

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.46

На правах рукописи

Корняк Владимир Васильевич

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИММЕТРИЙНЫХ СВОЙСТВ
НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук,
профессор В. И. Фуцич

К И Е В - 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
Введение	3
Глава 1. Вычисление симметрий Ли и Ли-Беклунда дифференциальных уравнений	9
§ 1. Алгоритм и программа вычисления точечных и контактных симметрий Ли	14
§ 2. Вычисление симметрий Ли-Беклунда	28
§ 3. Локальные симметрии некоторых уравнений теоретической физики	39
Глава 2. Исследование нелокальных симметричных свойств уравнений типа Дирака	50
§ 1. Алгоритм вычисления нелокальных симметрий и его реализация	55
§ 2. Нелокальные симметрии некоторых систем уравнений	67
Глава 3. Применение ЭВМ для классификации подалгебр конечномерных алгебр Ли	73
§ 1. Алгоритм классификации подалгебр и его программная реализация	76
Глава 4. Применение ЭВМ для построения квазиклассичес- ких решений волновых уравнений	93
§ 1. Волновые решения квазигеострофического уравнения потенциального вихря	95
Заключение	110
Литература	112

ВВЕДЕНИЕ

Решение дифференциальных уравнений в частных производных, — одна из основных задач математической физики и прикладной математики. Получение в замкнутом виде общего решения системы дифференциальных уравнений возможно только в частных случаях. В связи с этим, широкое распространение получили приближённые и численные методы решения. Численные методы являются достаточно универсальным подходом для получения конкретных решений, но они не дают представления о структуре множества решений. Поэтому, если есть возможность получить решения, хотя бы частные, в аналитическом виде, то такой возможностью всегда стараются воспользоваться. Аналитические формулы более информативны, чем численные зависимости и потому более предпочтительны в научных исследованиях. Кроме получения решений, аналитические методы позволяют устанавливать определённые свойства решений, в частности получать законы сохранения. Знание таких свойств очень важно при исследовании дифференциальных уравнений.

Регулярными подходами, позволяющими получать и исследовать аналитические решения, являются методы, основанные на использовании свойств симметрии дифференциальных уравнений и асимптотические методы. Упомянем также, развитый в последние годы, метод дифференциальных связей, основанный на присоединении к системе уравнений дополнительных дифференциальных соотношений, что позволяет повысить шансы найти точные решения за счёт уменьшения пространства решений [60].

Созданная в конце прошлого века С. Ли теория групповых свойств дифференциальных уравнений представляет собой один из наиболее успешных подходов, позволяющих систематизировать точ-

ные методы решения. Эта теория основана на изучении групп непрерывных преобразований пространства зависимых и независимых переменных. Современное состояние этой теории изложено в монографии Л. В. Овсянникова [56]. Особо отметим интенсивное развитие теории групп Ли-Беклунда - групп касательных преобразований бесконечного порядка, начавшееся с работ Н. У. Ибрагимова и Р. Л. Андерсона [30]. В последние годы успешно развивался в работах В. И. Фущича [70] и его учеников новый подход к исследованию симметрий дифференциальных уравнений; основанный на рассмотрении существенно нелокальных преобразований. Этот подход значительно расширяет возможности групповых методов и позволяет получить неизвестные ранее симметрии многих систем уравнений теоретической и математической физики.

Практически очень важными методами построения аналитических решений являются асимптотические методы. Различные варианты асимптотических методов были развиты для решения прикладных задач, первоначально, в основном, для задач небесной механики и квантовой теории. Современный этап развития асимптотических методов связан с работами Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, В. П. Маслова.

Как групповые, так и асимптотические методы предполагают проведение большого объёма трудоёмких аналитических вычислений. Это ограничивало их применимость для достаточно сложных задач. В последние годы появились новые возможности, связанные с использованием вычислительных машин. Традиционно вычислительные машины применялись в основном для численных расчётов. В последнее время технические возможности машин значительно возросли. Кроме того, интенсивно развивались системы и средства программирования. Всё это позволяет применять вычислительные машины для решения принципиально более сложных ана-

литических задач. Таким образом, компьютер становится по-существу математической машиной. Такое развитие событий должно привести к резкому повышению производительности исследовательской работы, что некоторыми авторами характеризуется как наступающая революция в научных вычислениях [135]. Уже к настоящему времени с помощью аналитических вычислений на ЭВМ были решены многие трудные задачи в различных областях математики и прикладных наук. Многочисленные примеры содержатся в обзорах [15, 89, 130], а также в статьях и книгах [1, 2, 12, 14, 16, 25, 60, 82, 90-92, 96, 98-107, 111-113, 123-126, 128-132].

Хотя алгоритмы решения аналитических задач в различных областях науки различны и зависят от специфики области, все такие алгоритмы включают в себя общематематические алгоритмы, например, работу с полиномами или более общими выражениями, дифференцирование, интегрирование, факторизацию выражений, приведение подобных и т. д. Разработка таких алгоритмов высокого качества очень трудоёмка и была выделена в специальную область программирования - создание универсальных систем или, как иногда говорят, языков аналитических вычислений. Воспользовавшись универсальной системой аналитических вычислений специалист в конкретной области гораздо быстрее разработает алгоритмы для решения своих задач.

При оценке качества системы аналитических вычислений наиболее важны следующие характеристики: богатство возможностей, т. е. количество и разнообразие математических алгоритмов, включённых в систему, и эффективность, т. е. быстрдействие алгоритмов и компактность представления вычисляемых структур в памяти машины.

Наибольшее распространение в мире получили следующие

системы: *FORMAC* [82, 136], *REDUCE* [109, 110], *MACSYMA* [86], *SCRATCHPAD* [108]. Очень удачной считается разработанная недавно система *SMP* [67, 93, 94]. Большой интерес вызывает система *AMP* [97] - не уступая по возможностям такой системе как, например, *REDUCE*, она существенно превосходит последнюю по эффективности. Заметим, что инициаторами разработок многих приобретших популярность систем аналитических вычислений (*REDUCE*, *AMP*, *SMP*) были физики-теоретики. Некоторые системы, такие как, например, *MACSYMA* и *SCRATCHPAD* разрабатывались "индустриальным" методом - специально организованными большими группами программистов и математиков. Сравнительные обзоры различных систем аналитических вычислений содержатся в [15, 18, 137, 139].

Основная часть диссертации состоит из четырех глав. Первые три главы посвящены различным задачам, возникающим при исследовании с помощью ЭВМ симметричных свойств дифференциальных уравнений. В главе 4 аналитические вычисления на ЭВМ используются для получения квазиклассических решений нелинейного волнового уравнения в частных производных. Помимо описания алгоритмов и их реализаций в виде программ для ЭВМ приводятся результаты решения некоторых конкретных задач.

Результаты, изложенные в диссертации, получены с помощью систем аналитических вычислений *REDUCE-2* и *PL/I-FORMAC*. Все вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1022 с быстродействием около 90 000 операций в секунду и доступной оперативной памятью около 380К.

Глава I посвящена вычислению симметрий Ли и Ли-Беклунда дифференциальных уравнений. В § I этой главы описан алгоритм и программа на языке *REDUCE-2* для вычисления определя-

ющих уравнений точечных и контактных симметрий Ли. § 2 содержит описание алгоритма и программы на языке *PL/I-FORMAC* для вычисления симметрий Ли-Геклунда дифференциальных уравнений. С помощью этой программы были вычислены неизвестные ранее локальные симметрии некоторых нелинейных скалярных волновых уравнений. Эти симметрии приведены в § 2.

В главе 2 рассмотрен новый метод исследования симметричных свойств систем дифференциальных уравнений, предложенный в [70]. В § 1 главы 2 описан алгоритм метода и его реализация в виде программы для ЭВМ на языке *PL/I-FORMAC*. Далее, в § 2, вычислены с помощью этих программ нелокальные симметрии линейной системы Дирака и 10-компонентного уравнения Кеммера-Лейбина-Петье.

С теорией симметричных свойств дифференциальных уравнений тесно связана задача классификации подалгебр алгебр Ли с точностью до преобразований из группы внутренних автоморфизмов. Эта задача имеет также многочисленные приложения и вне этой теории. В главе 3 предложен подход для решения задачи классификации подалгебр конечномерных алгебр Ли, основанный на приведении к каноническому виду матрицы присоединённого представления алгебры Ли. Этот подход требует громоздких алгебраических вычислений, для выполнения которых были написаны программы на языке *PL/I-FORMAC*. В § 1 главы 3 на простом примере показано как работает алгоритм и описаны соответствующие машинные программы.

Глава 4 посвящена вычислениям с помощью ЭВМ асимптотических разложений, возникающих при поиске квазиклассических решений уравнений в частных производных методом В. П. Маслова. В § 1 приведён пример получения волновых решений нелинейного уравнения в частных производных, играющего важную роль в ди-

динамике атмосферы и океана - квазигеострофического уравнения потенциального вихря. Среди полученных асимптотических решений оказались неизвестные ранее точные решения этого уравнения. Полученные решения использовались при описании крупномасштабной атмосферной турбулентности, причём было достигнуто достаточно хорошее соответствие с наблюдаемыми величинами. Кроме того, эти решения использовались для объяснения некоторых, наблюдаемых в природе, особенностей динамики атмосферы.

В заключении кратко обсуждаются полученные результаты и намечаются перспективы дальнейших исследований.

ГЛАВА I

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ ЛИ И ЛИ-БЕКЛУНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах С. Ли были заложены основы теории групповых свойств дифференциальных уравнений. В течение длительного времени развитие этой теории было связано с изучением, главным образом, групп точечных и контактных (т. е. касательных первого порядка) преобразований [20, 56, 80, 85]. В последние годы интенсивно развивается метод группового анализа, основанный на использовании групп преобразований Ли-Беклунда - групп касательных преобразований бесконечного порядка [20].

Применения теории групповых свойств многообразны. Эта теория, например, даёт регулярный метод поиска точных решений дифференциальных уравнений (инвариантные и частично-инвариантные решения). Знание группы симметрий позволяет строить разложения Ли-Вессьо (эквивалентное представление системы уравнений в виде двух систем, одна из которых является автоморфной, т. е. все её решения лежат на одной групповой орбите, а другая, называемая разрешающей, описывает переходы между орбитами), получать законы сохранения, находить преобразования, приводящие исследуемые уравнения к наиболее простому виду (например, к линейному) и т. д. Исследование симметрий дифференциальных уравнений и их решений - один из основных математических приёмов в теоретической физике [4, 10, 61-65].

В последнее время возродился интерес к исследованию симметрий систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Если система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений обладает определёнными свойствами симметрии (согласно теореме С. Ли, векторное поле, определяемое системой уравнений, пред-

ставленной в виде системы первого порядка, должно быть линейной комбинацией векторных полей, порождающих конечномерную алгебру Ли), то общее решение системы можно выразить через несколько частных. В этом случае говорят, что выполняется нелинейный принцип суперпозиции [81, 138]. В класс систем, удовлетворяющих нелинейному принципу суперпозиции, попадают, например, важные для теории управления матричные уравнения Риккати.

Симметрии Ли-Беклунда представляют особый интерес в связи с исследованиями двумерных вполне интегрируемых систем, решаемых методом обратной задачи рассеяния (уравнение Кортевега-де Фриза, *sine-Gordon*, нелинейное уравнение Шредингера и т. д.). Эти уравнения имеют физически важные солитонные решения и интенсивно изучались в последние годы [29]. Интересной задачей является поиск и исследование многомерных уравнений с решениями солитонного типа. К сожалению достаточно эффективные многомерные обобщения метода обратной задачи рассеяния отсутствуют. С другой стороны, уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, имеют высокую скрытую симметрию - они инвариантны относительно групп преобразований Ли-Беклунда [30]. N -солитонные решения представляют собой инвариантные решения относительно таких групп. Можно предположить, что подобными свойствами будут обладать и многомерные уравнения, имеющие солитонные решения. Таким образом, изучение симметрий Ли-Беклунда может дать подход к многомерным аналогам вполне интегрируемых систем. Помимо этого, группы Ли-Беклунда успешно используются при изучении нелинейных уравнений параболического типа, имеющих важное прикладное значение [23, 133].

Переход от конечных преобразований к инфинитезимальным, т. е. переход от группы к алгебре Ли, позволяет сделать зада-

чу поиска симметрий алгоритмически разрешимой для широкого класса дифференциальных уравнений. Применение соответствующих алгоритмов к конкретным уравнениям требует большого объёма аналитических вычислений, что приводит к необходимости использовать вычислительные машины. Первые программы для вычисления точечных симметрий на ЭВМ были предложены в [21, 44]. Эти программы являются машинно-зависимыми и были написаны для небольших с современной точки зрения ЭВМ, что не позволяло решать достаточно сложные задачи. Недавно была предложена машинно-зависимая система программ для решения ряда задач группового анализа [15]. Эта система предназначена для ЭВМ БЭСМ-6.

Разработка универсальных переносимых программных систем для аналитических вычислений, позволяющих существенно облегчить программирование сложных алгоритмов, привела к появлению в последние годы ряда работ, посвящённых реализации алгоритмов исследования теоретико-групповых свойств дифференциальных уравнений, а также применению этих алгоритмов к конкретным уравнениям.

Основная цель настоящей работы - разработка и программная реализация алгоритмов вычисления точечных, контактных симметрий и симметрий Ли-Беклунда, а также получение с помощью разработанных программ алгебр симметрии некоторых уравнений теоретической физики. В §1 описан алгоритм вычисления точечных и контактных симметрий Ли и его реализация на языке REDUCE-2. В последнее время широкую известность приобрёл пакет программ для определения точечных симметрий, разработанный Ф. Шварцем [124]. Этот пакет написан на языке REDUCE-2 и содержит следующие программы: LIE1, LIE2, LIE3, LIE4, предназначенные для получения определяющих уравнений точечных симметрий соответственно: одного обыкновенного дифференциального уравне-

ния, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциального уравнения в частных производных с одной зависимой переменной, системы дифференциальных уравнений в частных производных с несколькими переменными. Кроме того, в пакет входит программа *LIEØ*, предназначенная для разделения независимых определяющих уравнений.

Нами разработана универсальная программа для определения точечных и контактных симметрий Ли [26, 98]. При программировании мы использовали подход, отличный от применявшегося в [124], что позволило унифицировать алгоритмы и повысить эффективность. Дело в том, что представление производных содержит в себе информацию о том какая функция дифференцируется, по каким переменным, каков порядок производных. В типичных ситуациях возникают сотни определяющих уравнений, каждое из которых обычно представляет собой громоздкое выражение. Ясно, что если, как это сделано в [124], все вхождения производных в эти выражения будут содержать информацию о структуре производных, то это приведёт к чрезмерным затратам памяти ЭВМ. Мы для представления производных использовали линейно упорядоченный ряд. Производные полностью определяются своим номером в этом ряду. Большая часть вычислений носит чисто алгебраический характер и не требует знания структуры производных. В тех же случаях когда информация о структуре необходима - она восстанавливается по номеру с помощью специальных арифметических алгоритмов. Введённое упорядочение позволило унифицировать вычисления и поэтому отпала необходимость написания пакета - достаточной оказалась одна программа. Перед выводом определяющие уравнения проходят дополнительную обработку, заключающуюся в устранении всех линейных и некоторой части дифференциальных зависимостей. Такая обработка позволяет сделать систему определяющих уравне-

ний более компактной. При вводе и выводе используются обозначения для функций и производных, близкие к символике, принятой в математике.

§ 2 посвящён алгоритму вычисления симметрий Ли-Беклунда и его реализации на языке *PL/I-FORMAC*. Возможность вычисления симметрий Ли-Беклунда предусмотрена в специализированной системе для ЕСМ-6 35. В работах [28, 103, 104] предложены программы на языках *REDUCE-2* и *PL/I-FORMAC* для классификации эволюционных уравнений с одной пространственной переменной и для вычисления симметрий Ли-Беклунда таких уравнений.

В работах [12, 99, 100] предложена программа для вычисления симметрий Ли-Беклунда систем дифференциальных уравнений произвольного типа. Первоначально программа была написана на языке *REDUCE-2*, но при вычислении симметрий Ли-Беклунда экономное использование памяти ЭВМ приобретает первостепенное значение ввиду быстрого роста числа производных при возрастании порядка симметрий. Поэтому впоследствии мы реализовали алгоритм на языке более эффективной системы *PL/I-FORMAC*. Для уменьшения затрат памяти и объёма вычислений в программе используются канонические операторы Ли-Беклунда.

Экспериментально определены зависимости затрат времени и памяти ЭВМ от порядков симметрий Ли-Беклунда. Для этого мы рассмотрели некоторые уравнения с двумя независимыми переменными. Оказалось, что на таких уравнениях программа демонстрирует полиномиальную вычислительную сложность.

В работе [7.] сформулированы задачи исследования симметричных свойств ряда уравнений математической и теоретической физики. С помощью программы для вычисления симметрий Ли-Беклунда мы получили алгебры инвариантности некоторых из этих уравнений. Эти результаты изложены в § 3.

§ I. Алгоритм и программа вычисления точечных и контактных симметрий Ли

При описании основных идей С. Ли по групповому анализу будем придерживаться обозначений книги Л. В. Овсянникова [56]. Рассмотрим векторное пространство Z_k , состоящее из векторов вида

$$\underline{z}_k = (x, u, u_1, \dots, u_k).$$

Здесь x - n -мерный вектор независимых переменных, u - m -мерный вектор пространства зависимых переменных, переменные u_i соответствуют частным производным i -го порядка. В подходе С. Ли все величины x , u и u_i рассматриваются как независимые переменные. Величины u_i называют иногда координатами расслоения джетов. Для того, чтобы эти независимые переменные вели себя при вычислениях как функции вводится так называемый оператор полного дифференцирования. Мы, для краткости, будем называть переменные u_i "производными".

Система дифференциальных уравнений с максимальным порядком производных k задаётся в пространстве Z_k многообразием вида

$$F(\underline{z}_k) = 0, \quad (I)$$

где F - некоторое отображение из Z_k в \mathbb{R}^s , s - число уравнений в системе. Однопараметрическая группа точечных преобразований задаётся уравнениями вида

$$x' = f(x, u, \alpha), \quad u' = g(x, u, \alpha), \quad (2)$$

удовлетворяющими условиям

$$f(x, u, 0) = x, \quad g(x, u, 0) = u.$$

Здесь a - параметр группы. Разложение f и g в окрестности $a=0$:

$$x' = x + a\xi(x, u) + O(a^2),$$

$$u' = u + a\eta(x, u) + O(a^2),$$

позволяет определить алгебру Ли с помощью векторного поля

$$X = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_u. \quad (3)$$

Это поле описывает малое изменение произвольной (аналитической) функции $\varphi(x, u)$ при изменении параметра a :

$$\begin{aligned} \varphi(x + a\xi + O(a^2), u + a\eta + O(a^2)) &= \varphi(x, u) + \\ &+ a \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \right) \varphi + O(a^2). \end{aligned}$$

Для того, чтобы определить действие алгебры Ли на функции, содержащие производные k -го порядка, вводится k -е продолжение поля (3):

$$X_k = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_u + \eta_1 \cdot \partial_{u_1} + \dots + \eta_k \cdot \partial_{u_k}, \quad (4)$$

где функции η_1, \dots, η_k выражаются через ξ и η рекуррентно по формулам продолжения:

$$\eta_{k+1} = D_k \eta - u \cdot D_{k+1} \xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Здесь $D = \partial_x + u \cdot \partial_u + \dots + u \cdot \partial_{u_k} + \dots$ - оператор

полного дифференцирования и по определению полагается $\eta_0 \equiv \eta$.

Симметрия системы уравнений относительно преобразований

из группы (2) в терминах алгебры Ли выражается равенством

$$\sum_k X_k F_k(z) = 0, \quad (6)$$

которое должно выполняться на многообразии $F_k(z) = 0$.

Для вычисления полной алгебры Ли точечных симметрий нужно действовать следующим образом:

- 1/. Считая ξ и η неопределёнными функциями x и u , выразить через них η_i по формулам (5).
- 2/. Подставив ξ , η и η_i в (4), вычислить выражение (6).
- 3/. Перейти на многообразии, используя связь между производными, задаваемую уравнениями (1), чтобы исключить некоторые производные из выражения (6).

4/. Полученное выражение разложить по степеням производных и приравнять к нулю коэффициенты разложения, поскольку в случае точечных преобразований ξ и η не зависят от производных. Эти коэффициенты представляют собой линейные однородные выражения относительно ξ , η и их производных по x и u . Условие равенства этих выражений нулю и даёт искомые определяющие уравнения.

5/. Решить систему определяющих уравнений относительно функций ξ и η .

Ясно, что пункт 5/, включающий процесс интегрирования, не может быть полностью формализован. Тем не менее, обычно система определяющих уравнений сильно переопределена, поэтому, как правило, удаётся получить наиболее общее её решение и, тем самым, найти алгебру Ли симметрий.

Касательными преобразованиями называются преобразования, зависящие не только от функций, но и от производных, т. е., преобразования вида:

$$x' = f(x, u, u_1, u_2, \dots, a),$$

$$u' = g(x, u, u_1, u_2, \dots, a),$$

.....

$$u'_i = h_i(x, u, u_1, u_2, \dots, a).$$

(7)

При этом координаты продолженного векторного поля $\xi, \eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ связаны между собой формулами продолжения (5). Известно, что нетривиальные касательные группы (т. е., не сводящиеся к продолженным точечным) возможны только в двух случаях:

1/. Если ряд u, u_1, u_2, \dots в формулах (7) неограничен.

В этом случае формулы (7) определяют преобразования Ли-Беклунда.

2/. Если пространство зависимых переменных одномерно,

то возможны нетривиальные касательные преобразования I-го порядка, называемые обычно контактными:

$$x' = f(x, u, u_1, a),$$

$$u' = g(x, u, u_1, a),$$

$$u'_1 = h_1(x, u, u_1, a).$$

Известно, что координаты векторного поля

$$X = \xi^i(x, u, u_1) \partial_{x^i} + \eta(x, u, u_1) \partial_u + \zeta_i(x, u, u_1) \partial_{u_i}$$

контактных преобразований имеют следующие представления

$$\xi^i = -\frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \eta = W - u_i \frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u_i}. \quad (8)$$

Здесь $W = W(x, u, u)$ - некоторая функция, называемая характеристической, u_i означает производную $\partial u / \partial x^i$.

Алгоритм вычисления алгебры Ли контактных симметрий аналогичен описанному выше алгоритму для точечных. Отличие состоит лишь в том, что для функций ξ^i , η и ζ_i используются представления (8) и определяющие уравнения получаются в результате разложения выражения (6) на многообразии $F(\frac{z}{k}) = 0$ по степеням производных выше первого порядка, поскольку контактные преобразования зависят от первых производных.

О п и с а н и е п р о г р а м м ы .

Унифицируем обозначения в предыдущих формулах, представив координаты пространства \mathbb{Z}_k в виде линейно упорядоченной последовательности. Упорядочивание определяется тремя последовательными шагами:

1/. Упорядочивание по возрастанию порядков производных.

2/. Лексикографическое упорядочение производных одинакового порядка в соответствии с заранее предписанным порядком независимых переменных.

3/. Упорядочивание зависимых переменных в соответствии с заранее заданным порядком.

Например, пусть $n = m = 2$, тогда координаты пространства \mathbb{Z}_k упорядочиваются следующим образом:

$$x^1, x^2, u^1, u^2, u_{11}^1, u_{11}^2, u_{12}^1, u_{12}^2, u_{21}^1, u_{21}^2, \dots$$

Обозначим i -й элемент упорядоченного ряда через Z_{ki} .

Аналогичный ряд введём для координат векторного поля (4), обозначив его элементы через C_{zi} . Тогда

$$X_k = \sum_{i=1}^N C_{zi} \partial_{Z_{ki}}.$$

Здесь $N = n + m \binom{n+k}{n}$ - размерность пространства Z_k .

По такой же схеме введём линейный порядок для функций ξ, η и их производных по x и u , обозначив j -й элемент ряда через Z_j^* . Для рассмотренного выше примера ряд $\{Z_j^*\}$ таков

$$x^1, x^2, u^1, u^2, x_{x^1}^*, x_{x^2}^*, u_{x^1}^*, u_{x^2}^*, x_{x^1 x^1}^*, x_{x^1 x^2}^*, \dots, u_{u^1}^*, u_{u^2}^*, x_{x^1 x^1}^*,$$

$$x_{x^1 x^1}^{*2}, \dots, u_{u^1 u^1}^{*2}, \dots$$

Здесь использован традиционный способ обозначения координат векторного поля $\xi = \dot{x}$, $\eta = \dot{u}$. В случае контактных преобразований вводится ряд для характеристической функции W вида

$$x^1, x^2, \dots, u, p_1, p_2, \dots, W, W_{x^1}, W_{x^2}, \dots, W_u, \dots, W_{p_1}, W_{p_2}, \dots$$

Здесь u - зависимая переменная, а p_i соответствует переменной u_{xi} . j -й элемент этого ряда также будем обозначать через Z_j^* . Соответствие обозначений в тексте и программе даётся в таблице.

Текст	Программа
Z_{ki}	ZK(I)
C_{zi}	CZ(I)
Z_j^*	ZA(J)

Программа состоит из трёх основных частей:

- 1/. Вычисление результата действия продолженного векторного поля на систему уравнений и переход на многообразиие (I).
- 2/. Выделение определяющих уравнений как коэффициентов при различных степенях производных.
- 3/. Исключение линейных зависимостей из системы определяющих уравнений по методу Гаусса-Жордана с учётом дифференциальных следствий одночленных уравнений.

При вводе близкие к математической символике обозначения преобразуются в выражения $ZK(I)$, а на выводе выполняется обратное преобразование выражений $ZA(J)$. Например, если имеются независимые переменные X, T и зависимые U, V , то на вводе производную U_{XT} нужно представлять в виде $U1'X], T$. (При выводе на печать это выражение примет вид $U'X, T$. Символ $]$ в нашей реализации системы **REDUCE** используется для ввода в имя переменной нестандартных символов типа ' и ,. В других реализациях вместо $]$ используется ! или знак подчёркивания $_.$) Программа преобразует U_{XT} в $ZK(1\emptyset)$. Аналогично этому на выводе $ZA(27)$ преобразуется в $X\#X, U$, что означает производную координаты векторного поля X^*_{Xu} . Использование операторов $ZK(I)$ и $ZA(J)$ для представления переменных $U_{i_1 \dots i_s}$ и производных координат векторного поля позволяет унифицировать алгоритмы и заметно сэкономить память ЭВМ. Например, выражению $ZA(27)$ в программе Шварца [124] соответствует выражение $DF(X1(1), X(1), X(2), U(1), U(2)), X(1), U(1))$, имеющее значительно более сложную списковую структуру. В случае контактных преобразований для производных характеристической функции W используются обозначения типа $W\#X, U, PX$. Здесь PX обозначает производную зависимой функции по переменной X .

Для выполнения всех этих преобразований определены в символьном режиме системы *REDUCE* простые операторы. Перечислим процедуры, используемые в программе, с кратким описанием выполняемых ими функций.

Символьные процедуры

- 1/. *RSUBST(A, B, C)* - подставляет *A* в список *C* вместо *B*.
- 2/. *RCONC(A, B)* - из символов *A* и *B* строит символ, являющийся их конкатенацией.
- 3/. *RINTERM(A)* - вставляет в *OBLIST* (список контролируемых объектов) символ *A*, построенный с помощью *RCONC*. Это нужно для отождествления *A* с таким же символом, использованным при вводе.
- 4/. *RLENGTH(A)* - вычисляет длину списка *A*. Используется в процедуре *GAUSS* для выбора "главного элемента".

Процедуры в алгебраическом режиме

- 5/. *BINC(N, M)* - вычисляет биномиальные коэффициенты $\binom{N}{M}$.
- 6/. *PROCD(N, M, P, I, J)* - эта процедура в зависимости от конфигурации входа выполняет действия, представленные в таблице.

Конфигурация входа

Действие

$(N, M, J' \text{ или } J\#, I, \emptyset)$

строит символ, соответствующий $ZK(I)$ или $ZA(I)$ и вставляет его в *OBLIST*.

(N, M, \emptyset, I, J)

вычисляет порядковый номер производной I -го элемента линейно упорядоченного ряда по J -й переменной.

$(N, M, \emptyset, I, \emptyset)$

по порядковому номеру переменной $U_{i_1 i_2 \dots i_k}^l$ вычисляет порядковый номер переменной $U_{i_2 \dots i_k}^l$, при этом глобальной переменной JD присваивается значение i_1 , а переменной KD - значение k .

7/. EXTENSION(L)

- алгоритмическая версия формулы продолжения (5), L - порядковый номер координаты продолженного вектора (4) в ряду $\{C_{2i}\}$.

8/. COEFFS()

- выделяет определяющие уравнения как коэффициенты при различных степенях переменных u_i ($i > 0$ для точечных симметрий, $i > 1$ - для контактных).

9/. GAUSS()

- устраняет линейные зависимости и дифференциальные следствия одночленных уравнений. Основана на процедуре Гаусса-Жордана. Используется выбор "главного элемента" - наиболее короткой строки. (Подстановки следует начинать с более коротких строк, т. к. иначе выражения сильно разрастаются.)

Для работы программы необходимо ввести следующую информацию:

N - число независимых переменных,

M - число зависимых переменных,

NE - число уравнений,

KM - максимальный порядок производных в системе уравнений,

$VR(1), VR(2), \dots, VR(N+M)$ - символы, используемые для обозначения независимых и зависимых переменных. При этом вначале перечисляются символы независимых переменных.

$FF(1), \dots, FF(NE)$ - левые части уравнений, производные в которых должны быть записаны в соответствии с порядком, заданным в ряду $VR(1), \dots, VR(N)$.

$SZ(1), \dots, SZ(NE)$ - символы производных, которые будут исключены при переходе на многообразие. Необходимо выбирать производные, линейно входящие в соответствующие уравнения. Очевидно, что если уравнение явно разрешается относительно производной, то этому требованию можно удовлетворить.

Если $NE = M$, что чаще всего бывает, то NE можно не задавать. Если в уравнениях имеется высокая степень какой-либо производной, то может возникнуть необходимость ввода числа PM .

По умолчанию полагается $PM = KM + 5$, что достаточно для обработки уравнений с максимальной степенью производной равной четырём. Для получения определяющих уравнений контактных симметрий нужно ввести переменную $TANG = 1$.

Примеры:

Точечные преобразования.

I. Уравнение Кортвега - де Фриза (КдФ)

$$U_t + U U_x + U_{xxx} = 0. \quad (10)$$

Вход:

$$M := NE := 1;$$

$$N := 2;$$

$$KM := 3;$$

$$VR(1) := X; \quad VR(2) := T; \quad VR(3) := U;$$

$$FF(1) := U]' T + U * U]' X + U]' X], X], X];$$

$$SZ(1) := U]' X], X], X];$$

Выход:

INPUT SYSTEM

$$(1) \quad U' T + U * U' X + U' X, X, X = \emptyset$$

POINT TRANSFORMATIONS

DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER = 21)

$$(1) \quad U * U \# X + U \# T + U \# X, X, X = \emptyset$$

$$(2) \quad - 3 * T \# X = \emptyset$$

$$(3) \quad 3 * (- X \# X, X + U \# X, U) = \emptyset$$

$$(4) \quad - 3 * T \# U = \emptyset$$

(5) $-3 * X \# U = \emptyset$

(6) $3 * X \# X - T \# T = \emptyset$

(7) $(2 * U * T \# T + 3 * U \# + 9 * U \# X, X, U - 3 * X \# X, X, X - 3 * X \# T) / 3 = \emptyset$

(8) $3 * U \# U, U = \emptyset$

Решение этой системы уравнений даёт известную 4-параметрическую алгебру Ли точечных симметрий уравнения КдФ (см., например, [70]).

Простейшая система ЛУЧП.

2. Уравнения околосвукового установившегося плоскопараллельного течения газа [56].

$$U_y = V_x, \quad V_y = -U U_x \tag{II}$$

Вход:

$M := N := 2;$

$KM := 1;$

$VR(1) := X; \quad VR(2) := Y; \quad VR(3) := U; \quad VR(4) := V;$

$FF(1) := U J' Y - V J' X; \quad FF(2) := V J' Y + U * U J' X;$

$SZ(1) := U J' Y; \quad SZ(2) := V J' Y;$

Выход:

INPUT SYSTEM

(1) $-V'X + U'Y = \emptyset$

(2) $U * U'X + V'Y = \emptyset$

POINT TRANSFORMATIONS

DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER = 10)

$$(1) \quad U \# Y - V \# X = \emptyset$$

$$(2) \quad U \# U - V \# V + X \# X - Y \# Y = \emptyset$$

$$(3) \quad -Y \# U + X \# V = \emptyset$$

$$(4) \quad -(U * Y \# X + X \# Y) = \emptyset$$

$$(5) \quad U * U \# X + V \# Y = \emptyset$$

$$(6) \quad 2 * (U * U \# V + V \# U) = \emptyset$$

$$(7) \quad -(U * Y \# V + X \# U) = \emptyset$$

$$(8) \quad -2 * U * V \# V + 2 * U * U \# U + U \# = \emptyset$$

Оба примера рассматривались в I24. Видно, что в случае уравнения КдФ, устранение лишних связей с помощью процедуры GAUSS привело к существенному уменьшению числа определяющих уравнений.

Контактные преобразования.

3. Уравнение стационарного околосзвукового течения газа

Если ввести потенциал скоростей Ψ ;

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

то из системы (II) можно получить эквивалентное ей уравнение:

$$\Psi_x \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0 \tag{I2}$$

Поскольку здесь пространство Ψ одномерно, возможно расширение группы симметрий, если воспользоваться контактными преобразованиями.

Вход:

$$N := KM := 2;$$

$$M := 1;$$

VR(1):=X; VR(2):=Y; VR(3):=PSI;

FF(1):=PSI]'X+PSI]'X],X+PSI]'Y],Y;

TANG:=1

ВЫХОД:

INPUT SYSTEM

(1) PSI'X+PSI'X,X+PSI'Y,Y=∅

CONTACT TRANSFORMATIONS

DETERMINING EQUATIONS (INITIAL NUMBER=5)

(1) W#PSI, PSI*PY²+W#PSI, PSI*PX³+W#X, X*PX

+2*PY*W#Y, PSI+W#Y, Y+2*PX²*W#X, PSI=∅

(2) 2*(W#PSI, PX*PY+W#Y, PX+W#X, PY*PX+PX²*W#PSI, PY)=∅

(3) W#PX, PX+PX*W#PY, PY=∅

(4) W#PSI*PX+2*W#X, PX*PX+2*W#PSI, PX*PX²

-2*W#PSI, PY*PY*PX+W#X-2*PX*W#Y, PY=∅

Уравнение I2 имеет шестимерную группу точечных симметрий, тогда как группа контактных преобразований бесконечномерна. Наличие столь широкой группы симметрий позволяет свести уравнение I2 к линейному с помощью так называемого преобразования голографа.

§ 2. Вычисление симметрий Ли-Беклунда

Группа Ли-Беклунда определяется как группа касательных преобразований бесконечного порядка, т. е., координаты алгебры Ли зависят от неограниченного ряда производных [30].

Вектор алгебры Ли, называемый оператором Ли-Беклунда, имеет вид

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} \eta_{i_1 \dots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}, \quad (13)$$

где $x^i (i=1, \dots, n)$ - независимые, $u^\alpha (\alpha=1, \dots, m)$ - зависимые переменные, $u_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ - координаты расслоения джетов соответствующие частным производным u^α по x^{i_1}, \dots, x^{i_s} .

Функции $\xi^i, \eta^\alpha, \dots, \eta_{i_1 \dots i_s}^\alpha, \dots$ зависят от переменных $x^i, u^\alpha, \dots, u_{i_1 \dots i_s}^\alpha, \dots$ и связаны между собой обычными формулами продолжения:

$$\eta_{i_1 \dots i_{s+1}}^\alpha = D(\eta_{i_1 \dots i_s}^\alpha) - u_{j i_1 \dots i_s}^\alpha D(\xi^j),$$

где $D = (D_1, \dots, D_n)$ - оператор полного дифференцирования,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{s \geq 0} u_{i i_1 \dots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}, \quad \eta_0^\alpha = \eta^\alpha$$

Исследуемую систему уравнений $F = 0$ вместе со всеми дифференциальными следствиями называют дифференциальным многообразием и обозначают символом [F]

$$[F]: F = 0, \dots, F_\nu = 0, \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

По определению, система уравнений $F = 0$ называется инвариантной относительно группы Ли-Беклунда, если инвариантно диффе-

рещиальное многообразие $[F]$. Существует теорема, утверждающая, что дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно группы Ли-Феклунда тогда и только тогда, когда

$$(X F)_{[F]} = 0.$$

Другими словами, достаточно подействовать оператором X только на исходные уравнения, но при переходе на многообразие учесть дифференциальные следствия.

Операторы Ли-Феклунда вида

$$X_* = \sum_*^i D_i,$$

где ξ_*^i - произвольные функции переменных $x^i, u^\alpha, \dots, u_{i_1, \dots, i_k}, \dots$ оставляют инвариантным произвольное дифференциальное многообразие и, следовательно, не дают вклада в условие инвариантности. Кроме того, легко проверить, что эти операторы образуют идеал в алгебре Ли всех операторов Ли-Феклунда. Следовательно, без потери общности, можно рассматривать фактор-алгебру полной алгебры Ли по идеалу, образуемому операторами X_* .

Выбирая вместо операторов (13) эквивалентные им в фактор-алгебре операторы с нулевыми координатами ξ^i , получим так называемые канонические операторы:

$$X = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots, \tag{14}$$

Переход к каноническим операторам существенно упрощает вычисления, т. к. теперь вместо $n+m$ функций достаточно рассматривать только m . Это особенно важно при использовании ЭВМ. Кроме того, формулы продолжения приобретают простой вид:

$$\eta_{i_1 \dots i_s}^\alpha = D_{i_1} \dots D_{i_s} (\eta^\alpha).$$

С использованием канонических операторов условие инвариантности (определяющее уравнение) имеет следующий вид:

$$\left\{ \eta^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} + D_i (\eta^\alpha) \frac{\partial F}{\partial u_i^\alpha} + \dots \right\}_{[F]} = 0 \quad (15)$$

Решения определяющего уравнения, зависящие от производных k -го порядка и не зависящие от производных более высоких порядков, называются решениями k -го порядка. Если проследить за тем, чтобы при переходе на дифференциальное многообразие производные первого порядка не выражались через производные более высоких порядков, то контактным преобразованиям будут соответствовать решения первого порядка. Фоочечным преобразованиям отвечают решения первого порядка, линейные по производным (с учётом возможных замен при переходе на многообразии), т. е. решения вида

$$\eta^\alpha(x, u) = \xi^i(x, u) u_i^\alpha,$$

где ξ^i, η^α - обычные координаты алгебры Ли точечных преобразований. Заметим, что группа точечных преобразований, получаемая из решений определяющих уравнений Ли-Беклунда, может оказаться шире классической. Это может произойти, если некоторые уравнения рассматриваемой системы имеют порядок, меньший максимального для системы, поскольку при переходе на многообразии будут учитываться дифференциальные следствия этих уравнений. Классическое определение инвариантности дифференциальные следствия не использует.

К настоящему времени наиболее изучены алгебры Ли-Беклунда эволюционных уравнений с одной пространственной переменной, т. е., уравнения вида

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Это связано со специальным видом вхождения в уравнения оператора дифференцирования по времени. Задача сводится к изучению дифференциальной алгебры с одной независимой переменной. Такие алгебры достаточно полно исследованы. С вычислительной точки зрения одномерные эволюционные уравнения характеризуются линейной зависимостью числа производных от порядка симметрий. В многомерном случае число производных является полиномом n -й степени от k , где n - размерность пространства независимых переменных, k - порядок симметрий Ли-Беклунда.

Основной приём для получения решений определяющего уравнения, применяемый в большинстве работ, состоит в поиске так называемого оператора рекурсии, т. е., оператора R , удовлетворяющего соотношению

$$[L, R]_{[F]} = 0,$$

где L - линейный дифференциальный оператор определяющего уравнения. Ясно, что если $\eta^{(1)}$ - решение определяющего уравнения, то и $\eta^{(2)} = R \eta^{(1)}$ также решение. Таким образом, с помощью оператора рекурсии можно, исходя из известных решений, например, точечных или контактных, получать новые. Эффективные общие методы построения операторов рекурсии отсутствуют. На практике их обычно ищут либо используя какие-нибудь подстановки, либо просто сравнивая между собой решения невысоких порядков, полученные прямым вычислением (см., например, [78]).

Описание программы.

Координаты пространства $Z_k = (x, u, u_1, \dots, u_k)$ и производные функций η упорядочиваются в лексикографическом порядке, аналогично тому как это было сделано в § I. Для внутреннего представления координат пространства Z_k используется символьный массив языка PL/I, имеющий имя ZK. Для представления функций η и их производных используется массив с именем Z#. Определяющие уравнения алгебры Ли-Беклунда содержат производные функций η по производным функций u . Для того, чтобы на печати получались по возможности менее громоздкие выражения мы приняли ограничение, заключающееся в использовании для независимых и зависимых переменных только однокбуквенных символов. Продемонстрируем с помощью примеров соответствие между принятыми в математике и используемыми в программе обозначениями. Пусть имеются независимые переменные x, y и зависимые u, v . Векторное поле (I4) имеет вид

$$X = \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} + \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} + D_x(\dot{u}) \frac{\partial}{\partial (u_x)} + D_y(\dot{u}) \frac{\partial}{\partial (u_y)} + \\ + D_x(\dot{v}) \frac{\partial}{\partial (v_x)} + D_y(\dot{v}) \frac{\partial}{\partial (v_y)} + \dots$$

Тогда производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на входе и выходе будет иметь вид UXY , а производная координаты векторного поля \dot{v} , имеющая математическое обозначение $\frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial x \partial u \partial (v_{xx})}$ на выходе примет вид $V\#.(X, u, VXX)$. (*Мы воспользовались принятым в системе FORMAC способом изображения функций.) Поскольку в системе FORMAC идентификатор переменной не может содер-

жать более восьми символов, наш способ изображения производных приводит к тому, что на печать можно вывести определяющие уравнения не выше седьмого порядка. Конечно, за счёт некоторого усложнения формы вывода это ограничение можно снять. Мы этого не делаем, поскольку на современных ЭВМ получение определяющих уравнений даже седьмого порядка достаточно трудная задача, если рассматриваются уравнения с многомерным пространством независимых переменных.

Программа последовательно выполняет следующие действия:

1/. Чтение и печать входных данных.

2/. Вычисление размерностей используемых пространств и создание рабочей последовательности ZK для экономного представления ряда (x, u, u_1, u_2, \dots) .

3/. Вычисление дифференциальных следствий входной системы уравнений до требуемого порядка. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Мы рассматриваем дифференциальные следствия не выше некоторого определённого порядка k . Если исходная система уравнений не находится в инволюции, то может оказаться, что не вычисляемые нами дифференциальные следствия порядков, более высоких чем k в качестве своих алгебраических следствий порождают соотношения порядков $\leq k$. Учёт этих новых соотношений может привести к расширению группы симметрий.

Приведение системы уравнений в инволюцию - сложная самостоятельная задача [13, 58, 60]. Существуют вычислительные программы для решения этой задачи, реализующие метод внешних форм Картана [2] и метод Рикье-Фане-Томаса [13, 14, 60, 130].

В нашей программе приведение входной системы в инволюцию не делается. Поэтому, если есть подозрение, что входная система не в инволюции, то, чтобы гарантированно получить максимальную алгебру инвариантности, систему нужно предварительно привести

в инволюцию.

4/. Создание рабочего массива $Z\#$ для экономного представления ряда из производных координат векторного поля. Вычисление продолжений векторного поля.

5/. Вычисление левой части условия инвариантности (15) с переходом на многообразии. В этом месте может случиться, что для какого-либо уравнения исходной системы нет производных относительно которых это уравнение можно было бы разрешить явно. Таково, например, уравнение приведённое в [73]:

$$\square u + \lambda_1 \sin(\square u) + \lambda_2 \sin \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

В подобных случаях при переходе на многообразии программа использует только те уравнения, которые удалось разрешить и печатает сообщение

****TRANSITION TO MANIFOLD IS NOT COMPLETE**
(Переход на многообразии не полный).

Разумеется, в подобных случаях алгебра инвариантности может оказаться не максимальной. Заметим, что уравнения дифференциальных следствий, будучи линейными по высшим производным, разрешаются всегда.

После перехода на многообразии уравнения дифференциального многообразия печатаются в виде, разрешённом относительно производных, исключённых при переходе. Затем уравнения многообразия уничтожаются в памяти ЭВМ, т. к. они больше не потребуются.

6/. Разделение определяющих уравнений. В отличие от программы для вычисления точечных и контактных симметрий, здесь разделение производится не только по отношению к различным степеням "свободных" производных, но и по отношению к произвольным независимым функциям таких производных. Здесь необ-

ходима осторожность, поскольку программа не учитывает того, что такие функции могут оказаться зависимыми при частных значениях параметров. Если такие ситуации возникают, то частные случаи уравнений должны быть обработаны программой отдельно. (В § 3 приведён поясняющий пример.) В процессе разделения определяющих уравнений сразу же выполняется "вычёркивание нулей", т. е., если возникают одночленные определяющие уравнения, то они тут же подставляются во все выражения. Это делается с целью экономии памяти.

7/. Устранение линейных зависимостей с помощью метода Гаусса. Вначале выполняется прямой ход метода Гаусса, причём подстановки в уже обработанные уравнения выполняются только при появлении одночленных уравнений.

8/. Обратный код метода Гаусса и вывод на печать определяющих уравнений. При обратном коде очередное уравнение подставляется во все оставшиеся, затем элементы массивов ZK и $Z\#$ в уравнении заменяются выходными обозначениями и производится вывод уравнения на печать в разрешённом относительно некоторой производной виде. Затем память ЭВМ освобождается от этого уравнения.

Рассмотрим, для краткости, получение определяющих уравнений первого порядка для одномерного линейного уравнения теплопроводности. Ниже слева будет приведена информация в том виде, как она вводится в ЭВМ или выводится на печать, - справа - эквиваленты в математической символике или пояснения.

- Вход:
- 1 - порядок определяющих уравнений
 - 'HEAT EQUATION' - пояснительная информация
 - 'XT"U' - независимые и зависимые переменные

'UT - UXX' - уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2 - порядок уравнения (если рассматривается система уравнений, то нужно последовательно ввести все уравнения, указав после каждого его порядок).

На выходе будет напечатана следующая информация:

INPUT DATA

SYMMETRY ORDER 1

HEAT EQUATION

VARIABLES XT"U

EQUATIONS

UT - UXX = 0 2

DIMENSIONS OF THE SPACES

N=2 M=1 NE=1 - количества независимых и зависимых переменных, число уравнений

EQUATIONS OF THE MANIFOLD

$\underline{UXX} \equiv \underline{UT}$ - $U_{xx} = U_t$

$\underline{UXXX} \equiv \underline{UXT}$ - $U_{xxx} = U_{xt}$

$\underline{UXXT} \equiv \underline{UTT}$ - $U_{xxt} = U_{tt}$

DETERMINING EQUATIONS OF THE ORDER 1

U#. (UT, UT)

$\underline{O(1)} = \underline{0}$

U#. (UX, UT)

$\underline{O(2)} = \underline{-(U\#. (X, UT) + UX \cdot U\#. (U, UT)) / UT}$

U#. (UX, UX)

$\underline{O(3)} = \underline{(U\#. (T) - U\#. (X, X) - 2 UX UT U\#. (U, UX) - 2 UX U\#. (X, U)}$

$\underline{- 2 UT U\#. (X, UX) - UX^2 U\#. (U, U)) / UT^2}$

Здесь - правая часть -го определяющего уравнения, т.е., в переводе на обычные обозначения, мы получили три определяющих уравнения:

$$* \ddot{u}_t, \ddot{u}_t = 0,$$

$$\ddot{u}_{u_x, u_t}^* = -(\ddot{u}_{x, u_t}^* + u_x \ddot{u}_{u, u_t}^*) / u_t,$$

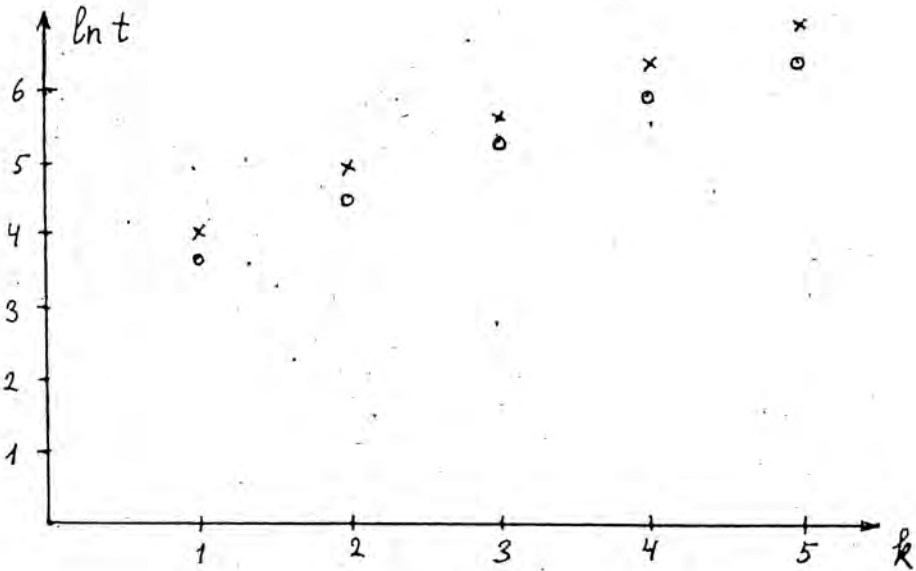
$$\ddot{u}_{u_x, u_x}^* = (\ddot{u}_t^* - \ddot{u}_{x, x}^* - 2u_x u_t \ddot{u}_{u, u_x}^* - 2u_x \ddot{u}_{x, u}^* - 2u_t \ddot{u}_{x, u_x}^* - u_x^2 \ddot{u}_{u, u}^*) / u_t^2.$$

Приведём некоторые количественные характеристики программ. В таблице представлены затраты времени и памяти ЭВМ ЕС-1022 при обработке уравнения теплопроводности и системы уравнений плоско-параллельного движения газа.

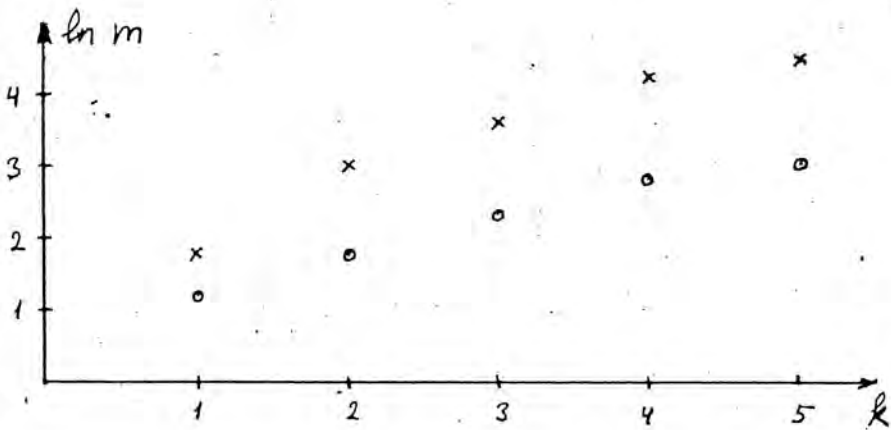
Система уравнений		Порядок симметрий				
		1	2	3	4	5
$u_t - u_{xx} = 0$	Время сек	38,26	89,1	189,98	358,64	643
	Память К	194	196	200	206	212
$\begin{cases} u_y - v_x = 0 \\ v_y + u u_x = 0 \end{cases}$	Время сек	57,16	124,84	280,02	572,4	1043
	Память К	196	210	226	260	284

Для наглядности приведём в логарифмическом масштабе графики зависимостей времени и памяти от порядков симметрий Ли-Беклунда. Выбирая логарифмический масштаб для графика памяти, мы вычли из памяти 190К, т. к. эта память занята самой программой, а не вычисляемыми структурами. Из графиков видна полиномиальная зависимость объёма вычислений от порядка симметрий.

Время



Память



o - уравнение $u_t - u_{xx} = 0$

x - система уравнений $\begin{cases} u_y - v_x = 0 \\ v_y + u u_x = 0 \end{cases}$

m - память минус 190 К

t - время

k - порядок симметрии

§ 3. Локальные симметрии некоторых уравнений теоретической физики

В [79] были поставлены задачи исследования симметричных свойств ряда уравнений математической и теоретической физики и, в частности, следующих скалярных уравнений:

$$\square u + \lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x^m} = 0,$$

$$\square u + \lambda_1 \partial u / \partial t + \lambda_2 (\partial u / \partial t)^k = 0,$$

$$\square u + \lambda_1 u + \lambda_2 (1 - \lambda_3 u^2) \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\square u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^3 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda_1 \Delta (u^k) + \lambda_2 (\Delta u)^k = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \square u + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x^m} = 0.$$

Здесь $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, $\frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x^m} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$,

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, k$ - параметры. Приведём алгебры симметрий этих уравнений, полученные с помощью программы для вычисления симметрий Ли-Феклунда. Мы рассматривали решения первого порядка, которые для всех этих уравнений оказались эквивалентными точечным симметриям.

Алгебра инвариантности уравнения А.

$$\square u + \lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x^m} = 0. \quad (A)$$

Будем считать, что $\lambda_1 \neq 0$, т. к. в противном случае получается хорошо изученное уравнение Клейна-Гордона.

При $\lambda \neq 0$ алгеброй инвариантности является 10-мерная алгебра Пуанкаре:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$r_{12} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad r_{13} = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad r_{23} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y},$$

$$b_1 = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}, \quad b_2 = y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y}, \quad b_3 = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}.$$

При $\lambda = 0$ алгебра инвариантности включает 15-мерную конформную алгебру, генератор сдвига по u и бесконечномерную подалгебру. Операторы, дополнительные к алгебре Пуанкаре, имеют вид:

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$c_0 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial t} + 2xt \frac{\partial}{\partial x} + 2yt \frac{\partial}{\partial y} + 2zt \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2t}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_1 = 2xt \frac{\partial}{\partial t} + (t^2 + x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xz \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2x}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_2 = 2yt \frac{\partial}{\partial t} + 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (t^2 - x^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yz \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2y}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_3 = 2zt \frac{\partial}{\partial t} + 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (t^2 - x^2 - y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2z}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$s = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_\infty = \psi(x, y, z, t) e^{-\lambda_1 u} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь Ψ - произвольное решение уравнения

$$\square \Psi = 0.$$

При $\lambda = 0$ уравнение является автоморфным, т. е., все его решения можно получить из любого частного с помощью преобразований из группы симметрий. Решая уравнение Ли, соответствующее подалгебре e_∞ :

$$\frac{dU}{d\Psi} = e^{-\lambda_1 U}$$

(Это бесконечная совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений.), получаем линеаризующую подстановку

$$U = \frac{\ln \Psi}{\lambda_1},$$

переводящую уравнение

$$\square U + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \frac{\partial U}{\partial x^\mu} = 0$$

в уравнение

$$\square \Psi = 0.$$

Заметим, что такая подстановка переводит произвольное уравнение вида

$$\square U + \Phi(U) + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \frac{\partial U}{\partial x^\mu} = 0$$

в уравнение не содержащее квадрата 4-градиента:

$$\square \Psi + \lambda_1 \Psi \Phi(\ln \Psi / \lambda_1) = 0.$$

$$\square u + \lambda_1 \partial u / \partial t + \lambda_2 (\partial u / \partial t)^k = 0 \quad (B)$$

Не будем рассматривать линейные уравнения, соответствующие значениям параметров $k=1$, $k=0$ и $\lambda_2=0$.

В случае $k \neq 2$, $\lambda_1 \neq 0$ имеется следующий набор генераторов симметрий:

$$p_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$z_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad z_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad z_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y},$$

$$e_\infty = \Phi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u},$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению $\Delta \Phi = 0$.

Таким образом, имеются сдвиги координат, пространственные вращения и сдвиг зависимой переменной на произвольную гармоническую функцию.

Если $k=2$, то к операторам $p_0, p_1, p_2, p_3, z_1, z_2, z_3$ добавятся операторы

$$d_\infty = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + \left\{ \Phi(x, y, z) - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} t \right\} \frac{\partial}{\partial u}$$

и

$$e_\infty = \Psi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Функция Φ - произвольное решение уравнения

$$\Delta \Phi + \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} = 0,$$

а функция Ψ удовлетворяет уравнению $\Delta \Psi = 0$.

Алгебра инвариантности уравнения В.

$$\square u + \lambda_1 u + \lambda_2 (1 - \lambda_3 u^2) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (B)$$

Это уравнение предложено в [72] как многомерное обобщение осциллятора Ван дер Поля. Будем считать, что $\lambda_2 \neq 0$, т. к. иначе получается уравнение Клейна-Гордона.

Алгебра инвариантности 10-мерна и включает генераторы:

сдвигов - P_0, P_1, P_2, P_3 ,

трёхмерных вращений - Z_1, Z_2, Z_3 ,

масштабного преобразования -

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + f(u, t) \frac{\partial}{\partial u}$$

и двух дополнительных преобразований переменной u :

$$e_1 = g(u, t) \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = h(u, t) \frac{\partial}{\partial u},$$

где функции f, g и h определяются уравнениями:

$$\dot{u}(u, t) = c_d f + c_1 g + c_2 h,$$

$$\dot{u}_{tt} + \lambda_1 \dot{u} - \lambda_1 u \dot{u}_u + \dot{u}_t \lambda_2 (1 - u^2 \lambda_3) + 2 \lambda_1 u c_d = 0,$$

$$\dot{u}_{tu} - \lambda_2 \lambda_3 u \dot{u} + (1 - u^2 \lambda_3) c_d \lambda_2 / 2 = 0.$$

Здесь c_d, c_1, c_2 - координаты вектора алгебры Ли, соответствующие генераторам d, e_1, e_2 . Из последних двух уравнений следует соотношение

$$\dot{u}_{ttt} + \lambda_2 (1 - \lambda_3 u^2) \dot{u}_{tt} + \lambda_1 \dot{u}_t - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 u^2 \dot{u} +$$

$$+ (1 - \lambda_3 u^2) u c_d \lambda_1 \lambda_2 / 2 = 0,$$

представляющее собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Таким образом, задача сводится к решению алгебраического уравнения третьей степени

$$p^3 + p^2 \lambda_2 (1 - \lambda_3 u^2) + p \lambda_1 - u^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Окончательные выражения сложны. Например, даже в случае $\lambda_1 = 0$ решение выражается через интегралы вероятности.

Алгебра инвариантности уравнения Г.

$$\square u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^3 = 0 \quad (\Gamma)$$

Случай $\lambda_2 = 0$ сводится к уравнению Клейна-Гордона, случай $\lambda_1 = 0$ — рассмотренный частный вариант уравнения (В).

Базисные элементы алгебры инвариантности при $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$:

$$P_0, P_1, P_2, P_3, Z_1, Z_2, Z_3, e_\infty = \Phi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u},$$

где Φ — произвольное решение уравнения

$$\Delta \Phi = \lambda_1 \Phi.$$

Алгебра инвариантности уравнения П.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda_1 \Delta (u^k) + \lambda_2 (\Delta u)^k = 0 \quad (\Delta)$$

Условие инвариантности имеет вид

$$\begin{aligned} & \underline{D_t^2}(\dot{u}^*) + \lambda_1 \{ k(k-1)(k-2) u^{k-3} \nabla u^2 \dot{u}^* + k(k-1) u^{k-2} \times \\ & \times (D_x + D_y + D_z) \dot{u}^* + k(k-1) u^{k-2} \Delta u \dot{u}^* + k u^{k-1} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \dot{u}^* \} + \end{aligned}$$

$$+ \lambda_2 k (\Delta u)^{k-1} (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) u^* = 0$$

Подчёркнутые члены (после перехода на многообразие) содержат переменные u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} в степенях 0, 1, 2, а последний член содержит эти переменные в степенях $k-1$ и выше. Здесь возникает ситуация отмеченная в пункте 6/ описания работы программы. Это приводит к необходимости отдельной обработки случаев $k=1, 2, 3$. Случай $k=1$ рассматривать не будем. (Получается волновое уравнение с конформной алгеброй инвариантности.) При $k \neq 1$ решение определяющих уравнений приводит к необходимости выделить следующие 9 случаев:

$$\underline{1. \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, k \neq 2}$$

Алгебра инвариантности 7-мерна и содержит следующие генераторы:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Z_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Алгебра инвариантности этого случая минимальна в том смысле, что все остальные случаи содержат её в качестве подалгебры. Поэтому для остальных случаев мы приведём только дополнительные генераторы.

$$\underline{2. \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, k = 2}$$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$\underline{3. \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, k = 3}$$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, k \neq -3, 1/5, 3.$

$$d_1 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$d_2 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{24}{k-1} \frac{\partial}{\partial u}.$$

5. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, k = -3.$

$$d_1 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$d_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4}{2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + ut \frac{\partial}{\partial u}.$$

6. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, k = 1/5.$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$c = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{5}{2} u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_1 = (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xz \frac{\partial}{\partial z} - 5xu \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_2 = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yz \frac{\partial}{\partial z} - 5yu \frac{\partial}{\partial u},$$

$$c_3 = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z} - 5zu \frac{\partial}{\partial u}.$$

7. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, k \neq 2, 3.$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e'_\infty = \psi(x, y, z) t \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty}^2 = \varphi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u},$$

ψ и φ - произвольные гармонические функции:

$$\Delta \psi = \Delta \varphi = 0.$$

$$\text{в. } \underline{\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, k = 2.}$$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e = t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty}^1 = \psi(x, y, z) t \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty}^2 = \varphi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\Delta \psi = \Delta \varphi = 0.$$

$$\text{г. } \underline{\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, k = 3.}$$

$$d = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e = t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty}^1 = \psi(x, y, z) t \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty}^2 = \varphi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\Delta \psi = \Delta \varphi = 0.$$

Алгебра инвариантности уравнения Е.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \square u - \lambda u \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x^m} = 0 \quad (\text{E})$$

Операторы симметрии:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$e_5 = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_6 = t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_7 = t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t},$$

$$e_8 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_9 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_{10} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z},$$

$$e_{11} = \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_{12} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad e_{13} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$e_{14} = x\tau \frac{\partial}{\partial x} + y\tau \frac{\partial}{\partial y} + z\tau \frac{\partial}{\partial z} + t\tau \frac{\partial}{\partial t} + \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}{4} - 2\tau \right) \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{15} = \tau \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2} \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_{16} = \tau \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{2} \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{17} = \tau \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{2} \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_{18} = \tau \frac{\partial}{\partial t} - \frac{t}{2} \Phi(u) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$e_{\infty} = \Psi(x, y, z, t, \tau) e^{-\frac{\lambda}{2} u^2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь $\Phi(u) = \int_0^u e^{\frac{\lambda}{2}(v^2 - u^2)} dv$, а $\Psi(x, y, z, t, \tau)$ — произвольное решение уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \square \Psi = 0 \quad (\text{E}')$$

Операторы $e_1 - e_{10}$ образуют алгебру Пуанкаре. Очевидно, что уравнение (E) автоморфно, т. е. все его решения лежат на одной орбите относительно действия группы симметрий. Решая уравнение Ли, связанное с бесконечномерной подалгеброй e_∞ :

$$\frac{du}{d\psi} = e^{-\frac{\lambda u^2}{2}},$$

получим:

$$\psi = F(u) = \int e^{\frac{\lambda u^2}{2}} du = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{-2\lambda}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{2}} u\right), & \lambda < 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} u\right), & \lambda > 0 \end{cases}$$

Обращение интеграла вероятности даёт линеаризующую подстановку $u = F^{-1}(\psi)$, переводящую уравнение (E) в линейное уравнение (E').

ГЛАВА 2

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ СВОЙСТВ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДИРАКА

Наряду с локальными симметриями большой интерес представляют нелокальные симметрии и законы сохранения. Вычисление нелокальных симметрий — гораздо более сложная задача по сравнению со случаем локальных.

Существует несколько подходов к определению нелокальных симметрий. В работе Н. Н. Боголюбова [960 г. [5] впервые были использованы нетривиальные нелокальные законы сохранения. Они были введены для изучения спектра модельного гамильтониана в теории сверхпроводимости. В работе [115] были получены нелокальные законы сохранения для двумерной δ -модели. Имеется ряд работ, в которых нелокальные симметрии получаются в результате расширения симметрий Ли-Геклунда путём добавления к пространству джетов нелокальных переменных, представляющих собой интегралы. Это осуществляется, например, с помощью введения отрицательных степеней оператора дифференцирования в формализме теории групп Ли-Геклунда (см., например, [2, 95, 116]). Недавно в работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича был предложен общий подход к определению нелокальных законов сохранения для нелинейных уравнений [8, 9]. С помощью этого подхода были получены новые законы сохранения для ряда уравнений математической физики.

Важным аспектом при изучении нелокальных симметрий является эффективность, т. е., возможность явно вычислить эти симметрии. Эффективности можно достигнуть сужая либо класс рассматриваемых уравнений, либо само определение нелокальных симметрий. Эффективный метод вычисления нелокальных симметрий

уравнений математической и теоретической физики был предложен в работах В. И. Фушича [70-72] и развит в [76, 77].

Подход, предложенный в этих работах принципиально отличается от методов, использующих преобразования Ли и Ли-Беклунда и успешно применялся к основным уравнениям релятивистской квантовой теории: Максвелла, Дирака, Кеммера-Деффина, Рариты-Швингера и т. д., причём для этих достаточно хорошо изученных уравнений были получены неизвестные ранее симметрии и законы сохранения.

Ключевая идея подхода состоит в поиске совокупности операторов, коммутирующих с оператором исследуемой системы уравнений на решениях этой системы. Иными словами, если имеется линейная система уравнений вида

$$L \psi = 0, \quad (1)$$

то оператором симметрии по определению [52, 71] называется оператор R , удовлетворяющий условию

$$[L, R] = AL \quad (2)$$

где A - некоторый оператор. Операторы R переводят решения системы (1) в решения. Для того, чтобы решить уравнение (2) относительно R удобнее всего перейти к символам операторов и воспользоваться формулой, выражающей символ суперпозиции операторов через их собственные символы [79]. Переходя к символам из уравнения (2) получим

$$\sum_{\alpha} (-i)^{|\alpha|} \left\{ \partial_p^{\alpha} L \cdot \partial_x^{\alpha} R - \partial_p^{\alpha} (R+A) \cdot \partial_x^{\alpha} L \right\} / \alpha! = 0. \quad (3)$$

Здесь уже L , R и A - символы соответствующих операторов, векторы x образуют n -мерное пространство независимых переменных, ковекторы p образуют сопряжённое пространство (выполняется соответствие $p_k = -i \frac{\partial}{\partial x^k}$), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс. Для операторов L полиномиальных по x и p сумма в левой части (3) является конечной.

Рассмотрим, для определённости, уравнение Дирака. Символ оператора Дирака имеет вид

$$L = -\gamma^\mu p_\mu - m, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4)$$

и уравнение (3) приобретёт вид

$$i \gamma^\mu \frac{\partial R}{\partial x^\mu} + \{(R+A)\gamma^\mu - \gamma^\mu R\} p_\mu + Am = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой систему уравнений с постоянными коэффициентами и поэтому его можно решать, воспользовавшись преобразованием Фурье по переменным x^μ . Обозначим для этого преобразования сопряжённые переменные через q_μ , оставив для Фурье-образов R и A те же обозначения, тогда (5) примет вид матричного уравнения

$$FR - RG = H \quad (6)$$

где $F = -\gamma^\mu (p_\mu + q_\mu)$, $G = -\gamma^\mu p_\mu$, $H = -A(\gamma^\mu p_\mu + m)$.

Удобно решать уравнение (6), приведя матрицы F и G к жордановой форме. Уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$J_F R' - R' J_G = H' \quad (7)$$

где $J_F = V F V^{-1}$, $J_G = W G W^{-1}$ - жордановы формы матриц F и G соответственно, $R' = V R W^{-1}$, $H' = V H W^{-1}$.

Таким образом, мы видим, что уравнение (5) сводится к квадратурам и решается полностью (в классе функций, допускающих Фурье-представление), т. е.; симметрии системы Дирака рассматриваемого нами типа можно найти в явном виде. Понимается, это связано с тем, что уравнение Дирака можно решить с помощью преобразования Фурье.

Особый интерес представляют конечномерные совокупности операторов симметрий. Выделять такие совокупности можно различными способами. Можно, например, искать R в виде полиномов по переменным P , т. е., в виде дифференциальных операторов конечных порядков. Такой подход позволяет получать новые операторы симметрии (наряду с классическими) для фундаментальных уравнений теоретической физики [55]. Мы рассмотрим подход, использовавшийся в [70-72] и основанный на выборе в уравнениях типа (5) R не зависящим от X и $A = 0$. Для уравнения Дирака, например, это приведёт к условию

$$R \gamma^m P_m - \gamma^m P_m R = 0.$$

Переход к жорданову базису даёт уравнение типа (7). Жорданов базис даёт возможность сразу в явном виде получить структуру системы операторов симметрии, поскольку в этом базисе система уравнений разбивается на независимые подсистемы. Таким образом, задача сводится к проблеме приведения символьной (нечисловой) матрицы к жорданову виду.

Приведение матрицы к жорданову виду, включая в себя в виде подзадачи проблему собственных значений, является одной из наиболее технически трудных задач линейной алгебры. Для вычисле-

ния собственных значений числовых матриц только в недавнее время были разработаны так называемые QR -алгоритмы [11, 12], признанные удовлетворительными. Эти алгоритмы являются итерационными и поэтому совершенно непригодны для символьных матриц, для которых отсутствует понятие сходимости. Поэтому мы использовали более прямые методы. Алгоритм, описанный в § 1, состоит из двух основных частей и реализован в виде двух отдельных программ на языке *PL/I-FORMAC*. Первая часть алгоритма служит для получения характеристических полиномов матрицы и в тех случаях, когда степень полинома не превышает четырёх, для вычисления корней. (Заметим, что характеристический полином часто вычисляется программой в факторизованном виде, т. е., в виде произведения полиномов более низких степеней. Это свойство использованного нами метода А. М. Данилевского приведения матрицы к канонической форме Фробениуса.)

Вторая часть алгоритма по заданным характеристическим числам λ_i матрицы M вычисляет жорданову форму и матрицу преобразования. Для выяснения структуры жордановой матрицы мы воспользовались геометрическим подходом, основанным на вычислении рангов степеней матрицы $M - \lambda_i E$. Предложенные программы применимы к произвольным символьным матрицам и их можно использовать для решения соответствующих задач линейной алгебры вне связи с поиском симметрий дифференциальных уравнений.

В § 2 описано применение алгоритмов к уравнению Дирака и 10-компонентному уравнению Кеммера-Деффина-Петье. При этом на ЭВМ были "вычислены" 8-мерная группа нелокальных симметрий

$GL(2) \otimes GL(2)$ для уравнения Дирака и 34-мерная группа

$GL(4) \otimes GL(3) \otimes GL(3)$ - для уравнения Кеммера-Деффина-Петье.

§ I. Алгоритм вычисления нелокальных симметрий и его реализация

Сущность алгоритма состоит в приведении системы уравнений к максимально расщепленному на независимые подсистемы виду, что для уравнений с постоянными коэффициентами осуществляется следующими шагами:

- 1/. Получение символа оператора системы с помощью перехода в импульсное представление.
- 2/. Вычисление характеристического полинома матрицы символа.
- 3/. Решение характеристического уравнения для определения собственных чисел.
- 4/. Приведение над полем \mathbb{C} матрицы символа к каноническому жорданову виду.

Первый шаг состоит в применении преобразования Фурье к системе уравнений. Второй и частично третий шаг реализован в виде программы на языке *PL/I-FORMAC*. Мы воспользовались методом А. М. Данилевского [21, 68] приведения матрицы к канонической форме Фробениуса:

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Характеристический полином матрицы Фробениуса равен

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

а любая матрица приводится к блочно-треугольному виду с фробе-

ниусовыми матрицами на диагонали с помощью элементарных преобразований, не требующих знания собственных значений.

Пусть имеется матрица

$$A = A^{\circ} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\circ} & a_{12}^{\circ} & \dots & a_{1,n-1}^{\circ} & a_{1,n}^{\circ} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}^{\circ} & a_{n,2}^{\circ} & \dots & a_{n,n-1}^{\circ} & a_{n,n}^{\circ} \end{bmatrix}.$$

Здесь и ниже верхний индекс нумерует последовательность матриц, возникающих в процессе вычислений.

Алгоритм приведения выполняется следующим образом:

I/. Начинаем с предпоследнего элемента нижней строки $a_{n,n-1}^{\circ}$.

Если этот элемент не равен нулю - делим на него все элементы $(n-1)$ -го столбца, а из остальных столбцов вычитаем $(n-1)$ -й столбец, умноженный на такие величины, чтобы в нижней строке получались нули. В результате получаем матрицу вида

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица не подобна матрице A° . Чтобы восстановить подобие нужно ещё выполнить некоторое, также элементарное, преобразование, эквивалентное умножению слева на матрицу

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}^{\circ} & a_{n,2}^{\circ} & \dots & a_{n,n-1}^{\circ} & a_{n,n}^{\circ} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это преобразование изменяет лишь
Возникшая матрица

$(n-1)$ -ю строку матрицы B .

$$A^1 = MB = \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,n-1} & a'_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

уже будет подобна матрице A^0 . После этого переходим к $(n-1)$ -й строке и повторяем операцию с элементом, расположенным в позиции $(n-1, n-2)$ и т. д.

2/. Если очередной элемент в позиции $(n-k, n-k-1)$ оказался равным нулю - ищем слева от него в $(n-k)$ -й строке ненулевой элемент. Допустим, что он расположен в l -м столбце, - переставляем $(n-k-1)$ -й и l -й столбцы и одновременно, для сохранения подобия, $(n-k-1)$ -ю и l -ю строки.

3/. Если ненулевой элемент в $(n-k)$ -й строке не найден, то это значит, что матрица A^k имеет блочно-треугольный вид:

$$A^k = \begin{bmatrix} C & | & D \\ \hline 0 & | & F \end{bmatrix}$$

где матрица F уже имеет фробениусову форму. Поскольку

$$\det(A - \lambda E) = \det(A^k - \lambda E) = \det(C - \lambda E) \det(F - \lambda E),$$

сразу можно выделить $\det(F - \lambda E)$ как множитель характеристического полинома и далее применить алгоритм к матрице C . Следуя этому алгоритму, была написана программа *NLP*. Эта программа вычисляет и корни полиномов, если их степень оказывается меньше пяти. Из-за отсутствия в системе *FORMAC*

программ факторизации полиномов, а также из-за ошибки в системе, состоящей в том, что опция *NOTRANS*, служащая для отмены приближённых вычислений функций, не отменяет приближённое вычисление корней из рациональных чисел, выражения для корней иногда получаются неоправданно сложными и требующими последующих упрощений. Для более экономного представления разреженных матриц в памяти ЭВМ мы применяем представление строк матрицы в виде сумм, слагаемыми которых являются произведения элементов матрицы на координаты некоторого стандартного символьного вектора. Ниже будет приведён поясняющий пример.

После определения собственных чисел матрицы и их алгебраических кратностей можно перейти к четвёртому шагу - вычислению жордановой формы J и матрицы преобразования W , удовлетворяющей уравнению

$$WAW^{-1} = J.$$

Для этих целей была написана программа *NLJW*, которая работает следующим образом:

Выполняется цикл последовательного перебора собственных чисел. Выбрав определённый корень, мы должны установить структуру жорданова блока, соответствующего этому корню. Жордановым блоком мы здесь будем называть совокупность всех жордановых клеток с данным корнем λ . Жордановой клеткой порядка P называют матрицу размера $P \times P$ вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

В частности, диагональному случаю соответствуют жордановы

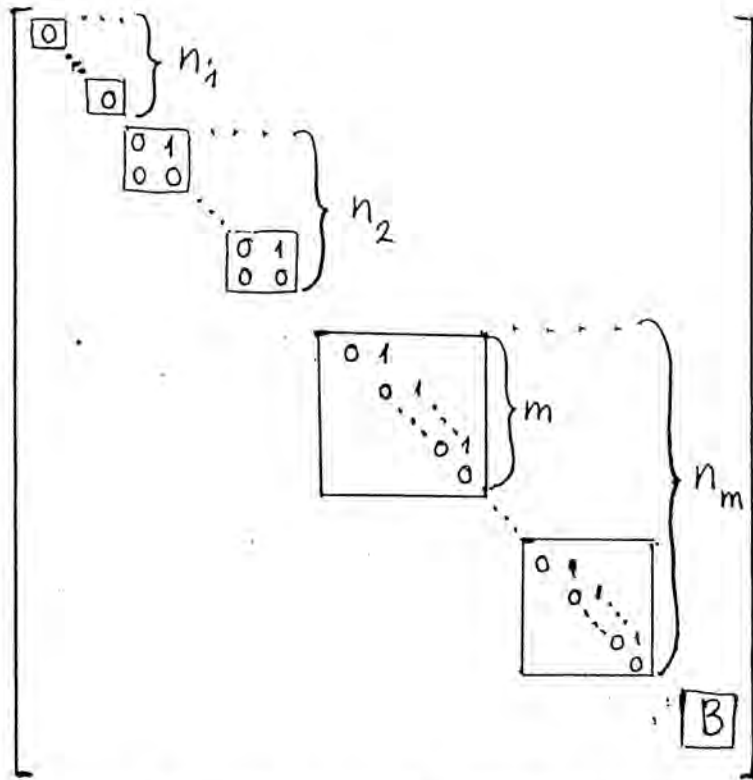
клетки порядка l . Существует два различных подхода к определению структуры жорданова блока - алгебраический и геометрический. Алгебраический подход требует анализа делителей миноров матрицы $A - \lambda E$ и, следовательно, развитых средств факторизации полиномов. Мы использовали геометрический подход, основанный на вычислении рангов степеней матрицы $A - \lambda E$.

Существует общая формула, позволяющая найти число n_p жордановых клеток порядка p в блоке с собственным числом λ (см., например, [3]), именно

$$n_p = \text{rank}(A - \lambda E)^{p-1} - 2 \text{rank}(A - \lambda E)^p + \text{rank}(A - \lambda E)^{p+1}.$$

По определению полагается $\text{rank}(A - \lambda E)^0 = n$, где n - размер матрицы A . Непосредственное использование этой формулы может привести к излишним вычислениям. Во многих случаях (на практике - в большинстве) для определения числа n_p нет необходимости вычислять $\text{rank}(A - \lambda E)^{p+1}$. Вычисление высоких степеней матриц является самым узким местом алгоритма, поскольку сложность элементов матрицы быстро растёт при возрастании степени. Учитывая то, что ранги матриц и числа n_p - неотрицательные целые, можно уменьшить количество возведений матрицы в степень. Именно, рассматривая матрицу $A - \lambda E$ в жордановом базисе, в котором она имеет вид

$$A - \lambda E =$$



(Здесь B - матрица полного ранга.), легко получить соотношения, сводящиеся к следующему. Допустим, что уже найдены числа n_1, n_2, \dots, n_{p-1} тогда нам известна величина $a = k_{alg} - \{n_1 + 2n_2 + \dots + (p-1)n_{p-1}\}$, где k_{alg} - алгебраическая кратность корня λ . Если

$$a < 2n_{p-1} + 2, \tag{8}$$

то в блоке имеется ещё лишь одна клетка размера a , т. е.

$n_a = 1$ и $n_i = 0$ для $i = p, p+1, \dots, i \neq a$. Если

положить по определению $n_0 = 0$, то неравенство (8) включает и часто встречающийся на практике случай алгебраической кратности равной единице. Таким образом, при выполнении неравенства (8) определение структуры жорданова блока завершается.

Если (8) не выполняется, то необходимо вычислить $\text{rank}(A - \lambda E)^p$ (если он не был вычислен раньше для определения числа n_{p-1}), после чего становится известной величина

$$b = k_{alg} - n + \text{rank}(A - \lambda E)^p.$$

Поскольку a, b, n_i — неотрицательные целые, в случаях, когда $b \neq 0$ или $b = 1$ величины n_p, n_{p+1}, \dots определяются однозначно. Именно, если $b = 0$, то $n_p = a/p$, $n_{p+1} = 0, \dots$, если $b = 1$, то $n_p = (a - p - 1)/p$, $n_{p+1} = 1$, $n_{p+2} = 0, \dots$. (В программе формула вычисления n_p для обоих случаев $b = 0$ и $b = 1$ объединена: $n_p = \{a - b(p+1)\}/p$.) При $p = 1$, например, случай $b = 0$ соответствует равенству алгебраической и геометрической кратностей, что приводит к диагонализации блока, а $b = 1$ означает, что геометрическая кратность на единицу меньше алгебраической и это определяет жорданов блок вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в подобных случаях достаточно знать только

$$\text{rank}(A - \lambda E)^p.$$

В процессе определения жордановой структуры матрицы можно по частям решать уравнение $WA - \lambda W = 0$ для матрицы преобразования W . Именно, можно показать, что каждой жордановой клетке соответствует автономная система линейных уравнений, содержащая только те элементы матрицы W , которые входят в строки, расположенные против соответствующих строк жордановой клетки. Более того, если в блоке имеется несколько жордановых клеток одного размера, то им соответствуют системы уравнений одинаковой структуры. Поэтому достаточно решить систему уравнений один раз и, заменив переменные, получить решения для всех клеток данного размера. Проиллюстрируем это при-

мером для матриц размера 2×2 . Пусть матрица J имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

тогда уравнение $WA - JW = 0$ примет вид

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Для верхней строки матрицы W получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} w_{11}(a_{11} - \lambda) + w_{12}a_{21} = 0 \\ w_{11}a_{12} + w_{12}(a_{22} - \lambda) = 0, \end{cases}$$

для нижней - систему:

$$\begin{cases} w_{21}(a_{11} - \lambda) + w_{22}a_{21} = 0 \\ w_{21}a_{12} + w_{22}(a_{22} - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что эти системы одинаковы с точностью до замены неизвестных. В случае жордановых клеток общего вида ситуация аналогична.

Таким образом, программа производит следующие действия:

1/. Выполняется цикл перебора различных корней.

2/. После выбора корня выполняется цикл по размерам жордановых клеток. Для каждого размера определяется количество клеток и, если оно не равно нулю - методом Гаусса решается уравнение для определения соответствующих элементов матрицы. При этом некоторые матричные элементы оказываются свободными параметрами, а остальные выражаются через них.

3/. Последовательно выводятся на печать по клеткам строки матриц J и W . Производится подсчет числа произвольных параметров для определения размерности многообразия матриц преобразования.

Такая последовательная организация вычислений может оказаться полезной в случае, если известны не все корни характеристического уравнения. В подобных случаях мы получим частичное приведение матрицы к жорданову виду, что может дать некоторую информацию о симметриях системы уравнений.

Решая уравнения для матрицы преобразования и вычисляя ранги матриц, мы использовали метод Гаусса с выбором "главного элемента". Нами применялись различные варианты такого выбора: чаще всего выбирались наиболее короткие строки, иногда был полезен подход, основанный на выборе строк с наиболее простым множителем при выделяемой переменной.

В конце работы программа печатает число параметров матрицы преобразования. Параметры должны удовлетворять условиям невырожденности матрицы, что соответствует случаю общего положения, т. е. из любой вырожденной матрицы малым изменением параметров можно получить невырожденную.

Мы не вычисляем в программе обратную матрицу W^{-1} по следующим причинам:

1/. Элементы W^{-1} слишком громоздки, т. к. они представляют собой сложные нелинейные функции параметров.

2/. Даже в численной математике непосредственное вычисление результата действия обратной матрицы на вектор требует в 3 раза меньше времени и в 2 раза меньше памяти, чем обращение матрицы. Поэтому для получения выражений, содержащих обратные матрицы, целесообразней написать программу, вычисляющую эти выражения непосредственно, например, методом Гаусса.

В § 2 мы покажем, что для получения обратной матрицы общего вида достаточно обратить матрицу преобразования при каком-нибудь частном наборе параметров.

Пример работы программ.

Приведём пример, иллюстрирующий работу программ *NLP* и *NLJW*.

Рассмотрим систему уравнений с минимальным нетривиальным размером матрицы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Эта система получается в результате факторизации оператора волнового уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 - \partial^2 u / \partial x^2 = 0$.

В данном случае нелокальные симметрии рассматриваемого нами типа довольно тривиальны. (Можно сказать, что они образуют группу $GL(1) \otimes GL(1)$.) Мы выбрали этот пример только из-за краткости ввода и вывода. Символ оператора системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix}, \text{ где } P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, P_1 = -i \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ниже слева приведена информация в том виде, в котором она представлена на вводе и выводе - справа - эквивалент в обычных математических обозначениях или пояснение.

Для работы программы *NLP* необходимо ввести следующую информацию:

'СИСТЕМА $UT - VX = \emptyset, -UX + VT = \emptyset$ '

- пояснительная информация
- в таком виде вводится матрица.
Здесь стандартный вектор с координатами #1, #2 служит для представления строк матрицы в виде сумм.

' $P\emptyset * \#1 + P1 * \#2$ '

' $P1 * \#1 + P\emptyset * \#2$ '

На выходе будет напечатано:

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

СИСТЕМА $UT - VX = \emptyset, -UX + VT = \emptyset$

МАТРИЦА

$P\emptyset * \#1 + P1 * \#2$

$P1 * \#1 + P\emptyset * \#2$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ

$CHP(1) = -2L\#P\emptyset + L\#^2 + P\emptyset^2 - P1^2$

- $L\#$ - обозначение для собственного числа.

КОРНИ

$L\# = P\emptyset + P1$

$L\# = P\emptyset - P1$

Для работы программы *NLW* нужно ввести следующую информацию:

'СИСТЕМА $UT - VX = \emptyset, -UX + VT = \emptyset$ '

2 - число различных корней.

' $P\emptyset + P1$ ' 1 - корни и их алгебраические кратности.
' $P\emptyset - P1$ ' 1

' $P\emptyset * \#1 + P1 * \#2$ '

- исходная матрица.

' $P1 * \#1 + P\emptyset * \#2$ '

На выходе будет напечатано:

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

$$\text{СИСТЕМА } U T - V X = \emptyset, -U X + V T = \emptyset$$

ЧИСЛО РАЗЛИЧНЫХ КОРНЕЙ 2

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ИХ КРАТНОСТИ

$$P \emptyset + P_1 \quad 1$$

$$P \emptyset - P_1 \quad 1$$

СТРОКИ ИСХОДНОЙ МАТРИЦЫ

$$P \emptyset * \#1 + P_1 * \#2$$

$$P_1 * \#1 + P \emptyset * \#2$$

ПЕЧАТЬ СТРОК МАТРИЦ ПО ЖОРДАНОВЫМ КЛЕТКАМ

КОРЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРАТНОСТИ I

$$\underline{L \#(1) = P \emptyset + P_1}$$

ЖОРДАНОВА КЛЕТКА ПОРЯДКА I

$$\underline{J \#(1) = \#1 (P \emptyset + P_1)}$$

- первая строка $(P_0 + P_1, 0)$
жордановой матрицы J .

СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЧАСТЬ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\underline{W \#(1) = T \#1 \#1 + T \#1 \#2}$$

- первая строка (t_1, t_1)
матрицы W . Здесь $T \#1$ оз-
начает произвольный параметр t_1 .

КОРЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРАТНОСТИ I

$$\underline{L \#(2) = P \emptyset - P_1}$$

ЖОРДАНОВА КЛЕТКА ПОРЯДКА I

$$\underline{J \#(2) = \#2 (P \emptyset - P_1)}$$

- вторая строка $(0, P_0 - P_1)$
матрицы J .

СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЧАСТЬ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\underline{W \#(2) = -T \#2 \#1 + T \#2 \#2}$$

- вторая строка $(-t_2, t_2)$
матрицы W .

МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 2-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ

§ 2. Нелокальные симметрии некоторых систем уравнений

Приведём результаты применения программ к уравнению Дирака и уравнению Кеммера-Деффина-Петье в 4-мерном пространстве-времени для 10-компонентной волновой функции.

Символ оператора Дирака имеет вид:

$$\begin{bmatrix} p_0 - m & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 - m & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 - m & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 - m \end{bmatrix}$$

С помощью программы N.L.P получаем 2 корня

$$\lambda_{1,2} = -m \pm \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Каждый из этих корней имеет алгебраическую кратность равную двум.

В результате работы программы NLJW получаем диагональную жорданову матрицу

$$J = \text{diag}(-m + \mathcal{P}, -m + \mathcal{P}, -m - \mathcal{P}, -m - \mathcal{P})$$

и 8-параметрическую матрицу преобразования

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-t_1 p_3 - t_2 (p_1 + ip_2)}{p_0 - \mathcal{P}} & \frac{-t_1 (p_1 - ip_2) + t_2 p_3}{p_0 - \mathcal{P}} & t_1 & t_2 \\ \frac{-t_3 p_3 - t_4 (p_1 + ip_2)}{p_0 - \mathcal{P}} & \frac{-t_3 (p_1 - ip_2) + t_4 p_3}{p_0 - \mathcal{P}} & t_3 & t_4 \\ \frac{-t_5 p_3 - t_6 (p_1 + ip_2)}{p_0 + \mathcal{P}} & \frac{-t_5 (p_1 - ip_2) + t_6 p_3}{p_0 + \mathcal{P}} & t_5 & t_6 \\ \frac{-t_7 p_3 - t_8 (p_1 + ip_2)}{p_0 + \mathcal{P}} & \frac{-t_7 (p_1 - ip_2) + t_8 p_3}{p_0 + \mathcal{P}} & t_7 & t_8 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Теперь видно, что символ оператора Дирака инвариантен по отношению к линейным преобразованиям из группы $GL(2) \otimes GL(2)$. Эта группа имеет размерность 8. При переходе с помощью преобразования Фурье от символов к операторам матрицы группы инвариантности перейдут в интегродифференциальные операторы.

Структура матрицы преобразования станет более прозрачной, если представить W в факторизованном виде:

$$W = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{P_0 - \mathcal{P}} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3) & 1 \\ -\frac{1}{P_0 + \mathcal{P}} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3) & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Здесь $T_1 = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 \end{bmatrix}$; $\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$; $\delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ - спиновые матрицы Паули.

Представление матрицы W в виде

$$W = G W_0 \quad (11)$$

было предложено в [71]. Здесь W_0 - значение матрицы (9) при каком-нибудь частном наборе параметров t_1, \dots, t_8 , G - произвольная матрица из $GL(2) \otimes GL(2)$.

Такие представления удобны для вычисления обратной матрицы W^{-1} , поскольку

$$W^{-1} = W_0^{-1} G^{-1} \quad (12)$$

Представим формулу (10) в более симметричном виде, для чего сделаем такую замену матрицы T_1 , чтобы в левом верхнем

углу второго сомножителя оказалась единичная матрица. Очевидно, что для этого нужно выполнить замену

$$T_1 = T_1' \left\{ -\frac{1}{p_0 - \mathcal{P}} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3) \right\}^{-1} =$$

$$= T_1' \left\{ -\frac{1}{p_0 + \mathcal{P}} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3) \right\}.$$

Формула (2) примет вид:

$$W = \begin{bmatrix} T_1' & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{P_i \delta_i}{p_0 + \mathcal{P}} \\ -\frac{P_i \delta_i}{p_0 + \mathcal{P}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1' & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\gamma^0 \gamma^i P_i}{p_0 + \mathcal{P}} \right),$$

где γ^M - матрицы Дирака, $M = 0, 1, 2, 3$. Таким образом,

$$G = \begin{bmatrix} T_1' & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \quad W_0 = 1 + \frac{\gamma^0 \gamma^i P_i}{p_0 + \mathcal{P}}.$$

Для того, чтобы обратить матрицу W нужно обратить матрицу G , что выполняется элементарно, и матрицу W_0 . Матрицу W_0^{-1} естественно искать в виде

$$W_0^{-1} = a \left(1 - \frac{\gamma^0 \gamma^i P_i}{p_0 + \mathcal{P}} \right).$$

Коэффициент a находится из соотношения

$$W_0 W_0^{-1} = 1$$

и равен

$$a = \frac{p_0 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}}.$$

Рассмотрим теперь символ оператора Гамильтона для уравнения Дирака:

$$\gamma^0 \gamma^i p_i + \gamma^0 m = \begin{bmatrix} m & 0 & p_3 & p_1 - i p_2 \\ 0 & m & p_1 + i p_2 & -p_3 \\ p_3 & p_1 - i p_2 & -m & 0 \\ p_1 + i p_2 & -p_3 & 0 & -m \end{bmatrix}$$

В результате применения вычислительных программ получаем жорданову форму

$$J = \text{diag}(E, E, -E, -E)$$

и 8-параметрическую матрицу преобразования

$$W = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m+E}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} (p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 + p_3 \delta_3) & 1 \\ \frac{m-E}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} (p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2 + p_3 \delta_3) & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Здесь $E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2}$. Выполняя замену матрицы T_1 , аналогично предыдущему случаю, получим матрицу

$$W_0 = 1 - \gamma^i p_i.$$

Матрица, обратная к W_0 имеет вид

$$W_0^{-1} = \frac{E+m}{2E} \left(1 + \frac{\gamma^i p_i}{E+m} \right).$$

Общий вид обратной матрицы к матрице преобразования (I3) можно получить, воспользовавшись формулой (I2).

Уравнение Кеммера-Деффина-Петье (КДП) имеет вид:

$$(\beta_\mu p^\mu - m) \Psi = 0, \quad \mu = \overline{0, 3}.$$

Матрицы β_μ удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = g_{\mu\nu} \beta_\lambda + g_{\nu\lambda} \beta_\mu,$$

$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ - метрический тензор.

Матрицы β_μ можно реализовать в виде

$$\beta_0 = i \begin{bmatrix} \hat{0} & \hat{0} & -\hat{1} & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \lambda_\alpha \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{s}_\alpha & 0 \\ \hat{0} & \hat{s}_\alpha & \hat{0} & 0 \\ -\lambda_\alpha^+ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \overline{1, 3}$$

Здѣсь

$$\hat{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix},$$

$\hat{0}$ и $\hat{1}$ - нулевые и единичные матрицы размера 3×3 ,

0 - 3-х компонентные нулевые столбцы и строки.

Применение программы NLP к символу КДП даёт следующие корни и их алгебраические кратности:

$$\lambda_1 = -m \quad - \text{кратность} = 4$$

$$\lambda_2 = -m + \mathcal{P} \quad - \text{ кратность} = 3$$

$$\lambda_3 = -m - \mathcal{P} \quad - \text{ кратность} = 3$$

С помощью программы *NLJW* символ оператора КДП приводится к диагональному виду, т. е. алгебраические кратности совпадают с геометрическими. При этом вычисляется 34-параметрическая матрица W , которую мы для экономии места не приводим. Таким образом, уравнение Кеммера-Деффина-Петье инвариантно относительно 34-параметрической группы $GL(4) \otimes GL(3) \otimes GL(3)$. Заметим, что симметрия $GL(4)$ связана с наличием зависимостей между компонентами 10-компонентной волновой функции, тогда как симметрия $GL(3) \otimes GL(3)$ имеет непосредственный физический смысл.

ГЛАВА 3

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ПОДАЛГЕБР КОНЕЧНОМЕРНЫХ
АЛГЕБР ЛИ

Алгебраическая задача классификации подалгебр алгебры Ли с точностью до преобразований из группы внутренних автоморфизмов этой алгебры Ли или классификация подгрупп группы Ли имеет важные приложения в математической физике.

В теории групповых свойств дифференциальных уравнений классификация подалгебр влечёт классификацию инвариантных и частично-инвариантных решений с точностью до преобразований из группы симметрий рассматриваемого уравнения [56].

Информация о подгрупповой структуре групп Ли существенно используется в теории разделения переменных для уравнений в частных производных и в теории специальных функций [52].

Если физическая система описывается уравнениями, допускающими некоторую группу симметрий, то знание подгрупп этой группы позволяет классифицировать влияния, нарушающие симметрии, например, дополнительные члены в уравнениях, краевые условия и т. д. [84].

При изучении связей между различными физическими теориями, например, между квантовой и классической механикой, теорией относительности и галилеевой механикой и т. д., часто возникает необходимость рассматривать ситуации, когда алгебраические структуры при малом изменении параметров переходят в другие структуры, неизоморфные исходным. В частности, если такие изменения происходят в результате предельных переходов, то они называются контракциями. Например, алгебра Пуанкаре при $c \rightarrow \infty$ переходит в алгебру Галилея [4]. Знание подалгебраической структуры алгебры Ли необходимо для получения всех её возможных

контракций.

Если квантово-механическая (или классическая) система имеет некоторую группу симметрий, то инвариантные операторы, соответствующие несопряжённым подгруппам, позволяют получать различные множества квантовых чисел (или интегралов движения) [109, 110].

Классификация подалгебр имеет важные применения в теории представлений групп и алгебр Ли, в частности, при построении индуцированных, с различных подгрупп, представлений, при конструировании специальных базисов для представлений.

Классификации подалгебр алгебр Ли и применениям результатов классификации посвящено много работ (см., например, [20, 74, 84, 88, 102, 114, 117-121]).

Задача классификации трудна хотя бы потому, что количество неэквивалентных подалгебр очень велико для типичных в физике алгебр Ли. Например, в простейшем случае абелевых алгебр Ли неэквивалентные подалгебры образуют достаточно сложно устроенные грассмановы многообразия линейных подпространств. Ввиду сказанного; представляется целесообразным попытаться использовать ЭВМ при решении задачи классификации.

В работах [19, 20] был предложен прямой подход к задаче классификации. Этот подход не использует информацию о структуре алгебры Ли и основан на приведении матрицы внутренних автоморфизмов к каноническому жорданову виду. После такого приведения выделяются инвариантные подпространства и производится проверка их на замкнутость относительно коммутации. Утверждается, что таким образом строится полная система неэквивалентных подалгебр. На самом деле, как будет показано ниже, некоторые из таких подалгебр могут оказаться эквивалентными. Это связано с тем, что матрица внутренних автоморфизмов может иметь

различные жордановы формы в зависимости от значений параметров группы внутренних автоморфизмов и конкретно выбранная жорданова форма не описывает полное множество внутренних автоморфизмов. Кроме того, использование матрицы конечных внутренних автоморфизмов, как это предложено в [19, 20], приводит к существенным вычислительным трудностям. В действительности достаточно рассматривать матрицу присоединённого представления алгебры Ли. Такая матрица значительно проще матрицы внутренних автоморфизмов.

Описываемые ниже алгоритмы и их программная реализация на языке *PL/1-FORMAC* основаны на приведении к каноническому виду матрицы присоединённой алгебры Ли [41]. Результатом работы программ является список подалгебр всех размерностей; некоторые из них могут оказаться эквивалентными, что требует проверки на несовпадение орбит различных подалгебр относительно присоединённой группы. Кроме того, печатаются выражения, с помощью которых осуществляется указанная проверка. Сама проверка сводится к исследованию на разрешимость некоторых систем алгебраических уравнений, что, в общем случае, довольно трудно реализовать алгоритмически, поэтому на данном этапе проверка выполняется вручную. Как правило, несовпадение орбит устанавливается довольно легко (возникают противоречия типа $0 = 1$), для доказательства совпадения рассуждения бывают более сложными.

§ I. Алгоритм классификации подалгебр и его программная реализация

Каждому элементу u n -мерной алгебры Ли L соответствует линейный оператор ad_u , действующий в пространстве L по формуле

$$ad_u x = [x, u], \quad u, x \in L.$$

Операторы ad_u образуют алгебру Ли, называемую присоединённой алгеброй алгебры L . Присоединённой алгебре соответствуют уравнения Ли:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = [x', u], \quad x'(0) = x. \quad (I)$$

Интегрируя эти уравнения получим преобразования пространства L вида

$$A_u(t) = \exp(t ad_u).$$

Эти преобразования называются внутренними автоморфизмами и порождают так называемую присоединённую группу алгебры L .

В базисе e_1, \dots, e_n алгебры L можно задать с помощью коммутаторов базисных элементов

$$[e_i, e_j] = \gamma_{ij}^k e_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Числа γ_{ij}^k - структурные константы. Оператор ad_u в координатах представляет собой матрицу вида

$$m_i^k = (ad_u)_i^k = \gamma_{ij}^k u^j \quad (2)$$

Эта матрица зависит от параметров u^j - координат вектора u .
Уравнения Ли (I) примут вид

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial t} = \gamma_{ij}^{k'} u^j x^{i'}, \quad x^{k'}(0) = x^k.$$

Решение этих уравнений можно представить формулой

$$x' = Mx$$

где $M = A_u(t) = \exp(tm)$, матрица m задаётся формулой (2). Пользуясь линейностью пространства L и переобозначая $ut \rightarrow u$, параметр t можно исключить из рассмотрения и представить матрицу внутренних автоморфизмов в виде

$$M = \exp m = E + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots, \quad (3)$$

где E - единичная матрица.

Для анализа орбит различных подпространств алгебры L относительно внутренних автоморфизмов естественно привести матрицу к наиболее простому виду - канонической жордановой форме. При различных значениях параметров u матрица m может иметь различные жордановы формы, поэтому пространство параметров разбивается на конечное число подмножеств U_α различной размерности. Эти подмножества, в свою очередь, могут состоять из несвязных частей. Внутри каждого такого подмножества жорданов вид матрицы M сохраняется при изменении параметров. Обозначим через M_α матрицу M в жордановом базисе при значениях параметров $u \in U_\alpha$. Матрица M_α над полем комплексных чисел C имеет блочно-диагональный вид, причём на диагонали расположены либо числа, либо блоки вида

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь k - размер блока. Рассмотрим структуру соответствующего этому блоку k -мерного инвариантного подпространства.

Обозначим через e_1, \dots, e_k базисные векторы этого подпространства в жордановом базисе. Тогда в k -мерном инвариантном подпространстве можно выделить 1 -мерное инвариантное подпространство, натянутое на вектор e_1 , 2 -мерное, натянутое на векторы e_1 и e_2 и т. д.

Если имеется несколько блоков с одинаковыми λ , то инвариантными подпространствами матрицы M_λ будут подпространства, определяемые некоторыми линейными комбинациями собственных и присоединённых векторов из разных блоков. Рассмотрим подробнее этот случай. Допустим, что имеется l инвариантных подпространств размерности k , соответствующих одному λ . Обозначим собственные и присоединённые векторы в жордановом базисе для этих подпространств через e_{ij} , $i=1, \dots, l$, $j=1, \dots, k$. Эти векторы удовлетворяют соотношениям

$$M_\lambda e_{i1} = \lambda e_{i1},$$

$$M_\lambda e_{i2} = e_{i1} + \lambda e_{i2},$$

.....

$$M_\lambda e_{ik} = e_{i,k-1} + \lambda e_{ik}.$$

Легко показать, что таким же соотношениям будут удовлетворять и векторы

$$f_1 = \sum_{i=1}^l p_{i1} e_{i1},$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^l (p_{i1} e_{i2} + p_{i2} e_{i1}),$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^l (p_{i1} e_{i3} + p_{i2} e_{i2} + p_{i3} e_{i1}),$$

$$\dots$$

$$f_k = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k p_{ij} e_{i, k-j+1}.$$

(5)

Здесь p_{ij} - произвольные параметры. Векторное подпространство, определяемое векторами f_1, \dots, f_k будет k -мерным инвариантным подпространством. Параметры p_{ij} избыточны в том смысле, что различные наборы параметров могут определять одно и то же инвариантное подпространство. Это связано, в частности, с тем, что параметры определены с точностью до умножения на произвольное число, т. е. являются координатами проективного пространства. Имеются и менее тривиальные связи между параметрами. Рассмотрим для примера случай двух двумерных инвариантных подпространств. Векторы (5) имеют вид

$$f_1 = \alpha e_{11} + \beta e_{21},$$

$$f_2 = \alpha e_{12} + \beta e_{22} + \gamma e_{11} + \delta e_{21},$$

где для краткости введены обозначения $\alpha = p_{11}, \beta = p_{21}, \gamma = p_{12}, \delta = p_{22}$. Известно, что различные линейно независимые системы векторов порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда когда внешние грассмановы произведения этих векторов пропорциональны. В нашем случае имеем

$$f_1 \wedge f_2 = \alpha^2 e_{11} \wedge e_{12} + \beta^2 e_{21} \wedge e_{22} + \alpha\beta(e_{11} \wedge e_{22} + e_{21} \wedge e_{12}) + (\alpha\delta - \beta\gamma) e_{11} \wedge e_{21}.$$

Таким образом, если выполняются соотношения

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha'\delta' - \beta'\gamma'},$$

то наборы параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ определяют одно и то же подпространство.

Рассмотренные выше инвариантные подпространства и их прямые суммы дают описание всех инвариантных подпространств матрицы M_λ .

Если вычисления ведутся над вещественным полем \mathbb{R} , то комплексные корни характеристического уравнения всегда появляются взаимно сопряжёнными парами. В подобных случаях вместо жордановых блоков вида (4) необходимо рассматривать псевдожордановы блоки размера $2k$, соответствующие сопряжённым парам комплексных корней. Эти блоки имеют вид

$$\begin{bmatrix} A & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & E & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix},$$

где $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и α, β соответствуют формуле

$\lambda = \alpha \pm i\beta$. Каждому элементарному псевдожорданову блоку размера 2×2 соответствует 2-мерное инвариантное вещественное подпространство.

Рассмотрим теперь орбиты инвариантных подпространств матрицы M_2 , получаемые действием на эти подпространства матрицей внутренних автоморфизмов общего вида M . Ввиду того, что множество автоморфизмов M шире, чем M_2 , между инвариантными подпространствами матрицы M_2 и их орбитами относительно M не всегда существует взаимно-однозначное соответствие. Возможны случаи, когда различные, инвариантные относительно M_2 , подпространства лежат на одной орбите относительно M .

Для примера рассмотрим трёхмерную алгебру Лоренца $SO(2,1)$. Обозначим координаты этой алгебры через x, y, z , причём инвариантная форма имеет вид $z^2 - x^2 - y^2$. Пространство этой алгебры разбивается внутренними автоморфизмами на три непересекающиеся орбиты:

1/. Внутренность светового конуса

$$z^2 > x^2 + y^2,$$

2/. Световой конус

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

3/. Внешняя часть по отношению к световому конусу

$$z^2 < x^2 + y^2.$$

Любые две одномерные подалгебры, принадлежащие одной и той же орбите, переводятся друг в друга подходящими внутренними автоморфизмами. Если рассмотреть автоморфизмы вида $M_3 = e^{ad_{u_3}}$ для u_3 , лежащих вне светового конуса, т. е. в области 3/, то матрица M_3 будет иметь три различных вещественных корня и, соответственно, три инвариантных одномерных подпространства. Одно из этих подпространств расположено вне светового конуса, а два других лежат на световом конусе и переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом вида $M_i = e^{ad_{u_i}}$.

где элемент u_1 принадлежит внутренности светового конуса.

Таким образом, требуется проверка получаемых орбит на несовпадение. Перебирая подмножества U_α и получая орбиты соответствующих инвариантных подпространств, можно получить все непересекающиеся орбиты, с помощью проверки на замкнутость относительно коммутации отбросить те из них, которые не являются орбитами подалгебр и, таким образом, получить набор представителей классов эквивалентности, т. е. оптимальную систему подалгебр.

Наиболее трудоёмкой частью вычислений является приведение матрицы M_α , зависящей от параметров, к каноническому виду. Покажем, что вместо матрицы конечных внутренних автоморфизмов достаточно привести к каноническому виду матрицу присоединённого представления алгебры Ли. Будем обозначать матрицу присоединённой алгебры через m_α для $u \in U_\alpha$. Рассмотрим матрицу M_α в базисе j_1, \dots, j_n , в котором матрица m_α имеет жорданов вид. Если m_α состоит из блоков вида (4), то M_α , как показывает прямое вычисление по формуле (3), будет блочно-диагональной с блоками вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(k-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Случай чисто диагональных блоков очевиден. Легко видеть, что матрица M_α имеет ту же жорданову структуру, что и m_α . Хотя базис j_1, \dots, j_n не является жордановым для M_α , струк-

тура инвариантных подпространств M_α в этом базисе будет той же, что и в жордановом. Возможность рассматривать вместо M_α матрицу m_α приводит к существенным вычислительным упрощениям. К примеру, матрица двумерных вращений имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

тогда как соответствующая матрица присоединённой алгебры имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Последняя матрица для своего представления требует меньше символов.

В качестве простого примера рассмотрим алгебру L_4 точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза. Эта алгебра порождается следующими операторами

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad e_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2v \frac{\partial}{\partial v},$$

действующими в пространстве функций от переменных x, t, v .

Алгебра L_4 имеет следующие ненулевые коммутаторы

$$[e_1, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = 3e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -2e_3.$$

Классификация одномерных подалгебр алгебры L_4 рассматривалась в [20]. В статье [120] приведены результаты классификации подалгебр всех вещественных трёх- и четырёхмерных алгебр Ли. Алгебра L_4 является частным случаем алгебры $A_{4,9}^6$ в

обозначениях указанной статьи. Именно, L_4 изоморфна $A_{4,9}^{-2/3}$.
 Обозначив через e_1', e_2', e_3', e_4' базисные векторы алгебры $A_{4,9}^{-2/3}$,
 приведём формулы перехода от них к операторам e_1, \dots, e_4 :

$$e_1' = \frac{1}{3} e_2, \quad e_2' = \frac{1}{3} e_1, \quad e_3' = e_3, \quad e_4' = \frac{1}{3} e_4.$$

Если ввести обозначения $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$ и $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)^T$,
 то матрица присоединённой алгебры, получаемая из соотношения

$$m x = [x^1 e_1 + \dots + x^4 e_4, \alpha e_1 + \dots + \delta e_4]$$

с помощью таблицы коммутаторов, имеет вид

$$m = \begin{bmatrix} 3\delta & 0 & 0 & -3\alpha \\ \gamma & \delta & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -2\delta & 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу полного внутреннего автоморфизма, получаемую интегрированием уравнений Ли, можно представить в виде

$$M = \begin{bmatrix} e^{3\delta} & 0 & 0 & -3\alpha \\ \gamma e^{3\delta} & e^\delta & -\alpha e^{-2\delta} & -2\alpha\gamma - \beta \\ 0 & 0 & e^{-2\delta} & 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы m :

$$\det(m - \lambda E) = \lambda(-2\delta - \lambda)(\delta - \lambda)(3\delta - \lambda)$$

имеет различные корни, если $\delta \neq 0$. Определим множество U_1 ,

условием $\delta \neq 0$. В этом случае матрица m_1 в жордановом базисе j_1, \dots, j_4 имеет диагональный вид

$$J_1 = \text{diag}(3\delta, \delta, -2\delta, 0).$$

Для перехода от жорданова базиса к исходному e_1, \dots, e_4 необходимо найти невырожденную матрицу V , удовлетворяющую уравнению

$$m_1 V - V J_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 2\delta & 0 & 0 & \alpha \\ \gamma & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 3\delta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} D,$$

где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T \in U_1$, D - произвольная диагональная матрица с ненулевыми элементами на диагонали. Поскольку нет необходимости рассматривать общий вид матрицы V , положим для упрощения записи $D = E$, где E - единичная матрица.

Одномерные инвариантные подпространства порождаемые векторами j_1, \dots, j_4 в исходном базисе e_1, \dots, e_4 будут порождаться векторами

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma/2\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha/3\delta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} \alpha/\delta \\ \beta/\delta \\ \gamma/\delta \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Мы можем упростить выражения для a_1, \dots, a_4 , положив $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (поскольку эти значения параметров входят в U_1) и тогда получим

$$O_1 = M_{CU_1} e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, O_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, O_4 = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ -2\alpha\gamma - \beta \\ 2\gamma \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ни при каких значениях параметров не возможна пропорциональность между какими-нибудь двумя векторами O_i .

В случае дву- и трёхмерных подалгебр необходимо проверять на пропорциональность соответствующие 2- и 3-векторы, получающиеся в результате внешнего перемножения базисных векторов. Например, рассмотрим двумерные подалгебры. 2-векторы, соответствующие орбитам этих подалгебр, имеют вид:

$$O_1 \wedge O_2 = (e_1 + \gamma e_2) \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2,$$

$$O_1 \wedge O_4 = (\alpha\gamma - \beta)e_1 \wedge e_2 + 2\gamma e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + 2\gamma^2 e_2 \wedge e_3 + \gamma e_2 \wedge e_4,$$

$$O_2 \wedge O_3 = e_2 \wedge e_3,$$

$$O_2 \wedge O_4 = 3\alpha e_1 \wedge e_2 + 2\gamma e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4,$$

$$O_3 \wedge O_4 = -3\alpha^2 e_1 \wedge e_2 + 3\alpha e_1 \wedge e_3 + \beta e_2 \wedge e_3 - \alpha e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4.$$

Здесь также видно, что пропорциональность между какими-нибудь 2-векторами невозможна. Аналогичный анализ и с таким же результатом можно провести для трёхмерных подалгебр.

Легко проверить, что, относительно общего автоморфизма, орбиты одномерных инвариантных подпространств матрицы M_1 не покрывают всё пространство L_4 . Следовательно, рассмотрение области значений параметров U_1 недостаточно. Поэтому рассмотрим теперь случай $\delta = 0, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0$. Эти условия опреде-

ляют множество U_2 . Характеристический полином имеет четырёхкратный корень $\lambda = 0$, а матрица m примет вид

$$m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\alpha \\ \gamma & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma \\ -0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определяя количество n_i жордановых клеток размера i по формуле.

$$n_i = \text{rank}(m_2 - \lambda E)^{i-1} - 2\text{rank}(m_2 - \lambda E)^i + \text{rank}(m_2 - \lambda E)^{i+1},$$

(где, по определению, полагается $\text{rank}(m_2 - \lambda E)^0 = n$), получаем, что m_2 имеет следующий жорданов вид

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу преобразования можно выбрать в виде

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3\alpha & 0 \\ 0 & -5\alpha\gamma & -\beta & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \in U_2.$$

Одномерные инвариантные подпространства натянуты на векторы j_1 и j_2 жорданова базиса. Эти векторы в исходном базисе имеют вид

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma/2 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1 + \rho e_3, \quad a_2 = -5\alpha\gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\alpha\gamma e_2.$$

Здесь мы ввели обозначение $\rho = \gamma/\alpha \neq 0$, т. к. α и γ не могут быть равными нулю. По этой же причине будем считать, что $a_2 = e_2$.

Имеется 2 двумерных инвариантных подпространства:

$$\{j_1, j_2\}, \{j_2, j_3\},$$

или в исходном базисе:

$$\{e_1 + \rho e_3, e_2\}, \{e_1 - \frac{2}{3}\rho e_3, e_2\}.$$

(В выражении для $j_3 = -3\alpha e_1 - \beta e_2 + 2\gamma e_3$ мы положили для упрощения вычислений $\beta = 0$, т. к. это значение удовлетворяет условию вхождения параметров в U_2 .)

Трёхмерные инвариантные подпространства:

$$\{j_1, j_2, j_3\}, \{j_2, j_3, j_4\},$$

или в исходном базисе:

$$\{e_1 + \rho e_3, e_2, e_1 - \frac{2}{3}\rho e_3\}, \{e_1 - \frac{2}{3}\rho e_3, e_2, e_4\}.$$

Тройка $\{e_1 - \frac{2}{3}\rho e_3, e_2, e_4\}$ не замкнута относительно коммутации. Тройка $\{e_1 + \rho e_3, e_2, e_1 - \frac{2}{3}\rho e_3\}$ определяет то же подпространство, что и рассмотренная ранее тройка $\{e_1, e_2, e_3\}$. Таким образом, не возникает новых трёхмерных подалгебр. Пары векторов, определяющие двумерные подпространства одинаковы с точностью до переобозначения ρ . Они замкнуты относительно коммутаций.

Рассмотрим теперь одномерные подалгебры. Подалгебра

$\{e_2\}$ уже была получена. Орбита вектора a_1 имеет вид

$$O_\rho = M a_1 = \begin{bmatrix} e^{3s} \\ \gamma e^{3s} - \rho \alpha e^{-2s} \\ \rho e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо проверить, не совпадают ли орбиты подалгебр при различных значениях параметра P . Для совпадения необходима

пропорциональность векторов $\begin{bmatrix} e^{3\delta} \\ \gamma e^{3\delta} - p_2 e^{-2\delta} \\ p e^{-2\delta} \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} e^{3\delta_1} \\ \gamma_1 e^{3\delta_1} - p_{2,1} e^{-2\delta_1} \\ p_{1,1} e^{-2\delta_1} \\ 0 \end{bmatrix}$

при некоторых значениях параметров $\alpha, \dots, \delta, P, \alpha_1, \dots, \delta_1, P_1$. Такая пропорциональность действительно имеет место, если выполняется условие $p_1/p = e^{5(\delta_1 - \delta)}$. Поскольку экспонента всегда положительна, необходимо чтобы P_1 и P имели одинаковые знаки. Таким образом, в соответствии с возможными знаками P , получаем две орбиты, определяемые, например, векторами $e_1 + e_3$ и $e_1 - e_3$. Это рассмотрение можно провести более регулярным образом, если учесть, что область U_2 , рассматриваемая в проективном пространстве, состоит из двух несвязных частей. Нужно рассматривать такие части по отдельности, отсеивая при необходимости излишние орбиты.

Таким образом, рассмотрение области U_2 привело к появлению новых подалгебр:

$$\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{e_1 + e_3, e_2\}, \{e_1 - e_3, e_2\}.$$

Исследование их орбит относительно общего автоморфизма показывает, что они действительно новые, т. е. не совпадают с полученными ранее.

Рассмотрение оставшихся областей значений параметров, приводящих к другим, априорно возможным, жордановым формам:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

не приводит к новым инвариантным подалгебрам. Вообще говоря, эти области параметров нет необходимости рассматривать - про-

ще показать, что орбиты инвариантных подпространств областей U_1 и U_2 полностью покрывают многообразия подпространств соответствующих размерностей алгебры Ли.

Таким образом, оптимальная система подалгебр алгебры L_4 состоит из следующих подалгебр.

- 1/. Одномерные: $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1+e_3\}, \{e_1-e_3\},$
- 2/. Двумерные: $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\},$
 $\{e_1+e_3, e_2\}, \{e_1-e_3, e_2\},$
- 3/. Трёхмерные: $\{e_1, e_2, e_3\}$ (алгебра Вейля),
 $\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}.$

Заметим, что в [20], где рассматривались одномерные подалгебры алгебры L_4 , были ошибочно построены, в качестве элементов оптимальной системы, подалгебры, натянутые на векторы вида $e_1 + ae_3$, причём считалось, что эти векторы возникают как произвольные линейные комбинации жордановых базисных векторов j_1 и j_2 .

Наиболее трудоёмкие в вычислительном отношении части алгоритма были реализованы в виде следующих программ для ЭВМ на языке *PL/I-FORMAC*.

1/. Получение характеристического полинома матрицы присоединённого представления. Эта программа основана на методе Данилевского приведения матрицы к форме Фробениуса и полностью аналогична описанной в главе 2.

2/. Программа для получения инвариантных подалгебр.

На вход этой программы подаются: частный вид матрицы присоединённой алгебры для заданной области параметров, характеристические числа и их кратности, матрица внутренних автоморфизмов общего вида. (Мы использовали на вводе матрицы автоморфизмов, соответствующие однопараметрическим подгруппам. Эти матрицы затем перемножались уже программой для получения внут-

ренных автоморфизмов общего вида. Это было сделано для уменьшения вероятности ошибок при вводе. В принципе, уравнения Ли несложно интегрировать с помощью ЭВМ, т. к. они представляют собой линейные уравнения с постоянными коэффициентами.)

Программа определяет жорданову или псевдожорданову форму присоединённой матрицы и решает матричное уравнение вида $mV - VJ = 0$ относительно неизвестной матрицы преобразования V . При определении канонической формы J матрицы m используется геометрический подход, основанный на вычислении рангов степеней матрицы $m - \lambda E$. Вычисление рангов и решение матричного уравнения выполняется методом Гаусса.

Далее программа строит всевозможные инвариантные подпространства, вычисляет внешние произведения орбит базисных векторов этих подпространств под действием полного внутреннего автоморфизма.

После этого производится проверка подпространств на замкнутость относительно коммутации. Эта проверка также основана на методе Гаусса.

В результате работы программы на печать выводятся инвариантные подпространства (с указанием, являются ли они подалгебрами) и орбиты внешних произведений их базисных векторов для последующей проверки орбит на несовпадение. Хотя программы работают автоматически, в некоторых местах полезно интерактивное вмешательство, которое позволило бы существенно повысить эффективность работы и упростить окончательные выводы. Поэтому желательно реализовать программы на языке какой-нибудь интерактивной системы. Опыт показал, что на ЭВМ ЕС-1022 вполне можно исследовать четырёх-пятимерные алгебры.

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Предыдущие главы были посвящены применению аналитических вычислений на ЭВМ для решения различных задач, возникающих при исследовании симметричных свойств дифференциальных уравнений. В этой главе рассматривается применение ЭВМ для получения приближённых аналитических решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Различные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр при старших производных. Для приближённого аналитического решения таких уравнений широко используются различные варианты асимптотических методов [6; 17, 46, 48-51, 53, 54, 66].

Для получения волновых решений дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений В. П. Масловым был развит метод канонического оператора [17, 46, 48-51, 54]. Этот метод использует подход, аналогичный квазиклассической асимптотике в квантовой механике, и обобщает ряд известных асимптотических методов. Метод пригоден как для линейных, так и для нелинейных уравнений в частных производных. Комплексное обобщение метода позволяет получать не только осциллирующие, но и затухающие решения. С помощью введённого Масловым канонического оператора можно получать не только локальные, но и глобальные решения и, в частности, получать решения в окрестности точек, где волны концентрируются, т. е. образуют каустику.

Первый этап метода состоит в получении уравнения Гамильтона-Якоби (эйконала) для фазовой функции волны и цепочки уравнений, описывающих высшие приближения амплитуды. Этот этап до-

вольно легко формализуется, но требует громоздких аналитических вычислений. Для проведения этих вычислений была написана программа на языке *PL/1-FORMAC*.

В качестве примера мы рассматриваем получение волновых решений нелинейного уравнения в частных производных (квазигеострофического уравнения потенциального вихря), играющего важную роль в динамике атмосферы и океана. Среди асимптотических решений оказались неизвестные ранее точные решения этого уравнения. Полученные волновые решения использовались при описании крупномасштабной атмосферной турбулентности, причём было получено достаточно хорошее соответствие с наблюдаемыми величинами [37]. Кроме того, эти решения, по-видимому, можно использовать для объяснения некоторых особенностей циркуляции атмосферы и океана [38, 39].

§ I. Волновые решения квазигеострофического уравнения
потенциального вихря

Под влиянием горизонтальных перепадов температур на вращающейся сферической Земле в океане и атмосфере возникают крупномасштабные волновые процессы, называемые бароклинными волнами. Эти волны играют важную роль в динамике атмосферы и океана. Например, гармонический анализ атмосферных процессов показывает, что длинные движущиеся волны (с волновыми числами в зональном направлении $n = 5 \div 10$) переносят большое количество кинетической и потенциальной энергии [7]. Форма этих образований указывает на то, что они, по-видимому, достаточно хорошо могут быть описаны волной с одной фазовой функцией. Мы рассмотрим нелинейные бароклинные волны, описываемые одной фазой. Для определённости будем рассматривать волны в атмосфере. Вычисления будем проводить в изобарической системе координат, в которой в качестве вертикальной координаты используется не высота, а давление. Кроме того, будем использовать так называемое приближение β -плоскости. Это приближение строится следующим образом: участок криволинейной поверхности Земли заменяется плоскостью, в которой ось x направлена на восток, ось y - на север, зависимость параметра Кориолиса от широты приближённо полагается линейной, т. е. $f = f_0 + \beta y$, где f_0 - некоторое среднее для рассматриваемой области значение параметра Кориолиса, β - так называемый параметр Россби (производная параметра Кориолиса по широте). Динамика атмосферы с достаточно высокой точностью (в средних и высоких широтах) описывается квазигеострофическим уравнением вихря:

$$\frac{d}{dt} (\Delta \psi + f + \frac{\partial}{\partial p} z^2 \frac{\partial \psi}{\partial p}) = 0. \quad (I)$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ - конвективная производная; ψ - функция тока, введённая таким образом, что зональная и меридиональная компоненты скорости ветра равны соответственно $u = -\partial \psi / \partial y$ и $v = \partial \psi / \partial x$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двумерный оператор Лапласа; p - давление; t - время; $z^2(p)$ - функция вертикальной координаты p , определяемая плотностным расчленением атмосферы: $z^2 = f_0^2 g^2 p^2 / N^2$, где $N = g \sqrt{\partial \rho / \partial p}$ - так называемая частота Френта-Вэйселя; ρ - плотность воздуха; g - ускорение свободного падения [22].

Краевое условие у поверхности Земли имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} + \delta_0^2 \psi \right) = 0 \quad \text{при } p = p_0, \quad (2)$$

где $\delta_0^2 = N_0^2 / g^2 p_0$. Нулевой индекс означает, что величины относятся к нижнему уровню p_0 . Это нелинейное краевое условие соответствует условию непротекания в геометрической системе координат.

Ввиду недостатка информации о явлениях в верхних слоях атмосферы краевое условие на верхней границе выбирают различными способами. Например, можно выбрать условие ограниченности кинетической энергии атмосферы:

$$p |\nabla \psi| < \infty \quad \text{при } p \rightarrow 0.$$

Здесь ∇ - оператор горизонтального градиента. (Неравенство получается из требования конечности интеграла от плотности кинетической энергии воздуха.) Иногда выбирают условие того же вида, что и (2), - условие "твёрдой крышки". Эмпирические данные показывают, что на уровне тропопаузы (высота $\sim 10-12$ км) это условие достаточно точно выполняется. Для определённости примем условие твёрдой крышки, приписав его уровню тропопаузы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} + \delta_1^2 \Psi \right) = 0 \text{ при } p = p_1, \delta_1^2 = N_1^2 / g^2 f_1. \quad (3)$$

Индекс \uparrow обозначает верхний уровень p_1 . В дальнейшем мы укажем к каким изменениям приведёт принятие условия ограниченности кинетической энергии вместо (3).

Отправной точкой метода является представление решения в виде

$$\exp[iS(\vec{x}, t)/\hbar] \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \hbar^k \quad (4)$$

в случае линейных уравнений и в применении подстановки вида

$$\exp[-i\hat{\omega} S(\vec{x}, t)/\hbar] \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \hbar^k \quad (4a)$$

в нелинейном случае. Здесь \vec{x} - вектор пространственных переменных, \hbar - малый параметр, $\hat{\omega} = -i d/d\tau$ - оператор дифференцирования по дополнительно вводимой "быстрой" переменной τ . (Таким образом, экспонента в формуле (4a) означает оператор сдвига на S/\hbar по τ :

$$\exp[-i\hat{\omega} S(\vec{x}, t)/\hbar] f(\tau) = f(\tau - S/\hbar).)$$

В обоих случаях разложение по степеням \hbar приводит к уравнению Гамильтона-Якоби для функции $S(\vec{x}, t)$ и к цепочке уравнений для определения функций Ψ_k . Уравнение Гамильтона-Якоби получается в линейном случае из требования существования нетривиальных решений вида (4), в нелинейном - из требования существования 2π -периодических решений по переменной τ . В случае линейных уравнений метод позволяет получать

решения задачи Коши при достаточно произвольных начальных условиях. В нелинейном случае из-за невыполнения принципа суперпозиции можно получать волновые решения, описываемые одной фазовой функцией $S(\vec{x}, t)$, т. е. некоторый специальный класс решений.

Запишем уравнение (1) с крайними условиями (2) и (3) в виде

$$\begin{aligned} & \hbar^3 \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \hbar \delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \hbar^4 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \hbar^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \\ & + \hbar^4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi + \hbar^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \beta \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \zeta} - \hbar^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial \zeta} + \hbar^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial \zeta} + b_j^2 \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{\zeta = \zeta_j} = 0, \quad j=0,1. \quad (2a, 3a)$$

Здесь введена вертикальная переменная $\zeta = p/P$ вместо p , где P — некоторое стандартное давление у поверхности Земли, например, $P = 1000$ мбар, оператор $\delta = \partial/\partial \zeta \zeta^2 \partial/\partial \zeta$ получается из оператора $\partial/\partial p \cdot \zeta^2 \partial/\partial p$ заменой p через ζ , аналогичные замены выполняются в функциях b_0 и b_1 . Малый параметр \hbar при операторе дифференцирования означает, что рассматриваются высокочастотные по соответствующей переменной решения.

Введение параметра \hbar фактически предполагает использование двух пространственно-временных масштабов: использование переменных x, y, t для гладкой функции S и переменных $\frac{x}{\hbar}, \frac{y}{\hbar}, \frac{t}{\hbar}$ для осциллирующей функции Ψ , что влечёт замену операторов дифференцирования:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hbar \frac{\partial}{\partial y}, \hbar \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Например, если рассматриваются волны длиной $\lambda \sim 600$ км

В области с характерным размером $L \sim 3000$ км, то можно принять $h \sim \lambda/L = d/5$. Далее мы рассмотрим условия, при которых асимптотические решения уравнения вихря становятся точными. Нас будут интересовать высокочастотные волновые решения по переменным x, y и t . О зависимости по переменной ζ никаких предположений, дающих малый параметр, не делается.

Для работы программы необходимо ввести уравнения (краевые условия вводятся как отдельные уравнения), указать переменные по которым рассматриваются асимптотики (в нашем случае x, y и t) и задать наивысший порядок степени h , до которого производится разложение. Программа представляет функцию Ψ в виде (4а) с $\Psi_k = \Psi_k(x, y, t, \zeta, \tau)$, подставляет её в уравнение (I) и краевые условия (2а) и (3а), действует слева на полученные выражения оператором

$$\exp[i\hat{\omega} S(x, y, t)/h]$$

и выделяет коэффициенты при одинаковых степенях h . Это приводит к следующей системе уравнений и краевых условий:

$$S_+(S_x^2 + S_y^2) \ddot{\Psi}_0 + S_+ \delta \dot{\Psi}_0 + \beta S_x \dot{\Psi}_0 = 0, \quad (5)$$

$$S_+(S_x^2 + S_y^2) \ddot{\Psi}_i + S_+ \delta \dot{\Psi}_i + \beta S_x \dot{\Psi}_i = F_i, \quad i=1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$S_+ \dot{\Psi}_{0\zeta} + \beta_j^2 S_+ \dot{\Psi}_0 = 0, \quad j=0, 1, \quad (7)$$

$$S_+ \dot{\Psi}_{i\zeta} + \beta_j^2 S_+ \dot{\Psi}_i = f_i, \quad j=0, 1, \quad i=1, 2, \dots \quad (8)$$

Здесь точка означает дифференцирование по быстрой переменной τ . Функции F_i и f_i зависят от решений уравнений, соответствующих степеням \hbar , меньшим, чем i . Например:

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -\ddot{\varphi}_0 (S_x^2 + S_y^2) \left(S_y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - S_x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) - 2 S_x S_y \dot{\varphi}_0 \left(S_x \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial x} - S_y \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial y} \right) - \\
 & - \left[2 S_{xy} (S_x^2 - S_y^2) + 2 S_x S_y (S_{yy} - S_{xx}) \right] \dot{\varphi}_0 \ddot{\varphi}_0 - \\
 & - \varphi_0 \left[S_x (3 S_y^2 + S_x^2) \frac{\partial \ddot{\varphi}_0}{\partial y} - S_y (3 S_x^2 + S_y^2) \frac{\partial \ddot{\varphi}_0}{\partial x} \right] - \\
 & - \delta \dot{\varphi}_0 \left(S_y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - S_x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) - \dot{\varphi}_0 \left(S_x \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi_0 - S_y \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi_0 \right) - \\
 & - (S_x^2 + S_y^2) \frac{\partial \ddot{\varphi}_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi_0 - \beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial x},
 \end{aligned}$$

$$f_1 = \left(\dot{\varphi}_{0x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \dot{\varphi}_0 \frac{\partial \varphi_{0x}}{\partial y} \right) S_x + \left(\dot{\varphi}_0 \frac{\partial \varphi_{0x}}{\partial x} - \dot{\varphi}_{0x} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) S_y - \frac{\partial \varphi_{0x}}{\partial t} - \delta_j^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}.$$

Сложность выражений для F_i и f_i быстро растёт с ростом i . Уравнения для $i = 1, 2, \dots$ в рассматриваемом методе всегда линейны (если нелинейность аналитическая), а уравнение для $i = 0$, как правило, нелинейно. В нашем случае удачным оказалось то, что уравнение (5) и краевые условия (7) оказались линейными. Это произошло из-за специального вида нелинейности в исходном уравнении и краевых условиях. Нелинейные выражения представляют собой скобки Пуассона $\{\Delta \varphi, \varphi\}$ и $\{\varphi_x, \varphi\}$ соответственно, и нелинейность не улавливается первым порядком коротковолнового приближения с одной фазовой функцией.

Функция τ^2 , входящая в оператор вертикального обмена δ обычно выбирается из эмпирических соображений. Чтобы решить систему уравнений (5), (6) с краевыми условиями (7), (8) конкретизируем вид оператора δ . Предположим для простоты,

что задан постоянным параметр устойчивости атмосферы. В этом случае решение выражается в элементарных функциях. Можно также предположить, как часто делается, что заданы постоянными $\partial T/\partial z$ или $\partial \theta/\partial z$, тогда решения выражаются через функции Бесселя, что приводит к несколько более громоздким выкладкам. (Здесь T - абсолютная, а θ - потенциальная температура, z - геометрическая вертикальная координата.) Введём следующие обозначения: $c^2 = R^2 T (\gamma_a - \gamma) g$ - параметр устойчивости атмосферы; R - газовая постоянная воздуха; γ_a - адиабатический градиент температуры; γ - реальный градиент температуры. Тогда $z^2(\zeta) = l_0^2 \zeta^2 / c^2$. Обозначим $a = l_0^2 / c^2 (S_x^2 + S_y^2)$, $b = \beta (S_x / S_t) (S_x^2 + S_y^2)^{-1}$, $Y = \dot{\varphi}_0$, тогда уравнение (5) примет вид

$$\ddot{Y} + a \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial Y}{\partial \zeta} + b Y = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) будем решать методом разделения переменных, для чего представим Y в виде $Y = W(\tau) Z(\zeta)$, что влечёт

$$\frac{\ddot{W}}{W} + \frac{a}{Z} \frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{dZ}{d\zeta} + b = 0,$$

и уравнение (9) оказывается эквивалентным системе

$$\ddot{W} + k^2 W = 0, \quad (10)$$

$$\zeta^2 Z'' + 2\zeta Z' + mZ = 0, \quad (11.)$$

где k^2 - постоянная разделения, $m = (b - k^2)/2$. Решение уравнения (10) очевидно, а уравнение (11) называется уравнением Эйлера [31].

Чтобы решить уравнение (IГ), найдём характеристические числа α_1 и α_2 из условий

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 \alpha_2 = m.$$

Получим $\alpha_1 = -1/2 + \sqrt{1/4 - m}$, $\alpha_2 = -1/2 - \sqrt{1/4 - m}$.

Можно показать, что при $m \leq 1/4$ краевые условия не позволяют получить нетривиальные решения, поэтому должно выполняться неравенство $m > 1/4$. В этом случае $\alpha_1 = -1/2 + i\chi$ и $\alpha_2 = -1/2 - i\chi$, где $\chi = \sqrt{m - 1/4}$ и общим решением уравнения (IГ) будет функция

$$z = \zeta^{-1/2} \{c_1 \cos(\chi \ln \zeta) + c_2 \sin(\chi \ln \zeta)\}, \quad (I2)$$

где c_1, c_2 - постоянные интегрирования. Подстановка (I2) в краевые условия даёт систему уравнений для c_1 и c_2 :

$$c_1 \{(\delta_j^2 \zeta_j - 1/2) \cos(\chi \ln \zeta_j) - \chi \sin(\chi \ln \zeta_j)\} +$$

$$+ c_2 \{\chi \cos(\chi \ln \zeta_j) + (\delta_j^2 \zeta_j - 1/2) \sin(\chi \ln \zeta_j)\} = 0, \quad j=0, 1.$$

Требование существования нетривиальных решений приводит к уравнению для χ :

$$\chi^2 \sin(\chi d) + \chi \gamma \cos(\chi d) + e \sin(\chi d) = 0, \quad (I3)$$

где

$$d = \ln(\zeta_1 / \zeta_0), \quad \gamma = \delta_0^2 \zeta_0 + \delta_1^2 \zeta_1,$$

$$e = (\delta_0^2 \zeta_0 - 1/2)(\delta_1^2 \zeta_1 - 1/2).$$

У этого уравнения имеется симметричная счётная система корней:

$$\chi_i = \chi_{-i}, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{Значения } \chi_i, \text{ за исключением}$$

$\alpha_0 = 0$, образуют спектр задачи. По известному свойству оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями вида $Z_\zeta + b^2 Z = 0$ все собственные значения имеют ранг, равный единице, поэтому собственные функции Z_i имеют вид

$$Z_i = \zeta^{-\frac{1}{2}} \{ \cos(\alpha_i \ln \zeta) + \alpha_0 \sin(\alpha_i \ln \zeta) \},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_i \sin \alpha_i \ln \zeta_0 - (b_0^2 \zeta_0 - 1/2) \cos \alpha_i \ln \zeta_0}{\alpha_i \cos \alpha_i \ln \zeta_0 + (b_0^2 \zeta_0 - 1/2) \sin \alpha_i \ln \zeta_0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Если вместо верхнего краевого условия (3) принять условие ограниченности кинетической энергии атмосферы: $\rho |\nabla \psi| < \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, то это приведёт к следующим изменениям:

1/ спектр станет непрерывным, 2/ ограничение на m ослабится, вместо условия $m > 1/4$ достаточно будет выполнения условия $m \geq 0$, причём общее решение уравнения (II) примет вид:

$$Z = \begin{cases} c_1 \zeta^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - m}} + c_2 \zeta^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - m}} & \text{при } 0 \leq m < 1/4, \\ \zeta^{-\frac{1}{2}} (c_1 + c_2 \ln \zeta) & \text{при } m = 1/4, \\ \zeta^{-\frac{1}{2}} \{ c_1 \cos(\alpha \ln \zeta) + c_2 \sin(\alpha \ln \zeta) \} & \text{при } m > 1/4. \end{cases}$$

Требованию 2π -периодичности по ζ и однозначности фазы можно удовлетворить, выбрав определённое целое значение k и определённый корень α_i . Соотношение $\alpha_i = \sqrt{m - 1/4}$ даёт искомое уравнение Гамильтона-Якоби. Вспоминая, что

$$m = (b - k^2)/2, \quad \text{а } b = \beta (S_x/S_\pm) (S_x^2 + S_y^2)^{-1} \quad \text{и}$$

возводя в квадрат обе части равенства $\alpha_i = \sqrt{m - 1/4}$, полу-

чим уравнение Гамильтона-Якоби

$$\mathcal{L}^2 \beta \dot{S}_x^2 - S_t \{ \mathcal{L}^2 k^2 (S_x^2 + S_y^2) + \mathcal{L}_i^2 + \frac{1}{4} \} = 0. \quad (I4)$$

(Можно всегда считать $k = 1$, поскольку при изменении k меняется лишь масштаб S .)

Для функции начального приближения получаем выражение

$$\Psi_0 = G(\zeta) C_1 \cos(\varphi + C_2) + C_3, \quad (I5)$$

где $G(\zeta) = z_i(\zeta)$; $C_1 = C_1(x, y, t)$, $C_2 = C_2(x, y, t)$, $C_3 = C_3(x, y, t, \zeta)$ — медленно меняющиеся функции переменных x, y, t ; C_3 , кроме того, зависит от ζ .

Решим теперь уравнение (6), которое в новых обозначениях имеет вид

$$\ddot{\varphi}_i + a \delta \dot{\varphi}_i + b \varphi_i = F_i / S_t (S_x^2 + S_y^2), \quad (I6)$$

при краевых условиях

$$\dot{\varphi}_{i\zeta} + b_0^2 \varphi_i = f_{i0} / S_t \Big|_{\zeta = \zeta_0} \quad (I7)$$

$$\dot{\varphi}_{i\zeta} + b_1^2 \varphi_i = f_{i1} / S_t \Big|_{\zeta = \zeta_0}. \quad (I8)$$

Введя обозначение $\Phi = \dot{\varphi}_i$ получим

$$\ddot{\Phi} + a \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + b \Phi = F_i / S_t (S_x^2 + S_y^2), \quad (I9)$$

$$\Phi_{\zeta} + b_0^2 \Phi = f_{i0} / S_t \Big|_{\zeta = \zeta_0}, \quad (I20)$$

$$\Phi_{\zeta} + b_1^2 \Phi = f_{i1} / S_t \Big|_{\zeta = \zeta_0}. \quad (I21)$$

Вводя функцию H , удовлетворяющую условиям (20) и (21):

$$H = \frac{f_{10}(1 + \delta_1^2 \zeta_1 - \delta_1^2 \zeta) - f_{11}(1 + \delta_0^2 \zeta_0 - \delta_0^2 \zeta)}{\zeta_+ \{ \delta_0^2 (1 + \delta_1^2 \zeta_1) - \delta_1^2 (1 + \delta_0^2 \zeta_0) \}},$$

сведём краевые условия к однородным. Введём функцию Y , такую, что $\Phi = H + Y$, тогда для Y получим следующее уравнение и краевые условия:

$$\ddot{Y} + a \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial Y}{\partial \zeta} + b Y = F_i / \{ \zeta_+ (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \} - \ddot{H} -$$

$$- \frac{2a \zeta (\delta_0^2 f_{11} - \delta_1^2 f_{10})}{\zeta_+ \{ \delta_0^2 (1 + \delta_1^2 \zeta_1) - \delta_1^2 (1 + \delta_0^2 \zeta_0) \}} = b H, \quad (22)$$

$$Y_\zeta + \delta_0^2 Y = 0 \Big|_{\zeta = \zeta_0}, \quad (23)$$

$$Y_\zeta + \delta_1^2 Y = 0 \Big|_{\zeta = \zeta_1}. \quad (24)$$

Для того, чтобы уравнение (22) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (22) была ортогональна фундаментальной системе решений соответствующего однородного уравнения. Обозначив правую часть через f , получим следующие условия ортогональности:

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \int_0^{2\pi} f G(\zeta) \sin k \tau d\zeta d\tau, \quad (25)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \int_0^{2\pi} f G(\zeta) \cos k \tau d\zeta d\tau. \quad (26)$$

Рассмотрим, например, уравнение (22) с краевыми условиями

(25) и (24) при $i=1$, тогда равенства (25) и (26) дадут нам соотношения для C_1, C_2, C_3 , вытекающие уравнениями переноса:

$$a_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial C_1}{\partial x} + a_3 \frac{\partial C_1}{\partial y} + f_1 C_1 = 0, \quad (27)$$

$$a_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + a_3 \frac{\partial C_2}{\partial y} = f_2. \quad (28)$$

Учитывая, что $C_3(x, y, t, \zeta)$, как видно из (15), представляет собой функцию тока среднего течения, введём обозначения

$$V = C_3 x, \quad U = -C_3 y, \quad \Psi = C_3, \quad \tilde{U} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G^2 U d\zeta,$$

$$\tilde{V} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G^2 V d\zeta, \quad \tilde{\Psi} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G^2 \Psi d\zeta, \quad \delta \tilde{U} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G^2 \delta U d\zeta,$$

$$\delta \tilde{V} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G^2 \delta V d\zeta.$$

Кроме того, обозначим

$$A_0 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G \{ (b-1)(1 + b_0^2 \zeta_0 - b_0^2 \zeta) - 2a b_0^2 \zeta \} d\zeta,$$

$$A_1 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G \{ (b-1)(1 + b_1^2 \zeta_1 - b_1^2 \zeta) - 2a b_1^2 \zeta \} d\zeta,$$

$$\Sigma = b_0^2 (1 + b_1^2 \zeta_1) - b_1^2 (1 + b_0^2 \zeta_0).$$

Тогда

$$a_1 = \frac{1}{S_t} \left\{ \frac{m}{(S_x^2 + S_y^2)} - 1 \right\} + \frac{A_1 (G_x + b^2 G)_0 - A_0 (G_x + b^2 G)_1}{S_t \Sigma},$$

$$a_2 = \frac{2 S_t S_x - \beta - \tilde{\Psi} S_y (3 S_y^2 + S_x^2)}{S_t (S_x^2 + S_y^2)},$$

$$a_3 = \frac{2 S_t S_y + \tilde{\Psi} S_x (3 S_y^2 + S_x^2)}{S_t (S_x^2 + S_y^2)},$$

$$f_1 = \frac{S_t S_{xx} + S_t S_{yy} + 2 S_x S_{xt} + 2 S_y S_{yt}}{S_t (S_x^2 + S_y^2)},$$

$$f_2 = - \left(i + \frac{m}{S_x^2 + S_y^2} \right) \left(\frac{S_y}{S_t} \tilde{V} + \frac{S_x}{S_t} \tilde{U} \right) - \frac{(\tilde{\delta} U S_x + \tilde{\delta} V S_y)}{S_t (S_x^2 + S_y^2)} +$$

$$+ \frac{1}{S_t \Sigma} \left\{ A_1 [G_x (S_x U - S_y V) - G (S_x U_x - S_y V_x)]_0 - \right.$$

$$\left. - A_0 [G_x (S_x U - S_y V) - G (S_x U_x - S_y V_x)]_1 \right\}.$$

Уравнения переноса (27) и (28) описывают взаимодействие волны со средним потоком. Если подействовать на функцию ψ_0 слева оператором $\exp[-i\tilde{\omega} \tilde{S}(x, y, t)/\hbar]$ и положить $\tau = 0$, то получится начальное приближение для функции тока бароклин-

ной волны:

$$\Psi_0 = G(\zeta) C_1(x, y, t) \cos \left\{ \frac{S(x, y, t)}{h} + C_2(x, y, t) \right\} + \Psi(x, y, t, \zeta). \quad (29)$$

Заметим, что, во-первых, запись (29) пригодна для произвольной структуры вертикального оператора δ - при изменении изменится лишь функция $G(\zeta)$. Во-вторых, если C_1 , C_2 и Ψ - константы (т. е. не зависят от x , y , t и ζ), то, как легко убедиться, функция Ψ_0 является точным решением квазигеострофического уравнения вихря с соответствующими краевыми условиями. В этом случае для получения волновых решений малый параметр не нужен, достаточно лишь решить уравнение Гамильтона-Якоби (14) и найти функцию $G(\zeta)$.

Гамильтонова система, соответствующая уравнению (14), легко интегрируется. Полным интегралом этого уравнения является линейная функция

$$S' = a_x x + a_y y + a_t t + a_0,$$

где a_0 - произвольная константа, a_x , a_y , a_t удовлетворяют соотношению

$$2\beta a_x - 2k^2 a_t (a_x^2 + a_y^2) - (1/4 + \kappa_i^2) a_t = 0.$$

Это обстоятельство является следствием постоянства коэффициентов исходного уравнения (7). (Гамильтониан не зависит от обобщённых координат.)

Таким образом, полученные решения в первом приближении имеют вид синусоидальных волн произвольной амплитуды, причём амплитуда растёт в среднем с высотой как $\rho^{-1/2}$ для рассмотренной структуры вертикального расслоения атмосферы.

Волновые решения квазигеострофического уравнения вихря

использовались при описании крупномасштабной атмосферной турбулентности [37] и при исследовании бароклиной неустойчивости атмосферы [39].

Вычисленные с помощью волновых решений вторые моменты крупномасштабных пульсаций поля скорости в атмосфере оказались в хорошем соответствии с наблюдаемыми.

Согласно стандартной теории [122], бароклиная неустойчивость, приводящая к возникновению циклонов и антициклонов, развивается, если перепад температур между экватором и полюсом превысит некоторое критическое значение. Впоследствии неоднократно отмечалось, что наблюдаемые средние градиенты температуры никогда не достигают критических значений. Для объяснения наблюдаемой неустойчивости атмосферы были предприняты подгонки [22, 134]. В [39] показано, что в случае общего положения, т. е., если градиент температуры имеет хотя бы малую зональную составляющую, устойчивость отсутствует вообще. В природе зональные перепады температур всегда имеются. Они обусловлены, например, разностями температур между сушей и океаном.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим основные результаты работы.:

1. Разработана и реализована программа для вычисления с помощью ЭВМ определяющих уравнений точечных и контактных симметрий Ли достаточно общих дифференциальных уравнений и систем уравнений. Алгоритмы, разработанные для этой программы, позволили добиться большей универсальности и эффективности по сравнению с ранее известными программами для вычисления точечных симметрий.

2. Впервые разработана и реализована программа для получения симметрий Ли-Феклунда систем дифференциальных уравнений произвольного порядка и с произвольным числом зависимых и независимых переменных.

3. С помощью этой программы получены и исследованы не известные ранее локальные симметрии ряда нелинейных волновых уравнений теоретической физики.

4. Впервые разработаны и реализованы программы для вычисления нелокальных симметрий линейных уравнений теоретической физики. С помощью этих программ вычислены нелокальные симметрии уравнений Дирака и Кеммера-Дейффина-Петье. Кроме того, программы можно применять к произвольным матрицам для решения в аналитическом виде задач о собственных значениях и о приведении к канонической жордановой форме.

5. Разработан и реализован в виде системы программ алгоритм классификации подалгебр конечномерных алгебр Ли произвольной структуры, основанный на приведении к жорданову виду матрицы присоединённого представления алгебры Ли.

6. Разработана и реализована программа для получения асимптотических разложений при вычислении квазиклассических

решений волновых уравнений теоретической и математической физики. С помощью этой программы получены не известные ранее асимптотические и точные решения нелинейного квазигеострофического уравнения потенциального вихря. Эти решения использовались при описании крупномасштабной атмосферной турбулентности и для объяснения явления бароклинной неустойчивости.

В дальнейшем программы, описанные в главе I, необходимо дополнить эффективными программами для интегрирования определяющих уравнений, поскольку системы этих уравнений часто слишком громоздки для решения вручную.

Программы, описанные в главе 2, позволяют решать уравнение вида

$$[L, R] = A L \quad (I)$$

относительно R в случае, если операторы R и L не зависят от пространственно-временных координат и $A = 0$. Несложно обобщить вычисления на случай, когда оператор L является полиномом по независимым переменным и операторам дифференцирования. Более важным представляется обобщение соотношения (I) на случай, когда вместо уравнения $L\psi = 0$ рассматривается некоторое нелинейное уравнение. По нашему мнению, естественным обобщением оператора R на нелинейный случай является оператор рекурсии [30]. В настоящее время нами разрабатываются алгоритмы для получения определяющих уравнений оператора рекурсии.

Программы для классификации подалгебр алгебр Ли, описанные в главе 3, целесообразно пореализовать на язык какой-нибудь интерактивной системы, например, АМР. Это позволило бы существенно повысить производительность работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОИЯИ, Дубна, 1980, DII-80-13, с. 187, 1983, DII-83-5II, с. 260.
2. Арайс Е.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ. - ДАН СССР, 1974, т. 214, № 4, с. 296.
3. Архангельский А.В. Конечномерные векторные пространства. - М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 248.
4. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения. - М.: Наука, 1980, т. 1, с. 455, т. 2, с. 395.
5. Боголюбов Н.Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. - в кн.: Избранные труды в трёх томах. Киев: Наукова думка, 1971, т. 3, с. 110-173.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974, с. 500.
7. Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1977, с. 327.
8. Владимиров В.С., Волович И.В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений. - Теор. и мат. физика, 1985, т. 62, № 1, с. 3-29.
9. Владимиров В.С., Волович И.В. Законы сохранения для нелинейных уравнений. - УМН, 1985, т. 40, № 4, с. 17-26.
10. Владимиров С.А. Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля. - М.: Атомиздат, 1979, с. 168.
11. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977, с. 304.
12. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984, с. 320.

13. Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных. - ДАН СССР, 1981, т. 261; № 5, с. 1044-1046.
14. Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. Об использовании ЭВМ для анализа на совместность систем дифференциальных уравнений. - в кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Дубна, 1983, II-83-511, с. 125-131.
15. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике. - УФН, 1980, т. 130, в. 1, с. 113-147.
16. Гердт В.П., Тарасов О.В. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в физике высоких энергий. - В кн.: XV международная школа молодых учёных по физике высоких энергий. Дубна, 1983, с. 481-504.
17. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. - М.: МИР, 1981, с. 504.
18. Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Ерумберг В.А. и др. Системы аналитических вычислений на ЭВМ /Аналитические пакеты прикладных программ/. - М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1983, с. 65.
19. Данилов Ю.А. Построение оптимальной системы подалгебр произвольной конечномерной алгебры Ли. - В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. 2, с. 339-341.
20. Данилов Ю.А., Кузнецов Г.И. Построение оптимальной системы подалгебр конечномерной алгебры Ли. Препр. № 753/1, М.: Ин-т атомн. энергии, 1983, с. 12.
21. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970, с. 404.

22. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. -Л.: Гидрометеонадат, 1976, с.108.
23. Дородницын В.А., Смирновский С.Р. О группах Ли-Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. Препр.№ ТОГ, -М.:ИИ-т прикл. матем. АН СССР, 1983, с.28.
24. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. -М.: Наука, 1979, с. 760.
25. Дэвенпорт Дж. Интегрирование алгебраических функций. -М.: Мир, 1985, с. 192.
26. Елисеев В.П., Корняк В.В., Фёдорова Р.И. REDUCE -программа для определения симметрий Ли дифференциальных уравнений. Сообщения ОИЯИ. ПТ-84-238. -дубна: ОИЯИ, 1984, с. 10.
27. Елисеев В.П., Корняк В.В., Фёдорова Р.И. Редьюс-программа для определения симметрий Ли дифференциальных уравнений. - В кн.: Системы для аналитических преобразований в механике. -Горький: Изд-во горьковского гос. ун-та им. П.И. Лобачевского, 1984, с. 117.
28. Жарков А.Ю., Швачка А.В. Исследование интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений с использованием системы аналитических вычислений REDUCE-2. ОИЯИ, РП-83-914. дубна, 1982.
29. Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. -М.: Наука, 1980, с. 220.
30. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. -М.: Наука, 1987, с. 280.
31. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1971, с. 578.

32. Капцов О.В. Расширение симметрии эволюционных уравнений. -ДАН СССР, 1982, т. 262, № 5, с. 1056-1059.
33. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. -М.: Изд-во МГУ, 1962, с. 237.
34. Катков В.Л., Костюкова Н.И. Процессор КИНО. -В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. I. Новосибирск, 1969, с. 48-60.
35. Катков В.Л., Попов М.Д. Специализированная система аналитических преобразований на ЭВМ БЭСМ-6. -Тезисы докладов всесоюзной конференции "Системы для аналитических преобразований в механике". Горький, 1984, с. 59-61.
36. Корняк В.В. О нелинейных бароклинических волнах в атмосфере. -В кн.: Мат. моделир. природных систем. Владивосток, 1981, с. 110-121.
37. Корняк В.В. О параметризации вторых моментов крупномасштабных пульсаций поля скорости в атмосфере. -В кн.: Мат. моделир. природных систем. Владивосток, 1981, с. 122-132.
38. Корняк В.В. Волновые решения квазигеострофического уравнения вихря. -Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана. 1982, т. 18, № 5, с. 460-466.
39. Корняк В.В. Замечание о бароклинической неустойчивости атмосферы. -Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана. 1982, т. 18, № 9, с. 995-997.
40. Корняк В.В. Применение ЭВМ для исследования симметрий некоторых уравнений математической физики. -В кн.: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985, с. 114-119.

41. Корняк В.В. Классификация подалгебр конечномерной алгебры Ли с помощью ЭВМ. - В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОМЯИ, Лубна, 1986, II-86- , с.
42. Корняк В.В. , Фёдорова Р.П. Применение систем аналитических вычислений для определения симметрий Ли и Ли-Веклунда дифференциальных уравнений. -В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОМЯИ, Лубна, 1986, II-86- , с.
43. Корняк В.В., Бушчи В.И. Вычисление на ЭВМ нелокальных симметрий систем линейных уравнений математической физики. -В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОМЯИ, Лубна, 1986, II-86- , с.
44. Костюкова И.И. Процессор ПАССМВ. -Вычисл. мат. и вычисл. техн., вып. 3. Уарьков, Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР, 1972, с. 38-41.
45. Ланкастер П. Теория матриц. -М.: Наука, 1977, с. 280.
46. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика. -М.: МЦР, 1981, с. 260.
47. Логинов Е.В. Теории ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: ФАН. с. 184.
48. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. -М.: Изд-во МГУ, 1965.
49. Маслов В.П. Операторные методы. -М.: Наука, 1973, с.227.
50. Маслов В.П. Комплексный метод ВМТ в нелинейных уравнениях. -М.: Наука, 1977, с. 384.
51. Маслов В.П., Федорук М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. -М.: Наука, 1976. с.296.

52. Миллер У., мл. Симметрия и разделение переменных. -М.: МИР, 1981, с. 142.
53. Митропольский Ю.А., Мосеев Ф.М. Асимптотические решения уравнений в частных производных. -Киев: Вища школа, 1976, с. 589.
54. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. -М.: Наука, 1978, с. 252.
55. Никитин А.Г. Операторы симметрии уравнения Вейля. -В кн.: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985, с. 31-35.
56. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1978, с. 100.
57. Пальмен Э., Ньютон Ч. Циркуляционные системы атмосферы. -Л.: Гидрометеоназдат, 1974, с. 116.
58. Помаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. -М.: МИР, 1982, с. 208.
59. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. -М.: МИР, 1981, с. 264.
60. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Тищенко И.И. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. -Новосибирск: Наука, 1984, с. 272.
61. Теоретико-групповые методы в физике. Ч.1. -М.: Наука, 1982, с. 42.
62. Теоретико-групповые методы в физике. Ч.2. -М.: Наука, 1982, с. 560.
63. Теоретико-групповые методы в математической физике. Сб. научн. тр. /отв. ред. Ю.А. Митропольский, В.И. Бушнич. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 128.

64. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. Сб. научн. тр./Отв. ред. В.И. Фушич. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 136.
65. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. Сб. научн. тр. /Отв. ред. В.И. Фушич. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 140.
66. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.:МИР, 1977, С.622.
67. Уолфрэм С. Программное обеспечение научных исследований. - В мире науки, 1984, № II, с. 98-109.
68. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. -М.-Л.: Физматгиз, 1963, с. 734.
69. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. -М.-Л.: Гостехиздат, 1948, с. 432.
70. Фушич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения. -Теор. и мат. физика, 1971, т.7, № I, с. 3-12.
71. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных. -В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 5-44.
72. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. -ДАН СССР, 1979, т.246, № 4, с. 846-850.
73. Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики. В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 6-22.

74. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщённой группы Галилея. I. Препринт 85.19. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985, с. 46.
75. Фушич В.И., Корняк В.В. Реализация на ЭВМ алгоритма вычисления нелокальных симметрий для уравнений типа Дирака. Препринт 85.20. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985, с. 18.
76. Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983, с. 200.
77. Фушич В.И., Никитин А.Г. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака. - ЭЧАЯ, 1983, т. 14, № 1, с. 5-57.
78. Шефтель М.В. О бесконечной некоммутативной алгебре Ли-Беклунда, связанной с уравнениями одномерной газовой динамики. - Теор. и мат. физика, 1983, т. 56, № 3, с. 368-386.
79. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978, с. 280.

80. Ames, W.I. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering II. New York: Academic Press, 1972.
81. Anderson, R.L., Harnad, J., Winternitz, P. Systems of Ordinary Differential Equations with Nonlinear Superposition Principles. - *Physica*, 1982, v.D4, No.2, p.164-182.
82. Bahr, K.A. FORMAC 73 User's Manual. Darmstadt. GMD/IFV. West Germany, 1973.
83. Barton, D., Willers, I.M., Zahar, R.V.M. The Automatic Solution of Systems of Ordinary Differential Equations by the Method of Taylor Series. - In: Proceedings Mathematical Software (Rice, J., ed.). New-York: Academic Press 1971, p.369-390.
84. Beckers, J., Patera, J., Perroud, M., Winternitz, P. Subgroups of the Euclidean Group and Symmetry Breaking in Nonrelativistic Quantum Mechanics. - *J.Math.Phys.*, v.18, No.1, p.72-83.
85. Bluman, G.W., Cole, J.D. Similarity Methods for Differential Equations. (Applied Mathematics series, vol.13). Berlin-Heidelberg-New York: 1974.
86. Bogen, R. et al. MACSYMA Reference Manual, Version nine, MIT Mathlab group report, Cambridge MA, 1977.
87. Brenner, R.L. The Evaluation of Feynman Diagrams in MACSYMA.- MACSYMA 1979, p.1-24.
88. Burdet, G., Patera, J., Perrin, M., Winternitz, P. The Optical Group and its Subgroups. - *J.Math.Phys.*, 1978, v.19, No.8, p.1758-1780.
89. Calmet, J., Van Hulzen, J.A. Computer Algebra Applications. - *Computing*, Suppl. 1982, v.4, p.245-258.
90. Calmet, J., Visconti, A. Computing Methods in Quantum Electrodynamics. In: Fields Theory, Quantization and Statistical Physics (Tirapegni, E., ed.). Dordrecht: Reidel, 1981, p.33-57.

91. Char, B. Using Lie Transformation Groups to Find Closed Form Solutions to First Order Ordinary Differential Equations. - SYMSAC, New York, 1981, p.44-50.
92. Cohen, I., Frick I., Aman, J.E. Algebraic Computing in General Relativity. - Gen. Relativ. and Gravitat. Inv. Pap. and Discuss. Repts 10 Int. Conf., Padua, July 3-8, 1983. Dordrecht e.a., 1984, p.139-162.
93. Cole, C.A., Wolfram, S. SMP - A Symbolic Manipulation Program. SYMSAC, 1981, p.20-22.
94. Cole, G.A., Wolfram, S., et al. SMP-Handbook, Version 1, Cal. Inst. of Techn. 1981.
95. Cullen, J.J., Reid, J.L. Lie-Bäcklund Groups and the Linearisation of Differential Equations.- J.Phys.A: Math. Gen., 1983, v.16, p.1889-1909.
96. Davenport, J.H., The Computerization of Algebraic Geometry. Proc. EUROSAM 79, p.119-133.
97. Drouffe, J.M. AMP User's Manual, Version 6. Gif-sur-Yvette, CEN Saclay, 1981.
98. Eliseev V.P., Fedorova R.N., Korniyak V.V. A REDUCE Program for Determining Point and Contact Lie Symmetries of Differential Equations. - Comp. Phys. Commun., 1985, v. 36, No.4, p.383-389.
99. Fedorova R.N., Korniyak V.V. Determination of Lie-Bäcklund Symmetries of Differential Equations Using FORMAC. Prepr. JINR, E11-85-164.
100. Fedorova, R.N., Korniyak, V.V. Determination of Lie-Bäcklund Symmetries of Differential Equations Using FORMAC. - Comput. Phys. Commun., 1985, v.39, No. , p.93-
101. Fitch, J.P. Mechanizing the Solution of Perturbation Prob-

lems. - MAXIMIN 1977, p.93-98.

102. Fushchich, W.I., Barannik, A.F., Barannik, L.F., Fedorchuk, V.M. Continuous Subgroups of the Poincare Group $P(1,4)$. - J.Phys.A: Math. and Gen, 1985, v.18, No.15, p.2893-2899.
103. Gerdt, V.P., Shvachka, A.B., Zharkov, A.Yu. FORMINT - a Program for Classification of Integrable Nonlinear Evolution Equations. - Comput.Phys.Commun., 1985, v.34, No.3, p.303-311.
104. Gerdt, V.P., Shvachka, A.B., Zharkov, A.Yu. Computer Algebra Application for Classification of Integrable Non-linear Evolution Equations. - J.Symbolic Computation, 1985, v.1, No.1, p.101-107.
105. Gragert, P.K.H. Symbolic Computations in Prolongation Theory. Ph.D. thesis, Twente University of Technology, Enschede, 1981.
106. Gragert, P.K.H., Kersten, P.H.M., Martini, R. Symbolic Computations in Applied Differential Geometry. - Acta applicandae math., 1983, v.1, No.1, p.43-77.
107. Green, M. Application of Algebraic Computation to Feynman diagrams. - Workshop Radiat. Correct. $SU(2)_L \times U(1)$, Miramare, 6-8 June, 1983. Singapore, 1984, p.77-84.
108. Griesmer, J.H., Jenks, R.D., Yun, D.Y.Y. SCRATCHPAD User's Manual. Yorktown Heights: IBM Research, Report RA 70, 1975.
109. Hearn, A.C. REDUCE 2 User's Manual. Salt Lake City, 1974.
110. Hearn, A.C. REDUCE User's Manual, Third Edition. Santa Monica: RAND Corporation, 1983.
111. Kersten, P.H.M. The Computation of the Infinitesimal Symmetries for Vacuum Maxwell Equations and Extended Vacuum Maxwell Equations. Twente University of Technology: TW memorandum 365, 1981.

112. Kersten, P.H.M., Gragert, P.K.H. Symbolic Integration of Overdetermined Systems of Partial Differential Equations. Twente University of Technology: TW memorandum 430, 1983.
113. Kersten, P.H.M., Martini, R. Lie-Bäcklund Transformations for the Massive Thirring Model. - J.Math.Phys., 1985, v.26, No.4, 822-825.
114. Lassner, W. Realizations of the Poincare Group on Homogeneous Spaces. - Acta phys. slov., 1973, v.23, No.4, p.193-202.
115. Lüscher, M., Pohlmeyer, K. Scattering of Massless Lumps and Non-local Charges in 2-dimensional Classical Nonlinear σ -model. - Nucl.Phys., 1978, v. B137, No.1, p.46-54.
116. Olver, P.J. Symmetry Groups and Conservation Laws in the Formal Variational Calculus. Preprint of Oxford univ., 1980.
117. Patera, J., Sharp, R.T., Winternitz, P., Zassenhaus, H. Invariants of Real Low Dimension Lie Algebras. - J.Math.Phys., 1976, v.17, No.6, p.986-994.
118. Patera, J., Sharp, R.T., Winternitz, P., Zassenhaus, H. Subgroups of the Poincare Group and Their Invariants. - J.Math. Phys., 1976, v.17, No.6, p.977-984.
119. Patera, J., Sharp, R.T., Winternitz, P., Zassenhaus, H. Continuous Subgroups of the Fundamental Groups of Physics. III. The de Sitter Groups. - J.Math.Phys., 1977, v.18, No.12, p.2259-2288.
120. Patera, J., Winternitz, P. Subalgebras of Real Three- and Four-dimensional Lie Algebras. - J.Math.Phys., 1977, v.18, No.7, p.1449-1455.
121. Patera, J., Winternitz, P., Sharp, R.T., Zassenhaus, H. Subgroups of the Similitude Group of Three-dimensional Minkowski Space. - Can.J.Phys., 1976, v.54, p.950-961.
122. Phillips, N.A. Energy Transformations and Meridional Circula-

tions Associated with Simple Baroclinic Waves in a Two-level Quasi-geostrophic Model. - *Tellus*, 1954, v.6, No.3, p.273-386.

123. Reinman, A. Computer-aided Closure of the Lie Algebra Associated with a Nonlinear Partial Differential Equation. - *Comp. and Maths. with Appls.*, 1981, v.7, No.5, p.387-393.
124. Schwarz, F. AREDUCE Package for Determining Lie Symmetries of Ordinary and Partial Differential Equations. - *Comp.Phys. Commun.*, 1982, v.27, No.2, p.179-186.
125. Schwarz, F. Symmetries of Two-dimensional Korteweg-de Vries Equation. - *J.Phys.Soc. Japan*, 1982, v.51, p.2383.
126. Schwarz, F. Symmetries of SU(2) Invariant Yang-Mills Theories. - *Lett.Math.Phys.*, 1982, v.6, No.5, p.355-359.
127. Schwarz, F. Contact Symmetries of the Harmonic Oscillator. - *J.Phys.A: Math. and Gen.*, 1983, v.16, No.5, p.L133-L135.
128. Schwarz, F. Lie Symmetries of the von Karman Equations. - *Comp.Phys.Commun.*, 1984, v.31, No.1, p.113-114.
129. Schwarz, F. Automatically Determining Symmetries of Ordinary Differential Equations. - *Lect. Notes Comput. Sci.*, 1984, v.162, p.45-54.
130. Schwarz, F. The Riquier-Janet Theory and Its Application to Nonlinear Evolution Equations. - *Physica*, 1984, v.D11, No.1-2, p.243-251.
131. Schwarz, F. Automatically Determining Symmetries of Partial Differential Equations. - *Computing*, 1985, v.34, No.2, p.91-106.
132. Smarr, L. Computational Relativity. Numerical and Algebraic Approaches. Report of workshop A4. *Gen.Relativ. and Gravitat. Inv. Pap. and Discuss. Repts 10 Int. Conf., Padua, July 3-8,*

1983. Dordrecht e.a., 1984, p.163-183.
133. Steeb, W.H., Strampp, W. Diffusion Equations and Lie and Lie-Bäcklund Transformation Groups. - *Physica*, 1982, v.A114, p.95-99.
134. Stone, P.H. Baroclinic Adjustment. - *J.Atmos.Sci.*, 1978, v.35, No.4, p.561-571.
135. Stoutemyer, D.R. The Coming Revolution in Scientific Computation. *Comput. and Educ.* 1981, v.5, p.53-55.
136. Tobey, R., Baker, J., Crews, R. et al. PL/I-FORMAC Symbolic Mathematics Interpreter. IBM, Proj. No.360D-03.3.004, Contributed Program Library. IBM, 1969.
137. Van Hulzen, J.A., Calmet, J. Computer Algebra Systems. *Computing*, suppl. 1982, v.4, p.221-243.
138. Winternitz, P. Nonlinear Action of Lie Groups and Superposition Principles for Nonlinear Differential Equations. - *Physica*, 1982, v.A114, No.1-3, p.105-113.
139. Yun, D.Y.Y., Stoutemyer, R.D. Symbolic Mathematical Computation. In: *Encyclopedia of Computer Science and Technology* (Belzer, J., Holzman, A.G., Kent, A., eds.), New York - Base Marcel Dekker 1980, v.15, p.235-310.

$$a_1 = e_1, a_2 = e_2, a_3 = e_3, a_4 = e_4.$$

Комбинируя векторы e_i по два, можно получить базисы шести двумерных инвариантных подпространств, из которых только комбинация $\{e_1, e_3\}$ не замкнута относительно коммутации. Таким образом, имеем пять инвариантных двумерных подалгебр:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}.$$

Аналогично этому, комбинируя e_i по три, получаем четыре трёхмерных инвариантных подпространства из которых только подпространство $\{e_1, e_3, e_4\}$ не замкнуто относительно коммутации, т. е. имеется три инвариантных трёхмерных подалгебры:

$$\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}.$$

Теперь необходимо проверить, не принадлежат ли различные полученные выше подалгебры к одной орбите относительно автоморфизмов общего вида. Достаточно рассмотреть автоморфизмы с параметрами из дополнения к U_1 , т. е. можно положить $\delta = 0$ в формуле для M :

$$M_{SU_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3\alpha \\ \gamma & 1 & -2 & -2\gamma - \beta \\ 0 & 0 & 1 & 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь SU_1 означает дополнение к U_1 . Вычисления показывают, что все полученные выше подалгебры принадлежат различным орбитам и поэтому могут рассматриваться как элементы оптимальной системы. Например, векторы одномерной системы опишут под действием M_{SU_1} следующие орбиты: