Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Іванова Наталія Миколаївна

УДК 517.958

Класифікаційні задачі для рівнянь конвекції–дифузії та рівнянь Шрьодінгера

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Нікітін Анатолій Глібович
доктор фіз.–мат. наук, професор

Київ — 2004

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

A^{equiv}	алгебра Лі групи еквівалентності
A^{ker}	алгебра Лі ядра основних груп
A^{max}	максимальна алгебра Лі інваріантності
$\mathrm{Ad}\, I$	приєднане зображення елемента I
$\mathrm{Aut}(S)$	група автоморфізмів алгебри S
$\int a$	скорочення для $\int a(u)du$
CV	множина векторів густини законів збереження
CV_0	множина векторів густини тривіальних законів збереження
CV_{f}	простір нетривіальних законів збереження
$\dim P$	розмірність простору P
∂_x	оператор диференціювання $\frac{\partial}{\partial x}$ за змінною x
D_x	оператор повного диференціювання за змінною x
$D_i,\ D_{x_i}$	оператор повного диференціювання за змінною x_i
G^{equiv}	група еквівалентності
G^{ker}	ядро основних груп
$G^{\mathrm{max}},\ G^{\mathrm{max}}(L)$	основна група рівняння L
$J^{(k)}$	простір джетів порядку k
$\mathcal{L}$	система диференціальних рівнянь
$\mathcal{L}^k$	потенціальна система k-го рівня
$\mathcal{L}_{(k)}$	многовид системи $\mathcal{L}$ у просторі $J^{(k)}$
L_n	простір інтегровних у n-му степені функцій
$\mathcal{L}\|_S$	клас систем з довільними елементами, що задовольняють умови S

$\widehat{\mathcal{L}}\vert_S$	множина всіх потенціальних систем, побудованих для систем з класу $\mathcal{L}\vert_S$ за допомогою законів збереження
$\vert\vert u\vert\vert_n$	$\vert\vert u\vert\vert_n = (\int \vert u(t,x)\vert^n dx)^{1/n}$ — норма у просторі L_n
$u_{(\rho)}$	множина всіх частинних похідних функцій u за змінними x порядку не більше за ρ
$\mathcal{W}^1$	простір Соболева з нормою $\vert\vert u\vert\vert_{\mathcal{W}^1} = (\vert\vert\nabla u\vert\vert_2^2 + \vert\vert u\vert\vert_2^2)^{1/2}$

Вступ

Актуальність теми. При дослідженні будь-якого явища дослідник має справу з ієрархією моделей, яка складається, як правило, шляхом послідовного урахування різних факторів і містить нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. В ієрархії моделей завжди можна прослідкувати ієрархію симетрії, що описується групами перетворень. Знання таких груп дає досліднику значну інформацію для вивчення математичних моделей. Наприклад, групова властивість системи диференціальних рівнянь дозволяє генерувати нові розв'язки з вже відомих, будувати для моделі закони збереження, виділяти класи інваріантно–групових розв'язків, знаходження яких є більш простою задачею порівняно із знаходженням загального розв'язку тощо. Все це набуває особливо великої цінності при вивченні нелінійних моделей, де кожен точний розв'язок відіграє важливу роль. Навіть якщо він не є розв'язком реальної крайової задачі, його доцільно використовувати як тестовий для розроблених в рамках інших підходів чисельних або наближених алгоритмів.

Основні методи групового аналізу розробив С. Лі наприкінці XIX століття [101]. Він застосував цю теорію до конкретних рівнянь і знайшов їх точні розв'язки. Оскільки математичні моделі багатьох явищ реального світу формулюються у вигляді диференціальних рівнянь, то очевидно, що одним з найбільш суттєвих застосувань теорії груп Лі є її використання в загальній теорії диференціальних рівнянь.

У випадку звичайних диференціальних рівнянь [23] з інваріантності відносно однопараметричної групи симетрій випливає можливість пониження порядку рівняння на одиницю, причому розв'язки вихідного рівняння відновлюються за розв'язками редукованого за допомогою однієї квадратури. У випадку одного рівняння першого порядку цей метод дає явну формулу для загального розв'язку. Багатопараметричні групи симетрій приводять до подальшого пониження порядку, але не завжди можна відновити розв'язки вихідного рівняння за розв'язками редукованого шляхом лише квадратур, за винятком випадку, коли сама група задовольняє додатковій вимозі розв'язності.

У випадку систем диференціальних рівнянь в частинних похідних повна група симетрій не допомагає відшукати загальний розв'язок, тільки у часткових випадках вона може вказати, коли систему можна перетворити на таку, що легше розв'язується, наприклад лінійну. Однак, групи симетрій можна використовувати, щоб явно знайти часткові класи розв'язків, які є інваріантними відносно деякої підгрупи повної групи симетрій. Для багатьох нелінійних систем це єдині відомі точні розв'язки, тому вони відіграють важливу роль і в математичних дослідженнях, і в фізичних застосуваннях.

Другою важливою задачею групового аналізу є застосування симетрійних методів для групової класифікації рівнянь. Розв'язання цієї задачі цікаве не лише з математичної точки зору, але має й прикладне значення. Диференціальні рівняння математичної фізики часто містять параметри або функції, які знаходяться експериментально і тому не є строго фіксованими (як говорять, є довільними елементами). В той же час рівняння математичної моделі повинні бути достатньо простими для аналізу і розв'язання. Груповий підхід дозволяє прийняти за критерій простоти вимогу, щоб з вибраним довільним елементом моделююче диференціальне рівняння допускало групу з певними властивостями або, взагалі, найбільш широку групу.

Корисною і цікавою є також задача про можливі перетворення в заданому класі диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо відома група еквівалентності для класу, то для конкретного рівняння з її допомогою можна шукати такі перетворення, щоб модифіковане рівняння мало найбільш просту і зручну для дослідження диференціальну структуру.

Ще одним застосуванням апарату групового аналізу є знаходження законів збереження, які відіграють важливу роль у вивченні рівнянь математичної фізики. Їх знання корисне для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними [100], наприклад, для контролю чисельних похибок. Дослідження законів збереження рівняння Кортевега–де Фріза було початковою точкою для відкриття нових підходів до розв'язання еволюційних рівнянь [111] (перетворення Міури, пари Лакса, метод оберненої задачі розсіяння, бі-гамільтонові структури). Існування значної кількості нееквівалентних законів збереження для (систем) диференціальних рівнянь в частинних похідних є показником їх можливої інтегровності. Закони збереження є важливими у теорії некласичних перетворень [105] і теорії нормальних форм та асимптотичної інтегровності [98].

Перераховані вище і деякі інші, більш спеціальні, задачі утворюють широку область застосування теорії і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь.

Серед фундаментальних рівнянь математичної фізики чільне місце належить рівнянням еволюційного типу. Так, рівняння конвекції–дифузії успішно використовуються для моделювання проблем у математичній фізиці, хімії і біології [52, 108, 109, 118]. Вони описують рух рідини у пористому середовищі, перенос енергії в плазмі, розподіл розчинів у грунті. Ці та інші застосування, зокрема у металургії, можна знайти в [39, 53, 87, 88, 107, 126, 127, 140].

Нелінійні рівняння Шрьодінгера відіграє виключно важливу роль в теорії розвитку слабо змінних хвильових шлейфів в стійких слабо нелінійних системах і зустрічається в цілому ряді галузей фізики, включаючи фізику плазми і нелінійну оптику [10]. Вони використовуються в геометричній оптиці [27], нелінійній квантовій механіці [54] і теорії конденсації Бозе–Ейнштейна [48].

У зв'язку з цим актуальною постає задача групової класифікації та подальшого дослідження у класах рівнянь конвекції–дифузії і нелінійних рівнянь Шрьодінгера.

Різні класи квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними та нелінійних рівнянь Шрьодінгера досліджувалися за допомогою симетрійних методів в [20, 22, 29, 38, 50, 54–56, 60–62, 64–70, 110, 112, 113, 116, 146]. У даній роботі поряд з уточненням та узагальненням отриманих раніше результатів, вводяться нові поняття та розвиваються нові методи групового аналізу, які дозволяють значно спростити знаходження законів збереження та розширити область застосування вже відомих методів групового аналізу, знаходяться закони збереження, проводиться групова класифікація та досліджуються інші симетрійні властивості більш широких класів рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках теми "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098).

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є розробка та вдосконалення симетрійних методів побудови законів збереження, застосування їх до класу рівнянь конвекції–дифузії, а також знаходження потенціальних симетрій та потенціальних перетворень еквівалентності рівнянь конвекції–дифузії і розв'язання задач групової класифікації у класі рівнянь конвекції–дифузії та нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Для цього поряд з класичними методами групового аналізу введено низку нових понять, вдосконалено прямий метод знаходження локальних та ітераційний метод побудови нелокальних (потенціальних) законів збереження систем диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Узагальнено прямий метод знаходження законів збереження. Використовуючи нові поняття еквівалентності законів збереження відносно локальної групи перетворень, лінійної залежності законів збереження та локальної залежності потенціалів, які дозволяють значно спростити знаходження законів збереження та розширити область застосування вже відомих методів групового аналізу, виконано класифікацію всіх локальних законів збереження для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії. Припускаючи можливість залежності законів збереження від кількох потенціалів, узагальнено ітераційну процедуру знаходження потенціальних законів збереження. За допомогою прямого ітераційного методу побудовано нелокальні (потенціальні) закони збереження для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії та відповідні їм потенціальні системи.

2. Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Показано, що нелокальні перетворення, які лінеаризують відомі рівняння Бюргерса, Фокаша–Йортсоса та u^{-2}-дифузії є потенціальними перетвореннями еквівалентності.

3. Проведено повну групову класифікацію (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами відносно як загальної групи еквівалентності, так і усіх локальних перетворень змінних. За допомогою отриманих результатів проведено симетрійну редукцію і знайдено точні розв'язки рівнянь, що належать до даного класу.

4. Досліджено різні види додаткових перетворень еквівалентності на підкласах класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами.

5. Виконано групову класифікацію (1+1)-вимірних рівнянь Шрьодін-

гера з довільним потенціалом та степеневою нелінійністю. Знайдено всі можливі перетворення еквівалентності між рівняннями у даному класі. Показано, що всі такі перетворення належать до групи еквівалентності вихідного класу. Знайдено достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку та розв'язку із загостренням задачі Коші для деяких класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом.

6. Проведено групову класифікацію $(1+n)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора та нелінійністю вигляду $F = F(|\psi|)\psi$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також в квантовій механіці, теорії дифузійних процесів та теорії броунівського руху.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — А.Г. Нікітіну. Подальше уточнення планів дослідження досягнуто у співпраці з Р.О. Поповичем. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно. В роботах, які опубліковано разом з співавторами, особистий внесок дисертанта такий. У роботах [119, 120, 122, 123] Р.О. Поповичу належить уточнення постановки задач, розробка методів дослідження та застосування прямого методу до знаходження перетворень еквівалентності, дисертанту — доведення результату класифікацій, симетрійна редукція та знаходження точних розв'язків рівнянь, що розглядаються. У роботі [121] Р.О. Поповичу належить доведення еквівалентності законів збереження лінійного рівняння теплопровідності. Х. Ешрагі в роботах [122, 123] належить перевірка складних технічних обчислень.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2000–2004, керівник семінару – професор Нікітін А.Г.), об'єднаному семінарі з математичної фізики Інституту математики НАН України (2004, керівники семінару – член-кореспондент НАН України Петрина Д.Я., професор Бєлоколос Є.Д., професор Клімик А.У., професор Нікітін А.Г.), на семінарах факультету математики і статистики Університету Кіпра (2003–2004, Нікосія, Республіка Кіпр, керівник семінару – професор Папародітіс Е.), на IV та V Міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 2001, 2003), на V Міжнародній конференції "Авіа-2003" (Київ, 2003), на III літній школі з сучасної математичної фізики (Златібор, Сербія та Чорногорія, 2004).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в п'яти роботах [85, 86, 119, 122, 123] та додатково висвітлено у роботах [14, 120, 121].

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 146 найменувань. Повний обсяг дисертації 129 сторінок, з них список використаних джерел займає 16 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з п'яти розділів. На початку кожного розділу дається зміст розділу по підрозділах.

У першому розділі проводиться докладний огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації.

У другому розділі дисертації наведено деякі теоретичні відомості і вказано методи знаходження симетрій та розв'язання задач групової класифікації, розроблено поняття еквівалентності законів збереження відносно групи перетворень, узагальнено прямий метод знаходження локальних та ітераційний метод побудови потенціальних законів збереження.

У третьому розділі виконано класифікацію всіх локальних законів збереження для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x.$$

За допомогою прямого ітераційного методу побудовано нелокальні (потенціальні) закони збереження та відповідні потенціальні системи для даного класу рівнянь. Для потенціальної системи, що відповідає спільному для всіх значень параметр–функцій закону збереження виконано повну групову класифікацію. Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для даного класу рівнянь та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Показано, що нелокальні перетворення, що лінеаризують відомі рівняння Бюргерса, Фокаша–Йортсоса та u^{-2}-дифузії є потенціальними перетвореннями еквівалентності.

Четвертий розділ присвячено розв'язанню задачі групової класифікації та побудові точних розв'язків рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x,$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$, $a = a(u)$ і $b = b(u)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $f(x)g(x)a(u)\neq 0$. Зауважимо, що в цьому розділі фактично виконано дві задачі групової класифікації: відносно групи еквівалентності вихідного класу та відносно усіх локальних перетворень змінних. Для деяких підкласів рівнянь проведено симетрійну редукцію та знайдено їх точні розв'язки.

П'ятий, останній, розділ присвячено розв'язанню задач групової класифікації у класі $(1+1)$-вимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом вигляду

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^\gamma\psi + V\psi = 0$$

та $(1+n)$-вимірних рівнянь

$$i\,\psi_t + \Delta\psi + k|x|^2\psi - f\left(|\psi|\right)\psi = 0,$$

де $V = V(t,x)$, $f = f(|\psi|)$ — довільні гладкі комплекснозначні функції своїх аргументів, $\gamma \neq 0$ і k — дійсні сталі. У цьому ж розділі досліджено перетворення еквівалентності між деякими підкласами класів, що розглядаються. Знайдено достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку та розв'язку із загостренням задачі Коші для деяких класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом.

В кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук професору **Нікітіну Анатолію Глібовичу** за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі і кандидату фізико-математичних наук **Поповичу Роману Омеляновичу** за плідну співпрацю, підтримку та допомогу. Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, присвяченої симетрійним властивостям рівнянь конвекції–дифузії та рівнянь Шрьодінгера. Огляд літератури, в якій розглядаються закони збереження, потенціальні симетрії та перетворення еквівалентності для рівнянь конвекції–дифузії виконано у підрозділі 1.1. У підрозділі 1.2 проаналізовано роботи, які пов'язані з симетріями рівнянь конвекції–дифузії. У підрозділі 1.3 розглянуто роботи, в яких вивчаються симетрійні властивості рівнянь Шрьодінгера. У підрозділі 1.4 виконано огляд літератури, присвяченої питанню існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нелінійних рівнянь Шрьодінгера.

1.1. Закони збереження, потенціальні симетрії та перетворення еквівалентності рівнянь конвекції–дифузії

Після того, як видатна робота Еммі Ньотер [115] стала загальновідомою, велика кількість авторів (див. наприклад [23, 84, 90, 133, 135]) шукали закони збереження, використовуючи симетрійний підхід, оснований на результатах Ньотер. В силу узагальненої теореми Ньотер [23], існує взаємно однозначна відповідність між нетривіальними узагальненими варіаційними симетріями деякого функціоналу та нетривіальними законами збереження асоційованого рівняння Ейлера–Лагранжа, причому будь-яка така симетрія є узагальненою симетрією рівняння Ейлера–Лагранжа.

Описаний підхід має ряд переваг. Він зводить побудову законів збереження до знаходження симетрій, для відшукання яких існує кілька добре розвинутих методів. Крім того, необхідні симетрійні властивості відомі для багатьох систем диференціальних рівнянь. Проте цей підхід можна застосувати лише до рівнянь Ейлера–Лагранжа, які утворюють нормальну систему і допускають групи симетрій, що задовольняють у деякому сенсі додаткову “варіаційну” властивість збереження варіаційного інтегралу [23]. Остання вимога приводить до обмеження класу систем, які можуть бути досліджені таким методом.

У той же час означення законів збереження безпосередньо дає шлях до їх знаходження. Техніка обчислень, що використовується у цьому методі, подібна до класичного методу Лі дослідження симетрій диференціальних рівнянь [83, Розділ 6]. Як зазначено у згаданому посиланні, таку алгоритмічну можливість вперше застосовано П.-С. Лапласом [99] для знаходження вектора Лапласа у задачі Кеплера двох тіл. Слідуючи традиції групового аналізу диференціальних рівнянь, назвемо цей метод *прямим* (див., наприклад, [89]) та виокремимо дві його модифікації, в залежності від способу врахування досліджуваної системи.

Одна з цих модифікацій базується на використанні леми Жордана. Застосувавши лему Жордана до означення законів збереження, отримаємо, що ліву частину довільного закону збереження системи $\mathcal{L}$ завжди можна представити, з точністю до відношення еквівалентності, як лінійну комбінацію незалежних рівнянь з $\mathcal{L}$ з коефіцієнтами λ^a, які є функціями з простору джетів $J^{(k)}$. Тут порядок k визначається системою $\mathcal{L}$ та допустимим порядком закону збереження. Наведене представлення можна трактувати як рівняння на вектор густини закону збереження та коефіцієнти λ^a, що визначене на відкритій підмножині простору $J^{(k)}$. Така модифікація прямого методу використовувалася Дж. Блуманом та

П.Р. Доран-Ву [44] для вивчення законів збереження рівнянь дифузії та була розвинута С. Анко та Дж. Блуманом [35, 36] (див. також [13], де наведено теоретичне підгрунтя цього методу). Він дуже близький до симетрійного методу Ньотер, оскільки, у випадку рівнянь Ейлера–Лагранжа, коефіцієнти λ^a є нічим іншим, як ньотерівськими характеристиками. Проте, цей підхід має суттєві недоліки: так, наприклад, необхідність знаходити, крім коефіцієнтів вектора густини, додаткові невідомі функції (коефіцієнти λ^a). Кількість λ^a співпадає (і зростає разом) з числом l незалежних рівнянь системи $\mathcal{L}$. Більш того, λ^a не можна знайти повністю однозначно, оскільки кортежі $\{\lambda^a\}$ та $\{\tilde\lambda^a\}$ відповідають тому ж самому закону збереження тоді й лише тоді, коли кортеж $\{\tilde\lambda^a - \lambda^a\}$ є нульовим на многовиді розв'язків системи $\mathcal{L}$, причому зростання l приводить до суттєвого зростання невизначеності.

Використовуючи другу модифікацію прямого метода (див., наприклад, [89] та підрозділ 3.1 цієї дисертації), можна ввести локальні координати (так звані "незв'язані змінні") на многовиді $\mathcal{L}_{(k)}$, який визначається системою $\mathcal{L}$ у просторі $J^{(k)}$. Інші ("зв'язані") змінні простору $J^{(k)}$ виражаються через незв'язані за допомогою рівнянь з $\mathcal{L}_{(k)}$. Після підстановки отриманих виразів у закон збереження його ліва частина повинна бути тотожним нулем відносно незв'язаних змінних. Описана процедура у класичному груповому аналізі називається "переходом на многовид $\mathcal{L}$". Якщо враховувати $\mathcal{L}$ таким чином, автоматично уникається невизначеність, пов'язана з нульовим вектором густини і характеристиками на розв'язках $\mathcal{L}$. Проте, другий тип невизначеності, що виникає завдяки існуванню нуль-дивергенцій, зберігається.

Різні модифікації симетрійного методу використано для побудови законів збереження конкретних рівнянь. У роботах [89, 91], використовуючи нелокальні симетрії, побудовано закони збереження для деяких класів диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними. В.А. Дородніцин та С.Р. Свірщевський [12] (див. також [83], Розділ 10) побудували всі локальні закони збереження рівнянь вигляду (1.3). Локальні закони збереження першого порядку для рівнянь вигляду (1.5) побудовано А.Х. Карою та Ф.М. Махомедом [90].

Зауважимо, що в усіх попередніх роботах автори лише будували закони збереження, не класифікуючи їх та не досліджуючи нетривіальні зв'язки між побудованими законами.

В роботах [15, 32] доведено, що всі закони збереження еволюційних рівнянь парного порядку $2m$ еквівалентні законам збереження порядку $s \leq m$. Поняття базису законів збереження та деякі алгебраїчні властивості базису досліджувалися у роботі [31]. У роботі Дж. Блумана та П.Р. Доран-Ву [44] розроблена ітераційна процедура знаходження нелокальних (потенціальних) законів збереження, яка була вперше запропонована Ш. Уолквистом та Ф.Естабруком [141] для знаходження потенціалів для рівняння Кортевега–де Фріза.

Для знаходження в рамках локального підходу нелокальних симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних Дж. Блуман *та ін.* [41, 42] запропонували поняття *потенціальної симетрії*. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних може допускати симетрії такого роду, якщо хоча б одне з рівнянь системи можна записати у дивергентній формі. Після введення в рівнянні, записаному у дивергентній формі, потенціалу у якості додаткової залежної змінної, отримаємо нову (потенціальну) систему диференціальних рівнянь в частинних похідних. Будь-яке локальне перетворення інваріантності отриманої системи індукує симетрію вихідної системи. Якщо перетворення хоча б однієї з "непотенціальних" змінних явно залежить від потенціалу, отримана симетрія є нелокальною (потенціальною) симетрією вихідної системи. Більш докладну інформацію про потенціальні симетрії та їх застосування зібрано в [41–43]. Потенціальні симетрії рівнянь вигляду $u_t = (g(u)u_x)_x + f(u)u_x$ та $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$ знайдено Х. Софоклеусом [129, 131, 132].

В усіх згаданих роботах з потенціальної симетрії знайдено лише чисто потенціальні оператори симетрії, але не проводиться повна групова класифікація потенціальних систем з точністю до продовженої групи еквівалентності початкових рівнянь. Це робить неможливим проведення повної симетрійної редукції, знаходження всіх інваріантних відносно перетворень потенціальної симетрії розв'язків та поширення отриманих результатів до знаходження потенціальних симетрій еквівалентних у певному сенсі систем. Як правило, для введення потенціалів використовувалися найбільш очевидні закони збереження, особливо якщо початкове рівняння записане у дивергентній формі. Зв'язки між різними потенціальними системами та потенціалами не досліджувалися.

В [4, 124] запропоновано та використано інші підходи до знаходження нелокальних симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних еволюційного типу. У цих роботах розглядалися не цілі потенціальні системи, а рівняння на потенціал, які пов'язані з вихідними рівняннями нелокальними перетвореннями. І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов назвали такі симетрії "квазілокальними" [4].

Значну кількість робіт присвячено також знаходженню локальних та нелокальних перетворень еквівалентності у класі нелінійних (1+1)-вимірних рівнянь дифузії. Так, наприклад, у роботах [40, 134] знайдено нелокальне перетворення, яке лінеаризує рівняння u^{-2}-дифузії (рівняння Фуджити–Сторма)

$$u_t = a((u+b)^{-2}u_x)_x.$$

Якщо $v(t,x)$ – розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t = v_{xx}$, тоді функція $u(t,x) = v^{-1}v_x$ є розв'язком відомого рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$, запропонованого Дж.М. Бюргерсом [47] у якості моделі турбулентності. Перетворення $v \to u$, яке називається тепер перетворенням Коула–Хопфа, наведено у роботі А.Р. Форсайта 1906 року (див. [59], розділ 32, том 6) і було перевідкрито Е. Хопфом ([82], 1950) та Дж.Д. Коулом ([51], 1951).

В. Штрампп [135] і Дж. Бурган *та ін.* [46] дослідили нелокальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь $u_t = (f(u)u_x)_x$ та довели еквівалентність рівнянь $u_t = (k(u)u_x)_x$ і $u_t = (u^{-2}k(u^{-1})u_x)_x$. В. Штрампп [135] знайшов також перетворення еквівалентності між рівняннями вигляду $u_t = [k(u, u_x)]_x$ і $u_t = [uk(u^{-1}, -u^{-3}u_x)]_x$. Ці результати незалежно перевідкрито та узагальнено В.В. Пухначевим [124]. Використовуючи перетворення між наведеними рівняннями, А.С. Фокаш та Я.С. Йортсос [58] звели рівняння $u_t = (u^{-2}u_x)_x + u^{-2}u_x$ до рівняння u^{-2}-дифузії, що лінеаризується. Зауважимо, що це єдине локальне перетворення між випадками розширень алгебри інваріантності у класі рівнянь $u_t = (f(u)u_x)_x$, яке не міститься у групі еквівалентності.

В 1987 І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов [3] показали, що всі ці нелокальні перетворення є локальними перетвореннями еквівалентності для відповідних рівнянь для потенціалів. В 1989 році для подібних перетворень вони ввели термін “квазілокальні” перетворення еквівалентності” [4].

В 1988 році Дж. Блуман, Г. Рід і С. Кумеі [41] вперше розглянули потенціальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь $u_t = (f(u)u_x)_x$.

Я.Г. Ліль [103] отримав деякі результати щодо потенціальних перетворень еквівалентності для рівнянь вигляду $u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x$. Так, в його роботі вперше знайдено групу потенціальних перетворень еквівалентності для класу рівнянь $u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x$ та побудовано схему зв’язків між лінійним рівнянням, рівнянням u^{-2}-дифузії, рівнянням Фокаша–Йортсоса та рівнянням Бюргерса. На жаль, ці результати, включаючи поняття потенціальних перетворень еквівалентності, є маловідомими і перевідкриті іншими авторами.

Використовуючи методи групового аналізу, для рівнянь конвекції–дифузії знайдено велику кількість точних розв’язків [80,81,92,93]. У довідниках [83] та [24] зібрано переважну більшість з відомих точних розв’язків класу рівнянь, що розглядається.

1.2. Симетрія рівнянь конвекції–дифузії

Групову класифікацію лінійних (1+1)-вимірних рівнянь другого порядку еволюційного типу вперше було виконано Софусом Лі [101] в його класифікації лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними. Більш сучасний виклад цього питання подано у [22].

Дослідження нелінійних (1+1)-вимірних рівнянь розпочалося у 1959 роботою Л.В. Овсяннікова [21], в якій знайдено симетрії рівняння

$$u_t = (f(u)u_x)_x. \tag{1.1}$$

В.Л. Катков (1965, [16]) класифікував рівняння

$$u_t + uu_x = (k(u)u_x)_x. \tag{1.2}$$

В.А. Дородніцин (1982, [11]) провів групову класифікацію рівнянь

$$u_t = (G(u)u_x)_x + g(u). \tag{1.3}$$

В 1987 І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов [3] класифікували рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{1.4}$$

А. Орон, Ф. Розено (1986, [116]), С.М. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє (1994, [144]) та М.П. Едвардс (1994, [56]) запропонували найбільш широкий на той час перелік симетрій рівняння

$$u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x. \tag{1.5}$$

(Рівняння (1.5) іноді називають рівнянням Річардса [143].) Проте, у цих роботах деякі випадки (рівняння u^{-2}-дифузії, рівняння Фокаша–Йортсоса) з нетривіальною ліївською симетрією пропущено. Результати робіт [11, 16, 21, 56, 116] узагальнено Р.М. Чернігою та М.І. Сєровим (1998, [50]), які класифікували нелінійне рівняння теплопровідності з конвективним членом

$$u_t = (G(u)u_x)_x + f(u)u_x + g(u). \tag{1.6}$$

Деякі симетрійні властивості класу

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x \tag{1.7}$$

розглянуто у роботі С.К. Ель-Лабані, А.М. Елханбалі та Р. Сабрі [57]. Проте, вона не містить ані вичерпних, ані вірних результатів класифікації. Переважну кількість випадків з нетривіальними ліївськими симетріями пропущено, а в наведених випадках алгебри симетрій обчислено з суттєвими численними помилками. У дисертації проведено повну групову класифікацію та досліджено перетворення еквівалентності у вказаному класі рівнянь.

Зауважимо, що рівняння (1.1)–(1.7) є частковими випадками більш загального класу рівнянь

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x). \tag{1.8}$$

Групова класифікація (1.8) представлена в [1, 17, 18, 38, 145]. Проте, оскільки група еквівалентності рівняння (1.8) значно ширша за групи еквівалентності рівнянь (1.1)–(1.6), результати [1, 17, 18, 38, 145] не можуть бути застосованими до симетрійної класифікації рівнянь вигляду (1.1)–(1.6). Але ці результати корисні для відшукання додаткових еквівалентностей у вказаних класах.

Було багато спроб знаходження симетрій диференціальних рівнянь комп'ютерними методами. Для цього використовувалися такі системи комп'ютерної алгебри, як Mathematica, MACSYMA, Maple, REDUCE, AXIOM, MuPAD та ін. Різні символьні пакети (див. детальний огляд в [78, 79]), що написані на язику вказаних систем, можуть шукати визначальні рівняння для операторів симетрій. На жаль, всі існуючі пакети мають ряд суттєвих недоліків (так, наприклад, обмеження на нелінійності) і не можуть провести вичерпну та безпомилкову групову класифікацію [56, 57, 116]. Проте, їх доцільно використовувати для перевірки отриманих результатів. (Для перевірки результатів, представлених у дисертації, використовувалася програма LIE автора А. Хеда [77]).

1.3. Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера

Основним рівнянням квантової механіки вважається рівняння Шрьодінгера. Лінійне рівняння Шрьодінгера в 1926 році було запропоноване Ервіном Шрьодінгером [128] для опису руху нерелятивістських частинок. За останні роки багато авторів, виходячи з різних мотивів і міркувань запропонували широкий спектр нелінійних узагальнень рівняння Шрьодінгера. А. Хасегава [75] показав, як нелінійне рівняння Шрьодінгера вигляду

$$\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma u|u|^2=i\frac{\partial u}{\partial t}$$

виникає у якості еволюційного рівняння для огинаючої несучої хвилі. Це рівняння можна трактувати також як рівняння коливань електронної плазми [10]. Зараз кубічне рівняння Шрьодінгера є однією з найбільш відомих інтегровних моделей математичної фізики. Х. Хасімото і Х. Оно [76] довели, що нелінійне рівняння Шрьодінгера описує амплітуду хвильових пакетів в полі сил тяжіння на поверхні рідини.

Але частина нелінійних рівнянь, запропонованих для опису нелінійних ефектів у плазмі, оптиці та квантовій механіці не задовольняють принципу відносності Галілея, тому такі рівняння не можуть бути рівняннями руху. У зв'язку з цим в роботах [29, 60, 61, 64, 65] проведено симетрійну класифікацію нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно групи Галілея та різних її розширень.

Фактично, вперше групову класифікацію рівнянь Шрьодінгера проведено Софусом Лі. А саме, його класифікація [101] лінійних рівнянь з двома незалежними комплексними змінними містить у неявному вигляді розв'язок задачі групової класифікації для лінійного (1+1)-вимірного рівняння Шрьодінгера з довільним потенціалом. З доведення Лі випливає, що лінійні рівняння з потенціалом типу гармонійного і репульсивного осцилятора та лінійним потенціалом еквівалентні вільному рівнянню Шрьодінгера.

У роботі П. Вінтерcнітца, Я.А. Смородинського, М. Углiржа та І. Фріша [9] знайдено всі стаціонарні потенціали, для яких лінійне рівняння Шрьодінгера допускає нетривіальні лiївські симетрії. Ці результати перевідкрито в роботах У. Нідерера [112, 113].

Наступним було досліджено [20, 62, 64] класи рівнянь, що містять $(1+n)$-вимірні нелінійні рівняння Шрьодінгера з нелінійністю вигляду $f(|\psi|)\psi$, що виділяються своїми симетрійними властивостями, оскільки вони інваріантні відносно групи Галілея. Зауважимо також, що розширення цієї групи інваріантності можливі лише для логарифмічної і степеневої нелінійності, та існує значення показника $\gamma = 4/n$ [20, 45, 62], що є спеціальним з симетрійної точки зору. А саме, вільне рівняння Шрьодінгера та рівняння з нелінійністю $|\psi|^{4/n}\psi$ допускають повну групу Галілея, розширену масштабними та конформними перетвореннями. Ці нелінійні рівняння Шрьодінгера мають також інші спеціальні властивості, і значення показника $\gamma = 4/n$ називається зараз критичним степенем.

Наведені вище результати склали основу для дослідження симетрійних властивостей більш широких класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Так, у серії робіт [66–70] проведено групову класифікацію та знайдено точні розв'язки рівняння Шрьодінгера вигляду

$$\psi_t + \Delta\psi = a_0\psi + a_1|\psi|^2\psi + a_2|\psi|^4\psi.$$

Х.-Д. Дойбнер та Г.А. Голдін, використовуючи симетрійний підхід, отримали нові рівняння, що узагальнюють рівняння Шрьодінгера і які можна застосовувати в нелінійній квантовій механіці [54]. Симетрійні властивості цих рівнянь досліджено в [55, 110, 146].

Використовуючи алгебраїчний підхід [1, 17, 18, 38, 69, 145], в роботі [146] розглядається нелінійне рівняння Шрьодінгера вигляду

$$i\psi_t = \psi_{xx} + F(t, x, \psi, \psi^*, \psi_x, \psi^*_x)$$

і проводиться класифікація рівнянь, які допускають алгебру інваріантності розмірності, що не перевищує три.

У роботі [20] проведено повну групову класифікацію нелінійних рівнянь Шрьодінгера $i\psi_t = \Delta\psi + F(\psi, \psi^*)$.

1.4. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійних рівнянь Шрьодінгера

Особливе місце в теорії нелінійних рівнянь займає коло досліджень необмежених розв'язків (режимів із загостренням). Нелінійні еволюційні задачі, що допускають необмежені розв'язки, є (за часом) глобально нерозв'язними: розв'язки необмежено зростають за скінченний проміжок часу. Довгий час їх розглядали в теорії як деякі екзотичні приклади, які можна застосовувати лише як тест для перевірки степеня оптимальності умов глобальної розв'язності. Перші успішні спроби виводу умов необмеженості розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь реалізовано ще у 60-х роках XX століття. Той факт, що такі "сингулярні" за часом розв'язки мають фізичний зміст, був відомий і раніше – це задачі теплового вибуху, процеси кумуляції ударних хвиль, і т. і.

Вперше достатні умови існування необмеженого розв'язку (режиму із загостренням) задачі Коші

$$\begin{aligned} &\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|^2)\psi = 0, \\ &\psi(0, x) = \psi_0(x) \end{aligned} \tag{1.9}$$

для нелінійного рівняння Шрьодінгера наведено у роботі Р.Т. Глассея [74]. Для степеневої нелінійності М.І. Вейнштейн [142] знайшов режими із загостренням у суперкритичному та критичному випадках, посилаючись на неопубліковані результати М. Цуцумі (див. також [139]).

У серії статей [71–73] проведено аналіз розв'язків задачі Коші (1.9). Робота [72] присвячена питанню існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1.9), у роботі [71] розглядається асимптотична поведінка та теорія розсіяння. У цих двох роботах розглядаються загальна нелінійність для розмірності $n \geq 2$, тоді як у третій роботі [73] наведено більш тонкі результати для деяких спеціальних випадків при $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$. Результати про існування та єдиність розв'язків задачі Коші у деяких спеціальних випадках отримано також іншими авторами, див., наприклад, [37] для кубічного рівняння при $n = 2$ або $n = 3$. Т. Казенаве [49] дослідив випадок степеневої нелінійності для $n = 2$, в роботі Дж. Ліна та В. Штраусса [102] розглянуто тривимірний випадок кубічного рівняння Шрьодінгера. Результати для загальної степеневої нелінійності підсумовано Штрауссом [138], умови для існування розв'язку у критичному випадку $\gamma = 4/n$ опубліковано М.І. Вейнштейном [142]. Р. Карлес [48] дослідив поведінку розв'язків задачі Коші для рівнянь Шрьодінгера з потенціалом $V = -x^2$ за допомогою перетворень еквівалентності.

Більш детальний огляд літератури, пов'язаної з даною тематикою можна знайти у роботі [125].

РОЗДІЛ 2

Основні теоретичні відомості та методи дослідження

У даному розділі дисертації наведено основні теоретичні відомості і вказано методи знаходження симетрій диференціальних рівнянь та розв'язання задач групової класифікації. У цьому ж розділі розроблено поняття еквівалентності законів збереження відносно групи перетворень та узагальнено прямий метод знаходження локальних та ітераційний метод побудови нелокальних (потенціальних) законів збереження.

У підрозділі 2.1 описано класичний алгоритм Лі знаходження симетрій диференціальних рівнянь та наведено одну з його модифікацій. У підрозділі 2.2 описано алгоритм методу групової класифікації. У підрозділі 2.3 наведено означення законів збереження, запропоновано різні поняття еквівалентності законів збереження і доведено деякі теоретичні властивості законів збереження для класу систем диференціальних рівнянь. У підрозділі 2.4 розвинено та узагальнено прямий ітераційний метод знаходження законів збереження. І нарешті, у підрозділі 2.5 основні відомості про закони збереження уточнені для випадку систем двовимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах [86, 121].

2.1. Класичний та модифікований алгоритми Лі знаходження симетрій диференціальних рівнянь

Одним з основних методів дослідження симетрій диференціальних рівнянь в частинних похідних є класичний алгоритм Лі [22, 23]. Розглянемо довільну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$L(x, \psi(x)) = 0, \tag{2.1}$$

де ψ — m-компонентна диференційована функція, $x \in \mathbb{R}^n$.

В підході Лі оператори алгебри інваріантності шукаються у вигляді

$$X = \xi^\mu(x, \psi)\partial_{x^\mu} + \eta^k(x, \psi)\partial_{\psi^k}, \ \mu = 0, \dots, n-1, \ k = 1, \dots, m, \tag{2.2}$$

і визначаються з інфінітезімального критерію інваріантності

$$X_s L|_{L=0} = 0, \tag{2.3}$$

де X_s — s-те продовження оператора X, яке будується за формулами Лі [22, 23]

$$\begin{aligned}
&X_s = X + \eta^k_{\nu_1}\partial_{\psi^k_{\nu_1}} + \dots + \eta^k_{\nu_1\dots\nu_s}\partial_{\psi^k_{\nu_1\dots\nu_s}},\\
&\eta^k_{\nu_1} = D_{\nu_1}\eta^k_{\nu_1} - \psi^k_\nu D_{\nu_2}\xi^\nu,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\eta^k_{\nu_1\dots\nu_s} = D_{\nu_s}\eta^k_{\nu_1\dots\nu_{s-1}} - \psi^k_{\nu\nu_1\dots\nu_{s-1}} D_{\nu_s}\xi^\nu;
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$\nu, \nu_1, \dots, \nu_s = \overline{0, n-1}$, s — порядок диференціального рівняння в частинних похідних,

$$D_\nu = \partial_{x_\nu} + \psi^k_\nu \partial_{\psi^k} + \psi^k_{\nu\nu_1}\partial_{\psi^k_{\nu_1}} + \dots \tag{2.5}$$

— оператор повного диференціювання. Тут і надалі по індексах, що повторюються, розуміємо підсумовування по всім їх можливим значенням.

З ліївської умови інваріантності (2.3) отримаємо лінійну систему диференціальних рівнянь для визначення координат $\xi^\mu = \xi^\mu(x,\psi)$ і $\eta^k = \eta^k(x,\psi)$, загальний розв'язок якої задає максимальну (в сенсі Лі) алгебру інваріантності рівняння (2.1).

Варто відмітити, що для багатокомпонентних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних реалізувати цей алгоритм досить складно, тому існують різноманітні його модифікації.

Симетрію лінійної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$L(x,\partial)\psi(x) = 0, \tag{2.6}$$

де $L(x,\partial)$ — лінійний диференціальний оператор, можна досліджувати наступним чином [65]. Оскільки простір розв'язків системи (2.6) лінійний, то перетворення інваріантності, що допускаються даним рівнянням також будуть лінійними по ψ.

Відповідні оператори симетрії, які діють в просторі функцій $\psi(x)$ можна записати у вигляді

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_{x^\mu} + \eta(x), \tag{2.7}$$

де $\eta(x)$ — деякі матриці розміру $m \times m$. При цьому не розглядаються симетрії, що відповідають принципу суперпозиції розв'язків лінійного рівняння і вважаються тривіальними.

В підході Лі оператор (2.7) запишеться наступним чином

$$X = \xi^\mu(x)\partial_{x^\mu} - \eta(x)\psi^k\partial_{\psi^k}. \tag{2.8}$$

За допомогою оператора (2.7) умову інваріантності системи (2.6) можна записати у вигляді

$$LQ\psi(x)\big|_{L\psi=0} = 0. \tag{2.9}$$

Зміст умови (2.9) цілком очевидний: оператор Q перетворює один розв'язок рівнянь (2.6) в інший, тобто не виводить за множину розв'язків.

Співвідношення (2.9) можна переписати еквівалентним чином [28]

$$[Q, L]\psi(x) \equiv (QL - LQ)\psi(x)\big|_{L\psi=0} = 0, \tag{2.10}$$

або

$$[Q, L] = \Lambda(x)L, \tag{2.11}$$

де $\Lambda(x)$ — деяка матриця розміру $m \times m$.

Розглянутий підхід можна узагальнити таким чином, щоб застосувати його до систем квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних вигляду

$$L(x, \partial)\psi(x) + F(x, \psi(x)) = 0, \tag{2.12}$$

де L — лінійний диференціальний оператор, $F(x, \psi(x))$ — гладка m-компонентна функція-стовпчик. А саме, якщо для оператора L справедливі співвідношення

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi(x), \tag{2.13}$$

$$(\Lambda + \eta)F + \varphi u + L\omega = (\eta^{ab}u_b - \omega^a)F_{u^a}, \tag{2.14}$$

де $\varphi = \varphi(x)$, $\Lambda = \Lambda(x)$ — матриці-функції розміру $m \times m$, $\omega = \omega(x)$ — гладка m-компонентна функція, система (2.12) допускає оператори (2.7). Загальний розв'язок рівнянь (2.13), (2.14) визначає максимальну алгебру інваріантності системи (2.12) в класі операторів (2.7). Зауважимо, що максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності системи (2.12), на відміну від системи (2.6), не лежить, взагалі кажучи, в класі операторів (2.7), (2.8).

2.2. Алгоритм методу групової класифікації. Основні поняття, означення та теореми

Розглянемо алгоритм методу групової класифікації на прикладі одного диференціального рівняння вигляду

$$L^{\theta}(x, u_{(n)}) = L(x, u_{(n)}, \theta(x, u_{(n)})) = 0. \tag{2.15}$$

Тут $x = (x_1, \dots, x_l)$ — незалежні змінні, u — залежна змінна, $u_{(n)}$ – множина всіх частинних похідних функції u за змінними x порядку, не вище n, (тут і надалі u — похідна нульового порядку). Нехай L — фіксована функція змінних x, $u_{(n)}$ і θ. θ — довільні (параметричні) функції $\theta(x, u_{(n)}) = (\theta^1(x, u_{(n)}), \dots, \theta^k(x, u_{(n)}))$, що задовольняють умови

$$S(x, u_{(n)}, \theta_{(q)}(x, u_{(n)})) = 0, \; S = (S_1, \dots, S_r). \tag{2.16}$$

Ці умови складаються з r диференціальних рівнянь на θ, де x та $u_{(n)}$ виступають як незалежні змінні. $\theta_{(q)}$ — множина всіх частинних похідних функції θ порядку, не вище q. Надалі функції $\theta(x, u_{(n)})$ називатимемо довільними елементами. Позначимо клас рівнянь вигляду (2.15) з довільними елементами θ, що задовольняють умови (2.16), через $L|_S$.

Нехай функції θ — фіксовані. Кожній однопараметричній групі локальних точкових перетворень, що залишає рівняння (2.15) інваріантним, відповідає інфінітезімальний оператор симетрії вигляду

$$Q = \xi^a(x, u)\partial_{x_a} + \eta(x, u)\partial_u.$$

Повний набір таких груп генерує основну групу $G^{\max} = G^{\max}(L, \theta)$ рівняння (2.15) з відповідною алгеброю Лі $A^{\max} = A^{\max}(L, \theta)$ інфінітезімальних операторів симетрії рівняння (2.15). *Ядром* основних груп називатимемо групу

$$G^{\ker} = G^{\ker}(L, S) = \bigcap_{\theta: S(\theta)=0} G^{\max}(L, \theta)$$

з відповідною алгеброю Лі

$$A^{\ker} = A^{\ker}(L, S) = \bigcap_{\theta: S(\theta)=0} A^{\max}(L, \theta).$$

Нехай $G^{\mathrm{equiv}} = G^{\mathrm{equiv}}(L, S)$ — група локальних перетворень, що зберігають вигляд рівнянь з класу $L|_S$.

Задача групової класифікації полягає у знаходженні всіх нееквівалентних випадків розширення $A^{\max}$, тобто у знаходженні всіх G^{equiv}-

нееквівалентних значень θ, які задовольняють рівняння (2.16) і умову $A^{\max}(L,\theta) \neq A^{\ker}$.

Для вичерпного розв'язання задачі групової класифікації необхідно реалізувати такий алгоритм [4, 22]:

1. З інфінітезімального критерію Лі інваріантності знаходимо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q. Можливо, що деякі з визначальних рівнянь не містять явно довільних елементів, і тому можуть бути безпосередньо проінтегрованими. Рівняння, що містять довільні елементи явно, називаються *класифікуючими.* Головна складність задач групової класифікації полягає у необхідності розв'язування класифікуючих рівнянь одночасно відносно коефіцієнтів оператора Q та довільних елементів.

2. Наступний крок алгоритму групової класифікації полягає у знаходженні алгебри $A^{\ker}$ ядра основних груп рівнянь з класу $L|_S$. Після розщеплення визначальних рівнянь за всіма незв'язаними похідними довільних елементів маємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних на коефіцієнти інфінітезімального оператора Q. Розв'язавши цю систему, отримаємо алгебру $A^{\ker}$.

3. Для того, щоб побудувати групу еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь $L|_S$, необхідно дослідити локальні перетворення інваріантності системи (2.15), (2.16), розглядаючи її як систему диференціальних рівнянь в частинних похідних з залежними змінними θ та незалежними змінними x, $u_{(n)}$. Звичайно розглядаються лише перетворення, проектовні на простір змінних x та u. Хоча, у випадку, коли функції θ залежать лише від цих змінних, перетворення еквівалентності можуть залежати і від θ також. Після обмеження себе дослідженням зв'язної компоненти одиниці в групі G^{equiv}, можна використовувати інфінітезімальній метод Лі. Для того, щоб знайти повну групу еквівалентності (включаючи і локальні, і дискретні

перетворення), потрібно використовувати більш складний точний метод знаходження перетворень еквівалентності.

4. Якщо $A^{\max}$ — розширення $A^{\ker}$ (тобто, $A^{\max}(L,\theta) \neq A^{\ker}$), класифікуючи рівняння визначають систему нетривіальних рівнянь на θ. В залежності від їх кількості та вигляду, отримаємо різні випадки розширення $A^{\ker}$. Для того, щоб проінтегрувати повністю визначальні рівняння, необхідно дослідити велику кількість подібних випадків. З метою уникнення громіздкого перебору можливостей при розв'язанні визначальних рівнянь можна використовувати, наприклад, алгебраїчні методи [1, 17, 18, 38, 66–69, 145], метод, що полягає у дослідженні сумісності класифікуючих рівнянь [7, 8, 20, 26] або комбіновані методи [122, 123].

Результатом застосування наведеного алгоритму є перелік рівнянь з відповідними їм алгебрами Лі. Задача групової класифікації вважається повністю розв'язаною, якщо

i) перелік містить всі можливі нееквівалентні випадки розширень;

ii) всі рівняння з переліку є нееквівалентними відносно перетворень з групи G^{equiv};

iii) отримані алгебри є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

Подібний перелік може містити рівняння, еквівалентні відносно локальних перетворень, що не належать до G^{equiv}. Знання таких додаткових еквівалентностей дозволяє суттєво спростити подальші дослідження $L|_S$. Їх побудова може розглядатися як п'ятий крок алгоритму групової класифікації. Тоді вищенаведений перелік вимог до результату групової класифікації може бути доповнений наступною вимогою:

iv) всі можливі додаткові еквівалентності між перерахованими рівняннями побудовані у явному вигляді.

Один із можливих шляхів побудови додаткових перетворень еквівалентності оснований на тому, що еквівалентні рівняння мають еквівалентні максимальні алгебри інваріантності. Другий шлях — систематичне вивчення умовних та частинних перетворень еквівалентності в класі $L|_S$. Наведемо означення таких перетворень. Розглянемо систему

$$S'(x, u_{(n)}, \theta_{(q')}(x, u_{(n)})) = 0, \ S' = (S'_1, \ldots, S'_{r'}), \tag{2.17}$$

яка складається з r' диференціальних рівнянь на θ з незалежними змінними x та $u_{(n)}$. Нехай $G^{\mathrm{equiv}}(L, (S, S'))$ — група еквівалентності підкласу $L|_{S,S'}$ класу $L|_S$, де функції θ задовольняють одночасно системи (2.16) та (2.17).

Означення 2.1. Перетворення з $G^{\mathrm{equiv}}(L, (S, S'))$ називаються умовними перетвореннями еквівалентності класу $L|_S$ (відносно додаткових обмежень S'). Локальні перетворення, що переводять рівняння з класу $L|_{S,S'}$ у клас $L|_S$ називаються частинними перетвореннями еквівалентності класу $L|_S$ (відносно додаткових обмежень S').

Очевидно, що кожне умовне перетворення еквівалентності є частинним відносно тих самих додаткових обмежень, і кожне локальне перетворення симетрії рівняння (2.15) для фіксованого значення $\theta = \theta^0(x, u_{(n)})$ є частинними перетвореннями еквівалентності відносно обмеження $\theta = \theta^0$. Задача опису всіх можливих частинних перетвореннь еквівалентності класу $L|_S$ еквівалентна задачі опису всіх локальних перетворень між довільними рівняннями з $L|_S$.

2.3. Еквівалентність законів збереження

Нехай $\mathcal{L}$ — система диференціальних рівнянь в частинних похідних вигляду $L(x, u_{(\rho)}) = 0$ на m невідомих функцій $u = (u^1, \ldots, u^m)$ з n незалежними змінними $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Позначимо через $u_{(\rho)}$ множину всіх частинних похідних функцій u за змінними x порядку не більше за ρ, що включає u як похідну нульового порядку. Нехай D_i — оператор повного диференціювання за змінною x_i.

Означення 2.2. *Законом збереження* системи диференціальних рівнянь в частинних похідних $L(x, u_{(r)}) = 0$ називається дивергентний вираз $\operatorname{div} F := D_i F^i = 0$, який тотожно дорівнює нулеві на многовиді вихідної системи. Максимальний порядок похідної, що явно фігурує в F будемо називати *порядком* закону збереження $\operatorname{div} F = 0$.

Означення 2.3. Закон збереження називається *тривіальним*, якщо компоненти вектора густини F задовольняють умову

$$F^i = \hat{F}^i + \check{F}^i, \ i = \overline{1, n},$$

де $\hat{F}^i$ і $\check{F}^i$ — так само, як і F^i, є функціями x та похідних u, $\hat{F}^i$ — тотожній нуль, якщо $L(x, u_{(\rho)}) = 0$ і n-кортеж $\check{F} = (\check{F}^1, \ldots, \check{F}^n)$ — нуль-дивергенція (тобто, його дивергенція тотожно дорівнює нулеві).

Тривіальності, пов'язаної з $\hat{F}^i$ (тобто, з вектором, що дорівнює нулеві на многовиді системи) можна легко позбутися, якщо перейти на многовид системи, врахувавши при цьому всі її диференціальні наслідки.

Будь-яку нуль-дивергенцію можна задати наступним чином [23].

Лема 2.1. *n-кортеж $F = (F^1, \ldots, F^n)$ є нуль-дивергенцією ($\operatorname{div} F \equiv 0$) тоді й лише тоді, коли існують гладкі функції Q^{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) змінних x та $u_{(k)}$ такі, що $Q^{ij} = -Q^{ji}$ і $F^i = D_j Q^{ij}$.*

Функції Q^{ij} називаються *потенціалами*, що відповідають нуль-дивергенції F. Якщо $n = 1$, будь-яка нуль-дивергенція — стала.

Означення 2.4. Два закони збереження з густинами F та F' називаються *еквівалентними*, якщо вектор-функція $F' - F$ є вектором густини тривіального закону збереження.

Отже, будь-який тривіальний закон збереження еквівалентний закону збереження з нульовим вектором густини.

Інший підхід до означення еквівалентності законів збереження можна знайти в [63].

Для довільної системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь множина $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ векторів густини законів збереження є лінійним простором, причому підмножина $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ векторів густини тривіальних законів збереження є лінійним підпростором $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{CV}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) = \mathrm{CV}(\mathcal{L})/\,\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$, який називається *простором нетривіальних законів збереження*, співпадає з множиною всіх класів еквівалентності в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ щодо відношення еквівалентності, наведеного в означенні 2.4 (див., наприклад [13]). Тому, під описом множини законів збереження можна розуміти знаходження $\mathrm{CV}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$, що еквівалентне побудові базису цього простору, якщо $\dim \mathrm{CV}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) < \infty$, або системи твірних у нескінченновимірному випадку, причому, елементи з $\mathrm{CV}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$ можна ототожнити з їх представниками в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Під лінійною залежністю законів збереження розуміємо лінійну залежність відповідних елементів в $\mathrm{CV}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$.

Означення 2.5. Закони збереження системи $\mathcal{L}$ називаються *лінійно залежними*, якщо існує їх лінійна комбінація, яка є тривіальним законом збереження.

Класифікацію законів збереження можна суттєво спростити та впорядкувати, використовуючи додатково перетворення симетрії системи або перетворення еквівалентності цілого класу систем. (Ця задача схожа на задачу групової класифікації диференціальних рівнянь.)

Твердження 2.1. *Будь-яке локальне перетворення g переводить клас рівнянь, записаний у дивергентній формі, у себе. Більш точно, довільне перетворення g: $\tilde{x} = x_g(x,u)$, $\tilde{u} = u_g(x,u)$, продовжене на простір джетів $J^{(r')}$, переводить рівняння $D_iF^i = 0$ у рівняння $D_iF^i_g = 0$. Перетворена густина F_g визначається формулами*

$$F^i_g(\tilde{x},\tilde{u}_{(r)}) = \frac{D_{x_j}\tilde{x}_i}{|D_x\tilde{x}|}\,F^j(x,u_{(r)}),$$

$$\text{або } F_g(\tilde{x},\tilde{u}_{(r)}) = \frac{1}{|D_x\tilde{x}|}(D_x\tilde{x})F(x,u_{(r)}) \qquad (2.18)$$

у матричних позначеннях. Тут через $|D_x\tilde{x}|$ *позначено визначник матриці* $D_x\tilde{x} = (D_{x_j}\tilde{x}_i)$.

Означення 2.6. Нехай G — група Лі симетрій системи $\mathcal{L}$. Два закони збереження з густинами F та F' називаються G-*еквівалентними*, якщо існує перетворення $g \in G$ таке, що закони збереження із густинами F_g та F' є еквівалентними у сенсі означення 2.4.

Довільне перетворення $g \in G$ індукує лінійне взаємно однозначне перетворення g_* в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$, переводить тривіальні закони збереження лише в тривіальні (тобто, $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ є інваріантом відносно g_*), а отже, індукує взаємно однозначне перетворення g_f в $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$. Очевидно, що g_f зберігає лінійну (не)залежність елементів в $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ і перетворює базис (систему твірних) простору $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ в базис (систему твірних) того ж самого простору. Таким чином, можна розглядати відношення G-еквівалентності законів збереження як відношення еквівалентності, визначене на $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$, і класифікувати нетривіальні закони збереження з точністю до G-еквівалентності.

Твердження 2.2. *Якщо система* $\mathcal{L}$ *допускає однопараметричну групу перетворень, інфінітезімальний генератор* $X = \xi^i\partial_i + \eta\partial_u$ *цієї групи може бути використаний для побудови нових законів збереження з вже відомих. А саме, продиференціювавши рівняння (2.18) за параметром* ε *в точці* $\varepsilon = 0$, *отримаємо нову густину*

$$\widetilde{F}^i = -X_{(r)}F^i + (D_j\xi^i)F^j - (D_j\xi^j)F^i. \tag{2.19}$$

Зауваження 2.1. Формула (2.19) може бути безпосередньо застосована до операторів узагальненої симетрії (див., наприклад, [90]).

Твердження 2.3. *Довільне локальне перетворення* g, *що діє між системами* $\mathcal{L}$ *та* $\mathcal{L}'$ *індукує лінійне взаємно однозначне перетворення* g_* *з* $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ *в* $\mathrm{CV}(\mathcal{L}')$, *і генерує лінійне взаємно однозначне перетворення* g_f *з* $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ *в* $\mathrm{CV}_\mathrm{f}(\mathcal{L}')$.

Розглянемо клас $\mathcal{L}|_S$ систем $L(x, u_{(\rho)}, \theta(x, u_{(\rho)})) = 0$, що параметризовані параметр-функціями $\theta = \theta(x, u_{(\rho)})$. Тут L — кортеж фіксованих функцій змінних x, $u_{(\rho)}$ і θ, θ — кортеж довільних (параметричних) функцій $\theta(x, u_{(\rho)}) = (\theta^1(x, u_{(\rho)}), \ldots, \theta^k(x, u_{(\rho)}))$, що задовольняють умовам $S(x, u_{(\rho)}, \theta_{(q)}(x, u_{(\rho)})) = 0$. Ці умови складаються з диференціальних рівнянь на θ, де x і $u_{(\rho)}$ виступають як незалежні змінні, $\theta_{(q)}$ — множина всіх частинних похідних функцій θ порядку не більше за q. Надалі функції θ називатимемо довільними елементами. Групу локальних перетворень, які зберігають вигляд систем з $\mathcal{L}|_S$ позначимо $G^{\mathrm{equiv}} = G^{\mathrm{equiv}}(L, S)$.

Нехай $\widetilde{\mathcal{L}}|_S$ — множина пар, кожна з яких складається з системи з $\mathcal{L}|_S$ і відповідного закону збереження. В силу твердження 2.3, дія перетворень з $G^{\mathrm{equiv}}(L, S)$, разом з відношенням еквівалентності на законах збереження, природно генерує відношення еквівалентності на $\widetilde{\mathcal{L}}|_S$. Класифікацію законів збереження відносно $G^{\mathrm{equiv}}(L, S)$ розумітимемо як класифікацію $\widetilde{\mathcal{L}}|_S$ відносно вказаного відношення еквівалентності. Дослідження задачі класифікації законів збереження подібне до розв'язання задачі групової класифікації систем диференціальних рівнянь. А саме, будуємо спочатку закони збереження, що визначені для всіх значень довільних елементів. (Відповідні густини законів збереження можуть залежати від довільних елементів.) Далі, з точністю до групи еквівалентності, класифікуємо довільні елементи, для яких система допускає додаткові закони збереження.

Зауваження 2.2. Легко показати, що всі вказані еквівалентності дійсно є відношеннями еквівалентності.

2.4. Прямий ітераційний метод знаходження законів збереження

Для побудови законів збереження системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь використовуємо *прямий метод*, оснований на означенні 2.2. Фіксуємо (довільний) порядок закону збереження, переходимо на многовид системи $\mathcal{L}$, враховуючи всі її необхідні диференціальні наслідки, і розщеплюємо отримані умови за незв'язаними змінними. Як результат, маємо систему визначальних рівнянь на компоненти густини закону збереження. Розв'язавши визначальні рівняння з точністю до відношення еквівалентності на $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$, отримаємо повний опис локальних законів збереження системи $\mathcal{L}$.

Застосувавши лему 2.1 до побудованих законів збереження на множині розв'язків системи $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$, введемо потенціал у якості додаткової залежної змінної та приєднаємо рівняння, що містять потенціали і відповідні компоненти густини, до $\mathcal{L}^0$. (Якщо $n > 2$, приєднані рівняння такого вигляду утворюють недовизначену систему відносно потенціалу. Отже, до $\mathcal{L}^0$ можна також приєднувати калібровочні умови на потенціал.)

В ітераційній процедурі для введення потенціалів слід використовувати лише лінійно незалежні закони збереження, оскільки в іншому випадку потенціали є залежними у такому сенсі: існує лінійна комбінація кортежів потенціалів, яка, для деякого $r \in \mathbb{N}$, є кортежем функцій змінних x та $u_{(r)}$.

Далі, виключаємо рівняння, що не є необхідними (тобто, рівняння з $\mathcal{L}^0$, які залежать одночасно від інших рівнянь з $\mathcal{L}^0$ та приєднаних рівнянь), з розширеної (потенціальної) системи $\mathcal{L}^1$. Будь-який закон збереження системи $\mathcal{L}^0$ буде законом збереження для $\mathcal{L}^1$. Повторюємо наведену процедуру прямого методу для $\mathcal{L}^1$ та знаходимо закони збереження, які лінійно незалежні з законами, отриманими на попередній ітерації.

Проводимо ітерації, поки це можливо (тобто, закінчуємо ітераційну процедуру, якщо всі закони збереження системи $\mathcal{L}^{k+1}$ лінійно залежні з законами збереження системи $\mathcal{L}^k$), або будуємо нескінченний ланцюжок законів збереження за допомогою індукції. Цей підхід приводить до знаходження законів збереження, які явно залежать від потенціальних змінних і нееквівалентні локальним (тобто, є *чисто потенціальними* законами збереження вихідної системи). Якщо отримані закони збереження залежать явно лише від змінних попередньої ітерації, вони еквівалентні законам з попереднього кроку ітераційної процедури.

Будь-який закон збереження з попереднього кроку ітераційної процедури є законом збереження для наступного кроку, та очевидно, що закони збереження, використані для побудови потенціальної системи наступного рівня є тривіальними на її многовиді.

Оскільки калібровочні умови на потенціали вибираються неоднозначно, вичерпну реалізацію ітераційної процедури у випадку $n > 2$ провести неможливо.

2.5. Закони збереження двовимірних рівнянь

Випадок двох незалежних змінних є особливим відносно можливої (сталої) невизначеності після введення потенціалів і високої ефективності застосування потенціальних симетрій. Тому, розглянемо окремо деякі поняття, пов'язані з законами збереження у цьому випадку. Позначимо незалежні змінні як t (часова змінна) та x (просторова змінна). Будь-який закон збереження має вигляд

$$D_tF(t,x,u_{(r)}) + D_xG(t,x,u_{(r)}) = 0. \tag{2.20}$$

Тут D_t і D_x — оператори повного диференціювання за змінними t і x. Функції F та G називаються відповідно *густиною* та *потоком* закону збереження. Два закони збереження $D_tF + D_xG = 0$ і $D_tF' + D_xG' = 0$ *еквівалентні*, якщо існують такі функції $\hat{F}$, $\hat{G}$ та H змінних t, x і похідних функції u, що $\hat{F}$ та $\hat{G}$ тотожно дорівнюють нулеві на $\mathcal{L}_{(k)}$ для деякого k і

$$F' = F + \hat{F} + D_xH,\ G' = G + \hat{G} - D_tH. \tag{2.21}$$

Будь-який закон збереження вигляду (2.20) системи $\mathcal{L}$ дозволяє ввести нову залежну (потенціальну) змінну v за допомогою системи рівнянь

$$v_x = F, \ v_t = -G. \tag{2.22}$$

Для того, щоб побудувати декілька потенціалів за один крок, необхідно використовувати набір лінійно незалежних законів збереження (див. попередній підрозділ), оскільки в іншому випадку потенціали є залежними у такому сенсі: існує лінійна комбінація потенціалів, яка, для деякого $r' \in \mathbb{N}$, є функцією змінних t, x та $u_{(r')}$.

У випадку двох незалежних змінних можна ввести більш загальне поняття залежності потенціалів.

Означення 2.7. Потенціали v^1, ..., v^p називаються *локально залежними на множині розв'язків системи* $\mathcal{L}$ (або, коротко кажучи, *залежними*), якщо існують $r' \in \mathbb{N}$ і функції H змінних x, $u_{(r')}$, v^1, ..., v^p такі, що $H(x, u_{(r')}, v^1, \dots, v^p) = 0$ для довільного розв'язку $(u, v^1, \dots, v^p)$ об'єднаної системи, яка визначає набір потенціалів v^1, ..., v^p.

Доведення локальної залежності або незалежності потенціалів для загальних класів диференціальних рівнянь є надзвичайно складною задачею, оскільки її розв'язання тісно пов'язане з точним описом можливої структури законів збереження. Приклад такого доведення для рівнянь конвекції–дифузії наведено у наступному розділі.

У випадку єдиного рівняння $\mathcal{L}$, система (2.22) утворює повну потенціальну систему, оскільки $\mathcal{L}$ є диференціальним наслідком системи (2.22). Як правило, подібні системи допускають велику кількість нетривіальних симетрій, а отже, з математичної точки зору, є цікавими об'єктами для дослідження. З рівнянь (2.1) та (2.22) випливає наступне

Твердження 2.4. *Будь-яке локальне перетворення, що пов'язує дві системи $\mathcal{L}$ та $\tilde{\mathcal{L}}$ диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами потенціальних систем, які відповідають $\mathcal{L}$ та $\tilde{\mathcal{L}}$.*

Ця відповідність встановлюється за допомогою тривіального продовження на простір введених потенціальних змінних, тобто, можна вважати, що під дією цього перетворення потенціали не змінюються.

Наслідок 2.1. Локальна група симетрій системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь генерує групу еквівалентності на множині потенціальних систем, що відповідають системі $\mathcal{L}$.

Наслідок 2.2. Нехай $\widehat{\mathcal{L}}|_S$ — множина всіх потенціальних систем, побудованих для систем з класу $\mathcal{L}|_S$ за допомогою законів збереження. Дія перетворень з $G^{\mathrm{equiv}}(L,S)$ разом з відношенням еквівалентності потенціалів природно генерує відношення еквівалентності на $\widehat{\mathcal{L}}|_S$.

Зауваження 2.3. З твердження 2.4 та його наслідків випливає, що групу еквівалентності класу систем або групу симетрії однієї системи можна продовжити до потенціальних змінних для будь-якого кроку прямої ітераційної процедури. Природно використовувати продовжену групу еквівалентності для класифікації можливих законів збереження та потенціальних систем на кожній ітерації. Додаткові еквівалентності, які існують в деяких підкласах даного класу або виникають після введення потенціальних змінних, доцільно використовувати для більш глибокого аналізу зв'язків між законами збереження.

2.6. Висновки до розділу 2

У розділі 2 наведено основні теоретичні відомості і вказано методи обчислення симетрій диференціальних рівнянь, розв'язання задач групової класифікації та знаходження законів збереження.

Поряд з вже відомими фактами з теорії законів збереження наведено низку нових понять, які дозволяють значно спростити знаходження законів збереження та розширити область застосування вже відомих методів групового аналізу. Так, запропоновано нові поняття еквівалентності законів збереження відносно локальної групи перетворень. Введено поняття лінійної залежності законів збереження та локальної залежності потенціалів. Запропоновано поняття классифікації законів збереження відносно групи еквівалентності. Припускаючи можливість залежності вектору густини від кількох потенціалів, узагальнено ітераційну процедуру, запропоновану Дж. Блуманом та П.Р. Доран-Ву для знаходження нелокальних (потенціальних) законів збереження.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах [86, 121].

РОЗДІЛ 3

Закони збереження, потенціальні симетрії та потенціальні перетворення еквівалентності нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

У цьому розділі розглядається клас рівнянь конвекції–дифузії вигляду

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{3.1}$$

Тут $a = a(u)$ і $b = b(u)$ — довільні гладкі функції змінної u, $a(u) \neq 0$.

Для класу рівнянь (3.1) виконано групову класифікацію та знайдено всі лінійно незалежні локальні закони збереження. За допомогою прямого ітераційного методу побудовано нелокальні (потенціальні) закони збереження для класу (3.1) та відповідні їм потенціальні системи.

Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу рівнянь (3.1) та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Показано, що нелокальні перетворення, які лінеаризують відомі рівняння Бюргерса, Фокаша–Йортсоса та u^{-2}-дифузії, є потенціальними перетвореннями еквівалентності.

У підрозділі 3.1 наведено результати групової класифікації рівнянь класу (3.1). Далі, теоретичне підґрунтя, розвинуте у попередньому розділі, застосовується до рівнянь (3.1). Локальні закони збереження класифіковано відносно групи еквівалентності у підрозділі 3.2. У підрозділі 3.3

побудовано найпростіші потенціальні закони збереження та проаналізовано зв'язок між ними за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. У підрозділі 3.4 повністю вивчено потенціальні закони збереження рівнянь (3.1) та наведено ієрархію законів збереження, отриманих прямим ітераційним методом. І нарешті, у підрозділі 3.5 знайдено потенціальні симетрії, що виникають з найбільш загальної потенціальної системи, потенціальні перетворення еквівалентності у даному класі рівнянь та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності.

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботах [86, 119–121].

3.1. Групова класифікація рівнянь конвекції–дифузії

Вичерпний результат класичної групової класифікації для класу рівнянь (3.1) наведено у наступних твердженнях.

Теорема 3.1. *Алгеброю Лі ядра основних груп класу рівнянь* (3.1) *є алгебра* $A_1^{\mathrm{ker}} = \langle \partial_t, \partial_x \rangle$.

Теорема 3.2. *Алгеброю Лі групи еквівалентності* G^{equiv} *класу* (3.1) *є алгебра*

$$A_1^{\mathrm{equiv}} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ u\partial_u,\ t\partial_x - \partial_b,\ 2t\partial_t + x\partial_x - b\partial_b, \\ t\partial_t - a\partial_a - b\partial_b \rangle. \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. *Будь-яке перетворення з* G^{equiv} *має вигляд*

$$\tilde{t} = \varepsilon_4 t + \varepsilon_1,\ \tilde{x} = \varepsilon_5 x + \varepsilon_7 t + \varepsilon_2,\ \tilde{u} = \varepsilon_6 u + \varepsilon_3, \\ \tilde{a} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 a,\ \tilde{b} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5 b - \varepsilon_7,$$

де $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_7$ *– довільні сталі,* $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 \neq 0$.

Теорема 3.4. *Всі* G^{equiv}*-нееквівалентні розширення* $A^{\max}$ *в класі рівнянь* (3.1) *вичерпуються випадками, наведеними в табл. 3.1.*

Таблиця 3.1

Результат групової класифікації

N	$a(u)$	$b(u)$	Basis of $A^{\max}$
1	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x$
2	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x$
3	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ (\mu-2)t\partial_t + (\mu-1)x\partial_x + \partial_u$
4	e^u	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t + (x-t)\partial_x + \partial_u$
5	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ t\partial_t - \partial_u$
6	u^μ	u^ν	$\partial_t,\ \partial_x,\ (\mu-2\nu)t\partial_t + (\mu-\nu)x\partial_x + u\partial_u$
7	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mu t\partial_t + (\mu x - t)\partial_x + u\partial_u$
8a	u^μ	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ \mu t\partial_t - u\partial_u$
8b	u^{-2}	u^{-2}	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + u\partial_u, e^{-x}(\partial_x + u\partial_u)$
9	$u^{-4/3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 4t\partial_t + 3u\partial_u,\ x^2\partial_x - 3xu\partial_u$
10	1	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_x - \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\ t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu+x)\partial_u$
11	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 2t\partial_x - xu\partial_u,\ 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2+t)u\partial_u,\ u\partial_u,\ h\partial_u$

Зауваження 3.1. У табл. 3.1 $\mu, \nu = \mathrm{const}$. $(\mu,\nu) \neq (-2,-2), (0,1)$ і $\nu \neq 0$ для N $= 6$. $\mu \neq -4/3$ для N $=$ 7a. Функція $h = h(t,x)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності ($h_t = h_{xx}$). Випадок 8b зводиться до 8a ($\mu = -2$) за допомогою умовного перетворення еквівалентності

$$\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = e^x,\ \tilde{u} = e^{-x}u. \tag{3.3}$$

Нижче для зручності використовується потрійна нумерація S.T.N, де S — номер розділу, T — номер таблиці і N — номер класу або локального перетворення еквівалентності у таблиці T. Поняття "рівняння S.T.N" використовується для позначення рівняння, для якого параметри-функції набувають відповідного вигляду.

Зауваження 3.2. Доведення всіх результатів цього підрозділу містяться, як частковий випадок, у розділі 4.

3.2. Локальні закони збереження

Закони збереження рівнянь з класу (3.1) шукаємо у вигляді (2.20).

Лема 3.1. *Будь-який закон збереження вигляду* (2.20) *будь-якого рівняння з класу* (3.1) *еквівалентний (у сенсі означення 2.4) закону збереження з густиною, що залежить від t, x, та u і потоком, що залежить від t, x, u та u_x.*

Доведення. Розглянемо закони збереження на множині рівнянь (3.1) та їх диференціальних наслідків. Можна вважати, що F та G залежать лише від t, x та $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = \overline{0, r'}$, де $r' \leq 2r$.

Розпишемо повні похідні в (2.20) та врахуємо диференціальні наслідки вигляду $u_{tj} = D_x^{j+2} \int a + D_x^{j+1} \int b$, де $\int a = \int a(u)du$, $\int b = \int b(u)du$, $j = \overline{0, r'}$. В результаті отримаємо умову

$$F_t + F_{u_j}(D_x^{j+2} \textstyle\int a + D_x^{j+1} \int b) + G_x + G_{u_j} u_{j+1} = 0. \tag{3.4}$$

Розщепимо (3.4) відносно старших похідних u_j. Коефіцієнти при $u_{r'+2}$ та $u_{r'+1}$ дають рівняння $F_{u_{r'}} = 0$, $G_{u_{r'}} + aF_{u_{r'-1}} = 0$, які приводять до

$$F = \hat{F}, \quad G = -au_{r'} \hat{F}_{u_{r'-1}} + \hat{G},$$

де $\hat{F}$ та $\hat{G}$ – функції змінних t, x, u, u_1, …, $u_{r'-1}$. Тоді, враховуючи члени, що містять $u_{r'}^2$, отримаємо $-a\hat{F}_{u_{r'-1}u_{r'-1}} = 0$. Звідси випливає, що $\hat{F} = \check{F}^1 u_{r'-1} + \check{F}^0$, де $\check{F}^1$ та $\check{F}^0$ залежать лише від t, x, u, u_1, …, $u_{r'-2}$.

Розглянемо закон збереження з густиною $\tilde{F} = F - D_x H$ та потоком $\tilde{G} = G + D_t H$, де $H = \int \check{F}^1 du_{r'-2}$. Він еквівалентний вихідному закону збереження, причому

$$\tilde{F} = \tilde{F}(t, x, u, u_1, \ldots, u_{r'-2}), \quad \tilde{G} = \tilde{G}(t, x, u, u_1, \ldots, u_{r'-1}).$$

Повторюючи цю процедуру необхідну кількість разів, отримаємо твердження леми.

Теорема 3.5. *Для будь-якого рівняння з класу* (3.1) *існує закон збереження* (2.20)*, де*

$$1.\quad F = u,\ G = -au_x - \textstyle\int b. \tag{3.5}$$

Повний перелік G^{equiv}*-нееквівалентних рівнянь* (2.20)*, що мають додаткові (а саме, лінійно незалежні з* (3.5)*) закони збереження, вичерпуються наступними*

$$2.\quad \forall a,\ b = 0:\quad F = xu,\ G = \textstyle\int a - xau_x, \tag{3.6}$$

$$3.\quad \forall a,\ b = a:\quad F = (e^x + \varepsilon)u,\ G = -(e^x + \varepsilon)au_x - \varepsilon \textstyle\int a, \tag{3.7}$$

$$4.\quad a = 1,\ b = 0:\quad F = \alpha u,\ G = \alpha_x u - \alpha u_x, \tag{3.8}$$

де $\varepsilon \in \{0, \pm 1\} \bmod G^{\mathrm{equiv}}$, $\int a = \int a(u)du$, $\int b = \int b(u)du$ *і, функція* $\alpha = \alpha(t, x)$ *— довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності* $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$. *(Разом із значеннями* a *та* b *наведено повний перелік густин та потоків додаткових законів збереження.)*

Доведення. В силу леми 3.1, можна відразу вважати, що $F = F(t, x, u)$ та $G = G(t, x, u, u_x)$. Підставимо вираз для u_t, отриманий з (3.1) в (2.20) і розщепимо це рівняння відносно u_{xx}. Коефіцієнт при u_{xx} дає рівняння $aF_u + G_{u_x} = 0$, отже $G = -aF_u u_x + G^1(t, x, u)$. Врахувавши останній вираз для G і розщепивши решту рівняння (2.20) за степенями u_x, отримаємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних на функції F та G^1 вигляду

$$F_{uu} = 0,\ bF_u - aF_{ux} + G^1_u = 0,\ F_t + G^1_x = 0. \tag{3.9}$$

Розв'язавши перші два рівняння системи (3.9), маємо

$$F = F^1(t, x)u + F^0(t, x),\ G^1 = F^1_x \textstyle\int a - F^1 \int b + G^0(t, x). \tag{3.10}$$

У подальшому розгляді головну роль відіграє рівняння $aF_{uxx} - bF_{ux} + F_{ut} = 0$, яке є диференціальним наслідком системи (3.9) і може бути переписано у вигляді

$$aF^1_{xx} - bF^1_x + F^1_t = 0.$$

Взагалі, це єдина класифікуюча умова для даної задачі. Існує чотири різні можливості для значень функцій a і b. В усіх випадках маємо рівняння $F^0_t + G^0_x = 0$. Отже, з точністю до еквівалентності законів збереження, можна вважати, що $F^0 = G^0 = 0$. Більш того, функція $F^1 = \mathrm{const}$ є розв'язком класифікуючої умови у загальному випадку і відповідає закону збереження з випадку 1. Лише такі закони збереження існують для всіх допустимих значень довільних елементів a та b. Далі класифікуємо спеціальні значення a та b, для яких рівняння (3.1) має додаткові закони збереження.

1. $b \notin \langle a, 1\rangle$. Тоді $F^1_x = 0$, $F^1_t = 0$, що дає протиріччя з припущенням $F^1 \neq \mathrm{const}$.

2. $a \notin \langle 1\rangle$, $b \in \langle 1\rangle$. Тоді $b = 0 \mod G^{\mathrm{equiv}}$ і $F^1_{xx} = 0$, $F^1_t = 0$, тобто $F^1 = x \mod G^{\mathrm{equiv}}$ (випадок 2).

3. $b \in \langle a, 1\rangle$, $a, b \notin \langle 1\rangle$. Тоді $b = a \mod G^{\mathrm{equiv}}$ і $F^1_{xx} + F^1_x = 0$, $F^1_t = 0$, тобто $F^1 = e^x + \varepsilon \mod G^{\mathrm{equiv}}$, де $\varepsilon \in \{0, \pm 1\}$ (випадок 3).

4. $a, b \in \langle 1\rangle$. Тоді $a = 1$, $b = 0 \mod G^{\mathrm{equiv}}$ і $F^1_t + F^1_{xx} = 0$ (випадок 4).

Зауваження 3.3. З доведення випливає, що можна вважати $(a, b) \neq \mathrm{const}$ у випадках 1, 2 та 3. (Якщо $(a, b) = \mathrm{const}$, випадки 1, 2 та 3 містяться у випадку 4 для різних значень α.)

Використовуючи закони збереження, отримані в теоремі 3.5, вводимо потенціали для різних значень параметр-функцій a та b і будуємо відповідні потенціальні системи (випадки 1–4 табл. 3.1). Важливим є питання про те, чи будуть введені потенціали локально незалежними у сенсі означення 2.7. Якщо відома точна структура законів збереження, відповідь майже очевидна.

Теорема 3.6. *Для довільного рівняння* (3.1) *потенціали є локально залежними на многовиді рівняння тоді й лише тоді, коли відповідні закони збереження є лінійно залежними.*

Доведення. Оскільки пряме твердження теореми є очевидним (див. підрозділ 2.5), доведемо лише обернене твердження, використовуючи метод від супротивного. Припустимо, що потенціали v^0, ..., v^p, введені за допомогою (незалежних) законів збереження з випадків 1–4 є локально залежними. Якщо $p = 0$, маємо на увазі локальну тривіальність v^0 як потенціалу, тобто, v^0 виражається у термінах локальних змінних, і відповідний закон збереження є тривіальним. Тому, достатньо дослідити лише спеціальні випадки, коли кількість незалежних законів збереження більше за 1. Отже, $p = 1$ коли $b = 0$ або $b = a$ і $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ для лінійного рівняння теплопровідності. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що існують такі $r \in \mathbb{N}$ та фіксована функція V змінних t, x, $\bar{v} = (v^1, \dots v^p)$ та $u_{(r)}$, що $v^0 = V(t, x, \bar{v}, u_{(r)})$ для довільного розв'язку об'єднаної системи, що визначає набір потенціалів v^0, ..., v^p. Враховуючи рівняння (3.1) та його диференціальні наслідки, можна вважати, що V залежить лише від t, x, $\bar{v}$ і $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = \overline{0, r'}$, де $r' \leq 2r$. Подіємо оператором D_x на умову $v^0 = V(t, x, \bar{v}, u, u_1, \dots, u_{r'})$: $v^0_x = V_x + V_{v^s} v^s_x + V_{u^k} u_{k+1}$. (Тут і надалі індекс s пробігає значення від 1 до p.) Оскільки у будь-якому з випадків $v^s_x = f^s u$ для деяких функцій f^s змінних t та x, продиференційовану умову можна розщепити за u_k крок за кроком у зворотному порядку, починаючи з старшої похідної. В результаті отримаємо $V_{u_k} = 0$, $V_x = 0$ і $f^0 = V_{v^s} f^s$, тобто, функції f^0, $\dots f^p$ є лінійно залежними. Тобто, отримаємо протиріччя з припущенням про незалежність законів збереження.

3.3. Найпростіші потенціальні закони збереження

Розглянемо закони збереження потенціальних систем 1–4 з табл. 3.2, що мають вигляд

$$D_t F(t, x, u_{(r)}, v_{(r)}) + D_x G(t, x, u_{(r)}, v_{(r)}) = 0. \tag{3.11}$$

Такі закони можна розглядати як нелокальні (*потенціальні*) закони збереження рівнянь з класу (3.1). Вважаємо їх найпростішими потенціальними законами збереження, оскільки відповідні потенціальні системи побудовано з вихідного рівняння (3.1) за допомогою лише одного закону збереження.

Закони збереження класифікуємо з точністю до відношення еквівалентності, яке генерується групою перетворень $G^{\rm equiv}_{\rm pr}$, що є продовженням групи $G^{\rm equiv}$ з теореми 3.3 на простір потенціалу v.

Лема 3.2. *Будь-який закон збереження вигляду* (3.11) *для кожної з систем 1–4 з табл. 3.2 еквівалентний закону з густиною F та потоком G, що не залежать від похідних (ненульового порядку) функцій u та v.*

Доведення. Розглянемо довільну з систем 1–4. Врахувавши її та всі її диференціальні наслідки, можна виключити залежність функцій F та G від усіх похідних (ненульового порядку) функції v та похідних u, що містять диференціювання по t. Решта доведення повністю аналогічна доведенню леми 3.1.

Аналогічно доведенню теореми 3.5, але у більш громіздкий спосіб, можна довести наступне твердження.

Теорема 3.7. *Повний перелік всіх $G^{\rm equiv}_{\rm pr}$-нееквівалентних законів збереження вигляду* (3.11) *для рівнянь з класу* (3.1) *вичерпується випадками з подвійною нумерацією, наведеними у табл. 3.2.*

Зауваження 3.4. Для доведення теореми 3.7 використовуємо всі незалежні диференціальні наслідки відповідних потенціальних систем. В табл. 3.2 для потенціальних систем з подвійною нумерацією не виписано рівняння, які містять v_t, оскільки вони є лише диференціальними наслідками рівнянь цих систем.

Таблиця 3.2

Закони збереження і потенціальні системи рівнянь конвекції–дифузії

N	a	b	F	G	Потенціальні системи
1	$\forall$	$\forall$	u	$-au_x-\int b$	$v_x=u,\ v_t=au_x+\int b$
1.1	$\forall$	0	v	$-\int a$	$v_x=u,\ w_x=v,\ w_t=\int a$
1.2	$\forall$	a	$e^x v$	$-e^x\int a$	$v_x=u,\ w_x=e^xv,\ w_t=e^x\int a$
1.3	$\forall$	$\int a+ua$	e^v	$-e^v\int a$	$v_x=u,\ w_x=e^v,\ w_t=e^v\int a$
1.4	u^{-2}	0	σ	$\sigma_v u^{-1}$	$v_x=u,\ w_x=\sigma,\ w_t=-\sigma_v u^{-1}$
1.5	u^{-2}	u^{-2}	σe^x	$\sigma_v u^{-1}e^x$	$v_x=u,\ w_x=\sigma e^x,\ w_t=-\sigma_v u^{-1}e^x$
1.6	1	$2u$	αe^v	$\alpha_x e^v-\alpha u e^v$	$v_x=u,\ w_x=\alpha e^v,\ w_t=\alpha u e^v-\alpha_x e^v$
2	$\forall$	0	xu	$\int a-xau_x$	$v_x=xu,\ v_t=xau_x-\int a$
2.1	$\forall$	0	$x^{-2}v$	$-x^{-1}\int a$	$v_x=xu,\ w_x=x^{-2}v,\ w_t=x^{-1}\int a$
3	$\forall$	a	$(e^x+\varepsilon)u$	$-(e^x+\varepsilon)au_x-\varepsilon\int a$	$v_x=(e^x+\varepsilon)u,\ v_t=(e^x+\varepsilon)au_x+\varepsilon\int a$
3.1	$\forall$	a	$\dfrac{e^x}{(e^x+\varepsilon)^2}v$	$-\dfrac{e^x}{e^x+\varepsilon}\int a$	$v_x=(e^x+\varepsilon)u,\ w_x=\dfrac{e^x}{(e^x+\varepsilon)^2}v,$ $w_t=\dfrac{e^x}{e^x+\varepsilon}\int a$
4	1	0	αu	$\alpha_x u-\alpha u_x$	$v_x=\alpha u,\ v_t=\alpha u_x-\alpha_x u$
4.1	1	0	$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_x v$	$-\alpha\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_x u-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_t v$	$v_x=\alpha u,\ w_x=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_x v,$ $w_t=\alpha\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_x u+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)_t v$

Тут $\varepsilon\in\{0,\pm1\}$, $\int a=\int a(u)du$, $\int b=\int b(u)du$; $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ та $\sigma(t,v)$ — довільні розв'язки лінійного рівняння теплопровідності ($\alpha_t+\alpha_{xx}=0$, $\beta_t+\beta_{xx}=0$, $\sigma_t+\sigma_{vv}=0$). У випадку 1.3 вважаємо $\int b=u\int a$ для того, щоб закон збереження мав наведений вигляд.

Проаналізуємо зв'язки між законами збереження та зв'язки між потенціальними системами, які виникають завдяки існуванню додаткових перетворень еквівалентності у деяких спеціальних класах. Нижче вважаємо, що $a\notin\{1,u^{-2}\}\bmod G^{\rm equiv}$ для загального випадку a.

Загальний випадок. Рівняння (3.1) у загальному випадку має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження (випадок 3.2.1) з вектором густини $(F^1,G^1)=(u,-au_x)$. Всі закони збереження відповідної потенціальної системи

$$v^1_x=u,\ v^1_t=au_x+\int b, \tag{3.12}$$

є тривіальними, тобто, у рамках нашого підходу рівняння (3.1) у загальному випадку допускає лише тривіальні потенціальні закони збереження.

***b* = 0**. Будь-яке рівняння такого вигляду має два лінійно незалежні локальні закони збереження (випадки 3.2.1 та 3.2.2) з векторами густини $(F^1, G^1) = (u, -au_x)$ та $(F^2, G^2) = (xu, \int a - xau_x)$. Використовуючи ці закони збереження, можна ввести два потенціали v^1 та v^2, де

$$v^1_x = u,\ v^1_t = au_x, \tag{3.13}$$

$$v^2_x = xu,\ v^2_t = xau_x - \textstyle\int a. \tag{3.14}$$

Рівняння (3.13) та (3.14), якщо розглядати їх окремо, утворюють дві потенціальні системи для рівняння (3.1) з нульовим b на невідомі функції (u, v^1) та (u, v^2) відповідно. Третя потенціальна система, в якій три функції u, v^1 та v^2 вважаються невідомими, утворена одночасно рівняннями (3.13) та (3.14). Кожна з систем (3.13) та (3.14) має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження (випадки 1.1 та 2.1 табл. 3.2). Ці закони збереження з векторами густини $(F^{11}, G^{11}) = (v^1, -\int a)$ та $(F^{21}, G^{21}) = (x^{-2}v^2, -x^{-1}\int a)$ є найпростішими потенціальними законами збереження для рівняння (3.1) з $b = 0$ і дозволяють ввести потенціали "другого рівня" w^1 та w^2. В результаті отримаємо дві потенціальні системи наступного рівня:

$$v^1_x = u,\ w^1_x = v^1,\ w^1_t = \textstyle\int a, \tag{3.15}$$

$$v^2_x = xu,\ w^2_x = x^{-2}v^2,\ w^2_t = x^{-1}\textstyle\int a. \tag{3.16}$$

У той самий час найпростіші потенціальні закони збереження є тривіальними на многовиді розв'язків об'єднаної системи (3.13)–(3.14), оскільки справедливі наступні співвідношення:

$$F^{11} = D_x(xv^1 - v^2),\ G^{11} = -D_t(xv^1 - v^2),$$

$$F^{21} = D_x(v^1 - x^{-1}v^2),\ G^{21} = -D_t(v^1 - x^{-1}v^2).$$

Більш того, $w^1 = xv^1 - v^2$, $w^2 = v^1 - x^{-1}v^2$, тобто, системи (3.15), (3.16) та (3.13)–(3.14) є локально еквівалентними. Звідси випливає, що насправді система (3.13)–(3.14) генерується лише трьома незалежними рівняннями. (У якості таких незалежних систем можна вибрати, наприклад, $v^1_x = u$, $v^2_x = xu$, $xv^1_t - v^2_t = \int a$). Хоча система (3.15) формально належить до другого рівня, вона є найбільш зручною для подальшого дослідження, оскільки має найпростіший вигляд.

$\boldsymbol{b = a}$. Аналіз цього випадку проводимо повністю аналогічно до попереднього. Будь-яке рівняння з $b = a$ має двовимірний простір нетривіальних локальних законів збереження, причому базис цього простору утворений векторами густини (випадки 3.2.1 та 3.2.3)

$$(F^1, G^1) = (u, -au_x - \textstyle\int a) \text{ та } (F^3, G^3) = ((e^x + \varepsilon)u, -(e^x + \varepsilon)au_x - \varepsilon \textstyle\int a).$$

Використовуючи відповідні закони збереження, можна ввести два потенціали v^1 та v^3, де

$$v^1_x = u,\ v^1_t = au_x + \textstyle\int a, \tag{3.17}$$

$$v^3_x = (e^x + \varepsilon)u,\ v^3_t = (e^x + \varepsilon)au_x + \varepsilon \textstyle\int a. \tag{3.18}$$

Рівняння (3.17) та (3.18), якщо розглядати їх окремо, утворюють дві потенціальні системи для рівняння (3.1) з $b = a$ на невідомі функції (u, v^1) та (u, v^3) відповідно. Третя потенціальна система, в якій три функції u, v^1 та v^3 вважаються невідомими, утворена одночасно рівняннями (3.17) та (3.18). Кожна з систем (3.17) та (3.18) має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження (випадки 1.2 та 3.1 табл. 3.2). Ці закони збереження з векторами густини

$$(F^{12}, G^{12}) = (e^x v^1, -e^x \textstyle\int a) \text{ та}$$

$$(F^{31}, G^{31}) = \left(\frac{e^x}{(e^x + \varepsilon)^2} v^3, -\frac{e^x}{e^x + \varepsilon} \int a\right)$$

є найпростішими потенціальними законами збереження для рівняння (3.1) з $b = a$ і дозволяють ввести потенціали "другого рівня" w^1 та w^3. В результаті отримаємо дві потенціальні системи наступного рівня:

$$v^1_x = u,\ w^1_x = e^x v^1,\ w^1_t = e^x \textstyle\int a, \tag{3.19}$$

$$v^3_x = (e^x + \varepsilon)u,\ w^3_x = \frac{e^x}{(e^x+\varepsilon)^2}v^3,\ w^3_t = \frac{e^x}{e^x+\varepsilon}\textstyle\int a. \tag{3.20}$$

У той самий час, найпростіші потенціальні закони збереження є тривіальними на многовиді розв'язків об'єднаної системи (3.17)–(3.18), оскільки

$$F^{12} = D_x((e^x+\varepsilon)v^1 - v^3),\ G^{12} = -D_t((e^x+\varepsilon)v^1 - v^3),$$
$$F^{31} = D_x\left(v^1 - \frac{v^3}{e^x+\varepsilon}\right),\ G^{31} = -D_t\left(v^1 - \frac{v^3}{e^x+\varepsilon}\right).$$

Більш того

$$w^1 = (e^x+\varepsilon)v^1 - v^3,\ w^3 = v^1 - \frac{v^3}{e^x+\varepsilon},$$

тобто, системи (3.19), (3.20) та (3.17)–(3.18) є локально еквівалентними. Звідси випливає, що насправді система (3.17)–(3.18) генерується лише трьома незалежними рівняннями. У якості таких незалежних систем можна вибрати, наприклад, $v^1_x = u$, $v^3_x = (e^x+\varepsilon)u$, $(e^x+\varepsilon)v^1_t - v^3_t = e^x \int a$. Хоча система (3.15) формально належить до другого рівня, вона є найбільш зручною для подальшого дослідження, оскільки має найпростіший вигляд.

$\boldsymbol{b = \int a + ua}$. Початкова потенціальна система з випадку 1.3 табл. 3.2 зводиться до випадку 2.3 табл. 3.2 за допомогою перетворення годографа

$$\tilde t = t,\ \tilde x = v,\ \tilde v = x,\ \tilde u = u^{-1},\ \tilde a = u^{-2}a, \tag{3.21}$$

закон збереження 1.3 з табл. 3.2 у локальний закон збереження випадку 3.2.3 з $\varepsilon = 0$. Це ж саме перетворення, продовжене на потенціал w

як $\tilde{w} = -w + ve^x$ також зводить потенціальну систему вигляду 1.3 до системи 1.2 табл. 3.2.

Рівняння, що лінеаризуються. Добре відомо [40, 51, 59, 82, 134], що лише рівняння (3.1), які є G^{equiv}-еквівалентними рівнянням 1.4, 1.5, 1.6 табл. 3.2, зводяться за допомогою нелокальних перетворень змінних (а саме, потенціальних перетворень еквівалентності [103, 120]) до лінійного рівняння теплопровідності. Крім того, ці рівняння виділяються з класу рівнянь конвекції–дифузії тим, що мають нескінченну кількість лінійно незалежних чисто потенціальних законів збереження.

Рівняння u^{-2}-дифузії $u_t = (u^{-2}u_x)_x$ зводиться до лінійного рівняння теплопровідності [40] перетворенням годографа (3.21). Більш точно, (3.21) є локальним перетворенням між відповідними потенціальними системами $v_x = u$, $v_t = u^{-2}u_x$ та $v_x = u$, $v_t = u_x$, побудованими за допомогою використання "загального" закону збереження (випадок 3.2.1). Рівняння u^{-2}-дифузії має, як підклас класу $b = 0$, два лінійно незалежних локальних закони збереження з векторами густини

$$F^1 = u,\ G^1 = -u^{-2}u_x, \tag{3.22}$$

$$F^2 = xu,\ G^2 = -xu^{-2}u_x - u^{-1} \tag{3.23}$$

(випадки 1 та 2 табл. 3.2) та додатково нескінченну серію потенціальних законів збереження (випадок 1.4 табл. 3.2). Під дією перетворення годографа (3.21) закон збереження з вектором густини (3.22) переходить у тривіальний закон збереження з вектором густини $(1, 0)$ лінійного рівняння теплопровідності. І навпаки, закон збереження лінійного рівняння теплопровідності, що відповідає значенню $\alpha = 1$ (випадок 3.2.4) перетворенням (3.21) переводиться у тривіальний закон збереження з вектором густини $(1, 0)$ рівняння u^{-2}-дифузії. Закон збереження з вектором густини (3.23) є тривіальним на многовиді потенціальної системи, побудованої за допомогою (3.22), і еквівалентним закону збереження випадку 1.4 табл. 3.2 з $\sigma = 1$, і зводиться до випадку 4.1 табл. 3.2, де $\alpha = 1$ та $\beta = x$.

Випадок 1.4 табл. 3.2 перетворенням (3.21) зводиться до випадку 3.2.4 з $\alpha=\sigma$.

Оскільки рівняння Фокаша–Йортсоса $u_t=(u^{-2}u_x)_x+u^{-2}u_x$ зводиться до рівняння u^{-2}-дифузії локальним перетворенням $\tilde t=t$, $\tilde x=e^x$, $\tilde u=e^{-x}u$, його закони збереження пов'язані з законами збереження лінійного рівняння теплопровідності повністю аналогічно до попереднього випадку.

Потенціальні системи $\tilde v_{\tilde x}=\tilde u$, $\tilde v_{\tilde t}=\tilde u_{\tilde x}+\tilde u^2$ та $v_x=u$, $v_t=u_x$, побудовані за допомогою використання "загального" закону збереження для рівняння Бюргерса $u_t=u_{xx}+2uu_x$ та лінійного рівняння теплопровідності $u_t=u_{xx}$, пов'язані перетворенням $t=\tilde t$, $x=\tilde x$, $u=\tilde u e^{\tilde v}$, $v=e^{\tilde v}$. (Тут "тільдовані" змінні відповідають рівнянню Бюргерса.) Зауважимо, що насправді відоме перетворення Коула–Хопфа [51, 59, 82] лінеаризує рівняння Бюргерса до "потенціального" рівняння теплопровідності $v_t=v_{xx}$. Рівняння Бюргерса має "загальний" локальний закон збереження (випадок 3.2.1) та нескінченну серію найпростіших законів збереження (випадок 1.6 табл. 3.2). Наведене перетворення між потенціальними системами індукує взаємно однозначну відповідність, що зберігає α, між нескінченними серіями 1.6 табл. 3.2 рівняння Бюргерса та 3.2.4 потенціального рівняння теплопровідності $v_t=v_{xx}$. Тоді, закон збереження вигляду 3.2.4 з функцією $\tilde\alpha$ для потенціального рівняння теплопровідності $v_t=v_{xx}$ еквівалентний закону збереження з функцією α для лінійного рівняння теплопровідності $u_t=u_{xx}$, де $\tilde\alpha=\alpha_x$. Закон збереження з випадку 3.2.1 для рівняння Бюргерса є тривіальним на многовиді відповідної потенціальної системи і зводиться до тривіального закону збереження для системи $v_x=u$, $v_t=u_x$.

Лінійне рівняння теплопровідності. Лінійне рівняння теплопровідності $u_t=u_{xx}$ має нескінченновимірний простір нетривіальних локальних законів збереження [12], який генерується векторами густини вигляду $(F^\alpha,G^\alpha)=(\alpha u,\alpha_x u-\alpha u_x)$, де $\alpha=\alpha(t,x)$ – довільний розв'язок зворотного лінійного рівняння теплопровідності $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$. Використовуючи фіксований закон збереження такого вигляду, можна ввести потенціал v^α, де

$$v^\alpha_x = \alpha u,\ v^\alpha_t = \alpha u_x - \alpha_x u. \tag{3.24}$$

Система (3.24) має одну нескінченну серію локальних законів збереження (випадок 4.1 табл. 3.2) з вектором густини

$$(F^{\alpha\beta}, G^{\alpha\beta}) = \left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_x v^\alpha, -\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_x u - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t v^\alpha\right), \tag{3.25}$$

де $\beta = \beta(t, x)$ – довільний розв'язок зворотного лінійного рівняння теплопровідності $\beta_t + \beta_{xx} = 0$. Такі закони є найпростішими потенціальними законами збереження для лінійного рівняння теплопровідності і дозволяють ввести потенціали "другого рівня" $w^{\alpha\beta}$. В результаті отримаємо потенціальну систему наступного рівня:

$$v^\alpha_x = \alpha u,\ w^{\alpha\beta}_x = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_x v^\alpha,\ w^{\alpha\beta}_t = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_x u + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t v^\alpha. \tag{3.26}$$

Розглянемо систему

$$v^\alpha_x = \alpha u,\ v^\alpha_t = \alpha u_x - \alpha_x u,\ v^\beta_x = \beta u,\ v^\beta_t = \beta u_x - \beta_x u, \tag{3.27}$$

яка є об'єднанням двох потенціальних систем вигляду (3.24), що відповідають локальним законам збереження з векторами густини (F^α, G^α) та (F^β, G^β). Аналогічно до попередніх випадків, можна стверджувати, що потенціальний закон збереження другого рівня з вектором густини (3.25) є тривіальним на многовиді розв'язків системи (3.27), оскільки

$$F^{\alpha\beta} = D_x\left(\frac{\beta}{\alpha}v^\alpha - v^\beta\right) \text{ та } G^{\alpha\beta} = -D_t\left(\frac{\beta}{\alpha}v^\alpha - v^\beta\right).$$

Більш того, системи (3.26) та (3.27) пов'язані за допомогою локальної підстановки

$$w^{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha}v^\alpha - v^\beta.$$

Отже, насправді, система (3.27) генерується лише трьома незалежними рівняннями. У якості таких рівнянь можна вибрати, наприклад

$$v_x^\alpha = \alpha u,\ v_x^\beta = \beta u,\ \frac{\beta}{\alpha} v_t^\alpha - v_t^\beta = \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)_x u.$$

Як результат наведеного аналізу, має місце наступна

Теорема 3.8. *Для довільного рівняння* (3.1)*, що не лінеаризується, і лінійного рівняння теплопровідності потенціальні системи другого рівня, які побудовані за допомогою єдиного закону збереження, еквівалентні потенціальним системам першого рівня, отриманим за допомогою пар законів збереження.*

3.4. Потенціальні закони збереження

З точністю до G^{equiv}-еквівалентності лінійне рівняння теплопровідності є єдиним лінійним рівнянням у класі (3.1). Дослідження його загальних потенціальних законів збереження відіграє важливу роль у класифікації потенціальних законів збереження рівнянь з класу (3.1), що лінеаризуються, а отже і для всього класу (3.1). (Найпростіші закони збереження вивчені у попередньому підрозділі.)

Як доведено у теоремі 3.5, лінійне рівняння теплопровідності має нескінченну серію локальних законів збереження. Зафіксуємо довільне $p \in \mathbb{N}$ та виберемо p лінійно незалежних розв'язків $\bar\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^p)$ зворотного лінійного рівняння теплопровідності, отримаємо p лінійно незалежних законів збереження з векторами густини $(F^s, G^s) = (\alpha^s u, \alpha^s_x u - \alpha^s u_x)$. (Тут і надалі $s = \overline{1,p}$.) В силу теореми 3.6 потенціали $\bar v = (v^1, \dots, v^p)$, введені за допомогою цих законів збереження формулами

$$v^s_x = \alpha^s u,\ v^s_t = \alpha^s u_x - \alpha^s_x u \tag{3.28}$$

є незалежними у сенсі означення 2.7.

Для лінійного рівняння теплопровідності повний перелік потенціальних законів збереження вичерпується об'єднаною множиною потенціальних законів збереження першого рівня, що відповідають всім можливим значенням p та p-кортежів $\bar{\alpha}$. Має місце наступна

Теорема 3.9 ([121]). *Будь-який локальний закон збереження системи* (3.28) *є еквівалентним на многовиді системи* (3.28) *локальному закону збереження лінійного рівняння теплопровідності.*

Наслідок 3.1. Для лінійного рівняння теплопровідності потенціальні закони збереження будь-якого рівня еквівалентні локальним на многовиді відповідних потенціальних систем, причому потенціали будь-якого рівня локально виражаються через локальні змінні t, x, $u_{(r)}$ (для деякого r) та потенціали першого рівня.

Нелінійні рівняння допускають більш загальні, ніж найпростіші, потенціальні закони збереження тоді й лише тоді, коли система, що досліджується, має

- більш ніж один лінійно незалежний локальний закон збереження (а, отже, можна ввести кілька різних потенціалів на першому ітераційному кроці)
- або нетривіальні найпростіші потенціальні закони збереження.

Як показано у підрозділі 3.3., це можливо у класі (3.1) лише для спеціальних значень параметр-функцій a та b. В силу результатів підрозділу 3.3. для рівнянь, що лінеаризуються, і теореми 3.9, можна сформулювати наступна

Теорема 3.10. *Для довільного рівняння з класу* (3.1)*, що лінеаризується, всі потенціальні закони збереження другого рівня еквівалентні на многовиді відповідних потенціальних систем потенціальним законам збереження першого рівня.*

Щоб дослідити повністю потенціальні закони збереження рівнянь з класу (3.1), залишається вивчити підкласи з $b = 0$ та $b = a$, рівняння з яких мають два незалежні локальні закони збереження, та підклас $b = \int a + ua$, що зводиться до $b = a$ за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності.

Теорема 3.11. *Всі потенціальні закони збереження довільного рівняння з класу* (3.1) *при* $b = 0$ *або* $b = a$ *є тривіальними на многовиді об'єднаних потенціальних систем* (3.13), (3.14) *та* (3.17), (3.18), *побудованих за допомогою пар незалежних локальних законів збереження.*

Доведення. Розглянемо об'єднану систему (3.13), (3.14) (або (3.17), (3.18)) (нижче у дужках наводимо різниці між другим та першим випадками). Аналогічно лемі 3.2, не втрачаючи загальності, вважаємо, що $F = F(t, x, v^1, v^2)$ та $G = G(t, x, u, v^1, v^2)$. Розщепимо рівняння $D_tF + D_xG = 0$ на многовиді, що визначається об'єднаною системою. Проінтегрувавши отримане рівняння, маємо наступний вираз для потоку G: $G = -(QF)\int a + G^0$, де $G^0 = G^0(t, x, v^1, v^2)$ та $Q = \partial_{v^1} + x\partial_{v^2}$ ($Q = \partial_{v^1} + e^x\partial_{v^2}$). Інші рівняння утворюють систему на функції F та G^0:

$$
\begin{aligned}
&Q^2F = 0,\ QG^0 = 0,\ F_t + G^0_x = 0,\\
&(QF)_x + F_{v^2} = 0\ (\,(QF)_x - F_{v^1} = 0\,).
\end{aligned}
$$

Отже, $F = F^1v^1 + F^0$, причому F^1, F^0 та G^0 – функції змінних t, $y = x$ та $\omega = xv^1 - v^2$ ($\omega = e^xv^1 - v^2$), для яких

$$
F^0_\omega = F^1_y,\ F^1_t = -G^0_\omega,\ F^0_t = -G^0_y\,.
$$

З останньої системи випливає, що існує така функція $H = H(t, y, \omega)$, що $F^1 = H_\omega$ ($F^1 = e^xH_\omega$), $F^0 = H_y$, $G^0 = -H_t$. Тоді, $F = D_xH$, $G = -D_tH$, тобто, закон збереження є тривіальним.

Як показано вище, має місце наступний ланцюжок локальних перетворень між потенціальними системами: 3.2.1.3 $\longleftrightarrow$ 3.2.1.2 $\longleftrightarrow$ (3.17), (3.18), тобто, система 1.3 табл. 3.2 локально еквівалентна системі (3.17), (3.18). В силу цього та теореми 3.11 отримаємо наступне твердження.

Теорема 3.12. *На многовиді потенціальної системи 1.3 табл. 3.2 всі потенціальні закони збереження довільного рівняння з класу* (3.1) *при* $b = \int a + ua$ *є тривіальними.*

Підсумовуючи наведені результати, зауважимо, що ієрархія законів збереження (включаючи локальні) для рівнянь конвекції–дифузії (3.1) з точністю до G^{equiv}-еквівалентності має вигляд:

- "загальний" локальний закон збереження (випадок 3.2.1) для довільних значень параметр-функцій a та b;
- два незалежні локальні закони збереження, якщо $b = 0$ (випадки 3.2.1 та 3.2.2) або $b = a$ (випадки 3.2.1 та 3.2.3);
- один "загальний" локальний (випадок 3.2.1) та один найпростіший потенціальний (випадок 1.3 табл. 3.2) закон збереження, якщо $b = \int a + ua$;
- нескінченна серія локальних законів збереження (випадок 3.2.4) для лінійного рівняння теплопровідності;
- один "загальний" локальний (випадок 3.2.1) закон збереження та нескінченна серія найпростіших потенціальних законів збереження (випадок 1.6 табл. 3.2) для рівняння Бюргерса;
- два незалежні локальні закони збереження для рівняння u^{-2}-дифузії (випадки 3.2.1 та 3.2.2) та рівняння Фокаша–Йортсоса (випадки 3.2.1 та 3.2.3), як підкласів $b = 0$ та $b = a$ та додатково нескінченна серія найпростішіх потенціальних законів збереження (випадки 1.4 та 1.5 табл. 3.2).

Зауваження 3.5. Вище не розглядалася у явному вигляді дія перетворень з групи Лі симетрій на закони збереження відповідних рівнянь або потенціальних систем. Для переважної більшості випадків ця дія тривіальна. Наприклад, зсуви за змінною x використано для нормування сталої ε у випадку 3.2.3. У випадку 3.2.2 цей самий зсув приводить до додавання “загального” закону збереження до спеціального закону у цьому класі.

Неочевидний зв’язок між незалежними законами збереження може бути встановлений лише для $a = u^{-4/3}$, $b = 0$ (випадок 3.2.1 та випадок 3.2.2) за допомогою перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = 1 - x^{-1}$, $\tilde{u} = x^3 u$ з групи Лі симетрій відповідного рівняння. Цей факт вперше відкрито у [90] в рамках “операторного” підходу. Зауважимо, що значення функцій $a = u^{-4/3}$, $b = 0$ приводять до рівняння, яке виділяється з нелінійних рівнянь конвекції–дифузії (3.1) своїми симетрійними властивостями.

Група Лі симетрій $\mathcal{G}_-$ лінійного рівняння теплопровідності містить нескінченновимірну нормальну підгрупу $\mathcal{G}_-^0$, яка утворена перетвореннями $\tilde{u} = u + f(t, x)$, де $f = f(t, x)$ – довільний роз’вязок того ж самого рівняння, що відповідають принципу суперпозиції роз’вязків. З точністю до відношення еквівалентності, перетворення з $\mathcal{G}_-^0$ діють тривіально на множині законів збереження з випадку 3.2.4. Дія скінченновимірної фактор-групи $\mathcal{G}_-/\mathcal{G}_-^0$ на цю множину індукує аналогічну фактор-групу $\mathcal{G}_+/\mathcal{G}_+^0$ на множині роз’вязків зворотного лінійного рівняння теплопровідності, яку пробігає параметр-функція α.

Ієрархія законів збереження генерує повний перелік локально нееквівалентних потенціальних систем для класу (3.1):

- “загальна” потенціальна система (3.12) (випадок 3.2.1);
- додаткові найпростіші потенціальні системи (3.14) (випадок 3.2.2) або (3.18) (випадок 3.2.3), якщо $b = 0$ або $b = a$ відповідно;
- потенціальні системи другого рівня (3.15) (випадок 1.1 табл. 3.2) та (3.19) (випадок 1.2 табл. 3.2) (які, фактично, еквівалентні об’єднаним потенціальним системам першого рівня) при $b = 0$ або $b = a$ відповідно;
- система (3.28) з довільною кількістю локально незалежних потенціалів для лінійного рівняння теплопровідності.

Серед виписаних систем найбільш цікавою для подальшого дослідження є потенціальна система (3.12). У наступному підрозділі докладно вивчаються її симетрійні властивості.

3.5. Потенціальні симетрії та потенціальні перетворення еквівалентності

Якщо рівняння з класу (3.1) переписати у явному дивергентному вигляді

$$u_t = (a(u)u_x - B(u))_x, \tag{3.29}$$

де $B = -\int b$, відповідною алгеброю еквівалентності цього класу буде

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{\rm equiv} = \langle &\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ t\partial_t - a\partial_a - B\partial_B,\ x\partial_x + 2a\partial_a + B\partial_B,\\ &u\partial_u + B\partial_B,\ t\partial_x + u\partial_B,\ \partial_B\rangle\end{aligned}$$

і група еквівалентності $\widehat{G}^{\rm equiv}$ складається з перетворень

$$\begin{aligned}&\tilde t = \varepsilon_4 t + \varepsilon_1,\ \tilde x = \varepsilon_5 x + \varepsilon_7 t + \varepsilon_2,\ \tilde u = \varepsilon_6 u + \varepsilon_3,\\ &\tilde a = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 a,\ \tilde B = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5\varepsilon_6 B + \varepsilon_7 u + \varepsilon_8,\end{aligned}$$

де ε_1, ..., ε_8 — довільні сталі, $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 \neq 0$.

Після введення потенціалу $v = v(t,x)$ у рівнянні (3.1), записаному у дивергентній формі $u_t = (au_x - B)_x$ з $B_u = -b$, загальна потенціальна система 3.2.1 набуде вигляду

$$v_x = u,\ v_t = au_x - B. \tag{3.30}$$

З системи (3.30) випливає, що функція v задовольняє рівняння

$$v_t = a(v_x)v_{xx} - B(v_x), \tag{3.31}$$

яке називається *потенціальним рівнянням*, що відповідає рівнянню (3.1). Систему (3.30) можна розглядати як перетворення Лі–Беклунда між рівняннями (3.1) і (3.31).

Теорема 3.13. *Алгеброю Лі групи еквівалентності $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$ класу систем (3.30) є [103]*

$$A^{\rm equiv}_{\rm pot} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u + x\partial_v,\ \partial_v, t\partial_t - a\partial_a - B\partial_B,$$
$$u\partial_u + v\partial_v + B\partial_B,\ x\partial_x + v\partial_v + 2a\partial_a + B\partial_B,$$
$$t\partial_x + u\partial_B,\ t\partial_v - \partial_B,\ v\partial_x - u^2\partial_u + 2ua\partial_a - uB\partial_B\rangle.$$

Теорема 3.14. *Загальне перетворення з $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$ має вигляд*

$$\tilde t = \varepsilon_1 t + \varepsilon_2,\ \tilde x = \varepsilon_1' x + \varepsilon_2' v + \varepsilon_3' t + \varepsilon_4',\ \tilde v = \varepsilon_1'' x + \varepsilon_2'' v + \varepsilon_3'' t + \varepsilon_4'',$$
$$\tilde u = \frac{\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' u}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2' u},\ \tilde a = \frac{(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' u)^2}{\varepsilon_1}\,a,$$
$$\tilde B = \frac{\varepsilon_1'\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'\varepsilon_1''}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2' u}\,\frac{B}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_3''}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_1}\,\frac{\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' u}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2' u},$$

де ε_1, ε_2, ε_i', ε_i'' $(i = \overline{1,4})$ — довільні сталі, $\varepsilon_1(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'\varepsilon_1'') \neq 0$.

Означення 3.1. Перетворення з групи $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$ називаються *потенціальними перетвореннями еквівалентності* у класі рівнянь (3.1) (або (3.29)).

Твердження 3.1. *Множина $G^{\rm equiv}_{\rm triv.\ pot}$ потенціальних перетворень еквівалентності, які діють на довільні елементи a і B тривіально по модулю $\widehat{G}^{\rm equiv}$, є нормальною підгрупою групи $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$. Відповідна фактор-група може бути визначена як група, що складається з перетворень*

$$\tilde t = t,\ \tilde x = x + \varepsilon v,\ \tilde u = \frac{u}{1+\varepsilon u},$$
$$\tilde v = v,\ \tilde a = (1+\varepsilon u)^2 a,\ \tilde B = \frac{B}{1+\varepsilon u} \tag{3.32}$$

(ε — довільна стала), та перетворення годографу змінних x і v

$$\tilde t = t,\ \tilde x = v,\ \tilde u = u^{-1},\ \tilde v = x,\ \tilde a = u^2 a,\ \tilde B = -u^{-1}B. \tag{3.33}$$

Перетворення (3.32) і (3.33) називатимемо *чисто потенціальними* перетвореннями еквівалентності для класу рівнянь (3.1).

Вивчення потенціальних симетрій рівнянь (3.1), які виникають з загальної потенціальної системи, еквівалентне розв'язанню задачі групової класифікації у класі систем (3.30) з точністю до (неповної) групи еквівалентності $G^{\rm equiv}_{\rm triv.\ pot}$. Зауважимо, що потенціальні симетрії рівняння (3.1), що отримуються з системи (3.30), досліджено в [129]. Використовуючи перетворення з $G^{\rm equiv}_{\rm triv.\ pot}$, у даній роботі суттєво спрощено і впорядковано ці результати.

Теорема 3.15. *Алгеброю Лі ядра основних груп систем* (3.30) *є* $A^{\rm ker}_{\rm pot} = \langle\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v\rangle$ *(*$= A^{\max}_{3.3.0}$*). Повний набір* $G^{\rm equiv}_{\rm triv.\ pot}$*-нееквівалентних систем вигляду* (3.30) *з максимальною алгеброю Лі інваріантності* $A^{\max}$*, що не співпадає з* $A^{\rm ker}_{\rm pot}$*, вичерпується випадками, наведеними у табл. 3.3.*

Доведення результату класифікації базується на застосуванні класичного алгоритму Лі і проводиться аналогічно доведенню, наведеному у підрозділі 4.2.

Проаналізуємо зв'язок між випадками з табл. 3.2 і 3.3.

Випадки 3.3.0*–3.3.8* повністю відповідають випадкам 3.1.1–3.1.8a: 3.3.0*$\leftrightarrow$3.1.1, 3.3.1*$\leftrightarrow$3.1.2, 3.3.2*$\leftrightarrow$3.1.3, 3.3.3*$\leftrightarrow$3.1.4, 3.3.4*$\leftrightarrow$3.1.5, 3.3.5*$\leftrightarrow$3.1.6$_{\mu\neq-1}$, 3.3.6*$\leftrightarrow$3.1.6$_{\mu=-1}$, 3.3.7*$\leftrightarrow$3.1.7, 3.3.8$^*_{\mu\neq-4/3}\leftrightarrow$3.1.8a$_{\mu\neq-2}$. Сталий множник в B ($\sim b$) можна змінити, використовуючи перетворення еквівалентності вигляду $\tilde t=\varepsilon^2t$, $\tilde x=\varepsilon x$, $\tilde u=u$, $\tilde v=\varepsilon v$, $\tilde a=a$, $\tilde B=\varepsilon B$ ($\sim\tilde b=\varepsilon b$), яке нетривіально діє лише на останні базисні оператори у випадках 3.3.3* і 3.1.4. Відповідність 3.3.7*$\to$3.1.7 встановлюється за допомогою перетворення еквівалентності $\tilde t=t$, $\tilde x=-x$, $\tilde u=u$, $\tilde v=-v$, $\tilde a=a$, $\tilde B=-B+1$. Всі наведені вище відповідності визначають ізоморфізм між $A^{\max}_{3.3.*}/\langle\partial_v\rangle$ та $A^{\max}_{3.2}$, який реалізується за допомогою проекції на простір змінних (t,x,u) ($\to$) або продовженням на змінну v ($\leftarrow$). Отже, рівняння (3.1) не має чистих потенціальних симетрій для цих значень параметрів a і b.

Таблиця 3.3

Результат групової класифікації системи (3.30) з точністю до $G^{\text{equiv}}_{\text{triv. pot}}$-еквівалентності

N	$a(u)$	$B(u)$	Базис алгебри $A^{\max}$
0^*	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v$
1^*	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v$
2^*	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2)t\partial_t + (\mu-1)x\partial_x + \partial_u + ((\mu-1)v + x)\partial_v$
3^*	e^u	u^2	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_t + (x+2t)\partial_x + \partial_u + (x+v)\partial_v$
4^*	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v,\ t\partial_t - \partial_u - x\partial_v$
5^*	u^μ	$u^{\nu+1}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t + (\mu-\nu)x\partial_x + u\partial_u + (\mu-\nu+1)v\partial_v$
6^*	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu+2)t\partial_t + (\mu+1)x\partial_x + u\partial_u + ((\mu+2)v - t)\partial_v$
7^*	u^μ	$u\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t + (\mu x + t)\partial_x + u\partial_u + (\mu+1)v\partial_v$
8^*	u^μ	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v,\ \mu t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v$
1	$u^{-2}e^{\mu/u}$	$ue^{1/u}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2)t\partial_t + ((\mu-1)x + v)\partial_x - u^2\partial_u + (\mu-1)v\partial_v$
2	$u^{-2}e^{1/u}$	u^{-1}	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_t + (x+v)\partial_x - u^2\partial_u + (v-2t)\partial_v$
3	$u^{-2}e^{1/u}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v,\ t\partial_t - v\partial_x + u^2\partial_u$
4	$\dfrac{u^\mu}{(u+1)^{\mu+2}}$	$\dfrac{u^{\nu+1}}{(u+1)^\nu}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t + ((\mu-\nu)x - v)\partial_x + u(u+1)\partial_u +$ $+(\mu-\nu+1)v\partial_v$
5	$\dfrac{u^\mu}{(u+1)^{\mu+2}}$	$u\ln\dfrac{u}{u+1}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t + (\mu x + v - t)\partial_x + u(u+1)\partial_u + (\mu+1)v\partial_v$
6	$\dfrac{u^\mu}{(u+1)^{\mu+2}}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v,\ \mu t\partial_t + v\partial_x - u(u+1)\partial_u - v\partial_v$
7	$\dfrac{e^{\mu\arctan u}}{u^2+1}$	$\sqrt{u^2+1}\,e^{\nu\arctan u}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t + ((\mu-\nu)x - v)\partial_x + (u^2+1)\partial_u +$ $+(x + (\mu-\nu)v)\partial_v$
8	$\dfrac{e^{\mu\arctan u}}{u^2+1}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v,\ \mu t\partial_t + v\partial_x - (u^2+1)\partial_u - x\partial_v$
9	u^{-2}	0	$\partial_t,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v,\ -vx\partial_x + u(ux+v)\partial_u + 2t\partial_v,$ $4t^2\partial_t - (v^2+2t)x\partial_x + u(v^2 + 6t + 2xuv)\partial_u + 4tv\partial_v,$ $x\partial_x - u\partial_u,\ \phi\partial_x - \phi_v u^2\partial_u$
10	u^{-2}	u^{-1}	$\partial_t,\ \partial_v,\ 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v,\ -v\partial_x + u^2\partial_u + 2t\partial_v,$ $4t^2\partial_t - (v^2+2t)\partial_x + 2u(uv+2t)\partial_u + 4tv\partial_v,$ $\partial_x,\ e^{-x}\phi\partial_x + e^{-x}(\phi - u\phi_v)u\partial_u$
11	1	$-u^2$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\ 2t\partial_x - \partial_u - x\partial_v,$ $4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - 2(x+2ut)\partial_u - (x^2+2t)\partial_v,$ $\partial_v,\ e^{-v}(h_x - hu)\partial_u + e^{-v}h\partial_v$
12	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\ 2t\partial_x - (xu+v)\partial_u - xv\partial_v,$ $4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - ((x^2+6t)u + 2xv)\partial_u - (x^2+2t)v\partial_v,$ $u\partial_u + v\partial_v,\ h_x\partial_u + h\partial_v$

Тут $\mu,\nu = \text{const}$. $(\mu,\nu) \neq (-2,-2), (0,1)$ і $\nu \neq -1, 0$ для випадків 3.3.5* і 3.3.4. $\mu \neq -2, 0$ для випадків 3.3.8* і 3.3.6. функції $\phi = \phi(t,v)$ та $h = h(t,x)$ — довільні розв'язки лінійного рівняння теплопровідності ($\phi_t = \phi_{vv}$; $h_t = h_{xx}$).

Випадки $3.3.8^*_{\mu=-4/3}$ і 3.1.9 не відповідають повністю один одному, оскільки базисний оператор $x^2\partial_x - 3xu\partial_u$ з $A^{\max}_{3.1.9}$ не може бути продовжений на v локальним чином, і алгебра $A^{\max}_{3.3.8^*_{\mu=-4/3}}/\langle\partial_v\rangle$ ізоморфна власній підалгебрі алгебри $A^{\max}_{3.1.9}$.

У табл. 3.3 є пари класів "з зірочками", які еквівалентні відносно перетворення годографа (3.33): $3.3.5^*_{\mu,\nu}\leftrightarrow 3.3.5^*_{\mu',\nu'}$ ($\mu+\mu'=-2$, $\nu+\nu'=1$), $3.3.6^*_{\mu}\leftrightarrow 3.3.7^*_{\mu'}$, $3.3.8^*_{\mu}\leftrightarrow 3.3.8^*_{\mu'}$ ($\mu+\mu'=-2$). (Для того, щоб виключити з розгляду випадки, еквівалентні іншим відносно $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$, необхідно вважати додатково, що, наприклад, $\mu\geq -1$ та $\nu\geq\frac{1}{2}$ для $\mu=-1$ у випадках $3.3.5^*_{\mu,\nu}$ і $3.3.8^*_{\mu}$.) Отже, справедливе наступне

Твердження 3.2. *Випадки у парах ($3.1.6_{\mu,\nu}$,$3.1.6_{\mu',\nu'}$) ($\mu+\mu'=-2$, $\nu+\nu'=1$), ($3.1.6_{\nu=-1}$,3.1.7), ($3.1.8_{\mu}$,$3.1.7_{\mu'}$) ($\mu+\mu'=-2$) еквівалентні відносно потенціальних перетворень еквівалентності* (3.33).

Алгебри $A^{\max}_{3.3.1}$–$A^{\max}_{3.3.12}$ містять оператори, які не проектовні на простір змінних (t,x,u), тобто їх коефіцієнти, що відповідають змінним t, x і u залежать від v. Отже, рівняння вигляду (3.1) з такими значеннями довільних елементів a і B мають чисто потенціальні симетрії.

Випадки 3.3.1–3.3.6 з відповідними алгебрами Лі інваріантності редукуються до випадків "з зірочками" за допомогою чисто потенціальних перетворень еквівалентності (3.33) і (3.32): $3.3.1\to 3.3.2^*$, $3.3.2\to 3.3.3^*$, $3.3.3\to 3.3.4^*$ (за допомогою перетворення годографа (3.33)); $3.3.4\to 3.3.5^*$, $3.3.5\to 3.3.6^*$, $3.3.1\to 3.3.2^*$ (перетворенням (3.32) з $\varepsilon=1$).

Використовуючи перетворення еквівалентності $\tilde t=t$, $\tilde x=x-t$, $\tilde u=u$, $\tilde v=v+2t$, $\tilde a=a$, $\tilde B=B-u-2$ з групи $G^{\rm equiv}_{\rm triv.\ pot}$, можна звести функцію B у випадку 3.3.4 ($\nu=-2$) до більш простого вигляду $\tilde B=u^{-1}$. Тоді останній базисний оператор $A^{\max}$ має вигляд $(\mu+4)t\partial_t+((\mu+2)x-v)\partial_x+u(u+1)\partial_u+((\mu+3)v+2t)\partial_v$. Подібне твердження справедливе і для $\nu=-3$.

Випадки 3.3.7 та 3.3.8 є особливими в сенсі зведення до випадків з табл. 3.1. Не існує жодного перетворення над полем дійсних чисел, яке б редукувало ці рівняння до більш простого вигляду. Розглянувши рівняння (3.1) та систему (3.30) над полем комплексних чисел, можна звести випадки 3.3.7/3.3.8 до випадків $3.3.5^*_{\mu',\nu'}/3.3.8^*_{\mu'}$ з $\mu' = -i\mu/2 - 1$, $\nu' = -i\nu/2 - 1/2$ за допомогою частинного випадку потенціального перетворення еквівалентності (3.32):

$$\tilde t = -4t,\ \tilde x = -2x + 2iv,\ \tilde v = 2x + 2iv,\ \tilde u = \frac{u-i}{u+i},$$
$$\tilde a = (u+i)^2 a,\ \tilde B = \frac{B}{u+i}.$$

Випадки $3.3.7_{\mu,\nu}$ і $3.3.7_{\mu',\nu'}$ ($3.3.8_{\mu}$ і $3.3.8_{\mu'}$) є еквівалентними тоді й лише тоді, коли $\mu = -\mu'$ і $\nu = -\nu'$ ($\mu = -\mu'$). Еквівалентність встановлюється за допомогою перетворення одночасної зміни знаків x та u . Щоб виключити з розгляду випадки, які еквівалентні іншим відносно $G^{\rm equiv}_{\rm pot}$, необхідно вважати додатково, що $\mu \geq 0$ і $\nu \geq 0$ якщо $\mu = 0$.

Рівняння u^{-2}-дифузії, Фокаша–Йортсоса, Бюргерса і лінійне рівняння теплопровідності (випадки $3.1.8\mathrm{a}_{\mu=-2}$, 3.1.8b, 3.1.10 і 3.1.11 відповідно) суттєво виділяються з класу рівнянь (3.1) своїми симетрійними властивостями. Після введення потенціалу v і заміни рівняння (3.1) системою (3.30) (випадки 3.3.9–3.3.12), різниця між цими та іншими класами стає більш явною, оскільки $A^{\max}_{3.3.9}$–$A^{\max}_{3.3.12}$ ізоморфні нескінченновимірній алгебрі і, використовуючи потенціальні перетворення еквівалентності (3.33) та додаткове перетворення еквівалентності (3.3), можна звести їх один до одного (див. також [103]):

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\hat u_{\hat t} = (\hat u^{-2}\hat u_{\hat x})_{\hat x} + \hat u^{-2}\hat u_{\hat x}\\ \hat v_{\hat x} = \hat u,\ \hat v_{\hat t} = \hat u^{-2}\hat u_{\hat x} - \hat u^{-1}\end{array}} \arrow[rr, leftrightarrow, "{\hat t = \tilde t,\ \hat x = \tilde v,\ \hat u = \tilde u^{-1},\ \hat v = \tilde x}"] \arrow[dd, leftrightarrow, "{\check t = \hat t,\ \check x = e^{\hat x},\ \check u = e^{-\hat x}\hat u,\ \check v = \hat v}"'] & & \boxed{\begin{array}{c}\tilde u_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x\tilde x} + 2\tilde u\tilde u_{\tilde x}\\ \tilde v_{\tilde x} = \tilde u,\ \tilde v_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x} + \tilde u^2\end{array}} \arrow[dd, leftrightarrow, "{t = \tilde t,\ x = \tilde x,\ u = \tilde u e^{\tilde v},\ v = e^{\tilde v}}"] \\
 & \tilde u = \dfrac{v_x}{v},\ v_t = v_{xx}\ \Longleftarrow & \\
\boxed{\begin{array}{c}\check u_{\check t} = (\check u^{-2}\check u_{\check x})_{\check x}\\ \check v_{\check x} = \check u,\ \check v_{\check t} = \check u^{-2}\check u_{\check x}\end{array}} \arrow[rr, leftrightarrow, "{\check t = t,\ \check x = v,\ \check u = u^{-1},\ \check v = x}"] & & \boxed{\begin{array}{c}u_t = u_{xx}\\ v_x = u,\ v_t = u_x\end{array}}
\end{tikzcd}$$

Отже, всі рівняння вигляду (3.1), що мають нескінченновимірну алгебру потенціальних симетрій (або нескінченну серію лінійно незалежних законів збереження), або лінійні, або лінеаризуються. Легко переконатися, що відоме перетворення Коула–Хопфа можна отримати як комбінацію наведених перетворень. Лише для лінійного рівняння теплопровідності алгебра потенціальних симетрій, факторизована за $\langle \partial_v \rangle$, ізоморфна максимальній алгебрі Лі інваріантності. Але ізоморфізм встановлюється не простим проектуванням на простір (t, x, u). Він можливий завдяки лінійності та співпаданню початкового та потенціального рівнянь.

Теорема 3.16. *Всі симетрії, наведені у табл. 3.3 можна отримати з ліївських симетрій рівнянь вигляду* (3.1) *за допомогою продовження на потенціал v і застосування потенціальних перетворень еквівалентності* (3.32) *та* (3.33) *(над полем комплексних чисел у випадках 3.3.7 та 3.3.8) та додаткового перетворення еквівалентності* (3.3)*, продовженого на v ($\tilde{v} = v$).*

Симетрійні властивості системи (3.30) більш прямо пов'язані з властивостями рівняння (3.31), ніж з властивостями (3.1), оскільки система (3.30) є звичайним першим продовженням [22] рівняння (3.31) відносно змінної x. Використовуючи цей зв'язок, легко розв'язати задачу групової класифікації в класі рівнянь (3.31). Вичерпний результат групової класифікації міститься у наступній теоремі.

Теорема 3.17. *Група еквівалентності $\tilde{G}^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$ класу рівнянь* (3.31) *та її алгебра Лі $\tilde{A}^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$ є проекціями групи $G^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$ та алгебри Лі $A^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$ на простір (t, x, v). Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь* (3.31) *є $\tilde{A}^{\mathrm{ker}}_{\mathrm{pot}} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v \rangle$. Повний набір $\tilde{G}^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$-нееквівалентних рівнянь вигляду* (3.31) *з максимальними алгебрами Лі $A^{\max}$, що не співпадають з $\tilde{A}^{\mathrm{ker}}_{\mathrm{pot}}$, вичерпується випадками 3.3.0***–3.3.4***, 3.3.5*$^*_{\mu,\nu}$ *($\mu \geq -1$ та $\nu \geq \frac{1}{2}$ якщо $\mu = -1$), 3.3.6*$^*_{\mu}$*, 3.3.8*$^*_{\mu}$ *($\mu \geq -1$), 3.3.7 ($\mu \geq 0$ та $\nu \geq 0$ якщо $\mu = 0$), 3.3.8 ($\mu \geq 0$) та 3.3.12.*

У класі (3.1) є рівняння, які інваріантні відносно нетривіальних перетворень з $G^{\mathrm{equiv}}_{\mathrm{pot}}$. Так, рівняння (3.1) допускає перетворення (3.32, $\varepsilon = 1$) або (3.33) тоді й лише тоді, коли

$$a = u^{-2}F^1(u^{-1}),\ B = uG^1(u^{-1})$$

$$\text{або } a = u^{-1}F^2(\ln u),\ B = u^{1/2}G^2(\ln u),$$

де F^1 та G^1 — періодичні функції з періодом, рівним 1 і F^2 (G^2) — парна (непарна) функція. Ці нелокальні перетворення генерують додаткові (порівняно з ліївськими симетріями) еквівалентності на множині розв'язків.

Наприклад, рівняння $u_t = (u^{-1}u_x)_x$ є інваріантним відносно перетворень (3.33). Перелік його відомих G^{equiv}-нееквівалентних розв'язків вичерпується наступними [24] (див. також попередній розділ дисертації):

$$\begin{aligned}
&u = c_0 e^{c_1 x} \ \longleftrightarrow\ u = \frac{\varepsilon}{x - \varepsilon t + c_0}; \qquad \circlearrowright\ u = \frac{2t}{(x + c_1)^2}.\\
&u = \frac{2c_1^2 t}{\cos^2 c_1(x + c_0)} \ \longleftrightarrow\ u = \frac{2t}{(x + c_1)^2 + t^2};\\
&u = \frac{2tc_0c_1^2 e^{c_1 x}}{(1 - c_0 e^{c_1 x})^2} \ \longleftrightarrow\ u = \frac{c_1}{-\varepsilon + c_0 e^{c_1(x - \varepsilon t)}};
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Набір розв'язків (3.34) є замкненим відносно перетворення (3.33). Стрілками позначено можливі перетворення розв'язків (3.34) один в інший за допомогою перетворення (3.33). Третій з цих зв'язків був відомий раніше [30, 124].

3.6. Висновки до розділу 3

У даному розділі повністю прокласифіковано з точністю до групи еквівалентності локальні закони збереження довільного порядку для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії, знайдено всі (найпростіші та загальні) потенціальні закони збереження та побудовано локально нееквівалентні потенціальні системи для рівнянь (3.1). Проведено всі можливі кроки ітераційної процедури. В результаті отримано вісім нееквівалентних класів рівнянь (3.1), що мають різні множини потенціальних законів збереження

- загальний випадок (параметр-функції a та b – довільні);
- три випадки з довільним значенням a та спеціальними значеннями b ($b = 0$; $b = a$; $b = \int a\,du + ua$);
- три відповідні рівняння, що лінеаризуються ($a = u^{-2}$, $b = 0$; $a = b = u^{-2}$; $a = 1$, $b = 2u$) та
- лінійне рівняння теплопровідності ($a = 1$, $b = 0$).

Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії, що виникають з найбільш загальної потенціальної системи, та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Показано, що нелокальні перетворення, які лінеаризують відомі рівняння Бюргерса, Фокаша–Йортсоса та u^{-2}-дифузії є потенціальними перетвореннями еквівалентності.

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботах [86, 119–121].

РОЗДІЛ 4

Групова класифікація нелінійних рівнянь конвекції–дифузії із змінними коефіцієнтами

У даному розділі розглядаються симетрійні властивості нелінійних рівнянь конвекції–дифузії із змінними коефіцієнтами

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \tag{4.1}$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$, $a = a(u)$ і $b = b(u)$ довільні гладкі функції своїх аргументів, $f(x)g(x)a(u)\neq 0$.

Використовуючи перетворення змінних $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = \int \frac{dx}{g(x)}$, $\tilde{u} = u$, можна звести рівняння (4.1) до вигляду

$$\tilde{f}(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{t}} = (a(\tilde{u})\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + b(\tilde{u})\tilde{u}_{\tilde{x}},$$

де $\tilde{f}(\tilde{x}) = g(x)f(x)$ і $\tilde{g}(\tilde{x}) = 1$. (Аналогічно, будь-яке рівняння вигляду (4.1) зводиться до рівняння з $\tilde{f}(\tilde{x}) = 1$.) Тому, не обмежуючи загальності, надалі розглядаємо клас

$$f(x)u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{4.2}$$

У підрозділі 4.1 наведено основні результати групової класифікації, доведення яких представлено у підрозділі 4.2. У підрозділі 4.3 розглядаються додаткові (умовні та частинні) перетворення еквівалентності у класі рівнянь (4.2). У підрозділі 4.4 проведено симетрійну редукцію та побудовані точні розв'язки для деяких підкласів класу (4.2).

Основні результати розділу 4 опубліковано в роботах [14, 119].

4.1. Результат класифікації

Розглянемо однопараметричну групу локальних перетворень у просторі змінних (t,x,u) з інфінітезімальним оператором

$$Q=\xi^t(t,x,u)\partial_t+\xi^x(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u,$$

які залишають рівняння (4.2) інваріантним. З інфінітезімального критерію Лі інваріантності маємо наступні визначальні рівняння для коефіцієнтів ξ^t, ξ^x та η:

$$\begin{aligned}
&\xi^t_x=\xi^t_u=\xi^x_u=0,\\
&a\eta_{uu}+a_u\eta_u-a_u(2\xi^x_x-\xi^t_t)+a_{uu}\eta-\frac{f_x}{f}a_u\xi^x=0,\\
&2\xi^x_x-\xi^t_t+\frac{f_x}{f}\xi^x=\frac{a_u}{a}\eta,\ \ f\eta_t-b\eta_x-a\eta_{xx}=0,\\
&b\left(\frac{f_x}{f}\xi^x+\xi^x_x-\xi^t_t\right)+a(\xi^x_{xx}-2\eta_{xu})-2a_u\eta_x-b_u\eta-f\xi^x_t=0.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Дослідивши систему (4.3) на сумісність, отримаємо додаткове рівняння $\eta_{uu}=0$, яке не містить довільних елементів. Враховуючи цю умову, систему (4.3) можна переписати у вигляді

$$\xi^t_x=\xi^t_u=\xi^x_u=0,\ \ \eta_{uu}=0,\tag{4.4}$$

$$2\xi^x_x-\xi^t_t+\frac{f_x}{f}\xi^x=\frac{a_u}{a}\eta,\tag{4.5}$$

$$a\eta_{xx}+b\eta_x-f\eta_t=0,\tag{4.6}$$

$$(a_ub-b_ua)\frac{\eta}{a}-b\xi^x_x-2a_u\eta_x+a\xi^x_{xx}-f\xi^x_t-2a\eta_{xu}=0.\tag{4.7}$$

Рівняння (4.4) не містять довільних елементів. Проінтегрувавши їх, маємо

$$\xi^t=\xi^t(t),\ \ \xi^x=\xi^x(t,x),\ \ \eta=\eta^1(t,x)u+\eta^0(t,x).\tag{4.8}$$

Таким чином, групова класифікація (4.2) зводиться до розв'язання класифікуючих умов (4.5)–(4.7).

Після розщеплення системи (4.5)–(4.7) за довільними елементами та їх незв'язаними похідними отримаємо рівняння $\xi^t_t = 0$, $\xi^x = 0$, $\eta = 0$ для коефіцієнтів операторів з алгебри Лі A^{ker} класу рівнянь (4.2). Отже, справедливе твердження.

Теорема 4.1. *Алгеброю Лі ядра основних груп класу рівнянь* (4.2) *є алгебра* $A^{\mathrm{ker}} = \langle \partial_t \rangle$.

Наступний крок алгоритму групової класифікації полягає у знаходженні перетворень еквівалентності класу (4.2). Для відшукання цих перетворень необхідно дослідити симетрії системи, яка складається з рівняння (4.2) і додаткових умов

$$f_t = f_u = 0,\ a_t = a_x = 0,\ b_t = b_x = 0.$$

Використовуючи класичний алгоритм Лі, знаходимо алгебру Лі інваріантності наведеної системи, яка є алгеброю Лі групи еквівалентності G^{equiv} класу (4.2). Таким чином, маємо твердження.

Теорема 4.2. *Алгеброю Лі групи еквівалентності* G^{equiv} *класу* (4.2) *є алгебра*

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{equiv}} = \langle &\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ t\partial_t + f\partial_f,\ x\partial_x - 2f\partial_f - b\partial_b,\ u\partial_u,\\ &f\partial_f + b\partial_b + a\partial_a \rangle. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Тоді група G^{equiv} містить наступні неперервні перетворення:

$$\tilde t = te^{\varepsilon_4} + \varepsilon_1,\ \tilde x = xe^{\varepsilon_5} + \varepsilon_2,\ \tilde u = ue^{\varepsilon_6} + \varepsilon_3,$$

$$\tilde f = fe^{\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 + \varepsilon_7},\ \tilde a = ae^{\varepsilon_7},\ \tilde b = be^{-\varepsilon_5 + \varepsilon_7},$$

де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7$ — довільні сталі. Для класу (4.2) також існує нетривіальна група дискретних перетворень еквівалентності, яка генерується чотирма інволютивними перетвореннями зміни знаку у множинах $\{t, a, b\}$, $\{x, b\}$, $\{u\}$ і $\{f, a, b\}$.

Використовуючи прямий метод, можна довести, що G^{equiv} співпадає з групою, яка генерується наведеними неперервними та дискретними перетвореннями.

Теорема 4.3. *Всі нееквівалентні відносно перетворень з* G^{equiv} *рівняння з класу* (4.2), *для яких* $A^{\max} \neq A^{\ker}$, *вичерпуються випадками, наведеними у табл. 4.1–4.3.*

Таблиця 4.1

Випадок довільного $a(u)$

N	$b(u)$	$f(x)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$\forall$	∂_t
2a	$\forall$	$e^{\varepsilon x}$	$\partial_t,\ \varepsilon t\partial_t + \partial_x$
2b	a	$e^{-2x+\gamma e^{-x}}$	$\partial_t,\ \gamma t\partial_t - e^x\partial_x$
2c	a	$e^{-2x}(e^{-x}+\gamma)^\nu$	$\partial_t,\ (\nu+2)t\partial_t - (e^{-x}+\gamma)e^x\partial_x$
2d	0	$\lvert x\rvert^\nu$	$\partial_t,\ (\nu+2)t\partial_t + x\partial_x$
2e	1	x^{-1}	$\partial_t,\ e^{-t}(\partial_t - x\partial_x)$
3a	0	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x$
3b	a	e^{-2x}	$\partial_t,\ 2t\partial_t - \partial_x,\ e^x\partial_x$

Тут $\gamma,\nu\neq 0,\ \ \varepsilon = 0,1 \bmod G^{\mathrm{equiv}},\ \ \gamma = \pm 1 \mod G^{\mathrm{equiv}}$.

Додаткові перетворення еквівалентності:

1. 2b $\to$ 2a ($b=0$, $\varepsilon=1$): $\tilde t = t$, $\tilde x = \gamma e^{-x}$, $\tilde u = u$;
2. 2c ($\nu\neq -2$) $\to$ 2a ($b=-a/(\nu+2)$, $\varepsilon=1$): $\tilde t = t$, $\tilde x = (\nu+2)\ln|e^{-x}+\gamma|$, $\tilde u = u$;

   2c ($\nu=-2$) $\to$ 2a ($b=-a$, $\varepsilon=0$): $\tilde t = t$, $\tilde x = \ln|e^{-x}+\gamma|$, $\tilde u = u$;
3. 2d ($\nu\neq -2$) $\to$ 2a ($b=-a/(\nu+2)$, $\varepsilon=1$): $\tilde t = t$, $\tilde x = (\nu+2)\ln|x|$, $\tilde u = u$;

   2d ($\nu=-2$) $\to$ 2a ($b=-a$, $\varepsilon=0$): $\tilde t = t$, $\tilde x = \ln|x|$, $\tilde u = u$;
4. 2e $\to$ 2a ($b=-a$, $\varepsilon=1$): $\tilde t = e^t$, $\tilde x = \ln|x| + t$, $\tilde u = u$;
5. 3b $\to$ 3a: $\tilde t = t$, $\tilde x = e^{-x}$, $\tilde u = u$.

Таблиця 4.2

Випадок $a(u) = e^{\mu u}$

N	μ	$b(u)$	$f(x)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$e^{\nu u}$	$\lvert x\rvert^{\lambda}$	$\partial_t,\ (\lambda\mu - \lambda\nu + \mu - 2\nu)t\partial_t + (\mu - \nu)x\partial_x + \partial_u$
2	$\forall$	e^{u}	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ (\mu - 2)t\partial_t + (\mu - 1)x\partial_x + \partial_u$
3	1	u	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t + (x - t)\partial_x + \partial_u$
4	1	εe^{u}	$\forall$	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u$
5a	1	0	$f^1(x)$	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ \alpha t\partial_t + (\beta x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0)\partial_x + \beta x\partial_u$
5b	1	e^{u}	$f^2(x)$	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ \alpha t\partial_t - (\beta e^{-x} + \gamma_1 + \gamma_0 e^{x})\partial_x + \beta e^{-x}\partial_u$
5c	1	1	x^{-1}	$\partial_t,\ x\partial_x + \partial_u,\ e^{-t}(\partial_t - x\partial_x)$
6a	1	0	1	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ \partial_x$
6b	1	e^{u}	e^{-2x}	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ 2t\partial_t - \partial_x,\ e^{x}\partial_x$
6c	1	e^{u}	$e^{-2x}(e^{-x} + \gamma)^{-3}$	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ (e^{-x} + \gamma)e^{x}\partial_x + \partial_u,$
				$-(e^{-x} + \gamma)^2 e^{x}\partial_x + (e^{-x} + \gamma)\partial_u$
6d	1	0	x^{-3}	$\partial_t,\ t\partial_t - \partial_u,\ x\partial_x - \partial_u,\ x^2\partial_x + x\partial_u$

Тут $\lambda \neq 0$, $\varepsilon \in \{0, 1\} \bmod G^{\mathrm{equiv}}$, $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_0 = \mathrm{const}$ і

$$f^1(x) = \exp\left\{\int \frac{-3\beta x - 2\gamma_1 + \alpha}{\beta x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0}\,dx\right\},\ f^2(x) = \exp\left\{\int \frac{\beta e^{-x} - 2\gamma_0 e^{x} - \alpha}{\beta e^{-x} + \gamma_1 + \gamma_0 e^{x}}\,dx\right\}.$$

Додаткові перетворення еквівалентності:

1. 5b $\rightarrow$ 5a: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = e^{-x}$, $\tilde{u} = u$;
2. 5c $\rightarrow$ 5a ($\alpha = \gamma_0 = 1$, $\beta = \gamma_1 = 0$, $f^1 = x^{-1}$): $\tilde{t} = e^{t}$, $\tilde{x} = e^{t}x$, $\tilde{u} = u$;
3. 6b $\rightarrow$ 6a: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = e^{-x}$, $\tilde{u} = u$;
4. 6c $\rightarrow$ 6a: $\tilde{t} = t\,\mathrm{sign}(e^{-x} + \gamma)$, $\tilde{x} = 1/(e^{-x} + \gamma)$, $\tilde{u} = u - \ln\lvert e^{-x} + \gamma\rvert$;
5. 6d $\rightarrow$ 6a: $\tilde{t} = t\,\mathrm{sign}\,x$, $\tilde{x} = 1/x$, $\tilde{u} = u - \ln\lvert x\rvert$.

Таблиця 4.3

Випадок $a(u) = u^\mu$

N	μ	$b(u)$	$f(x)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	u^ν	$\|x\|^\lambda$	$\partial_t,\ (\mu+\lambda\mu-2\nu-\lambda\nu)t\partial_t+(\mu-\nu)x\partial_x+u\partial_u$
2	$\forall$	u^ν	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ (\mu-2\nu)t\partial_t+(\mu-\nu)x\partial_x+u\partial_u$
3	$\forall$	$\ln u$	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ \mu t\partial_t+(\mu x-t)\partial_x+u\partial_u$
4	$\forall$	εu^μ	$\forall$	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u$
5a	$\forall$	0	$f^3(x)$	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,$
				$\alpha t\partial_t+((1+\mu)\beta x^2+\gamma_1x+\gamma_0)\partial_x+\beta xu\partial_u$
5b	$\forall$	u^μ	$f^4(x)$	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,$
				$\alpha t\partial_t-((1+\mu)\beta e^{-x}+\gamma_1+\gamma_0e^x)\partial_x+\beta e^{-x}u\partial_u$
5c	$\mu\neq-3/2$	1	x^{-1}	$\partial_t,\ e^{-t}(\partial_t-x\partial_x),\ \mu x\partial_x+u\partial_u$
6a	$\mu\neq-4/3$	0	1	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x$
6b	$\mu\neq-4/3$	u^μ	e^{-2x}	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,\ 2t\partial_t-\partial_x,\ e^x\partial_x$
6c	$\mu\neq-4/3,-1$	u^μ	$\frac{e^{-2x}}{(e^{-x}+\gamma)^{\frac{4+3\mu}{1+\mu}}}$	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,\ (2+\mu)t\partial_t+(1+\mu)(e^{-x}+\gamma)e^x\partial_x,$
				$-(1+\mu)(e^{-x}+\gamma)^2e^x\partial_x+(e^{-x}+\gamma)u\partial_u$
6d	$\mu\neq-4/3,-1$	0	$\|x\|^{-\frac{4+3\mu}{1+\mu}}$	$\partial_t,\ \mu t\partial_t-u\partial_u,\ (2+\mu)t\partial_t-(1+\mu)x\partial_x,$
				$(1+\mu)x^2\partial_x+xu\partial_u$
6e	-1	0	$e^{\gamma x}$	$\partial_t,\ t\partial_t+u\partial_u,\ \partial_x-\gamma u\partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x-\gamma xu\partial_u$
6f	-1	u^{-1}	$e^{-2x+\gamma e^{-x}}$	$\partial_t,\ t\partial_t+u\partial_u,\ e^x\partial_x+\gamma u\partial_u,\ 2t\partial_t-\partial_x-\gamma e^{-x}u\partial_u$
6g	$-3/2$	1	x^{-1}	$\partial_t,\ e^{-t}(\partial_t-x\partial_x),\ 3x\partial_x-2u\partial_u,\ e^t(x^2\partial_x-2xu\partial_u)$
7a	$-4/3$	0	1	$\partial_t,\ 4t\partial_t+3u\partial_u,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x,\ x^2\partial_x-3xu\partial_u$
7b	$-4/3$	$u^{-4/3}$	e^{-2x}	$\partial_t,\ 4t\partial_t+3u\partial_u,\ 2t\partial_t-\partial_x,\ e^{-x}(\partial_x+3u\partial_u),\ e^x\partial_x$
8	0	u	1	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,\ t\partial_x-\partial_u,$
				$t^2\partial_t+tx\partial_x-(tu+x)\partial_u$

Тут $\mu\neq0$ у випадках 4–6. $\varepsilon=0,1 \bmod G^{\text{equiv}}$, $\lambda\neq0$, $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_0=\text{const}$ і

$$f^3(x)=\exp\left\{\int\frac{-(4+3\mu)\beta x-2\gamma_1+\alpha}{(1+\mu)\beta x^2+\gamma_1x+\gamma_0}\,dx\right\},\ f^4(x)=\exp\left\{\int\frac{(2+\mu)\beta e^{-x}-2\gamma_0e^x-\alpha}{(1+\mu)\beta e^{-x}+\gamma_1+\gamma_0e^x}\,dx\right\}.$$

Додаткові перетворення еквівалентності:

1. 5b $\to$ 5a: $\tilde t=t$, $\tilde x=e^{-x}$, $\tilde u=u$;
2. 5c $\to$ 5a ($\alpha=\gamma_0=1$, $\beta=\gamma_1=0$, $f^1=x^{-1}$): $\tilde t=e^t$, $\tilde x=e^tx$, $\tilde u=u$;
3. 6b $\to$ 6a: $\tilde t=t$, $\tilde x=e^{-x}$, $\tilde u=u$;
4. 6c $\to$ 6a: $\tilde t=t$, $\tilde x=-1/(e^{-x}+\gamma)$, $\tilde u=|e^{-x}+\gamma|^{-\frac{1}{1+\mu}}u$;
5. 6d $\to$ 6a: $\tilde t=t$, $\tilde x=-1/x$, $\tilde u=|x|^{-\frac{1}{1+\mu}}u$;
6. 6e $\to$ 6a ($\mu=-1$): $\tilde t=t$, $\tilde x=x$, $\tilde u=e^{\gamma x}u$;
7. 6f $\to$ 6a ($\mu=-1$): $\tilde t=t$, $\tilde x=e^{-x}$, $\tilde u=e^{\gamma e^{-x}}u$;
8. 6g $\to$ 6a ($\mu=-3/2$): $\tilde t=e^t$, $\tilde x=-e^{-t}/x$, $\tilde u=|e^tx|^{-\frac{1}{1+\mu}}u$;
9. 7b $\to$ 7a: $\tilde t=t$, $\tilde x=e^{-x}$, $\tilde u=u$.

В табл. 4.1–4.3 наведено всі можливі G^{equiv}-нееквівалентні множини функцій $f(x)$, $a(u)$, $b(u)$ і відповідні алгебри інваріантності. Номери з однаковими арабськими числами відповідають випадкам, які є еквівалентними відносно додаткових локальних перетворень еквівалентності. Явні формули для цих перетворень наведено після таблиць. Випадки, пронумеровані різними арабськими числами, є нееквівалентними відносно локальних перетворень. Для того, щоб спростити отримані результати, у випадку $f(x) = 1$ використовується умовне перетворення еквівалентності $\tilde{x} = x - \varepsilon t$, $\tilde{b} = b + \varepsilon$ (інші змінні не перетворюються). Інші умовні перетворення еквівалентності розглядаються у підрозділі 4.3.

Оператори з табл. 4.1–4.3 утворюють базиси максимальних алгебр інваріантності тоді й лише тоді, коли відповідні набори функцій f, a, b є G^{equiv}-нееквівалентними випадкам з більш широкими алгебрами інваріантності. Наприклад, у випадку 4.3.1 $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ і $\lambda \neq -1$ якщо $\nu = 0$. У випадку 4.3.2 $(\mu, \nu) \notin \{(-2, -2), (0, 1)\}$ і $\nu \neq 0$. Аналогічно, у випадку 4.2.1 множина обмежень на параметри μ, ν і λ співпадає з обмеженнями для випадку 4.3.1, і можна вважати, що $\mu = 1$ або $\nu = 1$. У випадку 4.2.2 вважаємо, що $\nu = 1$.

Зауваження 4.1. Експоненціальні випадки 4.2.1–4.2.6d можна отримати як границі степеневих випадків 4.3.1–4.3.6d відповідно (див, наприклад, [41, 42]). Більш точно,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u} = 1 + \nu^{-1}u,\ \mu = \mu'\nu \colon \nu \to +\infty,\\
&\text{випадки } 4.3.1 \to 4.2.1,\ 4.3.2 \to 4.2.2,\ 4.3.4 \to 4.2.4\\
&\tilde{u} = 1 + \mu^{-1}u,\ \tilde{t} = \mu^2 t,\ \tilde{x} = \mu x \colon \mu \to +\infty,\\
&\text{випадок } 4.3.3 \to 4.2.3,\\
&\tilde{u} = 1 + \mu^{-1}u \colon \mu \to +\infty,\\
&\text{випадки } 4.3.5a \to 4.2.5a,\ 4.3.5b \to 4.2.5b,\ 4.3.5c \to 4.2.5c,\\
&4.3.6a \to 4.2.6a,\ 4.3.6b \to 4.2.6b, 4.3.6c \to 4.2.6c,\ 4.3.6d \to 4.2.6d.
\end{aligned}
$$

Наведені граничні переходи зберігають структуру алгебри Лі інваріантності і можуть бути використані для побудови точних розв'язків для експоненціальних класів з розв'язків степеневих класів.

Проаналізувавши отримані результати, маємо наступну теорему.

Теорема 4.4. *Якщо рівняння вигляду* (4.2) *інваріантне відносно алгебри Лі розмірності не менше 4, його можна звести локальними перетвореннями до рівняння з* $f(x) = 1$.

4.2. Доведення результату класифікації

Метод класифікації, що використовується у роботі, базується на тому, що підстановка коефіцієнтів довільного оператора з $A^{\max}\backslash A^{\ker}$ в класифікуючі рівняння приводить до нетотожних рівнянь на довільні елементи. У цій задачі дослідження всіх можливих випадків залежить, головним чином, від рівняння (4.5). Для довільного оператора $Q \in A^{\max}$ рівняння (4.5) дає кілька рівнянь на a загального вигляду

$$(\alpha u + \beta)a_u = \gamma a, \tag{4.10}$$

де $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$. Для будь-якого оператора з $A^{\max}$ кількість k таких незалежних рівнянь не більше за два, інакше вони утворюють несумісну систему на a, k — величина, інваріантна відносно перетворень з G^{equiv}. Отже, існують три нееквівалентні випадки значень k: $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$. Розглянемо ці випадки більш детально.

$\boldsymbol{k = 0}$ (табл. 4.1). Тоді коефіцієнти довільного оператора з $A^{\max}$ задовольняють систему

$$\eta = 0,\ 2\xi^x_x - \xi^t_t + \frac{f_x}{f}\xi^x = 0,\ -b\xi^x_x + a\xi^x_{xx} - f\xi^x_t = 0. \tag{4.11}$$

Припустимо, що $b \notin \langle 1,\ a\rangle$. Тоді, з останнього рівняння системи (4.11) випливає, що $\xi^x_x = \xi^x_t = 0$. Отже, друге рівняння обов'язково є нетотожним рівнянням на f вигляду $f_x = \mu f$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо випадок 2a.

Нехай тепер $b \in \langle 1,\ a\rangle$, тобто $b = \varepsilon a + \beta$, де $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\beta = \mathrm{const}$. Тоді останнє рівняння системи (4.11) можна розщепити на такі рівняння

$$\xi^x_{xx} = \varepsilon\xi^x_x,\ \beta\xi^x_x + f\xi^x_t = 0.$$

Рівняння $(\xi^x(f_x/f+2\varepsilon))_x = 0$ є диференціальним наслідком редукованих визначальних рівнянь. Отже, умова $f_x/f + 2\varepsilon = 0$ є класифікуючою.

Припустимо, що ця умова виконується, тобто $f = e^{-2\varepsilon x} \mod G^{\mathrm{equiv}}$. Існують три нееквівалентні можливості для значень параметрів ε і β:

$$\varepsilon = 1,\ \beta \neq 0;\ \varepsilon = 1,\ \beta = 0;\ \varepsilon = 0\ (\text{тоді}\ \beta = 0 \mod G^{\mathrm{equiv}}_1),$$

які дають випадки 2a, 3b та 3a відповідно.

Нехай $\varepsilon = 0$ і $f_x/f \neq 0$. Тоді, або дослідження зводиться до випадку 2a, або $f = x^\mu \mod G^{\mathrm{equiv}}$, де $\mu \neq 0$. В залежності від значень параметру β ($\beta = 0$ або $\beta \neq 0$ і тоді $\mu = -1$) отримаємо випадок 2d або випадок 2e.

Нехай $\varepsilon = 1$ і $f_x/f \neq -2$. Тоді $\beta = 0$ та $f_x/f = (C_1e^x + C_0)^{-1} - 2$, де вважаємо $C_1 \neq 0$, щоб виключити випадок 2a. Інтегрування останнього рівняння залежить від того, дорівнює C_0 нулеві чи ні, що приводить до випадків 2b і 2c відповідно.

$\boldsymbol{k = 1.}$ Тоді $a \in \{e^u, u^\mu, \mu \neq 0\} \mod G^{\mathrm{equiv}}$ і існує оператор $Q \in A^{\max}$ з $\eta \neq 0$.

Розглянемо випадок $a = e^u$ (табл. 4.2). З рівняння (4.5) випливає, що $\eta_u = 0$, тобто, $\eta = \eta(t, x)$. Отже, рівняння (4.5)–(4.7) можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered}2\xi^x_x - \xi^t_t + \frac{f_x}{f}\xi^x = \eta,\ e^u\eta_{xx} + b\eta_x - f\eta_t = 0,\\ (b - b_u)\eta - b\xi^x_x - f\xi^x_t + e^u(\xi^x_{xx} - 2\eta_x) = 0.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Останнє рівняння відносно b має вигляд $b_u = \nu b + be^u + c$, де $\nu, b, c = \mathrm{const}$. Його інтегрування приводить до п'яти можливих значень b.

1. $b = e^{\nu u} + \varkappa_1 e^u + \varkappa_0 \mod G^{\text{equiv}}$, де $\nu \neq 0, 1$. (Тут і надалі $\varkappa_i = \text{const}$, $i = 0, 1$.) Тоді $\eta = \text{const}$, $\varkappa_1 = 0$ та або $\varkappa_0 = 0$ якщо $f \neq \text{const}$, або ж $\varkappa_0 = 0 \mod G_1^{\text{equiv}}$ якщо $f = \text{const}$, звідки випливає, що $\xi^x_t = 0$, $\xi^t_{tt} = 0$, отже $f = |x|^\lambda \mod G^{\text{equiv}}$ (випадки 1 і 2).

2. $b = u + \varkappa_1 e^u + \varkappa_0$. Аналогічно до попереднього випадку отримаємо $\varkappa_1 = 0$, $f = 1 \mod G^{\text{equiv}}$, $\varkappa_0 = 0 \mod G_1^{\text{equiv}}$ (випадок 3).

3. $b = ue^u + \varkappa_1 e^u + \varkappa_0 \mod G^{\text{equiv}}$. З системи (4.12) випливає, що $\eta = 0$ для будь-якого оператора з $A^{\max}$, тобто, маємо протиріччя з припущенням $\eta \neq 0$ для деякого оператора з $A^{\max}$.

4. $b = e^u + \varkappa_0$. Тоді $\eta^1 = \zeta^1(t)e^{-x} + \zeta^0(t)$, $\xi^x = \sigma^1(t)e^x + \sigma^0(t) - \zeta^1(t)e^{-x}$. Можна довести, що $\zeta^1_t = \zeta^0_t = \sigma^1_t = \xi^t_{tt} = 0$ та або $\varkappa_0 = 0$ якщо $f \neq \text{const}$, або $\varkappa_0 = 0 \mod G_1^{\text{equiv}}$ якщо $f = \text{const}$, а отже $\sigma^0_t = 0$. З першого рівняння системи (4.12) випливає, що функція f задовольняє l ($l = 0, 1, 2$) рівнянь вигляду

$$\frac{f_x}{f} = \frac{\beta e^{-x} - \alpha - 2\gamma_0 e^x}{\beta e^{-x} + \gamma_1 + \gamma_0 e^x}$$

з непропорційними наборами сталих параметрів $(\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1)$. Значення $l = 0$ та $l = 1$ відповідають випадкам 4 ($\varepsilon = 1$) та 5b. Додаткове, у порівнянні з $l = 1$, розширення $A^{\max}$ для $l = 2$ існує тоді й лише тоді, коли f є розв'язком рівняння

$$\frac{f_x}{f} = \frac{\lambda_2 e^{-x}}{\lambda_1 e^{-x} + \lambda_0} - 2,$$

де або $\lambda_2 = 0$ або $\lambda_2 = 3\lambda_1 \neq 0$. Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо випадки 6b та 6c.

5. $b = \varkappa_0$. Тоді $\eta^1 = \zeta^1(t)x + \zeta^0(t)$, $\xi^x = \sigma^1(t)x + \sigma^0(t) + \zeta^1(t)x^2$. Із сумісності системи (4.12) випливає, що $\eta_t = \xi^x_t = 0$ якщо $f \notin \{x^{-1}, 1\} \mod G^{\text{equiv}}$ або $\varkappa_0 = 0$. Значення параметрів $f = x^{-1}$, $\varkappa_0 \neq 0$ відповідають випадку 5c. Якщо $f \notin \{x^{-1}, 1\} \mod G^{\text{equiv}}$ і $\varkappa_0 = 0$, отримаємо випадок 1 з $\nu = 0$. Якщо $f = \text{const}$, то $\varkappa_0 = 0 \mod G_1^{\text{equiv}}$. Далі $\varkappa_0 = 0$. Перше

рівняння системи (4.12) задовольняється, якщо функція f є розв'язком системи l ($l=0,1,2$) рівнянь вигляду

$$\frac{f_x}{f}=\frac{-3\beta x+\alpha-2\gamma_1}{\beta x^2+\gamma_1 x+\gamma_0}$$

з непропорційними наборами сталих параметрів $(\alpha,\beta,\gamma_0,\gamma_1)$. Значення $l=0$ і $l=1$ відповідають випадкам 4 ($\varepsilon=0$) і 5a. Додаткові розширення для $l=2$ існують тоді й лише тоді, коли f є розв'язком рівняння

$$\frac{f_x}{f}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1 x+\lambda_0},$$

де $\lambda_2=0$ або $\lambda_2=-3\lambda_1\neq 0$. Ці можливості приводять до випадків 6a та 6d.

Розглянемо випадок $a=u^\mu$ (табл. 4.3). З рівняння (4.5) випливає, що $\eta^0=0$, тобто, $\eta=\eta^1(t,x)u$. Отже, систему (4.5)–(4.7) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}&2\xi^x_x-\xi^t_t+\frac{f_x}{f}\xi^x=\mu\eta^1,\ u^\mu\eta^1_{xx}+b\eta^1_x-f\eta^1_t=0,\\&(\mu b-ub_u)\eta^1-b\xi^x_x+(\xi^x_{xx}-2(\mu+1)\eta^1_x)u^\mu-f\xi^x_t=0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Останнє рівняння відносно b має вигляд $ub_u=\nu b+bu^\mu+c$, де $\nu,b,c=\mathrm{const}$. Тоді b набуває одного з п'яти наступних значень.

1. $b=u^\nu+\varkappa_1u^\mu+\varkappa_0\mod G^{\mathrm{equiv}}$, де $\nu\neq 0,\mu$. З рівнянь (4.13) випливає, що $\eta^1=\mathrm{const}$, $\xi^x=(\mu-\nu)\eta^1x+\sigma(t)$, $\varkappa_1\xi^x_x=0$ (отже, $\varkappa_1=0$ оскільки $\eta^1\neq 0$), $f=|x|^\lambda\mod G^{\mathrm{equiv}}$, $\xi^t_t=(\mu+\lambda\mu-2\nu-\lambda\nu)\eta^1$, $\lambda\sigma=0$ та або $\varkappa_0=0$ якщо $\lambda\neq 0$ (випадок 1), або $\varkappa_0=0\mod G^{\mathrm{equiv}}_1$ якщо $\lambda=0$ (випадок 2).

2. $b=\ln u+\varkappa_1u^\mu+\varkappa_0\mod G^{\mathrm{equiv}}$. Аналогічно до попереднього випадку отримаємо $\varkappa_1=0$, $f=1\mod G^{\mathrm{equiv}}$, $\varkappa_0=0\mod G^{\mathrm{equiv}}_1$ (випадок 3).

3. $b=u^\mu\ln u+\varkappa_1u^\mu+\varkappa_0\mod G^{\mathrm{equiv}}$. З системи (4.13) випливає, що $\eta=0$ для довільного оператора з $A^{\max}$, тобто, маємо протиріччя з припущенням $\eta\neq 0$ для деякого оператора з $A^{\max}$.

4. $b = u^\mu + \varkappa_0 \mod G^{\mathrm{equiv}}$. Тоді $\eta^1 = \zeta^1(t)e^{-x} + \zeta^0(t)$, $\xi^x = \sigma^1(t)e^x + \sigma^0(t) - (\mu+1)\zeta^1(t)e^{-x}$. Можна довести, що $\zeta^1_t = \zeta^0_t = \sigma^1_t = \xi^t_{tt} = 0$, та $\varkappa_0 = 0$ якщо $f \neq \mathrm{const}$ або $\varkappa_0 = 0 \mod G^{\mathrm{equiv}}_1$ якщо $f = \mathrm{const}$, а отже, $\sigma^0_t = 0$. З першого рівняння системи (4.13) випливає, що функція f задовольняє l ($l = 0, 1, 2$) рівнянь вигляду

$$\frac{f_x}{f} = \frac{(\mu+2)\beta e^{-x} - \alpha - 2\gamma_0 e^x}{(\mu+1)\beta e^{-x} + \gamma_1 + \gamma_0 e^x}$$

з непропорційними наборами сталих параметрів $(\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1)$. Значення $l = 0$ і $l = 1$ відповідають випадкам 4 ($\varepsilon = 1$) та 5b. $l = 2$ тоді й лише тоді, коли f є розв'язком рівняння

$$\frac{f_x}{f} = \frac{\lambda_2 e^{-x}}{\lambda_1 e^{-x} + \lambda_0} - 2.$$

Нееквівалентні можливості інтегрування цього рівняння приводять до випадків 6b, 6c, 6f, 7b.

5. $b = \varkappa_0$. Тоді $\eta^1 = \zeta^1(t)x + \zeta^0(t)$, $\xi^x = \sigma^1(t)x + \sigma^0(t) + (\mu+1)\zeta^1(t)x^2$. З сумісності системи (4.13) випливає, що $\eta_t = \xi^x_t = 0$ при $f \notin \{x^{-1}, 1\} \mod G^{\mathrm{equiv}}$ або $\varkappa_0 = 0$. Значення параметрів $f = x^{-1}$, $\varkappa_0 \neq 0$ приводять до випадків 5c та 6g. Якщо $f \notin \{x^{-1}, 1\} \mod G^{\mathrm{equiv}}$ і $\varkappa_0 = 0$, отримаємо випадок 1 з $\nu = 0$. Якщо $f = \mathrm{const}$, то $\varkappa_0 = 0 \mod G^{\mathrm{equiv}}_1$. Далі $\varkappa_0 = 0$. Перше рівняння системи (4.13) задовольняється, якщо функція f є розв'язком системи l ($l = 0, 1, 2$) рівнянь вигляду

$$\frac{f_x}{f} = \frac{-(3\mu+4)\beta x + \alpha - 2\gamma_1}{(\mu+1)\beta x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0}$$

з непропорційними наборами сталих параметрів $(\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1)$. Значення $l = 0$ та $l = 1$ відповідають випадкам 4 ($\varepsilon = 0$) та 5a. $l = 2$ тоді й лише тоді, коли f є розв'язком рівняння

$$\frac{f_x}{f} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 x + \lambda_0}.$$

Нееквівалентні можливості інтегрування цього рівняння приводять до випадків 6a, 6d, 6e, 7a.

$\boldsymbol{k = 2.}$ З припущення про два незалежних рівняння на a вигляду (4.10) випливає, що $a = \mathrm{const}$, тобто $a = 1 \mod G^{\mathrm{equiv}}$. $b_u \neq 0$ (інакше рівняння (4.2) є лінійним). Рівняння (4.5)–(4.7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &2\xi^x_x - \xi^t_t + \frac{f_x}{f}\xi^x = 0,\ \eta_{xx} + b\eta_x - f\eta_t = 0, \\ &-b_u\eta - b\xi^x_x + \xi^x_{xx} - f\xi^x_t - 2\eta^1_x = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Останнє рівняння відносно b має вигляд $(\alpha u+\beta)b_u = \gamma b+\delta$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \mathrm{const}$. Отже, з точністю до перетворень з G^{equiv} b набуває одного з наступних чотирьох виглядів:

$$b = u^\nu + \varkappa_0,\ \nu \neq 0, 1;\ b = \ln u + \varkappa_0;\ b = e^u + \varkappa_0;\ b = u.$$

Класифікація для цих значень функції b виконується повністю аналогічно попереднім випадкам. Отримані розширення приєднанано до табл. 4.2 та 4.3.

Задачу групової класифікації у класі (4.2) повністю розв'язано.

4.3. Додаткові перетворення еквівалентності

Якщо накласти деякі обмеження на довільні елементи, можна знайти додаткові перетворення еквівалентності, що називаються умовними перетвореннями еквівалентності (див. означення 2.1). Найпростіший шлях знайти такі еквівалентності між попередньо класифікованими рівняннями базується на тому, що еквівалентні рівняння мають еквівалентні максимальні алгебри Лі інваріантності. Але більш систематичний шлях — класифікувати ці перетворення, використовуючи інфінітезімальний або прямий метод. Приклади алгебр умовної еквівалентності, обчислених за допомогою інфінітезімального методу, наведено у табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Алгебри умовної еквівалентності

Умови	Базис $A^{\rm equiv}$
$b=a$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ u\partial_u,\ t\partial_t+f\partial_f,\ e^x(\partial_x-2f\partial_f),\ f\partial_f+a\partial_a$
$b=a=e^u$	$\partial_t,\ t\partial_t+f\partial_f,\ \partial_x,\ \partial_u+f\partial_f,\ x\partial_x-2f\partial_f,\ x^2\partial_x+x\partial_u-3x\partial_f$
$a=e^u,\ b=0$	$\partial_t,\ t\partial_t+f\partial_f,\ \partial_x,\ \partial_u+f\partial_f,\ x\partial_x-2f\partial_f,\ x^2\partial_x+x\partial_u-3x\partial_f$
$a=b=u^\mu$	$\partial_t,\ t\partial_t+f\partial_f,\ \partial_x,\ \partial_u+\mu f\partial_f,\ e^x(\partial_x-2f\partial_f),\ e^{-x}((1{+}\mu)\partial_x-u\partial_u+(2{+}\mu)f\partial_f)$
$a=u^\mu,\ b=0$	$\partial_t,\ t\partial_t+f\partial_f,\ \partial_x,\ \partial_u+\mu f\partial_f,\ x\partial_x-2f\partial_f,\ (1+\mu)x^2\partial_x+xu\partial_u-(4+3\mu)xf\partial_f$
$\forall a,\ \forall b,\ f=1$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ u\partial_u,\ t\partial_x-\partial_b,\ 2t\partial_t+x\partial_x-b\partial_b,\ t\partial_t-a\partial_a-b\partial_b$

Для того, щоб знайти повний набір додаткових локальних перетворень еквівалентності, (який включає і неперервні, і дискретні перетворення) потрібно використовувати прямий метод. Більш того, застосування цього методу дозволяє описати всі локальні перетворення, які можливі між парами рівнянь з розглядуваного класу. Подібні задачі вперше розглядалися для хвильових рівнянь Дж. Кінгстоном і Х. Софоклєусом [96, 97, 130]. Зараз наведемо ряд простих, але дуже корисних лем, що містять попередні результати розв'язання цієї задачі. Вважаємо, що для всіх перетворень виконується умова невиродженності.

Лема 4.1. *[95, 119] Для будь-якого локального перетворення змінних, яке зв'язує два еволюційні рівняння другого порядку (тобто, рівняння вигляду $u_t = H(t,x,u,u_x,u_{xx})$, де $H_{u_{xx}} \neq 0$), перетворення змінної t залежить лише від t.*

Лема 4.2. *[119] Будь-яке локальне перетворення змінних, яке зв'язує два еволюційні квазілінійні рівняння другого порядку, що мають вигляд $u_t = F(t,x,u)u_{xx} + G(t,x,u,u_x)$, де $F \neq 0$ — проективне, тобто $\tilde t = T(t)$, $\tilde x = X(t,x)$, $\tilde u = U(t,x,u)$.*

Лема 4.3. *[119] Будь-яке локальне перетворення змінних, яке зв'язує два рівняння з класу (4.2), є лінійним по u: $\tilde t = T(t)$, $\tilde x = X(t,x)$, $\tilde u = U^1(t,x)u + U^0(t,x)$, і, з точністю до перетворень з $G^{\rm equiv}$, можна вважати, що коефіцієнт a не перетворюється*

Лема 4.4. *[119]* $(U_t, U_x) \neq (0,0)$ *для довільного локального перетворення змінних, яке зв'язує два рівняння з класу* (4.2)*, тоді й лише тоді, коли* $a \in \{u^\mu,\ e^u\} \bmod G^{\rm equiv}$.

Як приклад дискретного перетворення еквівалентності, наведемо інволютивне перетворення

$$\tilde t = t,\ \tilde x = -x,\ \tilde u = u + \alpha x$$

яке зв'язує рівняння

$$f(x)u_t = (e^u u_x)_x + \alpha e^u u_x \quad \text{та} \quad e^{-\alpha x} f(-x)u_t = (e^u u_x)_x + \alpha e^u u_x.$$

Більш того, це перетворення є дискретним перетворенням інваріантності для рівняння

$$g(x)e^{-\alpha x/2}u_t = (e^u u_x)_x + \alpha e^u u_x,$$

якщо g є парною функцією.

Також цікавою є задача знаходження перетворень рівнянь з класу (4.2) у інші класи рівнянь реакції-дифузії. Так наприклад, використовуючи дискретне перетворення $\tilde t = t,\ \tilde x = -x,\ \tilde u = u + x/2$, можна звести рівняння

$$e^{-x/2}u_t = e^u(u_{xx} + u_x^2 + u_x)$$

до рівняння реакції–дифузії з класифікації В. Дородніцина [11]:

$$\tilde u_t = (e^{\tilde u}\tilde u_{\tilde x})_{\tilde x} - \frac{1}{4}e^{\tilde u}.$$

4.4. Точні розв'язки

Наведемо деякі точні розв'язки рівнянь (4.2). Використовуючи класифікацію з точністю до всіх можливих локальних перетворень (тобто, не лише відносно перетворень з $G^{\rm equiv}$), спочатку знайдемо розв'язки більш простих рівнянь (наприклад, 6a з табл. 4.2 або 4.3) за допомогою класичного алгоритму Лі–Овсяннікова або некласичних методів. Потім перетворимо їх у розв'язки більш складних рівнянь (таких, як 6b, 6c, ...).

Зауважимо, що для рівнянь з $f = 1$ більшість з наведених нижче розв'язків було побудовано раніше (див. посилання в [24]). Проте, немає жодної роботи, яка б містила систематичне вивчення всіх можливих ліївських редукцій у цьому класі та вичерпного розгляду інтегровності і точних розв'язків відповідних редукованих рівнянь. У даному підрозділі для деяких рівнянь з цього підкласу повністю реалізовано ліївський алгоритм редукції, отримано вже відомі та ряд нових розв'язків.

Отже, розглянемо рівняння 4.2.6a

$$u_t = (e^u u_x)_x. \tag{4.15}$$

Нагадаємо, що для рівняння (4.15) базис $A^{\max}$ задається операторами

$$Q_1 = \partial_t,\ Q_2 = t\partial_t - \partial_u,\ Q_3 = \partial_x,\ Q_4 = x\partial_x + 2\partial_u.$$

Ненульовими комутаторами цих операторів є лише наступні: $[Q_1, Q_2] = Q_1$ і $[Q_3, Q_4] = Q_3$. Отже, $A^{\max}$ є зображенням алгебри $2A_{2.1}$ [19]. Всі можливі нееквівалентні (відносно внутрішніх автоморфізмів) одновимірні підалгебри алгебри $2A_{2.1}$ [117] вичерпуються підалгебрами, наведеними у табл. 4.5 разом з відповідними анзацами і редукованими звичайними диференціальними рівняннями.

Таблиця 4.5

Редуковані ЗДР для (4.15). $\alpha \neq 0,\ \varepsilon = \pm 1,\ \delta = \operatorname{sign} t$

N	Підалгебра	Анзац $u =$	ω	Редуковане ЗДР
1	$\langle Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	t	$\varphi' = 0$
2	$\langle Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega) + 2\ln\lvert x\rvert$	t	$\varphi' = 2e^{\varphi}$
3	$\langle Q_1 \rangle$	$\varphi(\omega)$	x	$(e^{\varphi})'' = 0$
4	$\langle Q_2 \rangle$	$\varphi(\omega) - \ln\lvert t\rvert$	x	$(e^{\varphi})'' = -\delta$
5	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	$x - \varepsilon t$	$(e^{\varphi})'' = -\varepsilon\varphi'$
6	$\langle Q_2 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega) - \ln\lvert t\rvert$	$x - \varepsilon\ln\lvert t\rvert$	$(e^{\varphi})'' = -\delta(\varepsilon\varphi' + 1)$
7	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega) + 2\varepsilon t$	$xe^{-\varepsilon t}$	$(e^{\varphi})'' = -\varepsilon\omega\varphi' + 2\varepsilon$
8	$\langle Q_2 + \alpha Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega) + (2\alpha - 1)\ln\lvert t\rvert$	$x\lvert t\rvert^{-\alpha}$	$(e^{\varphi})'' = \delta(-\alpha\omega\varphi' + 2\alpha - 1)$

Рівняння 4.5.1–4.5.5 легко інтегруються. Проінтегрувавши їх, маємо такі розв'язки рівняння (4.15):

$$u = \ln|c_1x + c_0|,\ u = \ln\left(\frac{-x^2}{2t} + \frac{c_1x + c_0}{t}\right),$$

$$u = \varphi(x - \varepsilon t) \text{ де } \int \frac{e^{\varphi}}{c_1 - \varepsilon\varphi} d\varphi = \omega + c_0.$$

Використовуючи отримані розв'язки, легко можна побудувати точні розв'язки для випадків 4.2.6b–4.2.6d. Наприклад, за допомогою перетворення 4.2.4 отримаємо відповідні розв'язки більш складного і цікавого рівняння

$$\frac{e^x}{(\gamma e^x + 1)^3}\, u_t = (e^u u_x)_x + e^u u_x$$

з густиною, локалізованою у просторі (випадок 4.2.6c):

$$u = \ln\left|c_1 + c_0(e^{-x} + \gamma)\right|,\ u = \ln\left(-\frac{1}{2t(e^{-x} + \gamma)} - \frac{c_1}{t} + c_0\frac{e^{-x} + \gamma}{t}\right).$$

Значення $\mu = -1$ для випадку 4.3.6a є особливим для параметру μ, і рівняння

$$u_t = \left(\frac{u_x}{u}\right)_x \tag{4.16}$$

виділяється з процедури редукції. Крім того, випадки 4.3.6e і 4.3.6f зводяться до рівняння (4.16) локальними перетвореннями. Алгебра інваріантності рівняння (4.16) генерується операторами

$$Q_1 = \partial_t,\ Q_2 = t\partial_t + u\partial_u,\ Q_3 = \partial_x,\ Q_4 = x\partial_x - 2u\partial_u$$

і також є реалізацією алгебри $2A_{2.1}$. Редуковані звичайні диференціальні рівняння для рівняння (4.16) наведені у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Редуковані ЗДР для (4.16). $\alpha \neq 0,\ \varepsilon = \pm 1$

N	Підалгебра	Анзац $u =$	ω	Редуковане ЗДР
1	$\langle Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	t	$\varphi' = 0$
2	$\langle Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)x^{-2}$	t	$\varphi' = 2$
3	$\langle Q_1 \rangle$	$\varphi(\omega)$	x	$(\varphi^{-1}\varphi')' = 0$
4	$\langle Q_2 \rangle$	$\varphi(\omega)t$	x	$(\varphi^{-1}\varphi')' = \varphi$
5	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	$x - \varepsilon t$	$(\varphi^{-1}\varphi')' = -\varepsilon\varphi'$
6	$\langle Q_2 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)t$	$x - \varepsilon \ln \lvert t \rvert$	$(\varphi^{-1}\varphi')' = -\varepsilon\varphi' + \varphi$
7	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)e^{-2\varepsilon t}$	$xe^{-\varepsilon t}$	$(\varphi^{-1}\varphi')' = -\varepsilon\omega\varphi' - 2\varepsilon\varphi$
8	$\langle Q_2 + \alpha Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)t\lvert t \rvert^{-2\alpha}$	$x\lvert t \rvert^{-\alpha}$	$(\varphi^{-1}\varphi')' = -\alpha\omega\varphi' + (1-2\alpha)\varphi$

Проінтегрувавши рівняння 4.6.1–4.6.4 маємо наступні розв'язки рівняння (4.16):

$$u = c_0 e^{c_1 x},\ u = \frac{2c_1^2 t}{\cos^2 c_1(x + c_0)},\ u = \frac{2tc_0c_1^2 e^{c_1 x}}{(1 - c_0 e^{c_1 x})^2},$$

$$u = \frac{c_1}{-\varepsilon + c_0 e^{c_1(x - \varepsilon t)}},\ u = \frac{\varepsilon}{x - \varepsilon t + c_0},\ u = \frac{2t}{(x + c_1)^2 + c_0 t^2}.$$

Аналогічно попередньому випадку, застосувавши до цих формул перетворення 4.3.7 отримаємо точні розв'язки рівняння 4.3.6f у вигляді:

$$u = c_0 e^{(c_1 - \gamma)e^{-x}},\ u = \frac{2c_1^2 te^{-\gamma e^{-x}}}{\cos^2 c_1(e^{-x} + c_0)},\ u = \frac{2tc_0c_1^2 e^{(c_1-\gamma)e^{-x}}}{(1 - c_0 e^{c_1 e^{-x}})^2},$$

$$u = \frac{c_1 e^{-\gamma e^{-x}}}{-\varepsilon + c_0 e^{c_1(e^{-x} - \varepsilon t)}},\ u = \frac{\varepsilon e^{-\gamma e^{-x}}}{e^{-x} - \varepsilon t + c_0},\ u = \frac{2te^{-\gamma e^{-x}}}{(e^{-x} + c_1)^2 + c_0 t^2}.$$

Ще одним прикладом рівняння з густиною, локалізованою у просторі, є рівняння 4.3.6c. Для того, щоб знайти його точні розв'язки, зведемо це рівняння спочатку до рівняння 4.3.6a

$$u_t = (u^\mu u_x)_x\,. \tag{4.17}$$

Як і у попередніх випадках, алгеброю інваріантності

$$A^{\max} = \langle Q_1 = \partial_t,\ Q_2 = t\partial_t - \mu^{-1}u\partial_u,\ Q_3 = \partial_x,\ Q_4 = x\partial_x + 2\mu^{-1}u\partial_u \rangle$$

рівняння (4.17) є реалізація алгебри $2A_{2.1}$. Результат редукції (4.17) за нееквівалентними підалгебрами алгебри $A^{\max}$ наведений в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

Редуковані ЗДР для (4.17). $\mu \neq 0, -1$, $\alpha \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \operatorname{sign} t$

N	Підалгебра	Анзац $u =$	ω	Редуковане ЗДР
1	$\langle Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	t	$\varphi' = 0$
2	$\langle Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)\lvert x\rvert^{2/\mu}$	t	$\varphi' = 2\mu^{-2}(2+\mu)\varphi^{\mu+1}$
3	$\langle Q_1 \rangle$	$\varphi(\omega)$	x	$(\varphi^\mu\varphi')' = 0$
4	$\langle Q_2 \rangle$	$\varphi(\omega)\lvert t\rvert^{-1/\mu}$	x	$(\varphi^\mu\varphi')' = -\delta\mu^{-1}\varphi$
5	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)$	$x - \varepsilon t$	$(\varphi^\mu\varphi')' = -\varepsilon\varphi'$
6	$\langle Q_2 + \varepsilon Q_3 \rangle$	$\varphi(\omega)\lvert t\rvert^{-1/\mu}$	$x - \varepsilon\ln\lvert t\rvert$	$(\varphi^\mu\varphi')' = -\delta\varepsilon\varphi' - \delta\mu^{-1}\varphi$
7	$\langle Q_1 + \varepsilon Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)e^{2\varepsilon\mu^{-1}t}$	$xe^{-\varepsilon t}$	$(\varphi^\mu\varphi')' = -\varepsilon\omega\varphi' + 2\mu^{-1}\varepsilon\varphi$
8	$\langle Q_2 + \alpha Q_4 \rangle$	$\varphi(\omega)\lvert t\rvert^{(2\alpha-1)/\mu}$	$x\lvert t\rvert^{-\alpha}$	$(\varphi^\mu\varphi')' = \delta\mu^{-1}(2\alpha-1)\varphi - \delta\alpha\omega\varphi'$

Для деяких з редукованих рівнянь вдалося побудувати загальний розв'язок, для інших — знайдено частинні розв'язки:

$$u = |c_1x + c_0|^{\frac{1}{\mu+1}},\ u = (c_0 - \varepsilon\mu(x - \varepsilon t))^{\frac{1}{\mu}},$$

$$u = \left(-\frac{\mu}{\mu+2}\frac{(x+c_0)^2}{2t} + c_1|t|^{-\frac{\mu}{\mu+2}}\right)^{\frac{1}{\mu}},$$

$$u = \left(-\frac{\mu}{\mu+2}\frac{(x+c_0)^2}{2t} + c_1(x+c_0)^{\frac{\mu}{\mu+1}}|t|^{-\frac{\mu(2\mu+3)}{2(\mu+1)^2}}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Всі результати, наведені у табл. 4.6 і 4.7, та вже побудовані розв'язки можна розповсюдити на рівняння 4.3.6b–4.3.6g за допомогою локальних перетворень еквівалентності. Так, для рівняння

$$\frac{e^{-2x}}{(e^{-x}+\gamma)^{\frac{4+3\mu}{1+\mu}}}u_t = (u^\mu u_x)_x + u^\mu u_x \tag{4.18}$$

(випадок 4.3.6c), використовуючи перетворення 4.3.4, отримаємо точні розв'язки у вигляді

$$u = |c_0(e^{-x}+\gamma) - c_1|^{\frac{1}{\mu+1}},$$

$$u = \left(c_0 + \frac{\varepsilon\mu}{e^{-x}+\gamma} + \varepsilon^2\mu t\right)^{\frac{1}{\mu}}|e^{-x}+\gamma|^{-\frac{1}{\mu+1}},$$

$$u = \left(-\frac{\mu}{\mu+2}\frac{1}{2t}\left(c_0 - \frac{1}{e^{-x}+\gamma}\right)^2 + c_1|t|^{-\frac{\mu}{\mu+2}} \right)^{\frac{1}{\mu}} |e^{-x}+\gamma|^{-\frac{1}{\mu+1}},$$

$$u = \left(-\frac{\mu}{\mu+2}\frac{1}{2t}\left(c_0 - \frac{1}{e^{-x}+\gamma}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + c_1\left(c_0 - \frac{1}{e^{-x}+\gamma}\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} |t|^{-\frac{\mu(2\mu+3)}{2(\mu+1)^2}} \right)^{\frac{1}{\mu}} |e^{-x}+\gamma|^{-\frac{1}{\mu+1}}.$$

Велику кількість точних розв'язків для рівнянь з класу (4.2) з $f = 1$ було побудовано за допомогою некласичних методів. Стартувавши з них, використовуючи локальні перетворення умовної еквівалентності, отримаємо неліївські точні розв'язки більш складних рівнянь (випадки 6b, 6c, ...).

Так, Н.К. Амеров [2] і Дж.Р. Кінг [94] запропонували шукати розв'язки рівняння $u_t = (u^{-1/2}u_x)_x$ (4.3.6a, $\mu = -1/2$) у вигляді $u = (\varphi^1(x)t + \varphi^0(x))^2$, де функції $\varphi^1(x)$ і $\varphi^0(x)$ задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь $\varphi^1_{xx} = (\varphi^1)^2$, $\varphi^0_{xx} = \varphi^0\varphi^1$. Частинним розв'язком цієї системи є

$$\varphi^1 = \frac{6}{x^2},\ \varphi^0 = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}.$$

Відповідний розв'язок рівняння 4.3.6f з $\mu = -1/2$ може бути записаний у вигляді

$$u = (6t + c_1' + c_2e^{-x})^2(e^{-x}+\gamma)^6.$$

4.5. Висновки до розділу 4

У розділі 4 проведено вичерпну групову класифікацію класу рівнянь конвекції–дифузії вигляду (4.2). Основні результати класифікації наведено у табл. 4.1–4.3, в яких перераховано нееквівалентні випадки розширень з відповідними алгебрами Лі інваріантності. Серед представлених рівнянь є рівняння з густиною f, локалізованою у просторі змінної x, які інваріантні відносно більш широкої ніж A^{ker} алгебри Лі. Після таблиць виписано всі додаткові перетворення еквівалентності, що зводять рівняння з класифікації до більш простого вигляду. (Фактично, рівняння з (4.2) прокласифіковано з точністю до двох різних відношень еквівалентності, що генеруються групою еквівалентності та множиною всіх можливих перетворень.) Для деяких підкласів редукованих рівнянь побудовано оптимальну систему нееквівалентних підалгебр, відповідні ліївські анзаци та точні інваріантні розв'язки. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності отримані розв'язки переведено у розв'язки більш цікавих та складних рівнянь з локалізованою густиною.

Основні результати розділу 4 опубліковано в роботах [14, 119].

РОЗДІЛ 5

Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом

Даний розділ присвячено розв'язанню задач групової класифікації у класі $(1+1)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера вигляду

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^\gamma \psi + V\psi = 0 \tag{5.1}$$

та $(1+n)$-вимірних рівнянь

$$i\,\psi_t + \Delta\psi + k|x|^2\psi - f\left(|\psi|\right)\psi = 0, \tag{5.2}$$

де $V = V(t,x)$, $f = f(|\psi|)$ — довільні гладкі комплекснозначні функції своїх аргументів, $\gamma \neq 0$ і k — дійсні сталі.

Для класифікації рівнянь (5.1) поєднано класичний підхід Лі, дослідження алгебри, що генерується всіма можливими операторами симетрії рівнянь з класу (5.1) (приєднані зображення, нееквівалентні одновимірні підалгебри, тощо) та дослідження на сумісність класифікуючих рівнянь. Фактично, для класу рівнянь (5.1) розв'язується три суттєво різні задачі класифікації: класифікація потенціалів, що залежать тільки від t (підрозділ 5.2.), класифікація стаціонарних потенціалів (підрозділ 5.3.) та класифікація у загальному випадку (підрозділ 5.1.). В підрозділі 5.4. проведено групову класифікацію узагальненого нелінійного рівняння Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора (5.2). У підрозділі 5.5. знайдено достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку та розв'язку із загостренням задачі Коші для деяких класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом.

Основні результати розділу 5 опубліковано в роботах [85, 122, 123].

5.1. Групова класифікація $(1+1)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з довільним потенціалом та степеневою нелінійністю

Розглянемо оператор $Q = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$ з максимальної алгебри Лі інваріантності $A^{\max}(\gamma, V)$ рівняння (5.1) із степенем γ і потенціалом V. Тут ξ^t, ξ^x та η — гладкі функції змінних t, x, ψ та ψ^*. З інфінітезімальної умови інваріантності [22, 23] отримаємо перевизначену систему лінійних диференціальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$
\begin{aligned}
&\xi^t_\psi = \xi^t_{\psi^*} = \xi^t_x = 0,\ \xi^x_\psi = \xi^x_{\psi^*} = 0,\ \xi^t_t = 2\xi^x_x,\ \eta_{\psi^*} = \eta_{\psi\psi} = 0,\\
&\psi\eta_\psi = \eta, 2\eta_{\psi x} = i\xi^x_t,\ \gamma(\eta_\psi + \eta^*_\psi) = -2\xi^t_t,\\
&i\eta_{\psi t} + \eta_{\psi xx} + \xi^t V_t + \xi^x V_x + \xi^t_t V = 0.
\end{aligned}
$$

Проаналізувавши ці рівняння та розв'язавши перші з них, маємо твердження

Теорема 5.1. *Будь-який оператор Q з $A^{\max}(\gamma, V)$ рівняння (5.1) з довільним потенціалом V належить до лінійної оболонки операторів вигляду*

$$
\begin{aligned}
&\lambda M,\ D(\xi) = \xi\partial_t + \frac{1}{2}\,\xi_t x\partial_x + \frac{1}{8}\,\xi_{tt}x^2 M - \frac{1}{\gamma}\,\xi_t I,\\
&G(\chi) = \chi\partial_x + \frac{1}{2}\chi_t x M.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Тут $\chi = \chi(t)$, $\xi = \xi(t)$ та $\lambda = \lambda(t)$ — довільні гладкі функції змінної t, $M = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$, $I = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}$. Більш того, коефіцієнти оператора $Q = D(\xi) + G(\chi) + \lambda M \in A^{\max}(\gamma, V)$ повинні задовольняти класифікуючу умову

$$
\xi V_t + \left(\frac{1}{2}\xi_t x + \chi\right) V_x + \xi_t V = \frac{1}{8}\,\xi_{ttt}x^2 + \frac{1}{2}\chi_{tt}x + \lambda_t + i\frac{\widehat{\gamma}}{4}\,\xi_{tt}. \tag{5.4}
$$

Тут і надалі $\widehat{\gamma} = \gamma^{-1}(4-\gamma)$.

Після розщеплення рівняння (5.4) за довільними елементами та їх незв'язаними похідними отримаємо визначальні рівняння для коефіцієнтів операторів з A^{ker} рівнянь класу (5.1). Проінтегрувавши їх, маємо наступну теорему.

Теорема 5.2. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь з класу* (5.1) *є* $A^{\mathrm{ker}} = \langle M \rangle$.

Зауваження 5.1. Іноді (наприклад, для редукції або побудови точних розв'язків) зручно використовувати амплітуду ρ та фазу φ замість хвильової функції $\psi = \rho e^{i\varphi}$. Тоді рівняння (5.1) можна переписати у вигляді системи на дві дійсні функції ρ і φ:

$$\rho_t + 2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + \rho\,\mathrm{Im}\,V = 0,\ -\rho\varphi_t - \rho(\varphi_x)^2 + \rho_{xx} + \rho^{\gamma+1} + \rho\,\mathrm{Re}\,V = 0.$$

Оператори (5.3) мають ту ж саму форму з $M = \partial_\varphi$, $I = \rho\partial_\rho$.

Для побудови перетворень еквівалентності у класі рівнянь (5.1) використано як інфінітезімальний, так і прямий метод. У рамках інфінітезімального методу розглядаємо диференціальні оператори першого порядку найбільш загального вигляду у просторі змінних t, x, ψ, ψ^*, V, V^* і γ, тобто

$$Q = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*} + \theta\partial_V + \theta^*\partial_{V^*} + \Gamma\partial_\gamma,$$

де ξ^t, ξ^x, η, θ і Γ є функціями всіх вказаних змінних, та вважаємо, що Q є оператором симетрії для системи

$$\begin{aligned} &i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^\gamma\psi + V\psi = 0,\\ &\gamma_t = \gamma_x = \gamma_\psi = \gamma_{\psi^*} = 0,\ V_\psi = V_{\psi^*} = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

(У процедурі продовження для перетворень еквівалентності вважаємо ψ функцією змінних t і x, V та γ — функціями t, x, ψ і ψ^*.)

Теорема 5.3. *Алгебра Лі* A^{equiv} *групи еквівалентності* G^{equiv} *класу* (5.1) *генерується операторами*

$$D'(\xi) = D(\xi) + \frac{1}{8}\xi_{ttt}x^2(\partial_V + \partial_{V^*}) + \frac{i}{\gamma}\xi_{tt}(\partial_V - \partial_{V^*}) - \xi_t(V\partial_V + V^*\partial_{V^*}),$$

$$G'(\chi) = G(\chi) + \frac{1}{2}\chi_{tt}x(\partial_V + \partial_{V^*}),\ M'(\lambda) = \lambda M + \lambda_t(\partial_V + \partial_{V^*}).$$

У рамках прямого методу шукаємо всі локальні перетворення у просторі змінних t, x, ψ, ψ^*, V, V^* і γ, які зберігають вигляд системи (5.5).

Теорема 5.4. *[123] Група еквівалентності $G^{\rm equiv}$ класу* (5.1) *генерується сім'єю неперервних перетворень*

$$
\begin{aligned}
&\tilde t = T,\ \tilde x = x\sqrt{T_t} + X,\ \tilde\gamma = \gamma,\\
&\tilde\psi = \psi\frac{1}{(T_t)^{1/\gamma}}\exp\left(\frac{i}{8}\frac{T_{tt}}{T_t}x^2 + \frac{i}{2}\frac{X_t}{\sqrt{T_t}}x + i\Psi\right),\\
&\tilde V = \frac{1}{T_t}\left(V + \frac{1}{8}\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)_t x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{X_t}{\sqrt{T_t}}\right)_t x + i\frac{\widehat\gamma}{4}\frac{T_{tt}}{T_t} -\right.\\
&\left. - \left(\frac{1}{4}\frac{T_{tt}}{T_t}x + \frac{1}{2}\frac{X_t}{\sqrt{T_t}}\right)^2 + \Psi_t\right)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

і двома дискретними перетвореннями: просторовим віддзеркаленням I_x ($\tilde t = t$, $\tilde x = -x$, $\tilde\psi = \psi$, $\tilde\gamma = \gamma$, $\tilde V = V$) та часовим віддзеркаленням Вігнера I_t ($\tilde t = -t$, $\tilde x = x$, $\tilde\psi = \psi^*$, $\tilde\gamma = \gamma$, $\tilde V = V^*$). Тут T, X і Ψ — довільні гладкі функції змінної t, $T_t > 0$.

Також має місце більш сильне, ніж теорема 5.4, твердження.

Теорема 5.5. *[123] Якщо два рівняння з класу* (5.1) *із значеннями параметрів (γ, V) і $(\tilde\gamma, \tilde V)$ перетворюються одне в інше за допомогою локальних перетворень, тоді $\tilde\gamma = \gamma$. Більш того, оскільки $\gamma \neq 0$, будь-яке локальне перетворення між рівняннями з класу* (5.1) *належить до $G^{\rm equiv}$.*

Зауваження 5.2. З теорем 5.4 і 5.5 випливає, що не існує перетворень еквівалентності і, взагалі, локальних перетворень, які б змінювали γ. Отже, у подальших міркуваннях можна вважати, що γ *фіксовано* і виключати γ з позначень максимальних алгебр Лі інваріантності рівнянь вигляду (5.1).

Зауваження 5.3. Лінійною оболонкою операторів вигляду (5.3) (γ — фіксована стала!) є (нескінченновимірна) алгебра Лі $A^\cup$ відносно звичайної дужки Лі векторних полів. Оскільки для будь-якого $Q \in A^\cup$ з

$(\xi^t,\xi^x)\neq(0,0)$ можна знайти V, що задовольняє умову (5.4), то $A^\cup = \langle \bigcup_V A^{\max}(V)\,\rangle$. Ненульовими комутаційними співвідношеннями між базисними елементами алгебри $A^\cup$ є:

$$[D(\xi^1),D(\xi^2)]=D(\xi^1\xi^2_t-\xi^2\xi^1_t),\ [D(\xi),G(\chi)]=G\left(\xi\chi_t-\frac{1}{2}\xi_t\chi\right),$$
$$[D(\xi),\lambda M]=\xi\lambda_t M,\ [G(\chi^1),G(\chi^2)]=\frac{1}{2}(\chi^1\chi^2_t-\chi^2\chi^1_t)M.$$

Позначення $\mathrm{Aut}(A^\cup)$ використовується для групи автоморфізмів, що діє на $A^\cup$, яка генерується всіма однопараметричними групами, що відповідають приєднаним зображенням операторів з $A^\cup$ в $A^\cup$, і двома дискретними перетвореннями $\mathrm{Ad}\,I_x$ та $\mathrm{Ad}\,I_t$. Дія операторів $\mathrm{Ad}\,I_x$ та $\mathrm{Ad}\,I_t$ на базисні елементи алгебри $A^\cup$ визначається формулами $\mathrm{Ad}\,I_x\ G(\chi)=G(-\chi)$ (інші оператори не перетворюються) та $\mathrm{Ad}\,I_t\ D(\xi)=D(\tilde\xi)$, $\mathrm{Ad}\,I_t\ G(\chi)=G(\tilde\chi)$, $\mathrm{Ad}\,I_t\ \lambda M=\tilde\lambda M$, де $\tilde\xi(t)=-\xi(-t)$, $\tilde\chi(t)=\chi(-t)$ та $\tilde\lambda(t)=-\lambda(-t)$.

Наслідок 5.1. $A^{\rm equiv}\simeq A^\cup$, $G^{\rm equiv}\simeq \mathrm{Aut}(A^\cup)$, причому ізоморфізм визначається за допомогою продовження операторів алгебри $A^\cup$ на простір (V,V^*).

Наслідок 5.2. Нехай A^1 та A^2 — максимальні алгебри Лі інваріантності рівнянь з класу (5.1) для деяких потенціалів, і $\mathcal{V}^i=\{\,V\mid A^{\max}(V)=A^i\}$, $i=1,2$. Еквівалентність $\mathcal{V}^1\sim\mathcal{V}^2 \bmod G^{\rm equiv}$ має місце тоді й лише тоді, коли $A^1\sim A^2 \bmod \mathrm{Aut}(A^\cup)$.

Лема 5.1. *Повний перелік* $\mathrm{Aut}\,A^\cup$*-нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри* $A^\cup$ *вичерпується алгебрами* $\langle\partial_t\rangle$, $\langle\partial_x\rangle$, $\langle tM\rangle$, $\langle M\rangle$.

Доведення. Розглянемо довільний оператор $Q\in A^\cup$, тобто $Q=D(\xi)+G(\chi)+\lambda M$. В залежності від значень ξ, χ і λ, він еквівалентний відносно $\mathrm{Aut}(A^\cup)$ та множення на число одному з наступних операторів: $D(1)$, якщо $\xi\neq0$; $G(1)$, якщо $\xi=0$ та $\chi\neq0$; tM якщо $\xi=\chi=0$, $\lambda_t\neq0$; M якщо $\xi=\chi=\lambda_t=0$.

Наслідок 5.3. Якщо $A^{\max}(V)\neq A^{\rm ker}$, то $V_tV_x=0 \bmod G^{\rm equiv}$.

Доведення. Оскільки $A^{\max}(V) \neq A^{\ker}$, існує оператор $Q = D(\xi) + G(\chi) + \lambda M \in A^{\max}(V)$, що не належить до $\langle M \rangle$. З умови (5.4) випливає, що $(\xi, \chi) \neq (0,0)$. Тоді, в силу леми 5.1, $\langle Q \rangle \sim \langle \partial_t \rangle$ або $\langle \partial_x \rangle \mod \operatorname{Aut} A^{\cup}$, тобто $V_t V_x = 0 \mod G^{\text{equiv}}$.

Теорема 5.6. *Повний перелік нееквівалентних випадків потенціалів V, які допускають розширення максимальної алгебри Лі інваріантності рівнянь (5.1), вичерпується потенціалами, наведеними у табл. 5.1.*

Таблиця 5.1

Результати класифікації. $W(t), \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

N	V	Базис алгебри $A^{\max}$
0	$V(t,x)$	M
1	$iW(t)$	$M,\ \partial_x,\ G(t)$
2	$\dfrac{i}{2}\dfrac{\widehat{\gamma}t+\nu}{t^2+1}$	$M,\ \partial_x,\ G(t),\ D(t^2+1)$
3	$i\nu t^{-1}$, $\nu \neq 0, \dfrac{\widehat{\gamma}}{2}$	$M,\ \partial_x,\ G(t),\ D(t)$
4	i	$M,\ \partial_x,\ G(t),\ \partial_t$
5	$0,\ \gamma \neq 4$	$M,\ \partial_x,\ G(t),\ \partial_t,\ D(t)$
	$\gamma = 4$	$M,\ \partial_x,\ G(t),\ \partial_t,\ D(t),\ D(t^2)$
6	$V(x)$	$M,\ \partial_t$
7	$(\alpha+i\beta)x^{-2},\ \gamma \neq 4$	$M,\ \partial_t,\ D(t)$
	$\gamma = 4$	$M,\ \partial_t,\ D(t),\ D(t^2)$

Зауваження 5.4. Вважаємо, що алгебри інваріантності у випадках 5.1.0, 5.1.1, 5.1.6 і аналогічних випадках з табл. 5.2 і 5.3 є максимальними, якщо ці випадки нееквівалентні відносно відповідних груп еквівалентності іншим, більш спеціалізованим, випадкам з тих самих таблиць.

Зауваження 5.5. Існує дискретне перетворення еквівалентності τ для множини потенціалів $i\nu t^{-1}$, $\nu \in \mathbb{R}$, яке має вигляд (5.6) з $T = -t^{-1}$, $X = 0$, $\Psi = 0$. Це перетворення діє на ν наступним чином: $\nu \to \widehat{\gamma}/2 - \nu$. Для того, щоб випадки, що розглядаються, були повністю нееквівалентними, необхідно вважати додатково, що $\nu \geq \widehat{\gamma}/4$ (або $\nu \leq \widehat{\gamma}/4$) у випадку 5.1.3. Оскільки $I_t \in G^{\text{equiv}}$, аналогічно можна стверджувати, що

$\nu \geq 0$ у випадку 5.1.2 і $\beta \geq 0$ у випадку 5.1.7. Більш того, τ є дискретним перетворенням симетрії для випадку 5.1.3 ($\nu = \widehat{\gamma}/4$) і, як граничний випадок неперервних перетворень, генерується оператором $D(t^2+1)$ з випадку 5.1.2.

Якщо скористатися наслідком 5.3, для доведення теореми 5.6 достатньо дослідити два випадки: $V_x = 0$ і $V_t = 0$. Фактично, нижче отримано повний результат групової класифікації для обох спеціальних випадків, і ці результати поєднано для загального класу.

5.2. Класифікація потенціалів, що не залежать від просторової змінної

Розглянемо рівняння з класу (5.1) з потенціалами, які задовольняють додаткове припущення $V_x = 0$, тобто $V = V(t)$. Наступний ланцюжок лем дає повне розв'язання задачі класифікації у даному підкласі.

Лема 5.2. $A^{\mathrm{ker}}_{V_x=0} = \langle M, G(1), G(t)\rangle$.

Лема 5.3. $A^{\mathrm{equiv}}_{V_x=0} = \langle M'(\lambda)\,\forall\lambda = \lambda(t), G'(1), G'(t), D'(1), D'(t), D'(t^2)\rangle$. $G^{\mathrm{equiv}}_{V_x=0}$ *генерується перетвореннями* I_t, I_x *та перетвореннями вигляду (5.6), де* $T = (a_1t+a_0)/(b_1t+b_0)$, $X = c_1t+c_0$, Ψ *є довільною гладкою функцією змінної* t. a_i, b_i *та* c_i *— довільні сталі, такі що* $a_1b_0 - b_1a_0 > 0$.

Лема 5.4. *Для довільного потенціалу* $V = V(t)$: $V \sim iW \bmod G^{\mathrm{equiv}}_{V_x=0}$ *де* $W = \mathrm{Im}V$, *тобто* $W = W(t) \in \mathbb{R}$.

Лема 5.5. $A^{\mathrm{ker}}_{\{iW\}} = A^{\mathrm{ker}}_{V_x=0}$.

Лема 5.6. $G^{\mathrm{equiv}}_{\{iW\}} = G^{\mathrm{equiv}}_{V_x=0}\Big|_{\Psi=\mathrm{const}}$. $A^{\mathrm{equiv}}_{\{iW\}} = \langle M,\ G'(1),\ G'(t),\ D'(1),\ D'(t),\ D'(t^2)\rangle$.

Лема 5.7. *Нехай* $A^{\cup}_{\{iW\}} = \bigcup_W A^{\max}(iW)$. *Тоді* $A^{\cup}_{\{iW\}} = A^{\mathrm{ker}}_{\{iW\}} \ni\!\!\!\!+ S$ *де* $S = \langle D(1),\ D(t),\ D(t^2)\rangle$. $A^{\cup}_{\{iW\}} \simeq A^{\mathrm{equiv}}_{\{iW\}} = \mathrm{pr}_{(V,V^*)}\,A^{\cup}_{\{iW\}}$.

Лема 5.8. *$S \simeq sl(2,\mathbb{R})$. Повний перелік $A^{\cup}_{\{iW\}}$-нееквівалентних власних підалгебр алгебри S вичерпується алгебрами $\langle D(1)\rangle$, $\langle D(t)\rangle$, $\langle D(t^2+1)\rangle$, $\langle D(1),\ D(t)\rangle$.*

Лема 5.9. *Нехай A^1 і A^2 — максимальні алгебри Лі інваріантності рівнянь з класу (5.1) для деяких потенціалів з $\{iW(t)\}$, та множина $\mathcal{W}^i = \{\,W(t)\,|\,A^{\max}(iW) = A^i\}$, $i = 1,2$. Еквівалентність $\mathcal{W}^1 \sim \mathcal{W}^2 \bmod G^{\rm equiv}_{\{iW\}}$ має місце тоді й лише тоді, коли виконується умова $A^1 \bigcap S \sim A^2 \bigcap S \bmod \mathrm{Aut}(S)$.*

Лема 5.10. *Якщо $A^{\max}_{\{iW\}} \neq A^{\ker}_{V_x=0}$, потенціал $iW(t)$ є $G^{\rm equiv}_{\{iW\}}$-еквівалентним одному з випадків 5.1.2–5.1.5.*

Зауваження 5.6. Якщо $\gamma \neq 4$ або $W \neq \mathrm{const}$, $A^{\max}(iW) \not\supset S$ (інакше, з умови (5.4) отримаємо несумісну систему на W). Якщо $W = \mathrm{const}$, $W \in \{0,1\} \bmod G^{\rm equiv}_{\{iW\}}$ (випадки 5.1.5 та 5.1.4 відповідно). Випадки 5.1.2ν та 5.1.2$\tilde\nu$ (5.1.3ν та 5.1.3$\tilde\nu$ з $\nu,\tilde\nu \geq \hat\gamma/4$) є $G^{\rm equiv}$-нееквівалентними, якщо $\nu \neq \tilde\nu$. Оскільки $D(t^2+1)$ не може включатися у жодну з двовимірних підалгебр алгебри S, розширити $A^{\max}$ у випадку 5.1.2 неможливо. Існує дві можливості розширення $A^{\max}(i\nu t^{-1})$, а саме, з $D(1)$ (для $\nu = 0$, випадок 5.1.5) або $D(t^2)$ (для $\nu = (4-\gamma)/(2\gamma)$ що еквівалентне випадку 5.1.5 відносно $G^{\rm equiv}_{\{iW\}}$) Отже, для $\nu = 0$, $\gamma = 4$ розмірність алгебри $A^{\max}$ — максимальна.

5.3. Класифікація стаціонарних потенціалів

Розглянемо клас (5.1) при додатковому припущенні $V_t = 0$, тобто клас рівнянь вигляду (5.1) з потенціалами $V = V(x)$.

Вичерпний результат класифікації цього підкласу наведено у наступному ланцюжку лем.

Лема 5.11. $A^{\ker}_{V_t=0} = \langle M, D(1)\rangle$.

Лема 5.12. $A^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0} = \langle M'(1), M'(t), G'(1), D'(1), D'(t)\rangle$. *$G^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0}$ генерується перетвореннями I_t, I_x та перетвореннями вигляду (5.6), де $T_{tt} = X_t = \Psi_{tt} = 0$.*

Лема 5.13. *Якщо $A^{\max}(V) \neq A^{\ker}_{V_t=0}$, потенціал $V(x)$ є $G^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0}$-еквівалентним одному з випадків, наведених у табл. 5.2 якщо $\gamma \neq 4$ або табл. 5.3 якщо $\gamma = 4$. (Оскільки $I_t \in G^{\mathrm{equiv}}$, можна вважати, що $\nu \geq 0$ у випадках 5.2.5, 5.2.6, 5.3.5–5.3.7, $\nu > 0$ у випадку 5.2.4 і $\beta \geq 0$ у випадках 5.2.1, 5.3.1–5.3.3.)*

Таблиця 5.2

Класифікація підкласу $V = V(x)$ для $\gamma \neq 4$.
$\nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

N	N_1	V	Базис алгебри $A^{\max}$
0	6	$V(x)$	$M,\ \partial_t$
1	7	$(\alpha + i\beta)x^{-2}$	$M,\ \partial_t,\ D(t)$
2	7	$x^2 + i\widehat{\gamma} + (\alpha + i\beta)x^{-2}$	$M,\ \partial_t,\ D(e^{4t})$
3	4	i	$M,\ \partial_t,\ \partial_x,\ G(t)$
4	4	$x + i\nu,\ \nu \neq 0$	$M,\ \partial_t,\ \partial_x + tM,\ G(2t) + t^2M$
5	2	$-x^2 + i\nu$	$M,\ \partial_t,\ G(\sin 2t),\ G(\cos 2t)$
6	3	$x^2 + i\nu,\ \nu \neq \pm\widehat{\gamma}$	$M,\ \partial_t,\ G(e^{2t}),\ G(e^{-2t})$
7	5	0	$M,\ \partial_t,\ \partial_x,\ G(t),\ D(t)$
8	5	x	$M,\ \partial_t,\ \partial_x + tM,\ G(2t) + t^2M,\ D(2t) + G(3t^2) + t^3M$
9	5	$x^2 + i\widehat{\gamma}$	$M,\ \partial_t,\ G(e^{2t}),\ G(e^{-2t}),\ D(e^{4t})$

Доведення. Нехай $V = V(x)$ і $A^{\max}(V) \neq A^{\ker}_{V_t=0}$. Розглянемо довільний оператор $Q = D(\xi) + G(\chi) + \lambda M \in A^{\max}(V)$. У припущенні леми, з умови (5.4) випливає набір рівнянь на V загального вигляду

$$(ax + b)V_x + 2aV = c_2x^2 + c_1x + \tilde{c}_0 + ic_0, \text{ де } a, b, c_2, c_1, \tilde{c}_0, c_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

Загальна кількість k таких рівнянь з лінійно незалежними наборами коефіцієнтів може дорівнювати 1 або 2. (Значення $k = 0$ відповідає загальному випадку $V_t = 0$ без розширення $A^{\max}$.)

Таблиця 5.3

Класифікація підкласу $V = V(x)$ для $\gamma = 4$.
$\nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

N	N_1	V	Базис алгебри $A^{\max}$
0	6	$V(x)$	$M,\ \partial_t$
1	7	$(\alpha + i\beta)x^{-2}$	$M,\ \partial_t,\ D(t),\ D(t^2)$
2	7	$x^2 + (\alpha + i\beta)x^{-2}$	$M,\ \partial_t,\ D(e^{4t}),\ D(e^{-4t})$
3	7	$-x^2 + (\alpha + i\beta)x^{-2}$	$M,\ \partial_t,\ D(\cos 4t),\ D(\sin 4t)$
4	4	i	$M,\ \partial_t,\ \partial_x,\ G(t)$
5	4	$x + i\nu$	$M,\ \partial_t,\ \partial_x + tM,\ G(2t) + t^2M$
6	2	$-x^2 + i\nu$	$M,\ \partial_t,\ G(\sin 2t),\ G(\cos 2t)$
7	3	$x^2 + i\nu$	$M,\ \partial_t,\ G(e^{2t}),\ G(e^{-2t})$
8	5	0	$M,\ \partial_t,\ \partial_x,\ G(t),\ D(t),\ D(t^2)$
9	5	x	$M,\ \partial_t,\ \partial_x + tM,\ G(2t) + t^2M,$
			$D(2t) + G(3t^2) + t^3M,\ D(4t^2) + G(4t^3) + t^4M$
10	5	x^2	$M,\ \partial_t,\ G(e^{2t}),\ G(e^{-2t}),\ D(e^{4t}),\ D(e^{-4t})$
11	5	$-x^2$	$M,\ \partial_t,\ G(\cos 2t),\ G(\sin 2t),\ D(\cos 4t),\ D(\sin 4t)$

Для $k = 1$ $(a, b) \neq (0, 0)$, та існують дві можливості: $a = 0$ і $a \neq 0$. Якщо $a = 0$, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $b = 1$. Тоді з умови (5.4) випливає, що $\xi_t = 0$, $c_2 = c_0 = 0$, тобто $V_x = c_1x + \tilde{c}_0$. Тоді $k = 2$, що неможливо.

Отже, $a \neq 0$ і можна вважати, що $a = 1$. $\tilde{c}_0, b = 0 \bmod G^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0}$. З умови (5.4) випливає, що $\chi = 0$ (тоді $c_1 = 0$), $\lambda_t = 0$, $\widehat{\gamma}\xi_{tt} = 2c_0\xi_t$ і $\widehat{\gamma}c_2 = c_0^2$. Для $\gamma = 4$ $c_0 = 0$ і $c_2 \in \{-4, 0, 4\} \bmod G^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0}$, ці можливості для значень c_2 дають випадки 5.3.1–5.3.3. Якщо $\gamma \neq 4$, отримаємо випадки 5.2.1 ($c_0 = 0$) та 5.2.2 ($c_0 \neq 0$).

З умови $k = 2$ випливає, що $V = d_2x^2 + d_1x + \tilde{d}_0 + id_0$. $\tilde{d}_0 = 0 \bmod G^{\mathrm{equiv}}_{V_t=0}$. Розглянувши різні можливості значень сталих d_2, d_1 і d_0 та прийнявши до уваги значення γ ($\gamma \neq 4$ або $\gamma = 4$), отримаємо класифікаційні випадки:

$$d_2 = d_1 = d_0 = 0 \ \rightarrow\ 2.7, 3.8; \qquad d_2 = d_1 = 0,\ d_0 \neq 0 \ \rightarrow\ 2.3, 3.4;$$

$$d_2 = d_0 = 0,\ d_1 \neq 0 \ \rightarrow\ 2.8, 3.9; \qquad d_2 = 0,\ d_0, d_1 \neq 0 \ \rightarrow\ 2.4, 3.5;$$

$$d_2 < 0,\ (d_0, \widehat{\gamma}) \neq (0,0)\ \to\ 2.5, 3.6; \qquad d_2 < 0,\ d_0 = \widehat{\gamma} = 0\ \to\ 3.11;$$

$$d_2 > 0,\ \widehat{\gamma}^2 d_2 \neq d_0^2\ \to\ 2.6, 3.7; \qquad d_2 > 0,\ \widehat{\gamma}^2 d_2 = d_0^2\ \to\ 2.9, 3.10.$$

Зауваження 5.7. Для доведення теореми 5.6 достатньо розглянути лише випадок $k = 1$, $a \neq 0$ леми 5.13, оскільки інші випадки розширення $A^{\max}(V)$ з $V = V(x)$ допускають оператор вигляду $G(\chi) + \lambda M$ ($\chi \neq 0$), а отже, (за наслідком 5.2), є еквівалентними випадкам 5.1.1–5.1.5.

Зауваження 5.8. Номер N_1 у кожному з рядків у табл. 5.2 та 5.3 співпадає з номером того ж самого або еквівалентного випадку табл. 5.1. Відповідні перетворення еквівалентності мають вигляд (5.6), де функції T, X та Ψ — наступні:

$$5.2.2,\ 5.3.2 \to 5.1.7,\ 5.2.6,\ 5.3.7 \to 5.1.3\left(\tilde{\nu} = \frac{\widehat{\gamma} - \nu}{4}\right),$$

$$5.2.9,\ 5.3.10 \to 5.1.5:\quad T = -e^{-4t},\ X = \Psi = 0;$$

$$5.3.3 \to 5.1.7, \quad 5.2.5,\ 5.3.6 \to 5.1.2(\tilde{\nu} = \nu),$$

$$5.3.11 \to 5.1.5:\quad T = \tan 2t,\ X = \Psi = 0;$$

$$5.2.4,\ 5.3.5 \to 5.1.4:\quad T = |\nu| t,\ X = -\sqrt{|\nu|}\, t^2,\ \Psi = \frac{t^3}{3};$$

$$5.2.8,\ 5.3.9 \to 5.1.5:\quad T = t,\ X = -t^2,\ \Psi = \frac{t^3}{3}.$$

Зауваження 5.8 завершує доведення теореми 5.6.

5.4. Групова класифікація $(1+n)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора та довільною нелінійністю

Використовуючи перетворення еквівалентності

$$t \to |k|^{1/2} t,\ x \to |k|^{1/4} x,\ \psi \to \psi,\ f \to |k|^{-1/2} f,\ k \to \operatorname{sign} k$$

рівняння вигляду (5.2) з $k \neq 0$ зводиться до вигляду

$$i\,\psi_t + \Delta\psi + \varepsilon|x|^2\psi - f\,(|\psi|)\,\psi = 0 \tag{5.7}$$

($\varepsilon = 0, \pm 1$). Тому, не втрачаючи загальності, надалі розглядаємо групову класифікацію рівнянь вигляду (5.7).

Теорема 5.7. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь з класу* (5.7) *є алгебра*

$$A^{\rm ker} = \langle \partial_t,\ J_{ab},\ M\rangle.$$

При фіксованому ε алгеброю інваріантності є

1. $A^{\rm ker}_0 = \langle \partial_t,\ \partial_a,\ J_{ab},\ G_a(t),\ M\rangle$ *у випадку* $\varepsilon = 0$;
2. $A^{\rm ker}_+ = \langle M,\ \partial_t,\ J_{ab},\ G_a(e^{2t}),\ G_a(e^{-2t})\rangle$ *у випадку* $\varepsilon = 1$;
3. $A^{\rm ker}_- = \langle M,\ \partial_t,\ J_{ab},\ G_a(\sin 2t), G_a(\cos 2t)\rangle$ *у випадку* $\varepsilon = -1$.

Тут і надалі $M = i\,(\psi\,\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$, $J_{ab} = x^b\partial_a - x^a\partial_b$, $G_a(\chi) = t\partial_a - \frac{1}{2}\chi_t x^a\,M$ *(де* $\chi = \chi(t)$*).*

Група еквівалентності рівняння (5.7) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$i\,\psi_t + \Delta\psi + \varepsilon|x|^2\psi - f\,(|\psi|)\,\psi = 0,\ f_t = f_x = f_\varphi = 0, \tag{5.8}$$

де φ — амплітуда функції ψ. З інфінітезімального критерію інваріантності отримаємо, що алгебра Лі групи еквівалентності $G^{\rm equiv}$ рівняння (5.7) породжується операторами

$$\partial_t,\ J_{ab},\ I,\ M,\ tM - \partial_f,\ \psi\partial_\psi,$$

де $I = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial\psi^*$. Отже, перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на f, мають вигляд

$$\tilde t = t,\ \tilde x = x,\ \tilde\psi = \beta e^{i\alpha t}\psi,\ \tilde f = f - \alpha,\ \tilde\varepsilon = \varepsilon \tag{5.9}$$

Тут $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Надалі класифікація розширень алгебри інваріантності проводиться з точністю до перетворень (5.9).

Теорема 5.8. *Всі можливі нееквівалентні випадки розширення алгебри інваріантності рівнянь вигляду* (5.7) *вичерпуються наступними (наводимо лише оператори з розширення алгебр $A_0^{\ker}$, $A_-^{\ker}$, $A_+^{\ker}$ для випадків $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = 1$ відповідно)*

1. $f = (\delta_1 + i\delta_2)|\psi|^\gamma$, $\varepsilon = 0$: $\quad D(t) + (\frac{n}{4} - \frac{1}{2\gamma})I$;
2. $f = (\delta_1 + i\delta_2)|\psi|^{4/n}$, $\varepsilon = 0$: $\quad D(t)$, $D(t^2)$;
3. $f = (\delta_1 + i\delta_2)|\psi|^{4/n}$, $\varepsilon = 1$: $\quad D(e^{4t})$, $D(e^{-4t})$;
4. $f = (\delta_1 + i\delta_2)|\psi|^{4/n}$, $\varepsilon = -1$: $\quad D(\sin 4t)$, $D(\cos 4t)$;
5. $f = \delta_1 \ln|\psi|$, $\delta_1 \neq 0$: $\quad I + \delta_1 tM$;
6. $f = (\delta_1 + i\delta_2)\ln|\psi|$, $\delta_2 \neq 0$: $\quad e^{\delta_1 t}(\delta_1 I + \delta_2 M)$;
7. $f = 0$, $\varepsilon = 0$: $\quad I$, $D(t)$, $D(t^2)$, $\eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$;
8. $f = 0$, $\varepsilon = 1$: $\quad I$, $D(e^{4t})$, $D(e^{-4t})$, $\eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$;
9. $f = 0$, $\varepsilon = -1$: $\quad I$, $D(\sin 4t)$, $D(\cos 4t)$, $\eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$.

Тут $D(\xi) = \xi\partial_t + \frac{1}{2}\xi_t x^a\partial_a + \frac{1}{8}\xi_{tt}|x|^2 M - \frac{1}{4}\xi_t I$, $\{\delta_1, \delta_2, \gamma\} \subset \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0, 4/n$, $\eta = \eta(t, x)$ *– довільний розв'язок вихідного рівняння.*

У випадку 1 потенціали $V = \varepsilon|x^2| \neq 0$ зводяться до потенціалів, що не залежать від просторової змінної. Явний вигляд локальних перетворень наведено нижче:

$$\tilde{t} = -e^{-4t},\ \tilde{x} = xe^{-2t},\ \tilde{\psi} = \psi e^{\frac{4t}{\gamma} - \frac{i}{2}x^2}, \tag{5.10}$$

$$\tilde{V} = -\frac{i}{\tilde{t}}\left(n - \frac{4}{\gamma}\right) \text{ якщо } \varepsilon = 1, \tag{5.11}$$

$$\tilde{t} = \tan 2t,\ \tilde{x} = \frac{\sqrt{2}x}{|\cos 2t|},\ \tilde{\psi} = \psi(2\cos^2 2t)^{1/\gamma} e^{\frac{i}{2}x^2 \tan 2t},$$

$$\tilde{V} = \left(\frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma}\right)\frac{i\tilde{t}}{1 + \tilde{t}^2} \text{ якщо } \varepsilon = -1. \tag{5.12}$$

Ці ж самі перетворення з $\gamma = 4/n$ зводять потенціали у випадках 3, 8 (перетворення (5.11)) та у випадках 4, 9 (перетворення (5.12)) до вигляду $\tilde{V} = 0$.

Зауваження 5.9. Доведення результатів класифікації еквівалентне доведенню теореми 4.3.

5.5. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші

Розглянемо задачу Коші для нелінійного рівняння Шрьодінгера вигляду

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^\gamma\psi + V(t,x)\psi = 0, \tag{5.13}$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x) \tag{5.14}$$

у просторі Соболева $\mathcal{W}^1$ з початковою функцією $\psi_0 \in \mathcal{W}^1$.

Відомо (див., наприклад [125] та посилання у цій роботі), що для $V(t,x) = 0$ питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші (5.13)–(5.14) тісно пов'язане з так званими "основними станами" солітоноподібних розв'язків рівняння (5.13). Розглянемо це поняття більш докладно.

Нелінійне рівняння Шрьодінгера з нульовим потенціалом має солітоноподібні розв'язки вигляду

$$\psi(t,x) = \Phi(x,\lambda)e^{i\lambda t},$$

де дійсна функція Φ є розв'язком рівняння

$$\Delta\Phi - \lambda\Phi + |\Phi|^\gamma\Phi = 0 \tag{5.15}$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Розв'язком "основного стану" [125] називатимемо додатній, радіально симетричний розв'язок $R_0(r)$ рівняння (5.15), який монотонно спадає при зростанні $r = |x|$. Можна показати, що основний стан має найменшу L^2-норму $||\Phi||_2 = (\int |\Phi(x)|^2 dx)^{1/2}$ серед усіх солітоноподібних розв'язків рівняння (5.13) з нульовим потенціалом.

Теорема 5.9. *[125,137] Задача Коші* (5.13)–(5.14) *для рівняння Шрьодінгера з нульовим потенціалом для різних значень степеня γ має єдиний*

- *глобальний розв'язок у докритичному випадку $\gamma < 4/n$ для довільної початкової умови, якщо $||\psi_0||_2 < \infty$;*
- *глобальний розв'язок у критичному випадку $\gamma = 4/n$, якщо $||\psi_0||_2 < ||R_0||_2$;*

- *розв'язок із загостренням у критичному випадку* $\gamma = 4/n$, *якщо* $||\psi_0||_2 < ||R_0||_2$;

- *розв'язок із загостренням у суперкритичному випадку* $\gamma > 4/n$, *якщо* $||\psi_0||_2 < \infty$.

Зуважимо, що у до- та суперкритичному випадках глобальність існування розв'язку задачі Коші не залежить від вибору початкової функції.

Оскільки перетворення еквівалентності, які зводять рівняння з потенціалом $V = a|x|^2 + b^i x_i + c$ $(a, b^i, c = \mathrm{const})$ (зауваження 5.8, $\hat{\gamma} = n\gamma^{-1}(4-\gamma)$) до рівняння з нульовим потенціалом, не змінюють L^2-норму розв'язків відповідних рівнянь, має місце наступна

Теорема 5.10. *Задача Коші* (5.13)–(5.14) *для рівняння Шрьодінгера з потенціалом* $V = a|x|^2 + b^i x_i + c$ $(a, b^i, c = \mathrm{const})$ *для різних значень степеня* γ *має єдиний*

- *глобальний розв'язок у докритичному випадку* $\gamma < 4/n$ *для довільної початкової умови, якщо* $||\psi_0||_2 < \infty$;

- *глобальний розв'язок у критичному випадку* $\gamma = 4/n$, *якщо* $||\psi_0||_2 < ||R_0||_2^2$;

- *розв'язок із загостренням у критичному випадку* $\gamma = 4/n$, *якщо* $||\psi_0||_2 < ||R_0||_2^2$;

- *розв'язок із загостренням у суперкритичному випадку* $\gamma > 4/n$, *якщо* $||\psi_0||_2 < \infty$.

Розглянемо більш докладно випадок критичної нелінійності. Відомо, що якщо $\psi_0 \in \mathcal{W}^1$, існує розв'язок задачі Коші (5.13)–(5.14) для рівняння з нульовим потенціалом неперервний у деякому (можливо, маленькому) інтервалі часу (див., наприклад [49]).

Твердження 5.1. *[48, 49] Для довільного* $\psi_0 \in \mathcal{W}^1$ *існують такі сталі* $t_*(\psi_0)$, $t^*(\psi_0) > 0$, *що існує єдиний розв'язок* $v \in C((-t_*(\psi_0), t^*(\psi_0)), \mathcal{W}^1)$

задачі Коші (5.13)–(5.14). *При* $t \in (-t_*(\psi_0), t^*(\psi_0))$ *мають місце три закони збереження:*

- *Збереження маси:* $||v(t)||_2 = ||\psi_0||_2$.
- *Збереження енергії:*

$$E_1(t) = \frac{1}{2}||\nabla_x v(t)||_2^2 - \frac{1}{1+2/n}||v(t)||_{2+4/n}^{2+4/n} \equiv E_1(0).$$

- *Псевдо-конформний закон збереження:*

$$E_2(t) = \frac{1}{2}||(x+it\nabla_x)v(t)||_2^2 - \frac{t^2}{1+2/n}||v(t)||_{2+4/n}^{2+4/n} \equiv E_2(0).$$

Розв'язок v *буде глобальним (тобто,* $t^*(\psi_0) = t_*(\psi_0) = \infty$*) тоді й лише тоді, коли* $||\psi_0||_2 < ||R_0||_2^2$.

Використовуючи перетворення між рівняннями з потенціалами $V = 0$ та $V = a|x|^2 + b^i x_i + c$ ($a, b^i, c = \mathrm{const}$), можна довести наступну теорему.

Теорема 5.11. *Твердження 5.1 справедливе для рівняння Шрьодінгера з довільним квадратичним потенціалом* $V = a|x|^2 + b^i x_i + c$.

5.6. Висновки до розділу 5

У розділі 5 розв'язано задачі групової класифікації у класах нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом вигляду (5.1) та (5.7).

Фактично, для класу рівнянь (5.1) розв'язується три суттєво різні задачі класифікації: класифікація потенціалів, що залежать тільки від t (підрозділ 5.2), класифікація стаціонарних потенціалів (підрозділ 5.3) та класифікація у загальному випадку (підрозділ 5.1). У підрозділі 5.1 також доведено, що сталу γ можна вважати *фіксованою*. Крім того, існує спеціальна стала $\widehat{\gamma}$, залежна від степеня γ ($\widehat{\gamma} = \gamma^{-1}(4-\gamma)$), що виникає на початку процедури класифікації, коли будується класифікаційна умова (5.4), та явно з'являється у кінцевому результаті класифікації.

Значення $\gamma = 4$ (або $\widehat{\gamma} = 0$) є спеціальним для групової класифікації у класі (5.1).

Запропонований метод класифікації дозволяє сформулювати необхідні і достатні умови взаємної еквівалентності для випадків розширення максимальної алгебри інваріантності в алгебраїчних термінах (наслідок 5.2). Класичні стаціонарні потенціали (вільної частинки, гармонійного і репульсивного осцилятора, вільного падіння, радіальної вільної частинки, радіального гармонійного і репульсивного осциляторів [106]) природно виникають у груповій класифікації відносно (меншої) групи еквівалентності в класі стаціонарних потенціалів. Використовуючи наслідок 5.2 і повну групу еквівалентності класу (5.1), побудовано у явному вигляді перетворення, що зводять ці x-залежні потенціали до x-незалежних (див. зауваження 5.8).

В підрозділі 5.4 проведено групову класифікацію узагальненого нелінійного рівняння Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора (5.2).

Для деяких підкласів нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом знайдено достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші та розв'язку із загостренням задачі Коші.

Основні результати розділу 5 опубліковано в роботах [85, 122, 123].

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Узагальнено прямий метод знаходження законів збереження. Використовуючи нові поняття еквівалентності законів збереження відносно локальної групи перетворень, лінійної залежності законів збереження та локальної залежності потенціалів, які дозволяють значно спростити знаходження законів збереження та розширити область застосування вже відомих методів групового аналізу, виконано класифікацію всіх локальних законів збереження для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії. Припускаючи можливість залежності законів збереження від кількох потенціалів, узагальнено ітераційну процедуру знаходження потенціальних законів збереження. За допомогою прямого ітераційного методу побудовано нелокальні (потенціальні) закони збереження для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії та відповідні їм потенціальні системи.

2. Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Показано, що нелокальні перетворення, які лінеаризують відомі рівняння Бюргерса, Фокаша–Йортсоса та u^{-2}-дифузії є потенціальними перетвореннями еквівалентності.

3. Проведено повну групову класифікацію (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами відносно як загальної групи еквівалентності, так і усіх локальних перетворень змінних. За допомогою отриманих результатів проведено симетрійну редукцію і знайдено точні розв'язки рівнянь, що належать до даного класу.

4. Досліджено різні види додаткових перетворень еквівалентності на підкласах класу (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами.

5. Виконано групову класифікацію (1+1)-вимірних рівнянь Шрьодінгера з довільним потенціалом та степеневою нелінійністю. Знайдено всі можливі перетворення еквівалентності між рівняннями у даному класі. Показано, що всі такі перетворення належать до групи еквівалентності вихідного класу. Знайдено достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку та розв'язку із загостренням задачі Коші для деяких класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом.

6. Проведено групову класифікацію $(1+n)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора та нелінійністю вигляду $F = F(|\psi|)\psi$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.

[2] Амеров Т.К. Об условной инвариантности нелинейного уравнения теплопроводности // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. — 1990. — С. 12–14.

[3] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.

[4] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения — 1989.— Т. 34. — С. 3–83.

[5] Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т. 16, № 1. — С. 67–78.

[6] Баренблатт Г.И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т. 16, № 6. — С. 679–698.

[7] Бойко В.М., Попович В.О. Групова класифікація галілей–інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 36. — 2001. — С. 51–62.

[8] Василенко О.Ф., Єгорченко І.А. Групова класифікація багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 36. — 2001. — С. 63–66.

[9] Винтернитц П., Смородинский Я.А., Углирж М., Фриш И. О группах симметрии в классической и квантовой механике // Ядер. физика. — Т. 4, № 3. — С.625–635.

[10] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир., 1988. — 696 с.

[11] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.

[12] Дородницын В.А., Свирщевский С.Р. О группах Ли-Бэклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником // Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. — 1983. — № 101. – 28 с.

[13] Жаринов В.В. Законы сохранения эволюционных систем // Теор. и мат. физ. — 1986. — Т. 68, № 2. — С. 163–171.

[14] Іванова Н.М. Груповий аналіз нелінійних моделей реакції-дифузії // Матеріали V-ї науково-техн. конф. “Авіа-2003” — 2002. — Т. II. — С. 22.25–22.28.

[15] Определяющие уравнения законов сохранения для эволюционных // Динамика сплошной среды. — В. 46. — Новосибирск, 1980. — С. 46–57.

[16] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа // Ж. прикл. мех. и теор. физ. — 1965. — Т. 6. — С. 105–106.

[17] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно по-

лупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.

[18] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 360 с. — (Праці Інституту математики НАН України — Т. 45).

[19] Мубаракзянов Г.М. Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли // Изв. Высш. Учебн. Завед. — 1963. — Т. 32, № 1. — С. 114–123.

[20] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. мат. жур. — 2001. — Т. 53, № 8. — С. 1053–1060.

[21] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[22] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[23] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[24] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики:точные решения. — Москва: Физматлит, 2002. — 432 с.

[25] Попович Р.О., Єгорченко І.А. Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала // Укр. мат. жур. — 2001. — Т. 53, № 11. — С. 1841–1850.

[26] Попович Р.О., Черніга Р.М. Повна класифікація симетрій Лі системи нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа // Праці Інституту математики НАН України. Т. 36. — 2001. — С. 212–221.

[27] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 527 с.

[28] Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико–групповые методы в математической физике. — К.: Ин-т математики, 1978. — С. 5–44.

[29] Фущич В.И., Чернига Р.М. Галилей–инвариантные нелинейные уравнения Шредингера // Украинский математический журнал. — 1989. — Т. 41, № 10. — С. 1349–1357.

[30] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Доклады НАН Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.

[31] Хамитова Р.С. Структура группы и базис законов сохранения // Теор. и матем. физика. — 1982. — Т. 52. — С. 244–251.

[32] Abellanas L., Galindo A.J. Conserved densities for nonlinear evolution equations. I Even order case // J. Math. Phys. — 1979.— V. 20, № 6. — P. 1239–1243.

[33] Ames W.F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. — New York: Academic, 1965. — 252 p.

[34] Anco S.C., Bluman G. Derivation of conservation laws from nonlocal symmetries of differential equations // J. Math. Phys. — 1996. — V. 37, № 5. — P. 2361–2375.

[35] Anco S.C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. I. Examples of conservation law classifications // Eur. J. Appl. Math. — 2002. — V. 13, Part 5. — P. 545–566. (See also math-ph/0108023.)

[36] Anco S.C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. II. General treatment // Eur. J. Appl. Math. — 2002. — V. 13, Part 5. — P. 567–585 (See also math-ph/0108024.)

[37] Baillon J.-B., Cazenave T., Figueira M. Equation de Schrödinger non lineaire // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B. — 1977. — V. 284, № 15. — P. A869–A872.

[38] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equation // Acta Appl. Math. — 2001. — V. 69, № 1. — P. 43–94.

[39] Berryman J.G., Holland J.G. Nonlinear diffusion problems arising in plasma physics // Phys. Rev. Lett. — 1978. — V. 40. — P. 1720–1722.

[40] Bluman G., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - \partial u/\partial t = 0$ // J. Math. Phys. — 1980. — V. 21, № 5. — P. 1019–1023.

[41] Bluman G.W., Reid G.J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations // J. Math. Phys. — 1988. — V. 29 — P. 806–811.

[42] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. — New-York: Springer, 1989. — 412 p.

[43] Bluman G.W. Potential symmetries and equivalent conservation laws // Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. (Eds.) Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics (Acireale, 1992), Dordrecht: Kluwer, 1993. — P. 71–84.

[44] Bluman G.W., Doran-Wu P.R. The use of factors to discover potential systems or linearizations. Geometric and algebraic structures in

differential equations // Acta Appl. Math. — 1995. — V. 41, № 1–3. — P. 21–43.

[45] Boyer C.P., Sharp R.T., Winternitz P. Symmetry breaking interactions for the time dependent Schrodinger equation // J. Math. Phys. — 1976. — V. 17, Is. 8. — P. 1439–1451.

[46] Burgan J.R., Munier A., Feix M.R., Fijalkow E. Homology and the nonlinear heat diffusion equation // SIAM J. Appl. Math. — 1984. — V. 44, № 1. — P. 11–18.

[47] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // von Mises R., von Kamran Th. (eds.) — Adv. Appl. Mech. — V. 1. — New York: Academic Press, 1975. — P. 171–199.

[48] Carles R. Critical nonlinear Schrödinger equations with and without harmonic potential // cond-mat/0112414. — 9 p.

[49] Cazenave T. Equations de Schrodinger non lineaires en dimension deux // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1979. — V. 84, № 3–4. — P. 327–346.

[50] Cherniha R., Serov M. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. — 1998. — V. 9. — P. 527–542.

[51] Cole J.D. On a quasilinear parabolic equation used in aerodinamics // Quart. Appl. Math. — 1951. — V.9 — P. 225–236.

[52] Crank J. The Mathematics of Diffusion. 2nd ed. — London: Oxford, 1975. — 414 p.

[53] Crighton D.G. Basic nonlinear acoustics // Frontiers in physical acoustics (D. Sette, ed.) — Amsterdam: North-Holland, 1986. — 443 p.

[54] Doebner H.-D., Goldin G.A. Properties of nonlinear Schrödinger equations associated with diffeomorphism group representations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1994. — V. 27, № 5. — P. 1771–1780.

[55] Doebner H.-D., Goldin G.A., Nattermann P. Gauge transformations in quantum mechanics and the unification of nonlinear Schrödinger equations // J. Math. Phys. — 1999. — V. 40, № 1. — P. 49–63.

[56] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. — 1994. — V. 190. — P. 149–154.

[57] El-labany S. K., Elhanbaly A. M., Sabry R. Group classification and symmetry reduction of variable coefficient nonlinear diffusion-convection equation // J. Phys. A:Math. Gen. — 2002. — V. 35. — P. 8055–8063.

[58] Fokas A.S., Yortsos Y.C., On the exactly solvable equation $S_t = [(\beta S+\gamma)^{-2}S_x]_x+\alpha(\beta S+\gamma)^{-2}S_x$ occurring in two-phase flow in porous media // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1982. — V. 42, № 2. — P. 318–332.

[59] Forsyth A.R. Thery of differential equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1906. — 304 p.

[60] Fuschych W. Symmetry in problems of mathematical physics // Algebraic theoretic studies in mathematical physics. — Kiev: Inst. Math. Ukrainian Acad. Sci., 1981. — P. 6–44.

[61] Fuschych W., Cherniha R.M. The Galilei relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1985. — V. 18. — P. 3491–3503.

[62] Fushchych W.I., Moskaliuk S.S. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equations in three spatial dimensions // Lett. Nuovo Cim. — 1981. — V. 31, № 16. — P. 571–576.

[63] Fushchych W.I., Nikitin A.G. The complete set of conservation laws for the electromagnetic field // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — V. 25, № 5. — P. L231-L233.

[64] Fuschych W., Serov N. On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrodinger equation // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1987. — V. 20, № 6. — P. L 929.

[65] Fuschych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. — 463 p.

[66] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: I. The symmetry group and its subgroups // J. Phys. A: Math. Gen. — 1988. — V. 21. — P. 1493–1511.

[67] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: II. Exact solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — V. 22. — P. 469–497.

[68] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: III. Reductions to third-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — V. 22. — P. 499–509.

[69] Gagnon L., Winternitz P. Exact solutions of the cubic and quintic non-linear Schrödinger equation for a cylindrical geometry // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, № 1. — P. 296–306.

[70] Gagnon L., Wintenitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — V. 26. — P. 7061–7076.

[71] Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrodinger equations. III. Special theories in dimensions 1, 2 and 3 // Ann. Inst. H. Poincare Sect. A (N.S.). — 1978. — V. 28, № 3. — P. 287–316.

[72] Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case // J. Funct. Anal. — 1979. — V. 32, № 1. — P. 1–32.

[73] Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrodinger equations. II. Scattering theory, general case // J. Funct. Anal. — 1979. — V. 32, № 1. — P. 33–71.

[74] Glassey R.T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18, № 9. — P. 1794–1797.

[75] Hasegawa A. Plasma instabilities and nonlinear effects. — Berlin: Springer, 1975. — 468 p.

[76] Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. — 1972. — V. 33. — P. 805–811.

[77] Head A.K. LIE, a PC program for Lie analysis of differential equations // Comput. Phys. Comm. — 1993. — V. 77, № 2. — P. 241–248. (See also http://www.cmst.csiro.au/LIE/LIE.htm.)

[78] Hereman W. Review of symbolic software for the computation of Lie symmetries of differential equations // Euromath Bull. — 1994. — V. 1, № 2. — P. 45–82.

[79] Hereman W. Review of symbolic software for Lie symmetry analysis. Algorithms and software for symbolic analysis of nonlinear systems // Math. Comput. Modellingю — 1997. — V. 25, № 8–9. — P. 115–132.

[80] Hill J.M. Similarity solutions for nonlinear diffusion — a new integration procedure // J. Engrg. Math. — 1989. — V. 23. — P. 141–155.

[81] Hill D.L., Hill J.M. Similarity solutions for nonlinear diffusion — further exact solutions // J. Engrg. Math. — 1990. — V. 24. — P. 109–124.

[82] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V. 3. — P. 201–230.

[83] Ibragimov N.H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations — symmetries, exact solutions and conservation laws, V. 1 — Chemical Rubber Company, Boca Raton, FL, 1994. — 430 p.

[84] Ibragimov N.H., Kara A.H., Mahomed F.M. Lie–Bäcklund and Noether symmetries with applications // Nonlinear Dynamics. — 1998. — V. 15, № 2. — P. 115–136.

[85] Ivanova N. Symmetry of nonlinear Schrödinger equations with harmonic oscillator type potential // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — V. 43, Part 1. — P. 149–150.

[86] Ivanova N. Conservation laws and potential systems of diffusion–convection equations // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — V. 50, Part 1. — P. 149–153. (See also math-ph/0404025.)

[87] Kamin S., Rosenau P. Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Comm. Pure Appl. Math. — 1981. — V. 34. — P. 831–852.

[88] Kamin S., Rosenau P. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium // J. Math. Phys. — 1982. — V. 23. — P. 1385–1390.

[89] Kara A.H., Mahomed F.M. Relationship between symmetries and conservation laws // Inter. J. Theor. Phys. — 2000. — V. 39, № 1. — P. 23–40.

[90] Kara A.H., Mahomed F.M. A basis of conservation laws for partial differential equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 2002. — V. 9. — P. 60–72.

[91] Kara A.H., Qu C. Nonlocal symmetries and associated conservation laws for wave equations with variable speeds // Inter. J. Theor. Phys. — 2000. — V. 39, № 10. — P. 2503–2512.

[92] King J.R. Exact similarity solutions to some nonlinear diffusion equations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1990. — V. 23. — P. 3681–3697.

[93] King J.R. Exact solutions to a nonlinear diffusion equation // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1991. — V. 24 — P. 3213–3216.

[94] King J.R. Some non-self-similar solutions to a nonlinear diffusion equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — V. 25. — P. 4861–4868.

[95] Kingston J.G. On point transformations of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — V. 24. — P. 769–774.

[96] Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — V. 31. — P. 1597–1619.

[97] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation // Int. J. Non-Lin. Mech. — 2001. — V. 36. — P. 987–997.

[98] Kodama Y., Mikhailov A.V. Obstacles to asymptotic integrability // Gel'fand I.M., Fokas A. (editors) — Algebraic aspects of integrability. — 1996. — P. 173–204.

[99] Laplace P.-S. Traité de mécanique céleste, Vol. 1 — Paris: Duprat, 1798. (English transl.: Laplace P.-S. Celestial mechanics, V. 1 — New-York: Chelsea Publishing Co., 1966. — 1018 p.)

[100] LeVeque R.J. Numerical methods for conservation laws. Second edition. — Lectures in Mathematics ETH: Zurich. Birkhauser Verlag, Basel, 1992. — 214 p.

[101] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung // Arch. for Math. — 1881. — V. 6, № 3. — P. 328–368. (Translation by N.H. Ibragimov: Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals // CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, V. 2. — 1994 — P. 473–508.)

[102] Lin J.E, Strauss W.A. Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrodinger equation // J. Funct. Anal. — 1978. — V. 30, № 2. — P. 245–263.

[103] Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations, PhD. Thesis. — University of British Columbia, 1992 (http://www.ise.canberra.edu.au/mathstat/StaffPages/LisleDissertation.pdf).

[104] Malfliet W. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations // Am. J. Phys. — 1992. — V. 60. — P. 650–654.

[105] Mikhailov A.V., Shabat A.B., Yamilov R.I. Extension of the module of invertible transformations and classification of integrable systems // Comm. Math. Phys. — 1988. — V. 115. — P. 1–19.

[106] Miller W. Symmetry and separation of variables. — Addison-Wesley: Reading, 1977. — 285 p.

[107] Munier A., Burgan J.R., Gutierrez J., Fijalkow E., Feix M.R. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation// SIAM J. Appl. Math. — 1981. — V. 40. — P. 191–207.

[108] Murray J.D. Mathematical biology I: An introduction, 3rd Ed.: New–York: Springer, 2002. — 551 p.

[109] Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications, 3rd Ed.: New York: Springer, 2002. — 811 p.

[110] Nattermann P., Doebner H.-D. Gauge classification, Lie symmetries and integrability of a family of nonlinear Schrödinger equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1996. — V. 3, № 3–4. — P. 302–310.

[111] Newell A.C. The history of the soliton // J. Appl. Mech. — 1983. — V. 50. — P. 1127–1137.

[112] Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation // Helv. Phys. Acta. — 1972. — V. 45, № 5. — P. 802–810.

[113] Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator // Helv. Phys. Acta. — 1973. — V. 46. — P. 191–200.

[114] Nikitin A.G., Witshire R.I. System of reaction diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — V. 42, № 4. — P. 1666–1685.

[115] Noether E. Invariante Variationsprobleme // König. Gessell. Wissen. Göttingen, Math.-phys. Kl. — 1918. — P. 235–257 (translated in Transport Theory and Stat. Phys. — 1971 — V. 1. — P. 186–207).

[116] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — V. 118. — P. 172–176.

[117] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18, № 7. — P. 1449–1455.

[118] Peletier L.A. The porous media equation // Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences. — London: Pitman, 1981. — P. 229–241.

[119] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — V. 37. — P. 7547–7565. (See also math-ph/0306035.)

[120] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations // math-ph/0402066. — 8 p.

[121] Popovych R.O., Ivanova N.M. Hierarchy of conservation laws of diffusion–convection equations // math-ph/0407008. — 21 p.

[122] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Lie symmetries of (1+1)-dimensional cubic Schrödinger equation with potential // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — V. 50, Part 1. — P. 219–224. (See also math-ph/0312055.)

[123] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Group classification of (1+1)-Dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearities // J. Math.Phys. — 2004. — V. 45, № 8. — P. 3049–3057. (See also math-ph/0311039.)

[124] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics (Oviedo, 1994). — P. 75–99. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.

[125] Rasmussen J.J., Rypdal K. Blow-up in nonlinear Schroedinger equations. I. A general review // Phys. Scripta. — 1986. — V. 33, № 6. — P. 481–497.

[126] Rosen G. Method for the exact solution of a nonlinear diffusion-convection equation // Phys. Rev. Lett. — 1982. — V. 49. — P. 1844–1847.

[127] Rosenau P., Kamin S. Nonlinear diffusion in a finite mass medium // Comm. Pure Appl. Math. — 1982. — V. 35. — P. 113–127.

[128] Schrödinger E. Quantisierung als eigenwertprobleme // Annalen der Physik. — 1926. — V. 81. — P. 109–139.

[129] Sophocleous C. Potential symmetries of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — V. 29, № 21. — P. 6951–6959.

[130] Sophocleous C., Kingston J.G. Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations // Int. J. Non-Lin. Mech. — 1999. — V. 34, № 3. — P. 531–543.

[131] Sophocleous C. Potential symmetries of inhomogeneous nonlinear diffusion equations // Bull. Austral. Math. Soc. — 2000. — V. 61, № 3. — P. 507–521.

[132] Sophocleous C. Classification of potential symmetries of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations // Physica A. — 2003. — V. 320. — P. 169–183.

[133] Steinberg S., Wolf K.B. Symmetry, conserved quantities and moments in diffusive equations // J. Math. Anal. Appl. — 1981. — V. 80, № 1. — P. 36–45.

[134] Storm M. L. Heat conduction in simple metals. // J. Appl. Phys. — 1951. — V. 22. — P. 940–951.

[135] Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations // Phisica D. — 1982. — V. 6. — P. 113–118.

[136] Strampp W. On the correspondence between symmetries and conservation laws of evolution equations // Lett. Math. Phys. — 1982. — V. 6, № 2. — P. 113–121.

[137] Strauss W.A. Dispersion of low-energy waves for two conservative equations // Arch. Rational Mech. Anal. — 1974. — V. 55. — P. 86–92.

[138] Strauss W.A. The nonlinear Schrodinger equation // Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de

Janeiro, 1977) – P. 452–465. — North-Holland Math. Stud., 30, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[139] Tsutsumi M. Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrodinger equations // SIAM J. Math. Anal. — 1984. — V. 15, № 2. — P. 357–366.

[140] Touloukian Y.S., Powell P.W., Ho C.Y., Klemens P.G. Thermodynamics properties of matter, vol. 1. — New York: Plenum, — 1970. — 342 p.

[141] Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. — 1975. — V. 16, № 1. — P. 1–7.

[142] Weinstein M.I. Nonlinear Schrodinger equations and sharp interpolation estimates // Comm. Math. Phys. — 1982/83. — V. 87, № 4. — P. 567–576.

[143] Wiltshire R., El-Kafri M. Non-classical and potential symmetry analysis of Richard's equation for moisture flow in soil // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — V. 37, № 3. — P. 823–839.

[144] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion–convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Non-Lin. Mech. — 1994. — V. 29, № 3. — P. 273–278.

[145] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1999. — V. 32. — P. 7405–7418.

[146] Zhdanov R., Roman O. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schrödinger equation with some applications of Doebner–Goldin models // Rep. Math. Phys. — 2000. — V. 45, № 2. — P. 273–291.