \quad F_i \subseteq F, \quad N_{ia} \subseteq N. \qquad (I.2)$$

Таким образом, находим представители $P_{i,a}$ всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли L, которые могут быть записаны в виде (I.2).

3. Вычисляем представители $\tilde{P}_{j,k}$, т.е. подалгебры, для которых базис может быть выбран в виде

$$\tilde{B}_k = B_k + \sum_i c_{ki} X_i, \quad \sum_j d_{rj} X_j \qquad (I.3)$$

Здесь c_{ki} и d_{rj} – фиксированные константы (не равные нулю одновременно), которые не могут быть преобразованы одновременно в нуль элементом из A. $B_i\ (i = 1, \ldots, d(F))$ и $X_k\ (k = 1, \ldots, d(N))$ – базисы, выбранные в F и N соответственно.

4. Используем элементы $Nor_A F_i / (\exp F_i)$ для упрощения базисных элементов (I.3) и получения представителей N_{ia} сопряженных классов инвариантных подпространств N'_{ia}.

Отметим, что изложенный выше алгоритм пригодный для описания всех подалгебр алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N, если она содержит представляющую подалгебру $\bar{F}$ такую, что $\bar{F} \cap N = 0$ и $\bar{F} + N = L$. Далее будет видно, что алгебра Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ обладает всеми упомянутыми здесь свойствами. Переходим к ее рассмотрению.

§ 2. Алгебра Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$.

Группа $P(1,4)$ представляет собой совокупность линейных неоднородных преобразований пятимерного пространства $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \,, \quad \mu = 0,1,2,3,4, \tag{I.4}$$

(где $\Lambda_{\mu\nu}$ и a_μ – вещественные числа), которые оставляют инвариантной квадратичную форму:

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \tag{I.5}$$

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ образована I5 генераторами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ и P'_μ $(\mu = 0,1,2,3,4)$, удовлетворяющими соотношениям

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0,$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu \,, \tag{I.6}$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho} \,,$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ – метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1, g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.
Здесь и всюду в дальнейшем $M'_{\mu\nu} = i M_{\mu\nu}$.

Для удобства дальнейших вычислений перейдем от $M'_{\mu\nu}$ и P'_μ к следующим линейным комбинациям:

$$G = M'_{40} \,, \; L_1 = M'_{32} \,, \; L_2 = -M'_{31} \,, \; L_3 = M'_{21} \,, \tag{I.7}$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0} \,, \; C_a = M'_{4a} + M'_{a0} \quad (a = 1,2,3)$$

$$X_0 = \frac{1}{2}(P'_0 - P'_4) \,, \; X_k = P'_k \;\; (k = 1,2,3) \,, \; X_4 = \frac{1}{2}(P'_0 + P'_4) \tag{I.8}$$

Коммутационные соотношения для генераторов (I.7) и (I.8) даны в табл.I.

Таблица I

Коммутационные соотношения для алгебры Ли группы $P(1,4)$.

	G	C_1	C_2	C_3	L_1	L_2	L_3	P_1	P_2	P_3	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
G	0	C_1	C_2	C_3	0	0	0	$-P_1$	$-P_2$	$-P_3$	$-X_0$	0	0	0	$-X_4$
C_1	$-G_1$	0	0	0	0	C_3	$-C_2$	$-2G$	$2L_3$	$-2L_2$	0	$-2X_0$	0	0	$-X_1$
C_2	$-C_2$	0	0	0	$-C_3$	0	C_1	$-2L_3$	$-2G$	$2L_1$	0	0	$-2X_0$	0	$-X_2$
C_3	$-C_3$	0	0	0	C_2	$-C_1$	0	$2L_2$	$-2L_1$	$-2G$	0	0	0	$-2X_0$	$-X_3$
L_1	0	0	G_3	$-C_2$	0	L_3	$-L_2$	0	P_3	$-P_2$	0	0	X_3	$-X_2$	0
L_2	0	$-C_3$	0	C_1	$-L_3$	0	L_1	$-P_3$	0	P_1	0	$-X_3$	0	X_1	0
L_3	0	C_2	$-C_1$	0	L_2	$-L_1$	0	P_2	$-P_1$	0	0	X_2	$-X_1$	0	0
P_1	P_1	$2G$	$2L_3$	$-2L_2$	0	P_3	$-P_2$	0	0	0	X_1	$2X_4$	0	0	0
P_2	P_2	$-2L_3$	$2G$	$2L_1$	$-P_3$	0	P_1	0	0	0	X_2	0	$2X_4$	0	0
P_3	P_3	$2L_2$	$-2L_1$	$2G$	P_2	$-P_1$	0	0	0	0	X_3	0	0	$2X_4$	0

Из соотношений (I.6) видно, что алгебра Ли группы $P(1,4)$ представляет собой полупрямую сумму алгебры Ли однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ образованной генераторами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ и абелевого идеала, базисными елементами которого являются генераторы P'_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Более детально алгебра Ли однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ рассмотрена в следующем параграфе.

§ 3. Подгрупповая структура однородной группы де Ситтера $O(1,4)$.

Однородная группа де Ситтера $O(1,4)$ представляет собой совокупность линейных однородных преобразований пятимерного пространства $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu , \quad \mu = 0,1,2,3,4 , \qquad (I.9)$$

которые оставляют инвариантной квадратичную форму:

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \qquad (I.10)$$

Алгебра Ли однородной группы де Ситтера $O(1,4)$ образована 10 генераторами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho} , \qquad (I.11)$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ – метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ если $\mu \neq \nu$.

В работе [53] найдены представители F_j всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли группы $O(1,4)$ (сопряжение рассматривалось относительно группы внутренних автоморфизмов). Выпишем их в табл.2.

Таблица 2

Список представителей F_j сопряженных классов подалгебр алгебры Ли группы $O(1,4)$.

dim F_j	F_j	Генераторы	Нормализатор	Ранг параметра	
				$SO_0(1,4)$	$O(1,4)$
7	F_1	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$	F_1		
6	F_2	$; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$	F_1		
5	F_3	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$	F_3		
4	F_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus G$	F_3		
4	F_5	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$	F_5		
4	F_6	$\{G; P_1, P_2, P_3\}$	F_1		
4	F_7	$L_3 + bG; P_1, P_2, P_3$	F_3	$b >$	0
4	F_8	$G, L_3; P_1, P_2$	F_8		

Продолжение табл.2

dim F_j	F_j	Генераторы	Нормализатор	Ранг параметра $SO_0(1,4)$	Ранг параметра $O(1,4)$
3	F_9	P_1, P_2, P_3	F_1		
3	F_{10}	$\{G; P_3\} \oplus L_3$	F_{10}		
3	F_{11}	$G; P_1, P_2$	F_8		
3	F_{12}	$L_3; P_1, P_2$	F_3		
3	F_{13}	$L_3+\varepsilon P_3; P_1, P_2$	F_4	$\varepsilon=\pm 1$	$\varepsilon=1$
3	F_{14}	$L_3+cG; P_1, P_2$	F_8	$c>$	0
3	F_{15}	$; L_1, L_2, L_3$	F_5		
2	F_{16}	P_1, P_2	F_3		
2	F_{17}	L_3, P_3	F_{10}		
2	F_{18}	G, L_3	F_{18}		
2	F_{19}	G, P_3	F_{10}		
2	F_{20}	$L_3+dG; P_3$	F_{10}	$d>$	0
1	F_{21}	P_3	F_3		
1	F_{22}	G	F_5		
1	F_{23}	$L_3+\varepsilon P_3$	F_{17}	$\varepsilon=\pm 1$	$\varepsilon=1$
1	F_{24}	L_3+eG	F_{18}	$e>$	0
4	F_{25}	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$	F_{25}		
3	F_{26}	$; G, P_3, C_3$	F_{25}		
2	F_{27}	P_3+C_3, L_3	F_{27}		
1	F_{28}	L_3	F_{26}		
1	F_{29}	$P_3+C_3+eL_3$	F_{27}	$e\neq 0$	$e>0$
6	F_{30}	$; L_1, L_2, L_3, P_1+C_1, P_2+C_2, P_3+C_3$	F_{30}		
4	F_{31}	$\{L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)\} \oplus \left(L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)\right)_{(i=1,2,3)}$	F_{31}	$\varepsilon=\pm 1$	$\varepsilon=1$
3	F_{32}	$; L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)_{(i=1,2,3)}$	F_{31}	$\varepsilon=\pm 1$	$\varepsilon=1$
6	F_{33}	$; L_1, L_2, L_3, P_1-C_1, P_2-C_2, P_3-C_3$	F_{33}		

Относительно обозначений см. § 2. Нормализаторы для подалгебр F_j найдены в однородной группе $O(1,4)$.

Следующий параграф посвящен описанию подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$.

§ 4. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Изложенный в § I алгоритм сводит задачу описания представителей всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли L конечной размерности $d(L)$ с нетривиальным абелевым идеалом N (сопряжение рассматривается относительно некоторой группы автоморфизмов $\mathcal{A}$) к нахождению всех подалгебр идеала N и фактор-алгебры $F = L/N$ относительно соответствующих групп автоморфизмов.

В нашем случае L - алгебра Ли группы $P(1,4)$, N - алгебра трансляций в пятимерном пространстве, $\mathcal{A}$ - группа внутренних автоморфизмов рассматриваемой алгебры L, $\bar{\mathcal{A}}$ - собственная ортохронная группа де Ситтера $SO_0(1,4)$. Переходим к применению изложенного в § I алгоритма.

Представители F_i всех сопряженных классов непрерывных подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$ выписаны в табл.2 (см.§3).

Далее, для каждой из подалгебр F_i найдем все инвариантные подпространства N'_{ia} в N, т.е. все подпространства N'_{ia}, удовлетворяющие условию

$$[F_i, N'_{ia}] \subseteq N'_{ia}.$$

Классифицируем все N'_{ia} в сопряженные классы по отношению к нормализатору $Nor_{\mathcal{A}} F_i$ и выберем по одному представителю N_{ia} из каждого класса. Тогда каждый представитель N_{ia} даст нам подалгебру $P_{ia} = F_i \dotplus N_{ia}$ алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Таким образом, найдем представители $P_{i,a}$ всех сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$, т.е. подалгебр, которые могут быть записаны в виде (I.2) (см.§ I). Для каждой подалгебры $P_{i,a}$ найдем нормализатор в однородной группе де Ситтера $O(1,4)$.

Переходим к рассмотрению каждой подалгебры F_i в отдельности.

Подалгебра F_1 задается базисными элементами $G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$. Условию $[F_1, N'_{1a}] \subseteq N'_{1a}$ удовлетворяют подпространства

$$N'_{1,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N'_{1,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \tag{I.12}$$
$$N'_{1,3} = \{X_4\}, \quad N'_{1,4} = \{0\}$$

Так как алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_1 совпадает с F_1, то по отношению к нему подпространства $N'_{1,a}$ $(a = 1, 2, \dots, 4)$ будут инвариантными и, следовательно, - взаимно несопряженными. Поэтому, мы выберем подпространства $N'_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ в качестве представителей $N_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ соответствующих сопряженных классов. Представители $N_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ дают подалгебры $P_{1,a} = F_1 \mathbin{\dotplus} N_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Поскольку представители $N_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ инвариантны относительно генераторов $G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$, то алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ совпадает с F_1.

Подалгебра F_2 задается базисными элементами ; $L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$. Условию $[F_2, N'_{2,a}] \subseteq N'_{2,a}$ удовлетворяют подпространства

$$N'_{2,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N'_{2,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$
$$N'_{2,3} = \{X_4\}, \quad N'_{2,4} = \{0\} \tag{I.13}$$

Алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_2 совпадает с F_1.

Легко убедиться в том, что подпространства $N'_{2,a}$ $(a=1,\dots,4)$ инвариантны относительно F_1. Значит, они взаимно несопряженные по отношению к нормализатору. Выбирая подпространства $N'_{2,a}$ $(a=1,\dots,4)$ в качестве представителей $N_{2,a}$ $(a=1,2,3,4)$ соответствующих сопряженных классов, получим подалгебры $P_{2,a} = F_2 \in N_{2,a}$ $(a=1,\dots,4)$ алгебры Ли группы $P_{1,4}$. Поскольку представители $N_{2,a}$ $(a=1,\dots,4)$ инвариантны относительно генераторов $G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$, то алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{2,a}$ $(a=1,\dots,4)$ совпадает с F_1.

Подалгебра F_3 задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3. Рассуждая аналогично случаю с подалгеброй F_1 получим следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств:

$$N_{3,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{3,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},$$

$$N_{3,3}=\{X_1,X_2,X_4\},\ N_{3,4}=\{X_3,X_4\},\ N_{3,5}=\{X_4\},\ N_{3,6}=\{0\} \quad \text{(I.14)}$$

Представители $N_{3,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{3,a} = F_3 \in N_{3,a}$ $(a=1,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_3 совпадает с F_3, следовательно, относительно нее представители $N_{3,a}$ $(a=1,\dots,6)$ инвариантны. Поэтому, алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{3,a}$ $(a=1,\dots,6)$ совпадает с F_3.

Подалгебра F_4 задается базисными элементами $\{L_3; P_1, P_2\} \oplus \oplus P_3$. Условию инвариантности $[F_4, N'_{4,a}] \subseteq N'_{4,a}$ удовлетворяют подпространства

$$N'_{4,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N'_{4,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N'_{4,3}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N'_{4,4}=\{X_3,X_4\},\ N'_{4,5}=\{X_4\},\ N'_{4,6}=\{0\} \quad \text{(I.15)}$$

Алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_4 задается базисными элементами $G; L_3; P_1, P_2, P_3$. Легко убедиться в том, что эти генераторы оставляют подпространства $N'_{4,a}$ $(a = 1, \dots, 6)$ инвариантными. Значит, они взаимно несопряженные по отношению к нормализатору. Выбирая подпространства $N'_{4,a}$ $(a = 1, \dots, 6)$ в качестве представителей $N_{4,a}$ $(a = 1, \dots, 6)$ соответствующих сопряженных классов получим подалгебры $P_{4,a} = F_4 \niplus N_{4,a}$ $(a = 1, \dots, 6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{4,a}$ $(a = 1, \dots, 6)$ задается базисными элементами $\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$.

Подалгебра F_5 задается базисными элементами $\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$. Рассуждая аналогично случаю с подалгеброй F_1 получим следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств:

$$N_{5,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N_{5,2} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\},$$

$$N_{5,3} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N_{5,4} = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad N_{5,5} = \{X_0, X_4\} \quad (\mathrm{I}.16)$$

$$N_{5,6} = \{X_0\}, \quad N_{5,7} = \{X_4\}, \quad N_{5,8} = \{0\}$$

Представители $N_{5,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$ дают подалгебры $P_{5,a} = F_5 \niplus N_{5,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{5,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$ совпадает с F_5.

Подалгебра F_6 задается базисными элементами $G; P_1, P_2, P_3$. Условию инвариантности $[F_6, N'_{6,a}] \subseteq N'_{6,a}$ удовлетворяют подпространства

$$N'_{6,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N'_{6,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N'_{6,3} = \{X_3, X_4, X_1\cos\phi +$$

$$+ X_2\sin\phi,\ 0 \le \phi \le \pi\}, \quad N'_{6,4} = \{X_2, X_4, X_1\cos\alpha + X_3\sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi\},$$

$$N'_{6,5} = \{X_1, X_4, X_2\cos\theta + X_3\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}, \quad N'_{6,6} = \{X_4, a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3\},$$

$$N'_{6,7} = \{X_4\}, \quad N'_{6,8} = \{0\}.$$

Алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_6 задается базисными элементами G ; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3. Так как она содержит генераторы L_1, L_2, L_3, то мы воспользуемся этим для упрощения подпространств $N'_{6,3}$, $N'_{6,4}$, $N'_{6,5}$ и $N'_{6,6}$. В качестве примера рассмотрим подпространство $N'_{6,3}$. Имеем

$$exp(xL_3)(X_1\cos\phi + X_2\sin\phi)\,exp(-xL_3) = \tag{I.17}$$

Выбирая x из условия $\phi + x = \frac{\pi}{2}$ мы преобразуем подпространство $N'_{6,3}$ в следующее: $\{X_3, X_4, X_2\}$.

Преобразованием $exp(xL_2)$ можно подпространство $N'_{6,4}$ свести к следующему: $\{X_2, X_4, X_1\}$. Используя $exp(xL_1)$ преобразуем подпространство $N'_{6,5}$ к следующему: $\{X_1, X_4, X_3\}$. Легко видеть, что подпространства $\{X_3, X_4, X_2\}$, $\{X_2, X_4, X_1\}$ и $\{X_1, X_4, X_3\}$ взаимно сопряженные по отношению к нормализатору, а значит принадлежат одному сопряженному классу. В качестве его представителя выберем подпространство $\{X_1, X_2, X_4\}$. Используя $exp(x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3)$ преобразуем подпространство $N'_{6,6}$ к следующему: $\{X_4, X_1\}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что подпространства $N'_{6,1}$, $N'_{6,2}$, $N'_{6,7}$ и $N'_{6,8}$ инвариантны относительно нормализатора. Значит, по отношению к нему эти подпространства взаимно несопряженные и могут быть выбраны в качестве представителей соответствующих сопряженных классов. Делая это, получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{6,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$:

$$N_{6,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N_{6,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$
$$N_{6,3} = \{X_1, X_2, X_4\}, N_{6,4} = \{X_1, X_4\}, N_{6,5} = \{X_4\}, N_{6,6} = \{0\}. \tag{I.18}$$

Представители $N_{6,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{6,a} = F_6 \niplus N_{6,a}$ $(a=1,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Так как представители $N_{6,1}$, $N_{6,2}$, $N_{6,5}$ и $N_{6,6}$ инвариантны относительно F_1, то алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{6,a}$ $(a=1,2,5,6)$ задается базисными элементами G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3. Нормализатор для подалгебры $P_{6,3}$ задается базисными элементами G; L_3, P_1, P_2, P_3. Генераторы G; L_1, P_1, P_2, P_3 являются алгеброй Ли нормализатора для подалгебры $P_{6,4}$.

Подалгебра F_7 задается базисными элементами $L_3 + bG$; P_1, P_2, P_3 $(b>0)$. Используя условие инвариантности $[F_7, N'_{7,a}] \subseteq N'_{7,a}$ и то, что сопряжение рассматривается относительно нормализатора получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{7,a}$:

$$N_{7,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\},\ N_{7,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$

$$N_{7,3} = \{X_1, X_2, X_4\},\ N_{7,4} = \{X_3, X_4\},\ N_{7,5} = \{X_4\},\ N_{7,6} = \{0\} \tag{I.19}$$

Представители $N_{7,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{7,a} = F_7 \niplus N_{7,a}$ $(a=1,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{7,a}$ $(a=1,\dots,6)$ задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3.

Подалгебра F_8 задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2. Рассуждая аналогично случаю с подалгеброй F_1 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств:

$$N_{8,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\},\ N_{8,2} = \{X_0, X_1, X_2, X_4\},\ N_{8,3} = \{X_2, X_1, X_3, X_4\},$$

$$N_{8,4} = \{X_1, X_2, X_4\},\ N_{8,5} = \{X_3, X_4\},\ N_{8,6} = \{X_3\},\ N_{8,7} = \{X_4\},\ N_{8,8} = \{0\}. \tag{I.20}$$

Представители $N_{8,a}$ $(a=1,\dots,8)$ дают подалгебры $P_{8,a}=F_8 \niplus N_{8,a}$ $(a=1,\dots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{8,a}$ $(a=1,\dots,8)$ совпадает с F_8 . . .

Подалгебра F_9 задается базисными элементами P_1, P_2, P_3. Рассуждая аналогично случаю с подалгеброй F_6 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств:

$$N_{9,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{9,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{9,3}=\{X_1,X_2,X_4\}, \tag{I.21}$$

$$N_{9,4}=\{X_1,X_4\},\ N_{9,5}=\{X_4\},\ N_{9,6}=\{0\}.$$

Представители $N_{9,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{9,a}=F_9 \niplus N_{9,a}$ $(a=1,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{9,1}$, $P_{9,2}$, $P_{9,5}$ и $P_{9,6}$ задается базисными элементами G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3. Генераторы G; L_3, P_1, P_2, P_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебры $P_{9,3}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебры $P_{9,4}$ задается базисными элементами G; L_1, P_1, P_2, P_3.

Подалгебра F_{10} задается базисными элементами $\{G;P_3\}\oplus L_3$. Используя условие инвариантности $[F_{10},N'_{10,a}]\subseteq N'_{10,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{10} совпадает с F_{10} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{10,a}$:

$$N_{10,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{10,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{10,3}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{10,4}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{10,5}=\{X_1,X_2\},\ N_{10,6}=\{X_3,X_4\}, \tag{I.22}$$

$$N_{10,7}=\{X_4\},\ N_{10,8}=\{0\}.$$

Представители $N_{10,a}\ (a=1,\dots,8)$ дают подалгебры $P_{10,a}=F_{10} \mathbin{\text{∔}} N_{10,a}$ $(a=1,\dots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{10,a}\ (a=1,\dots,8)$ совпадает с F_{10}.

Подалгебра F_{11} задается базисными элементами G ; P_1, P_2. Используя условие инвариантности $[F_{11}, N'_{11,a}] \subseteq N'_{11,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{11} совпадает с F_8 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{11,a}$:

$$N_{11,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{11,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{11,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{11,4}=\{X_1,X_2,X_4\},\ N_{11,5}=\{X_1,X_3,X_4\},\ N_{11,6}=\{X_1,X_4,X_3+bX_2\ (b\neq 0)\},$$

$$N_{11,7}=\{X_1,X_4\},\ N_{11,8}=\{X_3,X_4\},\ N_{11,9}=\{X_4,X_3+bX_2(b\neq 0)\}, \tag{I.23}$$

$$N_{11,10}=\{X_4\},\ N_{11,11}=\{X_3\},\ N_{11,12}=\{0\}.$$

Представители $N_{11,a}\ (a=1,\dots,12)$ дают подалгебры $P_{11,a}=F_{11} \mathbin{\text{∔}} N_{11,a}\ (a=1,\dots,12)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{10,1}$, $P_{11,2}$, $P_{11,3}$, $P_{11,4}$, $P_{11,8}$, $P_{11,10}$, $P_{11,11}$ и $P_{11,12}$ задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2. Генераторы G ; P_1, P_2 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{11,5}$, $P_{11,6}$, $P_{11,7}$ и $P_{11,9}$.

Подалгебра F_{12} задается базисными элементами L_3 ; P_1, P_2. Используя условие инвариантности $[F_{12}, N'_{12,a}] \subseteq N'_{12,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{12} совпадает с F_3 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{12,a}$:

$$N_{12,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{12,2}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\},\ N_{12,3}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$$

$$N_{12,4}=\{X_1,X_2,X_4\}\,,\quad N_{12,5}=\{X_3,X_4\}\,,\quad N_{12,6}=\{X_3\}\,, \tag{I.24}$$

$$N_{12,7}=\{X_4\}\;;\quad N_{12,8}=\{0\}.$$

Представители $N_{12,a}$ $(a=1,\dots,8)$ дают подалгебры $P_{12,a}=F_{12}\;?\;N_{12,a}$ $(a=1,2,\dots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{12,1}$, $P_{12,3}$, $P_{12,4}$, $P_{12,5}$, $P_{12,7}$, $P_{12,8}$ задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3. Генераторы G, L_3; P_1, P_2 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{12,2}$ и $P_{12,6}$.

Подалгебра F_{13} задается базисными элементами $L_3+\varepsilon P_3$; P_1, P_2. Используя условие инвариантности $[F_{13},N'_{13,a}]\subseteq N'_{13,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{13} совпадает с F_4 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{13,a}$:

$$N_{13,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\; N_{13,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\; N_{13,3}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{13,4}=\{X_3,X_4\}\,,\quad N_{13,5}=\{X_4\}\,,\quad N_{13,6}=\{0\}. \tag{I.25}$$

Представители $N_{13,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{13,a}=F_{13}\;?\;N_{13,a}$ $(a=1,2,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{13,a}$ $(a=1,\dots,6)$ задается базисными элементами $\{L_3;P_1,P_2\}\oplus P_3$.

Подалгебра F_{14} задается базисными элементами L_3+cG; P_1, P_2 $(c>0)$. Используя условие инвариантности $[F_{14},N'_{14,a}]\subseteq N'_{14,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{14} задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{14,a}$:

$$N'_{14,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N_{14,2} = \{X_0, X_1, X_2, X_4\},$$

$$N_{14,3} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N_{14,4} = \{X_1, X_2, X_4\}, \quad N_{14,5} = \{X_3, X_4\}, \tag{I.26}$$

$$N_{14,6} = \{X_3\}, \quad N_{14,7} = \{X_4\}, \quad N_{14,8} = \{0\}$$

Представители $N_{14,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ дают подалгебры $P_{14,a} = F_{14} \mathbin{\subset\!\!\!+} N_{14,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{14,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ задается базисными элементами G, L_3 ; P_1, P_2. Подалгебра F_{15} задается базисными элементами ; L_1, L_2, L_3. Условию инвариантности $[F_{15}, N'_{15,a}] \subseteq N'_{15,a}$ удовлетворяют подпространства

$$N'_{15,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \quad N'_{15,2} = \{X_1, X_2, X_3, aX_0 + bX_4\},$$

$$N'_{15,3} = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad N'_{15,4} = \{X_0, X_4\}, \quad N'_{15,5} = \{aX_0 + bX_4\},$$

$N'_{15,6} = \{0\}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{15} задается базисными элементами: $\{\ ; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$. Воспользуемся этим для упрощения подпространств $N'_{15,2}$ и $N'_{15,5}$. Имеем

$$e^{xG}(aX_0 + bX_4)e^{-xG} = ae^{x}X_0 + be^{-x}X_4 \tag{I.27}$$

Отсюда получим следующие представители:

$$\begin{array}{ll} X_0 + X_4, & \text{если } ab > 0, \\ X_0 - X_4, & \text{если } ab < 0, \\ X_0, & \text{если } ab = 0, \\ X_4, & \text{если } ab = 0. \end{array} \tag{I.28}$$

Аналогично упрощается подпространство $N'_{15,2}$. Поскольку подпространства $N'_{15,1}$, $N'_{15,3}$, $N'_{15,4}$ и $N'_{15,6}$ инвариантны относительно нормализатора, то по отношению к нему они взаимно несопряженные. Поэтому мы выберем их в качестве представителей соответствующих сопряженных классов. Таким образом, получим следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{15,a}$:

$$N_{15,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{15,2}=\{X_0,X_1,X_2,X_3\},\ N_{15,3}=\{X_1,X_2,X_3,X_0+X_4\},$$

$$N_{15,4}=\{X_1,X_2,X_3,X_0-X_4\},\ N_{15,5}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{15,6}=\{X_1,X_2,X_3\}, \qquad (I.29)$$

$$N_{15,7}=\{X_0,X_4\},\ N_{15,8}=\{X_0+X_4\},\ N_{15,9}=\{X_0-X_4\},\ N_{15,10}=\{X_4\},\ N_{15,11}=\{X_0\},\ N_{15,12}=\{0\}.$$

Представители $N_{15,a}\ (a=1,2,\dots,12)$ дают подалгебры $P_{15,a}=F_{15} \mathbin{⫞} N_{15,a}\ (a=1,2,\dots,12)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{15,1}$, $P_{15,2}$, $P_{15,5}$, $P_{15,6}$, $P_{15,7}$, $P_{15,10}$, $P_{15,11}$ и $P_{15,12}$ задается базисными элементами $\{;L_1,L_2,L_3\}\oplus G$. Генераторы $\{;L_1,L_2,L_3\}$ образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{15,3}$, $P_{15,4}$, $P_{15,8}$ и $P_{15,9}$.

Подалгебра F_{16} задается базисными элементами P_1 , P_2 . Используя условие инвариантности $[F_{16},N'_{16,a}]\subseteq N'_{16,\alpha}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{16} задается базисными элементами G , L_3 ; P_1 , P_2 , P_3 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{16,a}$:

$$N_{16,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{16,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{16,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{16,4}=\{X_1,X_2,X_4\},\ N_{16,5}=\{X_1,X_3,X_4\},\ N_{16,6}=\{X_4,X_1,X_3+bX_2\}, \qquad (I.30)$$

$$N_{16,7}=\{X_1,X_4\},\ N_{16,8}=\{X_3,X_4\},\ N_{16,9}=\{X_4,X_3+bX_2\ (b\neq 0)\},$$

$$N_{16,10} = \{X_3\}, \quad N_{16,11} = \{X_4\}, \quad N_{16,12} = \{0\}.$$

Представители $N_{16,a}$ $(a = 1, \dots, 12)$ дают подалгебры $P_{16,a} = F_{16} ⋑ N_{16,a}$ $(a = 1, \dots, 12)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{16,1}$, $P_{16,2}$, $P_{16,4}$, $P_{16,8}$, $P_{16,11}$ и $P_{16,12}$ задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3. Генераторы G, L_3; P_1, P_2 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{16,3}$ и $P_{16,10}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{16,5}$, $P_{16,6}$, $P_{16,7}$ и $P_{16,9}$ задается базисными элементами G; P_1, P_2, P_3.

Подалгебра F_{17} задается базисными элементами L_3, P_3. Используя условие инвариантности $[F_{17}, N'_{17,a}] \subseteq N'_{17,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{17} задается базисными элементами $\{G; P_3\} \oplus L_3$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{17,a}$:

$$N_{17,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \; N_{17,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \; N_{17,3} = \{X_1, X_2, X_4\},$$
$$N_{17,4} = \{X_0, X_3, X_4\}, \; N_{17,5} = \{X_1, X_2\}, \; N_{17,6} = \{X_3, X_4\}, \; N_{17,7} = \{X_4\}, \; N_{17,8} = \{0\}. \tag{I.31}$$

Представители $N_{17,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$ дают подалгебры $P_{17,a} = F_{17} ⋑ N_{17,a}$ $(a = 1, 2, \dots, 8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{17,a}$ $(a = 1, \dots, 8)$ задается базисными элементами $\{G; P_3\} \oplus L_3$.

Подалгебра F_{18} задается базисными элементами G, L_3. Используя условие инвариантности $[F_{18}, N'_{18,a}] \subseteq N'_{18,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{18} совпадает с F_{18} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{18,a}$:

$$N_{18,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{18,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{18,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_3\},$$

$$N_{18,4}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\},\ N_{18,5}=\{X_1,X_2,X_3\},\ N_{18,6}=\{X_1,X_2,X_4\},\ N_{18,7}=\{X_0,X_3,X_4\},$$

$$N_{18,8}=\{X_0,X_1,X_2\},\ N_{18,9}=\{X_3,X_4\},\ N_{18,10}=\{X_0,X_3\},\ N_{18,11}=\{X_0,X_4\}, \tag{I.32}$$

$$N_{18,12}=\{X_1,X_2\},\ N_{18,13}=\{X_0\},\ N_{18,14}=\{X_3\},\ N_{18,15}=\{X_4\},\ N_{18,16}=\{0\}.$$

Представители $N_{18,a}$ $(a=1,\ldots,16)$ дают подалгебры $P_{18,a}=F_{18}\,\text{⨭}\,N_{18,a}$ $(a=1,2,\ldots,16)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{18,a}$ $(a=1,\ldots,16)$ совпадает с F_{18}.

Подалгебра F_{19} задается базисными элементами G, P_3. Используя условие инвариантности $[F_{19},N'_{19,a}]\subseteq N'_{19,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{19} задается базисными элементами $\{G;P_3\}\oplus L_3$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{19,a}$:

$$N_{19,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{19,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{19,3}=\{X_0,X_1,X_3,X_4\},$$

$$N_{19,4}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{19,5}=\{X_1,X_3,X_4\},\ N_{19,6}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{19,7}=\{X_2,X_4,X_1+bX_3\,(b\neq 0)\},\ N_{19,8}=\{X_1,X_4\},\ N_{19,9}=\{X_3,X_4\}, \tag{I.33}$$

$$N_{19,10}=\{X_1,X_2\},\ N_{19,11}=\{X_4,X_2+bX_3\,(b\neq 0)\},\ N_{19,12}=\{X_4\},$$

$$N_{19,13}=\{X_1\},\ N_{19,14}=\{0\}.$$

Представители $N_{19,a}$ $(a=1,2,\ldots,14)$ дают подалгебры $P_{19,a}=F_{19} \mathbin{⫞} N_{19,a}$ $(a=1,2,\ldots,14)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{19,1}$, $P_{19,2}$, $P_{19,4}$, $P_{19,6}$, $P_{19,9}$, $P_{19,10}$, $P_{19,12}$ и $P_{19,14}$ задается базисными элементами $\{G;P_3\}\oplus L_3$. Генераторы G, P_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{19,3}$, $P_{19,5}$, $P_{19,7}$, $P_{19,8}$, $P_{19,11}$ и $P_{19,13}$.

Подалгебра F_{20} задается базисными элементами L_3+dG; P_3 $(d>0)$. Используя условие инвариантности $[F_{20}, N'_{20,a}] \subseteq N'_{20,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{20} задается базисными элементами $\{G;P_3\}\oplus L_3$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{20,a}$:

$$N_{20,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{20,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{20,3}=\{X_1,X_2,X_4\},$$
$$N_{20,4}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{20,5}=\{X_1,X_2\},\ N_{20,6}=\{X_3,X_4\},\ N_{20,7}=\{X_4\},\ N_{20,8}=\{0\} \tag{I.34}$$

Представители $N_{20,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ дают подалгебры $P_{20,a}=$ $=F_{20} \mathbin{⫞} N_{20,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{20,a}$ $(a=1,\ldots,8)$ задается базисными элементами $\{G;P_3\}\oplus L_3$.

Подалгебра F_{21} задается базисным элементом P_3. Используя условие инвариантности $[P_3, N'_{21,a}] \subseteq N'_{21,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{21} задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{21,a}$:

$$N_{21,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{21,2}=\{X_0,X_1,X_3,X_4\},\ N_{21,3}=\{X_1,X_2,X_3,$$
$$X_4\},\ N_{21,4}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{21,5}=\{X_1,X_3,X_4\},\ N_{21,6}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{21,7}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3\ (b\neq 0)\},\quad N_{21,8}=\{X_1, X_2\},\quad N_{21,9}=\{X_1, X_4\},$$

$$N_{21,10}=\{X_3, X_4\},\quad N_{21,11}=\{X_4, X_1+bX_3\ (b\neq 0)\}, \tag{I.35}$$

$$N_{21,12}=\{X_1\},\quad N_{21,13}=\{X_4\},\quad N_{21,14}=\{0\}.$$

Представители $N_{21,a}\ (a=1,\dots,14)$ дают подалгебры $P_{21,a}=F_{21}\dotplus N_{21,a}\ (a=1,\dots,14)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{21,1}$, $P_{21,3}$, $P_{21,6}$, $P_{21,10}$, $P_{21,13}$ и $P_{21,14}$ задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2, P_3. Генераторы G; P_1, P_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебры $P_{21,2}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{21,4}$ и $P_{21,8}$ задается базисными элементами G, L_3; P_3. Генераторы G; P_1, P_2, P_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{21,5}$, $P_{21,7}$, $P_{21,9}$ и $P_{21,11}$. Генераторы G; P_2, P_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебры $P_{21,12}$.

Подалгебра F_{22} задается базисным элементом G. Используя условие инвариантности $[F_{22}, N'_{22,a}]\subseteq N'_{22,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{22} задается базисными элементами $\{\,;L_1, L_2, L_3\}\oplus G$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{22,a}$:

$$N_{22,1}=\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\},\quad N_{22,2}=\{X_0, X_1, X_2, X_3\},$$

$$N_{22,3}=\{X_0, X_1, X_2, X_4\},\quad N_{22,4}=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}, \tag{I.36}$$

$$N_{22,5}=\{X_0, X_1, X_2\},\quad N_{22,6}=\{X_0, X_1, X_4\},\quad N_{22,7}=\{X_1, X_2, X_3\},$$

$N_{22,8}=\{X_1,X_2,X_4\}$, $N_{22,9}=\{X_0,X_1\}$, $N_{22,10}=\{X_0,X_4\}$,

$N_{22,11}=\{X_1,X_2\}$, $N_{22,12}=\{X_1,X_4\}$, $N_{22,13}=\{X_0\}$, $N_{22,14}=\{X_1\}$, $N_{22,15}=\{X_4\}$, $N_{22,16}=\{0\}$

Представители $N'_{22,a}$ $(a=1,\cdots,16)$ дают подалгебры $P_{22,a}=F_{22} \mathbin{⋑} N_{22,a}$ $(a=1,2,\cdots,16)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{22,1}$, $P_{22,2}$, $P_{22,4}$, $P_{22,7}$, $P_{22,10}$, $P_{22,13}$, $P_{22,15}$ и $P_{22,16}$ задается базисными элементами $\{;\ L_1, L_2, L_3\} \oplus G$. Генераторы L_3, G образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{22,3}$, $P_{22,5}$, $P_{22,8}$ и $P_{22,11}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{22,6}$, $P_{22,9}$, $P_{22,12}$ и $P_{22,14}$ задается базисными элементами L_1, G.

Подалгебра F_{23} задается базисным элементом $L_3+\varepsilon P_3 (\varepsilon=\pm1)$ Используя условие инвариантности $[F_{23}, N'_{23,a}]\subseteq N'_{23,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{23} задается базисными элементами L_3, P_3 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{23,a}$:

$$N_{23,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{23,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{23,3}=\{X_1,X_2,X_4\}$$
$$N_{23,4}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{23,5}=\{X_1,X_2\},\ N_{23,6}=\{X_3,X_4\},\ N_{23,7}=\{X_4\},\ N_{23,8}=\{0\}. \tag{I.37}$$

Представители $N_{23,a}$ $(a=1,\cdots,8)$ дают подалгебры $P_{23,a}=F_{23} \mathbin{⋑} N_{23,a}$ $(a=1,\cdots,8)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{23,a}$ $(a=1,\cdots,8)$ задается базисными элементами L_3, P_3.

Подалгебра F_{24} задается базисным элементом L_3+eG $(e>0)$. Используя условие инвариантности $[F_{24}, N'_{24,a}]\subseteq N'_{24,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{24}

задается базисными элементами G, L_3 получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{24,a}$:

$$N_{24,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{24,2}=\{X_0,X_1,X_2,X_3\},\ N_{24,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{24,4}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{24,5}=\{X_1,X_2,X_3\},\ N_{24,6}=\{X_1,X_2,X_4\},$$

$$N_{24,7}=\{X_0,X_3,X_4\},\ N_{24,8}=\{X_0,X_1,X_2\},\ N_{24,9}=\{X_0,X_3\}, \quad (I.38)$$

$$N_{24,10}=\{X_0,X_4\},\ N_{24,11}=\{X_1,X_2\},\ N_{24,12}=\{X_3,X_4\},\ N_{24,13}=\{X_3\},$$

$$N_{24,14}=\{X_0\},\ N_{24,15}=\{X_4\},\ N_{24,16}=\{0\}.$$

Представители $N_{24,a}$ $(a=1,\dots,16)$ дают подалгебры $P_{24,a}=F_{24} \dotplus N_{24,a}$ $(a=1,\dots,16)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{24,a}$ $(a=1,\dots,16)$ задается базисными элементами G, L_3.

Подалгебра F_{25} задается базисными элементами $\{;G, P_3 C_3\} \oplus L_3$. Используя условие инвариантности $[F_{25},N'_{25,a}] \subseteq N'_{25,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{25} совпадает с F_{25} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{25,a}$:

$$N_{25,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{25,2}=\{X_0,X_3,X_4\}, \quad (I.39)$$

$$N_{25,3}=\{X_1,X_2\},\ N_{25,4}=\{0\}.$$

Представители $N_{25,a}$ $(a=1,2,3,4)$ дают подалгебры $P_{25,a}=F_{25} \dotplus N_{25,a}$ $(a=1,\dots,4)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{25,a}$ $(a=1,2,3,4)$ совпадает с F_{25}.

Подалгебра F_{26} задается базисными элементами $;G$, P_3,

C_3. Используя условие инвариантности $[F_{26}, N'_{26,a}] \subseteq N'_{26,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{26} задается базисными элементами $\{; G, P_3, C_3\} \oplus L_3$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{26,a}$:

$$N_{26,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\},\ N_{26,2} = \{X_0, X_1, X_3, X_4\}, \tag{I.40}$$

$$N_{26,3} = \{X_0, X_3, X_4\},\ N_{26,4} = \{X_1, X_2\},\ N_{26,5} = \{X_1\},\ N_{26,6} = \{0\}.$$

Представители $N_{26,a}\ (a = 1, \dots, 6)$ дают подалгебры $P_{26,a} = F_{26} \niplus N_{26,a}\ (a = 1, \dots, 6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{26,1}$, $P_{26,3}$, $P_{26,4}$ и $P_{26,6}$ задается базисными элементами $\{; G, P_3, C_3\} \oplus L_3$. Генераторы $; G, P_3, C_3$ образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{26,2}$ и $P_{26,5}$.

Подалгебра F_{27} задается базисными элементами $P_3 + C_3$, L_3. Используя условие инвариантности $[F_{27}, N'_{27,a}] \subseteq N'_{27,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{27} совпадает с F_{27} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{27,a}$:

$$N_{27,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\},\ N_{27,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0\}, \tag{I.41}$$

$$N_{27,3} = \{X_0, X_3, X_4 - X_0\},\ N_{27,4} = \{X_1, X_2\},\ N_{27,5} = \{X_3, X_4 - X_0\},\ N_{27,6} = \{0\}.$$

Представители $N_{27,a}\ (a = 1, \dots, 6)$ дают подалгебры $P_{27,a} = F_{27} \niplus N_{27,a}\ (a = 1, \dots, 6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{27,a}\ (a = 1, \dots, 6)$ совпадает с F_{27}.

Подалгебра F_{28} задается базисным элементом L_3. Используя условие инвариантности $[F_{28}, N'_{28,a}] \subseteq N'_{28,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{28} задается базисными элементами $\{ ; G, P_3, C_3 \} \oplus L_3$ получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{28,a}$:

$$N_{28,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}, N_{28,2} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}, N_{28,3} = \{X_0, X_1, X_2, X_4\},$$
$$N_{28,4} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, N_{28,5} = \{X_1, X_2, X_3, X_4 + X_0\}, N_{28,6} = \{X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0\},$$
$$N_{28,7} = \{X_0, X_1, X_2\}, N_{28,8} = \{X_0, X_3, X_4\}, N_{28,9} = \{X_1, X_2, X_3\}, N_{28,10} = \{X_1, X_2, X_4\},$$
$$N_{28,11} = \{X_1, X_2, X_0 + X_4\}, N_{28,12} = \{X_1, X_2, X_0 - X_4\}, N_{28,13} = \{X_0, X_3\}, N_{28,14} = \{X_0, X_4\},$$
$$N_{28,15} = \{X_1, X_2\}, N_{28,16} = \{X_3, X_4\}, N_{28,17} = \{X_3, X_0 + X_4\}, \tag{I.42}$$
$$N_{28,18} = \{X_3, X_0 - X_4\}, N_{28,19} = \{X_0\}, N_{28,20} = \{X_3\}, N_{28,21} = \{X_4\},$$
$$N_{28,22} = \{X_0 + X_4\}, N_{28,23} = \{X_0 - X_4\}, N_{28,24} = \{0\}.$$

Представители $N_{28,a}$ $(a = 1, \dots, 24)$ дают подалгебры $P_{28,a} = F_{28} \ni N_{28,a}$ $(a = 1, \dots, 24)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{28,1}$, $P_{28,8}$, $P_{28,15}$ и $P_{28,24}$ задается базисными элементами $\{ ; G, P_3, C_3 \} \oplus L_3$. Генераторы G, C_3, L_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{28,2}$, $P_{28,7}$, $P_{28,13}$ и $P_{28,19}$. Базисные элементы G и L_3 образуют алгебру Ли нормализатора для подалгебр $P_{28,3}$, $P_{28,9}$, $P_{28,14}$ и $P_{28,20}$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{28,4}$, $P_{28,10}$, $P_{28,16}$ и $P_{28,21}$ задается базисными элементами G, P_3, L_3. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{28,5}$, $P_{28,6}$, $P_{28,11}$, $P_{28,12}$, $P_{28,17}$, $P_{28,18}$

$P_{28,22}$ и $P_{28,23}$ совпадает с F_{28}.

Подалгебра F_{29} задается базисным элементом $P_3+C_3+eL_3$. Используя условие инвариантности $[F_{29}, N'_{29,a}] \subseteq N'_{29,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{29} совпадает с F_{27} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{29,a}$:

$$N_{29,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{29,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\},$$
$$N_{29,3}=\{X_0,X_3,X_4-X_0\},\ N_{29,4}=\{X_1,X_2\},\ N_{29,5}=\{X_3,X_4-X_0\},\ N_{29,6}=\{0\}. \tag{I.43}$$

Представители $N_{29,a}$ $(a=1,\dots,6)$ дают подалгебры $P_{29,a}=F_{29} \niplus N_{29,a}$ $(a=1,\dots,6)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{29,a}$ $(a=1,\dots,6)$ задается базисными элементами P_3+C_3, L_3.

Подалгебра F_{30} задается базисными элементами L_1, L_2, L_3, P_1+C_1, P_2+C_2, P_3+C_3. Используя условие инвариантности $[F_{30}, N'_{30,a}] \subseteq N'_{30,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{30} совпадает с F_{30} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{30,a}$:

$$N_{30,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{30,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\},N_{30,3}=\{0\}. \tag{I.44}$$

Представители $N_{30,a}$ $(a=1,2,3)$ дают подалгебры $P_{30,a}= F_{30} \niplus N_{30,a}$ $(a=1,2,3)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{30,a}$ $(a=1,2,3)$ совпадает с F_{30}.

Подалгебра F_{31} задается базисными элементами $\{;\ L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)\} \oplus \left(L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)\right),\ i=1,2,3$. Используя условие инвариантности $[F_{31}, N'_{31,a}] \subseteq N'_{31,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{31} совпадает с F_{31} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{31,a}$:

$$N_{31,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{31,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\},\ N_{31,3}=\{0\}. \qquad (I.45)$$

Представители $N_{31,a}\ (a=1,2,3)$ дают подалгебры $P_{31,a}=F_{31} \ni N_{31,a}\ (a=1,2,3)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{31,a}\ (a=1,2,3)$ совпадает с F_{31}.

Подалгебра F_{32} задается базисными элементами ; $L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)\ (i=1,2,3)$. Используя условие инвариантности $[F_{32}, N'_{32,a}] \subseteq N'_{32,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{32} совпадает с F_{31} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{32,a}$:

$$N_{32,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{32,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\},\ N_{32,3}=\{0\}. \qquad (I.46)$$

Представители $N_{32,a}\ (a=1,2,3)$ дают подалгебры $P_{32,a}=F_{32} \ni N_{32,a}\ (a=1,2,3)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{32,a}\ (a=1,2,3)$ совпадает с F_{31}.

Подалгебра F_{33} задается базисными элементами ; L_1, L_2, L_3, P_1-C_1, P_2-C_2, P_3-C_3. Используя условие инвариантности $[F_{33}, N'_{33,a}] \subseteq N'_{33,a}$ и тот факт, что алгебра Ли нормализатора для подалгебры F_{33} совпадает с F_{33} получаем следующие представители сопряженных классов инвариантных подпространств $N'_{33,a}$:

$$N_{33,1}=\{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4\},\ N_{33,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_0+X_4\}, \tag{I.47}$$

$$N_{33,3}=\{0\}.$$

Представители $N_{33,a}$ $(a=1,2,3)$ дают подалгебры $P_{33,a}=F_{33} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} N_{33,a}$ $(a=1,2,3)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Алгебра Ли нормализатора для подалгебр $P_{33,a}$ $(a=1,2,3)$ совпадает с F_{33} . Случаи, соответствующие тривиальным подгруппам группы $O(1,4)$ в работе не рассмотрены.

Таким образом, использовав известный метод, в этом параграфе найдены 278 непрерывных расщепляющихся подалгебр $P_{j,k}$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Полученные результаты приведены в табл.3.

Отметим, что выписанные в табл.3 нормализаторы для подалгебр $P_{j,k}$, найдены в однородной группе $O(1,4)$.

Укажем на самые интересные подалгебры с физической точки зрения.

I. Подалгебра $P_{33,2}$ изоморфна алгебре Ли группы Пуанкаре $P(1,3)$.

2. Подалгебра $P_{2,1}$ изоморфна алгебре Ли расширенной группы Галилея $G(3)$. Это утверждение полностью согласуется с результатами работы [26] .

Таким образом, алгебра Ли группы $P(1,4)$ естественно объединяет алгебр Ли групп движений релятивистской и нерелятивистской квантовой механики.

Таблица 3

Список представителей $P_{j,k}$

$P_{j,k}$	F_j	$\dim P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{1,1}$	F_1	12	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$	X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_1
$P_{1,2}$		11		X_1, X_2, X_3, X_4	F_1
$P_{1,3}$		8		X_4	F_1
$P_{1,4}$		7		0	F_1
$P_{2,1}$		11		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{2,2}$	F_2	10	$; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$	X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{2,3}$		7		X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{2,4}$		6		0	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{3,1}$		10		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_3
$P_{3,2}$		9		X_1, X_2, X_3, X_4	F_3
$P_{3,3}$	F_3	8	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$	X_1, X_2, X_4	F_3
$P_{3,4}$		7		X_3, X_4	F_3
$P_{3,5}$		6		X_4	F_3
$P_{3,6}$		5		0	F_3
$P_{4,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{4,2}$		8		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{4,3}$	F_4	7	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$	X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{4,4}$		6		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{4,5}$		5		X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{4,6}$		4		0	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{5,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_5
$P_{5,2}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3	F_5
$P_{5,3}$		8		X_1, X_2, X_3, X_4	F_5
$P_{5,4}$	F_5	7	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$	X_1, X_2, X_3	F_5
$P_{5,5}$		6		X_0, X_4	F_5
$P_{5,6}$		5		X_0	F_5
$P_{5,7}$		5		X_4	F_5
$P_{5,8}$		4		0	F_5

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	dim $P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{6,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{6,2}$		8		X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{6,3}$		7		X_1, X_2, X_4	$G; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{6,4}$	F_6	6	$\{G; P_1, P_2, P_3\}$	X_1, X_4	$G; \underset{\sim}{L}_1, L_2, \underset{\sim}{L}_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{6,5}$		5		X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{6,6}$		4		0	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{7,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{7,2}$		8		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{7,3}$	F_7	7	$L_3 + bG; P_1, P_2, P_3$	X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{7,4}$		6		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{7,5}$		5		X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{7,6}$		4		0	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{8,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_8
$P_{8,2}$		8		X_0, X_1, X_2, X_4	F_8
$P_{8,3}$		8		X_1, X_2, X_3, X_4	F_6
$P_{8,4}$	F_8	7	G, L_3, P_1, P_2	X_1, X_2, X_4	F_6
$P_{8,5}$		6		X_3, X_4	F_6
$P_{8,6}$		5		X_3	F_8
$P_{8,7}$		5		X_4	F_8
$P_{8,8}$		4		0	F_8
$P_{9,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{9,2}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{9,3}$	F_9	6	P_1, P_2, P_3	X_1, X_2, X_4	$G; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{9,4}$		5		X_1, X_4	$G; L_1, \underset{\sim}{L}_2, \underset{\sim}{L}_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{9,5}$		4		X_4	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$
$P_{9,6}$		3		0	$G; L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3$

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	$\dim P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{10,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{10}
$P_{10,2}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	F_{10}
$P_{10,3}$		6		X_1, X_2, X_4	F_{10}
$P_{10,4}$	F_{10}	6	$\{G; P_3\} \oplus L_3$	X_0, X_3, X_4	F_{10}
$P_{10,5}$		5		X_1, X_2	F_{10}
$P_{10,6}$		5		X_3, X_4	F_{10}
$P_{10,7}$		4		X_4	F_{10}
$P_{10,8}$		3		0	F_{10}
$P_{11,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,2}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,3}$		7		X_0, X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,4}$		6		X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,5}$		6		X_1, X_3, X_4	$G, \tilde{L}_3; P_1, P_2$
$P_{11,6}$	F_{11}	6	$G; P_1, P_2$	$X_1, X_4, X_3 + bX_2 \ (b \neq 0)$	F_{11}
$P_{11,7}$		5		X_1, X_4	$G, \tilde{L}_3; P_1, P_2$
$P_{11,8}$		5		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,9}$		5		$X_4, X_3 + bX_2 \ (b \neq 0)$	F_{11}
$P_{11,10}$		4		X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,11}$		4		X_3	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{11,12}$		3		0	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{12,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{12,2}$		7		X_0, X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{12,3}$	F_{12}	7	$L_3; P_1, P_2$	X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{12,4}$		6		X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{12,5}$		5		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{12,6}$		4		X_3	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{12,7}$		4		X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{12,8}$		3		0	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	$\dim P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{13,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{13,2}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{13,3}$	F_{13}	6	$L_3 + \epsilon P_3 ; P_1, P_2$	X_1, X_2, X_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{13,4}$		5		X_3, X_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{13,5}$		4		X_4	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{13,6}$		3		0	$\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$
$P_{14,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,2}$		7		X_0, X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,3}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,4}$	F_{14}	6	$L_3 + cG ; P_1, P_2$	X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,5}$		5		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,6}$		4		X_3	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,7}$		4		X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{14,8}$		3		0	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{15,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,2}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,3}$		7		$X_1, X_2, X_3, X_0 + X_4$	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus \underset{\sim}{G}$
$P_{15,4}$		7		$X_1, X_2, X_3, X_0 - X_4$	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus \underset{\sim}{G}$
$P_{15,5}$		7		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,6}$	F_{15}	6	$; L_1, L_2, L_3$	X_1, X_2, X_3	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,7}$		5		X_0, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,8}$		4		$X_0 + X_4$	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus \underset{\sim}{G}$
$P_{15,9}$		4		$X_0 - X_4$	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus \underset{\sim}{G}$
$P_{15,10}$		4		X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus \tilde{G}$
$P_{15,11}$		4		X_0	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{15,12}$		3		0	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	dim $P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{16,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,2}$		6		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,3}$		6		X_0, X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2$
$P_{16,4}$		5		X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,5}$		5		X_1, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,6}$	F_{16}	5	P_1, P_2	X_4, X_1, X_3+bX_2 $(b\neq 0)$	$G \quad P_1, P_2, P_3$
$P_{16,7}$		4		X_1, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,8}$		4		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,9}$		4		X_4, X_3+bX_2 $(b\neq 0)$	$G \quad P_1, P_2, P_3$
$P_{16,10}$		3		X_3	$G; L_3; P_1, P_2$
$P_{16,11}$		3		X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{16,12}$		2		0	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{17,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,2}$		6		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,3}$		5		X_1, X_2, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,4}$	F_{17}	5	L_3, P_3	X_0, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,5}$		4		X_1, X_2	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,6}$		4		X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,7}$		3		X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{17,8}$		2		0	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{18,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{18}
$P_{18,2}$		6		X_1, X_2, X_3, X_4	F_{18}
$P_{18,3}$		6		X_0, X_1, X_2, X_3	F_{18}
$P_{18,4}$		6		X_0, X_1, X_2, X_4	F_{18}
$P_{18,5}$	F_{18}	5	G, L_3	X_1, X_2, X_3	F_{18}
$P_{18,6}$		5		X_1, X_2, X_4	F_{18}
$P_{18,7}$		5		X_0, X_3, X_4	F_{18}
$P_{18,8}$		5		X_0, X_1, X_2	F_{18}
$P_{18,9}$		4		X_3, X_4	F_{18}

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	$\dim P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{18,10}$		4		X_0, X_3	F_{18}
$P_{18,11}$		4		X_0, X_4	F_{18}
$P_{18,12}$		4		X_1, X_2	F_{18}
$P_{18,13}$	F_{18}	3		X_0	F_{18}
$P_{18,14}$		3		X_3	F_{18}
$P_{18,15}$		3		X_4	F_{18}
$P_{18,16}$		2		0	F_{18}
$P_{19,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,2}$		6		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,3}$		6		X_0, X_1, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus \underset{\sim}{L}_3$
$P_{19,4}$		5		X_0, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,5}$		5		X_1, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus \underset{\sim}{L}_3$
$P_{19,6}$		5		X_1, X_2, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,7}$	F_{19}	5	G, P_3	$X_2, X_4, X_1 + bX_3 \ (b \neq 0)$	F_{19}
$P_{19,8}$		4		X_1, X_4	$\{G; P_3\} \oplus \underset{\sim}{L}_3$
$P_{19,9}$		4		X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,10}$		4		X_1, X_2	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,11}$		4		$X_4, X_2 + bX_3 \ (b \neq 0)$	F_{19}
$P_{19,12}$		3		X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{19,13}$		3		X_1	$\{G; P_3\} \oplus \underset{\sim}{L}_3$
$P_{19,14}$		2		0	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,2}$		6		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,3}$		5		X_1, X_2, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,4}$	F_{20}	5	$L_3 + dG; P_3$	X_0, X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,5}$		4		X_1, X_2	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,6}$		4		X_3, X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,7}$		3		X_4	$\{G; P_3\} \oplus L_3$
$P_{20,8}$		2		0	$\{G; P_3\} \oplus L_3$

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	dim $P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{21,1}$		6		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,2}$		5		X_0, X_1, X_3, X_4	$G, \underset{\sim}{L}_3; P_1, P_3$
$P_{21,3}$		5		X_1, X_2, X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,4}$		4		X_0, X_3, X_4	$G, L_3; P_3$
$P_{21,5}$		4		X_1, X_3, X_4	$G, \underset{\sim}{L}_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,6}$		4		X_1, X_2, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,7}$		4		X_3, X_4, X_0+X_1	F_{21}
$P_{21,8}$	F_{21}	4	P_3	X_3, X_4, X_0-X_1	F_{21}
$P_{21,9}$		4		$X_2, X_4, X_1+bX_3\ (b\neq 0)$	$G,\quad P_1, P_2, P_3$
$P_{21,10}$		3		X_1, X_2	$G, L_3; P_3$
$P_{21,11}$		3		X_1, X_4	$G, \underset{\sim}{L}_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,12}$		3		X_3, X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,13}$		3		$X_4, X_1+bX_3\ (b\neq 0)$	$G,\quad P_1, P_2, P_3$
$P_{21,14}$		2		X_1	$G, \underset{\sim}{L}_3; P_2, P_3$
$P_{21,15}$		2		X_4	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{21,16}$		1		0	$G, L_3; P_1, P_2, P_3$
$P_{22,1}$		6		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,2}$		5		X_0, X_1, X_2, X_3	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,3}$		5		X_0, X_1, X_2, X_4	$\{; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,4}$		5		X_1, X_2, X_3, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,5}$		4		X_0, X_1, X_2	$\{; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,6}$		4		X_0, X_1, X_4	$\{; L_1, \underset{\sim}{L}_2, \underset{\sim}{L}_3\} \oplus G$
$P_{22,7}$	F_{22}	4	G	X_1, X_2, X_3	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,8}$		4		X_1, X_2, X_4	$\{; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,9}$		3		X_0, X_1	$\{; L_1, \underset{\sim}{L}_2, \underset{\sim}{L}_3\} \oplus G$
$P_{22,10}$		3		X_0, X_4	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,11}$		3		X_1, X_2	$\{; \underset{\sim}{L}_1, \underset{\sim}{L}_2, L_3\} \oplus G$
$P_{22,12}$		3		X_1, X_4	$\{; L_1, \underset{\sim}{L}_2, \underset{\sim}{L}_3\} \oplus G$
$P_{22,13}$		2		X_0	$\{; L_1, L_2, L_3\} \oplus G$

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	dim $P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{22,14}$		2		X_1	$\{;L_1,\underset{\sim}{L_2},\underset{\sim}{L_3}\}\oplus G$
$P_{22,15}$		2		X_4	$\{;L_1,L_2,L_3\}\oplus G$
$P_{22,16}$		1		0	$\{;L_1,L_2,L_3\}\oplus G$
$P_{23,1}$		6		X_0,X_1,X_2,X_3,X_4	L_3,P_3
$P_{23,2}$		5		X_1,X_2,X_3,X_4	L_3,P_3
$P_{23,3}$		4		X_1,X_2,X_4	L_3,P_3
$P_{23,4}$	F_{23}	4	$L_3+\varepsilon P_3$	X_0,X_3,X_4	L_3,P_3
$P_{23,5}$		3		X_1,X_2	L_3,P_3
$P_{23,6}$		3		X_3,X_4	L_3,P_3
$P_{23,7}$		2		X_4	L_3,P_3
$P_{23,8}$		1		0	L_3,P_3
$P_{24,1}$		6		X_0,X_1,X_2,X_3,X_4	G,L_3
$P_{24,2}$		5		X_0,X_1,X_2,X_3	G,L_3
$P_{24,3}$		5		X_0,X_1,X_2,X_4	G,L_3
$P_{24,4}$		5		X_1,X_2,X_3,X_4	G,L_3
$P_{24,5}$		4		X_1,X_2,X_3	G,L_3
$P_{24,6}$		4		X_1,X_2,X_4	G,L_3
$P_{24,7}$		4		X_0,X_3,X_4	G,L_3
$P_{24,8}$	F_{24}	4	L_3+eG	X_0,X_1,X_2	G,L_3
$P_{24,9}$		3		X_0,X_3	G,L_3
$P_{24,10}$		3		X_0,X_4	G,L_3
$P_{24,11}$		3		X_1,X_2	G,L_3
$P_{24,12}$		3		X_3,X_4	G,L_3
$P_{24,13}$		2		X_3	G,L_3
$P_{24,14}$		2		X_0	G,L_3
$P_{24,15}$		2		X_4	G,L_3
$P_{24,16}$		1		0	G,L_3

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	dim $P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{25,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{25}
$P_{25,2}$	F_{25}	7	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$	X_0, X_3, X_4	F_{25}
$P_{25,3}$		6		X_1, X_2	F_{25}
$P_{25,4}$		4		0	F_{25}
$P_{26,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{26,2}$		7		X_0, X_1, X_3, X_4	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus \underset{\sim}{L_3}$
$P_{26,3}$	F_{26}	6	$;G, P_3, C_3$	X_0, X_3, X_4	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{26,4}$		5		X_1, X_2	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{26,5}$		4		X_1	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus \underset{\sim}{L_3}$
$P_{26,6}$		3		0	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{27,1}$		7		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{27}
$P_{27,2}$		6		$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	F_{27}
$P_{27,3}$	F_{27}	5	$P_3 + C_3, L_3$	$X_0, X_3, X_4 - X_0$	F_{27}
$P_{27,4}$		4		X_1, X_2	F_{27}
$P_{27,5}$		4		$X_3, X_4 - X_0$	F_{27}
$P_{27,6}$		2		0	F_{27}
$P_{28,1}$		6		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{28,2}$		5		X_0, X_1, X_2, X_3	G, C_3, L_3
$P_{28,3}$		5		X_0, X_1, X_2, X_4	G, L_3
$P_{28,4}$		5		X_1, X_2, X_3, X_4	G, P_3, L_3
$P_{28,5}$		5		$X_1, X_2, X_3, X_4 + X_0$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,6}$		5		$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,7}$		4		X_0, X_1, X_2	G, C_3, L_3
$P_{28,8}$		4		X_0, X_3, X_4	$\{;G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{28,9}$		4		X_1, X_2, X_3	G, L_3
$P_{28,10}$		4		X_1, X_2, X_4	G, P_3, L_3
$P_{28,11}$		4		$X_1, X_2, X_0 + X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,12}$	F_{28}	4	L_3	$X_1, X_2, X_0 - X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,13}$		3		X_0, X_3	G, C_3, L_3
$P_{28,14}$		3		X_0, X_4	G, L_3

Продолжение табл. 3

$P_{j,k}$	F_j	$\dim P_{j,k}$	Генераторы F_j	$N_{j,k}$	Нормализатор
$P_{28,15}$		3		X_1, X_2	$\{; G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{28,16}$		3		X_3, X_4	G, P_3, L_3
$P_{28,17}$		3		$X_3, X_0 + X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,18}$		3		$X_3, X_0 - X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,19}$		2		X_0	G, C_3, L_3
$P_{28,20}$		2		X_3	G, L_3
$P_{28,21}$		2		X_4	G, P_3, L_3
$P_{28,22}$		2		$X_0 + X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,23}$		2		$X_0 - X_4$	$\underset{\sim}{G}, L_3$
$P_{28,24}$		1		0	$\{; G, P_3, C_3\} \oplus L_3$
$P_{29,1}$		6		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{29,2}$		5		$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{29,3}$	F_{29}	4	$P_3 + C_3 + eL_3$	$X_0, X_3, X_4 - X_0$	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{29,4}$		3		X_1, X_2	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{29,5}$		3		$X_3, X_4 - X_0$	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{29,6}$		1		0	$P_3 + C_3, L_3$
$P_{30,1}$		11		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{30}
$P_{30,2}$	F_{30}	10	$; L_1, L_2, L_3, P_1 + C_1, P_2 + C_2, P_3 + C_3$	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	F_{30}
$P_{30,3}$		6		0	F_{30}
$P_{31,1}$		9		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{31}
$P_{31,2}$	F_{31}	8	$\{; L_i + \frac{\varepsilon}{2}(P_i + C_i)\} \oplus (L_3 - \frac{\varepsilon}{2}(P_3 + C_3))$, $i = 1, 2, 3$	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	F_{31}
$P_{31,3}$		4		0	F_{31}
$P_{32,1}$		8		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{31}
$P_{32,2}$	F_{32}	7	$L_i + \frac{\varepsilon}{2}(P_i + C_i)$, $i = 1, 2, 3$	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	F_{31}
$P_{32,3}$		3		0	F_{31}
$P_{33,1}$		11		X_0, X_1, X_2, X_3, X_4	F_{33}
$P_{33,2}$	F_{33}	10	$\{; L_1, L_2, L_3, P_1 - C_1, P_2 - C_2, P_3 - C_3\}$	$X_1, X_2, X_3, X_0 + X_4$	F_{33}
$P_{33,3}$		6		0	F_{33}

ГЛАВА II

НЕРАСЩЕПЛЯЮЩИЕСЯ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ЛИ ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$.

В этой главе изложим метод [48] нахождения представителей всех сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр произвольной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N. Воспользуемся этим методом для описания представителей $\widetilde{P}_{j,k}$ сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Для каждой из найденных подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ укажем является ли она изоморфной некоторой из подалгебр $P_{j,k}$.

§ I. Метод для описания нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли L с абелевым идеалом N.

В предыдущей главе мы привели общий метод [48] для описания всех подалгебр произвольной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N. Он сводит описание всех подалгебр к нахождению расщепляющихся подалгебр $P_{i,a}$, т.е. подалгебр, которые могут быть записаны в виде

$$P_{i,a} = F_i \dotplus N_{ia} \,, \quad F_i \subseteq F \,, \quad N_{ia} \subseteq N.$$

и нерасщепляющихся подалгебр, т.е. подалгебр для которых базис может быть выбран в виде

$$\widetilde{B}_k = B_k + \sum_i C_{ki} X_i \,, \quad \sum_j d_{rj} X_j .$$

В формуле C_{ki} и d_{rj} – фиксированные константы (не равны нулю одновременно), которые не могут быть преобразованы одновременно в нуль элементом из A. $B_i \,(i = 1, \ldots, d(F))$ и $X_k \,(k = 1, \ldots,$

$d(N)$) – базисы, выбранные в $F = L/N$ и N соответственно. В предыдущей главе мы описали представители $P_{i,a}$ всех сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр, алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Однако помимо расщепляющихся, могут быть также нерасщепляющиеся.

Для полного описания подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ мы должны найти нерасщепляющиеся подалгебры.

С этой целью вместо генераторов каждой подалгебры F_j будем строить новые генераторы, связанные с генераторами данной подалгебры F_j соотношениями вида:

$$
\begin{aligned}
\tilde{G} &= G + a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 , \\
\tilde{L}_1 &= L_1 + b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 , \\
\tilde{L}_2 &= L_2 + c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 , \\
\tilde{L}_3 &= L_3 + d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 + d_4 X_4 , \\
\tilde{P}_1 &= P_1 + e_0 X_0 + e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 , \\
\tilde{P}_2 &= P_2 + g_0 X_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 , \\
\tilde{P}_3 &= P_3 + h_0 X_0 + h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 + h_4 X_4 , \\
\tilde{C}_1 &= C_1 + k_0 X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 + k_4 X_4 , \\
\tilde{C}_2 &= C_2 + m_0 X_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 , \\
C_3 &= C_3 + m_0 X_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 \dot{X}_3 + n_4 X_4 .
\end{aligned}
\tag{2.I}
$$

Используя табл.I получаем коммутационные соотношения между построенными генераторами. Они имеют вид:

$$
\begin{aligned}
[\tilde{G}, \tilde{L}_1] &= b_0 X_0 + a_3 X_2 - a_2 X_3 - b_4 X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{L}_2] &= c_0 X_0 - a_3 X_1 + a_1 X_3 - c_4 X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{L}_3] &= d_0 X_0 + a_2 X_1 - a_1 X_2 - d_4 X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{P}_1] &= - P_1 + e_0 X_0 - a_0 X_1 - (e_4 + 2a_1) X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{P}_2] &= - P_2 + g_0 X_0 - a_0 X_2 - (g_4 + 2a_2) X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{P}_3] &= - P_3 + h_0 X_0 - a_0 X_3 - (h_4 + 2a_3) X_4 , \\
[\tilde{G}, \tilde{C}_1] &= C_1 + (k_0 + 2a_1) X_0 + a_4 X_1 - k_4 X_4 ,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{G},\tilde{C}_2] = C_2 + (m_0+2a_2)X_0 + a_4X_2 - m_4X_4,\\
&[\tilde{G},\tilde{C}_3] = C_3 + (n_0+2a_3)X_0 + a_4X_3 - n_4X_4,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{L}_2] = L_3 - b_3X_1 - c_3X_2 + (b_1+c_2)X_3,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{L}_3] = -L_2 + b_2X_1 - (d_3+b_1)X_2 + d_2X_3,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{P}_1] = -b_0X_1 - e_3X_2 + e_2X_3 - 2b_1X_4,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{P}_2] = P_3 - (g_3+b_0)X_2 + g_2X_3 - 2b_2X_4,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{P}_3] = -P_2 - h_3X_2 + (h_2-b_0)X_3 - 2b_3X_4,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{C}_1] = 2b_1X_0 + b_4X_1 - k_3X_2 + k_2X_3,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{C}_2] = C_3 + 2b_2X_0 + (b_4-m_3)X_2 + m_2X_3,\\
&[\tilde{L}_1,\tilde{C}_3] = -C_2 + 2b_3X_0 - n_3X_2 + (n_2+b_4)X_3,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{L}_3] = L_1 + (c_2+d_3)X_1 - c_1X_2 - d_1X_3,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{P}_1] = -P_3 + (e_3-c_0)X_1 - e_1X_3 - 2c_1X_4,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{P}_2] = g_3X_1 - c_0X_2 - g_1X_3 - 2c_2X_4,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{P}_3] = P_1 + h_3X_1 - (h_1+c_0)X_3 - 2c_3X_4,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{C}_1] = -C_3 + 2c_1X_0 + (k_3+c_4)X_1 - k_1X_3,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{C}_2] = 2c_2X_0 + m_0X_1 + c_4X_2 - m_1X_3,\\
&[\tilde{L}_2,\tilde{C}_3] = C_1 + 2c_3X_0 + n_3X_1 + (c_4-n_1)X_3,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{P}_1] = P_2 - (e_2+d_0)X_1 + e_1X_2 - 2d_1X_4,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{P}_2] = -P_1 - g_2X_1 + (g_1-d_0)X_2 - 2d_2X_4,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{P}_3] = -h_2X_1 + h_1X_2 - d_0X_3 - 2d_3X_4,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{C}_1] = C_2 + 2d_1X_0 + (d_4-k_2)X_1 + k_1X_2,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{C}_2] = -C_1 + 2d_2X_0 - m_2X_1 + (d_4+m_1)X_2,\\
&[\tilde{L}_3,\tilde{C}_3] = 2d_3X_0 - n_2X_1 + n_1X_2 + d_4X_3,\\
&[\tilde{P}_1,\tilde{P}_2] = g_0X_1 - e_0X_2 + 2(g_1-e_2)X_4,\\
&[\tilde{P}_1,\tilde{P}_3] = h_0X_1 - e_0X_3 + 2(h_1-e_3)X_4,\\
&[\tilde{P}_1,\tilde{C}_1] = 2G + (k_0+e_4)X_1 + 2e_1X_0 + 2k_1X_4,\\
&[\tilde{P}_1,\tilde{C}_2] = 2L_3 + 2e_2X_0 + m_0X_1 + e_4X_2 + 2m_1X_4,\\
&[\tilde{P}_1,\tilde{C}_3] = -2L_2 + 2e_3X_0 + n_0X_1 + e_4X_3 + 2n_1X_4\\
&[\tilde{P}_2,\tilde{P}_3] = h_0X_2 - g_0X_3 + 2(h_2-g_3)X_4,\\
&[\tilde{P}_2,\tilde{C}_1] = -2L_3 + 2g_1X_0 + g_4X_1 + k_0X_2 + 2k_2X_4,
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

$$[P_2, C_2] = 2G + 2g_2X_0 + (g_4 + m_0)X_2 + 2m_2X_4,$$
$$[\tilde{P}_2, \tilde{C}_3] = 2L_1 + 2g_3X_0 + n_0X_2 + g_4X_3 + 2n_2X_4,$$
$$[\tilde{P}_3, \tilde{C}_1] = 2L_2 + 2h_1X_0 + h_4X_1 + k_0X_3 + 2k_3X_4,$$
$$[\tilde{P}_3, \tilde{C}_2] = -2L_1 + 2h_2X_0 + h_4X_2 + m_0X_3 + 2m_3X_4,$$
$$[\tilde{P}_3, \tilde{C}_3] = 2G + 2h_3X_0 + (n_0 + h_4)X_3 + 2n_3X_4,$$
$$[\tilde{C}_1, \tilde{C}_2] = 2(k_2 - m_1)X_0 - m_4X_1 + k_4X_2,$$
$$[\tilde{C}_1, \tilde{C}_3] = 2(k_3 - n_1)X_0 - n_4X_1 + k_4X_3,$$
$$[\tilde{C}_2, \tilde{C}_3] = 2(m_3 - n_2)X_0 - n_4X_2 + m_4X_3.$$

Согласно изложенному в главе I методу мы будем поступать следующим образом:

1. Используем $\exp\{x_0X_0 + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4\}$ для упрощения построенных генераторов.
2. Потребуем, чтобы построенные генераторы образовывали алгебру с каждым инвариантным для данной подалгебры F_j подпространством $N_{j,k}$. При этом используем коммутационные соотношения (2.2).
3. Используем элементы нормализатора $Nor_A F_j / (\exp F_j)$ для дальнейшего упрощения построенных нами генераторов.

Переходим к описанию нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$.

§ 2. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Переходим к применению описанного в § I метода для нахождения представителей $\tilde{P}_{j,k}$, сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$. С этой целью будем рассматривать каждую подалгебру F_j в отдельности.

Подалгебра F_1 задается базисными элементами G, L_1,

L_2, L_3, P_1, P_2, P_3. Вместо ее генераторов построим новые

$$
\begin{aligned}
\tilde{G} &= G + a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4,\\
\tilde{L}_1 &= L_1 + b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4,\\
\tilde{L}_2 &= L_2 + c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4,\\
\tilde{L}_3 &= L_3 + d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3 + d_4X_4,\\
\tilde{P}_1 &= P_1 + e_0X_0 + e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3 + e_4X_4,\\
\tilde{P}_2 &= P_2 + g_0X_0 + g_1X_1 + g_2X_2 + g_3X_3 + g_4X_4,\\
\tilde{P}_3 &= P_3 + h_0X_0 + h_1X_1 + h_2X_2 + h_3X_3 + h_4X_4,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Используя $\exp\{x_0X_0 + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4\}$ мы преобразуем генераторы (2.3) к виду:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{G}} &= G + (a_0 - x_0)X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + (a_4 + x_4)X_4,\\
\tilde{\tilde{L}}_1 &= L_1 + b_0X_0 + b_1X_1 + (b_2 + x_3)X_2 + (b_3 - x_2)X_3 + b_4X_4,\\
\tilde{\tilde{L}}_2 &= L_2 + c_0X_0 + (c_1 - x_3)X_1 + c_2X_2 + (c_3 + x_1)X_3 + c_4X_4,\\
\tilde{\tilde{L}}_3 &= L_3 + d_0X_0 + (d_1 + x_2)X_1 + (d_2 - x_1)X_2 + d_3X_3 + d_4X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_1 &= P_1 + e_0X_0 + (e_1 - x_0)X_1 + e_2X_2 + e_3X_3 + (e_4 - 2x_1)X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_2 &= P_2 + g_0X_0 + g_1X_1 + (g_2 - x_0)X_2 + g_3X_3 + (g_4 - 2x_2)X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_3 &= P_3 + h_0X_0 + h_1X_1 + h_2X_2 + (h_3 - x_0)X_3 + (h_4 - 2x_3)X_4
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Выбирая: $x_0 = a_0$, $x_4 = -a_4$, $x_3 = -b_2$, $x_2 = b_3$, $x_1 = -c_3$ получаем:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{G}} &= G + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3,\\
\tilde{\tilde{L}}_1 &= L_1 + b_0X_0 + b_1X_1 + b_4X_4,\\
\tilde{\tilde{L}}_2 &= L_2 + c_0X_0 + c_1'X_1 + c_2X_2 + c_4X_4,\\
\tilde{\tilde{L}}_3 &= L_3 + d_0X_0 + d_1'X_1 + d_2'X_2 + d_3X_3 + d_4X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_1 &= P_1 + e_0X_0 + e_1'X_1 + e_2X_2 + e_3X_3 + e_4'X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_2 &= P_2 + g_0X_0 + g_1X_1 + g_2'X_2 + g_3X_3 + g_4'X_4,\\
\tilde{\tilde{P}}_3 &= P_3 + h_0X_0 + h_1X_1 + h_2X_2 + h_3'X_3 + h_4'X_4
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Поскольку коэффициенты в формулах (2.5) такие же произвольные постоянные как и в (2.3), то штрихи в (2.5) можно опустить.

Переходим к рассмотрению подпространств $N_{1,a}$ $(a = 1, \dots, 4)$ (I.I2).

Подпространство $N_{11} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Так как мы требуем, чтобы генераторы (2.5) образовывали алгебру вместе с подпространством $N_{1,1}$, то, с точностью до эквивалентности, мы можем положить все коэффициенты при X_0, X_1, X_2, X_3 и X_4 равными нулю. Таким образом, в этом случае мы не получим нерасщепляющихся подалгебр. Мы получим расщепляющуюся подалгебру, которая совпадает с $P_{1,1}$.

Подпространство $N_{1,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Требуя, чтобы генераторы (2.5) образовывали алгебру с подпространством $N_{1,2}$ мы, с точностью до эквивалентности, можем положить коэффициенты возле X_1, X_2, X_3 и X_4 равными нулю. Тогда получим:

$$\tilde{\tilde{G}}=G,\ \tilde{\tilde{L}}_1=L_1+b_0X_0,\ \tilde{\tilde{L}}_2=L_2+c_0X_0,\ \tilde{\tilde{L}}_3=L_3+d_0X_0,$$
$$\tilde{\tilde{P}}_1=P_1+e_0X_0,\ \tilde{\tilde{P}}_2=P_2+g_0X_0,\ \tilde{\tilde{P}}_3=P_3+h_0X_0 \qquad (2.4)$$

Используя коммутационные соотношения (2.2) получаем, что $b_0=c_0=d_0=e_0=g_0=h_0=0$. Таким образом, мы не получим нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{1,3}=\{X_4\}$. В этом случае мы можем положить $b_4=c_4=d_4=e_4=g_4=h_4=0$ в генераторах (2.5). Используя затем коммутационные соотношения (2.2) и требуя, чтобы генераторы (2.5) образовывали алгебру с подпространством $N_{1,3}$ получаем, что все коэффициенты равны нулю. Таким образом и в этом случае мы не получим нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{1,4}=\{0\}$. Используя коммутационные соотношения между генераторами (2.5) и требуя, чтобы они (т.е. генераторы (2.5)) образовывали алгебру с подпространством $N_{1,4}$ получаем, что все коэффициенты с необходимостью равны нулю. Значит и в этом случае нет нерасщепляющихся подалгебр.

Таким образом, подалгебра F_1 не дает нерасщепляющихся подалгебр.

Рассуждая аналогично случаю с подалгеброй F_1 убеждаемся в том, что подалгебра F_2 не дает нерасщепляющихся подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$.

Подалгебра F_3 задается базисными элементами G , L_3 ; P_1 , P_2 , P_3 . На основании ее генераторов построим новые:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G} &= G + a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 ,\\
\widetilde{L}_3 &= L_3 + d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 + d_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_1 &= P_1 + e_0 X_0 + e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_2 &= P_2 + g_0 X_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_3 &= P_3 + h_0 X_0 + h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 + h_4 X_4
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Используя $\exp\{x_0 X_0 + x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4\}$ получаем:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G} &= G + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 ,\\
\widetilde{L}_3 &= L_3 + d_0 X_0 + d_3 X_3 + d_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_1 &= P_1 + e_0 X_0 + e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_2 &= P_2 + g_0 X_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 ,\\
\widetilde{P}_3 &= P_3 + h_0 X_0 + h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Рассмотрим отдельно каждое из инвариантных подпространств $N_{3,a}$ $(a = 1, \cdots, 6)$ (I.14). Подпространство $N'_{3,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Поскольку мы требуем, чтобы генераторы (2.6) образовывали алгебру с подпространством $N_{3,1}$, то с точностью до эквивалентности мы можем положить все коэффициенты, стоящие возле X_0 , X_1 , X_2 , X_3 и X_4 равными нулю. Таким образом, мы не получим в этом случае нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{3,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. В этом случае мы можем положить все коэффициенты, стоящие возле X_1, X_2, X_3, X_4 в генераторах (2.6) равными нулю. Тогда получим:

$$\tilde{G}=G\,;\quad \tilde{L}_3=L_3+d_0X_0\,,\quad \tilde{P}_1=P_1+e_0X_0\,,\quad \tilde{P}_2=P_2+g_0X_0\,,\qquad (2.7)$$
$$\tilde{P}_3=P_3+h_0X_0\,.$$

Используя коммутационные соотношения между генераторами (2.7) и требуя, чтобы генераторы (2.7) образовывали алгебру с базисными элементами подпространства $N_{3,2}$ получаем, что коэффициенты d_0, e_0, g_0 и h_0 с необходимостью должны быть равны нулю. Таким образом, в этом случае нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{3,3}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Мы можем положить коэффициенты при X_1, X_2, X_4 равными нулю и вместо генераторов (2.6) получить следующие:

$$\tilde{G}=G+a_3X_3\,,\quad \tilde{L}_3=L_3+d_0X_0+d_3X_3\,,\quad \tilde{P}_1=P_1+e_0X_0+e_3X_3\,,\qquad (2.8)$$
$$\tilde{P}_2=P_2+g_0X_0+g_3X_3\,,\quad \tilde{P}_3=P_3+h_0X_0+h_3X_3\,.$$

Требуя, чтобы генераторы (2.8) образовывали алгебру с базисными элементами подпространства $N_{3,3}$, получаем: $d_0=e_0=e_3=g_0=g_3=h_0=h_3=0$. Обозначая $a\equiv a_3$, $b\equiv d_3$ получаем:

$$G+aX_3\,,\ L_3+bX_3\,,\ P_1\,,\ P_2\,,\ P_3\,,\ X_1\,,X_2\,,X_4\,.$$

Отсюда получаем нерасщепляющиеся подалгебры:

$$\tilde{P}_{3,7}=\{X_1,X_2,X_4,G+aX_3,L_3+bX_3,P_1,P_2,P_3\ (a,b\neq 0)\}\qquad (2.9)$$
$$\tilde{P}_{3,8}=\{X_1,X_2,X_4,G+aX_3,L_3,P_1,P_2,P_3\ (a\neq 0)\}$$
$$\tilde{P}_{3,9}=\{X_1,X_2,X_4,G,L_3+bX_3,P_1,P_2,P_3\ (b\neq 0)\}$$

Подпространство $N_{3,4}=\{X_3, X_4\}$. В этом случае нет нерасщепляющихся подалгебр (все коэффициенты в генераторах (2,6) с необходимостью равны нулю).

Подпространство $N_{3,5}=\{X_4\}$. Рассуждая аналогично случаю с подпространством $N_{3,3}$, получаем следующие представители $\widetilde{P}_{3,k}$ (нерасщепляющиеся подалгебры):

$$\widetilde{P}_{3,10}=\{X_4, G+aX_3, L_3+dX_3, P_1, P_2, P_3 \ (a, d \neq 0)\},$$

$$\widetilde{P}_{3,11}=\{X_4, G+aX_3, L_3, P_1, P_2, P_3 \ (a \neq 0)\}, \qquad (2.10)$$

$$\widetilde{P}_{3,12}=\{X_4, G, L_3+dX_3, P_1, P_2, P_3 \ (d \neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{3,6}=\{0\}$. Требуя, чтобы генераторы (2.6) образовывали алгебру с подпространством $N_{3,6}$, на основании коммутационных соотношений между базисными элементами (2.6) получаем, что все коэффициенты в (2.6) с необходимостью должны быть равны нулю. Значит, здесь нет нерасщепляющихся подалгебр. Отметим, что здесь и в дальнейшем нумерация нерасщепляющихся подалгебр является продолжением нумерации расщепляющихся подалгебр, полученных из того ж самого F_j.

Подалгебра F_4 задается базисными элементами $\{L_3; P_1, P_2\} \oplus P_3$. Вместо генераторов подалгебры F_4 строим новые:

$$\widetilde{L}_3=L_3+d_0X_0+d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3+d_4X_4,$$

$$\widetilde{P}_1=P_1+e_0X_0+e_1X_1+e_2X_2+e_3X_3+e_4X_4, \qquad (2.11)$$

$$\widetilde{P}_2=P_2+g_0X_0+g_1X_1+g_2X_2+g_3X_3+g_4X_4,$$

$$\widetilde{P}_3=P_3+h_0X_0+h_1X_1+h_2X_2+h_3X_3+h_4X_4.$$

Используя $exp\{x_0X_0+x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3+x_4X_4\}$ получаем:

$$\tilde{L}_3 = L_3 + d_0 X_0 + d_3 X_3 + d_4 X_4 ,$$

$$\tilde{P}_1 = P_1 + e_0 X_0 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 ,$$

$$\tilde{P}_2 = P_2 + g_0 X_0 + g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3 + g_4 X_4 , \qquad (2.12)$$

$$\tilde{P}_3 = P_3 + h_0 X_0 + h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 .$$

Рассмотрим отдельно каждое из инвариантных подпространств $N_{4,a}$ (1.15).

Подпространство $N_{4,1} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$. В этом случае нет нерасщепляющихся подалгебр $\tilde{P}_{4,k}$.

Подпространство $N_{4,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. В этом случае мы можем в формулах (2.12) положить коэффициенты, стоящие возле X_1, X_2, X_3, X_4 равными нулю. Имеем:

$$\tilde{L}_3 = L_3 + d_0 X_0 , \ \tilde{P}_1 = P_1 + e_0 X_0 , \ \tilde{P}_2 = P_2 + g_0 X_0 , \ \tilde{P}_3 = P_3 + h_0 X_0 . \qquad (2.13)$$

Требуя, чтобы генераторы (2.13) образовывали алгебру с базисными элементами подпространства $N_{4,2}$ получаем, что коэффициенты e_0 и g_0 с необходимостью должны быть равными нулю. Тогда будем иметь:

$$L_3 + d_0 X_0 , \ P_1 , \ P_2 , \ P_3 + h_0 X_0 , \ X_1 , \ X_2 , \ X_3 , \ X_4 . \qquad (2.14)$$

Так как, алгебра Ли нормализатора для подалгебры $P_{4,2}$ задается базисными элементами G, L_3 ; P_1, P_2, P_3, то мы используем $exp(xG)$ для упрощения генераторов (2.14). Под действием преобразования с $exp(xG)$ базисные элементы (2.14) преобразуются к виду:

$$L_3 + d_0 e^{x} X_0 , \ e^{-x} P_1 , \ e^{-x} P_2 , \ e^{-x} P_3 + h_0 e^{x} X_0 ,$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , e^{-x} X_4$$

Рассмотрим все возможности:

1. Если d_0 и h_0 не равны нулю одновременно, то выбирая $e^x = \frac{e}{d_0}$ $(e = sign\ d_0)$ мы получаем

$$L_3 + eX_0\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ P_3 + \tilde{h}_0 X_0\ ,\ X_1\ ,X_2\ ,X_3\ ,X_4\ . \tag{2.15}$$

В формуле (2.15) $e = \pm 1$, $\tilde{h}_0 \equiv \frac{h_0}{d_0^2}$.

2. Если $h_0 = 0$, $d_0 \neq 0$. Тогда будем иметь следующий результат:

$$L_3 + eX_0\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ P_3\ ,\ X_1\ ,X_2\ ,X_3\ ,X_4\ , \tag{2.16}$$

где $e = sign\ d_0$ и $e = \pm 1$, если $sign\ d_0 = \pm 1$.

3. Если $d_0 = 0$, $h_0 \neq 0$. Имеем

$$L_3\ ,\ P_1\ ,\ P_2\ ,\ P_3 + eX_0\ ,\ X_1\ ,X_2\ ,X_3\ ,X_4\ . \tag{2.17}$$

В формуле (2.17) $e = sign\ h_0$ и равно ± 1 , если $sign\ h_0 = \pm 1$.

Таким образом, имеем следующие представители $\tilde{P}_{4,k}$ сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_{4,7} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 + X_0, P_1, P_2, P_3 + \tilde{h}_0 X_0\ (\tilde{h}_0 \neq 0)\},\\
&\tilde{P}_{4,8} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 - X_0, P_1, P_2, P_3 + \tilde{h}_0 X_0\ (\tilde{h}_0 \neq 0)\},\\
&\tilde{P}_{4,9} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 + X_0, P_1, P_2, P_3\},\\
&\tilde{P}_{4,10} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 - X_0, P_1, P_2, P_3\},\\
&\tilde{P}_{4,11} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3 + X_0\},\\
&\tilde{P}_{4,12} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3 - X_0\}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Подпространство $N_{4,3} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Рассуждая аналогично случаю с подпространством $N_{4,2}$ получаем следующие представители $\tilde{P}_{4,k}$ сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{4,13}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3, \alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,14}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_0+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3, \alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,15}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0\ (\alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,16}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2;\ P_3-X_0\ (\alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,17}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3\ (\alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,18}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3\ (\alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,19}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3+X_0+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq0)\}, \tag{2.19}$$
$$\widetilde{P}_{4,20}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3-X_0+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,21}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3+X_3\}, (\simeq P_{4,3}),$$
$$\widetilde{P}_{4,22}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3-X_3\}\ (\simeq P_{4,3}),$$
$$\widetilde{P}_{4,23}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3+X_0\}$$
$$\widetilde{P}_{4,24}=\{X_1, X_2, X_4, L_3, P_1, P_2, P_3-X_0\},\ \widetilde{P}_{4,25}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+\alpha_3X_3, P_1, P_2, P_3\}.\ (\alpha_3\neq0)$$

Подпространство $N_{4,4}=\{X_3, X_4\}$. Рассуждая аналогично случаю с подпространством $N_{4,2}$ получаем следующие представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{4,26}=\{X_3, X_4, L_3, P_1+X_2, P_2-X_1, P_3\}, \tag{2.20}$$
$$\widetilde{P}_{4,27}=\{X_3, X_4, L_3, P_1-X_2, P_2+X_1, P_3\}.$$

Подпространство $N_{4,5}=\{X_4\}$. Рассуждая аналогично случаю с подпространством $N_{4,2}$ получаем следующие представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{4,28}=\{X_4, L_3+\alpha_3X_3, P_1+X_2, P_2-X_1, P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\alpha_3, \widetilde{h}_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,29}=\{X_4, L_3+\alpha_3X_3, P_1-X_2, P_2+X_1, P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\alpha_3, \widetilde{h}_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,30}=\{X_4, L_3+\alpha_3X_3, P_1+X_2, P_2-X_1, P_3\ (\alpha_3\neq0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,31}=\{X_4, L_3+\alpha_3X_3, P_1-X_2, P_2+X_1, P_3\ (\alpha_3\neq0)\},$$

$$\widetilde{P}_{4,32}=\{X_4,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3\ (d_3\neq 0)\},$$
$$P_{4,33}=\{X_4,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3\ (d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,34}=\{X_4,\ L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,35}=\{X_4,\ L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq 0)\}, \qquad (2.21)$$
$$\widetilde{P}_{4,36}=\{X_4,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3\}\ (\simeq P_{4,5}),$$
$$\widetilde{P}_{4,37}=\{X_4,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3\}\ (\simeq P_{4,5}),$$
$$\widetilde{P}_{4,38}=\{X_4,\ L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3\},$$
$$\widetilde{P}_{4,39}=\{X_4,\ L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3\},$$
$$\widetilde{P}_{4,40}=\{X_4,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (d_3\neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{4,6}=\{0\}$. В этом случае имеем следующие представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{4,41}=\{L_3+X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,42}=\{L_3-X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3+\widetilde{h}_3X_3\ (\widetilde{h}_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{4,43}=\{L_3+X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3\},$$
$$\widetilde{P}_{4,44}=\{L_3-X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3\}, \qquad (2.22)$$
$$\widetilde{P}_{4,45}=\{L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3\},$$
$$\widetilde{P}_{4,46}=\{L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3\},$$

Отметим, что найденные подалгебры (2.22) изоморфны подалгебре $P_{4,6}$, найденной в предыдущей главе.

Подалгебра F_5 задается базисными элементами $\{;L_1,\ L_2,\ L_3\}\oplus G$. Используя метод, предложенный в § I данной главы, можно убедиться в том, что в этом случае нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_6 задается базисными элементами G , P_1 , P_2 , P_3 . Вместо генераторов подалгебры F_6 построим новые

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= G + a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4\,, \\
\tilde{P}_1 &= P_1 + e_0X_0 + e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3 + e_4X_4\,, \\
\tilde{P}_2 &= P_2 + g_0X_0 + g_1X_1 + g_2X_2 + g_3X_3 + g_4X_4\,, \\
\tilde{P}_3 &= P_3 + h_0X_0 + h_1X_1 + h_2X_2 + h_3X_3 + h_4X_4\,.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Используя $exp\{x_0X_0 + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4\}$ получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= G + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3\,, \\
\tilde{P}_1 &= P_1 + e_0X_0 + e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3\,, \\
\tilde{P}_2 &= P_2 + g_0X_0 + g_1X_1 + g_2X_2 + g_3X_3\,, \\
\tilde{P}_3 &= P_3 + h_0X_0 + h_1X_1 + h_2X_2 + h_3X_3\,.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Рассмотрим теперь отдельно каждое из подпространств $N_{6,a}$ $(a=1,\cdots,6)$ (I.18). В случае подпространств $N_{6,1}$, $N_{6,2}$ и $N_{6,6}$ мы не получим нерасщепляющихся подалгебр. Рассмотрим подпространство $N_{6,3}=\{X_1, X_2, X_4\}$. В этом случае мы можем положить в формулах (2.24) коэффициенты, стоящие возле X_1 , X_2 и X_4 равными нулю. Вследствие этого будем иметь:

$$\tilde{G} = G + a_3X_3\,, \quad \tilde{P}_1 = P_1 + e_0X_0 + e_3X_3\,,$$
$$\tilde{P}_2 = P_2 + g_0X_0 + g_3X_3\,, \quad \tilde{P}_3 = P_3 + h_0X_0 + h_3X_3\,. \tag{2.25}$$

Требуя, чтобы генераторы (2.25) образовывали алгебру с базисными элементами подпространства $N_{6,3}$, получаем, что коэффициенты e_0 , e_3 , g_0 , g_3 , h_0 и h_3 с необходимостью должны быть равными нулю. Тогда имеем

$$G + a_3X_3\,,\ P_1\,,\ P_2\,,\ P_3\,,\ X_1\,,\ X_2\,,\ X_4\quad (a_3 \neq 0)\,. \tag{2.26}$$

Так как нормализатор не дает возможность далее упростить операторы (2.26), то мы имеем следующую нерасщепляющуюся подалгебру:

$$\widetilde{P}_{6,7} = \{ X_1, X_2, X_4, G + aX_3, P_1, P_2, P_3 \ (a \equiv a_3 \neq 0) \}. \tag{2.27}$$

Подпространство $N_{6,4} = \{X_1, X_4\}$. В этом случае мы можем в формуле (2.24) положить равными нулю коэффициенты a_1, e_1, g_1 и h_1. Вследствие этого будем иметь:

$$\widetilde{G} = G + a_2 X_2 + a_3 X_3, \quad \widetilde{P}_1 = P_1 + e_0 X_0 + e_1 X_1 + e_3 X_3,$$
$$\widetilde{P}_2 = P_2 + g_0 X_0 + g_2 X_2 + g_3 X_3, \quad \widetilde{P}_3 = P_3 + h_0 X_0 + h_2 X_2 + h_3 X_3. \tag{2.28}$$

Требуя, чтобы генераторы (2.28) образовывали алгебру с $N_{6,4}$, получаем, что коэффициенты e_0, e_2, e_3, g_0, g_2, g_3, h_0, h_2 и h_3 с необходимостью равны нулю. Учитывая это, имеем

$$G + a_2 X_2 + a_3 X_3, \ P_1, \ P_2, \ P_3, \ X_1, \ X_4 \tag{2.29}$$

Используем тот факт, что нормализатор содержит $exp(x_1 L_1)$, для упрощения $\widetilde{G}$. Имеем:

$$exp(x_1 L_1)\widetilde{G}\, exp(-x_1 L_1) = G + (a_2 \cos x_1 - a_3 \sin x_1) X_2 + (a_3 \cos x_1 + a_2 \sin x_1) X_3.$$

Выбирая $tg\, x_1 = -\dfrac{a_3}{a_2}$ получаем:

$$exp(x_1 L_1)\widetilde{G}\, exp(-x_1 L_1) = G + \widetilde{a}_2 X_2 \quad \text{где} \quad \widetilde{a}_2 \equiv (a_2^2 + a_3^2)^{1/2} \tag{2.30}$$

Таким образом, имеем нерасщепляющуюся подалгебру, которая задается базисными элементами:

$$P_{6,8} = \{ X_1, X_4, G + \widetilde{a}_2 X_2, P_1, P_2, P_3 \ (\widetilde{a}_2 > 0) \}. \tag{2.31}$$

Подпространство $N_{6,5}=\{X_4\}$. В этом случае имеем нерасщепляющуюся подалгебру, которая задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{6,9}=\{X_4,\ G+aX_2,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (a>0)\}. \tag{2.32}$$

Подалгебра F_7 задается базисными элементами L_3+bG; P_1, P_2, P_3 $(b>0)$. Применяя метод, выписанный в § I настоящей главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{7,1}$, $N_{7,2}$, $N_{7,4}$ и $N_{7,6}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Рассмотрим остальные инвариантные подпространства $N_{7,a}$ $(a=1,\dots,6)$ (I.19).

Подпространство $N_{7,3}=\{X_1,X_2,X_4\}$. В этом случае имеем одну подалгебру $\widetilde{P}_{7,7}$, которая задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{7,7}=\{X_1,X_2,X_4,\ L_3+bG+kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (k\neq 0)\}. \tag{2.33}$$

Подпространство $N_{7,5}=\{X_4\}$. Нерасщепляющаяся подалгебра $\widetilde{P}_{7,8}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{7,8}=\{X_4,\ L_3+bG+kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (k\neq 0)\}. \tag{2.34}$$

Подалгебра F_8 задается базисными элементами G, L_3; P_1, P_2. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что подпространства $N_{8,1}$, $N_{8,3}$, $N_{8,5}$ и $N_{8,6}$ не дают нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{8,2}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\}$. В этом случае имеем следующие представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{8,9}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,P_2\ (a_3,d_3\neq 0)\}(\simeq P_{8,2}),\\
&\widetilde{P}_{8,10}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)\}(\simeq P_{8,2}),\\
&\widetilde{P}_{8,11}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{8,2}).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Подпространство $N_{8,4}=\{X_1,X_2,X_4\}$. В этом случае имеем следующие представители сопряженных классов непрерывных подалгебр:

$$\widetilde{P}_{8,12}=\{\quad,X_1,X_2,X_4,G+a_3X_3,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (a_3,d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,4}),$$
$$\widetilde{P}_{8,13}=\{X_1,X_2,X_4,G+a_3X_3,L_3,P_1,P_2\ (a_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,4}), \qquad (2.36)$$
$$\widetilde{P}_{8,14}=\{X_1,X_2,X_4,G,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,4}).$$

Подпространство $N_{8,7}=\{X_4\}$. Имеем представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{8,15}=\{X_4,G+a_3X_3,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (a_3,d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,7}),$$
$$\widetilde{P}_{8,16}=\{X_4,G+a_3X_3,L_3,P_1,P_2\ (a_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,7}), \qquad (2.37)$$
$$\widetilde{P}_{8,17}=\{X_4,G,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,7}).$$

Подпространство $N_{8,8}=\{0\}$. Представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{8,18}=\{G+a_3X_3,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (a_3,d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,8}),$$
$$\widetilde{P}_{8,19}=\{G+a_3X_3,L_3,P_1,P_2\ (a_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,8}), \qquad (2.38)$$
$$\widetilde{P}_{8,20}=\{G,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{8,8}).$$

Подалгебра F_9 задается базисными элементами P_1, P_2, P_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{9,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты полученные при рассмотрении других инвариантных подпространств $N_{9,a}$ $(a=1,2,\dots,6)$ (I.21).

Подпространство $N_{9,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Имеем:

$$P_{9,7}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,P_1+e_0X_0,P_2+g_0X_0,P_3+h_0X_0\}, \qquad (2.39)$$

Подпространство $N_{9,3}=\{X_1, X_2, X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{9,8}=\{X_1, X_2, X_4, P_1+e_3X_3, P_2+g_3X_3, P_3+h_0X_0+h_3X_3\}. \tag{2.40}$$

Подпространство $N_{9,4}=\{X_1, X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{9,9}=\{X_1, X_4, P_1+e_2X_2+e_3X_3, P_2+g_2X_2+g_3X_3, P_3+h_2X_2+h_3X_3\}.$$

Подпространство $N_{9,5}=\{X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{9,10}=\{X_4, P_1+e_2X_2+e_3X_3, P_2+g_1X_1+g_2X_2+g_3X_3, P_3+h_1X_1+h_2X_2+h_3X_3\}. \tag{2.41}$$

Подпространство $N_{9,6}=\{0\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{9,11}=\{P_1+aX_2+bX_3,\ P_2+aX_1+g_2X_2+cX_3, \tag{2.42}$$
$$P_3+bX_1+cX_2+h_3X_3\}(\simeq P_{9,6}).$$

Подалгебра F_{10} задается базисными элементами $\{G; P_3\}\oplus L_3$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{10,1}$, $N_{10,2}$, $N_{10,4}$, $N_{10,5}$, $N_{10,6}$ и $N_{10,8}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты, полученные при рассмотрении других инвариантных подпространств $N_{10,a}$ $(a=1,\cdots,8)$ (I.22).

Подпространство $N_{10,3}=\{X_1, X_2, X_4\}$. Представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{10,9}=\{X_1, X_2, X_4, G+a_3X_3, L_3+d_3X_3; P_3\ (a_3, d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{10,10}=\{X_1, X_2, X_4, G+a_3X_3, L_3, P_3\ (a_3\neq 0)\}, \tag{2.43}$$
$$\widetilde{P}_{10,11}=\{X_1, X_2, X_4, G, L_3+d_3X_3, P_3\ (d_3\neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{10,7}=\{X_4\}$. Представители сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр:

$$\widetilde{P}_{10,12}=\{X_4, G+a_3X_3, L_3+d_3X_3, P_3\ (a_3, d_3\neq 0)\}, \tag{2.44}$$

$$\widetilde{P}_{10,13} = \{X_4, G + a_3 X_3, L_3, P_3 \ (a_3 \neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{10,14} = \{X_4, G, L_3 + d_3 X_3, P_3 \ (d_3 \neq 0)\}.$$

Подалгебра F_{11} задается базисными элементами G ; P_1 , P_2 .

Используя метод, описанный в § I данной главы убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{11,1}$, $N_{11,2}$ и $N_{11,11}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств $N_{11,a}$ $(a = 1, \cdots, 12)$ (I.23).

Подпространство $N_{11,3} = \{X_1, X_2, X_0, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,13}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,13} = \{X_0, X_1, X_2, X_4, G + a_3 X_3, P_1, P_2 \ (a_3 \neq 0)\} \ (\simeq P_{11,3}). \tag{2.45}$$

Подпространство $N_{11,4} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,14}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,14} = \{X_1, X_2, X_4, G + a_3 X_3, P_1, P_2 \ (a_3 \neq 0)\} \ (\simeq P_{11,4}). \tag{2.46}$$

Подпространство $N_{11,5} = \{X_1, X_3, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,15}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,15} = \{X_1, X_3, X_4, G + a_2 X_2, P_1, P_2 \ (a_2 > 0)\}. \tag{2.47}$$

Подпространство $N_{11,6} = \{X_1, X_4, X_3 + b X_2 \ (b \neq 0)\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,16}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,16} = \{X_1, X_4, X_3 + b X_2, G + \widetilde{a}_2 X_2, P_1, P_2 \ (\widetilde{a}_2 \neq 0)\}. \tag{2.47'}$$

Подпространство $N_{11,7} = \{X_1, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{11,k}$ $(k = 17, 18, 19)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned} &\widetilde{P}_{11,17} = \{X_1, X_4, G + a_2 X_2 + a_3 X_3, P_1, P_2 \ (a_2 > 0, a_3 \neq 0)\}, \\ &\widetilde{P}_{11,18} = \{X_1, X_4, G + a_2 X_2, P_1, P_2 \ (a_2 > 0)\}, \\ &\widetilde{P}_{11,19} = \{X_1, X_4, G + a_3 X_3, P_1, P_2 \ (a_3 \neq 0)\}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Подпространство $N_{11,8}=\{X_3,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,20}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,20}=\{X_3,X_4,G+a_1X_1,P_1,P_2\ (a_1>0)\}. \tag{2.49}$$

Подпространство $N_{11,9}=\{X_4,X_3+bX_2\ (b\neq 0)\}$. Представители $\widetilde{P}_{11,\ell}\ (\ell=21,22,23)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,21}=\{X_4,X_3+bX_2,G+a_1X_1+\widehat{a}_2X_2,P_1,P_2\ (a_1,\widehat{a}_2\neq 0)\}, \tag{2.50}$$

$$\widetilde{P}_{11,22}=\{X_4,X_3+bX_2,G+a_1X_1,P_1,P_2\ (a_1\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{11,23}=\{X_4,X_3+bX_2,G+\widehat{a}_2X_2,P_1,P_2\ (\widehat{a}_2\neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{11,10}=\{X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{11,\ell}\ (\ell=24,25,26)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,24}=\{X_4,G+a_1X_1+a_3X_3,P_1,P_2\ (a_1>0,a_3\neq 0)\}, \tag{2.51}$$
$$\widetilde{P}_{11,25}=\{X_4,G+a_1X_1,P_1,P_2\ (a_1>0)\},$$
$$\widetilde{P}_{11,26}=\{X_4,G+a_3X_3,P_1,P_2\ (a_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{11,10}).$$

Подпространство $N_{11,12}=\{0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{11,27}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{11,27}=\{G+a_3X_3,P_1,P_2\ (a_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{11,12}). \tag{2.52}$$

Подалгебра F_{12} задается базисными элементами L_3; P_1, P_2. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{12,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств $N_{12,a}\ (a=1,\dots,8)$ (I.24).

Подпространство $N_{12,2}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{12,9}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,9}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{12,2}). \tag{2.53}$$

Подпространство $N_{12,3}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Представители

$\widetilde{P}_{12,k}\ (k=10,11)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,10}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,L_3+X_0,P_1,P_2\},\qquad (2.54)$$
$$\widetilde{P}_{12,11}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,L_3-X_0,P_1,P_2\}.$$

Подпространство $N_{12,4}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{12,l}\ (l=12,\dots,16)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,12}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+d_3X_3+X_0,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{12,13}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+d_3X_3-X_0,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{12,14}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{12,4}),\qquad (2.55)$$
$$\widetilde{P}_{12,15}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+X_0,P_1,P_2\},$$
$$\widetilde{P}_{12,16}=\{X_1,X_2,X_4,L_3-X_0,P_1,P_2\}.$$

Подпространство $N_{12,5}=\{X_3,X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{12,l}$ $l=(17,18)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,17}=\{X_3,X_4,L_3,P_1+X_2,P_2-X_1\},\qquad (2.56)$$
$$\widetilde{P}_{12,18}=\{X_3,X_4,L_3,P_1-X_2,P_2+X_1\}$$

Подпространство $N_{12,6}=\{X_3\}$. Представители $\widetilde{P}_{12,m}$ $(m=19,20)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,19}=\{X_3,L_3+X_4,P_1,P_2\}(\simeq P_{12,6}),\qquad (2.57)$$
$$\widetilde{P}_{12,20}=\{X_3,L_3-X_4,P_1,P_2\}(\simeq P_{12,6})$$

Подпространство $N_{12,7}=\{X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{12,l}$ $(l=21,\dots,25)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,21}=\{X_4,L_3+d_3X_3,P_1+X_2,P_2-X_1\ (d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{12,22}=\{X_4,L_3+d_3X_3,P_1-X_2,P_2+X_1\ (d_3\neq 0)\},$$
$$\widetilde{P}_{12,23}=\{X_4,L_3+d_3X_3,P_1,P_2\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{12,7}),\qquad (2.58)$$
$$\widetilde{P}_{12,24}=\{X_4,L_3,P_1+X_2,P_2-X_1\},$$
$$\widetilde{P}_{12,25}=\{X_4,L_3,P_1-X_2,P_2+X_1\}$$

Подпространство $N_{12,8}=\{0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{12,26}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{12,26}=\{L_3+\alpha_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (\alpha_3\neq0)\}\ (\simeq P_{12,8}). \tag{2.59}$$

Подалгебра F_{13} задается базисными элементами $L_3+\varepsilon P_3$; $P_1, P_2\ (\varepsilon=\pm1)$. Используя метод, приведенный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{13,1}$ мы не получим нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств $N_{13,a}\ (a=2,\dots,6)$ (I.25).

Подпространство $N_{13,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{13,7}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{13,7}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0,\ P_1,P_2\ (\alpha_0\neq0)\}. \tag{2.60}$$

Подпространство $N_{13,3}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{13,8}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{13,8}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0,\ P_1,\ P_2\ (\alpha_0\neq0)\}. \tag{2.61}$$

Подпространство $N_{13,4}=\{X_3,X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{13,k}$ $(k=9,10,11)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{13,9}=\{X_3,X_4,L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1-mX_2,\ P_2+mX_1+kX_2\ (m,k\neq0)\},\\
&\widetilde{P}_{13,10}=\{X_3,X_4,L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1,\ P_2+kX_2\ (k\neq0)\}(\simeq P_{13,4})\\
&\widetilde{P}_{13,11}=\{X_3,X_4,L_3+\varepsilon P_3,\ P_1-mX_2,\ P_2+mX_1\ (m\neq0)\}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Подпространство $N_{13,5}=\{X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{13,\ell}$ $(\ell=12,13,14)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{13,12}=\{X_4,L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1-mX_2,\ P_2+mX_1+kX_2\ (m,k\neq0)\},\\
&\widetilde{P}_{13,13}=\{X_4,L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1,\ P_2+kX_2\ (k\neq0)\}(\simeq P_{13,5}),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\tilde{P}_{13,14} = \{X_4,\ L_3 + \varepsilon P_3,\ P_1 - mX_2,\ P_2 + mX_1\ \ (m \neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{13,6} = \{0\}$. Представитель $\tilde{P}_{13,15}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{13,15} = \{L_3 + \varepsilon P_3,\ P_1 + kX_1,\ P_2 + kX_2\ \ (k \neq 0)\}\ (\simeq P_{13,6}). \qquad (2.64)$$

Подалгебра F_{14} задается базисными элементами $L_3 + cG$; $P_1, P_2\ (c > 0)$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{14,1}$, $N_{14,3}$, $N_{14,5}$ и $N_{14,6}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств $N_{14,a}\ (a = 2, 4, 7, 8)$ (I.26).

Подпространство $N_{14,2} = \{X_0, X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{14,9}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{14,9} = \{X_0, X_1, X_2, X_4,\ L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2\ \ (b \neq 0)\}\ (\simeq P_{14,2}). \qquad (2.65)$$

Подпространство $N_{14,4} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{14,10}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{14,10} = \{X_1, X_2, X_4,\ L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b \neq 0)\}\ (\simeq P_{14,4}). \qquad (2.66)$$

Подпространство $N_{14,7} = \{X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{14,11}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{14,11} = \{X_4,\ L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b \neq 0)\}\ (\simeq P_{14,7}). \qquad (2.67)$$

Подпространство $N_{14,8} = \{0\}$. Представитель $\tilde{P}_{14,12}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{14,12} = \{L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2\ \ (b \neq 0)\}\ (\simeq P_{14,8}). \qquad (2.68)$$

Подалгебра F_{15} задается базисными элементами $\{\ ;\ L_1,$

L_2, L_3.

Используя метод, описанный в § I настоящей главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{15,a}$ $(a=1,\dots,12)$ (I.29) нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_{16} задается базисными элементами P_1, P_2. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{16,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты полученные при рассмотрении инвариантных подпространств $N_{16,a}$ $(a=2,\dots,12)$ (I.30).

Подпространство $N_{16,2}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,13}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,P_1+X_0,P_2\}. \tag{2.69}$$

Подпространство $N_{16,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,14}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,P_1+X_3,P_2\}\ (\simeq P_{16,3}). \tag{2.70}$$

Подпространство $N_{16,4}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Имеем

$$\widetilde{P}_{16,15}=\{X_1,X_2,X_4,P_1+e_0X_0+e_3X_3,P_2+g_0X_0+g_3X_3\}. \tag{2.71}$$

Подпространство $N_{16,5}=\{X_1,X_3,X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,16}=\{X_1,X_3,X_4,P_1+e_2X_2,P_2+g_0X_0+g_2X_2\}.$$

Подпространство $N_{16,6}=\{X_4,X_1,X_3+bX_2\ (b\neq 0)\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,17}=\{X_4,X_1,X_3+bX_2,P_1+e_2X_2,P_2+g_0X_0+g_2X_2\}. \tag{2.72}$$

Подпространство $N_{16,7}=\{X_1,X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,18}=\{X_1,X_4,P_1+e_2X_2+e_3X_3,P_2+g_0X_0+g_2X_2+g_3X_3\}. \tag{2.73}$$

Подпространство $N_{16,8}=\{X_3,X_4\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,19}=\{X_3,X_4,P_1+e_2X_2,P_2+g_1X_1+g_2X_2\}. \tag{2.74}$$

Подпространство $N_{16,9} = \{X_4, X_3 + b X_2 \ (b \neq 0)\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,20} = \{X_4, X_3 + b X_2, P_1 + e_2 X_2, P_2 + g_1 X_1 + g_2 X_2\}. \tag{2.75}$$

Подпространство $N_{16,10} = \{X_3\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,21} = \{X_3, P_1, P_2 + X_2\} \ (\simeq P_{16,10}). \tag{2.76}$$

Подпространство $N_{16,11} = \{X_4\}$. Имеем

$$\widetilde{P}_{16,22} = \{X_4, P_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3, P_2 + g_1 X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3\}. \tag{2.77}$$

Подпространство $N_{16,12} = \{0\}$. Имеем:

$$\widetilde{P}_{16,23} = \{P_1 + e X_2 + e_3 X_3, P_2 + e X_1 + g_2 X_2 + g_3 X_3\} \ (\simeq P_{16,12}). \tag{2.78}$$

Подалгебра F_{17} задается базисными элементами L_3, P_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{17,1}$ и $N_{17,4}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты полученные при рассмотрении остальных инвариантных подпространств $N_{17,a} \ (a = 2, 3, 5, \dots, 8)$ (I.3I).

Подпространство $N_{17,2} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{17,a}$ $(a = 9, \dots, 14)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{17,9} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 + X_0, P_3 + h X_0 \ (h \neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{17,10} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 - X_0, P_3 + h X_0 \ (h \neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{17,11} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 + X_0, P_3\},\\
&\widetilde{P}_{17,12} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 - X_0, P_3\},\\
&\widetilde{P}_{17,13} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{17,2}),\\
&\widetilde{P}_{17,14} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, L_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{17,2}).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Подпространство $N_{17,3} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{17,a}$ $(a = 15, \dots, 19)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{17,15} = \{X_1, X_2, X_4, L_3 + d X_3, P_3 + X_0 \ (d \neq 0)\},$$

$$\tilde{P}_{17,16} = \{X_1, X_2, X_4, L_3 + dX_3, P_3 - X_0 \ (d \neq 0)\},$$
$$\tilde{P}_{17,17} = \{X_1, X_2, X_4, L_3 + dX_3, P_3\}, \qquad (2.80)$$
$$\tilde{P}_{17,18} = \{X_1, X_2, X_4, L_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{17,3}),$$
$$\tilde{P}_{17,19} = \{X_1, X_2, X_4, L_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{17,3}).$$

Подпространство $N_{17,5} = \{X_1, X_2\}$. Представители $\tilde{P}_{17,\ell}$ $(\ell = 20, \cdots, 25)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{17,20} = \{X_1, X_2, L_3 + X_4, P_3 + hX_0 \ (h \neq 0)\} \ (\simeq P_{17,5}),$$
$$\tilde{P}_{17,21} = \{X_1, X_2, L_3 - X_4, P_3 + hX_0 \ (h \neq 0)\} \ (\simeq P_{17,5}),$$
$$\tilde{P}_{17,22} = \{X_1, X_2, L_3 + X_4, P_3\} \ (\simeq P_{17,5}), \qquad (2.81)$$
$$\tilde{P}_{17,23} = \{X_1, X_2, L_3 - X_4, P_3\} \ (\simeq P_{17,5}),$$
$$\tilde{P}_{17,24} = \{X_1, X_2, L_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{17,5}),$$
$$\tilde{P}_{17,25} = \{X_1, X_2, L_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{17,5}).$$

Подпространство $N_{17,6} = \{X_3, X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{17,m}$ $(m = 26, \cdots, 31)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{17,26} = \{X_3, X_4, L_3 + X_0, P_3 + hX_0 \ (h \neq 0)\},$$
$$\tilde{P}_{17,27} = \{X_3, X_4, L_3 - X_0, P_3 + hX_0 \ (h \neq 0)\}, \qquad (2.82)$$
$$\tilde{P}_{17,28} = \{X_3, X_4, L_3 + X_0, P_3\},$$
$$\tilde{P}_{17,29} = \{X_3, X_4, L_3 - X_0, P_3\},$$
$$\tilde{P}_{17,30} = \{X_3, X_4, L_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{17,6}),$$
$$\tilde{P}_{17,31} = \{X_3, X_4, L_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{17,6}).$$

Подпространство $N_{17,7} = \{X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{17,\ell}$ $(\ell = 32, \cdots, 36)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{17,32} = \{X_4, L_3 + dX_3, P_3 + X_0\},$$
$$\tilde{P}_{17,33} = \{X_4, L_3 + dX_3, P_3 - X_0\}, \qquad (2.83)$$
$$\tilde{P}_{17,34} = \{X_4, L_3 + dX_3, P_3\},$$
$$\tilde{P}_{17,35} = \{X_4, L_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{17,7}),$$
$$\tilde{P}_{17,36} = \{X_4, L_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{17,7}).$$

Подпространство $N_{17,8}=\{0\}$. Представители $\widetilde{P}_{17,k}$ $(k=37,\dots,42)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{17,37}=\{L_3+X_4,\ P_3+hX_0\ (h\neq 0)\}(\simeq P_{17,8}),\\
&\widetilde{P}_{17,38}=\{L_3-X_4,\ P_3+hX_0\ (h\neq 0)\}(\simeq P_{17,8}),\\
&\widetilde{P}_{17,39}=\{L_3+X_4,\ P_3\}(\simeq P_{17,8}),\\
&\widetilde{P}_{17,40}=\{L_3-X_4,\ P_3\}(\simeq P_{17,8}),\\
&\widetilde{P}_{17,41}=\{L_3,\ P_3+X_0\}(\simeq P_{17,8}),\\
&\widetilde{P}_{17,42}=\{L_3,\ P_3-X_0\}(\simeq P_{17,8}).
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

Подалгебра F_{18} задается базисными элементами G, L_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{18,1}$, $N_{18,2}$, $N_{18,3}$, $N_{18,5}$, $N_{18,7}$, $N_{18,9}$, $N_{18,10}$ и $N_{18,14}$ нет нерасщепляющихся подалгебр. Выпишем результаты полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств из $N_{18,a}\ (a=1,\dots,16)$ (I.32).

Подпространство $N_{18,4}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{18,k}$ $(k=17,18,19)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{18,17}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G+aX_3,\ L_3+dX_3\ (a\neq 0,\ d\neq 0)\}(\simeq P_{18,4}),\\
&\widetilde{P}_{18,18}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G+aX_3,\ L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,4}),\\
&\widetilde{P}_{18,19}=\{X_0,X_1,X_2,X_4,\ G,\ L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,4}).
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

Подпространство $N_{18,6}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{18,\ell}$ $(\ell=20,21,22)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{18,20}=\{X_1,X_2,X_4,\ G+aX_3,\ L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,6}),\\
&\widetilde{P}_{18,21}=\{X_1,X_2,X_4,\ G+aX_3,\ L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,6}),\\
&\widetilde{P}_{18,22}=\{X_1,X_2,X_4,\ G,\ L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,6}).
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

Подпространство $N_{18,8}=\{X_0,X_1,X_2\}$. Представители $\widetilde{P}_{18,m}$ $(m=23,24,25)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,23}=\{X_0, X_1, X_2, G+aX_3, L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,8}),$$
$$\tilde{P}_{18,24}=\{X_0, X_1, X_2, G+aX_3, L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,8}), \tag{2.87}$$
$$\tilde{P}_{18,25}=\{X_0, X_1, X_2, G, L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,8}).$$

Подпространство $N_{18,11}=\{X_0, X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{18,\ell}$ $(\ell=26,27,28)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,26}=\{X_0, X_4, G+aX_3, L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,11}), \tag{2.88}$$
$$\tilde{P}_{18,27}=\{X_0, X_4, G+aX_3, L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq \tilde{P}_{18,11}),$$
$$\tilde{P}_{18,28}=\{X_0, X_4, G, L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,11}).$$

Подпространство $N_{18,12}=\{X_1, X_2\}$. Представители $\tilde{P}_{18,\ell}$ $(\ell=29,30,31)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,29}=\{X_1, X_2, G+aX_3, L_3+dX_3\ (a\neq 0, d\neq 0)\}(\simeq P_{18,12}),$$
$$\tilde{P}_{18,30}=\{X_1, X_2, G+aX_3, L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,12}), \tag{2.89}$$
$$\tilde{P}_{18,31}=\{X_1, X_2, G, L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,12}).$$

Подпространство $N_{18,13}=\{X_0\}$. Представители $\tilde{P}_{18,k}$ $(k=32,33,34)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,32}=\{X_0, G+aX_3, L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,13}),$$
$$\tilde{P}_{18,33}=\{X_0, G+aX_3, L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,13}), \tag{2.90}$$
$$\tilde{P}_{18,34}=\{X_0, G, L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,13}).$$

Подпространство $N_{18,15}=\{X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{18,\ell}$ $(\ell=35,36,37)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,35}=\{X_4, G+aX_3, L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,15}),$$
$$\tilde{P}_{18,36}=\{X_4, G+aX_3, L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,15}), \tag{2.91}$$
$$\tilde{P}_{18,37}=\{X_4, G, L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,15}).$$

Подпространство $N_{18,16}=\{0\}$. Представители $\tilde{P}_{18,m}$ $(m=38,39,40)$. задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{18,38}=\{G+aX_3,\ L_3+dX_3\ (a,d\neq 0)\}(\simeq P_{18,16}), \tag{2.92}$$
$$\tilde{P}_{18,39}=\{G+aX_3,\ L_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{18,16}),$$
$$\tilde{P}_{18,40}=\{G,\ L_3+dX_3\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{18,16}).$$

Подалгебра F_{19} задается базисными элементами G , P_3 . Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{19,1}$, $N_{19,2}$ и $N_{19,10}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств из $N_{19,a}\ (a=1,\cdots,14)$ (I.33).

Подпространство $N_{19,3}=\{X_0,X_1,X_3,X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{19,15}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,15}=\{X_0,X_1,X_3,X_4,G+aX_2,\ P_3\ (a>0)\}(\simeq P_{19,3}). \tag{2.93}$$

Подпространство $N_{19,4}=\{X_0,X_3,X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{19,16}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,16}=\{X_0,X_3,X_4,G+aX_1,\ P_3\ (a\neq 0)\}(\simeq P_{19,4}). \tag{2.94}$$

Подпространство $N_{19,5}=\{X_1,X_3,X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{19,17}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,17}=\{X_1,X_3,X_4,G+aX_2,\ P_3\ (a>0)\}(\simeq P_{19,5}). \tag{2.95}$$

Подпространство $N_{19,6}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{19,18}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,18}=\{X_1,X_2,X_4,\ G+aX_3,\ P_3\ (a\neq 0)\}.(\simeq \tag{2.96}$$

Подпространство $N_{19,7}=\{X_2,X_4,X_1+bX_3\,(b\neq 0)\}$. Представитель $\widetilde{P}_{19,19}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{19,19}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3, G+\tilde{a}_3X_3, P_3 \ (b,\tilde{a}_3\neq 0)\}, \tag{2.97}$$

Подпространство $N_{19,8}=\{X_1, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{19,k}$ $(k=20,21,22)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{19,20}=\{X_1, X_4, G+a_2X_2+a_3X_3, P_3 \ (a_2>0, a_3\neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{19,21}=\{X_1, X_4, G+a_2X_2, P_3 \ (a_2>0)\} (\simeq P_{19,8}),\\
&\widetilde{P}_{19,22}=\{X_1, X_4, G+a_3X_3, P_3 \ (a_3\neq 0)\}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Подпространство $N_{19,9}=\{X_3, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{19,23}$ задается базисными элементами

$$\widetilde{P}_{19,23}=\{X_3, X_4, G+aX_1, P_3 \ (a\neq 0)\} (\simeq P_{19,9}) \tag{2.99}$$

Подпространство $N_{19,11}=\{X_4, X_2+bX_3 \ (b\neq 0)\}$. Представители $\widetilde{P}_{19,e}$ $(e=24,25,26)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{19,24}=\{X_4, X_2+bX_3, G+a_1X_1+\tilde{a}_3X_3, P_3 \ (a_1, a_3\neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{19,25}=\{X_4, X_2+bX_3, G+a_1X_1, P_3 \ (a_1\neq 0)\} (\simeq P_{19,11}),\\
&\widetilde{P}_{19,26}=\{X_4, X_2+bX_3, G+\tilde{a}_3X_3, P_3 \ (\tilde{a}_3\neq 0)\}.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Подпространство $N_{19,12}=\{X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{19,k}$ $(k=27,28,29)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{19,27}=\{X_4, G+a_1X_1+a_3X_3, P_3 \ (a_1\neq 0, a_3\neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{19,28}=\{X_4, G+a_1X_1, P_3 \ (a_1\neq 0)\} (\simeq P_{19,12}),\\
&\widetilde{P}_{19,29}=\{X_4, G+a_3X_3, P_3 \ (a_3\neq 0)\}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Подпространство $N_{19,13}=\{X_1\}$. Представитель $\widetilde{P}_{19,30}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,30} = \{X_1,\ G + a_2 X_2,\ P_3\ (a_2 > 0)\}\ (\simeq P_{19,13}). \tag{2.102}$$

Подпространство $N_{19,14} = \{0\}$. Представитель $P_{19,31}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{19,31} = \{G + a X_1,\ P_3\ (a \neq 0)\}\ (\simeq P_{19,14}) \tag{2.103}$$

Подалгебра F_{20} задается базисными элементами $L_3 + \alpha G$: P_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{20,1}$, $N_{20,2}$, $N_{20,4}$, $N_{20,5}$, $N_{20,6}$ и $N_{20,8}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств из $N_{20,a}$ $(a = 1, \cdots, 8)$ (I.34).

Подпространство $N_{20,3} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{20,9}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{20,9} = \{X_1, X_2, X_4,\ L_3 + \alpha G + \alpha_3 X_3,\ P_3\ (\alpha_3 \neq 0)\}, \tag{2.104}$$

Подпространство $N_{20,7} = \{X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{20,10}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{20,10} = \{X_4,\ L_3 + \alpha G + \alpha_3 X_3,\ P_3\ (\alpha_3 \neq 0)\}. \tag{2.105}$$

Подалгебра F_{21} задается базисным элементом P_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{21,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении инвариантных подпространств $N_{21,a}$ $(a = 2, \cdots, 14)$ (I.35).

Подпространство $N_{21,2} = \{X_0, X_1, X_3, X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{21,15}$ и $\tilde{P}_{21,16}$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{21,15} = \{X_0, X_1, X_3, X_4,\ P_3 + X_2\}\ (\simeq P_{21,2}), \tag{2.106}$$
$$\tilde{P}_{21,16} = \{X_0, X_1, X_3, X_4,\ P_3 - X_2\}\ (\simeq P_{21,2})$$

Подпространство $N_{21,3} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Представители

$\widetilde{P}_{21,17}$ и $P_{21,18}$ задаются базисными элементами:

$$P_{21,17}=\{X_1, X_2, X_3, X_4, P_3+X_0\}\ (\simeq P_{21,3}), \tag{2.107}$$
$$\widetilde{P}_{21,18}=\{X_1, X_2, X_3, X_4, P_3-X_0\}\ (\simeq P_{21,3})$$

Подпространство $N_{21,4}=\{X_0, X_3, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,19}$ и $\widetilde{P}_{21,20}$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,19}=\{X_0, X_3, X_4, P_3+X_1\}\ (\simeq P_{21,4}), \tag{2.108}$$
$$\widetilde{P}_{21,20}=\{X_0, X_3, X_4, P_3-X_1\}\ (\simeq P_{21,4})$$

Подпространство $N_{21,5}=\{X_1, X_3, X_4\}$. Представители $P_{21,\ell}$ $(\ell=21,\dots,24)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{21,21}=\{X_1, X_3, X_4, P_3+X_0\}\ (\simeq P_{21,5}),\\
&\widetilde{P}_{21,22}=\{X_1, X_3, X_4, P_3-X_0\}\ (\simeq P_{21,5}),\\
&\widetilde{P}_{21,23}=\{X_1, X_3, X_4, P_3+X_2\}\ (\simeq P_{21,5}),\\
&\widetilde{P}_{21,24}=\{X_1, X_3, X_4, P_3-X_2\}\ (\simeq P_{21,5}),
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Подпространство $N_{21,6}=\{X_1, X_2, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,25}$ и $\widetilde{P}_{21,26}$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,25}=\{X_1, X_2, X_4, P_3+X_0\}\ (\simeq P_{21,6}), \tag{2.110}$$
$$\widetilde{P}_{21,26}=\{X_1, X_2, X_4, P_3-X_0\}\ (\simeq P_{21,6}).$$

Подпространство $N_{21,7}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3 (b\neq 0)\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,\ell}$ $(\ell=27,\dots,30)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{21,27}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3, P_3+X_0\}\ (\simeq P_{21,7}),\\
&\widetilde{P}_{21,28}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3, P_3-X_0\}\ (\simeq P_{21,7}),\\
&\widetilde{P}_{21,29}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3, P_3+X_1\}\ (\simeq P_{21,7}),\\
&\widetilde{P}_{21,30}=\{X_2, X_4, X_1+bX_3, P_3-X_1\}\ (\simeq P_{21,7}).
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Подпространство $N_{21,8}=\{X_1, X_2\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,31}$ и $\widetilde{P}_{21,32}$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,31} = \{X_1, X_2, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{21,8}),$$
$$\widetilde{P}_{21,32} = \{X_1, X_2, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{21,8}). \tag{2.112}$$

Подпространство $N_{21,9} = \{X_1, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,\ell}$ $(\ell = 33, \cdots, 36)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,33} = \{X_1, X_4, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{21,9}),$$
$$\widetilde{P}_{21,34} = \{X_1, X_4, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{21,9}), \tag{2.113}$$
$$\widetilde{P}_{21,35} = \{X_1, X_4, P_3 + X_2\} \ (\simeq P_{21,9}),$$
$$\widetilde{P}_{21,36} = \{X_1, X_4, P_3 - X_2\} \ (\simeq P_{21,9}).$$

Подпространство $N_{21,10} = \{X_3, X_4\}$. Представители $P_{21,\ell}$ $(\ell = 37, \cdots, 42)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,37} = \{X_3, X_4, P_3 + X_0 + \tilde{h} X_1 \ (\tilde{h} \neq 0)\} \ (\simeq P_{21,10}),$$
$$\widetilde{P}_{21,38} = \{X_3, X_4, P_3 - X_0 + \tilde{h} X_1 \ (\tilde{h} \neq 0)\} \ (\simeq P_{21,10}),$$
$$\widetilde{P}_{21,39} = \{X_3, X_4, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{21,10}), \tag{2.114}$$
$$\widetilde{P}_{21,40} = \{X_3, X_4, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{21,10}),$$
$$\widetilde{P}_{21,41} = \{X_3, X_4, P_3 + X_1\} \ (\simeq P_{21,10}),$$
$$\widetilde{P}_{21,42} = \{X_3, X_4, P_3 - X_1\} \ (\simeq P_{21,10}).$$

Подпространство $N_{21,11} = \{X_4, X_1 + b X_3 \ (b \neq 0)\}$. Представители $\widetilde{P}_{21,k}$ $(k = 43, \cdots, 50)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{21,43} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 + X_1 + h_2' X_2 \ (h_2' \neq 0)\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,44} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 - X_1 + h_2' X_2 \ (h_2' \neq 0)\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,45} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 + X_2\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,46} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 - X_2\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,47} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 + X_1\} \ (\simeq P_{21,11}), \tag{2.115}$$
$$\widetilde{P}_{21,48} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 - X_1\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,49} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 + X_0\} \ (\simeq P_{21,11}),$$
$$\widetilde{P}_{21,50} = \{X_4, X_1 + b X_3, P_3 - X_0\} \ (\simeq P_{21,11}).$$

Подпространство $N_{21,12} = \{X_1\}$. Представители $\tilde{P}_{21,l}$ $(l = 51, \cdots, 56)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{P}_{21,51} = \{X_1,\ P_3 + X_0 + hX_2\ (h \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,12}),\\
&\tilde{P}_{21,52} = \{X_1,\ P_3 - X_0 + hX_2\ (h \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,12}),\\
&\tilde{P}_{21,53} = \{X_1,\ P_3 + X_0\}\ (\simeq P_{21,12}),\\
&\tilde{P}_{21,54} = \{X_1,\ P_3 - X_0\}\ (\simeq P_{21,12}),\\
&\tilde{P}_{21,55} = \{X_1,\ P_3 + X_2\}\ (\simeq P_{21,12}),\\
&\tilde{P}_{21,56} = \{X_1,\ P_3 - X_2\}\ (\simeq P_{21,12});
\end{aligned}
\qquad (2.116)
$$

Подпространство $N_{21,13} = \{X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{21,k}$ $(k = 57, \cdots, 62)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{P}_{21,57} = \{X_4,\ P_3 + X_0 + \tilde{h}X_1\ (\tilde{h} \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,13}),\\
&\tilde{P}_{21,58} = \{X_4,\ P_3 - X_0 + \tilde{h}X_1\ (\tilde{h} \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,13})\\
&\tilde{P}_{21,59} = \{X_4,\ P_3 + X_0\}\ (\simeq P_{21,13}),\\
&\tilde{P}_{21,60} = \{X_4,\ P_3 - X_0\}\ (\simeq P_{21,13}),\\
&\tilde{P}_{21,61} = \{X_4,\ P_3 + X_1\}\ (\simeq P_{21,13}),\\
&\tilde{P}_{21,62} = \{X_4,\ P_3 - X_1\}\ (\simeq P_{21,13}).
\end{aligned}
\qquad (2.117)
$$

Подпространство $N_{21,14} = \{0\}$. Представители $\tilde{P}_{21,l}$ $(l = 63, \cdots, 68)$ задаются базисными элементами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{P}_{21,63} = \{P_3 + X_0 + \tilde{h}X_1\ (\tilde{h} \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,14}),\\
&\tilde{P}_{21,64} = \{P_3 - X_0 + \tilde{h}X_1\ (\tilde{h} \neq 0)\}\ (\simeq P_{21,14}),\\
&\tilde{P}_{21,65} = \{P_3 + X_0\}\ (\simeq P_{21,14}),\\
&\tilde{P}_{21,66} = \{P_3 - X_0\}\ (\simeq P_{21,14}),\\
&\tilde{P}_{21,67} = \{P_3 + X_1\}\ (\simeq P_{21,14}),\\
&\tilde{P}_{21,68} = \{P_3 - X_1\}\ (\simeq P_{21,14}).
\end{aligned}
\qquad (2.118)
$$

Подалгебра F_{22} задается базисным элементом G. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{22,1}$, $N_{22,2}$, $N_{22,4}$ и $N_{22,7}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подпространство $N_{22,3} = \{X_0, X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,17}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,17} = \{X_0, X_1, X_2, X_4, G + a_3 X_3 \ (a_3 > 0)\} (\simeq P_{22,3}). \quad (2.119)$$

Подпространство $N_{22,5} = \{X_0, X_1, X_2\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,18}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,18} = \{X_0, X_1, X_2, G + a_3 X_3 \ (a_3 > 0)\} (\simeq P_{22,5}). \quad (2.120)$$

Подпространство $N_{22,6} = \{X_0, X_1, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,19}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,19} = \{X_0, X_1, X_4, G + \tilde{a}_2 X_2 \ (\tilde{a}_2 > 0)\} (\simeq P_{22,6}). \quad (2.121)$$

Подпространство $N_{22,8} = \{X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,20}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,20} = \{X_1, X_2, X_4, G + a_3 X_3 \ (a_3 > 0)\} (\simeq P_{22,8}). \quad (2.122)$$

Подпространство $N_{22,9} = \{X_0, X_1\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,21}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,21} = \{X_0, X_1, G + \tilde{a}_2 X_2 \ (\tilde{a}_2 > 0)\} (\simeq P_{22,9}). \quad (2.123)$$

Подпространство $N_{22,10} = \{X_0, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,22}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,22} = \{X_0, X_4, G + c X_1 \ (c \neq 0)\} (\simeq P_{22,10}). \quad (2.124)$$

Подпространство $N_{22,11} = \{X_1, X_2\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,23}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,23} = \{X_1, X_2, G + a_3 X_3 \ (a_3 > 0)\} (\simeq P_{22,11}). \quad (2.125)$$

Подпространство $N_{22,12} = \{X_1, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,24}$

задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,24} = \{ X_1, X_4, G + \tilde{a}_2 X_2 \ (\tilde{a}_2 > 0) \} (\simeq P_{22,12}) \tag{2.126}$$

Подпространство $N_{22,13} = \{ X_0 \}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,25}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,25} = \{ X_0, G + a X_1 \ (a \neq 0) \} (\simeq P_{22,13}) \tag{2.127}$$

Подпространство $N_{22,14} = \{ X_1 \}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,26}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,26} = \{ X_1, G + \tilde{c}_2 X_2 \ (\tilde{c}_2 > 0) \} (\simeq P_{22,14}). \tag{2.128}$$

Подпространство $N_{22,15} = \{ X_4 \}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,27}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,27} = \{ X_4, G + c X_1 \ (c \neq 0) \} (\simeq P_{22,15}) \tag{2.129}$$

Подпространство $N_{22,16} = \{ 0 \}$. Представитель $\widetilde{P}_{22,28}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{22,28} = \{ G + c X_1 \ (c \neq 0) \} (\simeq P_{22,16}). \tag{2.130}$$

Подалгебра F_{23} задается базисными элементами $L_3 + \varepsilon P_3$ $(\varepsilon \neq \pm 1)$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{23,1}$ и $N_{23,4}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении остальных инвариантных подпространств из $N_{23,a}$ $(a = 1, \cdots, 8)$ (I.37).

Подпространство $N_{23,2} = \{ X_1, X_2, X_3, X_4 \}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,9}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,9} = \{ X_1, X_2, X_3, X_4, L_3 + \varepsilon P_3 + \alpha_0 X_0 \ (\alpha_0 \neq 0) \} (\simeq P_{23,2}). \tag{2.131}$$

Подпространство $N_{23,3}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,10}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,10}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0\ \ (\alpha_0\neq 0)\}\ (\simeq P_{23,3}). \tag{2.132}$$

Подпространство $N_{23,5}=\{X_1,X_2\}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,11}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,11}=\{X_1,X_2,L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0\ \ (\alpha_0\neq 0)\}\ (\simeq P_{23,5}). \tag{2.133}$$

Подпространство $N_{23,6}=\{X_3,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,12}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,12}=\{X_3,X_4,L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0\ \ (\alpha_0\neq 0)\}\ (\simeq P_{23,6}). \tag{2.134}$$

Подпространство $N_{23,7}=\{X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,13}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,13}=\{X_4,\ L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0\ (\alpha_0\neq 0)\}\ (\simeq P_{23,7}). \tag{2.135}$$

Подпространство $N_{23,8}=\{0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{23,14}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{23,14}=\{L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0\ \ (\alpha_0\neq 0)\}\ (\simeq P_{23,8}). \tag{2.136}$$

Подалгебра F_{24} задается базисным элементом $L_3+e\,G\,(e>0)$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{24,1}$, $N_{24,2}$, $N_{24,4}$, $N_{24,5}$, $N_{24,7}$, $N_{24,9}$, $N_{24,12}$ и $N_{24,13}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств из $N_{24,a}\ (a=1,\cdots,16)$ (I.38).

Подпространство $N_{24,3}=\{X_0,X_1,X_2,X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,17}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,17}=\{X_0, X_1, X_2, X_4, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,3}). \quad (2.137)$$

Подпространство $N_{24,6}=\{X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,18}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,18}=\{X_1, X_2, X_4, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3)\neq 0)\}(\simeq P_{24,6}) \quad (2.138)$$

Подпространство $N_{24,8}=\{X_0, X_1, X_2\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,19}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,19}=\{X_0, X_1, X_2, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,8}) \quad (2.139)$$

Подпространство $N_{24,10}=\{X_0, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,20}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,20}=\{X_0, X_4, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,10}). \quad (2.140)$$

Подпространство $N_{24,11}=\{X_1, X_2\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,21}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,21}=\{X_1, X_2, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,11}). \quad (2.141)$$

Подпространство $N_{24,14}=\{X_0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,22}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,22}=\{X_0, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,14}). \quad (2.142)$$

Подпространство $N_{24,15}=\{X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,23}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,23}=\{X_4, L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,15}). \quad (2.143)$$

Подпространство $N_{24,16}=\{0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{24,24}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{24,24}=\{L_3+eG+\widetilde{x}_3X_3\ (\widetilde{x}_3\neq 0)\}(\simeq P_{24,16}). \quad (2.144)$$

Подалгебра F_{25} задается базисными элементами $\{ ; G, P_3, C_3\} \oplus L_3$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{25,a}$ $(a=1,\cdots,4)$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_{26} задается базисными элементами $; G, P_3, C_3$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{26,a}$ $(a=1,\cdots,6)$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_{27} задается базисными элементами P_3+C_3, L_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{27,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении инвариантных подпространств $N_{27,a}$ $(a=2,\cdots,6)$ (I.41).

Подпространство $N_{27,2}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0\}$. Представители $\tilde{P}_{27,a}$ $(a=7,8,9)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{27,7}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0, L_3+\tilde{d}_0X_0 (\tilde{s}_0,\tilde{d}_0\neq 0)\},\quad (2.145)$$
$$\tilde{P}_{27,8}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0, L_3 (\tilde{s}_0\neq 0)\} (\simeq P_{27,2}),$$
$$\tilde{P}_{27,9}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0, P_3+C_3, L_3+\tilde{d}_0X_0 (\tilde{d}_0\neq 0)\}.$$

Подпространство $N_{27,3}=\{X_0, X_3, X_4-X_0\}$. Представитель $\tilde{P}_{27,10}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{27,10}=\{X_0, X_3, X_4-X_0, P_3+C_3, L_3+d_4X_4 (d_4\neq 0)\}. \quad (2.146)$$

Подпространство $N_{27,4}=\{X_1, X_2\}$. Представители $\tilde{P}_{27,\ell}$ $(\ell=11,12,13)$ задаются базисными элементами:

$$P_{27,11}=\{X_1, X_2, P_3+C_3+s_0X_0, L_3+d(X_0+X_4) (s_0, d\neq 0)\} (\simeq P_{27,4}),$$
$$\tilde{P}_{27,12}=\{X_1, X_2, P_3+C_3+s_0X_0, L_3 (s_0\neq 0)\} (\simeq P_{27,4}), \quad (2.147)$$
$$\tilde{P}_{27,13}=\{X_1, X_2, P_3+C_3, L_3+d(X_0+X_4) (d\neq 0)\} (\simeq P_{27,4}).$$

Подпространство $N_{27,5}=\{X_3, X_4-X_0\}$. Представители $\widetilde{P}_{27,\ell}$ $(\ell=14,15,16)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{27,14}=\{X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0, L_3+\tilde{d}_0X_0\ (\tilde{s}_0,\tilde{d}_0\neq 0)\},\\
&\widetilde{P}_{27,15}=\{X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0, L_3\ (\tilde{s}_0\neq 0)\}(\simeq P_{27,5}),\\
&\widetilde{P}_{27,16}=\{X_3, X_4-X_0, P_3+C_3, L_3+\tilde{d}_0X_0\ (\tilde{d}_0\neq 0)\}.
\end{aligned}\qquad (2.148)$$

Подпространство $N_{27,6}=\{0\}$. Представители $\widetilde{P}_{27,k}$ $(k=17,18,19)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{27,17}=\{P_3+C_3+s_0X_0, L_3+d(X_0+X_4)\ (s_0,d\neq 0)\}(\simeq P_{27,6}),\\
&\widetilde{P}_{27,18}=\{P_3+C_3+s_0X_0, L_3\ (s_0\neq 0)\}(\simeq P_{27,6}),\\
&\widetilde{P}_{27,19}=\{P_3+C_3, L_3+d(X_0+X_4)\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{27,6}).
\end{aligned}\qquad (2.149)$$

Подалгебра F_{28} задается базисным элементом L_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{28,1}$ и $N_{28,8}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении других инвариантных подпространств из $N_{28,a}$ $(a=1,\cdots,24)$ (I.42).

Подпространство $N_{28,2}=\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$. Представитель $\widetilde{P}_{28,25}$ и $\widetilde{P}_{28,26}$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{28,25}=\{X_0, X_1, X_2, X_3, L_3+X_4\}(\simeq P_{28,2}),\\
&\widetilde{P}_{28,26}=\{X_0, X_1, X_2, X_3, L_3-X_4\}(\simeq P_{28,2}).
\end{aligned}\qquad (2.150)$$

Подпространство $N_{28,3}=\{X_0, X_1, X_2, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{28,27}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,27}=\{X_0, X_1, X_2, X_4, L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{28,3}).\qquad (2.151)$$

Подпространство $N_{28,4}=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,28}$ и $\widetilde{P}_{28,29}$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,28}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,\ L_3+X_0\}\ (\simeq P_{28,4}),$$
$$\tilde{P}_{28,29}=\{X_1,X_2,X_3,X_4,\ L_3-X_0\}\ (\simeq P_{28,4}), \tag{2.152}$$

Подпространство $N_{28,5}=\{X_1,X_2,X_3,X_4+X_0\}$. Представитель $\tilde{P}_{28,30}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,30}=\{X_1,X_2,X_3,X_4+X_0,L_3+\tilde{\alpha}_0X_0\ (\tilde{\alpha}_0>0)\}(\simeq P_{28,5}), \tag{2.153}$$

Подпространство $N_{28,6}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\}$. Представитель $\tilde{P}_{28,31}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,31}=\{X_1,X_2,X_3,X_4-X_0,L_3+\tilde{\alpha}_0X_0\ (\tilde{\alpha}_0\neq 0)\}(\simeq P_{28,6}). \tag{2.154}$$

Подпространство $N_{28,7}=\{X_0,X_1,X_2\}$. Представители $\tilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell=32,33,34)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,32}=\{X_0,X_1,X_2,L_3+X_4\}\ (\simeq P_{28,7}),$$
$$\tilde{P}_{28,33}=\{X_0,X_1,X_2,L_3-X_4\}\ (\simeq P_{28,7}), \tag{2.155}$$
$$\tilde{P}_{28,34}=\{X_0,X_1,X_2,L_3+\alpha_3X_3\ (\alpha_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,7}).$$

Подпространство $N_{28,9}=\{X_1,X_2,X_3\}$. Представители $\tilde{P}_{28,k}$ $(k=35,\cdots,40)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,35}=\{X_1,X_2,X_3,L_3+\alpha(X_0+X_4)\ \ (\alpha\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,9}),$$
$$\tilde{P}_{28,36}=\{X_1,X_2,X_3,L_3+\alpha(X_0-X_4)\ \ (\alpha\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,9}),$$
$$\tilde{P}_{28,37}=\{X_1,X_2,X_3,L_3+X_0\}\ (\simeq P_{28,9}), \tag{2.156}$$
$$\tilde{P}_{28,38}=\{X_1,X_2,X_3,L_3-X_0\}\ (\simeq P_{28,9}),$$
$$\tilde{P}_{28,39}=\{X_1,X_2,X_3,L_3+X_4\}(\simeq P_{28,9}),$$
$$\tilde{P}_{28,40}=\{X_1,X_2,X_3,L_3-X_4\}(\simeq P_{28,9}).$$

Подпространство $N_{28,10}=\{X_1,X_2,X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{28,k}$ $(k=41,42,43)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,41}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+X_0\}\ (\simeq P_{28,10}),$$
$$\tilde{P}_{28,42}=\{X_1,X_2,X_4,L_3-X_0\}\ (\simeq P_{28,10}), \tag{2.157}$$
$$\tilde{P}_{28,43}=\{X_1,X_2,X_4,L_3+\alpha_3X_3\ \ (\alpha_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,10}).$$

Подпространство $N_{28,11}=\{X_1, X_2, X_0+X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell=44,45,46)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{28,44}=\{X_1, X_2, X_0+X_4, L_3+d_3X_3+\tilde{d}_4X_4\ (d_3\neq 0, \tilde{d}_4>0)\}(\simeq P_{28,11}),\\
&\widetilde{P}_{28,45}=\{X_1, X_2, X_0+X_4, L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{28,11}),\\
&\widetilde{P}_{28,46}=\{X_1, X_2, X_0+X_4, L_3+\tilde{d}_4X_4\ (\tilde{d}_4\neq 0)\}(\simeq P_{28,11}).
\end{aligned}\tag{2.158}$$

Подпространство $N_{28,12}=\{X_1, X_2, X_0-X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,k}$ $(k=47,48,49)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{28,47}=\{X_1, X_2, X_0-X_4, L_3+d_3X_3+dX_4\ (d_3, d\neq 0)\}(\simeq P_{28,12}),\\
&\widetilde{P}_{28,48}=\{X_1, X_2, X_0-X_4, L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{28,12}),\\
&\widetilde{P}_{28,49}=\{X_1, X_2, X_0-X_4, L_3+dX_4\ (d\neq 0)\}(\simeq P_{28,12}).
\end{aligned}\tag{2.159}$$

Подпространство $N_{28,13}=\{X_0, X_3\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,50}$ и $\widetilde{P}_{28,51}$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{28,50}=\{X_0, X_3, L_3+X_4\}(\simeq P_{28,13}),\\
&\widetilde{P}_{28,51}=\{X_0, X_3, L_3-X_4\}(\simeq P_{28,13}).
\end{aligned}\tag{2.160}$$

Подпространство $N_{28,14}=\{X_0, X_4\}$. Представитель $\widetilde{P}_{28,52}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,52}=\{X_0, X_4, L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}(\simeq P_{28,14}).\tag{2.161}$$

Подпространство $N_{28,15}=\{X_1, X_2\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell=53,\dots,59)$ задаются базисными элементами:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_{28,53}=\{X_1, X_2, L_3+\tilde{d}(X_0+X_4)\ (\tilde{d}\neq 0)\}(\simeq P_{28,15}),\\
&\widetilde{P}_{28,54}=\{X_1, X_2, L_3+\tilde{d}(X_0-X_4)\ (\tilde{d}\neq 0)\}(\simeq P_{28,15}),\\
&\widetilde{P}_{28,55}=\{X_1, X_2, L_3+X_0\}(\simeq P_{28,15}),\\
&\widetilde{P}_{28,56}=\{X_1, X_2, L_3-X_0\}(\simeq P_{28,15}),\\
&\widetilde{P}_{28,57}=\{X_1, X_2, L_3+X_4\}(\simeq P_{28,15}),\\
&\widetilde{P}_{28,58}=\{X_1, X_2, L_3-X_4\}(\simeq P_{28,15}),
\end{aligned}\tag{2.162}$$

$$\tilde{P}_{28,59} = \{X_1, X_2, L_3 + d_3 X_3 \ (d_3 \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,15})$$

Подпространство $N_{28,16} = \{X_3, X_4\}$. Представители $\tilde{P}_{28,60}$ и $\tilde{P}_{28,61}$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,60} = \{X_3, X_4, L_3 + X_0\} \ (\simeq P_{28,16}), \qquad (2.163)$$
$$\tilde{P}_{28,61} = \{X_3, X_4, L_3 - X_0\} \ (\simeq P_{28,16}).$$

Подпространство $N_{28,17} = \{X_3, X_0 + X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{28,62}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,62} = \{X_3, X_0 + X_4, L_3 + \tilde{d}_4 X_4 \ (\tilde{d}_4 \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,17}). \qquad (2.164)$$

Подпространство $N_{28,18} = \{X_3, X_0 - X_4\}$. Представитель $\tilde{P}_{28,63}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,63} = \{X_3, X_0 - X_4, L_3 + \tilde{d}_4 X_4 \ (\tilde{d}_4 \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,18}). \qquad (2.165)$$

Подпространство $N_{28,19} = \{X_0\}$. Представители $\tilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell = 64, 65, 66)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,64} = \{X_0, L_3 + X_4\} \ (\simeq P_{28,19}), \qquad (2.166)$$
$$\tilde{P}_{28,65} = \{X_0, L_3 - X_4\} \ (\simeq P_{28,19}),$$
$$\tilde{P}_{28,66} = \{X_0, L_3 + d_3 X_3 \ (d_3 \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,19}).$$

Подпространство $N_{28,20} = \{X_3\}$. Представители $\tilde{P}_{28,k}$ $(k = 67, \dots, 72)$ задаются базисными элементами:

$$\tilde{P}_{28,67} = \{X_3, L_3 + d(X_0 + X_4) \ (d \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,20}),$$
$$\tilde{P}_{28,68} = \{X_3, L_3 + d(X_0 - X_4) \ (d \neq 0)\} \ (\simeq P_{28,20}),$$
$$\tilde{P}_{28,69} = \{X_3, L_3 + X_0\} \ (\simeq P_{28,20}), \qquad (2.167)$$
$$\tilde{P}_{28,70} = \{X_3, L_3 - X_0\} \ (\simeq P_{28,20}),$$
$$\tilde{P}_{28,71} = \{X_3, L_3 + X_4\} \ (\simeq P_{28,20}),$$

$\widetilde{P}_{28,72}=\{X_3\,,\,L_3-X_4\}\ (\simeq P_{28,20})$.

Подпространство $N_{28,21}=\{X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,k}$ $(k=73,74,75)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,73}=\{X_4\,,\,L_3+X_0\}\ (\simeq P_{28,21}),$$
$$\widetilde{P}_{28,74}=\{X_4\,,\,L_3-X_0\}\ (\simeq P_{28,21}), \tag{2.168}$$
$$\widetilde{P}_{28,75}=\{X_4\,,\,L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,21}).$$

Подпространство $N_{28,22}=\{X_0+X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell=76,77,78)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,76}=\{X_0+X_4\,,\,L_3+d_3X_3+\widetilde{d}_4X_4\ (d_3,\widetilde{d}_4\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,22}), \tag{2.169}$$
$$\widetilde{P}_{28,77}=\{X_0+X_4\,,\,L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,22}),$$
$$\widetilde{P}_{28,78}=\{X_0+X_4\,,\,L_3+\widetilde{d}_4X_4\ (\widetilde{d}_4\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,22}).$$

Подпространство $N_{28,23}=\{X_0-X_4\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,m}$ $(m=79,80,81)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,79}=\{X_0-X_4\,,\,L_3+d_3X_3+dX_4\ (d_3,d\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,23}) \tag{2.170}$$
$$\widetilde{P}_{28,80}=\{X_0-X_4\,,\,L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,23}),$$
$$\widetilde{P}_{28,81}=\{X_0-X_4\,,\,L_3+dX_4\ (d\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,23})$$

Подпространство $N_{28,24}=\{0\}$. Представители $\widetilde{P}_{28,\ell}$ $(\ell=82,\dots,88)$ задаются базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{28,82}=\{L_3+\widetilde{d}(X_0+X_4)\ (\widetilde{d}\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,24}),$$
$$\widetilde{P}_{28,83}=\{L_3+\widetilde{d}(X_0-X_4)\ (\widetilde{d}\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,24}),$$
$$\widetilde{P}_{28,84}=\{L_3+X_0\}\ (\simeq P_{28,24}),$$
$$\widetilde{P}_{28,85}=\{L_3-X_0\}\ (\simeq P_{28,24}), \tag{2.171}$$
$$\widetilde{P}_{28,86}=\{L_3+X_4\}\ (\simeq P_{28,24}),$$
$$\widetilde{P}_{28,87}=\{L_3-X_4\}\ (\simeq P_{28,24}),$$
$$\widetilde{P}_{28,88}=\{L_3+d_3X_3\ (d_3\neq 0)\}\ (\simeq P_{28,24}).$$

Подалгебра F_{29} задается базисным элементом P_3+C_3+ $+eL_3 (e>0)$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{29,1}$ и $N_{29,3}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении других инвариантных подпространств из $N_{29,a}$ $(a=1,\dots,6)$ (I.43).

Подпространство $N_{29,2}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0\}$. Представитель $\tilde{P}_{29,7}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{29,7}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+eL_3+\tilde{\gamma}_0 X_0 \ (\tilde{\gamma}_0\neq 0)\} (\simeq P_{29,2}). \tag{2.172}$$

Подпространство $N_{29,4}=\{X_1, X_2\}$. Представитель $\tilde{P}_{29,8}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{29,8}=\{X_1, X_2, P_3+C_3+eL_3+\tilde{\gamma}_0 X_0 \ (\tilde{\gamma}_0\neq 0)\} (\simeq P_{29,4}). \tag{2.173}$$

Подпространство $N_{29,5}=\{X_3, X_4-X_0\}$. Представитель $\tilde{P}_{29,9}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{29,9}=\{X_3, X_4-X_0, P_3+C_3+eL_3+\tilde{\gamma}_0 X_0 \ (\tilde{\gamma}_0\neq 0)\} (\simeq P_{29,5}). \tag{2.174}$$

Подпространство $N_{29,6}=\{0\}$. Представитель $\tilde{P}_{29,10}$ задается базисными элементами:

$$\tilde{P}_{29,10}=\{P_3+C_3+eL_3+\tilde{\gamma}_0 X_0 \ (\tilde{\gamma}_0\neq 0)\} (\simeq P_{29,6}). \tag{2.175}$$

Подалгебра F_{30} задается базисными элементами $;L_1$, L_2, L_3, P_1+C_1, P_2+C_2, P_3+C_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространств $N_{30,a}$ $(a=1,2,3)$ (I.44) нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_{31} задается базисными элементами

$$\left\{;L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)\right\}\oplus\left(L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)\right) \quad (i=1,2,3;\ \varepsilon=\pm 1).$$

Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае подпространства $N_{31,1}$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Выпишем результаты, полученные при рассмотрении оставшихся инвариантных подпространств из $N_{31,a}$ $(a=2,3,1)$ (I.45).

Подпространство $N_{31,2}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{31,4}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{31,4}=\{X_1, X_2, X_3, X_4-X_0, L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i), \quad L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)+\tilde{u}_0 X_0 \quad (\tilde{u}_0\neq 0)\ (i=1,2,3)\}. \tag{2.176}$$

Подпространство $N_{31,3}=\{0\}$. Представитель $\widetilde{P}_{31,5}$ задается базисными элементами:

$$\widetilde{P}_{31,5}=\{;L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i),\ L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)+u(X_0+X_4), \quad (u\neq 0)\ (i=1,2,3)\}\ (\simeq P_{31,3}). \tag{2.177}$$

Подалгебра F_{32} задается базисными элементами $;L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i)$ $(i=1,2,3)$. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае инвариантных подпространств $N_{32,a}$ $(a=1,2,3)$ (I.46) нет нерасщепляющихся подалгебр.

Подалгебра F_{33} задается базисными элементами $;L_1$, L_2, L_3, P_1-C_1, P_2-C_2, P_3-C_3. Используя метод, описанный в § I данной главы, убеждаемся в том, что в случае инвариантных подпространств $N_{33,a}$ $(a=1,2,3)$ нет нерасщепляющихся подалгебр.

Таким образом, использовав известный метод, в этом параграфе найдены 370 непрерывных нерасщепляющихся подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ алгебры Ли группы $P(1,4)$. Для каждой из найденных нерасщепляющихся подалгебр указано, является ли она изоморфной некоторой расщепляющейся подалгебре. Полученные результаты приведены в табл.4.

Таблица 4

Список представителей $\widetilde{P}_{j,k}$

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{3,7}$		8	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3, L_3+bX_3, P_1, P_2, P_3\ (a,b\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{3,8}$		8	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3, L_3, P_1, P_2, P_3\ (a\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{3,9}$		8	X_1, X_2, X_4	$G, L_3+bX_3, P_1, P_2, P_3\ (b\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{3,10}$		6	X_4	$G+aX_3, L_3+dX_3, P_1, P_2, P_3\ (a,d\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{3,11}$		6	X_4	$G+aX_3, L_3, P_1, P_2, P_3\ (a\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{3,12}$		6	X_4	$G, L_3+dX_3, P_1, P_2, P_3\ (d\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,7}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+X_0, P_1, P_2, P_3+\tilde{h}_0X_0\ (\tilde{h}_0\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,8}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3-X_0, P_1, P_2, P_3+\tilde{h}_0X_0\ (\tilde{h}_0\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,9}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3+X_0, P_1, P_2, P_3	
$\widetilde{P}_{4,10}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3-X_0, P_1, P_2, P_3	
$\widetilde{P}_{4,11}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3+X_0	
$\widetilde{P}_{4,12}$		8	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3-X_0	
$\widetilde{P}_{4,13}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3+X_0+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3, d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,14}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3-X_0+\tilde{h}_3X_3\ (d_3, \tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,15}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3+X_0\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,16}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3-X_0\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,17}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3+X_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,18}$	F_4	7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3-X_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,19}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3, P_1, P_2, P_3+X_0+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,20}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3, P_1, P_2, P_3-X_0+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,21}$		7	X_1, X_2, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3+X_3	$\simeq P_{4,5}$
$\widetilde{P}_{4,22}$		7	X_1, X_2, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3-X_3	$\simeq P_{4,5}$
$\widetilde{P}_{4,23}$		7	X_1, X_2, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3+X_0	
$\widetilde{P}_{4,24}$		7	X_1, X_2, X_4	L_3, P_1, P_2, P_3-X_0	
$\widetilde{P}_{4,25}$		7	X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3, P_1, P_2, P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,26}$		6	X_3, X_4	$L_3, P_1+X_2, P_2-X_1, P_3$	
$\widetilde{P}_{4,27}$		6	X_3, X_4	$L_3, P_1-X_2, P_2+X_1, P_3$	
$\widetilde{P}_{4,28}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3, P_1+X_2, P_2-X_1, P_3+\tilde{h}_3X_3\ (d_3, \tilde{h}_3\neq 0)$	

Продолжение табл.4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{4,29}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3+\tilde{h}_3X_3\ (d_3,\tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,30}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,31}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,32}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,33}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,34}$		5	X_4	$L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,35}$		5	X_4	$L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,36}$		5	X_4	$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3$	$\simeq P_{4,5}$
$\widetilde{P}_{4,37}$	F_4	5	X_4	$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3$	$\simeq P_{4,5}$
$\widetilde{P}_{4,38}$		5	X_4	$L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3$	
$\widetilde{P}_{4,39}$		5	X_4	$L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1,\ P_3$	
$\widetilde{P}_{4,40}$		5	X_4	$L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{4,41}$		4	0	$L_3+X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{4,42}$		4	0	$L_3-X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3+\tilde{h}_3X_3\ (\tilde{h}_3\neq 0)$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{4,43}$		4	0	$L_3+X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{4,44}$		4	0	$L_3-X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{4,45}$		4	0	$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{4,46}$		4	0	$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_3$	$\simeq P_{4,6}$
$\widetilde{P}_{6,7}$		7	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (a>0)$	
$\widetilde{P}_{6,8}$	F_6	6	X_1, X_4	$G+\tilde{a}_2X_2,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (\tilde{a}_2>0)$	
$\widetilde{P}_{6,9}$		5	X_4	$G+a_2X_2,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (a_2\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{7,7}$	F_7	7	X_1, X_2, X_4	$L_3+bG+kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (k\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{7,8}$		5	X_4	$L_3+bG+kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\ (k\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{8,9}$		8	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3,d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,2}$
$\widetilde{P}_{8,10}$		8	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,2}$
$\widetilde{P}_{8,11}$		8	X_0, X_1, X_2, X_4	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,2}$
$\widetilde{P}_{8,12}$	F_8	7	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3,d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,4}$
$\widetilde{P}_{8,13}$		7	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,4}$
$\widetilde{P}_{8,14}$		7	X_1, X_2, X_4	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,4}$
$\widetilde{P}_{8,15}$		5	X_4	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3,d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,7}$
$\widetilde{P}_{8,16}$		5	X_4	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,7}$

Продолжение табл. 4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	dim $\tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\tilde{P}_{8,17}$		5	X_4	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1, P_2\ (d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,7}$
$\tilde{P}_{8,18}$		4	0	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_1, P_2\ (a_3, d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,8}$
$\tilde{P}_{8,19}$		4	0	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1, P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,8}$
$\tilde{P}_{8,20}$		4	0	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1, P_2\ (d_3\neq 0)$	$\simeq P_{8,8}$
$\tilde{P}_{9,7}$		7	X_1, X_2, X_3, X_4	$P_1+e_0X_0,\ P_2+g_0X_0,\ P_3+h_0X_0$	
$\tilde{P}_{9,8}$		6	X_1, X_2, X_4	$P_1+e_3X_3,\ P_2+g_3X_3,\ P_3+h_0X_0+h_3X_3$	
$\tilde{P}_{9,9}$	F_9	5	X_1, X_4	$P_1+e_2X_2+e_3X_3,\ P_2+g_2X_2+g_3X_3,\ P_3+h_2X_2+h_3X_3$	
$\tilde{P}_{9,10}$		4	X_4	$P_1+e_2X_2+e_3X_3,\ P_2+g_1X_1+g_2X_2+g_3X_3,\ P_3+h_1X_1+h_2X_2+h_3X_3$	
$\tilde{P}_{9,11}$		3	0	$P_1+aX_2+bX_3,\ P_2+aX_1+g_2X_2+cX_3,\ P_3+bX_1+cX_2+h_3X_3$	$\simeq P_{9,6}$
$\tilde{P}_{10,9}$		6	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_3\ (a_3\neq 0, d_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{10,10}$		6	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_3\ (a_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{10,11}$	F_{10}	6	X_1, X_2, X_4	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{10,12}$		4	X_4	$G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_3\ (a_3, d_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{10,13}$		4	X_4	$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_3\ (a_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{10,14}$		4	X_4	$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_3\ (d_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,13}$		7	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{11,3}$
$\tilde{P}_{11,14}$		6	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3,\ P_1,\ P_2\ (a_3\neq 0)$	$\simeq P_{11,4}$
$\tilde{P}_{11,15}$		6	X_1, X_3, X_4	$G+a_2X_2,\ P_1, P_2\ (a_2>0)$	
$\tilde{P}_{11,16}$		6	X_1, X_4, X_3+bX_2	$G+\tilde{a}_2X_2,\ P_1, P_2\ (b\neq 0,\ \tilde{a}_2\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,17}$		5	X_1, X_4	$G+a_2X_2+a_3X_3,\ P_1, P_2\ (a_2>0,\ a_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,18}$	F_{11}	5	X_1, X_4	$G+a_2X_2,\ P_1, P_2\ (a_2>0)$	
$\tilde{P}_{11,19}$		5	X_1, X_4	$G+a_3X_3,\ P_1, P_2\ (a_3\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,20}$		5	X_3, X_4	$G+a_1X_1,\ P_1, P_2\ (a_1>0)$	
$\tilde{P}_{11,21}$		5	X_4, X_3+bX_2	$G+a_1X_1+\tilde{a}_2X_2,\ P_1, P_2\ (a_1\neq 0, \tilde{a}_2\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,22}$		5	X_4, X_3+bX_2	$G+a_1X_1,\ P_1, P_2\ (a_1\neq 0,\ b\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,23}$		5	X_4, X_3+bX_2	$G+\tilde{a}_2X_2,\ P_1, P_2\ (\tilde{a}_2\neq 0,\ b\neq 0)$	
$\tilde{P}_{11,24}$		4	X_4	$G+a_1X_1+a_3X_3,\ P_1, P_2\ (a_1>0, a_3\neq 0)$	

Продолжение табл. 4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{11,25}$		4	X_4	$G+\alpha_1 X_1,\ P_1, P_2\ (\alpha_1>0)$	
$\widetilde{P}_{11,26}$		4	X_4	$G+\alpha_3 X_3,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{11,10}$
$\widetilde{P}_{11,27}$		3	0	$G+\alpha_3 X_3,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{11,12}$
$\widetilde{P}_{12,9}$		7	X_0, X_1, X_2, X_4	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{12,2}$
$\widetilde{P}_{12,10}$		7	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+X_0,\ P_1, P_2$	
$\widetilde{P}_{12,11}$		7	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3-X_0,\ P_1, P_2$	
$\widetilde{P}_{12,12}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+\alpha_3 X_3+X_0,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{12,13}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+\alpha_3 X_3-X_0,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{12,14}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{12,4}$
$\widetilde{P}_{12,15}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+X_0,\ P_1, P_2$	
$\widetilde{P}_{12,16}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3-X_0,\ P_1, P_2$	
$\widetilde{P}_{12,17}$	F_{12}	5	X_3, X_4	$L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1$	
$\widetilde{P}_{12,18}$		5	X_3, X_4	$L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1$	
$\widetilde{P}_{12,19}$		4	X_3	$L_3+X_4,\ P_1, P_2$	$\simeq P_{12,6}$
$\widetilde{P}_{12,20}$		4	X_3	$L_3-X_4,\ P_1, P_2$	$\simeq P_{12,6}$
$\widetilde{P}_{12,21}$		4	X_4	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1\ (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{12,22}$		4	X_4	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1\ (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{12,23}$		4	X_4	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1,\ P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{12,7}$
$\widetilde{P}_{12,24}$		4	X_4	$L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1$	
$\widetilde{P}_{12,25}$		4	X_4	$L_3,\ P_1-X_2,\ P_2+X_1$	
$\widetilde{P}_{12,26}$		3	0	$L_3+\alpha_3 X_3,\ P_1, P_2\ (\alpha_3\neq 0)$	$\simeq P_{12,8}$
$\widetilde{P}_{13,7}$		7	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0,\ P_1, P_2\ (\alpha_0\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{13,8}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0 X_0,\ P_1, P_2\ (\alpha_0\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{13,9}$	F_{13}	5	X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1-mX_2,\ P_2+mX_1+kX_2$ $(m, k\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{13,10}$		5	X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1,\ P_2+kX_2\ (k\neq 0)$	$\simeq P_{13,4}$
$\widetilde{P}_{13,11}$		5	X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1-mX_2,\ P_2+mX_1\ (m\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{13,12}$		4	X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1-mX_2,\ P_2+mX_1+kX_2$ $(m, k\neq 0)$	

Продолжение табл. 4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{13,13}$		4	X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1,\ P_2+kX_2\ (k\neq 0)$	$\simeq P_{13,5}$
$\widetilde{P}_{13,14}$		4	X_4	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1-mX_2,\ P_2+mX_1\ (m\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{13,15}$		3	0	$L_3+\varepsilon P_3,\ P_1+kX_1,\ P_2+kX_2\ (k\neq 0)$	$\simeq P_{13,6}$
$\widetilde{P}_{14,9}$		7	X_0, X_1, X_2, X_4	$L_3+cG+bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b\neq 0)$	$\simeq P_{14,2}$
$\widetilde{P}_{14,10}$		6	X_1, X_2, X_4	$L_3+cG+bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b\neq 0)$	$\simeq P_{14,4}$
$\widetilde{P}_{14,11}$	F_{14}	4	X_4	$L_3+cG+bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b\neq 0)$	$\simeq P_{14,7}$
$\widetilde{P}_{14,12}$		3	0	$L_3+cG+bX_3,\ P_1,\ P_2\ (b\neq 0)$	$\simeq P_{14,8}$
$\widetilde{P}_{16,13}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$P_1+X_0,\ P_2$	
$\widetilde{P}_{16,14}$		6	X_0, X_1, X_2, X_4	$P_1+X_3,\ P_2$	$\simeq P_{16,3}$
$\widetilde{P}_{16,15}$		5	X_1, X_2, X_4	$P_1+e_0X_0+e_3X_3,\ P_2+g_0X_0+g_3X_3$	
$\widetilde{P}_{16,16}$		5	X_1, X_3, X_4	$P_1+e_2X_2,\ P_2+g_0X_0+g_2X_2$	
$\widetilde{P}_{16,17}$		5	X_4, X_1, X_3+bX_2	$P_1+e_2X_2,\ P_2+g_0X_0+g_2X_2$	
$\widetilde{P}_{16,18}$	F_{16}	4	X_1, X_4	$P_1+e_2X_2+e_3X_3,\ P_2+g_0X_0+g_2X_2+g_3X_3$	
$\widetilde{P}_{16,19}$		4	X_3, X_4	$P_1+e_2X_2,\ P_2+g_1X_1+g_2X_2$	
$\widetilde{P}_{16,20}$		4	$X_4, X_3+bX_2\ (b\neq 0)$	$P_1+e_2X_2,\ P_2+g_1X_1+g_2X_2$	
$\widetilde{P}_{16,21}$		3	X_3	$P_1,\ P_2+X_2$	$\simeq P_{16,10}$
$\widetilde{P}_{16,22}$		3	X_4	$P_1+e_2X_2+e_3X_3,\ P_2+g_1X_1+g_2X_2+g_3X_3$	
$\widetilde{P}_{16,23}$		2	0	$P_1+eX_2+e_3X_3,\ P_2+eX_1+g_2X_2+g_3X_3$	$\simeq P_{16,12}$
$\widetilde{P}_{17,9}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+X_0,\ P_3+hX_0\ (h\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{17,10}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3-X_0,\ P_3+hX_0\ (h\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{17,11}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+X_0,\ P_3$	
$\widetilde{P}_{17,12}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3-X_0,\ P_3$	
$\widetilde{P}_{17,13}$	F_{17}	6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,2}$
$\widetilde{P}_{17,14}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,2}$
$\widetilde{P}_{17,15}$		5	X_1, X_2, X_4	$L_3+dX_3,\ P_3+X_0\ (d\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{17,16}$		5	X_1, X_2, X_4	$L_3+dX_3,\ P_3-X_0\ (d\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{17,17}$		5	X_1, X_2, X_4	$L_3+dX_3,\ P_3$	
$\widetilde{P}_{17,18}$		5	X_1, X_2, X_4	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,3}$

Продолжение табл. 4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\tilde{P}_{17,19}$		5	X_1, X_2, X_4	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,3}$
$\tilde{P}_{17,20}$		4	X_1, X_2	$L_3+X_4,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,21}$		4	X_1, X_2	$L_3-X_4,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,22}$		4	X_1, X_2	$L_3+X_4,\ P_3$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,23}$		4	X_1, X_2	$L_3-X_4,\ P_3$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,24}$		4	X_1, X_2	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,25}$		4	X_1, X_2	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,5}$
$\tilde{P}_{17,26}$		4	X_3, X_4	$L_3+X_0,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	
$\tilde{P}_{17,27}$		4	X_3, X_4	$L_3-X_0,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	
$\tilde{P}_{17,28}$		4	X_3, X_4	$L_3+X_0,\ P_3$	
$\tilde{P}_{17,29}$	F_{17}	4	X_3, X_4	$L_3-X_0,\ P_3$	
$\tilde{P}_{17,30}$		4	X_3, X_4	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,6}$
$\tilde{P}_{17,31}$		4	X_3, X_4	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,6}$
$\tilde{P}_{17,32}$		3	X_4	$L_3+dX_3,\ P_3+X_0$	
$\tilde{P}_{17,33}$		3	X_4	$L_3+dX_3,\ P_3-X_0$	
$\tilde{P}_{17,34}$		3	X_4	$L_3+dX_3,\ P_3 \quad (d\neq 0)$	
$\tilde{P}_{17,35}$		3	X_4	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,7}$
$\tilde{P}_{17,36}$		3	X_4	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,7}$
$\tilde{P}_{17,37}$		2	0	$L_3+X_4,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{17,38}$		2	0	$L_3-X_4,\ P_3+hX_0 \quad (h\neq 0)$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{17,39}$		2	0	$L_3+X_4,\ P_3$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{17,40}$		2	0	$L_3-X_4,\ P_3$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{17,41}$		2	0	$L_3,\ P_3+X_0$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{17,42}$		2	0	$L_3,\ P_3-X_0$	$\simeq P_{17,8}$
$\tilde{P}_{18,17}$		6	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ L_3+dX_3 \quad (a\neq 0), (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,4}$
$\tilde{P}_{18,18}$		6	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ L_3 \quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,4}$
$\tilde{P}_{18,19}$		6	X_0, X_1, X_2, X_4	$G,\ L_3+dX_3 \quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,4}$

Продолжение табл. 4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{18,20}$		5	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a,d\neq 0)$	$\simeq P_{18,6}$
$\widetilde{P}_{18,21}$	F_{18}	5	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,6}$
$\widetilde{P}_{18,22}$		5	X_1, X_2, X_4	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,6}$
$\widetilde{P}_{18,23}$		5	X_0, X_1, X_2	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a,d\neq 0)$	$\simeq P_{18,8}$
$\widetilde{P}_{18,24}$		5	X_0, X_1, X_2	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,8}$
$\widetilde{P}_{18,25}$		5	X_0, X_1, X_2	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,8}$
$\widetilde{P}_{18,26}$		4	X_0, X_4	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a,d\neq 0)$	$\simeq P_{18,11}$
$\widetilde{P}_{18,27}$		4	X_0, X_4	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,11}$
$\widetilde{P}_{18,28}$		4	X_0, X_4	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,11}$
$\widetilde{P}_{18,29}$		4	X_1, X_2	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a\neq 0,\ d\neq 0)$	$\simeq P_{18,12}$
$\widetilde{P}_{18,30}$		4	X_1, X_2	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,12}$
$\widetilde{P}_{18,31}$		4	X_1, X_2	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,12}$
$\widetilde{P}_{18,32}$	F_{18}	3	X_0	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a\neq 0, d\neq 0)$	$\simeq P_{18,13}$
$\widetilde{P}_{18,33}$		3	X_0	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,13}$
$\widetilde{P}_{18,34}$		3	X_0	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,13}$
$\widetilde{P}_{18,35}$		3	X_4	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a\neq 0)\ (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,15}$
$\widetilde{P}_{18,36}$		3	X_4	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,15}$
$\widetilde{P}_{18,37}$		3	X_4	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,15}$
$\widetilde{P}_{18,38}$		2	0	$G+aX_3,\ L_3+dX_3\quad (a\neq 0, d\neq 0)$	$\simeq P_{18,16}$
$\widetilde{P}_{18,39}$		2	0	$G+aX_3,\ L_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{18,16}$
$\widetilde{P}_{18,40}$		2	0	$G\ ,\ L_3+dX_3\quad (d\neq 0)$	$\simeq P_{18,16}$
$\widetilde{P}_{19,15}$		6	X_0, X_1, X_3, X_4	$G+aX_2,\ P_3\quad (a>0)$	$\simeq P_{19,3}$
$\widetilde{P}_{19,16}$		5	X_0, X_3, X_4	$G+aX_1,\ P_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{19,4}$
$\widetilde{P}_{19,17}$		5	X_1, X_3, X_4	$G+aX_2,\ P_3\quad (a>0)$	$\simeq P_{19,5}$
$\widetilde{P}_{19,18}$		5	X_1, X_2, X_4	$G+aX_3,\ P_3\quad (a\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,19}$		5	X_2, X_4, X_1+bX_3	$G+\tilde{a}_3X_3,\ P_3\quad (\tilde{a}_3\neq 0)\ (b\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,20}$	F_{19}	4	X_1, X_4	$G+a_2X_2+a_3X_3,\ P_3\quad (a_2>0, a_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,21}$		4	X_1, X_4	$G+a_2X_2,\ P_3\quad (a_2>0)$	$\simeq P_{19,8}$
$\widetilde{P}_{19,22}$		4	X_1, X_4	$G+a_3X_3,\ P_3\quad (a_3\neq 0)$	

Продолжение табл. 4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{19,23}$		4	X_3, X_4	$G+aX_1,\quad P_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{19,9}$
$\widetilde{P}_{19,24}$		4	$X_4, X_2+bX_3\ (b\neq 0)$	$G+a_1X_1+\tilde{a}_3X_3,\quad P_3\quad (a_1\neq 0, \tilde{a}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,25}$		4	$X_4, X_2+bX_3\ (b\neq 0)$	$G+a_1X_1,\quad P_3\quad (a_1\neq 0)$	$\simeq P_{19,11}$
$\widetilde{P}_{19,26}$		4	$X_4, X_2+bX_3\ (b\neq 0)$	$G+\tilde{a}_3X_3,\quad P_3\quad (\tilde{a}_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,27}$		3	X_4	$G+a_1X_1+a_3X_3,\quad P_3\quad (a_1\neq 0, a_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,28}$		3	X_4	$G+a_1X_1,\quad P_3\quad (a_1\neq 0)$	$\simeq P_{19,12}$
$\widetilde{P}_{19,29}$		3	X_4	$G+a_3X_3,\quad P_3\quad (a_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{19,30}$		3	X_1	$G+a_2X_2,\quad P_3\quad (a_2 > 0)$	$\simeq P_{19,13}$
$\widetilde{P}_{19,31}$		2	0	$G+aX_1,\quad P_3\quad (a\neq 0)$	$\simeq P_{19,14}$
$\widetilde{P}_{20,9}$	F_{20}	5	X_1, X_2, X_4	$L_3+dG+\alpha_3X_3,\quad P_3\quad (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{20,10}$		3	X_4	$L_3+dG+\alpha_3X_3,\quad P_3\quad (\alpha_3\neq 0)$	
$\widetilde{P}_{21,15}$		5	X_0, X_1, X_3, X_4	P_3+X_2	$\simeq P_{21,2}$
$\widetilde{P}_{21,16}$		5	X_0, X_1, X_3, X_4	P_3-X_2	$\simeq P_{21,2}$
$\widetilde{P}_{21,17}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4	P_3+X_0	$\simeq P_{21,3}$
$\widetilde{P}_{21,18}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4	P_3-X_0	$\simeq P_{21,3}$
$\widetilde{P}_{21,19}$		4	X_0, X_3, X_4	P_3+X_1	$\simeq P_{21,4}$
$\widetilde{P}_{21,20}$		4	X_0, X_3, X_4	P_3-X_1	$\simeq P_{21,4}$
$\widetilde{P}_{21,21}$		4	X_1, X_3, X_4	P_3+X_0	$\simeq P_{21,5}$
$\widetilde{P}_{21,22}$		4	X_1, X_3, X_4	P_3-X_0	$\simeq P_{21,5}$
$\widetilde{P}_{21,23}$		4	X_1, X_3, X_4	P_3+X_2	$\simeq P_{21,5}$
$\widetilde{P}_{21,24}$		4	X_1, X_3, X_4	P_3-X_2	$\simeq P_{21,5}$
$\widetilde{P}_{21,25}$		4	X_1, X_2, X_4	P_3+X_0	$\simeq P_{21,6}$
$\widetilde{P}_{21,26}$		4	X_1, X_2, X_4	P_3-X_0	$\simeq P_{21,6}$
$\widetilde{P}_{21,27}$		4	X_2, X_4, X_1+bX_3	P_3+X_0	$\simeq P_{21,7}$
$\widetilde{P}_{21,28}$		4	X_2, X_4, X_1+bX_3	P_3-X_0	$\simeq P_{21,7}$
$\widetilde{P}_{21,29}$		4	X_2, X_4, X_1+bX_3	P_3+X_1	$\simeq P_{21,7}$
$\widetilde{P}_{21,30}$		4	X_2, X_4, X_1+bX_3	P_3-X_1	$\simeq P_{21,7}$
$\widetilde{P}_{21,31}$		3	X_1, X_2	P_3+X_0	$\simeq P_{21,8}$

Продолжение табл.4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{21,32}$		3	X_1, X_2	$P_3 - X_0$	$\simeq P_{21,8}$
$\widetilde{P}_{21,33}$		3	X_1, X_4	$P_3 + X_0$	$\simeq P_{21,9}$
$\widetilde{P}_{21,34}$		3	X_1, X_4	$P_3 - X_0$	$\simeq P_{21,9}$
$\widetilde{P}_{21,35}$		3	X_1, X_4	$P_3 + X_2$	$\simeq P_{21,9}$
$\widetilde{P}_{21,36}$		3	X_1, X_4	$P_3 - X_2$	$\simeq P_{21,9}$
$\widetilde{P}_{21,37}$		3	X_3, X_4	$P_3 + X_0 + \widetilde{h} X_1 \quad (\widetilde{h} \neq 0)$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,38}$		3	X_3, X_4	$P_3 - X_0 + \widetilde{h} X_1 \quad (\widetilde{h} \neq 0)$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,39}$		3	X_3, X_4	$P_3 + X_0$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,40}$		3	X_3, X_4	$P_3 - X_0$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,41}$		3	X_3, X_4	$P_3 + X_1$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,42}$		3	X_3, X_4	$P_3 - X_1$	$\simeq P_{21,10}$
$\widetilde{P}_{21,43}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 + X_1 + h_2' X_2 \quad (h_2', b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,44}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 - X_1 + h_2' X_2 \quad (h_2', b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,45}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 + X_2 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,46}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 - X_2 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,47}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 + X_1 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,48}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 - X_1 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,49}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 + X_0 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,50}$		3	$X_4, X_1 + b X_3$	$P_3 - X_0 \quad (b \neq 0)$	$\simeq P_{21,11}$
$\widetilde{P}_{21,51}$		2	$X_1,$	$P_3 + X_0 + h X_2 \quad (h \neq 0)$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,52}$		2	X_1	$P_3 - X_0 + h X_2 \quad (h \neq 0)$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,53}$		2	X_1	$P_3 + X_0$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,54}$		2	X_1	$P_3 - X_0$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,55}$		2	X_1	$P_3 + X_2$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,56}$		2	X_1	$P_3 - X_2$	$\simeq P_{21,12}$
$\widetilde{P}_{21,57}$		2	X_4	$P_3 + X_0 + \widetilde{h} X_1 \quad (\widetilde{h} \neq 0)$	$\simeq P_{21,13}$
$\widetilde{P}_{21,58}$		2	X_4	$P_3 - X_0 + \widetilde{h} X_1 \quad (\widetilde{h} \neq 0)$	$\simeq P_{21,13}$

Продолжение табл.4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$			Примечание
$\tilde{P}_{21,59}$			X_4	P_3+X_0		$\simeq P_{21,13}$
$\tilde{P}_{21,60}$			X_4	P_3-X_0		$\simeq P_{21,13}$
$\tilde{P}_{21,61}$			X_4	P_3+X_1		$\simeq P_{21,13}$
$\tilde{P}_{21,62}$			X_4	P_3-X_1		$\simeq P_{21,13}$
$\tilde{P}_{21,63}$			0	$P_3+X_0+\tilde{h}X_1$	$(\tilde{h}\neq 0)$	$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{21,64}$			0	$P_3-X_0+\tilde{h}X_1$	$(\tilde{h}\neq 0)$	$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{21,65}$			0	P_3+X_0		$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{21,66}$			0	P_3-X_0		$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{21,67}$			0	P_3+X_1		$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{21,68}$			0	P_3-X_1		$\simeq P_{21,14}$
$\tilde{P}_{22,17}$		5	X_0, X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3$	$(a_3>0)$	$\simeq P_{22,3}$
$\tilde{P}_{22,18}$		4	X_0, X_1, X_2	$G+a_3X_3$	$(a_3>0)$	$\simeq P_{22,5}$
$\tilde{P}_{22,19}$		4	X_0, X_1, X_4	$G+\tilde{\alpha}_2X_2$	$(\tilde{\alpha}_2>0)$	$\simeq P_{22,6}$
$\tilde{P}_{22,20}$		4	X_1, X_2, X_4	$G+a_3X_3$	$(a_3>0)$	$\simeq P_{22,8}$
$\tilde{P}_{22,21}$		3	X_0, X_1	$G+\tilde{\alpha}_2X_2$	$(\tilde{\alpha}_2>0)$	$\simeq P_{22,9}$
$\tilde{P}_{22,22}$	F_{22}	3	X_0, X_4	$G+cX_1$	$(c\neq 0)$	$\simeq P_{22,10}$
$\tilde{P}_{22,23}$		3	X_1, X_2	$G+a_3X_3$	$(a_3>0)$	$\simeq P_{22,11}$
$\tilde{P}_{22,24}$		3	X_1, X_4	$G+\tilde{\alpha}_2X_2$	$(\tilde{\alpha}_2>0)$	$\simeq P_{22,12}$
$\tilde{P}_{22,25}$		2	X_0	$G+cX_1$	$(c\neq 0)$	$\simeq P_{22,13}$
$\tilde{P}_{22,26}$		2	X_1	$G+\tilde{\alpha}_2X_2$	$(\tilde{\alpha}_2>0)$	$\simeq P_{22,14}$
$\tilde{P}_{22,27}$		2	X_4	$G+cX_1$	$(c\neq 0)$	$\simeq P_{22,15}$
$\tilde{P}_{22,28}$		1	0	$G+cX_1$	$(c\neq 0)$	$\simeq P_{22,16}$
$\tilde{P}_{23,9}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,2}$
$\tilde{P}_{23,10}$		4	X_1, X_2, X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,3}$
$\tilde{P}_{23,11}$	F_{23}	3	X_1, X_2	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,5}$
$\tilde{P}_{23,12}$		3	X_3, X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,6}$
$\tilde{P}_{23,13}$		2	X_4	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,7}$
$\tilde{P}_{23,14}$		1	0	$L_3+\varepsilon P_3+\alpha_0X_0$	$(\alpha_0\neq 0)$	$\simeq P_{23,8}$

Продолжение табл. 4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	dim $\tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\tilde{P}_{24,17}$		5	X_0, X_1, X_2, X_4	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,3}$
$\tilde{P}_{24,18}$		4	X_1, X_2, X_4	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,6}$
$\tilde{P}_{24,19}$		4	X_0, X_1, X_2	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,8}$
$\tilde{P}_{24,20}$	F_{24}	3	X_0, X_4	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,10}$
$\tilde{P}_{24,21}$		3	X_1, X_2	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,11}$
$\tilde{P}_{24,22}$		2	X_0	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,14}$
$\tilde{P}_{24,23}$		2	X_4	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,15}$
$\tilde{P}_{24,24}$		1	0	$L_3+eG+\tilde{\varkappa}_3X_3$ $(\tilde{\varkappa}_3\neq 0)$	$\simeq P_{24,16}$
$\tilde{P}_{27,7}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4-X_0	$P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0$, $L_3+\tilde{d}_0X_0$ $(\tilde{s}_0, \tilde{d}_0\neq 0)$	
$\tilde{P}_{27,8}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4-X_0	$P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0$, L_3 $(\tilde{s}_0\neq 0)$	$\simeq P_{27,2}$
$\tilde{P}_{27,9}$		6	X_1, X_2, X_3, X_4-X_0	P_3+C_3, $L_3+\tilde{d}_0X_0$ $(\tilde{d}_0\neq 0)$	
$\tilde{P}_{27,10}$		5	X_0, X_3, X_4-X_0	P_3+C_3, $L_3+d_4X_4$ $(d_4\neq 0)$	
$\tilde{P}_{27,11}$	F_{27}	4	X_1, X_2	$P_3+C_3+s_0X_0$, $L_3+d(X_0+X_4)$ $(s_0, d\neq 0)$	$\simeq P_{27,4}$
$\tilde{P}_{27,12}$		4	X_1, X_2	$P_3+C_3+s_0X_0$, L_3 $(s_0\neq 0)$	$\simeq P_{27,4}$
$\tilde{P}_{27,13}$		4	X_1, X_2	P_3+C_3, $L_3+d(X_0+X_4)$ $(d\neq 0)$	$\simeq P_{27,4}$
$\tilde{P}_{27,14}$		4	X_3, X_4-X_0	$P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0$, $L_3+\tilde{d}_0X_0$ $(\tilde{s}_0, \tilde{d}_0\neq 0)$	
$\tilde{P}_{27,15}$		4	X_3, X_4-X_0	$P_3+C_3+\tilde{s}_0X_0$, L_3 $(\tilde{s}_0\neq 0)$	$\simeq P_{27,5}$
$\tilde{P}_{27,16}$		4	X_3, X_4-X_0	P_3+C_3, $L_3+\tilde{d}_0X_0$ $(\tilde{d}_0\neq 0)$	
$\tilde{P}_{27,17}$		2	0	$P_3+C_3+s_0X_0$, $L_3+d(X_0+X_4)$ $(s_0, d\neq 0)$	$\simeq P_{27,6}$
$\tilde{P}_{27,18}$		2	0	$P_3+C_3+s_0X_0$, L_3 $(s_0\neq 0)$	$\simeq P_{27,6}$
$\tilde{P}_{27,19}$		2	0	P_3+C_3, $L_3+d(X_0+X_4)$ $(d\neq 0)$	$\simeq P_{27,6}$
$\tilde{P}_{28,25}$		5	X_0, X_1, X_2, X_3	L_3+X_4	$\simeq P_{28,2}$
$\tilde{P}_{28,26}$		5	X_0, X_1, X_2, X_3	L_3-X_4	$\simeq P_{28,2}$
$\tilde{P}_{28,27}$		5	X_0, X_1, X_2, X_4	$L_3+d_3X_3$ $(d_3\neq 0)$	$\simeq P_{28,3}$
$\tilde{P}_{28,28}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3+X_0	$\simeq P_{28,4}$
$\tilde{P}_{28,29}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4	L_3-X_0	$\simeq P_{28,4}$
$\tilde{P}_{28,30}$		5	X_1, X_2, X_3, X_4+X_0	$L_3+\tilde{d}_0X_0$ $(\tilde{d}_0>0)$	$\simeq P_{28,5}$

Продолжение табл. 4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	dim $\tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\tilde{P}_{28,31}$		5	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	$L_3 + \tilde{a}_0 X_0$ $(\tilde{a}_0 > 0)$	$\simeq P_{28,6}$
$\tilde{P}_{28,32}$		4	X_0, X_1, X_2	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,7}$
$\tilde{P}_{28,33}$		4	X_0, X_1, X_2	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,7}$
$\tilde{P}_{28,34}$		4	X_0, X_1, X_2	$L_3 + d_3 X_3$ $(d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,7}$
$\tilde{P}_{28,35}$	F_{28}	4	X_1, X_2, X_3	$L_3 + d(X_0 + X_4)$ $(d \neq 0)$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,36}$		4	X_1, X_2, X_3	$L_3 + d(X_0 - X_4)$ $(d \neq 0)$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,37}$		4	X_1, X_2, X_3	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,38}$		4	X_1, X_2, X_3	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,39}$		4	X_1, X_2, X_3	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,40}$		4	X_1, X_2, X_3	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,9}$
$\tilde{P}_{28,41}$		4	X_1, X_2, X_4	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,10}$
$\tilde{P}_{28,42}$		4	X_1, X_2, X_4	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,10}$
$\tilde{P}_{28,43}$		4	X_1, X_2, X_4	$L_3 + d_3 X_3$ $(d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,10}$
$\tilde{P}_{28,44}$		4	$X_1, X_2, X_0 + X_4$	$L_3 + d_3 X_3 + \tilde{a}_4 X_4$ $(d_3 \neq 0, \tilde{a}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,11}$
$\tilde{P}_{28,45}$		4	$X_1, X_2, X_0 + X_4$	$L_3 + d_3 X_3$ $(d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,11}$
$\tilde{P}_{28,46}$		4	$X_1, X_2, X_0 + X_4$	$L_3 + \tilde{a}_4 X_4$ $(\tilde{a}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,11}$
$\tilde{P}_{28,47}$		4	$X_1, X_2, X_0 - X_4$	$L_3 + d_3 X_3 + d X_4$ $(d > 0, d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,12}$
$\tilde{P}_{28,48}$		4	$X_1, X_2, X_0 - X_4$	$L_3 + d_3 X_3$ $(d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,12}$
$\tilde{P}_{28,49}$		4	$X_1, X_2, X_0 - X_4$	$L_3 + d X_4$ $(d > 0)$	$\simeq P_{28,12}$
$\tilde{P}_{28,50}$		3	X_0, X_3	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,13}$
$\tilde{P}_{28,51}$		3	X_0, X_3	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,13}$
$\tilde{P}_{28,52}$		3	X_0, X_4	$L_3 + d_3 X_3$ $(d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,14}$
$\tilde{P}_{28,53}$		3	X_1, X_2	$L_3 + \tilde{a}(X_0 + X_4)$ $(\tilde{a} \neq 0)$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,54}$		3	X_1, X_2	$L_3 + \tilde{a}(X_0 - X_4)$ $(\tilde{a} \neq 0)$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,55}$		3	X_1, X_2	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,56}$		3	X_1, X_2	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,57}$		3	X_1, X_2	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,15}$

Продолжение табл. 4

$\tilde{P}_{j,k}$	F_j	dim $\tilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\tilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\tilde{P}_{28,58}$		3	X_1, X_2	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,59}$		3	X_1, X_2	$L_3 + d_3 X_3 \quad (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,15}$
$\tilde{P}_{28,60}$		3	X_3, X_4	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,16}$
$\tilde{P}_{28,61}$		3	X_3, X_4	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,16}$
$\tilde{P}_{28,62}$		3	$X_3, X_0 + X_4$	$L_3 + \tilde{d}_4 X_4 \quad (\tilde{d}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,17}$
$\tilde{P}_{28,63}$		3	$X_3, X_0 - X_4$	$L_3 + \tilde{d}_4 X_4 \quad (\tilde{d}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,18}$
$\tilde{P}_{28,64}$		2	X_0	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,19}$
$\tilde{P}_{28,65}$		2	X_0	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,19}$
$\tilde{P}_{28,66}$		2	X_0	$L_3 + d_3 X_3 \ (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,19}$
$\tilde{P}_{28,67}$		2	X_3	$L_3 + d(X_0 + X_4) \quad (d \neq 0)$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,68}$		2	X_3	$L_3 + d(X_0 - X_4) \quad (d \neq 0)$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,69}$		2	X_3	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,70}$		2	X_3	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,71}$		2	X_3	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,72}$		2	X_3	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,20}$
$\tilde{P}_{28,73}$		2	X_4	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,21}$
$\tilde{P}_{28,74}$		2	X_4	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,21}$
$P_{28,75}$		2	X_4	$L_3 + d_3 X_3 \ (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,21}$
$\tilde{P}_{28,76}$		2	$X_0 + X_4$	$L_3 + d_3 X_3 + \tilde{d}_4 X_4 \quad (d_3 \neq 0, \tilde{d}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,22}$
$\tilde{P}_{28,77}$		2	$X_0 + X_4$	$L_3 + d_3 X_3 \quad (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,22}$
$\tilde{P}_{28,78}$		2	$X_0 + X_4$	$L_3 + \tilde{d}_4 X_4 \quad (\tilde{d}_4 > 0)$	$\simeq P_{28,22}$
$\tilde{P}_{28,79}$		2	$X_0 - X_4$	$L_3 + d_3 X_3 + d X_4 \quad (d_3 \neq 0, d > 0)$	$\simeq P_{28,23}$
$\tilde{P}_{28,80}$		2	$X_0 - X_4$	$L_3 + d_3 X_3 \quad (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,23}$
$\tilde{P}_{28,81}$		2	$X_0 - X_4$	$L_3 + d X_4 \quad (d > 0)$	$\simeq P_{28,23}$
$\tilde{P}_{28,82}$		1	0	$L_3 + \tilde{d}(X_0 + X_4) \quad (\tilde{d} \neq 0)$	$\simeq P_{28,24}$
$\tilde{P}_{28,83}$		1	0	$L_3 + \tilde{d}(X_0 - X_4) \quad (\tilde{d} \neq 0)$	$\simeq P_{28,24}$
$\tilde{P}_{28,84}$		1	0	$L_3 + X_0$	$\simeq P_{28,24}$

Продолжение табл.4

$\widetilde{P}_{j,k}$	F_j	$\dim \widetilde{P}_{j,k}$	Генераторы $\widetilde{P}_{j,k}$		Примечание
$\widetilde{P}_{28,85}$		1	0	$L_3 - X_0$	$\simeq P_{28,24}$
$\widetilde{P}_{28,86}$		1	0	$L_3 + X_4$	$\simeq P_{28,24}$
$\widetilde{P}_{28,87}$		1	0	$L_3 - X_4$	$\simeq P_{28,24}$
$\widetilde{P}_{28,88}$		1	0	$L_3 + d_3 X_3 \quad (d_3 \neq 0)$	$\simeq P_{28,24}$
$\widetilde{P}_{29,7}$		5	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	$P_3 + C_3 + e L_3 + \tilde{\tau}_0 X_0 \quad (\tilde{\tau}_0 \neq 0)$	$\simeq P_{29,2}$
$\widetilde{P}_{29,8}$	F_{29}	3	X_1, X_2	$P_3 + C_3 + e L_3 + \tilde{\tau}_0 X_0 \quad (\tilde{\tau}_0 \neq 0)$	$\simeq P_{29,4}$
$\widetilde{P}_{29,9}$		3	$X_3, X_4 - X_0$	$P_3 + C_3 + e L_3 + \tilde{\tau}_0 X_0 \quad (\tilde{\tau}_0 \neq 0)$	$\simeq P_{29,5}$
$\widetilde{P}_{29,10}$		1	0	$P_3 + C_3 + e L_3 + \tilde{\tau}_0 X_0 \quad (\tilde{\tau}_0 \neq 0)$	$\simeq P_{29,6}$
$\widetilde{P}_{31,4}$	F_{31}	8	$X_1, X_2, X_3, X_4 - X_0$	$L_i + \frac{\varepsilon}{2}(P_i + C_i),\ L_3 - \frac{\varepsilon}{2}(P_3 + C_3) + \tilde{u}_0 X_0 \quad (\tilde{u}_0 \neq 0) \ (i = 1,2,3)$.	
$P_{31,5}$		4	0	$L_i + \frac{\varepsilon}{2}(P_i + C_i),\ L_3 - \frac{\varepsilon}{2}(P_3 + C_3) + u(X_0 + X_4) \ (u \neq 0)(i = 1,2,3)$	$\simeq P_{31,3}$

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ $P(1,4)$.

В этой главе рассмотрены приложения некоторых из полученных подалгебр для нахождения точных решений уравнения Даламбера с потенциалом. Помимо этого, найдено несколько частных решений нелинейного волнового уравнения, инвариантных относительно определенных подгрупп группы $P(1,4)$, на основании метода, предложенного в работе [8].

§ I. Некоторые точные решения обобщенного пятимерного уравнения Даламбера.

Рассмотрим уравнение вида

$$\left(\Box_5 + \varkappa^2 \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = 0 , \tag{3.I}$$

где

$$\Box_5 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} .$$

Оно является простейшим уравнением, инвариантным относительно обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, алгебра Ли которой задается 15 генераторами

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \; (\mu,\nu = 0,1,2,3,4) \quad \text{и} \quad P'_\mu \; (\mu = 0,1,2,3,4),$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям вида:

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0 , \quad [M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu ,$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho} ,$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ – метрический тензор с компонентами

$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.

В дальнейшем мы будем вместо генераторов $M_{\mu\nu}$ и P'_μ использовать следующие линейные комбинации:

$$G = M'_{40}\ ,\ L_1 = M'_{32}\ ,\ L_2 = -M'_{31}\ ,\ L_3 = M'_{21}\ ,\ P_a = M'_{4a} - M'_{a0}\ ,$$

$$C_a = M'_{4a} + M'_{a0}\ ,\ X_0 = \frac{1}{2}(P'_0 - P'_4)\ ,\ X_k = P'_k\ ,\ X_4 = \frac{1}{2}(P'_0 + P'_4)$$

$$(a = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3).$$

Уравнение (3.1) может быть интерпретировано как уравнение движения свободной частицы с нулевым спином, но с переменной массой $m = \sqrt{x^2 + P_4^2}$.

Рассмотрим обобщенное уравнение (3.1)

$$L\varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = 0\ , \qquad (3.2)$$

$$L = \Box_5 + x^2 + \alpha V(x_0, \vec{x}, x_4) + \beta A_\mu(x_0, \vec{x}, x_4) P'_\mu\ ,$$

где V , $A_\mu\ (\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$ – произвольные дифференцируемые функции координат, $P'_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ – дифференциальные операторы первого порядка, α и β – некоторые коэффициенты (константы взаимодействия). При $\alpha = \beta = 0$ (3.2) сводится к (3.1). При $\alpha \neq \beta \neq 0$ (3.2) можно интерпретировать как уравнение движения частицы с переменной массой, которая взаимодействует с окружающей средой.

Уравнение (3.2) в общем случае имеет более низкую симметрию чем (3.1). Исследуем вопрос, какие ограничения налагает на V и A_μ требование, чтобы уравнение (3.2) сохраняло инвариантность относительно некоторой подалгебры алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Будем говорить, что уравнение (3.2) инвариантно относительно набора операторов Q_A , если имеет место соотношение вида:

$$[Q_A, L] = 0 \qquad (3.3)$$

Для базисных элементов $\{ P'_\mu, M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ алгебры Ли группы $P(1,4)$ выберем следующее представление

$$P'_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu. \tag{3.4}$$

Переходим к рассмотрению различных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$. Для каждой из них найдем инвариантные уравнения и операторы Казимира. Операторами Казимира абелевых подалгебр рассмотренных алгебр будут их базисные элементы. Так как операторы Казимира алгебры и ее абелевой подалгебры перестановочны с оператором исследуемого уравнения, то все эти операторы имеют общие собственные функции. Поэтому, вместо инвариантного уравнения будем получать целую систему.

Решение этой системы будем искать методом разделения переменных, т.е. в виде:

$$\varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = \varphi_0(x_0)\, \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2)\, \varphi_3(x_3)\, \varphi_4(x_4). \tag{3.5}$$

Далее подставляем (3.5) в исследуемую систему уравнений. В этой системе все уравнения (в случае полного разделения переменных) или часть уравнений (в случае частичного разделения переменных) будут обыкновенными. Решив последние, получим явный вид частного решения (в случае полного разделения переменных) или выражения для некоторых $\varphi_k(x_k)$ из (3.5).

Учитывая это, подставляем (3.5) в инвариантное уравнение. Проиллюстрируем это на примере.

Подалгебра трансляций вдоль оси x_3. Инвариантное уравнение имеет вид

$$\left(\Box_5 + \varkappa^2 + \alpha V(x_0, x_1, x_2, x_4) + \beta A_\mu (x_0, x_1, x_2, x_4) P'_\mu \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = 0. \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.6) будем искать методом разделения переменных, т.е. в виде:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\varphi_3(x_3)\,\varphi_4(x_4).$$

Так как операторы X_3 и L коммутируют, то они имеют общие собственные функции:

$$\left(\Box_5 + \alpha V(x_0,x_1,x_2,x_4) + \beta A_\mu(x_0,x_1,x_2,x_4)\,P'_\mu\right)\varphi = -\varkappa^2\varphi,$$
$$X_3\varphi = k_3\varphi. \tag{3.7}$$

Подставляя функцию (3.5) в уравнения (3.7) получаем:

$$\left(\Box_5 + \alpha V(x_0,x_1,x_2,x_4) + \beta A_\mu(x_0,x_1,x_2,x_4)\,P'_\mu\right)\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\times$$
$$\times\,\varphi_3(x_3)\varphi_4(x_4) = -\varkappa^2\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_3(x_3)\varphi_4(x_4)$$
$$-i\frac{d}{dx_3}\varphi_3(x_3) = k_3\varphi_3(x_3). \tag{3.8}$$

Решая второе уравнение относительно $\varphi_3(x_3)$ получаем:

$$\varphi_3(x_3) = \exp(i k_3 x_3). \tag{3.9}$$

Тогда функция (3.5) имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \exp(i k_3 x_3)\,\varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\varphi_4(x_4) \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в инвариантное уравнение, получаем

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_0,x_1,x_2,x_4) + \beta A_0(x_0,x_1,x_2,x_4)\times$$
$$\times P'_0 - \beta A_1(x_0,x_1,x_2,x_4)\,P'_1 + A_2(x_0,x_1,x_2,x_4)\,P'_2\beta - \beta A_3(x_0,x_1,x_2,x_4)\times \tag{3.11}$$
$$\times k_3 - A_4(x_0,x_1,x_2,x_4)\,P'_4 + k_3^2\Big)\tilde{\varphi} = -\varkappa^2\tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\varphi} \equiv \varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\varphi_4(x_4)$.

Аналогично будем искать решения, используя другие подалгебры. Часть приведенных выше рассуждений будем опускать. Для каждой подалгебры напишем инвариантное уравнение, соответствующую ему систему уравнений, решение всех (в некоторых случаях полного разделения) или части (в случае неполного разделения) уравнений этой системы и уравнения, к которым приводятся исследуемые уравнения.

Подалгебра трансляций плоскости. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left(\Box_5 + \alpha V(x_0, x_3, x_4) + \beta A_\mu(x_0, x_3, x_4) P'_\mu \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4). \tag{3.12}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{gathered} (\Box_5 + \alpha V(x_0, x_3, x_4) + \beta A_\mu(x_0, x_3, x_4) P'_\mu \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4), \\ X_1 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_1 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4), \\ X_2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Решая последние два уравнения, получаем:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1) = \exp(i k_1 x_1), \\ \varphi_2(x_2) = \exp(i k_2 x_2). \end{gathered} \tag{3.14}$$

С учетом этого решения инвариантное уравнение сводится к

$$\begin{gathered} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_0, x_3, x_4) + \beta A_0(x_0, x_3, x_4) P'_0 - \\ - \beta A_1(x_0, x_3, x_4) k_1 - \beta A_2(x_0, x_3, x_4) k_2 - \beta A_3(x_0, x_3, x_4) P'_3 - \\ - \beta A_4(x_0, x_3, x_4) P'_4 + k_1^2 + k_2^2 \Big) \tilde{\varphi} = -\varkappa^2 \tilde{\varphi}, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где $\tilde{\varphi} \equiv \varphi_0(x_0) \varphi_3(x_3) \varphi_4(x_4)$.

Подалгебра трансляций в трехмерном пространстве. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left(\Box_5 + \alpha V(x_0, x_4) + \beta A_\mu(x_0, x_4) P'_\mu \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4). \tag{3.16}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$
\begin{gathered}
\left(\Box_5+\alpha V(x_0,x_4)+\beta A_\mu(x_0,x_4)P'_\mu\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
-i\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\ -i\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
-i\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_3\varphi(x_0,\vec{x},x_4).
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

Решая три последних уравнения, находим

$$
\varphi_a(x_a)=\exp(i\,k_a x_a)\quad,\ a=1,2,3.
\tag{3.18}
$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения, получаем

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}+\alpha V(x_0,x_4)+\beta\left(A_0(x_0,x_4)P'_0-\vec{A}(x_0,x_4)\vec{k}-\right.\right.\\
\left.\left.-A_4(x_0,x_4)P'_4\right)\right]\tilde{\varphi}(x_0,x_4)=-(\varkappa^2+\vec{k}^2)\tilde{\varphi}(x_0,x_4),
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

где $\tilde{\varphi}(x_0,x_4)\equiv\varphi_0(x_0)\varphi_4(x_4)$.

Рассмотрим подалгебру, которая задается базисными элементами P'_1, P'_2, P'_3, P'_4. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$
\left(\Box_5+\alpha V(x_0)+\beta A_\mu(x_0)P'_\mu\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\quad \mu=0,1,2,3,4.
\tag{3.20}
$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$
\begin{gathered}
\left(\Box_5+\alpha V(x_0)+\beta A_\mu(x_0)P'_\mu\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
-i\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
-i\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
-i\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_3\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\ -i\frac{\partial}{\partial x_4}\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_4\varphi(x_0,\vec{x},x_4).
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

Решение четырех последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \exp i\,(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4). \qquad (3.22)$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем обыкновенное

$$\Big[\frac{d^2}{dx_0^2} + \alpha V(x_0) + \beta\big(A_0(x_0)P_0' - A_1(x_0)k_1 - A_2(x_0)k_2 - A_3(x_0)k_3 - A_4(x_0)k_4\big)\Big]\varphi_0(x_0) = -(\varkappa^2 + \vec{k}^2 + k_4^2)\,\varphi_0(x_0). \qquad (3.23)$$

Подалгебра $T(5)$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$(\Box_5 + \alpha V + \beta A_\mu P_\mu')\,\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4) \qquad (3.24)$$

где V и $A_\mu\ (\mu = 0,1,2,3,4)$ – константы.

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned}
&(\Box_5 + \alpha V + \beta A_\mu P_\mu')\,\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&P_0'\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_0\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&P_1'\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&P_2'\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&P_3'\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_3\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&P_4'\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_4\varphi(x_0,\vec{x},x_4).
\end{aligned} \qquad (3.25)$$

В этом случае переменные разделяются полностью и получается следующее частное решение рассматриваемого здесь уравнения

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \exp i\,(-k_0x_0 + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4). \qquad (3.26)$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$(\vec{k}^2 + k_4^2 - k_0^2 + \alpha V + \beta A_\mu k_\mu) = -\varkappa^2. \qquad (3.27)$$

Подалгебра $P_{28,15} = \{L_3;\ X_1, X_2\}$. Инвариантное уравнение имеет вид

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_0), x_3) x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_3,x_4)P_0' - A_3(x_0,x_3,x_4)P_3' - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A_4(x_0,x_3,x_4) P_4'\right)\right] \varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0,\vec{x},x_4) \qquad (3.28)$$

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_0,\vec{x}_3,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_3,x_4)P_0' - A_3(x_0,x_3,x_4)P_3' - \right.\right.\\
&\left.\left. - A_4(x_0,x_3,x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&-i\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&-i\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).
\end{aligned} \qquad (3.29)$$

Решение трех последних уравнений имеет вид

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \exp\{ik_1x_1 + ik_2x_2\}\,\varphi_0(x_0)\varphi_3(x_3)\varphi_4(x_4), \qquad (3.30)$$

где $k_1^2 + k_2^2 = k^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_0,x_3,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_3,x_4)P_0' - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A_3(x_0,x_3,x_4)P_3' - A_4(x_0,x_3,x_4)P_4'\right)\right]\tilde{\varphi}(x_0,x_3,x_4) = -$$

$$-(\varkappa^2 + k^2)\tilde{\varphi}(x_0,x_3,x_4) \qquad (3.31)$$

Подалгебра $P_{28,9} = \{L_3; X_1, X_2, X_3\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_0,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_4)P_0' - A_3(x_0,x_4)P_3' - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A_4(x_0,x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4). \qquad (3.32)$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_0, x_4) + \beta \left(A_0(x_0, x_4) P_0' - A_3(x_0, x_4) P_3' - \right.\right.\\
&\left.\left. - A_4(x_0, x_4) P_4'\right)\right] \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),\\
&X_i \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_i \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) \quad (i = 1, 2, 3),\\
&(X_1^2 + X_2^2) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Решение последних четырех уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = \exp(i \vec{k} \vec{r}) \tilde{\varphi}(x_0, x_4). \tag{3.34}$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_0, x_4) + \beta \left(A_0(x_0, x_4) P_0' - A_4(x_0, x_4) P_4' - \right.\right.\\
&\left.\left. - A_3(x_0, x_4) k_3\right)\right] \tilde{\varphi}(x_0, x_4) = -(\varkappa^2 + k_3^2 + k^2) \tilde{\varphi}(x_0, x_4),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Подалгебра $P_{28,11} = \{L_3, X_1, X_2, X_0 + X_4\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_3, x_4) + \beta \left(A_0(x_3, x_4) P_0' - A_3(x_3, x_4) P_3' - \right.\right.\\
&\left.\left. - A_4(x_3, x_4) P_4'\right)\right] \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_3, x_4) + \beta \left(A_0(x_3, x_4) P_0' - A_3(x_3, x_4) P_3' - \right.\right.\\
&\left.\left. - A_4(x_3, x_4) P_4'\right)\right] \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),\\
&X_1 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_1 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),\\
&X_2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),\\
&(X_0 + X_4) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_0 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),\\
&(X_1^2 + X_2^2) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Решение последних четырех уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = exp\left(i k_1 x_1 + i k_2 x_2 - i k_0 x_0\right)\tilde{\varphi}(x_3, x_4), \tag{3.38}$$

где $k_1^2 + k_2^2 = k^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$\Big[-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_3,x_4) + \beta\big(A_0(x_3,x_4)k_0 - A_3(x_3,x_4)P_3' - \\ - A_4(x_3,x_4)P_4'\big)\Big]\tilde{\varphi}(x_3,x_4) = -(\varkappa^2 + k^2 - k_0^2)\tilde{\varphi}(x_3,x_4). \tag{3.39}$$

Подалгебра $P_{28,12} = \{L_3; X_1, X_2, X_0 - X_4\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\Big[\Box_5 + \alpha V(x_0,x_3) + \beta\big(A_0(x_0,x_3)P_0' - A_3(x_0,x_3)P_3' - \\ - A_4(x_0,x_3)P_4'\big)\Big]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4) \tag{3.40}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\Big[\Box_5 + \alpha V(x_0,x_3) + \beta\big(A_0(x_0,x_3)P_0' - A_3(x_0,x_3)P_3' - \\ - A_4(x_0,x_3)P_4'\big)\Big]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$

$$X_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_1\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \tag{3.41}$$

$$X_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$

$$(X_0 - X_4)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -k_4\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$

$$(X_1^2 + X_2^2)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4) \tag{3.42}$$

Решение четырех последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = exp\, i\left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_4 x_4\right)\tilde{\varphi}(x_0,x_3), \tag{3.43}$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения, получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\alpha V(x_0,x_3)+\beta\Big(A_0(x_0,x_3)P_0'-A_3(x_0,x_3)P_3'-\right.$$
$$\left.-A_4(x_0,x_3)k_4\Big)\right]\tilde{\varphi}(x_0,x_3)=-(\varkappa^2+k^2+k_4^2)\tilde{\varphi}(x_0,x_3) \qquad (3.44)$$

Подалгебра $P_{28,5}=\{L_3;X_1,X_2,X_3,X_4+X_0$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5+\alpha V(x_4)+\beta\big(A_0(x_4)P_0'-A_3(x_4)P_3'-A_4(x_4)P_4'\big)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)= \qquad (3.45)$$
$$=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$

где $\varphi\equiv\varphi(x_0,\vec{x},x_4)$.

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\left[\Box_5+\alpha V(x_4)+\beta\big(A_0(x_4)P_0'-A_3(x_4)P_3'-A_4(x_4)P_4'\big)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$
$$X_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$
$$(X_4+X_0)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_0\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \qquad (3.46)$$
$$(X_1^2+X_2^2)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\ (a=1,2,3)$$

Решение пяти последних уравнений имеет вид

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=\exp i\,(\vec{k}\vec{z}-k_0x_0)\,\tilde{\varphi}(x_4), \qquad (3.47)$$

где $k^2=k_1^2+k_2^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем обыкновенное

$$\left[-\frac{d^2}{dx_4^2}+\alpha V(x_4)-\beta A_4(x_4)P_4'+\beta A_0(x_4)k_0-\beta A_3(x_4)k_3\right]\times \qquad (3.48)$$
$$\times\tilde{\varphi}(x_4)=-(\varkappa^2+\vec{k}^2-k_0^2)\tilde{\varphi}(x_4)$$

Подалгебра $P_{28,6}=\{L_3;X_1,X_2,X_3,X_4-X_0\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5+\alpha V(x_0)+\beta\big(A_0(x_0)P_0'-A_3(x_0)P_3'-A_4(x_0)P_4'\big)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=$$

$$=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4). \tag{3.49}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\left[\Box_5+\alpha V(x_0)+\beta\left(A_0(x_0)P_0'-A_3(x_0)P_3'-A_4(x_0)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=$$
$$=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$

$$X_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\quad (a=1,2,3) \tag{3.50}$$
$$(X_4-X_0)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_4\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$
$$(X_1^2+X_2^2)\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).$$

Решение пяти последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=\exp i(\vec{k}\vec{z}+k_4x_4)\tilde{\varphi}(x_0). \tag{3.51}$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем обыкновенное

$$\left[\frac{d^2}{dx_0^2}+\alpha V(x_0)+\beta\left(A_0(x_0)P_0'-A_3(x_0)k_3-A_4(x_0)k_4\right)\right]\tilde{\varphi}(x_0)=$$
$$=-(\varkappa^2+\vec{k}^2+k_4^2)\tilde{\varphi}(x_0), \tag{3.52}$$

где $k_1^2+k_2^2=k^2$.

Рассмотрим подалгебру, которая задается базисными элементами L_3 ; P_0', P_1', P_2', P_3', P_4'. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5+\alpha V+\beta\left(A_0P_0'-A_3P_3'-A_4P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=$$
$$=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \tag{3.53}$$

где V, A_0, A_3 и A_4 – константы.

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\left[\Box_5+\alpha V+\beta\left(A_0P_0'-A_3P_3'-A_4P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=$$
$$=-\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \tag{3.54}$$
$$P_\mu'\varphi(x_0,\vec{x},x_4)=k_\mu\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\quad \mu=0,1,2,3,4,$$

$$\left(P_1'^2 + P_2'^2\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).$$

Решение шести последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = exp\left\{i\left(\vec{k}\vec{z} + k_4x_4 - k_0x_0\right)\right\}. \qquad (3.55)$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$-k_0^2 + k^2 + k_4^2 + \alpha V + \beta\left(A_0k_0 - A_3k_3 - A_4k_4\right) = -\varkappa^2, \qquad (3.56)$$

Подалгебра $P_{15,6} = \{L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_0,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_4)P_0' - A_4(x_0,x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \qquad (3.57)$$
$$= -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_0,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_4)P_0' - A_4(x_0,x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) =$$
$$= -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),$$
$$X_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \quad (a = 1,2,3), \qquad (3.58)$$
$$\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).$$

Решение четырех последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = exp\, i(\vec{k}\vec{z})\,\tilde{\varphi}(x_0,x_4) \text{ где } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 \qquad (3.59)$$

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения, получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \alpha V(x_0,x_4) + \beta\left(A_0(x_0,x_4)P_0' - \right.\right.$$
$$\left.\left. - A_4(x_0,x_4)P_4'\right)\right]\tilde{\varphi}(x_0,x_4) = -\left(\varkappa^2 + \vec{k}^2\right)\tilde{\varphi}(x_0,x_4). \qquad (3.60)$$

Подалгебра $P_{15,3} = \{;L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3, X_0 + X_4\}$. Инвариантное уравнение имеет вид:

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_4) + \beta\left(A_0(x_4)P_0' - A_4(x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4). \tag{3.61}$$

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_4) + \beta\left(A_0(x_4)P_0' - A_4(x_4)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&X_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \quad (a=1,2,3),\\
&(X_0+X_4)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_0\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&\left(X_1^2+X_2^2+X_3^2\right)\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Решение пяти последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = \exp i\left(\vec{k}\vec{r} - k_0x_0\right)\tilde{\varphi}(x_4), \tag{3.63}$$

где $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем обыкновенное:

$$\left[-\frac{d^2}{dx_4^2} + \alpha V(x_4) - \beta A_4(x_4)P_4' + \beta A_0(x_4)k_0\right]\tilde{\varphi}(x_4) = \tag{3.64}$$
$$= -\left(\varkappa^2 + \vec{k}^2 - k_0^2\right)\tilde{\varphi}(x_4).$$

Подалгебра $P_{15,4} = \{;L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3, X_0 - X_4\}$. Уравнение инвариантное относительно данной алгебры имеет вид:

$$\left[\Box_5 + \alpha V(x_0) + \beta\left(A_0(x_0)P_0' - A_4(x_0)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4). \tag{3.65}$$

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left[\Box_5 + \alpha V(x_0) + \beta\left(A_0(x_0)P_0' - A_4(x_0)P_4'\right)\right]\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = -\varkappa^2\varphi(x_0,\vec{x},x_4),\\
&X_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4) = k_a\varphi(x_0,\vec{x},x_4), \quad (a=1,2,3),
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4),$$

$$\left(X_0 - X_4 \right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -k_4 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4).$$

Решение пяти последних уравнений имеет вид:

$$\varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = exp\, i\left(\vec{k}\vec{z} + k_4 x_4\right) \tilde{\varphi}(x_0), \tag{3.67}$$

где $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем обыкновенное

$$\left[\frac{d^2}{d x_0^2} + \alpha V(x_0) + \beta A_0(x_0) P_0' - \beta A_4(x_0) k_4\right] \tilde{\varphi}(x_0) = \tag{3.68}$$

$$= -\left(\varkappa^2 + \vec{k}^2 + k_4^2\right) \tilde{\varphi}(x_0).$$

Подалгебра $P_{33,2} = \{ ; L_1, L_2, L_3, P_1 - C_1, P_2 - C_2, P_3 - C_3, X_1, X_2, X_3, X_0 + X_4 \}$. Она изоморфна алгебре Ли группы Пуанкаре $P(1,3)$. Уравнение, инвариантное относительно этой группы имеет вид:

$$\left(\Box_5 + \alpha V(x_4) - \beta A_4(x_4) P_4'\right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4). \tag{3.69}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{gathered}
\left(\Box_5 + \alpha V(x_4) - \beta A_4(x_4) P_4'\right) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = -\varkappa^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4), \\
X_a \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_a \varphi(x_0, \vec{x}, x_4), \quad (a = 1,2,3), \\
(X_0 + X_4) \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = k_0 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4), \\
\left\{(X_0 + X_4)^2 - \left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)\right\} \varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = m^2 \varphi(x_0, \vec{x}, x_4).
\end{gathered} \tag{3.70}$$

Решая систему пяти последних уравнений, находим:

$$\varphi(x_0, \vec{x}, x_4) = exp\left\{ i\left(\vec{k}\vec{z} - k_0 x_0\right)\right\} \tilde{\varphi}(x_4), \tag{3.71}$$

где $k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = m^2$.

Учитывая это, вместо инвариантного уравнения получаем

$$\left(-\frac{d^2}{dx_4^2}+\alpha V(x_4)-\beta B_4(x_4)P_4'\right)\tilde{\varphi}(x_4)=-(\varkappa^2-m^2)\tilde{\varphi}(x_4). \qquad (3.72)$$

Рассмотрим частный случай $B_4=0$, $\alpha=1$, $V(x_4)=x_4^2$.

Учитывая это, вместо уравнения (3.72) получим:

$$\left(-\frac{d^2}{dx_4^2}+x_4^2\right)\tilde{\varphi}(x_4)=-(\varkappa^2-m^2)\tilde{\varphi}(x_4).$$

Это уравнение решается точно [I3]. Его решение имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_n(x_4)=c_n e^{-\frac{1}{2}x_4^2}H_n(x_4), \qquad (3.73)$$

где $H_n(x_4)$ – полиномы Чебышева-Эрмита.

При этом получается следующее соотношение:

$$m^2=\varkappa^2+2n+1, \quad n=0,1,2,3,\ldots \qquad (3.74)$$

Поскольку m^2 задает собственное значение оператора Казимира группы $P(1,3)$, которое обычно ассоциируется с массой элементарной частицы, то согласно (3.74), уравнение (3.69) с потенциалом $V(x_4)=x_4^2\ (\alpha=1,\ \beta=0)$ приводит к релятивистски инвариантному дискретному спектру масс.

Подведем итоги.

Применив некоторые из найденных подалгебр, получены уравнения инвариантные относительно этих подалгебр. Свойства симметрии рассмотренных уравнений применены для получения их точных решений. В зависимости от симметрии имеют место полное или частичное разделение переменных. В некоторых случаях полного разделения переменных найдены точные решения исследуемых уравнений. В остальных примерах, когда свойства симметрии позволяют произвести полное разделение переменных, рассматриваемые уравнения сведены к обыкновенным.

Для уравнения, инвариантного относительно алгебры Ли группы $P(1,3)$, переменные разделяются полностью. Полученная при этом система уравнений, при определенных ограничениях на допустимый потенциал, решена до конца. Получен релятивистски инвариантный дискретный спектр масс. В случаях частичного разделения переменных уравнения в частных производных сводятся к более простым. При этом получается явная зависимость частных решений от остальных переменных (т.е. тех, которые не входят в более простые уравнения в частных производных).

§ 2. О инвариантных решениях нелинейного волнового уравнения.

В данном параграфе найдены некоторые решения нелинейного волнового уравнения

$$\Box_5 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = \lambda u^n, \quad n \neq 1 \qquad (3.75)$$

инвариантного относительно группы $P(1,4)$, методом [8]. Для нахождения решений, инвариантных относительно некоторых подгрупп группы $P(1,4)$, необходимо знать подгрупповую структуру группы $P(1,4)$. Задача перечисления всех подгрупп (или эквивалентно, всех подалгебр) группы $P(1,4)$ решена в двух предыдущих главах данной диссертационной работы.

Пусть группа симметрии G уравнения (3.75) порождается операторами вида

$$X = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0,1,2,3,4. \qquad (3.76)$$

Предположим, что общий ранг матрицы $M = \| \xi^\mu, \eta \|$ равен

τ_*. Тогда ранг инвариантного решения уравнения [8]

$\rho = n_0 - \tau_*$, $n_0 = 5$.

Для получения решений ранга $\rho = 1$ мы должны рассмотреть решения, инвариантные относительно подгрупп ранга 4. Такие решения уравнения (3.75) будут удовлетворять некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению. Для наших целей представление алгебры Ли группы $P(1,4)$ удобно задать в виде:

$$
\begin{aligned}
&G = -\left(x_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \quad L_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\
&L_2 = -\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad L_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
&P_a = (x_4 + x_0) \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \\
&C_a = (x_4 - x_0) \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \\
&X_0 = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \quad X_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad X_4 = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \\
&(a = 1,2,3; \quad k = 1,2,3).
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

Переходим к использованию некоторых из найденных подалгебр. Подалгебра $P_{16,5}$ задается базисными элементами P_1, P_2, X_1, X_3, X_4. Общий ранг соответствующей матрицы

$$
M = \begin{vmatrix}
x_1, & x_4 + x_0, & 0, & 0, & -x_1 \\
x_2, & 0, & x_4 + x_0, & 0, & -x_2 \\
0, & -i, & 0, & 0, & 0 \\
\frac{i}{2}, & 0, & 0, & 0, & -\frac{i}{2} \\
0, & 0, & 0, & -i, & 0
\end{vmatrix}
\tag{3.78}
$$

равен 4. Универсальный инвариант $\mathcal{J}(x_0, \vec{x}, x_4, u)$ удовлетворяет системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&P_1\mathcal{J} = (x_4 + x_0)\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_1} + x_1\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_0} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_4}\right) = 0\,,\\
&P_2\mathcal{J} = (x_4 + x_0)\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_2} + x_2\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_0} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_4}\right) = 0\,,\\
&X_1\mathcal{J} = -i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_1} = 0\,, \quad X_3\mathcal{J} = -i\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_3} = 0\,,\\
&X_4\mathcal{J} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_0} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_4}\right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

Интеграл последнего уравнения имеет вид $\omega = x_0 + x_4$. Уравнения $X_1\mathcal{J} = 0$ и $X_3\mathcal{J} = 0$ означают, что $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}(x_1)$ и $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}(x_3)$. Учитывая это, сделаем замену переменных

$$y_0 = \omega = x_0 + x_4\,, \quad y_2 = x_2\,, \quad y_4 = x_4\,.$$

В новых переменных уравнения $P_1\mathcal{J} = 0$, $P_2\mathcal{J} = 0$ и $X_4\mathcal{J} = 0$ имеют вид

$$P_1\mathcal{J} = -x_1\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y_4} = 0\,, \quad P_2\mathcal{J} = \omega\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y_2} = 0\,,$$

$$X_4\mathcal{J} = -\tfrac{i}{2}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y_4} = 0\,.$$

Решение этой системы имеет вид: $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y_0, u)$, где $\mathcal{J}$ – произвольная дифференцируемая функция. Следовательно, u должна иметь вид: $u = u(y_0)$, или, в исходных переменных x, $u = u(x_0 + x_4)$. Подставляя это выражение для u в уравнение (3.75) получаем:

$$\Box_5 u \equiv 0 = \lambda u^n \tag{3.80}$$

Из уравнения (3.80) следует, что $u=0$.

Подалгебра $P_{5,6}$ задается базисными элементами G, L_1, L_2, L_3, X_0. Общий ранг r_* соответствующей матрицы $M=\|\xi^\mu, \eta\|$ равен 4. Универсальный инвариант $J(x_0, \vec{x}, x_4, u)$ удовлетворяет системе уравнений

$$GJ=-\left(x_4\frac{\partial J}{\partial x_0}+x_0\frac{\partial J}{\partial x_4}\right)=0\ ,\ L_1J=x_3\frac{\partial J}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial J}{\partial x_3}=0,$$
$$L_2J=-\left(x_3\frac{\partial J}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial J}{\partial x_3}\right)=0\ ,\ L_3J=x_2\frac{\partial J}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial J}{\partial x_2}=0, \tag{3.81}$$
$$X_0J=\frac{i}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial x_0}+\frac{\partial J}{\partial x_4}\right)=0.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$J=J\left[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\ u\right].$$

Следовательно, u должна иметь вид: $u=u(\omega)$, где

$$\omega=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$$, или в исходных переменных x

$$u=u\left[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}\right].$$

Подставляя $u=u(\omega)$ в уравнение (3.75) и учитывая явный вид ω , получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\left(\frac{d^2u}{d\omega^2}+\frac{du}{d\omega}2\omega^{-1}\right)=\lambda u^n . \tag{3.82}$$

Уравнения такого типа известны под названием уравнений

Эмдена-Фаулера. Детальное исследование этого уравнения было осуществлено Беллманом. Частное решение уравнения (3.82) можно найти в виде степенной функции

$$u = \alpha\,\omega^{\nu}\ , \tag{3.83}$$

где α и ν – неизвестные пока постоянные подлежащие определению. Подставляя (3.83) в (3.82) находим:

$$\alpha = \left[\frac{2(n-3)}{\lambda(1-n)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}\ , \quad \nu = \frac{2}{1-n}\ .$$

Подалгебра $P_{17,4}$ задается базисными элементами L_3, P_3, X_0, X_3, X_4. Общий ранг r_* соответствующей матрицы $M = \|\xi^{\mu}{}_{i}\|$ равен 4. Универсальный инвариант $J(x_0, \vec{x}, x_4, u)$ удовлетворяет системе уравнений

$$L_3 J = x_2\frac{\partial J}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial J}{\partial x_2} = 0\ ,$$

$$P_3 J = (x_4 + x_0)\frac{\partial J}{\partial x_3} + x_3\left(\frac{\partial J}{\partial x_0} - \frac{\partial J}{\partial x_4}\right) = 0\ , \tag{3.84}$$

$$X_0 J = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial x_0} + \frac{\partial J}{\partial x_4}\right) = 0\ , \quad X_3 J = -i\frac{\partial J}{\partial x_3} = 0\ ,$$

$$X_4 J = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial x_0} - \frac{\partial J}{\partial x_4}\right) = 0\ .$$

Решение этой системы имеет вид:

$$J = J(\xi, u) \qquad \text{где} \quad \xi = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}\ .$$

Следовательно, u должна иметь вид: $u = u(\xi)$. Подставляя $u = u(\xi)$ в уравнение (3.75) и учитывая явный вид ξ, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi} = -\lambda u^n \qquad (3.85)$$

Частное решение полученного уравнения будем искать в виде: $u = \alpha \xi^{\nu}$, где α и ν – неизвестные пока постоянные, подлежащие определению. Подставляя u в уравнение (3.85) находим:

$$\alpha = \left[\frac{4}{(1-n)^2(-\lambda)}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad \nu = \frac{2}{1-n}.$$

Подалгебра $P_{18,5}$ задается базисными элементами G, L_3, X_1, X_2, X_3. Общий ранг r_* соответствующей матрицы $M = \| \xi^{\mu}, \eta \|$ равен 4. Универсальный инвариант $J(x_0, \vec{x}, x_4, u)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} GJ &= -\left(x_4 \frac{\partial J}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial J}{\partial x_4}\right) = 0, \\ L_3 J &= x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0, \\ X_1 J &= -i\frac{\partial J}{\partial x_1} = 0, \quad X_2 J = -i\frac{\partial J}{\partial x_2} = 0, \\ X_3 J &= -i\frac{\partial J}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \qquad (3.86)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$J = J(c, u) \qquad \text{где } c = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}.$$

Здесь J – произвольная дифференцируемая функция. Следовательно, u должна иметь вид: $u = u(c)$. Подставляя $u = u(c)$ в уравнение (3.75) и учитывая явный вид c получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dc^2} + \frac{du}{dc} c^{-1} = \lambda u^n . \tag{3.87}$$

Частное решение полученного уравнения будем искать в виде: $u = \alpha c^{\nu}$, где α и ν – неизвестные пока постоянные, подлежащие определению. Подставляя u в уравнение (3.87), находим:

$$\alpha = \left[\frac{4}{(1-n)^2 \lambda}\right]^{\frac{1}{n-1}} , \qquad \nu = \frac{2}{1-n} .$$

Таким образом, используя некоторые из найденных в I главе подалгебры, в данном параграфе найдены несколько частных решений нелинейного волнового уравнения.

Помимо этого, другие из найденных подалгебр могут быть применены для получения целого семейства решений, из найденных здесь решений нелинейного волнового уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винтерниц П., Смородинский Я.А., Углирж М. К теории четырехмерного момента количества движения. Ядерная физика, 1965, 1, вып.1. с.163-172.

2. Винтерниц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца. Ядерная физика, 1965, 1, № 5, с.889-901.

3. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б., Третяк В.И. Формы релятивистской динамики в лагранжевом описании системы частиц. - Докл. АН УССР, 1982, Серия А, № 5, с.6-9.

4. Кадышевский В.Г. Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны. - В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с.52-73.

5. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. Издательство "Мир", М., 1981. - 342 с.

6. Мир-Касимов Р.М. Представления группы де Ситтера и квантовая теория поля в квантованном пространстве-времени. - В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. т.2: Тр.Междунар.семинара, Звенигород, 1979. М.; 1980, с.198-201.

7. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И. Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам. Теоретическая и математическая физика, 1976, 26, № 2, с.206-220.

8. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1978. - 399 с.

9. Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Укр.мат.журн., 1979, 31, № 6, с.717-722.

10. Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. Киев. 1978. - 36 с. (Препринт/ Ин.-т математики: 78.18).

11. Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$. Укр.мат.журн., 1981, 33, № 5, с.696-700.

12. Федорчук В.М., Фущич В.И. О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре. - В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. т.I.: Тр.Междунар.семинара, Звенигород, 1979. М., 1980, с.61-66.

13. Фок В.А. Начала квантовой механики. Л.: ЛГУ, 1932. - 251 с.

14. Фущич В.И., Никитин А.Г., Юрик И.И. Редукция представлений группы движений $(n+1)$ -мерного пространства минковского по группе Пуанкаре. - Киев, 1975. - 32 с (Препринт/ Ин.-т математики: ИМ-75-5).

15. Фущич В.И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. Теоретическая и математическая физика. 1970, 4, № 3, с.360-382.

16. Bacry H., Combe Ph., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group. I. "Repts.Math.Phys." 1974, 5, N 2, p.145-186.

17. Bacry H., Combe Ph., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group. II. "Repts Math.Phys". 1974, 5, N 3, p.361-392.

18. Beckers J., Patera J., Perroud M. and Winternitz P. Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics. J.Math.Phys. 1977, 18, N 1, p.72-83.

19. Boyer C.P., Kalnins E.G. and Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. G. The equation $i\partial_t u + \Delta_2 u = 0$. J.Math.Phys., 1975. 16, N 3, p.499-517.

20. Boyer C.P. Lie theory and separation of variables for the equation $i u_t + \Delta_2 u - \left(\frac{\alpha}{x_1^2} + \frac{\beta}{x_2^2}\right) u = 0$. SIAM J.Math. Annal., 1976, 7, N 2, p.230-263.

21. Boyer C.P., Kalnins E.G. Symmetries of the Hamilton - Jacobi equation. J.Math.Phys. 1977, 18, N 5, p.1032-1045.

22. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P. The optical group and its subgroups. J.Math.Phys., 1978, 19, N 8, p.1758-1780.

23. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Extension of the S-matrix off the mass shell and momentum space of constant curvature. Dubna, 1973.-85 p. (Preprint/ Joint Institute for Nuclear Research.: E2-6992).

24. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Translation invariant quantum field theory with de-Sitter momentum space of the mass shell. Dubna, 1974.-22 p. (Preprint/ Joint Institute for Nuclear Research.: E2-7936).

25. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Mir-Kasimov R.M. Extension of the S-matrix off mass shell and momentum space of constant curvature. - В кн.: Труды Математического института им.В.А.Стеклова, т.CXXXVI. Тр.Междунар. конф. по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистике, часть П. Поля, частицы, математические вопросы квантовой статистики. М.: Наука, 1975. с.85-129.

26. Elizalde E., Gomis J. The groups of Poincare and Galilei in arbitrary dimensional spaces. J.Math.Phys., 1978, 19, N 8, p.1790-1792.

27. Fushchich V.I., Nikitin A.G. Reduction of the representations of the generalised Poincare algebra by the Galilei algera. J.Phys.A.Math.Gen., 1980, 13, p.2319-2330.

28. Fushchich V.I., Krivsky I.Yu. On a possible approach to the variable mass problem. Nuclear physics, 1968, B 7, N 1, p.79-82.

29. Fushchich V.I., Krivsky I.Yu. On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowsky space. - Nuclear Physics, 1969, B14, N 3, p.573-585.

30. Kalnins E.G. On the separation of variables for the Laplace equation $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ in two and three-dimentional Minkowski space. SIAM, J.Math.Anal. 1975, 6, N 2, p.340-373.

31. Kalnins E.G., Miller W.Jr. Lie theory and separation of variables. III. The equation $f_{tt} - f_{ss} = \gamma^2 f$. J.Math. Phys., 1974, 15, N 7, p.1025-1032.

32. Kalnins E.G., Miller W. Jr.Lie theory and separation of variables. 4. The groups SO(2,1) and SO(3). J.Math.Phys. 1974, 15, N 8, p.1263-1274.

33. Kalnins E.G., Miller W. Jr.Lie theory and separation of variables. 5. The equations $iU_t + U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - \frac{c}{x^2}U = 0$. J.Math.Phys., 1974, 15, N 10, p.1728-1739.

34. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and the wave equation in space-time. I. The Lorentz group. J.Math.Phys., 1977, 18,

N 1, p.1-16.

35. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and the wave equation in space-time. 2. The group SO(4, C). "SIAM J.Math. Anal.", 1978, 9, N 1, p.12-33.

36. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and the wave equation in space-time. 3. Semisubgroup coordinates. J.Math. Phys, 1977, 18, N 2, p.271-280.

37. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and the wave equation in space-time. 4. The Klein-Gordon equation and the Poincare group. J.Math.Phys., 1978, 19, N 6, p.1233-1246.

38. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and the wave equation in space-time. 5. R-separable solutions of the wave equation $\Psi_{tt}-\Delta_3\Psi=0$. J.Math.Phys. 1978, 19, N6, p.1247-1257.

39. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. 11. The EPD equation. J.Math.Phys, 1976, 17, N 3, p.369-377.

40. Kalnins E.G., Miller W., Jr., Nonorthogonal R-separable coordinats for four-dimentional complex Riemannian spaces. J.Math.Phys. 1981, 22, N 1, p.42-50.

41. Kalnins E.G., Miller W., Jr. Killing tensors and variable separation for Hamilton - Jacobi and Helmholtz equations SIAM J.Math.Anal., 1980, 11, N 6, p.1011-1026.

42. Laßner W. Realizations of the Poincare group on homogeneous Spaces. Acta phys.slov., 1973, 23, N 4, p.193-202.

43. Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. 1. Parabolic cylinder coordinates. SIAM, J.Math.Annal. 1974, 5, N 4, p.626-643.

44. Miller W., Jr. Lie Theory and separation of variables. II. Parabolic coordinates. SIAM. J.Math.Anal., 1974, 5. N 5, p.822-836.

45. Miller W., Patera J., Winternitz P. Subgroups of Lie groups and separations of variables. J.Math.Phys. 1981, 22, N 2, p.251-260.

46. Patera J., Witernitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of the SU(p,q) groups and all subgroups of SU(2,1). J.Math.Phys, 1974, 15, N 8, p.1378-1393.

47. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups pf SO(p,q) group. J.Math.Phys., 1974, 15, N 11, p.1932-1938.

48. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group. J.Math.Phys., 1975, 16, N 8, p.1597-1614.

49. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group. J.Math.Phys. 1975, 16, N 8, p.1615-1624.

50. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Quantum numbers for particles in de Sitter space. J.Math.Phys. 1976, 17, N 5, p.717-728.

51. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poicare group and their invariants. J.Math. Phys., 1976, 17, N 6, p.977-985.

52. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H. Subgroups of the similitude group of three-dimensional Minkowsky space. Can.J.Phys. 1976, 54, N 9, p.950-961.

53. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups. J.Math.Phys., 1977, 18, N 12, p.2259-2288.

54. Patera J., Saint-Aubin Y., Zassenhaus H. Finite subgroups of the generalised Lorentz groups O(p,q). J.Math.Phys., 1980, 21, N 2, p.234-239.

55. Sobeslavsky E. Einige Untersuchungen zu Unteralgebren von Lie-Algebren niedriger Parameterzahl. Dresden, 1980. - 18 p. (Zentralinstitut für kernforschung rossendorf bei Dresden.: ZfK-426)

56. Sorba P. The Galilei group and its connected subgroups. J.Math.Phys. 1976, 17, N 6, p.941-953.