Національна академія наук України
Міністерство освіти і науки України
Державна наукова установа «Київський академічний університет»

**«Допущено до захисту»**
Завідувач кафедри математики,
доктор фіз.-мат. наук
**Вячеслав БОЙКО**
«03» червня 2024 р.

**Гурака Софія Тарасівна**

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**
на здобуття освітнього ступеня «магістр»
Спеціальність 111 «Математика»

# Тема: «Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід»

Засвідчую, що кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _______ С.Т. ГУРАКА

**Науковий керівник**
доктор фіз.-мат. наук
**БОЙКО Вячеслав Миколайович**

**Київ — 2024**

# Анотація

**Гурака С.Т.**, **Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід**, Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «магістр» за спеціальністю 111 Математика, Київський академічний університет, Київ, 2024, 51 с., 35 джерел.

Використовуючи класичну теорему Лі про реалізацію алгебр Лі векторними полями на прямій, суттєво спрощено доведення відомих результатів про класифікацію класів (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь вигляду $u_t = H(u_{xx})$ та $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

**MSC:** 35B06, 35A30, 35K55, 17B80

**Ключові слова:** еволюційне рівняння, групова класифікація, перетворення еквівалентності, симетрія, алгебра Лі, алгебраїчний підхід, реалізації алгебр Лі на прямій.

# Abstract

**Huraka S.T.**, **Group classification of differential equations: algebraic approach**, Master Thesis, major 111 Mathematics. – Kyiv Academic University, Kyiv, 2024, 51 pages, 35 references.

Using the classical Lie theorem on realizations of Lie algebras by vector fields on the line, we substantially simplify the proof of the known results on the group classification of the classes of (1+1)-dimensional nonlinear evolution equations $u_t = H(u_{xx})$ and $u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

**MCS:** 35B06, 35A30, 35K55, 17B80

**Key words:** evolution equations, group classification, equivalence transformation, symmetry, Lie algebra, algebraic approach, realizations of Lie algebras on the line.

# Зміст

# Перелік умовних позначень

| | |
|---|---|
| $u_0 := u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ | частинна похідна за змінною $t$ |
| $u_1 := u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ | частинна похідна за змінною $x$ |
| $u_{11} := u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ | друга частинна похідна за змінною $x$ |
| $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ | $k$-та частинна похідна за змінною $x$ |
| $r$ | порядок рівняння, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ |
| $G$ | група Лі |
| $\mathfrak{g}$ | алгебра Лі |
| $\mathfrak{g}^0$ | ядро ліївських алгебр інваріантності |
| $\mathfrak{g}^H$ | максимальна алгебра ліївської інваріантності, яка відповідає рівнянню з заданого класу з довільним елементом $H$ |
| $Q$ | векторне поле, оператор однопараметричної групи Лі |
| $\langle \cdots \rangle$ | лінійна оболонка базисних елементів алгебри Лі |
| $\pi_* \mathfrak{g}^H$ | проекція алгебри Лі $\mathfrak{g}^H$ на $t$-компоненту |
| $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H$ | розмірність проекції $\pi_* \mathfrak{g}^H$ |
| $G^\sim$ | група еквівалентності |

# Вступ

Диференціальні рівняння відіграють важливу роль у сучасній науці, адже знаходять своє застосування в багатьох сферах. Один із важливих напрямків цієї галузі математики — груповий аналіз диференціальних рівнянь. Фундаментальним поняттям групового аналізу диференціальних рівнянь є поняття симетрій — перетворень, які переводять розв'язки рівняння (або системи рівнянь) у розв'язки цього самого рівняння (або системи рівнянь). Розрізняють різні типи симетрій: локальні, неперервні, дискретні, контактні, потенціальні, узагальнені тощо. Симетрії широко використовуються, оскільки вони дають можливість будувати точні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, із довільного тривіального розв'язку отримувати інший, складніший розв'язок, інтегрувати звичайні диференціальні рівняння, понижувати порядок рівняння, виконувати редукцію, описувати закони збереження, будувати інтеграли руху, будувати параметричні схеми в чисельних методах тощо. Перелічені вище задачі зводяться до так званої прямої задачі симетрійного аналізу, яка полягає в описі симетрій для заданого класу диференціальних рівнянь. Окрім того, симетрії виникають, коли потрібно побудувати рівняння з наперед заданими симетрійними властивостями. Наприклад, галілей-інваріантні рівняння, тобто рівняння, інваріантні відносно зміни систем відліку, природно виникають у класичній механіці. Натомість, групи Пуанкаре виникають у теоретичній фізиці та квантовій механіці, адже будь-яка модель, яка виникає в цих науках, вимагає інваріантність відносно груп Пуанкаре. Також різноманітні симетрійні моделі виникають у біології (наприклад, для опису реакції дифузії). Вони задаються масштабними перетвореннями, розтягами, зсувами за часом, які означають, що є рівняння, яке описує певну модель у будь-який момент часу, тощо. Такі задачі приводять до так званої оберненої задачі симетрійного аналізу, в рамках якої за заданими симетріями потрібно знайти рівняння, що їх допускає.

У 18 столітті симетрії розглядалися як певні перетворення і їх пошук зводився до пошуку відповідних груп. На той час це була суттєво нелінійна, дуже громіздка задача. У 19 столітті норвезький математик Софус Лі запропонував новий підхід до пошуку симетрій. Він пов'язав пошук симетрій із відповідними дотичними розшаруваннями на відповідних групах. Він увів поняття алгебри Лі, симетрій диференціальних рівнянь, і, відповідно, критерію інваріантності, який зводить початкову задачу до розв'язання перевизначених лінійних систем диференціальних рівнянь, тобто до лінійної задачі. Зауважимо, що, коли є фіксований клас рівнянь, тобто такий, який не містить довільних елементів, то з такою задачею можуть впоратися системи комп'ютерної алгебри на кшталт Maple [28] або Mathematica. Складніша задача виникає, коли клас містить довільні елементи, тоді необхідно описувати симетрії в залежності від довільних елементів.

Софус Лі звів задачу пошуку симетрій до лінійної задачі розв'язання перевизначених систем диференціальних рівнянь, таким чином значно спростивши початкову задачу. Однак через брак ефективних інструментів для розв'язку складних перевизначених систем диференціальних рівнянь навіть інфінітезимальний метод може іноді приводити до дуже громіздких обчислень, якщо початкова задача містить довільні параметри або ж її розмірність дуже велика. Ще більше спростити розв'язок можуть різні алгебраїчні методи, які на даний час розробляються в тому числі представниками київської наукової школи симетрійного аналізу.

Основним предметом цієї наукової роботи є еволюційні рівнянні

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_r), \tag{0.1}$$

де $t$, $x$ — незалежні змінні (часова та просторова змінні, відповідно); $u = u(t, x)$ — залежна змінна; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ — частинна похідна за змінною $t$;

$u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ — $k$-та частинна похідна за змінною $x$, $k = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, де $r$ — порядок рівняння; $H$ — довільна гладка функція змінних $t, x, u, u_1, u_2, \ldots, u_r$, $H_{u_r} \neq 0$.

Симетрії еволюційних рівнянь та їх властивості — популярні теми багатьох наукових досліджень та праць. Окрім того, дуже часто саме рівняння цього класу слугують базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, [10, 15, 16, 21, 29]).

Зазначимо, що, згідно з результатами Соколова [34] та Магадєєва [27], контактні перетворення зберігають вигляд рівнянь із класу (0.1) тоді й лише тоді, коли вони мають наступний вигляд:

$$\tilde{t} = \varkappa(t), \quad \tilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

при чому на функції $\phi$ та $\psi$ накладена умова контактності [35]

$$\phi_{u_x}(u_x\psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x\phi_u + \phi_x).$$

У роботі [27] Б.А. Магадєєв встановив, що у випадку скінченновимірної алгебри контактних симетрій (Cont) $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь із класу (0.1) її розмірність становить щонайбільше $r + 5$. Натомість, у випадку нескінченновимірної алгебри контактних симетрій рівняння завжди можна звести до лінійного за допомогою деяких контактних перетворень. У цій статті її автор також навів повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій рівнянь із класу (0.1) і відповідні еволюційні рівняння, що їх допускають.

Добре відома (див., наприклад, [22, Theorem 1] і [1, лема 4.5, с. 266]) наступна лема:

**Лема 0.1.** *Для довільного еволюційного рівняння вигляду (0.1) $t$-компонента будь-якого інфінітезимального оператора, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від $x$ та $u$.*

Таким чином, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь з класу (0.1), можна шукати у вигляді:

$$Q = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \tag{0.2}$$

де $\xi^0(t)$, $\xi^1(t,x,u)$ і $\eta(t,x,u)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Широковідомою є класична теорема Лі про ліївські алгебри векторних полів на дійсній прямій [26, Satz 6, S. 455] (див. також [30, Theorem 2.70], [12, Theorem 1] і [6, теорема 1.1, с. 26]).

**Теорема 0.2.** *Нееквівалентні реалізації скінченновимірних ліївських алгебр векторними полями на $t$-прямій вичерпують наступні алгебри:*

$$\{0\}, \quad \langle\partial_t\rangle, \quad \langle\partial_t,\, t\partial_t\rangle, \quad \langle\partial_t,\, t\partial_t,\, t^2\partial_t\rangle.$$

Позначимо через $\pi$ проекцію з $\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^x$ на $\mathbb{R}^t$ і нехай $k := \dim \pi_* \mathfrak{g}^H$. Оскільки $t$-компонента векторних полів вигляду (0.2) залежить лише від змінної $t$, то, з огляду на теорему 0.2, $k \leqslant 3$.

Раніше теорема Лі вже успішно застосовувалася для групової класифікації класів еволюційних рівнянь та рівняння Шредінгера [9, 24, 25, 31], а також класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного фіксованого порядку $r \geq 2$ [14, параграф 3], де існує аналогічна проєктовність на одновимірний простір часової або незалежної змінної, відповідно. У роботі [12] теорему 0.2 використано у задачі групової класифікації рівняння Клейна–Гордона, причому одночасно розглядалися проекції на обидві незалежні змінні $t$ і $x$ (див. також дисертацію [6, розділ 1]). Натомість, у роботі [13] проєктовність векторних полів на незалежну змінну $t$ дає можливість ефективно використовувати теорему 0.2 для групової класифікації лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних.

Результати цієї наукової роботи обговорювалися на семінарах спеціалізованої кафедри математики Київського академічного університету, на міжнародній науково-практичній конференції “Шевченківська весна-2022” (14–15 квітня, 2022) [4] і на Graduate Colloquium (5 квітня, 2023, університет Альберти, Едмонтон, Канада) [18]. Також результати роботи було представлено на міжнародному семінарі на честь Вільгельма Фущича “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (23–24 грудня, 2022, Київ, Україна) [5] і на міжнародному воркшопі “Complex Dynamical Systems: Theory, Mathematical Modelling, Computing and Application” (2–4 жовтня, 2023, Київ, Україна) [19, 20].

**Подяки.** Хочу висловити подяку моєму науковому керівнику Вячеславу Миколайовичу Бойко за величезну допомогу, цінні ідеї, які він надавав мені під час написання цієї роботи, та наставництво загалом. Також хочу подякувати моїм батькам за моральну підтримку протягом мого навчання в магістратурі.

# Розділ 1

# Групова класифікація нелінійного рівняння теплопровідності

## 1.1. Попередні відомості

Метою цього розділу є уточнення та спрощення доведення результатів Ахатова, Газізова та Ібрагімова [8, Section 4] про групову класифікацію класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = H(u_{xx}), \tag{1.1}$$

де $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $H$ — довільна гладка функція аргументу $u_{xx}$. Якщо $H$ лінійна, то рівняння (1.1) відоме як лінійне рівняння теплопровідності, і тому відповідний клас (1.1) іноді називають класом нелінійних рівнянь теплопровідності.

У подальшому в даній роботі введене перепозначення: $u_0 := u_t$, $u_1 := u_x$, $u_{11} := u_{xx}$. Тоді початкове рівняння можна переписати як

$$u_0 = H(u_{11}). \tag{1.2}$$

Нижче вважаємо, що індекси $i, j, \ldots = 0, 1$, а за повторюваними індексами здійснюється підсумовування. Функції з нижніми індексами означають диференціювання за відповідними змінними. Виключаючи з розгляду випадок лінійного рівняння теплопровідності $u_0 = u_{11}$, припустимо, що $H$ — нелінійна функція змінної $u_{11}$. (Слід звернути увагу на нещодавню роботу Коваля та Поповича [23], у якій виправлено деякі недоліки в груповому аналізі лінійного рівняння теплопровідності.)

Нижче використані наступні позначення для векторних полів алгебр інваріантності рівнянь із класу (1.2):

$$
\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u,\\
&Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \quad Q^5 = x\partial_u,\\
&Q^{6a} = 2t\partial_t - x^2\partial_u, \quad Q^{6b} = x\partial_x - 2t\partial_u,\\
&Q^{6c} = (1-k)t\partial_t + u\partial_u, \quad k \neq 0, \pm\tfrac{1}{3}, 1,\\
&Q^{6c_1} = 2t\partial_t + 3u\partial_u, \quad Q^{6c_2} = 4t\partial_t + 3u\partial_u,\\
&Q^{7c_1} = u\partial_x, \quad Q^{7c_2} = x^2\partial_x + xu\partial_u,
\end{aligned}
$$

де $Q^{6c_1}$ та $Q^{6c_2}$ — частинні випадки векторного поля $Q^{6c}$ для $k = \frac{1}{3}$ та $k = -\frac{1}{3}$, відповідно.

**Теорема 1.1** (група еквівалентності, див. [8, Section 3.3])**.** *Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу* (1.2) *породжена перетвореннями вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = \mu^0 t + \mu^1, \quad \tilde x = \nu^0 x + \nu^1,\\
&\tilde u = \kappa^0 u + \kappa^1 x^2 + \kappa^2 x + \kappa^3 t + \kappa^4, \quad \tilde H = \frac{\kappa^0}{\mu^0} H + \kappa^3,
\end{aligned}
$$

*де $\mu^0, \mu^1, \nu^0, \nu^1, \kappa^0, \dots, \kappa^4$ — довільні константи, такі, що $\mu^0\nu^0\kappa^0 \neq 0$.*

На рис. 1.1 через $\mathcal{T}_0$ позначене перетворення симетрії, що переводить розв'язки рівняння з класу (1.2) в розв'язки цього самого рівняння; $\mathcal{T}_1$ — перетворення еквівалентності, яке переводить одне рівняння з класу (1.2) в інше рівняння цього ж самого класу, можливо, з іншою функцією $\widetilde H$.

Векторне поле (0.2) належить максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (1.2) для будь-якого $H$ тоді й лише тоді,

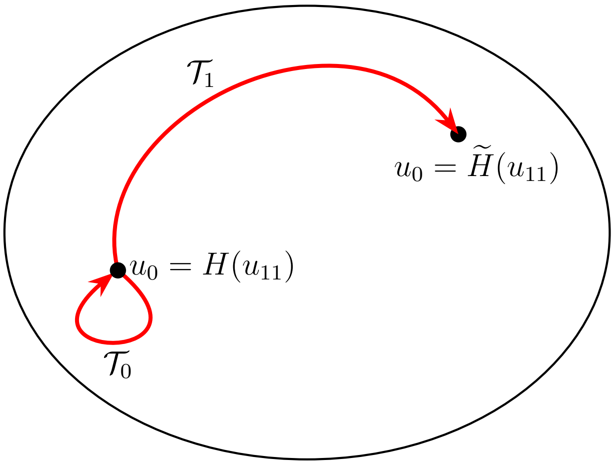


Рис. 1.1. Перетворення симетрії та перетворення еквівалентності в класі (1.2).

коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\zeta^0 - \zeta^{11} H')\big|_{u_0 = H(u_{11})} = 0, \tag{1.3}$$

де $\zeta^0$ та $\zeta^{11}$ — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (0.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (1.3), отримуємо

$$\begin{aligned}&\eta_0 + \eta_u H - H\xi^0_0 - u_1(\xi^1_0 + \xi^1_u H)\\ &\quad - H'\big[\eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2u_{11}(\xi^1_1 + \xi^1_u u_1)\\ &\quad - u_1(\xi^1_{11} + 2\xi^1_{1u}u_1 + \xi^1_{uu}u_1^2 + \xi^1_u u_{11})\big] = 0.\end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної $u_1$ приходимо до наступної системи:

$$\xi^1_{uu} = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi^1_{1u} = 0, \tag{1.4}$$

$$\xi^1_0 + \xi^1_u H + (2\eta_{1u} - \xi^1_{11} - 3\xi^1_u u_{11})H' = 0, \tag{1.5}$$

$$\eta_0 + (\eta_u - \xi^0_0)H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2\xi^1_1)u_{11})H' = 0. \tag{1.6}$$

Загальний розв'язок системи (1.4) має вигляд

$$\xi^1 = \alpha(t,x)u + \beta(t,x), \quad \eta = \alpha_1 u^2 + \gamma(t,x)u + \delta(t,x),$$

де $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$, $\gamma(t,x)$ і $\delta(t,x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (1.5) і (1.6) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 u + \beta_0 + \alpha H + (3\alpha_{11} u + (2\gamma_1 - \beta_{11}) - 3\alpha u_{11})H' = 0,\\
&\alpha_{01} u^2 + \gamma_0 u + \delta_0 + (2\alpha_1 u + \gamma - \xi_0^0)H - [\alpha_{111} u^2 + \gamma_{11} u\\
&\quad + \delta_{11} + (2\alpha_1 u + \gamma - 2(\alpha_1 u + \beta_1))u_{11})]H' = 0.
\end{aligned}$$

Розділяючи вищенаведену систему за степенями $u$, приходимо до системи

$$\alpha_0 + 3\alpha_{11} H' = 0, \tag{1.7}$$
$$\beta_0 + \alpha H + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H' = 0, \tag{1.8}$$
$$\alpha_{01} - \alpha_{111} H' = 0, \tag{1.9}$$
$$\gamma_0 + 2\alpha_1 H - \gamma_{11} H' = 0, \tag{1.10}$$
$$\delta_0 + (\gamma - \xi_0^0)H - (\delta_{11} + (\gamma - 2\beta_1)u_{11})H' = 0. \tag{1.11}$$

Беручи до уваги, що $H'' \neq 0$, з рівняння (1.7) одержуємо

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{11} = 0.$$

У той самий час рівняння (1.9) стає незначущим. Далі, після диференціювання рівняння (1.8) за змінною $u_{11}$, отримуємо

$$-2\alpha H' + (2\gamma_1 - \beta_{11} - 3\alpha u_{11})H'' = 0.$$

Після ще одного диференціювання попереднього рівняння за змінною $x$ маємо

$$-2\alpha_1 H' + (2\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0. \tag{1.12}$$

Диференціюючи рівняння (1.10) за змінною $u_{11}$, отримуємо

$$2\alpha_1 H' - \gamma_{11} H'' = 0. \tag{1.13}$$

Додаючи рівняння (1.12) і (1.13), маємо

$$(\gamma_{11} - \beta_{111} - 3\alpha_1 u_{11})H'' = 0.$$

Із умови $H'' \neq 0$ одержуємо

$$\alpha_1 = 0, \quad \gamma_{11} = 0, \quad \beta_{111} = 0.$$

З іншого боку, з рівняння (1.10) слідує, що $\gamma_0 = 0$. Тоді

$$\alpha = C^1 = \mathrm{const}, \quad \beta = \beta^2(t)x^2 + \beta^1(t)x + \beta^0(t), \qquad \gamma = C^2 x + C^3,$$

де функції $\beta^2(t)$, $\beta^1(t)$ та $\beta^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної $t$, і $C^1, C^2, \dots$ — довільні константи. Підстановка цих виразів у рівняння (1.8) дає

$$\beta^2_0 x^2 + \beta^1_0 x + \beta^0_0 + C^1 H + (2C^2 - 2\beta^2 - 3C^1 u_{11})H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною $x$, маємо

$$\beta^2_0 = 0, \quad \beta^1_0 = 0, \quad \beta^0_{00} = 0.$$

Тоді

$$\begin{gathered} \beta^2 = C^4, \quad \beta^1 = C^5, \quad \beta^0 = C^6 t + C^7, \\ C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11})H' = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Отже, коефіцієнти векторного поля $Q$ набувають наступної форми:

$$\xi^0 = \xi^0(t), \tag{1.15}$$

$$\xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7, \tag{1.16}$$

$$\eta = (C^2x + C^3)u + \delta(t, x). \tag{1.17}$$

Після підстановки (1.16) і (1.17) в рівняння (1.11) приходимо до наступної *класифікаційної умови*:

$$\begin{aligned}
&\delta_0 + (C^2x + C^3 - \xi^0_0)H \\
&\quad - (\delta_{11} + (C^2x + C^3 - 2(2C^4x + C^5))u_{11})H' = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Якщо $H$ — довільна функція, то із (1.14) і (1.18) знаходимо

$$\begin{aligned}
&C^6 = 0, \quad C^1 = 0, \quad C^2 = C^4, \\
&\delta_0 = 0, \quad C^2x + C^3 - \xi^0_0 = 0, \quad \delta_{11} = 0, \\
&(C^2 - 4C^4)x + C^3 - 2C^5 = 0.
\end{aligned}$$

Виходить, що

$$\delta = C^8x + C^9, \quad -3C^4 = 0, \quad C^3 = 2C^5, \quad C^2 = 0,$$

і коефіцієнти векторних полів (0.2) набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = C^3t + C^{10} = 2C^5t + C^{10}, \quad \xi^1 = C^5x + C^7, \\
&\eta = 2C^5u + C^8x + C^9.
\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння (1.2) з довільною функцією $H$ у правій частині допускає 5-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\
&Q^5 = x\partial_u.
\end{aligned}$$

Приходимо до наступного твердження.

**Теорема 1.2.** $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, x\partial_u \rangle$ — *ядро ліївських алгебр інваріантності рівнянь із класу* (1.2).

## 1.2. Групова класифікація

Нехай $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H = k$. Оскільки $\dim \pi_* \mathfrak{g}^0 = 2$, то для будь-якого рівняння з класу (1.2) маємо $k = 2$ або $k = 3$, тобто,

$$\pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, \, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, \, t\partial_t, \, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянутий кожен із цих двох випадків окремо.

Спочатку, диференціюючи (1.18) двічі відносно змінної $x$, отримуємо

$$\delta_{011} - \delta_{1111} H' = 0,$$

тому $\delta_{011} = 0$, $\delta_{1111} = 0$, отже,

$$\delta = C^{20} x^3 + C^{21} x^2 + \rho^1(t) x + \rho^0(t), \tag{1.19}$$

де функції $\rho^1(t)$ та $\rho^0(t)$ пробігають множину гладких функцій змінної $t$.

$\boldsymbol{k = 3}$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \lambda^2 t^2 + \lambda^1 t + \lambda^0, \tag{1.20}$$

де $\lambda^2$, $\lambda^1$ і $\lambda^0$ — довільні константи.

Після підстановки (1.19) і (1.20) в (1.18) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\rho^1_0 x + \rho^0_0 + (C^2 x + C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H \\
&\quad - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5) u_{11}) H' = 0.
\end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною $x$ приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned}
&\rho^1_0 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4) u_{11}) H' = 0, \\
&\rho^0_0 + (C^3 - 2\lambda^2 t - \lambda^1) H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5) u_{11}) H' = 0.
\end{aligned}$$

Диференціюючи друге рівняння вищезгаданої системи відносно змінної $t$, одержуємо

$$\rho^0_{00} - 2\lambda^2 H = 0,$$

і тому $\lambda^2 = 0$, оскільки $H$ — нелінійна функція змінної $u_{11}$. Маємо, що функція $\xi^0$ може бути щонайбільше лінійною. Це суперечить умові $k = 3$.

$\boldsymbol{k = 2}$. У цьому випадку функція $\xi^0$ лінійна, тобто,

$$\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \tag{1.21}$$

де $\lambda^1$ і $\lambda^0$ — довільні константи.

Із підстановки (1.19) і (1.21) в (1.18) слідує

$$\begin{aligned}&\rho^1_0 x + \rho^0_0 + (C^2 x + C^3 - \lambda^1)H \\ &\quad - (6C^{20} x + 2C^{21} + (C^2 x + C^3 - 4C^4 x - 2C^5)u_{11})H' = 0.\end{aligned}$$

Розщеплення цього рівняння за змінною $x$ приводить до наступної системи:

$$\rho^1_0 + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4)u_{11})H' = 0, \tag{1.22}$$

$$\rho^0_0 + (C^3 - \lambda^1)H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5)u_{11})H' = 0. \tag{1.23}$$

Після диференціювання (1.22) і (1.23) за змінною $t$ отримуємо, що $\rho^1_{00} = 0$ і $\rho^0_{00} = 0$, відповідно. Тому $\rho^1(t) = C^{22}t + C^{23}$ і $\rho^0(t) = C^{24}t + C^{25}$. Отже,

$$\delta(t, x) = C^{20}x^3 + C^{21}x^2 + (C^{22}t + C^{23})x + (C^{24}t + C^{25}).$$

Із рівнянь (1.15)–(1.17) одержуємо наступні вирази для компонент векторного поля $Q$:

$$\begin{aligned}&\xi^0 = \lambda^1 t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^1 u + C^4 x^2 + C^5 x + C^6 t + C^7, \\ &\eta = (C^2 x + C^3)u + C^{20}x^3 + C^{21}x^2 + (C^{22}t + C^{23})x + (C^{24}t + C^{25}),\end{aligned}$$

у той час, як (1.14), (1.22) і (1.23) дають систему визначальних рівнянь для функції $H$ у вигляді

$$C^6 + C^1 H + (2C^2 - 2C^4 - 3C^1 u_{11})H' = 0, \tag{1.24}$$

$$C^{22} + C^2 H - (6C^{20} + (C^2 - 4C^4)u_{11})H' = 0, \tag{1.25}$$

$$C^{24} + (C^3 - \lambda^1)H - (2C^{21} + (C^3 - 2C^5)u_{11})H' = 0. \tag{1.26}$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд

$$a + bH + cH' + du_{11}H' = 0 \tag{1.27}$$

із деякими сталими параметрами $a$, $b$, $c$ і $d$. З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 1.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння типу (1.27), а саме, $\mathrm{e}^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і $u_{11}^p$, де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$, то після підстановки в систему (1.24)–(1.26) одержуємо

$$C^6 + C^1\mathrm{e}^{u_{11}} + 2(C^2 - C^4)\mathrm{e}^{u_{11}} - 3C^1 u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,$$

$$C^{22} + C^2\mathrm{e}^{u_{11}} - 6C^{20}\mathrm{e}^{u_{11}} - (C^2 - 4C^4)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,$$

$$C^{24} + (C^3 - \lambda^1)\mathrm{e}^{u_{11}} - 2C^{21}\mathrm{e}^{u_{11}} - (C^3 - 2C^5)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0.$$

Після розщеплення цієї системи отримуємо наступні умови на сталі:

$$C^3 = 2C^5, \quad \lambda^1 = 2C^5 - 2C^{21},$$

$$C^1 = C^2 = C^4 = C^6 = C^{20} = C^{22} = C^{24} = 0.$$

Тому

$$\xi^0 = 2(C^5 - C^{21})t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^5 x + C^7$$

$$\eta = 2C^5 u + C^{21}x^2 + C^{23}x + C^{25}.$$

Таким чином, за умови $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$ базис максимальної алгебри ліївської інваріантності має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\\
&Q^5 = x\partial_u, \quad Q^6 = 2t\partial_t - x^2\partial_u.
\end{aligned}$$

Якщо $H = \ln(u_{11})$, із системи (1.24)–(1.26) слідує

$$\begin{aligned}
&C^6 + C^1\ln(u_{11}) + \frac{2(C^2 - C^4)}{u_{11}} - 3C^1 = 0,\\
&C^{22} + C^2\ln(u_{11}) - \frac{6C^{20}}{u_{11}} - (C^2 - 4C^4) = 0,\\
&C^{24} + (C^3 - \lambda^1)\ln(u_{11}) - \frac{2C^{21}}{u_{11}} - (C^3 - 2C^5) = 0.
\end{aligned}$$

Розщеплення цієї системи приводить до наступних обмежень на сталі:

$$\begin{aligned}
&\lambda^1 = C^3, \quad C^{24} = C^3 - 2C^5,\\
&C^1 = C^2 = C^4 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = 0.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = C^3t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^5x + C^7,\\
&\eta = C^3u + C^{23}x + (C^3 - 2C^5)t + C^{25},
\end{aligned}$$

тобто у випадку $H = \ln(u_{11})$ одержуємо наступний базис максимальної алгебри ліївської інваріантності:

$$\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\\
&Q^5 = x\partial_u, \quad Q^6 = x\partial_x - 2t\partial_u.
\end{aligned}$$

Якщо $H = u_{11}^p$, то з системи (1.24)–(1.26) отримуємо

$$C^6 + C^1u_{11}^p + 2(C^2 - C^4)pu_{11}^{p-1} - 3C^1pu_{11}^p = 0,$$

$$C^{22} + C^2 u_{11}^p - 6C^{20} p u_{11}^{p-1} - (C^2 - 4C^4) p u_{11}^p = 0,$$
$$C^{24} + (C^3 - \lambda^1) u_{11}^p - 2C^{21} p u_{11}^{p-1} - (C^3 - 2C^5) p u_{11}^p = 0.$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо

$$C^1 = 3pC^1, \quad C^2 = C^4, \quad C^2 = p(C^2 - 4C^4),$$
$$\lambda^1 = (1-p)C^3 + 2pC^5,$$
$$C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0.$$

Якщо $p \neq \pm\frac{1}{3}$, то

$$\lambda^1 = (1-p)C^3 + 2pC^5,$$
$$C^1 = C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

тобто компоненти векторного поля $Q$ мають вигляд

$$\xi^0 = ((1-p)C^3 + 2pC^5)t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^5 x + C^7,$$
$$\eta = C^3 u + C^{23} x + C^{25}.$$

Отже, коли $H = u_{11}^p$, $p \neq \pm\frac{1}{3}$, то алгебра максимальної ліївської інваріантності породжена наступними векторними полями:

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,$$
$$Q^5 = x\partial_u, \quad Q^6 = (1-p)t\partial_t + u\partial_u.$$

Для $p = \frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(C^3 + C^5), \quad C^2 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

тобто компоненти векторного поля $Q$ мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \frac{2}{3}(C^3 + C^5)t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^1 u + C^5 x + C^7,$$
$$\eta = C^3 u + C^{23} x + C^{25}.$$

Таким чином, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ отримуємо наступний вигляд алгебри максимальної ліївської інваріантності:

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,$$
$$Q^5 = x\partial_u, \quad Q^6 = 2t\partial_t + 3u\partial_u, \quad Q^7 = u\partial_x.$$

Для $p = -\frac{1}{3}$:

$$\lambda^1 = \frac{2}{3}(2C^3 - C^5), \quad C^1 = C^6 = C^{20} = C^{21} = C^{22} = C^{24} = 0,$$

і компоненти векторного поля $Q$ такі:

$$\xi^0 = \frac{2}{3}(2C^3 - C^5)t + \lambda^0, \quad \xi^1 = C^2x^2 + C^5x + C^7,$$
$$\eta = (C^2x + C^3)u + C^{23}x + C^{25}.$$

Отже, якщо $H = u_{11}^{-1/3}$, то алгебра максимальної ліївської інваріантності породжується наступними базисними векторними полями:

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = \partial_u, \quad Q^4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,$$
$$Q^5 = x\partial_u, \quad Q^6 = 4t\partial_t + 3u\partial_u, \quad Q^7 = x^2\partial_x + xu\partial_u.$$

Отримані результати підсумовані в наступному твердженні.

**Теорема 1.3** (результат групової класифікації, [8, Section 4]). *Повний список $G^\sim$-нееквівалентних (максимальних) розширень ліївських симетрій у класі (1.2) вичерпують такі випадки:*

(0) *загальний випадок* $H = H(u_{11})$,
$\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\, x\partial_u \rangle$,

(1) $H(u_{11}) = \exp(u_{11})$,
$\mathfrak{g}^{\exp(u_{11})} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\, x\partial_u, 2t\partial_t - x^2\partial_u \rangle$,

(2) $H(u_{11}) = \ln(u_{11})$,
$\mathfrak{g}^{\ln(u_{11})} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\, x\partial_u, x\partial_x - 2t\partial_u \rangle$,

(3) $H(u_{11}) = u_{11}^p, \quad p \neq 0, \pm\dfrac{1}{3}, 1,$

$$\mathfrak{g}^{u_{11}^p} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, (1-p)t\partial_t + u\partial_u\rangle,$$

(4) $H(u_{11}) = u_{11}^{1/3}$,

$$\mathfrak{g}^{u_{11}^{1/3}} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, 2t\partial_t + 3u\partial_u, u\partial_x\rangle,$$

(5) $H(u_{11}) = u_{11}^{-1/3}$,

$$\mathfrak{g}^{u_{11}^{-1/3}} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u,\ 4t\partial_t + 3u\partial_u, \\ x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle.$$

Результати групової класифікації класу (1.2) наведені в таблиці 1.1.

Табл. 1.1. Результати групової класифікації класу (1.2).

| $H(u_{xx})$ | Ліївська алгебра інваріантності |
|---|---|
| $\forall$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u\rangle$ |
| $\exp u_{xx}$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, 2t\partial_t - x^2\partial_u\rangle$ |
| $\ln u_{xx}$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, x\partial_x - 2t\partial_u\rangle$ |
| $u_{xx}^p$, $p \neq 0, \pm\frac{1}{3}, 1$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, (1-p)t\partial_t + u\partial_u\rangle$ |
| $u_{xx}^{1/3}$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u, 2t\partial_t + 3u\partial_u, u\partial_x\rangle$ |
| $u_{xx}^{-1/3}$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u,$ <br> $4t\partial_t + 3u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle$ |
| $u_{xx}$ | $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u,$ <br> $t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2+2t)u\partial_u,\ f(t,x)\partial_u\rangle$ |

У випадку лінійної (несталої) функції $H$ (останній рядок таблички, який включений для повноти розгляду класу (1.2)) алгебра ліївської інваріантності нескінченновимірна. Тут параметрична функція $f$ залежить від змінних $(t,x)$ і пробігає множину розв'язків лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$.

## 1.3. Висновки

У цьому розділі була проведена повна групова класифікація класу (1+1)-вимірних нелінійних еволюційних рівнянь (1.2) з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. У рамках інфінітезимального підходу цю класифікацію вперше виконано у відомій роботі Ахатова, Газізова та Ібрагімова [8, Section 4]. Для групової класифікації у даній роботі була використана класична теорема Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій. Цей підхід дозволив значно спростити доведення результатів класифікації і, зокрема, завдяки ньому розв'язання визначальних рівнянь стало суттєво простішим.

Було показано, що, додатково до ядра максимальних алгебр інваріантності, з усіх можливих випадків $k = 2, 3$ розмірності проекції на $t$-компоненту, додаткові розширення можливі (окрім лінійного) лише у випадку, коли $k = 2$. Це дозволило швидко отримати класифікаційні умови, нееквівалентні вигляди для функції $H$ і відповідні максимальні алгебри інваріантності для кожного з нееквівалентних випадків.

Важливо зазначити, що, згідно з [27, Theorem 0.1], верхня межа розмірності алгебр ліївської інваріантності нелінеаризовних (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку становить 7. Окрім того, згідно з [27, Theorem 3.5], усі такі рівняння з 7-вимірними алгебрами ліївської інваріантності еквівалентні (з точністю до контактних перетворень) рівнянню $u_t = u_{xx}^{-1/3}$ (випадок (5) теореми 1.3). Зауважимо, що Газізов [17, стр. 131–132] і Пухначов [33] знайшли явний вигляд контактного перетворення, яке зводить випадок (4) до випадку (5). Відповідні обговорення на цю тему можна знайти в [2].

Відкритими залишаються питання про вивчення структури контактних та точкових перетворень, пов'язаних із класом (1.2), а також класифікація підалгебр алгебр із теореми 1.3, відповідні ліївські редукції, побудова точних розв'язків тощо.

# Розділ 2

# Групова класифікація нелінійного рівняння Бюргерса

## 2.1. Попередні відомості

Метою цього розділу є спрощення доведення результатів [7, 11] про групову класифікація класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_0 + uu_1 = H(u_{11}), \tag{2.1}$$

де $u_0 := u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 := u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{11} := u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $H$ — довільна гладка функція аргументу $u_{xx}$. Коли $H$ — лінійна функція, то рівняння (2.1) є добре відомим рівнянням Бюргерса. Згідно з лемою 0.1, векторні поля, що належать максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ еволюційних рівнянь із класу (2.1), можна шукати в вигляді (0.2).

**Теорема 2.1** (група еквівалентності класу (2.1), див. [3])**.** *Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (2.1) породжена операторами $\partial_t$, $\partial_x$, $t\partial_x + \partial_u$, $t\partial_t + x\partial_x - H\partial_H$, $x\partial_x + u\partial_u + H\partial_H$, $t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_H$, а також дискретним перетворенням еквівалентності $(t, x, u, H) \to (-t, -x, u, -H)$.*

*Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію $H$ має вигляд*

$$\tilde{H}(u_{11}) = \delta_1 H(\delta_2 u_{11}) + \delta_0,$$

*де $\delta_0$, $\delta_1$, $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1\delta_2 \neq 0$.*

Векторне поле (0.2) належить максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^H$ рівняння з класу (2.1) для будь-якої функції $H$ тоді й лише тоді, коли воно задовольняє наступне визначальне рівняння:

$$(\eta u_1 + \zeta^0 + \zeta^1 u - \zeta^{11} H')\big|_{u_0 + uu_1 = H(u_{11})} = 0, \tag{2.2}$$

де $\zeta^0$, $\zeta^1$ та $\zeta^{11}$ — відповідні коефіцієнти першого та другого продовжень векторного поля (0.2), $H' := \partial H(u_{11})/\partial u_{11}$.

Розписуючи рівняння (2.2), отримуємо

$$\begin{aligned}&\eta u_1 + \eta_0 + H\eta_u + uu_1\xi^0_0 - H\xi^0_0 - u_1\xi^1_0 - u_1\xi^1_u H + u\eta_1 - uu_1\xi^1_1\\ &\quad - H'\big[\eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - 2u_{11}(\xi^1_1 + \xi^1_u u_1)\\ &\quad - u_1(\xi^1_{11} + 2\xi^1_{1u}u_1 + \xi^1_{uu}u_1^2 + \xi^1_u u_{11})\big] = 0.\end{aligned}$$

Після розщеплення цього рівняння за степенями змінної $u_1$ приходимо до наступної системи:

$$\xi^1_{uu} = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi^1_{1u} = 0, \tag{2.3}$$

$$\eta - \xi^1_0 + u(\xi^0_0 - \xi^1_1) - \xi^1_u H - (2\eta_{1u} - \xi^1_{11} - 3\xi^1_u u_{11})H' = 0, \tag{2.4}$$

$$\eta_0 + u\eta_1 + (\eta_u - \xi^0_0)H - (\eta_{11} + (\eta_u - 2\xi^1_1)u_{11})H' = 0. \tag{2.5}$$

Загальний розв'язок системи (2.3) має вигляд

$$\xi^1 = a(t,x)u + b(t,x), \quad \eta = a_1u^2 + c(t,x)u + d(t,x),$$

де $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ і $d(t,x)$ пробігають множину гладких функцій своїх аргументів.

Підстановка цих виразів у рівняння (2.4) і (2.5) приводить до наступної системи:

$$\begin{aligned}&(c - a_0 + \xi^0_0 - b_1)u + (d - b_0) - aH\\ &\quad - (3a_{11}u + 2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0,\end{aligned}$$

$$a_{11}u^3 + (a_{01} + c_1)u^2 + (c_0 + d_1)u + d_0 + (2a_1u + c - \xi^0_0)H$$
$$- (a_{111}u^2 + c_{11}u + d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0.$$

Розщеплюючи вищенаведену систему за степенями $u$, приходимо до системи

$$c - a_0 + \xi^0_0 - b_1 - 3a_{11}H' = 0, \tag{2.6}$$
$$d - b_0 - aH - (2c_1 - b_{11} - 3au_{11})H' = 0, \tag{2.7}$$
$$a_{11} = 0, \tag{2.8}$$
$$a_{01} + c_1 - a_{111}H' = 0, \tag{2.9}$$
$$c_0 + d_1 + 2a_1H - c_{11}H' = 0, \tag{2.10}$$
$$d_0 + (c - \xi^0_0)H - (d_{11} + (c - 2b_1)u_{11})H' = 0. \tag{2.11}$$

Із рівняння (2.8) випливає, що

$$a = \lambda^1(t)x + \lambda^2(t).$$

Тут і нижче $\lambda^1(t), \lambda^2(t), \ldots$ пробігають множину гладких функцій змінної $t$. З урахуванням рівнянь (2.8) і (2.9) маємо $a_{01} + c_1 = 0$, тобто $\lambda^1_0 + c_1 = 0$, звідки можна знайти функцію $c(t, x)$:

$$c = -\lambda^1_0(t)x + \lambda^3(t).$$

Далі підставимо функції $a$ і $c$ в рівняння (2.6):

$$-\lambda^1_0x + \lambda^3 - \lambda^1_0x - \lambda^2_0 + \xi^0_0 - b_1 = 0.$$

Звідси знаходимо функцію $b(t, x)$:

$$b = -\lambda^1_0x^2 + (\xi^0_0 + \lambda^3 - \lambda^2_0)x + \lambda^4(t).$$

Оскільки $H$ — нелінійна функція, то з рівняння (2.10) випливає, що

$$c_0 + d_1 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Тоді з рівняння $a_1 = 0$ одержуємо, що $\lambda^1 = 0$, тобто

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (\xi_0^0 + \lambda^3 - \lambda_0^2)x + \lambda^4(t), \quad c = \lambda^3(t).$$

Натомість, із рівняння $c_0 + d_1 = 0$ маємо, що $\lambda_0^3 + d_1 = 0$, а отже,

$$d = -\lambda_0^3 x + \lambda^5(t).$$

Підстановка щойно уточнених виразів для функцій $a$, $b$, $c$ і $d$ в рівняння (2.7) приводить до співвідношення

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - (2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2)x - \lambda^2 H + 3\lambda^2 u_{11} H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при $x$ до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$2\lambda_0^3 + \xi_{00}^0 - \lambda_{00}^2 = 0,$$

звідки слідує, що

$$\xi_0^0 = \lambda_0^2 - 2\lambda^3 + m_1.$$

Тут і нижче $m_1, m_2, \ldots$ — довільні дійсні сталі.

Отже, приходимо до першої *класифікаційної умови*:

$$(\lambda^5 - \lambda_0^4) - \lambda^2 H + 3\lambda^2 u_{11} H' = 0.$$

Натомість, із підстановки наведених вище виразів для функцій $a$, $b$, $c$, $d$ і $\xi_0^0$ в рівняння (2.11) одержимо

$$-\lambda_{00}^3 x + \lambda_0^5 + (3\lambda^3 - \lambda_0^2 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi_0^0 - 2\lambda_0^2)u_{11} H' = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при $x$ до нуля, отримаємо наступне рівняння:

$$\lambda^3_{00} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $\lambda^3 = m_2 t + m_3$ і, отже,

$$a = \lambda^2(t), \quad b = (-m_2 t + m_1 - m_3)x + \lambda^4(t), \quad c = m_2 t + m_3,$$
$$d = -m_2 x + \lambda^5(t), \quad \xi^0_0 = -2m_2 t + \lambda^2_0 - 2m_3 + m_1.$$

Друга *класифікаційна умова* набуває вигляду

$$\lambda^5_0 + (3\lambda^3 - \lambda^2_0 - m_1)H + (\lambda^3 + 2\xi^0_0 - 2\lambda^2_0)u_{11}H' = 0.$$

Таким чином, приходимо до наступної системи:

$$\begin{aligned}
&(\lambda^5 - \lambda^4_0) - \lambda^2 H + 3\lambda^2 u_{11}H' = 0,\\
&\lambda^5_0 + (3m_2 t + 3m_3 - \lambda^2_0 - m_1)H + (m_2 t + m_3 + 2\xi^0_0 - 2\lambda^2_0)u_{11}H' = 0,\\
&\xi^0_0 = -2m_2 t + \lambda^2_0 - 2m_3 + m_1.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Якщо $H$ — довільна функція, то з (2.12) після розщеплення знаходимо:

$$\lambda^5 = \lambda^4_0, \quad \lambda^2 = 0, \quad \lambda^5_0 = 0, \quad 3m_2 t + 3m_3 - \lambda^2_0 - m_1 = 0,$$
$$-3m_2 t + 2m_1 - 3m_3 = 0.$$

Звідси отримаємо, що

$$\lambda^5 = m_4, \quad \lambda^4 = m_4 t + m_5, \quad m_2 = 0,$$
$$3m_3 - m_1 = 0, \quad 2m_1 - 3m_3 = 0,$$

тому $m_1 = 0$, $m_3 = 0$ і функції $a$, $b$, $c$, $d$ і $\xi^0_0$ набувають наступного вигляду:

$$a = 0, \quad b = m_4 t + m_5, \quad c = 0, \quad d = m_4, \quad \xi^0_0 = 0.$$

Отже, коефіцієнти векторних полів (0.2) мають наступну форму:

$$\xi^0 = m_6, \quad \xi^1 = m_4 t + m_5, \quad \eta = m_4.$$

Таким чином, рівняння (2.1) з довільною функцією $H$ у правій частині допускає 3-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}^0$, породжену векторними полями

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u.$$

Приходимо до наступного твердження.

**Теорема 2.2** (див. [3]). $\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$ *— ядро ліївських алгебр інваріантності рівнянь із класу* (2.1).

## 2.2. Групова класифікація

Нехай знову $\dim \pi_* \mathfrak{g}^H = k$. Оскільки $\dim \pi_* \mathfrak{g}^0 = 1$, то для будь-якого рівняння з класу (2.1) маємо, що $k = 1$, $k = 2$ або $k = 3$, тобто

$$\pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t \rangle, \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, \, t\partial_t \rangle \quad \text{або} \quad \pi_* \mathfrak{g}^H = \langle \partial_t, \, t\partial_t, \, t^2\partial_t \rangle.$$

Нижче розглянутий кожен із цих трьох випадків окремо.

$\boldsymbol{k = 3}$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^2 t^2 + \mu^1 t + \mu^0, \tag{2.13}$$

де $\mu^2$, $\mu^1$ і $\mu^0$ — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (2.12), маємо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + \lambda^2_0 - 2m_3 + m_1, \tag{2.14}$$

звідки після диференціювання за змінною $t$ отримаємо

$$\lambda^2_{00} = 2\mu^2 + 2m_2,$$

іншими словами,

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + m_7 t + m_8.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (2.14), одержимо

$$2\mu^2 t + \mu^1 = -2m_2 t + (2\mu^2 + 2m_2)t + m_7 - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_7 = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = (\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8. \tag{2.15}$$

Після підстановки (2.15) в друге рівняння системи (2.12) отримуємо

$$\begin{aligned} &\lambda^5_0 + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ &\quad + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Після диференціювання двічі за змінною $t$ одержимо

$$\lambda^5_{000} = 0,$$

що свідчить про те, що функція $\lambda^5$ — квадратична, скажімо,

$$\lambda^5 = m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (2.16), отримаємо

$$\begin{aligned} &2m_9 t + m_{10} + ((m_2 - 2\mu^2)t + (m_3 - \mu^1))H \\ &\qquad\qquad + (-3m_2 t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною $t$, приходимо до системи:

$$\begin{aligned} &2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)H - 3m_2 u_{11}H' = 0, \\ &m_{10} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Підставимо тепер функції $\lambda^5$ і $\lambda^2$ у перше рівняння (2.12):

$$
\begin{aligned}
&(m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11} - \lambda^4_0) \\
&\quad - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\
&\quad + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Диференціювання тричі за змінною $t$ показує, що

$$\lambda^4_{0000} = 0,$$

що свідчить про те, що функція $\lambda^4$ — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{12}t^3 + m_{13}t^2 + m_{14}t + m_{15}.$$

Підставляючи функцію $\lambda^4$ назад у рівняння (2.18), маємо

$$
\begin{aligned}
&(m_9 t^2 + m_{10} t + m_{11} - 3m_{12}t^2 - 2m_{13}t - m_{14}) \\
&\quad - ((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)H \\
&\quad + 3((\mu^2 + m_2)t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_8)u_{11}H' = 0.
\end{aligned}
$$

Розщеплюючи за змінною $t$, одержуємо таку систему:

$$
\begin{aligned}
&(m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)H + 3(\mu^2 + m_2)u_{11}H' = 0, \\
&(m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\
&(m_{11} - m_{14}) - m_8 H + 3m_8 u_{11}H' = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Очевидно, що всі рівняння в системі (2.19) мають загальний вигляд (1.27) із деякими сталими параметрами $a$, $b$, $c$ і $d$. Отже, з точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 2.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (1.27), а саме, $\mathrm{e}^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і $u_{11}^p$, де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$, то із систем (2.17) і (2.19) одержуємо

$$
\begin{aligned}
&2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)\mathrm{e}^{u_{11}} - 3m_2u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&m_{10} + (m_3 - \mu^1)\mathrm{e}^{u_{11}} + (2m_1 - 3m_3)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)\mathrm{e}^{u_{11}} + 3(\mu^2 + m_2)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)\mathrm{e}^{u_{11}} + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_{11} - m_{14}) - m_8\mathrm{e}^{u_{11}} + 3m_8u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0.
\end{aligned}
$$

Розщеплення цієї системи приводить до наступних обмежень на сталі:

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 0, \quad \mu^1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \mu^2 = 0, \quad m_3 = 0, \quad m_8 = 0,\\
&m_9 = 0, \quad m_{10} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0, \quad m_{11} = m_{14}.
\end{aligned}
$$

Звідси маємо, зокрема, що $\mu^2 = 0$, тобто $k \neq 3$ і отримали протиріччя.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то із систем (2.17) і (2.19) отримуємо

$$
\begin{aligned}
&(2m_9 - 3m_2) + (m_2 - 2\mu^2)\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{10} + 2m_1 - 3m_3) + (m_3 - \mu^1)\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_9 - 3m_{12} + 3\mu^2 + 3m_2) - (\mu^2 + m_2)\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{10} - 2m_{13} + 3\mu^1 + 6m_3 - 3m_1) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{11} - m_{14} + 3m_8) - m_8\ln(u_{11}) = 0.
\end{aligned}
$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо наступні обмеження на сталі:

$$
\begin{aligned}
&m_2 = 0, \quad \mu^2 = 0, \quad m_8 = 0, \quad m_9 = 0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{11} = m_{14},\\
&m_1 = 3\mu^1, \quad m_3 = \mu^1, \quad m_{10} = -3\mu^1, \quad m_{10} = 2m_{13}.
\end{aligned}
$$

Із них помічаємо, зокрема, що $\mu^2 = 0$, що суперечить припущенню $k = 3$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (2.17) і (2.19) маємо

$$
\begin{aligned}
&2m_9 + (m_2 - 2\mu^2)u_{11}^p - 3m_2pu_{11}^p = 0,\\
&m_{10} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)pu_{11}^p = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(m_9 - 3m_{12}) - (\mu^2 + m_2)u^p_{11} + 3(\mu^2 + m_2)pu^p_{11} = 0,\\
&(m_{10} - 2m_{13}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u^p_{11} + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)pu^p_{11} = 0,\\
&(m_{11} - m_{14}) - m_8u^p_{11} + 3m_8pu^p_{11} = 0. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

При розщепленні цієї системи отримуємо наступні обмеження на сталі:

$$m_9 = 0, \quad m_{10} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0, \quad m_{11} = m_{14}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$
\begin{aligned}
&m_2 = 0, \quad \mu^2 = 0, \quad m_8 = 0\\
&\mu^1 = m_1 - 2m_3, \quad (3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0.
\end{aligned}
$$

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступні обмеження:

$$\mu^2 = 0, \quad \mu^1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Отже, за будь-якого значення $p \neq 0, 1$ (іншими словами, коли функція $H$ не є лінійною функцією свого аргумента) $\mu^2 = 0$, тобто $k \neq 3$ і маємо суперечність.

$\boldsymbol{k = 2}$. У цьому випадку

$$\xi^0 = \mu^1 t + \mu^0, \qquad (2.21)$$

де $\mu^1$ і $\mu^0$ — довільні константи. Порівнюючи з третім рівнянням із (2.12), маємо

$$\mu^1 = -2m_2t + \lambda^2_0 - 2m_3 + m_1, \qquad (2.22)$$

звідки після диференціювання за змінною $t$ отримаємо

$$\lambda^2_{00} = 2m_2,$$

іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2t^2 + m_{15}t + m_{16}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (2.22), одержимо

$$\mu^1 = -2m_2t + 2m_2t + m_{15} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{15} = \mu^1 + 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16}. \tag{2.23}$$

Підстановка (2.23) в друге рівняння системи (2.12) приводить до рівняння

$$\lambda^5_0 + (m_2t + (m_3 - \mu^1))H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \tag{2.24}$$

Після диференціювання двічі за змінною $t$ отримаємо

$$\lambda^5_{000} = 0,$$

що свідчить про те, що функція $\lambda^5$ — квадратична, тобто,

$$\lambda^5 = m_{17}t^2 + m_{18}t + m_{19}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (2.24), одержимо

$$\begin{aligned}2m_{17}t + m_{18} + (m_2t + (m_3 - \mu^1))H \\ + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0.\end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною $t$, приходимо до системи:

$$\begin{aligned}&2m_{17} + m_2H - 3m_2u_{11}H' = 0,\\ &m_{18} + (m_3 - \mu^1)H + (2m_1 - 3m_3)u_{11}H' = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Підставимо тепер функції $\lambda^5$ і $\lambda^2$ в перше рівняння (2.12):

$$(m_{17}t^2 + m_{18}t + m_{19} - \lambda^4_0) - (m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ + 3(m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0. \tag{2.26}$$

Диференціювання тричі за змінною $t$ показує, що

$$\lambda^4_{0000} = 0,$$

що свідчить про те, що функція $\lambda^4$ — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{20}t^3 + m_{21}t^2 + m_{22}t + m_{23}.$$

Підставляючи функцію $\lambda^4$ назад у рівняння (2.26), маємо

$$(m_{17}t^2 + m_{18}t + m_{19} - 3m_{20}t^2 - 2m_{21}t - m_{22}) \\ - (m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})H \\ + 3(m_2t^2 + (\mu^1 + 2m_3 - m_1)t + m_{16})u_{11}H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною $t$, одержуємо таку систему:

$$(m_{17} - 3m_{20}) - m_2H + 3m_2u_{11}H' = 0, \\ (m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)H + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}H' = 0, \\ (m_{19} - m_{22}) - m_{16}H + 3m_{16}u_{11}H' = 0. \tag{2.27}$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (1.27) із деякими сталими параметрами $a$, $b$, $c$ і $d$. З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 2.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (1.27), а саме, $\mathrm{e}^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і $u_{11}^p$, де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$, то із систем (2.25) і (2.27) одержуємо

$$2m_{17} + m_2\mathrm{e}^{u_{11}} - 3m_2u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0, \\ m_{18} + (m_3 - \mu^1)\mathrm{e}^{u_{11}} + (2m_1 - 3m_3)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,$$

$$(m_{17}-3m_{20})-m_2\mathrm{e}^{u_{11}}+3m_2u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}}=0,$$
$$(m_{18}-2m_{21})-(\mu^1+2m_3-m_1)\mathrm{e}^{u_{11}}+3(\mu^1+2m_3-m_1)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}}=0,$$
$$(m_{19}-m_{22})-m_{16}\mathrm{e}^{u_{11}}+3m_{16}u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}}=0.$$

Розщеплення цієї системи приводить до наступних обмежень на сталі:

$$m_1=0,\quad \mu^1=0,\quad m_2=0,\quad m_3=0,\quad m_{16}=0,$$
$$m_{17}=0,\quad m_{18}=0,\quad m_{20}=0,\quad m_{21}=0,\quad m_{19}=m_{22}.$$

Тому

$$\xi^0=\mu^0,\quad \xi^1=m_{19}t+m_{23},\quad \eta=m_{19}.$$

Таким чином, у випадку функції $H=\mathrm{e}^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру ліївської інваріантності з теореми 2.2.

Якщо $H=\ln(u_{11})$, то із систем (2.25) і (2.27) отримуємо

$$(2m_{17}-3m_2)+m_2\ln(u_{11})=0,$$
$$(m_{18}+2m_1-3m_3)+(m_3-\mu^1)\ln(u_{11})=0,$$
$$(m_{17}-3m_{20}+3m_2)-m_2\ln(u_{11})=0,$$
$$(m_{18}-2m_{21}+3\mu^1+6m_3-3m_1)-(\mu^1+2m_3-m_1)\ln(u_{11})=0,$$
$$(m_{19}-m_{22}+3m_{16})-m_{16}\ln(u_{11})=0.$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо наступні обмеження на сталі:

$$m_2=0,\quad m_{16}=0,\quad m_{17}=0,\quad m_{20}=0,\quad m_{19}=m_{22},$$
$$m_1=3\mu^1,\quad m_3=\mu^1,\quad m_{18}=-3\mu^1,\quad m_{21}=-1,5\mu^1.$$

Отже,

$$\xi^0=\mu^1t+\mu^0,\quad \xi^1=2\mu^1x-\frac{3}{2}\mu^1t^2+m_{19}t+m_{23},$$
$$\eta=\mu^1u-3\mu^1t+m_{19}.$$

Таким чином, за умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри ліївської інваріантності задається наступними векторними полями:

$$Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$Q^4 = t\partial_t + \left(2x - \frac{3}{2}t^2\right)\partial_x + (u - 3t)\partial_u.$$

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (2.25) і (2.27) отримуємо

$$\begin{aligned}
&2m_{17} + m_2 u_{11}^p - 3m_2 p u_{11}^p = 0,\\
&m_{18} + (m_3 - \mu^1)u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3)p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{17} - 3m_{20}) - m_2 u_{11}^p + 3m_2 p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{18} - 2m_{21}) - (\mu^1 + 2m_3 - m_1)u_{11}^p + 3(\mu^1 + 2m_3 - m_1)p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{19} - m_{22}) - m_{16} u_{11}^p + 3m_{16} p u_{11}^p = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

При розщепленні цієї системи за $u_{11}$ отримуємо такі обмеження на сталі:

$$m_{17} = 0, \quad m_{18} = 0, \quad m_{20} = 0, \quad m_{21} = 0, \quad m_{19} = m_{22}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то маємо ще наступні обмеження:

$$m_2 = 0, \quad m_{16} = 0, \quad \mu^1 = m_1 - 2m_3,$$
$$(3 - 3p)m_3 + (2p - 1)m_1 = 0.$$

Останні дві рівності можуть бути переписані наступним чином:

$$m_1 = \frac{(3p - 3)m_3}{2p - 1}, \quad \mu^1 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3.$$

У цьому випадку компоненти векторного поля $Q$ мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \frac{p + 1}{1 - 2p}m_3 t + \mu^0, \quad \xi^1 = \frac{2 - p}{1 - 2p}m_3 x + m_{19}t + m_{23},$$
$$\eta = m_3 u + m_{19}.$$

Нижче наведений базис максимальної алгебри ліївської інваріантності для $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$:

$$
\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\
&Q^4 = (p+1)t\partial_t + (2-p)x\partial_x + (1-2p)u\partial_u.
\end{aligned}
$$

**Зауваження 2.3.** Якщо $p = -1$, то в цьому випадку проекція алгебри вищенаведених векторних полів на $t$-компоненту матиме розмірність 1, але цей випадок включений тут для повноти розгляду степеневої нелінійності.

За умови $p = \frac{1}{3}$ маємо лише наступне обмеження:

$$
\mu^1 = \frac{2}{3}m_1.
$$

Отже, у випадку $H = u_{11}^{1/3}$ компоненти векторного поля $Q$ такі:

$$
\begin{aligned}
\xi^0 &= \frac{2}{3}m_1 t + \mu^0, \\
\xi^1 &= \left(m_2 t^2 + \left(2m_3 - \frac{1}{3}m_1\right) t + m_{16}\right) u \\
&\quad + ((-m_2 t + m_1 - m_3)x + m_{19}t + m_{23}), \\
\eta &= (m_2 t + m_3)u + (-m_2 x + m_{19}).
\end{aligned}
$$

З точністю до лінійних замін одержуємо наступний базис максимальної алгебри ліївської інваріантності:

$$
\begin{aligned}
&Q^1 = \partial_t, \quad Q^2 = \partial_x, \quad Q^3 = t\partial_x + \partial_u, \\
&Q^4 = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, \quad Q^5 = u\partial_x, \\
&Q^6 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad Q^7 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{k = 1}$. У цьому випадку

$$
\xi^0 = \mu^0, \tag{2.29}
$$

де $\mu^0$ — довільна константа. Порівнюючи з третім рівнянням із (2.12), маємо

$$0 = -2m_2t + \lambda_0^2 - 2m_3 + m_1, \tag{2.30}$$

звідки після диференціювання за змінною $t$ отримаємо

$$\lambda_{00}^2 = 2m_2,$$

іншими словами,

$$\lambda^2 = m_2t^2 + m_{23}t + m_{24}.$$

Підставляючи щойно наведений вираз у (2.30), одержимо

$$0 = -2m_2t + 2m_2t + m_{23} - 2m_3 + m_1,$$

звідки слідує, що $m_{23} = 2m_3 - m_1$, тобто

$$\lambda^2 = m_2t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24}. \tag{2.31}$$

Після підстановки (2.31) у друге рівняння системи (2.12) маємо

$$\lambda_0^5 + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0. \tag{2.32}$$

Після диференціювання двічі за змінною $t$ отримаємо

$$\lambda_{000}^5 = 0,$$

що свідчить про те, що функція $\lambda^5$ — квадратична, тобто

$$\lambda^5 = m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27}.$$

Підставимо цей вираз назад у рівняння (2.32), одержимо

$$2m_{25}t + m_{26} + (m_2t + m_3)H + (-3m_2t + (2m_1 - 3m_3))u_{11}H' = 0.$$

Розщеплюючи за змінною $t$, приходимо до системи:

$$\begin{aligned} &2m_{25} + m_2 H - 3m_2 u_{11} H' = 0, \\ &m_{26} + m_3 H + (2m_1 - 3m_3) u_{11} H' = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Підставимо тепер функції $\lambda^5$ і $\lambda^2$ у перше рівняння системи (2.12):

$$\begin{aligned} &(m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - \lambda^4_0) - (m_2 t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ &\quad + 3(m_2 t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24}) u_{11} H' = 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Диференціювання тричі за змінною $t$ показує, що $\lambda^4_{0000} = 0$, що свідчить про те, що функція $\lambda^4$ — кубічна. Отже,

$$\lambda^4 = m_{28}t^3 + m_{29}t^2 + m_{30}t + m_{31}.$$

Підставляючи функцію $\lambda^4$ назад у рівняння (2.34), маємо

$$\begin{aligned} &(m_{25}t^2 + m_{26}t + m_{27} - 3m_{28}t^2 - 2m_{29}t - m_{30}) \\ &\quad - (m_2 t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24})H \\ &\quad + 3(m_2 t^2 + (2m_3 - m_1)t + m_{24}) u_{11} H' = 0. \end{aligned}$$

Розщеплюючи за змінною $t$, одержуємо таку систему:

$$\begin{aligned} &(m_{25} - 3m_{28}) - m_2 H + 3m_2 u_{11} H' = 0, \\ &(m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1)H + 3(2m_3 - m_1) u_{11} H' = 0, \\ &(m_{27} - m_{30}) - m_{24} H + 3m_{24} u_{11} H' = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Бачимо, що всі ці рівняння мають загальний вигляд (1.27) із деякими сталими параметрами $a$, $b$, $c$ і $d$. З точністю до еквівалентності, визначеної в теоремі 2.1, існує тільки три можливості для розв'язків рівняння (1.27), а саме, $\mathrm{e}^{u_{11}}$, $\ln(u_{11})$ і $u_{11}^p$, де $p \neq 0, 1$.

Якщо $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$, то із систем (2.33) і (2.35) одержуємо

$$
\begin{aligned}
&2m_{25} + m_2\mathrm{e}^{u_{11}} - 3m_2u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&m_{26} + m_3\mathrm{e}^{u_{11}} + (2m_1 - 3m_3)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_{25} - 3m_{28}) - m_2\mathrm{e}^{u_{11}} + 3m_2u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1)\mathrm{e}^{u_{11}} + 3(2m_3 - m_1)u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0,\\
&(m_{27} - m_{30}) - m_{24}\mathrm{e}^{u_{11}} + 3m_{24}u_{11}\mathrm{e}^{u_{11}} = 0.
\end{aligned}
$$

Розщеплення цієї системи приводить до наступних обмежень на сталі:

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0, \quad m_{24} = 0, \quad m_{25} = 0,\\
&m_{26} = 0, \quad m_{28} = 0, \quad m_{29} = 0, \quad m_{27} = m_{30}.
\end{aligned}
$$

Тому

$$
\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.
$$

Таким чином, у випадку функції $H = \mathrm{e}^{u_{11}}$ отримуємо максимальну алгебру ліївської інваріантності з теореми 2.2.

Якщо $H = \ln(u_{11})$, то із систем (2.33) і (2.35) отримуємо

$$
\begin{aligned}
&(2m_{25} - 3m_2) + m_2\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{26} + 2m_1 - 3m_3) + m_3\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{25} - 3m_{28} + 3m_2) - m_2\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{26} - 2m_{29} + 6m_3 - 3m_1) - (2m_3 - m_1)\ln(u_{11}) = 0,\\
&(m_{27} - m_{30} + 3m_{24}) - m_{24}\ln(u_{11}) = 0.
\end{aligned}
$$

Розщеплюючи цю систему, одержуємо наступні обмеження на сталі:

$$
\begin{aligned}
&m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0, \quad m_{24} = 0, \quad m_{25} = 0,\\
&m_{26} = 0, \quad m_{28} = 0, \quad m_{29} = 0, \quad m_{27} = m_{30}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Таким чином, за умови $H = \ln(u_{11})$ базис максимальної алгебри ліївської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $H = u_{11}^p$, $p \neq 0, 1$, то із систем (2.33) і (2.35) отримуємо

$$\begin{aligned}
&2m_{25} + m_2 u_{11}^p - 3m_2 p u_{11}^p = 0,\\
&m_{26} + m_3 u_{11}^p + (2m_1 - 3m_3) p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{25} - 3m_{28}) - m_2 u_{11}^p + 3m_2 p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{26} - 2m_{29}) - (2m_3 - m_1) u_{11}^p + 3(2m_3 - m_1) p u_{11}^p = 0,\\
&(m_{27} - m_{30}) - m_{24} u_{11}^p + 3m_{24} p u_{11}^p = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Після розщеплення цієї системи за $u_{11}$ отримуємо наступні обмеження на сталі:

$$m_{25} = 0, \quad m_{26} = 0, \quad m_{28} = 0, \quad m_{29} = 0, \quad m_{27} = m_{30}.$$

Далі, якщо $p \neq \frac{1}{3}$, то з першого й п'ятого рівнянь системи (2.36) маємо ще наступні обмеження: $m_2 = 0$, $m_{24} = 0$. Якщо $p \neq -1$, то з другого й четвертого рівнянь системи (2.36) маємо ще наступні обмеження: $m_1 = 0$, $m_3 = 0$.

Таким чином, при $p \neq \frac{1}{3}, -1$ компоненти векторного поля $Q$ мають наступний вигляд:

$$\xi^0 = \mu^0, \quad \xi^1 = m_{27}t + m_{31}, \quad \eta = m_{27}.$$

Отже, базис максимальної алгебри ліївської інваріантності визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = \frac{1}{3}$, то базис максимальної алгебри ліївської інваріантності також визначається випадком $k = 2$.

Якщо $p = -1$, то $m_1 = 2m_3$, й отримуємо частинний випадок для степеневої нелінійності (див. зауваження 2.3).

Отримані результати підсумовані в наступному твердженні.

**Теорема 2.4** (результат групової класифікації, [7]). *Повний список $G^{\sim}$-нееквівалентних (максимальних) розширень ліївських симетрій у класі* (2.1) *вичерпують такі випадки:*

(0) *загальний випадок* $H = H(u_{11})$,
$\mathfrak{g}^0 = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$,

(1) $H(u_{11}) = \ln(u_{11})$,
$\mathfrak{g}^{\ln(u_{11})} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, t\partial_t + \big(2x - \frac{3}{2}t^2\big)\partial_x + (u - 3t)\partial_u \rangle$,

(2) $H(u_{11}) = u_{11}^p, \quad p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$,
$\mathfrak{g}^{u_{11}^p} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, (p+1)t\partial_t + (2-p)x\partial_x + (1-2p)u\partial_u \rangle$,

(3) $H(u_{11}) = u_{11}^{1/3}$,
$$\mathfrak{g}^{u_{11}^{1/3}} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\, u\partial_x,\, (2tu - x)\partial_x + u\partial_u,\, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle.$$

Результати групової класифікації класу (2.1) наведені в таблиці 2.1.

Табл. 2.1. Результати групової класифікації класу (2.1).

| $H(u_{xx})$ | Ліївська алгебра інваріантності |
|---|---|
| $\forall$ | $\langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u \rangle$ |
| $\ln u_{xx}$ | $\langle \partial_t, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, t\partial_t + (2x - \frac{3}{2}t^2)\partial_x + (u - 3t)\partial_u \rangle$ |
| $u_{xx}$ | $\langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\, t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u \rangle$ |
| $u_{xx}^p$, $p \neq 0, \frac{1}{3}, 1$ | $\langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, (p+1)t\partial_t + (2-p)x\partial_x + (1-2p)u\partial_u \rangle$ |
| $u_{xx}^{1/3}$ | $\langle \partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,$ $u\partial_x,\, (2tu - x)\partial_x + u\partial_u,\, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u) \rangle$ |

Третій випадок таблиці відповідає добре відомому рівнянню Бюргерса $u_t + uu_x = u_{xx}$, яке допускає п'ятивимірну алгебру максимальної ліївської інваріантності.

## 2.3. Висновки

У цьому розділі наведене алгебраїчне доведення результату щодо групової класифікації класу нелінійних еволюційних рівнянь (2.1), яка була вперше проведена в рамках інфінітезимального підходу Бойком та Фущичем у 1996 році в [7, 11]. Аналогічно до першого розділу, в другому розділі також була використана теорема Лі про реалізації алгебр Лі на прямій. Оскільки проекція ядра на $t$-компоненту в цьому випадку виявилася одновимірною, то довелося розглядати вже три можливості для розмірності проекції алгебри Лі на $t$-компоненту, а саме, $k = 1, 2, 3$. Через це задача групової класифікації нелінійного рівняння Бюргерса виявилася дещо складнішою за групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Було показано, що для $k = 3$ розширення розмірності максимальної алгебри ліївської інваріантності можливе лише у випадку стандартного рівняння Бюргерса, для $k = 2$ — у випадку логарифмічної та степеневої нелінійностей, а в випадку $k = 1$ розширень немає, тобто маємо загальний випадок при довільній функції $H$.

Важливо зазначити, що, згідно з [27, Theorem 0.1], верхня межа розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності нелінеаризовних (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку становить 7. Окрім того, у 2019 році Бойко та Локазюк знайшли явний вигляд узагальненого перетворення годографа, яке зводить усі такі рівняння з 7-вимірною алгеброю ліївської інваріантності (випадок (3) теореми 2.4) до рівняння $u_t = u_{xx}^{1/3}$ (випадок (4) теореми 1.3).

Відкритими залишаються питання про вивчення структури контактних та точкових перетворень, пов'язаних із класом (2.1), а також класифікація підалгебр алгебр із теореми 2.4, відповідні ліївські редукції, побудова точних розв'язків тощо.

# Висновки

Дана робота складається з двох розділів. Перший із них присвячений груповій класифікації нелінійного рівняння теплопровідності, другий — груповій класифікації нелінійного рівняння Бюргерса. Вперше задача групової класифікації цих рівнянь була розв'язана в рамках класичного інфінітезимального підходу в роботах Ахатова–Газізова–Ібрагімова та Бойко–Фущича відповідно. Ці доведення були досить громіздкими. Завдяки застосуванню деяких алгебраїчних технік вдалося не лише перевірити та підтвердити достовірність результатів, отриманих раніше в рамках класичного інфінітезимального підходу, але й значно спростити технічні викладки. В обох випадках принциповим кроком було суттєве спрощення доведення із застосуванням алгебраїчного підходу, який полягав в аналізі придатних алгебр ліївської інваріантності. Спочатку був використаний відомий результат, згідно з яким для довільного векторного поля, яке допускається еволюційним рівнянням, його $t$-компонента залежить лише від змінної $t$. Після цього був проведений аналіз розмірності проекції алгебри на цю $t$-компоненту з використанням класичної теореми Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій.

В якості подальшої роботи можна згадати декілька цікавих задач. По-перше, проведення розширеного групового аналізу розглянутих рівнянь, тобто вивчення властивостей та структури знайдених алгебр симетрій, зокрема, опис відповідних повних груп симетрій, включно з дискретними й, можливо, контактними перетвореннями. Така робота важлива з точки зору симетрійного аналізу еволюційних рівнянь і подальшої побудови та класифікації підалгебр, проведення редукції тощо. По-друге, виконання групової класифікації складніших класів в рамках алгебраїчного методу, наприклад, опис максимальних алгебр ліївської/контактної інваріантності для класу рівнянь вигляду $u_t = H(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$, частинними випадками яких є нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійне рівняння Бюргерса. По-третє, групова класифікація для класу, що включає залежність від похідних третього порядку, тобто є узагальненням рівняння Бюргерса–Кортевега–де Фріза. А також розгляд задач, пов'язаних із побудовою точних розв'язків, інтегровністю в цих підкласах тощо.

# Список використаних джерел

1. Бойко В.М., Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, Дис. ... док. фіз.-мат. наук, Київ, Інституту математики НАН України, 2018, 338 с.
2. Бойко В.М., Локазюк О.В., (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Зб. праць Ін-ту математики* **16** (2019), no. 1, 16–21.
3. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 45–50.
4. Гурака С.Т., Про симетрії систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції "Шевченківська весна — 2022", Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 14 квітня 2022.
5. Гурака С.Т., Про групову класифікацію систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими комутуючими матрицями, Онлайн-матеріали міжнародного семінару на честь Вільгельма Фущича "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics", Київ, Інститут математики НАН України, 23–24 грудня 2022.
6. Локазюк О.В., Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь, Дис. ... док. філософії, Київ, Інституту математики НАН України, 2022, 196 с.
7. Фущич В.І., Бойко В.М., Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку, *Укр. матем. журн.* **48** (1996), no. 12, 1589–1601.

8. Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh., Nonlocal symmetries. A heuristic approach, *J. Soviet Math.* **55** (1991), 1401–1450.
9. Bihlo A., Popovych R.O., Group classification of linear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **448** (2017), no. 2, 982–1005, arXiv:1605.09251.
10. Bluman G., Kumei S., Symmetries and differential equations, Springer, New York, 1989, xiv+412 pp.
11. Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference", Kyiv, Institute of Mathematics, 1997, vol. 1, 122–129.
12. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *J. Anal. Math. Phys.* **127** (2021), 11, 38 pp., arXiv:2008.05460.
13. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **539** (2024), 128543, 51 pp., arXiv:2105.05139.
14. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, 17 pp., for extended and revised version see arXiv:1403.6062.
15. Fushchich W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, Allerton Press, Inc., New York, 1994, xvi+465 pp.
16. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xxiv+435 pp.

17. Gazizov R.K., Potential filtration equation, in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Boca Raton, Chemical Rubber Company, 1994, xiv+429 pp.

18. Huraka S.T., Symmetries of differential equations, Graduate Colloquium, Alberta University, Edmonton, Canada, April 5, 2023.

19. Huraka S.T., Lokaziuk O.V., On group classification of nonlinear heat equation: algebraic approach, Workshop "Complex Dynamical Systems: theory, mathematical modelling, computing and application — 2023", Kyiv, October 2–4, 2023.

20. Huraka S.T., Lokaziuk O.V., On group classification of nonlinear heat equation: algebraic approach, in Proceedings of Workshop "Complex Dynamical Systems: theory, mathematical modelling, computing and application — 2023" (Kyiv, October 2–4, 2023), submitted.

21. Ibragimov N.H., A practical course in differential equations and mathematical modelling. Classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles, Higher Education Press, Beijing, 2010, xiv+348 pp.

22. Kingston J.G., On point transformation of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), no. 14, L769–L774.

23. Koval S.D., Popovych R.O., Point and generalized symmetries of the heat equation revisited, *J. Math. Anal. Appl.* **527** (2023), no. 2, 127430, 21 pp., arXiv:2208.11073.

24. Kurujyibwami C., Basarab-Horwath P., Popovych R.O., Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **157** (2018), 171–203, arXiv:1607.04118.

25. Kurujyibwami C., Popovych R.O., Equivalence groupoids and group classification of multidimensional nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.* **491** (2020), no. 1, 124271, 35 pp., arXiv:2003.02781.

26. Lie S., Theorie der Transformationsgruppen I, *Math. Ann.* **16** (1880), no. 4, 441–528.

27. Magadeev B.A., On group classification of nonlinear evolution equations, *St. Petersburg Math. J.* **5** (1994), no. 2, 345–359.

28. Maple 17, `https://www.maplesoft.com/products/Maple/`.

29. Olver P.J., Application of Lie groups to differential equations, Springer, New York, 1993, xxviii+513 pp.

30. Olver P.J., Equivalence, invariants, and symmetry, University Press Cambridge, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

31. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), no. 8, 081511, 37 pp., arXiv:1703.06932.

32. Ovsiannikov L.V., Group analysis of differential equations, Academic Press, Inc. New York, 1982. xvi+416 pp.

33. Pukhnachov V.V., Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations, in Energy Methods in Continuum Mechanics (Oviedo, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 75–99.

34. Sokolov V.V., Symmetries of evolution equations, *Russian Math. Surveys* **43** (1988), no. 5, 165–204.

35. Zhdanov R.Z., On relation between potential and contact symmetries of evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), no. 5, 053522, 9 pp.