Институт математики АН УССР

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.ГОРЬКОГО

ФОНД №

ОПИСЬ № 2

Ед. хр. № 570

В.Д. КОШМАНЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель -
член-корреспондент АН УССР,
доктор физ.-мат.наук,профессор
Ю.М. БЕРЕЗАНСКИЙ

На 110 листах

Хранить постоянно

Киев - 1970

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Стр.

НЕКОТОРЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ПРИНЯТЫЕ В ДИССЕРТАЦИИ

ТП – теория поля

ОСП – обобщенное звободное поле

СП – свободное поле

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел

R^4 – пространство Минковского с индефинитным скалярным произведением: $\langle x_1, x_2\rangle = x_1^0 x_2^0 - \sum_{j=1}^{3} x_1^j x_2^j \quad (x_1, x_2 \in R^4)$; $\langle x_1, x_1\rangle \equiv \langle x_1\rangle^2$

$\mathcal{S}^{4n}$ – пространство основных функций Л.Шварца над $R^{4n} = \underbrace{R^4 \times \cdots \times R^4}_{n}$, $n = 0, 1, \ldots$; $\mathcal{S}^0 \equiv \mathbb{C}$

$(\mathcal{S}^{4n})^*$ – пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}^{4n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$

з.л.о. – замкнутая линейная оболочка

л.о. – линейная оболочка

п.о. – положительная определенность

$V_+ \, (V_-)$ – верхний /нижний/ световой конус

$V_{+,\varepsilon} \subset R^4$ – замкнутая внутренность гиперболоида $\langle k\rangle^2 = \varepsilon^2 (k^0 >$

$V_{-,\varepsilon} = -V_{+,\varepsilon}$

$\underset{0}{V}_{+,\varepsilon} = V_{+,\varepsilon} \cup \{0\} \quad \left(\underset{0}{V}_{-,\varepsilon} = -\underset{0}{V}_{+,\varepsilon}\right)$

$L_+^\uparrow$ - подгруппа четырехмерных вращений в R^4, сохраняющих знак времени и имеющих детерминант равным + I.

$$\theta_\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \in V_{+,\varepsilon} \\ 0, & k \bar{\in} V_{+,\varepsilon} \end{cases}$$

$\mathbb{1}$ - единичный оператор в пространстве Гильберта H

$\mathbb{1}_{kk}$ - единичный оператор в пространстве Гильберта H_k

Проектор - ортопроектор

$\tilde{u}$ - фурье-образ величины u

(Ψ, Φ) - скалярное произведение в пространстве Гильберта антилинейное по Ψ и линейное по Φ

$\bar{u}(x_1, \ldots, x_n)$ - функция комплексно сопряженная к $u(x_1, \ldots, x_n)$

В В Е Д Е Н И Е

Аксиоматический подход в квантовой теории поля /ТП/ возник в связи с трудностями, имеющими место при попытках построения корректной ТП. Одной из основных задач этого подхода является выяснение вопроса о совместимости и полноте аксиом-принципов, которые взяты из физического опыта и на основе которых предполагается построить ТП. Большим преимуществом этого подхода является предельная общность, а также математическая строгость утверждений.

Развиваясь, аксиоматический подход превратился в один из основных инструментов исследования квантовой ТП. Так, с его помощью был установлен целый ряд весьма ценных фактов о структуре теории.

Несмотря, однако, на частные успехи, создать непротиворечивую ТП до сих пор не удается. Более того, до сих пор не построено даже ни одного нетривиального примера поля, удовлетворяющего всем исходным аксиомам.

Этот неуспех скорее всего можно пояснить неудачной формулировкой аксиом ТП. Точнее, неудачным выбором математической формы, в которой выражаются основные физические принципы / в справедливости последних, в определенной сфере явлений, никто не сомневается/.

Имеется, кроме того, неопределенность и в вопросе, каким должен быть сам математический аппарат, в терминах которого возможно адекватное отражение наблюдающейся физической ситуации.

Это привело, в частности, к возникновению нескольких направлений в аксиоматическом подходе, различие между которыми состоит в том, что в каждом из них в качестве основных берутся различные математические объекты. Таковыми являются: гайзенбергово поле /в аксиоматике Вайтмана/, упорядоченные произведения гайзенберговых полей /в подходе ЛСЦ/, матрица рассеяния /в подходе БМП/, алгебра локальных наблюдаемых / C^*-алгебра/ /в подходе Хаага, Араки, Кастлера и др./. Предполагается, что все эти понятия равноправны и в терминах каждого из них можно сформулировать ТП. Однако полного соответствия между ними до сих пор не установлено.

Анализ основных положений аксиоматического подхода различных направлений, установления связи между ними, а также получение новых более глубоких следствий из них является, без сомнения, важной задачей на пути к созданию последовательной ТП. Некоторым частным вопросам этой общей задачи и посвящена настоящая диссертация.

x x

x

Изложим кратко содержание диссертации, состоящей из четырех глав.

Все рассмотрения диссертации относятся к случаю эрмитового скалярного поля.

В главе I, исходя из определения понятия поля, основанного на аксиомах Вайтмана [1 - 5], дана формулировка ТП в терминах операторных якобиевых матриц. Поясним идею такой формулировки.

Пусть $A(\varphi)$ / $\varphi \in \mathcal{S}^4$ - пространство Л.Шварца основных функций над R^4 / есть эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее всем аксиомам Вайтмана; H - пространство состояний этого поля; Ω - вакуумный вектор. Построим разложение пространства H в ортогональную сумму подпространств:

$$H = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} H_n \qquad /1/$$

с помощью следующей процедуры. Положим $H_0 = \mathbb{C}\Omega$ / $\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел/, а при $n = 1,2,\ldots$ определим $H_n = \mathfrak{H}_n \ominus \mathfrak{H}_{n-1}$, где через $\mathfrak{H}_j$ $(j=0,1,\ldots)$ обозначена замкнутая линейная оболочка векторов вида

$$c\Omega + A(\varphi_1^1)\Omega + \ldots + A(\varphi_j^1)\ldots A(\varphi_j^j)\Omega$$

$(c \in \mathbb{C};\ \varphi_1^1, \ldots, \varphi_j^1, \ldots, \varphi_j^j \in \mathcal{S}^4;\ \varphi_0^0 = 0)$. Обозначим через P_j $(j=0,1,\ldots)$ проектор в H на H_j. Оказывается, что части полевого оператора вида $P_n A(\varphi) P_m = 0$ для любых $n,m = 0,1,\ldots$, если $|n-m| > 1$. Т.е. операторная матрица

$$\mathcal{J}(\varphi) = \left\{ A_{nm}(\varphi) = P_n A(\varphi) P_m \right\}_{n,m=0}^{\infty} \qquad /2/$$

является якобиевой. Для того, чтобы матрица $\mathcal{J}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ являлась матричным представлением оператора $A(\varphi)$, вообще говоря, нужно делать некоторое дополнительное к аксиомам Вайтмана предположение, касающееся области определения поля.

Отметим, что построения, близкие к изложенным выше, проводились А.Ульманом [37].

Аксиомы ТП допускают полную переформулировку в терминах матриц $\mathcal{J}(\varphi)$. При этом часть аксиом в такой формулировке приобретают некоторые новые черты.

Полученная новая форма ТП является по существу некоторым обобщением представления Фока для свободного поля. Так, в § I-4 показано, что разложение /I/ для свободного поля совпадает с пространством Фока, а операторы $A_+(\varphi) = \oplus\sum_{j=0}^{\infty} A_{j+1,j}(\varphi)$ и $A_-(\varphi) = \oplus\sum_{j=0}^{\infty} A_{j,j+1}(\varphi)$, соответствующие побочным диагоналям матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$, совпадают с операторами рождения и уничтожения свободного поля.

В § I-3 введено понятие квазиполя. Квазиполе отличается от поля тем, что соответствующая ему матрица $\mathcal{J}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ всегда имеет главную диагональ равную нулю, а аксиома локальной коммутативности постулируется в более слабой форме, чем для поля. Пример квазиполя можно получить из поля заменой нулями всех элементов главной диагонали матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$. Класс квазполей довольно широк и включает в себя все ОСП. Несмотря на то, что понятие квазиполя является более простым объектом, чем поле, в нем отражаются, по существу, все характерные свойства ТП. Поэтому изучение квазиполей полезно.

Каждое квазиполе определяет некоторую последовательность функционалов $\mathcal{E}_{2n} \in (\mathcal{S}^{8n})^*$ $(n = 0, 1, \dots)$, названных порождающими. Порождающие функционалы обладают свойствами близикими к свойствам функционалов Вайтмана. Доказана теорема реконструкции для квазиполя /аналог теоремы реконструкции Вайтмана для поля/: по заданной последовательности порождающих функционалов однозначно восстанавливается некоторое квазиполе.

Дальнейшее изучение квазиполей продолжается в § 3-2 главы 3

Общие рассмотрения главы I проиллюстрированы на примере ОСП в § I-4.

Изложенные в главе I результаты содержатся в статьях [6,7].

В главе 2 приведен установленный в [27] следующий критерий тривиальности поля.

Поле $A(\varphi)$ является ОСП в том и только в том случае, когда матричные элементы $A_{11}(\varphi)$ и $A_{21}(\varphi)$ матрицы /2/ обладают свойствами:

$$\tilde{A}_{11}(\tilde{\varphi}) = \tilde{A}_{21}(\tilde{\varphi}) = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{S}^4, \ \mathrm{Supp}\,\tilde{\varphi} \cap \overset{}{\underset{0}{V}}_{+,\varepsilon} = \phi) \qquad /3/$$

Этот результат наиболее близок критерию установленному Робинсоном [21] и Гринбергом [22]. В последнем для тривиальности поля требуется чтобы фурье-образ всего поля $\tilde{A}(k) = 0$ в окрестности хотя бы одной точки $k \in \bar{V}_+$.

Условие /3/ может быть записано в терминах вакуумных средних. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Поле $A(\varphi)$ тривиально в том и только в том случае, когда

$$\mathrm{Supp}(\tilde{w}^4 - \tilde{w}^2 \otimes \tilde{w}^2) \subset \underset{0}{V}_{-,\varepsilon} \times V_{-,\varepsilon} \times V_{+,\varepsilon} \times \underset{0}{V}_{+,\varepsilon}.$$

Этот критерий указывает на актуальность задачи об описании явного вида всех "четырехточечных" функционалов Вайтмана w^4.

Глава 3 посвящена изучению возможностей построения примеров полей.

Поиск нетривиальных примеров полей является, как известно, одной из главных проблем аксиоматического подхода.

На протяжении всей третьей главы для учета части аксиомы локальной коммутативности используется пространственно-подобный симметризатор функций P_c , построенный в § 3-I. Его действие сводится к тому, что он произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ $(x_1, \dots, x_n \in R^4)$ переводит в пространственно-подобно симметричную $f_c(x_1, \dots, x_n)$ $(f_c(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = f_c(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n)$, если $\langle x_j - x_{j+1} \rangle^2 < 0$; $j = 1, 2, \dots, n-1)$. Доказано, что в пространстве $L_2(R^{4 \cdot n}, d^{4n}x)$ $(n = 2, 3, \dots)$ оператор P_c является проектором.

В § 3-2 описан некоторый класс квазиполей в терминах последовательностей ограниченных положительных операторов. Такое описание применимо к квазиполям, для которых формы $\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_n \otimes V_n$ $(u_n, V_n \in \mathcal{S}^{4n}$; $\overleftarrow{u}_n(x_1, \dots, x_n) = \bar{u}_n(x_n, \dots, x_1)$; $\mathcal{E}_{2n}$ - порождающие функционалы/ допускают продолжение по непрерывности до билинейного функционала во всем $L_2^n = L_2(R^{4n}, d^{4n}x)$.

Результаты § 3-2 открывают путь для построения конкретных примеров квазиполей. Так, в § 3-3 указана последовательность проект ирующих операторов, которая определяет некоторое квазиполе. Воспользоваться аналогичными соображениями для построения примеров полей пока не удается.

Однако, в § 3-4, на основе материала предыдущих параграфов, конструируется семейство C^*-алгебр, действующих в пространстве

$\oplus\sum_{n=0}^{\infty} L_2^n \ (L_2^0 = \mathbb{C})$ и удовлетворяющих почти все требования, фигурирующие в формулировке ТП в терминах алгебр локальных наблюдаемых [2, 5, 32]. Исключением является аксиома локальной коммутативности, которая снова выполняется в ослабленном варианте.

Изложенные в главе 3 результаты содержатся в публикациях [29-31].

Наконец, глава 4 посвящена задаче о представимости произвольных операторов операторами рождения и уничтожения в так называемой нормальной форме.

Четкая постановка этой задачи принадлежит Ф.А.Березину [34]. Им также доказано, что любой ограниченный оператор, действующий в пространстве Фока, представим в нормальной форме. При этом, сходимость рядов, элементами которых являются нормальные произведения операторов рождения и уничтожения, понимается в слабом смысле.

Задача о нормальной форме операторов изучалась также в работе [36]. Однако сходимость соответствующих рядов понималась там в некотором специальном смысле.

В § 4-2 рассматривается задача о нормальной форме операторов, исходя из операторов рождения и уничтожения, заданных в более широком, чем фоковское, пространстве H, имеющем вид /1/. Доказано, что необходимыми и достаточными условиями для представимости в нормальной форме произвольного оператора A, удовлетворяющего некоторым исходным ограничениям, являются следующие:

$$\sqrt{\frac{(T+s)!}{T!}}\,\| P_T A P_n u_n \| \to 0, \quad T \to \infty$$

при всех $s = 0, 1, \ldots$ и $u_n \in N_n(A) \in H_n$, где множество векторов $\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n(A)$ таково, что замыкание сужения на него оператора A совпадает с замыканием самого оператора A. Причем сходимость ряда нормальных произведений к оператору A понимается в сильном смысле.

В связи с полученным в главе I обобщением представления Фока, представляется полезным и интересным рассмотреть задачу о нормальной форме операторов в случае, когда вместо операторов рождения и уничтожения берутся операторы $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$. Это обобщение задачи о нормальной форме операторов можно сформулировать следующим образом: найти условия на произвольный оператор, действующий в пространстве H /I/, при которых он принадлежит C^*- алгебре натянутой на операторы $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$, причем произведения этих операторов берутся только в нормальном порядке:

$$A_+(\varphi_1) \cdots A_+(\varphi_n)\, A_-(\psi_1) \cdots A_-(\psi_m)$$

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathcal{S}^4;\ n, m = 1, 2, \ldots)$$

В § 4-I рассмотрен наиболее простой случай этой общей задачи.

Результаты главы 4 опубликованы в [35].

ГЛАВА I

ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРНЫХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ

Аксиоматическое определение ТП допускает, как известно [1 - 5], полную переформулировку в терминах так называемых вакуумных средних. Использование вакуумных средних, как одного из основных инструментов в исследовании структуры аксиоматической ТП, привело к установлению целого ряда важных фактов. Однако основные проблемы аксиоматического подхода остаются до сих пор не решенными. В связи с этим представляет интерес привлечение к изучению ТП новых математических средств. Один из возможных путей в этом направлении предложен в работах [6, 7]. В них показано, что аксиоматическая ТП может быть также переформулированна и в терминах операторных якобиевых матриц. При этом, на полевой оператор налагается дополнительное /к аксиомам Вайтмана/ условие, по-видимому, не существенное с физической точки зрения.

Возможность формулировки ТП в терминах вакуумных средних, а также в терминах операторных якобиевых матриц можно пояснить на следующем простом примере.

Пусть в гильбертовом пространстве H действует эрмитов оператор A с инвариантной областью определения D $(AD \subset D)$. Предположим, что в H имеется циклический орт Ω : $\text{з.л.о.}\,(A^j\Omega) = H$. Эта ситуация "в координатах" обычно записывается двояким образом.

а/ /Запись в терминах проблемы моментов/. Для произвольных векторов Φ и Ψ из $\text{л.о.}\,(A^j\Omega)$ имеем:

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j A^j \Omega, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j A^j \Omega \quad (\Phi_j, \Psi_j \in \mathbb{C});$$

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{j,k=0}^{\infty} K_{jk} \Psi_j \bar{\Phi}_k \quad (K_{jk} = W_{j+k} = (\Omega, A^{j+k}\Omega)),$$

$$A\Phi = A(\Phi_0, \Phi_1, \ldots) = (0, \Phi_0, \Phi_1, \ldots).$$

Таким образом описание всех операторов A с исходными свойствами сводится к описанию всех моментных [8, 9] последовательностей $(W_s)_{s=0}^{\infty}$, определяющих скалярное произведение. Действие A стандартно и задается сдвигом. Последовательности $(W_s)_{s=0}^{\infty}$ являются простейшими аналогами вакуумных средних.

б/ /Запись в терминах якобиевых матриц/. В H строится ортонормированный базис $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ путем ортогонализации $(A^j\Omega)_{j=0}^{\infty}$. Теперь

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Phi}_j \Psi_j \quad \left(\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j e_j;\ \Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j e_j\right),$$

а оператор A, как нетрудно проверить, задается якобиевой матрицей $J = (A_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, где $A_{jk} = (Ae_k, e_j) = 0$, если $|j-k| > 1$, благодаря характеру базиса $(e_j)_{j=0}^{\infty}$. В этой записи пространство H стандартно /совпадает с ℓ^2/ а описание всех A сводится к описанию всех эрмитовых якобиевых матриц.

Схема ТП отличается от рассмотренного случая, грубо говоря, тем что в пространстве H вместо одного оператора действует поле эрмитовых операторов $A(x)$ $(x \in R^4)$. Запись в форме а/ соответствует формулировке ТП в терминах вакуумных средних. Излагаемая в настоящей главе формулировка ТП соответствует записи б/.

§ I-I. Аксиоматическое определение понятия поля

Здесь мы дадим используемое в дальнейшем определение понятия поля. При этом мы сперва перечислим математические понятия, необходимые для задания поля и удовлетворяющие некоторым условиям не связанным с физическими требованиями. А затем сформулируем аксиомы ТП /аксиомы Вайтмана/, которые отражают фундаментальные физические принципы. Такое разделение мы производим для того, чтобы показать, что вводящееся в § I-2 дополнительное ограничение на полевой оператор не касается самих аксиом ТП, а связано лишь с корректным использованием применяемого математического аппарата.

К числу математических понятий, используемых при определении поля, относятся следующие.

А. Пространство Гильберта H , называемое пространством состояний поля.

В. Пространство основных функций Л.Шварца $\mathcal{S}^4$ заданных на R^4 .

С. Обобщенная операторная функция $A(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$, значениями которой являются, вообще неограниченные, линейные операторы в H . При этом предполагается, что для всех операторов $A(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ существует общая плотная в H область определения D такая, что $A(\varphi) D \subset D$. Кроме того, каждый функционал

$$\ell_{\Psi,\Phi}(\varphi) = (\Psi, A(\varphi)\Phi) \in (\mathcal{S}^4)^* \quad (\Psi, \Phi \in D), \qquad /1.1/$$

а сама операторная функция $A(\varphi)$ является эрмитовой:

$$(\Psi, A(\varphi)\Phi) = (A(\bar{\varphi})\Psi, \Phi) \quad (\Psi, \Phi \in D). \qquad /1.2/$$

Д. Унитарное непрерывное представление в H неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца $\mathcal{P}_+^\uparrow$: $(a, \Lambda) \to \mathcal{U}(a, \Lambda)$ / $a \in R^4$ - трансляция, $\Lambda \in L_+^\uparrow$ поворот/.

Перейдем к формулировке аксиом ТП.

I. <u>Релятивистская инвариантность</u>. Операторная функция $A(\varphi)$ преобразуется относительно представления $\mathcal{U}(a, \Lambda)$

по следующему закону:

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\,A(\varphi)\,\mathcal{U}^{-1}(a,\Lambda)=A(\varphi_{(a,\Lambda)}), \qquad /1.3/$$

где $\varphi\in\mathcal{S}^4$, $(a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^\uparrow$, $\varphi_{(a,\Lambda)}(x)=\varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$.
Область D релятивистски инвариантна:

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\,D=D.$$

II. <u>Существование и цикличность вакуума.</u> В H существует единственный орт $\Omega\in D$, называемый вакуумом, такой что применение к нему операторной алгебры $\mathfrak{A}$, натянутой на л.о.$\{A(\varphi)\mid\varphi\in\mathcal{S}^4\}$, и $\mathbf{1}$, образует плотное в H множество векторов, т.е.

$$H=\text{з.л.о.}\{\mathfrak{A}\,\Omega\} \qquad /1.4/$$

III. <u>Спектральность.</u> Коммутативная группа унитарных операторов $\mathcal{U}(a,1)$ $(a\in R^4)$ благодаря теореме Стоуна допускает представление

$$\mathcal{U}(a,1)=\int_{R^4}e^{i\langle p,a\rangle}\,dE(p)\quad(p,a\in R^4),$$

где $E(p)$ - некоторое четырехмерное разложение единицы. Требуется, чтобы носитель этой операторной меры был сосредоточен на $V_{+,\varepsilon}$ / $\varepsilon>0$ - некоторое фиксированное для каждого поля число) и в точке $p=0$, причем $E(\{0\})$ есть проектор на $C\Omega$. Короче

$$\operatorname{Supp} E(p) \subseteq V_{+,\varepsilon} \cup \{0\}.$$

При этом, как известно [4,10], вакуум оказывается инвариантным вектором относительно представления $\mathcal{U}(a,\Lambda)$:

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\Omega = \Omega \qquad /1.5/$$

IУ. Локальная коммутативность. Тот факт, что носители двух функций φ_1 и $\varphi_2 \in \mathcal{S}^4$ компактны и пространственно-подобны /т.е. $\langle x_1 - x_2 \rangle^2 < 0$ для любых $x_1 \in \operatorname{Supp}\varphi_1$, $x_2 \in \operatorname{Supp}\varphi_2$ / будем обозначать так: $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Предполагается, что

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)] = 0 \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4), \qquad /1.6/$$

если $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

Определение I.I. Будем говорить, что задано поле, если в некотором гильбертовом пространстве H действуют операторная функция $A(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ и унитарное представление $\mathcal{U}(a,\Lambda)$ $((a,\Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow)$ и при этом выполнены все аксиомы I-IУ, а также предположения пункта С.

Сама операторная функция $A(\varphi)$ носит название полевого оператора или просто поля.

§ I-2. Ортогонализация пространства состояний поля и представление полевого оператора якобиевой матрицей

Пусть $A(\varphi)$ произвольное поле. Рассмотрим в пространстве состояний H этого поля последовательность подпространств $\mathcal{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$:

$$\mathcal{G}_n = \text{з.л.о.}\left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A(\varphi_1)\cdots A(\varphi_j)\Omega \cup \Omega \,\middle|\, \varphi_1,\ldots,\varphi_j \in \mathcal{S}^4 \right\}, \qquad /I.7/$$

причем $\mathcal{G}_0 = C\Omega$. Понятно, что $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$. Ортогонализуем эту последовательность подпространств следующим образом: положим

$$H_0 = \mathcal{G}_0,\ H_1 = \mathcal{G}_1 \ominus \mathcal{G}_0, \ldots, H_n = \mathcal{G}_n \ominus \mathcal{G}_{n-1}, \ldots \qquad /I.8/$$

Очевидно, что

$$\mathcal{G}_n = \oplus \sum_{j=0}^{n} H_n . \qquad /I.9/$$

Более того, благодаря цикличности вакуума Ω, все пространство H разлагается в ортогональную сумму:

$$H = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} H_n \qquad /I.10/$$

Сопоставим, формально, каждому оператору $A(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}$ операторную матрицу:

$$\mathcal{J}(\varphi)=\{A_{jk}(\varphi)\}_{j,k=0}^{\infty} \quad (A_{jk}(\varphi)=P_j A(\varphi) P_k),$$

где P_j и P_k проекторы в H на подпространства H_j и H_k, соответственно.

Лемма I.I. Матрица $\mathcal{J}(\varphi)=\{A_{jk}(\varphi)\}_{j,k=0}^{\infty}$ является операторной эрмитовой матрицей якобиевого типа [9].

Доказательство. Эрмитовость матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$, т.е. условие

$$(A_{jk}(\varphi))^* = A_{kj}(\bar{\varphi}) \quad (j,k=0,1,\dots) \tag{I.11}$$

прямо следует из условия эрмитовости полевого оператора /I.2/

Покажем, что

$$A_{jk}(\varphi)=0 \quad (|j-k|>1) \tag{I.12}$$

т.е., что матрица $\mathcal{J}(\varphi)$ является якобиевой. Согласно /I.7/ $A(\varphi)\mathcal{L}_{k}\subset\mathcal{L}_{k+1}$, поэтому, ввиду /I.8/ и /I.9/, $P_j A(\varphi) P_k \mathcal{L}_{k}=0$, если $j>k+1$. Этот факт вместе с условием эрмитовости /I.11/ и влечет справедливость равенства /I.12/. ■

Для корректности дальнейших рассуждений введем дополнительное, к перечисленным в § I-I требованиям, условие на полевой оператор $A(\varphi)$. Именно, потребуем, чтобы формально введенная выше матрица $\mathcal{J}(\varphi)$ являлась матричным представлением оператора $A(\varphi)$ в пространстве H, разложенном в сумму / I.10/. Последнее означает, что при каждом $j=0,1,\dots$ $H_j \cap D$ плотно в H_j и замыкание $A(\varphi)$ совпадает с замыканием сужения $A(\varphi)$ на множество финитных векторов из суммы $\oplus \sum_{j=0}^{\infty} (H_j \cap D)$.

В дальнейшем мы ради простоты изложения будем считать все операторы $A_{jk}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4;\ j,k=0,1,\ldots)$ ограниченными /это, понятно, не влечет ограниченности оператора $A(\varphi)$ /. При этом, в качестве общей для всех операторов $A(\varphi)$ области определения D естественно взять множество F, финитных в разложении /I.10/ векторов.

Запись пространства состояний H в виде /I.10/, а также возможность представить полевой оператор $A(\varphi)$ якобиевой матрицей позволяют переформулировать аксиомы ТП в несколько ином, чем в § I-I, виде. В последующих леммах и будет дана такая переформулировка.

Лемма I-2. Унитарное представление $\mathcal{U}(a,\Lambda)$ группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$ приводится каждым из подпространств H_j $(j=0,1,\ldots)$, т.е. имеет место разложение:

$$\mathcal{U}(a,\Lambda) = \oplus \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{U}_j(a,\Lambda) \quad ((a,\Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow) \qquad /I.13/$$

где $\mathcal{U}_j(a,\Lambda) = \mathcal{U}(a,\Lambda) P_j$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что каждое подпространство $\mathcal{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$ инвариантно относительно $\mathcal{U}(a,\Lambda)$. Это следует из /I.5/ и того, что

$$\mathcal{U}(a,\Lambda) A(\varphi_1)\cdots A(\varphi_j)\Omega = A(\varphi_{1,(a,\Lambda)})\cdots A(\varphi_{j,(a,\Lambda)})\Omega$$

Отсюда, благодаря /I.8/ и унитарности $\mathcal{U}(a,\Lambda)$, получаем инвариантность каждого H_j относительно $\mathcal{U}(a,\Lambda)$. ■

Следствие I-I. Закон преобразования поля /I.3/ в терминах матричных элементов $A_{jk}(\varphi)$ преобретает следующий вид:

/I.14/

$$\mathcal{U}_j(a,\Lambda)\,A_{jk}(\varphi)\,\mathcal{U}_k^{-1}(a,\Lambda) = A_{jk}(\varphi_{(a,\Lambda)}) \quad (j,k=0,1,\dots)$$

Лемма I-3. Операторная мера $E_j(p)$ $(j=1,2,\dots)$ соответствующая группе унитарных операторов $\mathcal{U}_j(a,1)$ $\left(\mathcal{U}_j(a,1)=\int_{R^4}\exp i\langle p,a\rangle\, dE_j(p)\right)$ сосредоточена на $V_{+,\varepsilon}$.

Доказательство. Предположим, что при некотором $j\neq 0$ $\operatorname{Supp} E_j(p)\cap(R^4\setminus V_{+,\varepsilon})\neq\varnothing$, тогда, очевидно, аналогичное неравенство будет выполняться и для операторной меры $E(p)-E(\{0\})=\oplus\sum_{j=1}^{\infty}E_j(p)$, что противоречит аксиоме спектральности. ■

Для дальнейшего нам необходимо ввести три новые операторные функции $A_+(\varphi)$, $A_0(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ $(\varphi\in\mathcal{S}^4)$. Они соответствуют матрицам $\mathcal{J}_+(\varphi)$, $\mathcal{J}_0(\varphi)$ и $\mathcal{J}_-(\varphi)$, которые определены следующим образом: $\mathcal{J}_+(\varphi)$ получена из матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$ заменой нулями всех тех ее элементов, которые не стоят на $(j+1,j)$ -м месте $(j=0,1,\dots)$; $\mathcal{J}_0(\varphi)$- соответствует главной диагонали матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$, а $\mathcal{J}_-(\varphi)=$ $=\mathcal{J}(\varphi)-\mathcal{J}_+(\varphi)-\mathcal{J}_0(\varphi)$. Понятно, что $A(\varphi)=A_+(\varphi)+$ $+A_0(\varphi)+A_-(\varphi)$ и $A_-(\varphi)=(A_+(\bar\varphi))^*$.

Лемма I-4. Свойство цикличности вакуума /I.4/ можно записать в следующей эквивалетной форме:

$$H_n = \text{з.л.о.}\left\{A_+(\varphi_1)\cdots A_+(\varphi_n)\Omega \mid \varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathcal{S}^4\right\} \qquad /I.15/$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Доказательство. Так как $H_n \subset \mathcal{H}_n$ /I.9/, $P_n A(\varphi_1)\cdots A(\varphi_j)\Omega = 0$ при $j < n$, а $P_n A(\varphi_1)\cdots A(\varphi_n)\Omega = A_+(\varphi_1)\cdots A_+(\varphi_n)\Omega$, что очевидно, то понятно, что /I.15/ следует из /I.7/ и /I.9/.

Предположим, что вместо условия /I.4/ для вакуума Ω выполняются равенства /I.15/. Докажем, что тогда /I.4/ также имеет место.

Пусть $\Psi_1 \in H_1$, тогда из /I.15/ следует, что

$$\Psi_1 = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N} A_+(\varphi^j)\Omega = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}\left(A(\varphi^j)\Omega - (\Omega, A(\varphi^j)\Omega)\Omega\right)$$

т.е. $\Psi_1 \in \text{з.л.о.}\{\mathcal{O}\Omega\}$. Предположим, по индукции, что любой вектор $\Psi_k \in H_k$ $(k \le n-1,\ n = 2, 3, \ldots)$ принадлежит $\text{з.л.о.}\{\mathcal{O}\Omega\}$. Покажем, что тогда и произвольный вектор $\Psi_n \in H_n$ входит в $\text{з.л.о.}\{\mathcal{O}\Omega\}$. Действительно, благодаря /I.15/, $\Psi_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N} A_+(\varphi_1^j)\cdots$

$$\cdots A_+(\varphi_n^j)\Omega = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}\Big(A(\varphi_1^j)\cdots A(\varphi_n^j)\Omega - \sum_{k=0}^{n-1} P_k A(\varphi_1^j)\cdots A(\varphi_n^j)\Omega\Big),$$

где $P_k A(\varphi_1^j)\dots A(\varphi_n^j)\Omega \in H_k$ $(\varphi_k^j \in \mathcal{S}^4;\ j,k=1,2,\dots$

Отсюда, ввиду индуктивного предположения и получаем, что $\Psi_n \in$ з.л.о. $\{\mathfrak{O}\Omega\}$. Учитывая /I.10/ заключаем, что /I.15/ действительно влечет /I.4/. ■

<u>Лемма I-5.</u> Аксиома локальной коммутативности /I.6/ в терминах операторов $A_\sigma(\varphi)$ $(\sigma=+,0,-)$ переписывается следующим эквивалентным образом:

$$[A_+(\varphi_1), A_+(\varphi_2)]=0;\ [A_+(\varphi_1), A_0(\varphi_2)]+[A_0(\varphi_1), A_+(\varphi_2)]=0;$$
$$[A_+(\varphi_1), A_-(\varphi_2)]+[A_0(\varphi_1), A_0(\varphi_2)]+[A_-(\varphi_1), A_+(\varphi_2)]=0, \tag{I.16}$$

если $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

<u>Доказательство.</u> Подставим в /I.6/ вместо каждого оператора $A(\varphi)$ сумму $A_+(\varphi)+A_0(\varphi)+A_-(\varphi)$. Применяя полученное равенство к произвольным векторам $\Psi_n \in H_n$ $(n=0,1,\dots)$ и расписывая его покомпонентно /согласно разложению /I.10// мы прийдем к справедливости новых пяти операторных равенств. Три из них выписаны в лемме. Оставшиеся два $(\varphi_1 \sim \varphi_2)$:

$$[A_-(\varphi_1), A_-(\varphi_2)]=0\ ;\ [A_-(\varphi_1), A_0(\varphi_2)]+[A_0(\varphi_1), A_-(\varphi_2)]=0,$$

ввиду того, что $A_-(\varphi)=(A_+(\bar\varphi))^*$, а $A_0(\varphi)=(A_0(\bar\varphi))^*$, эквивалентны первым двум равенствам из /I.16/.

Обращая эти рассуждения легко убедиться, что из /I.16/ вытекает /I.6/. ■

В результате предыдущих рассмотрений мы получаем следующее определение эрмитова скалярного поля в терминах операторных якобиевых матриц.

<u>Определение I-2.</u> Поле задано, если заданы:

а/ гильбертово пространство $H = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} H_n$, причем H_0 одномерно,

б/ семейство операторных якобиевых матриц $J(\varphi) = \{A_{jk}(\varphi)\}_{j,k=0}^{\infty}$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ таких, что /ограниченные/ операторы $A_{jk}(\varphi): H_k \to H_j$ линейно и слабо непрерывно зависят от $\varphi \in \mathcal{S}^4$; кроме того $(A_{jk}(\varphi))^* = A_{kj}(\bar{\varphi})$,

в/ унитарное непрерывное представление $\mathcal{U}_n(a, \Lambda)$ группы $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ в каждом H_n $(n = 0, 1, \ldots)$ и при этом выполнены следующие требования /аксиомы ТП/:

I$'$. Каждый оператор $A_{jk}(\varphi)$ $(j, k = 0, 1, \ldots)$ преобразуется относительно представления $\mathcal{U}(a, \Lambda) = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n(a, \Lambda)$ по закону /I.14/.

II$'$. В подпространстве H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ плотна л.о. векторов $\{A_+(\varphi_1) \cdots A_+(\varphi_n)\Omega / \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}^4\}$, где $\Omega \in H_0$ $(\|\Omega\| = 1)$, а $A_+(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{j+1, j}(\varphi)$.

III$'$. Разложение единицы $E_n(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, соответствующее группе унитарных операторов $\mathcal{U}_n(a, 1)$ $(a \in R^4)$ сосредоточено на $V_{+, \varepsilon}$ $/ \varepsilon > 0$ и от n не зависит/. Представление $\mathcal{U}_0(a, \Lambda)$ единичное.

IV$'$. Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4$ таких, что $\varphi_1 \sim \varphi_2$ выполняются равенства /I.16/, где $A_0(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{jj}(\varphi)$.

Теорема I.I. Обычное определение поля /§ I-I/ с учетом дополнительного требования /после леммы I-I/ эквивалентно определению поля в терминах операторных якобиевых матриц.

Доказательство. То что от обычно заданного поля можно перейти к заданию его операторными якобиевыми матрицами было, по существу, показано. Поясним обратное. Сопоставим каждой якобиевой матрице $J(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ оператор $A(\varphi)$, положив $J(\varphi)\Psi = A(\varphi)\Psi$ для каждого вектора $\Psi \in F$. Отображение $\mathcal{S}^4 \ni \varphi \to A(\varphi)$, очевидно, линейно и слабо непрерывно; понятно также, что $(\Psi, A(\varphi)\Phi) = (A(\bar{\varphi})\Psi, \Phi)$ для любых финитных Ψ и Φ. Цикличность вектора $\Omega \in H_0$ относительно алгебры $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ следует из леммы I-4. Равенство /I.3 /, очевидно, вытекает из /I.14/. Понятно также, что носитель операторной меры $E(p) = \oplus \sum_{j=0}^{\infty} E_j(p)$ состоит из обьединения носителей мер $E_j(p)$ и поэтому сосредоточен на $V_{+,\varepsilon} \cup \{0\}$. Благодаря тому, что $U_0(a,\Lambda)$ реализует единичное представление, $E(\{0\})$ совпадает с проектором на $\Omega \in H_0$. Наконец, условие локальной коммутативности /I.6/ следует из /I.16/ ввиду леммы I-5. ∎

§ I-3. Прождающие функционалы и их свойства. Квазиполя

Фигурирующие в разложении /I.10/ подпространства H_n $(n = 0, 1, \dots)$ тесно связаны, ввиду /I.15/, с семейством операторов $A_+(\varphi)$. В этом параграфе мы при помощи функционалов подобных функционалам Вайтмана [I-5] опишем внутренним образом эти подпространства, а также "части" полевых операторов.

Мы начнем с изучения свойств величин

$$\mathcal{E}_{2n}(\varphi_1,\dots,\varphi_{2n}) = (\Omega, A_-(\varphi_1)\cdots A_-(\varphi_n)A_+(\varphi_{n+1})\cdots A_+(\varphi_{2n})\Omega) =$$

$$= (A_+(\bar\varphi_n)\cdots A_+(\bar\varphi_1)\Omega, A_+(\varphi_{n+1})\cdots A_+(\varphi_{2n})\Omega) = \qquad /I.17/$$

$$= (\Omega, A_{01}(\varphi_1)\cdots A_{n-1,n}(\varphi_n)A_{n,n-1}(\varphi_{n+1})\cdots A_{10}(\varphi_{2n})\Omega).$$

Каждая такая величина, ввиду слабой непрерывной зависимости операторов $A_{jk}(\varphi)$ от φ, представляет собой полилинейный непрерывный функционал переменных $\varphi_1,\dots,\varphi_{2n} \in \mathcal{S}^4$. Согласно теореме о ядре Л. Шварца этот функционал допускает однозначное расширение до линейного непрерывного функционала над всем $\mathcal{S}^{8n}$. Полученный таким образом функционал мы будем называть <u>порождающим</u> и обозначать кратно через $\mathcal{E}_{2n}$. Соответствующую ему обобщенную функцию будем записывать в виде $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_n)$.

Нетрудно заметить, что последовательность порождающих функционалов $\{\mathcal{E}_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ /мы всегда полагаем $\mathcal{E}_0 = (\Omega,\Omega) = 1$ / во многом очень сходна с последовательностью вакуумных средних /функционалов Вайтмана/. В связи с этим возникает задача об изучении свойств порождающих функционалов и выяснения вопроса, в какой степени поле характеризуется ими.

Изучим как отражаются на свойствах порождающих функционалов основные положения ТП, в частности аксиомы.

Расширяя по линейности и непрерывности на все $\mathcal{S}^{4n}$ соотношение:

$$0 \le \|A_+(\varphi_1)\cdots A_+(\varphi_n)\Omega\|^2 = \mathcal{E}_{2n}(\bar\varphi_n\otimes\cdots\otimes\bar\varphi_1\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n)$$

$n=1,2,\ldots$ и учитывая, что $\mathcal{E}_0 = 1$, мы приходим к свойству п.о. функционалов $\mathcal{E}_{2n}$:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_n\otimes u_n)\geqslant 0 \quad (u_n\in\mathcal{S}^{4n},\ n=0,1,\ldots) \qquad /\mathrm{I}.18/$$

где $\overleftarrow{u}_n(x_1,\ldots,x_n) = \bar u_n(x_n,\ldots,x_1)$.

Из /I.14/ и /I.5/ очевидно, что $(\Omega, A_{01}(\varphi_1)\cdots$

$\ldots A_{n-1,n}(\varphi_n)A_{n,n-1}(\varphi_{n+1})\cdots A_{10}(\varphi_{2n})\Omega) = (\Omega, A_{01}(\varphi_{1,(a,\Lambda)}\ldots$

$\ldots A_{10}(\varphi_{2n,(a,\Lambda)})\Omega)$. Отсюда, снова пользуясь линейностью и непрерывностью, устанавливаем релятивистскую инвариантность функционалов $\mathcal{E}_{2n}$:

$$\mathcal{E}_{2n}(u_{2n}) = \mathcal{E}_{2n}(u_{2n,(a,\Lambda)}) \qquad /\mathrm{I}.19/$$

$((a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^\uparrow;\ u_{2n}\in\mathcal{S}^{8n};\ u_{2n,(a,\Lambda)} = u_{2n}(\Lambda^{-1}(x_1-a)\ldots\Lambda^{-1}(x_{2n}-a))$

Пусть $\widetilde{\mathcal{E}}_{2n}(k_1,\ldots,k_{2n})$ – обобщенная функция, соответствующая фурье-образу функционала $\mathcal{E}_{2n}$ $(\widetilde{\mathcal{E}}_{2n}(\tilde u_{2n}) = \mathcal{E}_{2n}(u_{2n}))$

где $\tilde u_{2n}(k_1,\ldots,k_{2n}) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}}\int\limits_{R^{8n}} e^{-i\sum\limits_{j=1}^{2n}\langle k_j,x_j\rangle} u_{2n}(x_1,\ldots x_{2n})\,d^{2n}x$.

Из аксиомы спектральности вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма I-6. Носитель обобщенной функции $\tilde{\mathcal{E}}_{2n}(k_1,\dots,k_{2n})$ $(n=1,2,\dots)$ по сумме $k_1+\dots+k_n)$ первых n переменных содержится в $V_{-,\varepsilon}$ $(V_{-,\varepsilon} = -V_{+,\varepsilon})$.

Доказательство. Из очевидного соотношения $(u_n \in \mathcal{S}^{4n})$:

$$\tilde{u}_{n,(a,1)}(k_1,\dots,k_n) = e^{i\langle k_1+\dots+k_n, a\rangle}\tilde{u}_n(k_1,\dots,k_n)$$

следует, что

$$\mathcal{E}_{2n}(u_{n,(a,1)}\otimes v_n) = \tilde{\mathcal{E}}_{2n}(e^{i\langle k_1+\dots+k_n, a\rangle}\tilde{u}_n\otimes v_n).$$

Учитывая это и пользуясь теоремой Стоуна имеем:

$$(\mathcal{U}_n(a,1)A_+(\bar{\varphi}_n)\cdots A_+(\bar{\varphi}_1)\Omega, A_+(\varphi_{n+1})\cdots A_+(\varphi_{2n})\Omega) =$$

$$= \int_{R^4} e^{-i\langle p,a\rangle} d\left(E_n(p)A_+(\bar{\varphi}_n)\cdots A_+(\bar{\varphi}_1)\Omega, A_+(\varphi_{n+1})\cdots A_+(\varphi_{2n})\Omega\right) =$$

$$= \mathcal{E}_{2n}(\varphi_{1,(a,1)})\otimes\cdots\otimes\varphi_{n,(a,1)}\otimes\varphi_{n+1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{2n}) =$$

$$= \tilde{\mathcal{E}}_{2n}(e^{i\langle k_1+\dots+k_n, a\rangle}\tilde{\varphi}_1\otimes\cdots\otimes\tilde{\varphi}_n\otimes\tilde{\varphi}_{n+1}\otimes\cdots\otimes\tilde{\varphi}_{2n})$$

Умножая это равенство на произвольную функцию $\chi(a)\in\mathcal{S}^4$ и интегрируя по $a\in R^4$, мы приходим к равенству:

$$\int_{R^4} \tilde{\chi}(p)\, d(E(p) A_+(\bar\varphi_n) \cdots A_+(\bar\varphi_1)\Sigma, A_+(\varphi_{n+1}) \cdots A_+(\varphi_{2n})\Sigma) =$$

$$= \tilde{\mathcal{E}}_{2n}(\tilde{\chi}(-(k_1 + \dots + k_n))\, \tilde\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \tilde\varphi_n \otimes \tilde\varphi_{n+1} \otimes \cdots \otimes \tilde\varphi_{2n})$$

/Нетрудно убедиться, что совершаемые при этом операции законны/. Если теперь предположить, что функция $\chi(a)$ такова, что $Supp\, \tilde{\chi}(p) \cap V_{+,\varepsilon} = \emptyset$, то ввиду леммы I-3 первая часть этого равенства, а, следовательно, и последняя, равны нулю при любых $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n} \in \mathcal{S}^{2n}$. Отсюда пользуясь линейностью и непрерывностью функционала $\mathcal{E}_{2n}$ заключаем, что

$$\tilde{\mathcal{E}}_{2n}(\tilde{\chi}(-(k_1 + \dots + k_n)\, \tilde{u}_{2n}) = 0,$$

если $Supp\, \tilde{\chi}(p) \cap V_{+,\varepsilon} = \emptyset$, а $u_{2n} \in \mathcal{S}^{8n}$ - произвольна. ∎

Из трансляционной инвариантности функционала $\mathcal{E}_{2n}$ следует, что обобщенная функция $\mathcal{E}_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ фактически зависит от разностей $x_j - x_{j+1}$ $(j = 1, 2, \dots, 2n-1)$. Последнее, как хорошо известно, приводит, в частности, к тому, что носитель $\tilde{\mathcal{E}}_{2n}$ состоит лишь из таких точек $(k_1, \dots, k_{2n}) \in R^{8n}$ для которых сумма $k_1 + \dots + k_{2n} = 0$.

Таким образом, если $(k_1, \dots, k_{2n}) \in Supp\, \tilde{\mathcal{E}}_{2n}$, то

$$-(k_1 + \dots + k_n) = (k_{n+1} + \dots + k_{2n}) \in V_{+,\varepsilon} \qquad /I.20/$$

Это свойство носителя фурье-образа порождающего функционала $\mathcal{E}_{2n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, как будет следовать из дальнейшего, полностью отражает аксиому спектральности.

Аксиома локальной коммутативности отражается на свойствах порождающих функционалов лишь частично /первое равенство из /I.16//. А именно, легко убедиться, исходя из /I.17/, что для порождающих функционалов $\mathcal{E}_{2n}\ (n>2)$ справедливо соотношение:

/I.21/

$$\mathcal{E}_{2n}(u_m \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes u_{2n-m-2}) = \mathcal{E}_{2n}(u_m \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes u_{2n-m-2})$$

при $\varphi_1 \sim \varphi_2$ и $m \neq n-1$ $\left(u_m \in \mathcal{S}^{4m},\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4,\ u_{2n-m-2} \in \mathcal{S}^{4(2n-m-2)}\right)$.

Установим еще одно свойство функционалов $\mathcal{E}_{2n}$.

Очевидно, что для любых $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}^4\ (n=1,2,\ldots)$ всегда можно найти такое число $c^n_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$, что будет выполнено неравенство:

$$\| A_+(\varphi_1) \cdots A_+(\varphi_n)\Sigma Z \|^2 \leq c^n_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n} \| A_+(\varphi_2) \cdots A_+(\varphi_n)\Sigma Z \|^2$$

/в случае $n=1$, правая часть неравенства имеет вид: $c^1_{\varphi_1} \cdot 1$/ Это неравенство, переписанное в терминах порождающих функционалов:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n} \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) \leq \qquad /I.22/$$

$$c^n_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}\, \mathcal{E}_{2n-2}(\overleftarrow{\varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n} \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

мы называем свойством соподчинения функционалов $\mathcal{E}_{2n}$.

Благодаря ограниченности каждого оператора $A_{j+1,j}(\varphi)$ $(j=0,1,\ldots)$, очевидно, что в неравенстве /I.22/ число $c^n_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$ можно выбрать зависящим лишь от φ_1, а само неравенство распространить по линейности и непрерывности на произвольные $u_{n-1} \in \mathcal{S}^{4(n-1)}$:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{\varphi_1 \otimes u_{n-1}} \otimes \varphi_1 \otimes u_{n-1}) \leq \qquad /I.22'/$$

$$\leq c^n_{\varphi_1} \mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_{n-1} \otimes u_{n-1}) \quad (n=1,2,\ldots)$$

Подытожим предыдущие рассмотрения в виде следующей теоремы.

<u>Теорема I-2.</u> Порождающие функционалы, определенные формулой /I.I7/, обладают следующими свойствами:

α)п.о.:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_n \otimes u_n) \geq 0 \quad (u_n \in \mathcal{S}^{4n};\ n=0,1,\ldots);$$

β)релятивистская инвариантность:

$$\mathcal{E}_{2n}(u_{2n}) = \mathcal{E}_{2n}(u_{2n,(a,\Lambda)}) \quad (u_{2n} \in \mathcal{S}^{8n};\ (a,\Lambda) \in \mathcal{P}^{\uparrow}_{+})$$

γ)спектральность:

Из того, что $(k_1,\ldots,k_{2n}) \in \operatorname{Supp} \widetilde{\mathcal{E}}_{2n}$ следует, что

$$-(k_1+\cdots+k_n) = (k_{n+1}+\cdots+k_{2n}) \in V_{+,\varepsilon} \quad (n=1,2,\ldots)$$

δ)локальная коммутативность:

$$\mathcal{E}_{2n}(u_m \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes u_{2n-m-2}) = \mathcal{E}_{2n}(u_m \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes u_{2n-m-}$$

если $\varphi_1 \sim \varphi_2$ и $m \neq n-1$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4,$
$u_m \in \mathcal{S}^{4m}, \quad u_{2n-m-2} \in \mathcal{S}^{4(2n-m-2)}, \quad n = 2, 3, \ldots)$;

ε) соподчинение:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{\varphi_1 \otimes u_{n-1}} \otimes \varphi_1 \otimes u_{n-1}) \leq$$

$$\leq C^n_{\varphi_1} \mathcal{E}_{2n-2}(\overleftarrow{u}_{n-1} \otimes u_{n-1}) \quad (\varphi_1 \in \mathcal{S}^4, u_{n-1} \in \mathcal{S}^{4(n-}$$

$$(n = 1, 2, \ldots; \; C^n_{\varphi_1} \in \mathbb{C}).$$

Все утверждения этой теоремы уже доказаны.

Оказывается, что свойства γ) и ε) /причем, свойство ε) достаточно брать в форме /I.22// влекут более жесткие ограничения на носитель функционалов $\widetilde{\mathcal{E}}_{2n}$. А именно, справедливо

Следствие I-2. Если точка $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \operatorname{Supp} \widetilde{\mathcal{E}}_{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то каждая сумма

$$\sum_{s=1}^{j} k_s \in V_{-,\varepsilon} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n-1) \qquad /I.23/$$

Доказательство. Пусть произвольная функция $\varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \in \mathcal{S}^{4(n-1)}$ $(\varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}^4)$ такова, что

$$\widetilde{\varphi}_2(k_2) \cdots \widetilde{\varphi}(k_n) = 0 \quad , \text{ если } k_2 + \cdots + k_n \in V_{+,\varepsilon} \qquad /I.24/$$

Тогда при любой $\varphi_1 \in \mathcal{S}^4$, ввиду /I.18/, /I.22/ и /I.20/ получаем:

$$0 \le \tilde{\mathcal{E}}_{2n} (\tilde{\bar{\varphi}}_n \otimes \cdots \otimes \tilde{\bar{\varphi}}_1 \otimes \tilde{\varphi}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\varphi}_n) \le 0 ,$$

причем в неравенстве /I.22/ был сделан предварительный переход к фурье-образам. Теперь, используя неравенство Коши-Буняковского, можем записать:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{2n} (\tilde{\bar{\varphi}}_n \otimes \cdots \otimes \tilde{\bar{\varphi}}_1 \otimes \tilde{\psi}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\psi}_n) = 0 \qquad /I.25/$$

для произвольных $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S}^4$. Учитывая, что

$$\tilde{\bar{\varphi}}_n (k_n) \cdots \tilde{\bar{\varphi}}_1 (k_1) = \bar{\tilde{\varphi}}_n (-k_n) \cdots \bar{\tilde{\varphi}}_1 (-k_1)$$

и вспоминая /I.24/ мы заключаем, что из того, что точка $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \mathrm{Supp}\, \tilde{\mathcal{E}}_{2n}$ следует, что $k_1 + \cdots + k_{n-1} \in V_{-,\varepsilon}$

Проводя аналогичные рассуждения с произвольной функцией $\varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$, удовлетворяющей условию аналогичному /I.24/ и пользуясь при этом неравенством /I.22/ повторно два раза, мы прийдем к утверждению: если точка $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \mathrm{Supp}\, \tilde{\mathcal{E}}_{2n}$, то обязательно $k_1 + \cdots + k_{n-2} \in V_{-,\varepsilon}$. И т.д., пока не убедимся, что и точка $k_1 \in V_{-,\varepsilon}$, если $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \mathrm{Supp}\, \tilde{\mathcal{E}}_{2n}$.

Благодаря тому, что $(A_{j+1,j}(\varphi))^* = A_{j,j+1}(\bar{\varphi})$ $(j = 0, 1, \ldots$ и ввиду /I.17/ равенство /I.25/ можно переписать в виде:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{2n} (\tilde{\bar{\psi}}_n \otimes \cdots \otimes \tilde{\bar{\psi}}_1 \otimes \tilde{\varphi}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\varphi}_n) = 0$$

Учитывая снова /I.24/ мы отсюда получаем, что если $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \mathrm{Supp}\, \tilde{\mathcal{E}}_{2n}$, то $k_{n+2} + \cdots + k_{2n} \in V_{+,\varepsilon}$

Принимая во внимание тот факт, что $k_1 + \dots + k_{2n} = 0$ /ввиду трансляционной инвариантности $\mathcal{E}_{2n}$ / заключаем, что $k_1 + \dots + k_{n+1} \in V_{-,\varepsilon}$. Аналогичным образом убеждаемся в справедливости соотношения /I.23/ и при $j = n+2, \dots, 2n-1$!

Как видно из теоремы I-2 на свойствах порождающих функционалов аксиомы ТП отражаются не полностью, хотя и в значительной степени. В связи с изучением вопроса, в какой степени поле восстанавливается по заданным наперед порождающим функционалам, уместно следующее

Определение I-3. Будем говорить, что задано квазиполе, если для заданного семейства якобиевых матриц $\mathcal{J}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ с нулевой главной диагональю выполняются все условия определения I-2, кроме последнего; оно заменено ослабленным вариантом аксиомы локальной коммутативности:

$$[A_+(\varphi_1), A_+(\varphi_2)] = 0 \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4;\ \varphi_1 \sim \varphi_2). \qquad /I.26/$$

Понятно, что каждому полю $A(\varphi)$ соответствует квазиполе: $A(\varphi) - A_0(\varphi)$. Вопрос о том, можно ли дополнить каждое квазиполе до поля /т.е. так подобрать семейство диагональных матриц, чтобы выполнялись все аксиомы ТП полностью/ в общем случае неясен.

Из предыдущего нетрудно заметить, что порождающие функционалы определяются как раз той частью поля $A(\varphi)$, которая соответствует квазиполю $A(\varphi) - A_0(\varphi)$. Справедлив и обратный факт.

Теорема I-3. /Теорема реконструкции для квазиполя/. По заданной последовательности функционалов $\{\mathcal{E}_{2n} \in (\mathcal{S}^{8n})^*\}_{n=0}^{\infty}$

обладающих всеми свойствами перечисленными в теореме I-2, однозначно восстанавливается некоторое квазиполе. Соответствующие ему порождающие функционалы совпадают с исходными функционалами .

<u>Доказательство.</u> Благодаря свойству п.о. /I.18/, каждый функционал $\mathcal{E}_{2n}\ (n=0,1,\ldots)$ определяет квазискалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{S}^{4n}$:

$$(u_n, v_n) = \mathcal{E}_{2n}\left(\overleftarrow{\bar{u}}_n \otimes v_n\right) \qquad \left(u_n, v_n \in \mathcal{S}^{4n}\right),$$

где, напомним, $\overleftarrow{\bar{u}}_n(x_1,\ldots,x_n) = \bar{u}_n(x_n\ldots x_1)$..
После отождествления и пополнения мы получим из $\mathcal{S}^{4n}$ некоторое гильбертово пространство H_n. Так как $\mathcal{E}_0 = 1$, то понятно, что $H_0 = \mathbb{C}$.
Гильбертово пространство $H = \oplus \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ мы и примем в качестве пространства состояний строящегося квазиполя.

Рассмотрим в каждом $\mathcal{S}^{4n}$ отображение:

$$u_n = u_n(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow u_{n,(a,\Lambda)} = u_n\left(\Lambda^{-1}(x_1-a),\ldots,\Lambda^{-1}(x_n-a)\right)$$

Ввиду свойства релятивистской инвариантности /I.19/ каждого функционала $\mathcal{E}_{2n}$, это отображение при переходе к пространству H_n будет изометрическим. Его расширение по непрерывности на все H_n, очевидно, задает унитарное непрерывное представление группы $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$. Обозначим его через $\mathcal{U}_n(a,\Lambda)$. Понятно, что $\mathcal{U}_0(a,\Lambda)$ - единичное представление в H_0. Вектор $\Omega = (1,0,0,\ldots) \in H_0$ естественно назвать вакуумом.

Покажем, что операторная мера $E_n(p)$ $(n=1,2,\ldots)$ $\left(\mathcal{U}_n(a,1) = \int \exp i\langle p,a\rangle\, dE_n(p)\right.$ согласно теореме Стоуна$\left.\right)$ сосредоточена в $V_{+,\varepsilon}$. При этом мы будем пользоваться только свойством спектральности $\gamma)$ из теоремы I-2.

Подобно тому, как это было сделано при доказательстве леммы I-6, запишем:

$$(\mathcal{U}_n(a,1)\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = \int e^{-i\langle p,a\rangle}\, d(E(p)\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) =$$

$$= \mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_{n,(a,\Lambda)} \otimes v_n) = \widetilde{\mathcal{E}}_{2n}(e^{-i\langle k_1+\ldots+k_n, a\rangle}\widetilde{\overleftarrow{u}}_n \otimes \widetilde{v}_n),$$

где через $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_n$ мы обозначили векторы из H_n, соответствующие функциям u_n и v_n из $\mathcal{S}^{4n}$. Умножая это равенство на функцию $\chi(a) \in \mathcal{S}^4$ и интегрируя по $a \in R^4$ найдем

$$\int_{R^4} \widetilde{\chi}(p)\, d(E_n(p)\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = \widetilde{\mathcal{E}}_{2n}(\widetilde{\chi}(-(k_1+\ldots+k_n))\widetilde{\overleftarrow{u}}_n \otimes \widetilde{v}_n)$$

Выбирая функцию $\chi(a)$ такой, чтобы $\operatorname{Supp}\widetilde{\chi}(p) \cap V_{+,\varepsilon} = \varnothing$, ввиду свойства $\gamma)$ функционала $\mathcal{E}_{2n}$, получаем

$$\int \widetilde{\chi}(p)\, d(E_n(p)\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = 0.$$

Отсюда заключаем, что действительно $\operatorname{Supp} E_n(p) \subset V_{+,\varepsilon}$ $(n=1,2,\ldots)$, так как векторы $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_n$, рассматриваемого здесь типа, образуют плотное в H_n множество.

Таким образом аксиома спектральности выполняется.

Определим для каждого $\varphi \in \mathcal{S}^4$ на финитных последовательностях $(u_0, u_1, \dots)$ $(u_j \in \mathcal{S}^{4j},\ j=0,1,\dots)$ отображение:

$$(u_0, u_1, \dots) \longrightarrow (0, \varphi\otimes u_0, \varphi\otimes u_1, \dots).$$

В пространстве H это отображение становится линейным оператором, который мы обозначим через $A_+(\varphi)$ $(A_+(\varphi) H_j \to H_{j+1}\ (j=0,1,\dots))$. Определение $A_+(\varphi)$ корректно, так как классы эквивалентных векторов, согласно условию /I.22 /, переводятся им снова в такие же классы.

Из этого определения следует, что каждой функции $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ $(\varphi_k \in \mathcal{S}^4,\ k=1,2,\dots n)$ в пространстве H соответствует вектор $A_+(\varphi_1)\dots A_+(\varphi_n)\Omega$, квадрат нормы которого

$$\| A_+(\varphi_1)\cdots A_+(\varphi_n)\Omega \|^2 = \mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n}\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n$$

Отсюда становится очевидной цикличность вакуума:

$$H_n = \text{з.л.о.}\{A_+(\varphi_1)\dots A_+(\varphi_n)\Omega \mid \varphi_1,\dots,\varphi_n \in \mathcal{S}^4\}.$$
$$(n=1,2,\dots)$$

Каждая часть оператора $A_+(\varphi)$: $A_{j+1,j}(\varphi) = P_{j+1} A_+(\varphi)|$ / P_j - проектор в H на H_j , $j=0,1,\dots$ /, благодаря условию /I.22′/, действует из H_j в H_{j+1} непрерывно. Расширение по непрерывности оператора $A_+(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ на всех H_j $(j=0,1,\dots)$ мы обозначаем снова через $A_+(\varphi)$.

Определим квазиполе посредством семейства якобиевых матриц $\mathcal{J}(\varphi)$, действующих в H :

$$\mathcal{J}(\varphi)=\left\{A_{jk}(\varphi)\right\}_{j,k=0}^{\infty} \qquad (\varphi\in\mathcal{S}^4)$$

где $A_{j+1,j}(\varphi)=P_{j+1}A_+(\varphi)P_j$, $A_{jj}(\varphi)=0$, а $A_{j,j+1}(\varphi)=(A_{j+1,j}(\bar\varphi))^*$.

Ввиду того, что каждый функционал $\mathcal{E}_{2n}\in(\mathcal{S}^{8n})^*$, все операторы $A_{jk}(\varphi)$ $(j,k=0,1,\dots)$ зависят линейно и непрерывно, в слабом смысле, от $\varphi\in\mathcal{S}^4$.

Тривиально проверяется, исходя из /I.19/, что для операторов $A_{jk}(\varphi)$ выполняется закон преобразования /I.14/.

Понятно также, что следствием свойства /I.21/ является соотношение /I.26/.

Наконец, соотношение

$$(A_+(\varphi_1)\cdots A_+(\varphi_n)\Omega,\ A_+(\psi_1)\dots A_+(\psi_n)\Omega)=$$

$$=\mathcal{E}_{2n}(\bar\varphi_n\otimes\dots\otimes\bar\varphi_1\otimes\psi_1\otimes\dots\otimes\psi_n) \qquad (\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots\psi_n\in\mathcal{S}$$

указывает, что функционалы $\mathcal{E}_{2n}$ являются порождающими для построенного квазиполя. ■

Сделаем несколько замечаний относительно существования и свойств аналитического продолжения обобщенных функций $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$ $(n=1,2,\dots)$.

Благодаря трансляционной инвариантности обобщенных функций $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$ существуют обобщенные функции

$$E_{2n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{2n-1}) = \mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) \quad (n=1,2,\dots),$$

где $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ $(j=1,\dots,2n-1)$, такие, что

$$\operatorname{Supp} \widetilde{E}_{2n-1}(q_1,\dots,q_{2n-1}) \subseteq \underbrace{V_{-,\varepsilon} \times \dots \times V_{-,\varepsilon}}_{2n-1} \qquad /I.27/$$

Это свойство функций $\widetilde{E}_{2n-1}$ $(n=1,2,\dots)$ является следствием свойства /I.23/ для $\mathcal{E}_{2n}$.

Из /I.27/ следует /см. [3, II] /, что обобщенная функция $\widetilde{E}_{2n-1}$ допускает применение к себе преобразования Лапласа, в результате чего получается функция $E_{2n-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{2n-1})$ аналитическая в так называемой трубе будущего: $\mathcal{T}^+_{2n-1} = R^{4(2n-1)} + i(\underbrace{V_+ \times \dots \times V_+}_{2n-1})$.

При этом, $E_{2n-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{2n-1}) \to E_{2n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{2n-1})$ при $\operatorname{Im}\zeta_j \to 0$ $(j=1,2,\dots,2n-1)$ и сходимость понимается в слабом смысле.

Полагая $\zeta_j = z_j - z_{j+1}$ $(j=1,2,\dots,2n-1)$, мы получим:

$$E_{2n-1}(\zeta_1,\dots,\zeta_{2n-1}) = \mathcal{E}_{2n}(z_1,\dots,z_{2n})$$

Функция $\mathcal{E}_{2n}(z_1,\dots,z_{2n})$ аналитична в области $\mathfrak{S}_{2n} = \{z_1,\dots,z_{2n} \mid (z_1-z_2),\dots,(z_{2n-1}-z_{2n}) \in \mathcal{T}^+_{2n-1}\}$ и $\mathcal{E}_{2n}(z_1,\dots,z_{2n}) \to \mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$ при $\operatorname{Im} z_j \to 0$ $(j=1,\dots,2n$

Из БХВ - теоремы [4] следует, что функцию E_{2n-1} можно продолжить в расширенную трубу $\mathcal{T}^{+\prime}_{2n-1}$. Это продолжение вызывает аналитическое продолжение функции $\mathcal{E}_{2n}$ в расширенную область $\mathfrak{S}'_{2n}$.

Область $\mathfrak{S}'_{2n}$ содержит вещественные точки, которые носят название точек Йоста. Обобщенная функция $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$ в окрестностях точек Йоста является аналитической функцией. Из характера точек Йоста следует, что функция $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})$ в этих точках симметрична отдельно по наборам переменных: $x_1,\dots,x_n$ и $x_{n+1},\dots,x_{2n}$.

§ I-4. Обобщенное свободное поле /ОСП/

В этом параграфе мы проиллюстрируем предыдущие рассмотрения на примере ОСП. В частности мы покажем, что определение ОСП в терминах операторных якобиевых матриц совпадает с обычным определением ОСП в пространстве Фока.

Отметим, что поскольку СП является частным случаем ОСП, то рассмотрения настоящего параграфа в равной степени приложими и к СП.

Здесь мы, иногда, для удобства, обозначаем поле символом $A(x)$ $(x\in R^4)$, а его фурье-образ – $\tilde{A}(k)$. Необходимые уточнения во всех случаях легко достижимы.

Определение I-4. Поле $A(\varphi)$ называется ОСП [12], если аксиома локальной коммутативности постулируется в следующей усиленной форме:

$$[A(x_1), A(x_2)] = \Delta(x_1 - x_2) = \tag{I.28}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{-i\langle k, x_1 - x_2\rangle} \epsilon(k^0) \int_{\varepsilon>0}^{\infty} \delta(k^2 - \lambda)\, \rho(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{-i\langle k, x_1 - x_2\rangle} \epsilon(k^0)\, \rho(\langle k\rangle^2),$$

где $\rho(\lambda)$ - положительная функция умеренного роста, $\operatorname{Supp} \rho(\lambda) \subset [\varepsilon, +\infty)$; число $\varepsilon > 0$ - фиксированно для каждого поля; $\epsilon(k^0) = \begin{cases} 1, & k^0 > 0 \\ -1, & k^0 < 0 \end{cases}$.

Функция $\Delta(x_1 - x_2)$ является обобщенной /очевидно, что она определяет некоторый функционал из $(\mathcal{S}^s)^*$/. Она исчезает при $\langle x_1 - x_2\rangle^2 < 0$ и имеет особенность, когда $\langle x_1 - x_2\rangle^2 = 0$. Свойства этой функции достаточно полно изучены [13].

Легко проверить, что если $A(x)$ есть ОСП, то $A(x) + c$ $(c = \bar{c} \in \mathbb{C})$ есть также ОСП. Ниже предполагается, что поле $A(x)$ удовлетворяет условие:

$$(\Omega, A(x)\Omega) = 0$$

Его можно всегда обеспечить, переходя от исходного ОСП $A(x)$ к ОСП $A(x) - (\Omega, A(x)\Omega)$, где $(\Omega, A(x)\Omega)$, как известно, есть постоянное число.

Свойства ОСП довольно просто выражаются в терминах фурье-образа $\tilde{A}(k)$ обобщенной операторной функции $A(x)$ /напомним, что $(\Phi, \tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi) = (\Phi, A(\varphi)\Psi)$ $(\Phi, \Psi \in D)$. Так соотношение /I.28/ приобретает вид:

$$[\tilde{A}(k_1), \tilde{A}(k_2)] = \rho(\langle k_1\rangle^2)\,\epsilon(k_1^0)\,\delta(k_1+k_2). \quad /I.29/$$

Разобьем обобщенную операторную функцию $\tilde{A}(k)$ на три части лоренц-инвариантным образом:

$$\tilde{A}(k) = \tilde{A}^{+}(k) + \tilde{A}^{0}(k) + \tilde{A}^{-}(k),$$

где

$$\tilde{A}^{\sigma}(k) = \begin{cases} \tilde{A}(k), & k \in V_\sigma \quad (\sigma = +, 0, -) \\ 0, & k \bar{\in} V_\sigma, \end{cases}$$

а V_+ , V_- - , соответственно, верхний и нижний световые конуса и $V_0 = R^4 \setminus (V_+ \cup V_-)$. Отметим, что такое разбиение справедливо для любого поля.

Известно [4, 12], что для ОСП $\tilde{A}^{0}(k) \equiv 0$, а $\tilde{A}^{+}(k)$ и $\tilde{A}^{-}(k)$ просто выражаются через операторы рождения и уничтожения, соответственно, свободных бозе-полей различных масс.

Подставляя в коммутатор из /I.29/ операторные функции $\tilde{A}^{+}(k)$ и $\tilde{A}^{-}(k)$, получаем:

$$\left[\tilde{A}^{\pm}(k_1), \tilde{A}^{\pm}(k_2)\right] = 0,$$

/I.30/

$$\left[\tilde{A}^{-}(k_1), \tilde{A}^{+}(k_2)\right] = \rho(\langle k_1\rangle^2)\,\theta_\varepsilon(-k_1)\,\delta(k_1+k_2),$$

где

$$\theta_\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \in V_{+,\varepsilon} \\ 0, & k \bar{\in} V_{+,\varepsilon}. \end{cases}$$

В следующей лемме приведены некоторые свойства ОСП, используемые ниже.

<u>Лемма I-7.</u> Если $A(\varphi)$ - ОСП, то справедливы утверждения:

а/ $\tilde{A}^{-}(\psi)\,\tilde{A}(\tilde{\varphi}_1)\cdots\tilde{A}(\tilde{\varphi}_n)\Omega =$ /I.3I/

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{V_{+,\varepsilon}} \tilde{\psi}(-k)\,\tilde{\varphi}_i(k)\,\rho(\langle k\rangle^2)\,dk\; \tilde{A}(\tilde{\varphi}_1)\cdots\widehat{\tilde{A}(\tilde{\varphi}_i)}\cdots\tilde{A}(\tilde{\varphi}_n)\Omega$$

где $\frown$ указывает, что соответствующий оператор опущен,

б/ $A^{+}(\varphi_1)\cdots A^{+}(\varphi_n)\Omega \perp A^{+}(\psi_1)\cdots A^{+}(\psi_m)\Omega$ /I.32/

при любых $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi_1,\ldots,\psi_m \in \mathcal{S}^4$, если $n \neq m$, и

в/ $A(\varphi_1)\cdots A(\varphi_n)\Omega \subset \text{л.о.}\Big\{A^{+}(\varphi_{i_1})\cdots A^{+}(\varphi_{i_s})\,\cdot$

$\times\,\Omega \cup \Omega \;\Big|\; s, i_1,\ldots,i_s = 1,2,\ldots,n;\; i_1 < i_2 < \ldots < i_s\Big\},$ /I.33/

где через $A^{+}(\varphi)$ обозначены обратные фурье-образы операторов $\tilde{A}^{+}(\varphi)$.

Доказательство. Равенство /I.31/ получается как прямое следствие соотношений /I.30/ и очевидного факта, вытекающего из аксиомы спектральности:

$$\tilde{A}^{-}(\tilde{\varphi})\Omega = 0 \qquad (\varphi \in \mathcal{S}^{4}). \qquad /I.34/$$

Утверждение /I.32/ проверяется непосредственным подсчетом с использованием соотношения эрмитовости:

$$A^{-}(\varphi) = \left(A^{+}(\bar{\varphi})\right)^{*},$$

а также /I.30/ и /I.34/. При этом, понятно, в /I.32/ нужно предварительно перейти к фурье-образам.

Наконец справедливость утверждения в/ доказывается путем замены всех операторов $A(\varphi_i)$ на сумму $A^{+}(\varphi_i) + A^{-}(\varphi_i)$ и перестановкой всех $A^{-}(\varphi_i)$ со всеми $A^{+}(\varphi_k)$ $(k > i)$. При этом снова используются соотношения /I.30/ и /I.34/. ■

Теперь мы полностью подготовлены для формулировки теории ОСП в терминах якобиевых матриц.

Рассмотрим в пространстве состояний ОСП H последовательность подпространств $\mathcal{L}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ определяемых формулой /I.7/. Ортогонализуя эту последовательность согласно общему правилу /I.8/ и учитывая соотношения /I.32/ и /I.33/, мы получим:

$$H_n = \text{З.Л.О.}\left\{ A^{+}(\varphi_1) \ldots A^{+}(\varphi_n)\Omega \,\middle|\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}^{4} \right\} \qquad /I.35/$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда, с учетом /I.30/, находим, что

$$A^-(\varphi)H_n \to H_{n-1},\ A^+(\varphi)H_n \to H_{n+1}\ (\varphi\in\mathcal{S}^4;\ n=0,1,\dots;\ H_{-1}=0)$$

Поэтому, соответствующая полевому оператору $A(\varphi) = A^+(\varphi)+A^-(\varphi)$ операторная матрица $J(\varphi) = \{A_{jk}(\varphi)\}_{j,k=0}^{\infty}$, где $A_{jk}(\varphi)=P_j A(\varphi) P_k$ / P_j - проектор в H на H_j /, состоит лишь из двух диагоналей. Одна из них /нижняя/ соответствует оператору $A^+(\varphi)$, а другая - $A^-(\varphi)$. Таким образом для ОСП $A_+(\varphi)=A^+(\varphi)$, и $A_-(\varphi)=A^-(\varphi)$, где операторы $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ определены на стр. 22.

Уже отсюда можно заключить, что задание ОСП в терминах операторных якобиевых матриц совпадает с обычным определением ОСП в пространстве Фока.

Однако для большей ясности мы перейдем к функциональной реализации пространства H и явному заданию операторов $\widetilde{A}_+(\widetilde{\varphi})$ и $\widetilde{A}_-(\widetilde{\varphi})$.

С этой целью найдем порождающие функционалы ОСП.

Переходя в определении /I.17/ к фурье-образам и пользуясь /I.30/ находим:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{2n}(k_1,\dots,k_{2n}) = \qquad /I.36/$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \rho(\langle k_j\rangle^2)\,\theta_\varepsilon(-k_j)\sum_{\alpha=1}^{n!}\delta(\mathbf{k}+\pi_\alpha\mathbf{k}'),$$

$$(\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n);\ \mathbf{k}'=(k_{n+1},\dots,k_{2n})),$$

где $\delta(\mathbf{k}+\pi_\alpha \mathbf{k}') \equiv \delta(k_1+(\pi_\alpha \mathbf{k}')_1)\dots\delta(k_n+(\pi_\alpha \mathbf{k}')_n)$, $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{n!}$ – совокупность всех перестановок набора $(k_{n+1},\dots,k_{2n})$.

Производя отождествление и пополнение пространства $\tilde{\mathcal{S}}^{4n}$ относительно квазискалярного произведения:

$$(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n) = \tilde{\mathcal{E}}_{2n}(\overleftarrow{\tilde{u}}_n \otimes \tilde{v}_n) \qquad (\tilde{u}_n,\tilde{v}_n \in \tilde{\mathcal{S}}^{4n}),$$

где $\overleftarrow{\tilde{u}}(k_1,\dots,k_n) = \tilde{u}(-k_n,\dots,-k_1)$, мы, очевидно, получим гильбертово пространство $\mathcal{H}_n$, состоящее из всех симметричных функций $\tilde{\Psi}_n(k_1,\dots,k_n)$, таких, что $\mathrm{Supp}\,\tilde{\Psi}_n(k_1,\dots,k_n) \subset \underbrace{V_{+,\varepsilon}\times\dots\times V_{+,\varepsilon}}_{n}$, для которых

$$\int|\tilde{\Psi}_n(k_1,\dots,k_n)|^2 \rho(\langle k_1\rangle^2)\dots\rho(\langle k_n\rangle^2)\,d^4k_1\dots d^4k_n<\infty$$

Исходя из вида функционалов $\tilde{\mathcal{E}}_{2n}$ /I.36/ нетрудно установить, что

$$(\tilde{A}_+(\tilde{\varphi})\Psi_n)(k_1,\dots,k_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\varphi}(k_i)\theta_\varepsilon(k_i)\tilde{\Psi}_n(k_1,\dots,\hat{k}_i,\dots,k_{n+1}) \qquad /I.37/$$

/переменная $\hat{k}_i$ опускается/ и

$$(A_-(\tilde{\varphi})\tilde{\Psi}_n)(k_1,\dots,k_{n-1}) = \sqrt{n}\int\tilde{\varphi}(-k)\tilde{\Psi}(k,k_1,\dots,k_{n-1})\rho(\langle k\rangle^2)d^4k$$

Т.е. мы действительно пришли к представлению Фока для ОСП.

Таким образом, можно сказать, что данная в § I-3 формулировка ТП в терминах операторных якобиевых матриц является фактически некоторым обобщением представления Фока.

ГЛАВА 2

О КРИТЕРИЯХ ТРИВИАЛЬНОСТИ ПОЛЕЙ

Известно, что самой существенной характеристикой каждого конкретного примера ТП является матрица рассеяния. Если она равна единице, то соответствующий пример ТП называется тривиальным. Наиболее известными среди тривиальных в этом смысле примеров являются ОСП и СП. Везде ниже мы термин тривиальное поле будем понимать в смысле эквивалентности этого поля ОСП /или СП/. В литературе [14-27] существует целый ряд критериев, устанавливающих тривиальность некоторых полей. В этой главе подробно рассматривается критерий тривиальности поля, полученный автором в [27].

§ 2-I. Одно следствие теоремы Рее и Шлидера

Пусть $A(\varphi)$ есть некоторое поле, удовлетворяющее, как обычно, все аксиомы Вайтмана; H - пространство состояний этого поля и Ω - вакуум.

Согласно аксиоме П /см. § I-I/ в пространстве H плотна л.о. векторов $\mathcal{O}\Omega$, где, напомним, $\mathcal{O}$ обозначает алгебру операторов натянутую на $A(\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{S}^4)$ и $\mathbf{1}$.

Хорошо известная теорема Рее и Шлидера [28] утверждает, что в H плотна также и л.о. $\{\mathcal{O}(\mathcal{O})\Omega\}$, где через

$\mathfrak{A}(O)$ обозначена операторная алгебра натянутая на множество операторов $A(\varphi)$ с такими φ, для которых $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset O$ /$O \subset R^4$ - произвольное открытое множество/, и $\mathbf{1}$.

Простым следствием этой теоремы является

<u>Лемма 2-I.</u> Поле $A(\varphi)$ есть ОСП в том и только в том случае, когда при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4$ коммутатор

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)]\Omega = C(\varphi_1, \varphi_2)\Omega, \qquad /2.1/$$

где $C(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}^8)^*$.

<u>Доказательство.</u> Условие /2.I/ для ОСП согласно /I.28/ выполняется.

Докажем обратное. Пусть $B \subset R^4$ - произвольное ограниченное множество. Благодаря ограниченности B, множество B', состоящее из пространственно-подобных по отношению к B точек $(B' = \{x \in R^4 \,|\, \langle x - y\rangle^2 < 0, \forall y \in B\})$, не пусто. Поэтому, ввиду теоремы Рее и Шлидера, $H =$ $=$ з.л.о.$\{\mathfrak{A}(B')\Omega\}$. Обозначая через $\mathcal{P}(B')\Omega$ произвольный вектор из л.о.$\{\mathfrak{A}(B')\Omega\}$ и пользуясь аксиомой локальной коммутативности, благодаря /2.I/ имеем:

$$K(\varphi_1, \varphi_2)\mathcal{P}(B')\Omega = \mathcal{P}(B')K(\varphi_1, \varphi_2)\Omega = 0,$$

где

$$K(\varphi_1, \varphi_2) \equiv [A(\varphi_1), A(\varphi_2)] - C(\varphi_1, \varphi_2), \text{ а } \mathrm{Supp}\,\varphi_1, \varphi_2 \subset B.$$

Таким образом

$$K(\varphi_1,\varphi_2)=0 \quad (\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{S}^4,\ \operatorname{Supp}\varphi_1,\varphi_2 \subset \beta), \qquad /2.2/$$

если β произвольное ограниченное множество из R^4.

Пусть Ψ, Φ - произвольные векторы из области определения D поля. Понятно, что выражение $(\Psi, K(\varphi_1,\varphi_2)\Phi)$ допускает продолжение до некоторого функционала $K(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \in (\mathcal{S}^8)^*$. Рассмотрим последовательность ограниченных множеств $\beta_j \subset R^4$ $(j=1,2,\dots)$, причем такую, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} \beta_j = R^4$. Легко понять, что для произвольной функции $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ $(\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{S}^4)$ можно подобрать последовательность функций $\varphi_1^j \otimes \varphi_2^j$ таких, что $\sum_{j=1}^{N} \varphi_1^j \otimes \varphi_2^j \to \varphi_1 \otimes \varphi_2$, при $N\to\infty$, в $\mathcal{S}^8$ и $\operatorname{Supp}\varphi_1^j,\varphi_2^j \subset \beta_j$ $(j=1,2,\dots)$. Отсюда, ввиду /2.2/ и благодаря непрерывности функционала $K(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$, находим

$$(\Psi, K(\varphi_1,\varphi_2)\Phi)=0 \quad (\Psi,\Phi \in D, \varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{S}^4),$$

что эквивалентно равенству:

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)] = C(\varphi_1,\varphi_2) \quad (\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{S}^4).$$

А это означает, согласно хорошо известному критерию [20], что $A(\varphi)$ есть ОСП. ■

Отметим, что доказательство соотношения /2.2/ заимствовано нами из [4].

§ 2-2. Признак тривиальности поля

В этом параграфе мы сформулируем и докажем полученный в [27] критерий тривиальности поля.

Для большей ясности дальнейших рассмотрений мы здесь более подробно проведем некоторые элементы общих построений § I-2.

Пусть $A(\varphi)$ - произвольное поле, H - пространство состояний и Ω - вакуум.

Положим, как обычно, $H_0 = \mathbb{C}\,\Omega$. Обозначим через $A_{10}(\varphi)$ сужение на H_0 оператора $A(\varphi) - (\Omega, A(\varphi)\Omega)\cdot \mathbf{1} \equiv A(\varphi) - A_{00}(\varphi)$. Подпространство натянутое на л.о. векторов $A_{10}(\varphi)\Omega$ обозначим через H_1: $H_1 =$ з.л.о. $\{A_{10}(\varphi)\Omega \,|\, \varphi \in \mathcal{S}^4\}$. Понятно, что $A_{10}(\varphi)\Omega \in D$ при любой $\varphi \in \mathcal{S}$. Рассмотрим сужение на H_1 оператора $A(\varphi)$. Разобьем это сужение на три части: $P_0 A(\varphi) P_1 \equiv A_{01}(\varphi)$, $P_1 A(\varphi) P_1 \equiv A_{11}(\varphi)$ и $A(\varphi) P_1 - A_{01}(\varphi) - A_{11}(\varphi) \equiv A_{21}(\varphi)$, где P_1 и P_0 - проекторы в H на H_1 и H_0. Определим подпространство $H_2 =$ = з.л.о. $\{A_{21}(\varphi)\Omega \,|\, \varphi \in \mathcal{S}^4\}$. Подпространства H_0, H_1 и H_2 совпадают, очевидно, с тремя первыми подпространствами из разложения /I.I0/, а операторы $A_{00}(\varphi)$, $A_{01}(\varphi)$, $A_{10}(\varphi)$, $A_{11}(\varphi)$ и $A_{21}(\varphi)$ являются элементами якобиевой матрицы $\mathcal{J}(\varphi)$ /см. § I-2/. Отметим, что никаких дополнительных условий к аксиомам ТП мы сейчас не налогали, поэтому все операторы, введенные выше, могут быть неограниченными.

Теперь мы полностью подготовлены для формулировки критерия тривиальности.

<u>Теорема 2-I.</u> Поле $A(\varphi)$ является тривиальным в том и только в том случае, когда носители фурье-образов операторных функций $A_{11}(\varphi)$ и $A_{21}(\varphi)$ удовлетворяют условиям:

$$\mathrm{Supp}\,\tilde{A}_{11}(\tilde{\varphi}) \subset \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon}\,, \text{ а } \mathrm{Supp}\,\tilde{A}_{21}(\tilde{\varphi}) \subset V_{+,\varepsilon}\,, \qquad /2.3/$$

где $\overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon} = V_{+,\varepsilon} \cup \{0\}$. Напомним, что $V_{+,\varepsilon}$ - множество, фигурирующее в аксиоме спектральности.

<u>Доказательство.</u> Для ОСП $\tilde{A}_{11}(\tilde{\varphi}) = 0$ всегда, а справедливость условия /2.3/ для $\tilde{A}_{21}(\tilde{\varphi})$ вытекает из /I.37/.

Докажем обратное, т.е. что из /2.3/ следует, что исходное поле $A(\varphi)$ является ОСП.

Согласно построениям проведенным перед формулировкой теоремы имеем:

$$\begin{aligned} &A(\varphi_1)\,A(\varphi_2)\Omega - (\Omega, A(\varphi_1)\,A(\varphi_2)\Omega)\Omega = \\ &= A_{10}(\varphi_1)\,A_{00}(\varphi_2)\Omega + A_{11}(\varphi_1)\,A_{10}(\varphi_2)\Omega + \\ &\qquad + A_{21}(\varphi_1)\,A_{10}(\varphi_2)\Omega\,. \end{aligned} \qquad /2.4/$$

Покажем, что

$$\mathrm{Supp}\,\tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi}_1)\,\tilde{A}_{00}(\tilde{\varphi}_2)\Omega \subset V_{+,\varepsilon} \times \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon}\,, \qquad /2.5/$$

а

$$\mathrm{Supp}\left(\tilde{A}_{11}(\tilde{\varphi}_1)\,\tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi}_2)\Omega + \tilde{A}_{21}(\tilde{\varphi}_1)\,\tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi}_2)\Omega\right) \subset \qquad /2.6/$$
$$\subset \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon} \times V_{+,\varepsilon}\,.$$

С этой целью заметим, что из трансляционной инвариантности функционала $\mathcal{W}^1(\varphi) = (\Omega, A(\varphi)\Omega)$, как известно, следует, что $(\Omega, \tilde{A}(k)\Omega) = \tilde{A}_{00}(k) = c \cdot \delta_0(k) \quad (c \in \mathbb{C})$.
Далее, предположим, что при некоторых $\Psi \in H$ и $\varphi \in \mathcal{S}^4$ $(\mathrm{Supp}\,\tilde{\varphi} \cap V_{+,\varepsilon} = \emptyset)$ имеет место неравенство $(\Phi, \tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi})\Omega) \neq 0$. Тогда, очевидно, и $\|\tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi})\Omega\|^2 = \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\varphi}) \neq 0$, но это противоречит свойству спектральности носителя порождающего функционала $\tilde{\mathcal{E}}_2$ /см. теорему I-2/. Таким образом $\mathrm{Supp}\,\tilde{A}_{10}(\tilde{\varphi}) \subset V_{+,\varepsilon}$. Эти замечания вместе с условиями /2.3/ и влекут справедливость соотношений /2.5/ и /2.6/.

Из /2.5/ и /2.6/ с учетом /2.4/ получаем:

$$\mathrm{Supp}\left([\tilde{A}(\varphi_1), \tilde{A}(\tilde{\varphi}_2)] - (\Omega, [\tilde{A}(\tilde{\varphi}_1), \tilde{A}(\tilde{\varphi}_2)]\Omega)\right)\Omega \subset \qquad /2.7/$$

$$\subset \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon} \times \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon}.$$

Используя полученное соотношение мы докажем, что

$$\left([A(\varphi_1), A(\varphi_2)] - (\Omega, [A(\varphi_1), A(\varphi_2)]\Omega)\right)\Omega = 0 \qquad /2.8/$$

при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4$, а это, согласно лемме 2-I, и будет означать, что поле $A(\varphi)$ тривиально.

Определим для произвольного $\Phi \in D$ функционал

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\Phi, \left([A(\varphi_1), A(\varphi_2)] - (\Omega, [A(\varphi_1), A(\varphi_2)]\Omega)\right)\Omega\right). \qquad /2.9/$$

Обозначим через $F(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2 \in R^4)$ обобщенную функцию соответствующую этому функционалу, а через $\tilde{F}(k_1, k_2)$ ее фурье-образ. Из /2.7/ следует, что

$$\operatorname{Supp} \tilde{F}(k_1, k_2) \subset \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon} \times \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon}.$$

Теперь мы можем воспользоваться известными фактами из теории функций многих комплексных переменных [4,5,3, II]. А именно, справедливо утверждение: обобщенная функция $F(x_1, x_2)$ является граничным значением некоторой аналитической в области $\mathcal{T}_2^- = R^8 - i(V_+ \times V_+)$ функции $F(z_1, z_2)$ / т.е. $F(x_1+iy_1, x_2+iy_2) \to F(x_1, x_2)$ при $y_1, y_2 \to 0$, причем сходимость понимается в слабом смысле/. Функция $F(z_1, z_2)$ получена из $\tilde{F}(k_1, k_2)$ преобразованиям Лапласа.

Благодаря аксиоме локальной коммутативности из /2.9/ следует, что обобщенная функция $F(x_1, x_2)$ равна нулю в окрестности каждой точки (x_1, x_2), для которой $\langle x_1 - x_2 \rangle^2 < 0$. Поэтому, в рассматриваемом случае, применимо одно из следствий известной теоремы "об острие клина" Н.Н. Боголюбова [3, II]. Согласно этому следствию функция аналитическая в $\mathcal{T}_n^-$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и сходящаяся /в слабом смысле/ к нулю при подходе к какому-либо открытому множеству на вещественной границе, равна нулю во всей своей области аналитичности. Таким образом, $F(z_1, z_2) \equiv 0$ и поэтому $F(x_1, x_2) = 0$ $(x_1, x_2 \in R^4)$, как граничное значение функции $F(z_1, z_2)$. Следовательно и сам функционал $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4$. Ввиду произвольности ϕ в определении /2.9/, можно считать равенство /2.8/ доказанным. Вместе с этим доказана и теорема. ■

§ 2-3. Признак тривиальности поля в терминах вакуумных средних

Условие /2.3/ фигурирующее в теореме 2-I, из которого с необходимостью следует тривиальность поля, может быть записано в терминах вакуумных средних. Точнее, имеет место следующая

Теорема 2-2. Поле $A(\varphi)$ является ОСП в том и только в том случае, когда для его вакуумных средних $\mathcal{W}^4$ и $\mathcal{W}^2$ выполняется условие

$$\operatorname{Supp}(\widetilde{\mathcal{W}}^4 - \widetilde{\mathcal{W}}^2 \otimes \widetilde{\mathcal{W}}^2) \subset \overset{\circ}{V}_{-,\varepsilon} \times V_{-,\varepsilon} \times V_{+,\varepsilon} \times \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon} . \qquad /2.10/$$

Напомним, что из аксиомы спектральности следует, что любая точка $(k_1, \ldots, k_4) \in \operatorname{Supp}(\widetilde{\mathcal{W}}^4 - \widetilde{\mathcal{W}}^2 \otimes \widetilde{\mathcal{W}}^2)$ удовлетворяет лишь таким условиям: $k_1 + \ldots + k_4 = 0$, $k_3 + k_4 \in V_{+,\varepsilon}$ и $k_4 \in \overset{\circ}{V}_{+,\varepsilon}$.

Доказательство. В случае ОСП выражение $\mathcal{W}^4 - \mathcal{W}^2 \otimes \mathcal{W}^2$ совпадает с порождающим функционалом $\mathcal{E}_4$, поскольку для ОСП можно всегда считать $\mathcal{W}^1 = 0$. Из явного вида /I.36/ для порождающих функционалов ОСП видно, что для $\mathcal{E}_4$ условие /2.10/ выполняется.

Для доказательства теоремы в обратную сторону достаточно показать, что условия /2.10/ влекут справедливость условий /2.3/

Предположим, что хотя бы одно из условий /2.3/ для исходного поля не выполняется. Тогда, очевидно, найдется такая функция φ_1 $(\operatorname{Supp}\widetilde{\varphi}_1 \cap V_{+,\varepsilon} = 0)$ и такой вектор $A_{10}(\varphi_2)\Omega \in H_1$

$(\operatorname{Supp}\tilde{\varphi}_2 \subset V_{+,\varepsilon})$, что хотя бы один из векторов $A_{11}(\varphi_1) \times \times A_{10}(\varphi_2)\Sigma Z$ или $A_{21}(\varphi_1) A_{10}(\varphi_2)\Sigma Z$ не равен нулю. Не равной нулю будет и сумма этих векторов, поскольку они ортогональны. Учитывая, что при этом $A_{00}(\varphi_2)\Sigma Z = 0$, мы можем записать:

$$\|(A_{10}(\varphi_1) A_{00}(\varphi_2) + A_{11}(\varphi_1) A_{10}(\varphi_2) + A_{21}(\varphi_1) A_{10}(\varphi_2))\Sigma Z\|^2 > 0. \qquad /2.11/$$

Используя /2.4/ и тот факт, что $(\Sigma Z, A(\varphi_1) A(\varphi_2)\Sigma Z)\Sigma Z = (A_{00}(\varphi_1) \times \times A_{00}(\varphi_2) + A_{01}(\varphi_1) A_{10}(\varphi_2))\Sigma Z$, нетрудно убедиться, что /2.11/ можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathcal{W}^4(\bar{\varphi}_2 \otimes \bar{\varphi}_1 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2) - \mathcal{W}^2(\bar{\varphi}_2 \otimes \bar{\varphi}_1) \cdot \mathcal{W}^2(\varphi_1 \otimes \varphi_2) > 0 \qquad /2.12/$$

Переходя теперь к фурье-образам и учитывая что $\operatorname{Supp}\tilde{\varphi}_1 \cap V_{+,\varepsilon} = \varnothing$, и $\operatorname{Supp}\tilde{\varphi}_1 \cap V_{-,\varepsilon} = \varnothing$ мы приходим в противоречие с условием /2.10/. ■

Отметим, что выражения /2.11/ и /2.12/ эквивалентны при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}^4$, откуда следует п.о. функционала $\mathcal{W}^4 - \mathcal{W}^2 \otimes \mathcal{W}^2$. Этот факт будет использован в § 3-3.

Сделаем некоторые выводы из преведенных выше результатов.

Предположим, что дано описание явного вида всех вакуумных средних $\mathcal{W}^4$. Тогда, используя представление Челлена-Лемана для $\mathcal{W}^2$, можно изучить структуру носителя фурье-образа функционала $\mathcal{W}^4 - \mathcal{W}^2 \otimes \mathcal{W}^2$. Если бы при этом оказалось, что всегда выполнено условие /2.10/, то это означало бы отсутствие в аксиоматике Вайтмана нетривиальных примеров полей. Отсюда следует актуальность задачи об описании явного вида всех функционалов $\mathcal{W}^4$. Свойства этих функционалов хорошо известны.

ГЛАВА 3

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ ПРИМЕРОВ ПОЛЕЙ

Задача о нахождении нетривиальных примеров полей принадлежит к числу основных наиболее трудных и нерешенных задач ТП.

В связи с этим, представляет интерес рассмотрение таких примеров полей, для которых хотя бы одна аксиома ТП взята в ослабленном виде. Однако, даже сама задача получения более слабого варианта какой-либо аксиомы является довольно трудной. Поучительный пример в этом отношении дает аксиома локальной коммутативности. В литературе хорошо известны тщетные попытки ослабить эту аксиому [3-5].

В настоящей главе нам удается построить примеры полей, для которых аксиома локальной коммутативности выполняется лишь частично, точнее, выполняется та часть аксиомы локальной коммутативности, которая фигурирует в определении квазиполя. Такое ослабление этой аксиомы стало возможным в результате формулировки ее в терминах якобиевых матриц. Для учета этой части аксиомы локальной коммутативности мы в § 3-1 строим оператор пространственно-подобного симметрирования функций.

В § 3-2 дано описание некоторого класса квазиполей в терминах последовательностей ограниченных положительных операторов. Такое описание открывает путь для построения примеров квазиполе Так в § 3-3 указана конкретная последовательность проектирующих операторов, определяющая пример некоторого квазиполя.

Наконец в § 3-4 конструируется пример поля с ослабленной аксиомой локальной коммутативности в терминах C^*-алгебр [2,5,32

причем пространством состояний для этого поля является некоторое подпространство из $\oplus\sum_{n=0}^{\infty} L_2^n \; (L_2^0 \equiv \mathbb{C})$.
Результаты этой главы изложены в публикациях [29 - 31].

§ 3-I. Пространственно-подобный симметризатор

Построения данного параграфа независимы от предыдущих рассмотрений и имеют самостоятельный интерес.

Охарактеризуем каждую точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^{4n}$ $(x_1, \dots, x_n \in R^4)$ некоторой совокупностью перестановок набора $(x_1, \dots, x_n)$. Эту совокупность перестановок обозначим через $\underline{I}(x)$. Она определяется следующим образом. Транспозиция τ, представляющая две рядом стоящие точки x_j и x_{j+1} $(j = 1, 2, \dots, n-1)$ из набора $(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит $\underline{I}(x)$, если $\langle x_j - x_{j+1}\rangle^2 < 0$. Обозначим $\tau x = (x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n)$. Произвольная перестановка $\pi \in \underline{I}(x)$, если π может быть разложена в произведение некоторого числа транспозиций: $\pi = \tau_k \cdots \tau_2 \cdot \tau_1$ таких, что $\tau_1 \in \underline{I}(x)$, $\tau_2 \in \underline{I}(\tau_1 x), \dots, \tau_k \in \underline{I}(\tau_{k-1} \cdots \tau_1 x)$.

Действуя на фиксированную точку $x = (x_1, \dots, x_n)$ всеми перестановками из $\underline{I}(x)$ мы получим некоторое конечное

множество точек $h(x) = \{\pi x \in R^4 \mid \pi \in I(x)\}$.
Понятно, что количество точек в $h(x)$ зависит от характера исходной точки $x \in R^{4n}$. Так, например, если все $\langle x_j - x_k \rangle^2 \geq 0$ $(j,k = 1,2,\ldots,n)$, то $I(x)$ состоит лишь из одной тождественной перестановки и, следовательно, $h(x)$ содержит лишь точку x. В другом крайнем случае, когда все $\langle x_j - x_k \rangle^2 < 0$, $I(x)$ состоит из всех $n!$ перестановок набора $(x_1,\ldots,x_n)$ и, соответственно, $h(x)$ содержит $n!$ различных точек.

Отметим, что для любой точки $y \in h(x)$ $(y = \pi x, \pi \in I(x))$ имеет место равенство

$$h(x) = h(y) \qquad /3.1/$$

Действительно, пусть точка $z = \gamma x \in h(x)$ $(\gamma \in I(x))$. Ясно, что тогда z можно еще представить и так: $z = \gamma \pi^{-1} \pi x = \gamma \pi^{-1} y$. Разлагая перестановки γ, π и π^{-1} в произведение подходящих транспозиций нетрудно убедиться, что $\gamma \pi^{-1} \in I(y)$, т.е. $z \in h(y)$ и, следовательно, $h(x) \subseteq h(y)$. Пусть теперь точка $z = \delta y \in h(y)$ $(\delta \in I(y))$. Тогда ввиду того, что $z = \delta \pi x$, где, очевидно, $\delta \pi \in I(x)$, заключаем, что и $h(y) \subseteq h(x)$.

<u>Определение 3-1.</u> Функцию $f_c(x)$, заданную на R^{4n}, назовем пространственно-подобно симметричной, если она постоянна на каждом множестве точек $h(x)$, т.е. если

$$f_c(x) = f_c(y) \quad (y \in h(x)) \qquad /3.2/$$

Определим на всюду определенных функциях $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ операцию пространственно-подобного симметрирования P_c^n следующим образом:

$$f(x) \longrightarrow f_c(x) = (P_c^n f)(x) = \frac{1}{[h(x)]} \sum_{y \in h(x)} f(y) = \qquad /3.3/$$

$$= \frac{1}{[h(x)]} \sum_{\alpha=1}^{n!} a(\alpha; x) f(\pi_\alpha x)$$

где $[h(x)]$ - число точек в множестве $h(x)$; $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{n!}$ - совокупность всех перестановок набора $(x_1, \cdots, x_n)$, определяющего точку X, а $a(\alpha; x) = \begin{cases} 1, & \pi_\alpha \in I(x) \\ 0, & \pi_\alpha \bar{\in} I(x) \end{cases}$

Продемонстрируем действие симметризатора P_c^n на простом примере. Пусть $f(x)$ задана на $R^{4 \cdot 3}$. Вычислим значение функции $(P_c^3 f)(x)$ в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ такой, что $\langle x_1 - x_2 \rangle^2 < 0$, $\langle x_1 - x_3 \rangle^2 > 0$, $\langle x_2 - x_3 \rangle^2 < 0$. Множество $h((x_1, x_2, x_3))$ очевидно, состоит из трех точек: (x_1, x_2, x_3) (x_2, x_1, x_3), (x_1, x_3, x_2). Поэтому в определении /3.3/ отличными от нуля будут лишь те $a(\alpha, x)$, которые соответствуют перестановкам: $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 2 \end{pmatrix}$. В этой точке $(P_c^3 f)(x_1, x_2 x_3) = \frac{1}{3}\left[f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_1, x_3, x_2)\right]$. Проверим выполняется ли равенство $(P_c^3 f)(x_1, x_2, x_3) = (P_c^3 f)(x_2, x_1, x_3)$

Для этого снова пользуемся определением /3.3/. Очевидно, что теперь $I((x_2, x_1, x_3))$ состоит из перестановок: $\begin{pmatrix} 2, 1, 3 \\ 2, 1, 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2, 1, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2, 1, 3 \\ 1, 3, 2 \end{pmatrix}$. Поэтому из всех слагаемых

$a(\alpha, (x_2, x_1, x_3)) f(\pi_\alpha(x_2, x_1, x_3))$ $(\alpha = 1, \dots, n!)$ в /3.3/ останутся лишь такие: $f(x_2, x_1, x_3)$, $f(x_1, x_2 x_3)$ и $f(x_1, x_3, x_2)$, остальные обратятся в нуль. Таким образом $(P_c^3 f)(x_2, x_1, x_3) = (P_c^3 f)(x_1, x_2, x_3)$. Аналогично проверяется и равенство: $(P_c^3 f)(x_1, x_2, x_3) = (P_c^3 f)(x_1, x_3, x_2)$

<u>Теорема 3-I.</u> Операция P_c^n $(n = 2, 3, \dots)$ определяет в пространстве L_2^n ортопроектор на подпространство, образованное замыканием в L_2^n линейного множества пространственно – подобно симметричных функций.

Прежде чем доказывать эту теорему произведем следующие предварительные приготовления.

Рассмотрим в R^{4n} $\sigma_n = \frac{n(n-1)}{2}$ непрерывных функций $\chi_{jk}(x) = \chi_{jk}(x_1, \dots, x_n) = \langle x_j - x_k \rangle^2$ $(j, k = 1, 2, \dots n; j < k)$. Благодаря непрерывности этих функций, каждое из множеств $R_{jk}^+ = \{x \in R^{4n} \mid \chi_{jk}(x) \geq 0\}$ и $R_{jk}^- = R^{4n} \setminus R_{jk}^+ = \{x \in R^{4n} \mid \chi_{jk}(x) < 0\}$ измеримо по Борелю.

Разобьем все пространство R^{4n} на 2^{σ_n} подмножеств, каждое из которых получено как $\bigcap\limits_{\substack{j,k=1,2,\dots,n \\ j<k}} R^{\lambda}_{jk}$, где λ при каждом jk равно либо $+$, либо $-$. Перебирая всевозможные комбинации знаков в этом пересечении мы и получим 2^{σ_n} указанных подмножеств.

Упорядоченную произвольным образом совокупность этих подмножеств обозначим через $\{\mathcal{R}_s\}_{s=1}^{2^{\sigma_n}}$. Из построения легко следует, что $\bigcup\limits_{s=1}^{2^{\sigma_n}} \mathcal{R}_s = R^{4n}$ и $\mathcal{R}_{s_1} \cap \mathcal{R}_{s_2} = \varnothing$, если $s_1 \neq s_2$. Понятно также, что каждое подмножество $\mathcal{R}_s$ $(s=1,2,\dots,2^{\sigma_n})$ измеримо по Борелю.

Возьмем две произвольные точки $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ из некоторого подмножества $\mathcal{R}_s$ $s=1,2,\dots,2^{\sigma_n}$. Тогда, согласно определения подмножества $\mathcal{R}_s$, при всех $j,k=1,\dots,n$; $j<k$ выполняются равенства $\operatorname{sign} \chi_{jk}(x) = \operatorname{sign} \chi_{jk}(y)$.

Т.е. $I(x)=I(y)$, если $x,y \in \mathcal{R}_s$. Таким образом мы приходим к выводу, что все точки, принадлежащие одному и тому же подмножеству $\mathcal{R}_s$ $(s=1,2,\dots,2^{\sigma_n})$, характеризуются одной и той же совокупностью перестановок, которую мы обозначим через I_s. Понятно также, что числа $[h(x)]$ и $[h(y)]$ равны, если x и $y \in \mathcal{R}_s$, поэтому естественно обозначение: $[h_s] \equiv [h_s(x)]$, при $x \in \mathcal{R}_s$.

<u>Доказательство теоремы 3-I.</u>

Прежде всего покажем, что P^n_c является ограниченным оператором в L_2^n.

Для этого сперва убедимся, что для любой определенной всюду функции $f(x) \in L_2^n$ функция $(P_c^n f)(x)$ будет измеримой. А затем оценим норму последней функции.

Измеримость функции $(P_c^n f)(x)$ вытекает из измеримости ее слагаемых $a(\alpha; x) f(\pi_\alpha x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n!)$ в определении /3.3/. А последнее следует из того, что

$$a(\alpha; x) f(\pi_\alpha x) = \begin{cases} f(\pi_\alpha x), & x \in R_{\pi_\alpha} \\ 0, & x \bar{\in} R_{\pi_\alpha} \end{cases}, \text{где } R_{\pi_\alpha} \subset R^{4n}$$

есть обьединение всех тех /измеримых/ подмножеств $\mathcal{R}_s$, для которых I_s содержит π_α.

Благодаря измеримости функции $(P_c^n f)(x)$, а также измеримости каждого множества $\mathcal{R}_s$ можно записать:

$$\int_{R^{4n}} |(P_c^n f)(x)|^2 d^{4n} x = \sum_{s=1}^{2^{\sigma_n}} \int_{\mathcal{R}_s} |(P_c^n f)(x)|^2 d^{4n} x .$$

Переписывая каждое слагаемое этой суммы в виде

$$\int_{\mathcal{R}_s} |(P_c^n f)(x)|^2 d^{4n} x = \frac{1}{[h_s]^2} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n!} \int_{\mathcal{R}_s} a(\alpha; x) \overline{f(\pi_\alpha x)} \times$$

$$\times a(\beta; x) f(\pi_\beta x) d^{4n} x = \frac{1}{[h_s]^2} \sum_{\pi_\alpha, \pi_\beta \in I_s} \int_{\mathcal{R}_s} \overline{f(\pi_\alpha x)} f(\pi_\beta x) d^{4n} x,$$

и используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{R}_s} \overline{f(\pi_\alpha x)}\, f(\pi_\beta x)\, d^{4n}x \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{R}_s} \left| f(\pi_\alpha x) \right|^2 d^{4n}x \cdot \int\limits_{\mathcal{R}_s} \left| f(\pi_\beta x) \right|^2 d^{4n}x \leqslant \| f(\pi_\alpha x) \|^2 \cdot \| f(\pi_\beta x) \|^2 =$$
$$= \| f(x) \|^4,$$

получаем:

$$\| (P_c^n f)(x) \|^2 = \int\limits_{R^{4n}} \left| (P_c^n f)(x) \right|^2 d^{4n}x \leqslant c \, \| f(x) \|^2$$

где $c = (n!)^2 \sum\limits_{s=1}^{2^{\sigma_n}} \dfrac{1}{[h_s]^2}$. Т.е. P_c^n действительно

является ограниченным оператором в L_2^n. Его расширение на все L_2^n обозначаем тем же образом.

Теперь докажем, что для P_c^n имеют место равенства

$$(P_c^n)^2 = P_c^n \quad \text{и} \quad (P_c^n)^* = P_c^n,$$

т.е., что P_c^n является проектором.

Первое из этих равенств следует непосредственно из определения /3.3/.

Покажем справедливость второго.

Для произвольных $f(x)$, $g(x) \in L_2^n$ имеем:

$$\int_{R^{4n}} \overline{(P_c^n f)(x)}\, g(x)\, d^{4n}x = \sum_{\alpha=1}^{n!} \int_{R^{4n}} \frac{1}{[h(x)]}\, a(\alpha; x)\, \overline{f(\pi_\alpha x)}\, g(x)\, d^{4n}x =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n!} \int_{R^{4n}} \frac{1}{[h(\pi_\alpha^{-1} x)]}\, a(\alpha; \pi_\alpha^{-1} x)\, \overline{f(x)}\, g(\pi_\alpha^{-1} x)\, d^{4n}x,$$

где произведена замена переменных $x \to \pi_\alpha^{-1} x$ /понятно, что $d^{4n}x = d^{4n}(\pi_\alpha^{-1} x)$/.

Теперь мы воспользуемся следующим равенством

$$\frac{1}{[h(x)]}\, a(\pi_\alpha^{-1}; x) = \frac{1}{[h(\pi_\alpha^{-1} x)]}\, a(\pi_\alpha; \pi_\alpha^{-1} x) \qquad /3.4/$$

$$\left(a(\pi_\alpha; x) \equiv a(\alpha; x) \;;\; \alpha = 1, \ldots, n! \right)$$

Его справедливость основана на следующих рассуждениях. Если $\pi_\alpha^{-1} \in I(x)$, то, очевидно, $\pi_\alpha \in I(\pi_\alpha^{-1} x)$ и, следовательно, /3.4/ выполняется. Если же $\pi_\alpha^{-1} \overline{\in} I(x)$, то понятно, что и $\pi_\alpha \overline{\in} I(\pi_\alpha^{-1} x)$ и поэтому справа и слева в /3.4/ нули.

Учитывая /3.4/ получаем:

$$\int_{R^{4n}} \overline{(P_c^n f)(x)}\, g(x)\, d^{4n}x = \int_{R^{4n}} \sum_{\alpha=1}^{n!} \overline{f(x)}\, \frac{1}{[h(x)]}\, a(\pi_\alpha^{-1}; x) \times$$

$$\times\, g(\pi_\alpha^{-1} x)\, d^{4n}x = \int_{R^{4n}} \overline{f(x)}\, (P_c^n g)(x)\, d^{4n}x .$$

Таким образом P_c^n - проектор. Теорема доказана. ■

§ 3-2. Описание квазиполей последовательностями ограниченных операторов

Пусть $\{\mathcal{E}_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ - некоторая последовательность порождающих функционалов. Предположим, что при каждом $n = 1, 2, \ldots$ билинейная форма $\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{u}_n \otimes v_n)$ $(u_n, v_n \in \mathcal{S}^{4n})$ допускает продолжение до билинейного непрерывного функционала $\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f}_n \otimes g_n)$ над $L_2(R^{4n}, d^{4n}x) \equiv L_2^n$, $f_n, g_n \in L_2^n$. В таком случае мы покажем, что соответствующее последовательности $\{\mathcal{E}_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ квазиполе может быть задано последовательностью ограниченных операторов $\check{\mathcal{E}}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Каждый оператор $\check{\mathcal{E}}_n$ действует в L_2^n $(\check{\mathcal{E}}_0 = 1,\ L_2^0 = \mathbb{C})$ и определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f}_n \otimes g_n) = (\check{\mathcal{E}}_n f_n, g_n)_{L_2^n} \qquad /3.5/$$

Это равенство записано в согласии с общим видом билинейного непрерывного функционала над пространством Гильберта.

Следует отметить, что несмотря на сделанное предположение, каждому функционалу $\mathcal{E}_{2n}$ соответствует, вообще говоря, <u>обобщенная</u> функция $\mathcal{E}_{2n}(x_1, \ldots, x_n)$. Примером может служить само ОСП. То что оно действительно удовлетворяет указанному предположению видно из явного выражения для $\tilde{\mathcal{E}}_{2n}$ /I.36/.

Для того, чтобы перейти от задания квазиполя последовательностью порождающих функционалов $\{\mathcal{E}_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ к заданию его последовательностью ограниченных операторов $\{\check{\mathcal{E}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ нужно, исходя из /3.5/ перенести все свойства функционалов $\mathcal{E}_{2n}$ /см.теорему I-2/ на свойства операторов $\check{\mathcal{E}}_n$.

Прежде всего заметим, что каждый оператор $\check{\mathcal{E}}_n$ $(n=0,1,\ldots)$ является положительным ввиду свойства п.о. функционала $\mathcal{E}_{2n}$ /I.18/. Но так как $\check{\mathcal{E}}_n$, кроме того, и ограничен, то, следовательно, он является и самосопряженным.

Для установления других свойств операторов $\check{\mathcal{E}}_n$ наряду с пространством состояний квазиполя H введем пространство

$$L_2 = \oplus\sum_{n=0}^{\infty} L_2^n \quad (L_2^0 = \mathbb{C}),$$

в подпространствах которого действуют операторы $\check{\mathcal{E}}_n$. Понятно, что благодаря исходному предположению, пространство $H = \oplus\sum_{n=0}^{\infty} H_n$ можно получить, вводя на финитных последовательностях из L_2 новое квазискалярное произведение /см. теорему I-3/:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})_H = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f}_n \otimes g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{H_n}$$

$$(\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots), \mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots), f_n, g_n \in L_2^n, n=0,1,\ldots)$$

Благодаря свойству релятивистской инвариантности функционалов $\mathcal{E}_{2n}$, отображение

$$f_n(x_1,\dots,x_n) \to f_n(\Lambda^{-1}(x_1-a),\dots,\Lambda^{-1}(x_n-a)) \quad ((\Lambda,a)\in \mathcal{P}_+^\uparrow)$$

определенное на функциях $f_n \in L_2^n$, становится в H_n унитарным представлением группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Однако, нетрудно понять, что это отображение определяет некоторое унитарное представление и в самом L_2. Обозначим его через $\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)$. Ввиду /I.19/ имеем

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f_n}\otimes g_n) = \mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda) f_n}\otimes \check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda) g_n)$$

$$= (\check{\mathcal{E}}_n f_n, g_n) = (\check{\mathcal{E}}_n \check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda) f_n, \check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda) g_n),$$

т.е. /3.6/

$$[\check{\mathcal{E}}_n, \check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)] = 0 \quad ((a,\Lambda)\in \mathcal{P}_+^\uparrow, \; n=0,1,\dots)$$

В такой форме отражается свойство релятивистской инвариантности функционалов $\mathcal{E}_{2n}$ на операторах $\check{\mathcal{E}}_n$.

Для выражения в терминах $\check{\mathcal{E}}_n$ свойства спектральности функционалов $\mathcal{E}_{2n}$ /I.20/ рассмотрим в каждом L_2^n проектор P_{sp}^n, действующий следующим образом:

$$\left(P_{sp}^{n} f_n\right)(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\limits_{R^{4n}} e^{i\sum\limits_{j=1}^{n} \langle k_j, x_j\rangle} \times$$

/3.7/

$$\times\, \theta_\varepsilon(k_1+\dots+k_n)\, \tilde{f}(k_1,\dots,k_n)\, d^{4n}k\,.$$

Понятно, что свойство /I.20/ можно записать теперь в виде:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{2n}\left(\overleftarrow{\tilde{f}}_n \otimes \tilde{g}_n\right) = \tilde{\mathcal{E}}_{2n}\left(\theta_\varepsilon(-k_1-\dots-k_n)\overleftarrow{\tilde{f}}_n \otimes \theta_\varepsilon(k_{n+1}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+k_{2n})\tilde{g}_n\right) = \mathcal{E}_{2n}\left(\overleftarrow{f}_n \otimes g_n\right) = \left(\check{\mathcal{E}}_n f_n, g_n\right) =$$

$$= \check{\mathcal{E}}_{2n}\left(\overleftarrow{P_{sp}^{n} f_n} \otimes P_{sp}^{n} g_n\right) = \left(\check{\mathcal{E}}_n P_{sp}^{n} f_n, P_{sp}^{n} g_n\right),$$

/справедливость первого равенства следует из того, что

$$\mathrm{Supp}\,\tilde{\mathcal{E}}_{2n} \subseteq \mathrm{Supp}\,\theta_\varepsilon(-(k_1+\dots+k_n))\,\theta_\varepsilon(k_{n+1}+\dots+k_{2n})/.$$

Таким образом

$$\check{\mathcal{E}}_n = P_{sp}^{n}\, \check{\mathcal{E}}_n\, P_{sp}^{n} \quad (n=1,2,\dots) \qquad /3.8/$$

В аналогичной форме выражается и часть аксиомы локальной коммутативности, отражающаяся на свойствах функционалов $\mathcal{E}_{2n}$ /см. /I.2I//. Свойство /I.2I/ означает, грубо говоря, что обобщенная функция $\mathcal{E}_{2n}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n})$ является пространственно-подобно симметричной отдельно по наборам переменных $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(x_{n+1},\ldots,x_{2n})$. В корректной форме это можно записать так

$$\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f_n}\otimes g_n)=\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{P_c^n f_n}\otimes P_c^n g_n),$$

где P_c^n - пространственно-подобный симметризатор, построенный в § 3-I. Отсюда ввиду /3.5/ и получаем

$$\check{\mathcal{E}}_n=P_c^n\check{\mathcal{E}}_n P_c^n \quad (n=2,3,\ldots) \qquad /3.9/$$

Соотношения /3.8/ и /3.9/ означают, как легко понять, что оператор $\check{\mathcal{E}}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ приводится подпространством $L_2^n(sp,c)\equiv P_{sp}^n L_2^n\cap P_c^n L_2^n$ и равен нулю на $L_2^n\ominus L_2^n(sp,c)$ /мы полагаем $P_c^1=1$ /.

Наконец, свойство соподчинения /I.22 /, очевидно, можно переписать в следующем виде:

$$(\check{\mathcal{E}}_n f_1\otimes f_{n-1},\ f_1\otimes f_{n-1})\leq C_{f_1}^n(\check{\mathcal{E}}_{n-1}f_{n-1},\ f_{n-1}) \qquad /3.10/$$

$$(f_1\in L_2^1,\ f_{n-1}\in L_2^{n-1},\ n=1,2,\ldots)$$

Прежде чем подводить итог проведенным рассмотрениям докажем следующую лемму.

<u>Лемма 3-I.</u> Операторы $\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)$, P_{sp}^n и P_c^n $(n=1,2,\ldots)$ коммутируют.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\check{E}_n(p)$- разложение единицы соответствующее группе унитарных операторов $\check{\mathcal{U}}_n(a,1)$ $(a\in R^4)$ $\left(\check{\mathcal{U}}_n(a,1)=\int\limits_{R^4}\exp i\langle p,a\rangle\, d\check{E}_n(p)\right)$. Благодаря

тому, что

$$(\check{\mathcal{U}}_n(a,1)f_n)(x_1,\ldots,x_n)=f_n(x_1-a,\ldots,x_n-a)\;(f_n\in L_2^n$$

нетрудно убедиться, что

$$\widetilde{(\check{E}_n(\Delta)f_n)}(k_1,\ldots,k_n)=\chi_\Delta(k_1+\ldots+k_n)\tilde{f}(k_1,\ldots,k_n),$$

где $\chi_\Delta(p)$ есть характеристическая функция борелевского множества $\Delta\subset R^4$. Поэтому, из /3.7/ заключаем, что

$$P_{sp}^n=\int\limits_{V_{+,\varepsilon}}d\check{E}_n(p) \qquad /3.11/$$

откуда и следует, что $[P_{sp}^n,\check{\mathcal{U}}_n(a,1)]=0$. То, что $[P_{sp}^n,\check{\mathcal{U}}_n(0,\Lambda)]=0$ вытекает из релятивистской инвариантности множества $V_{+,\varepsilon}$.

Покажем, что

$$[P_c^n,\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)]=0 \qquad /3.12/$$

$$((a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^\uparrow,\ n=1,2,\ldots)$$

Пусть $f_n(x_1,\dots,x_n)\in L_2^n$, тогда, вспоминая /3.3/, имеем

$$\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)(P_c^n f_n)(x_1,\dots,x_n)=\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)f_{n,c}(x_1,\dots,x_n)$$

$$=f_{n,c}(\Lambda^{-1}(x_1-a),\dots,\Lambda^{-1}(x_n-a))\in P_c^n L_2^n,$$

так как $\langle x_i-x_k\rangle^2=\langle\Lambda^{-1}(x_i-a)-\Lambda^{-1}(x_k-a)\rangle^2$ $(i,k=1,2,\dots,n)$. Т.е. представление $\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)$ приводится подпространством $P_c^n L_2^n$, откуда в силу ограниченности $\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)$ и следует /3.12/.

Соотношение /3.12/эквивалентно, очевидно, такому $[\check{E}_n(\Delta),P_c^n]=0$ $(\Delta\subset R^4)$, откуда ввиду /3.11/ и получаем $[P_c^n,P_{sp}^n]=0$. ■

Предыдущие рассмотрения доказывают в одну сторону следующую теорему.

<u>Теорема 3-2.</u> Каждому квазиполю, порождающие функционалы которого допускают представление /3.5/, соответствует оператор $\check{\mathcal{E}}=\oplus\sum_{n=0}^{\infty}\check{\mathcal{E}}_n$ /где $\check{\mathcal{E}}_n: L_2^n\to L_2^n$ - ограниченные операторы, $\check{\mathcal{E}}_0=1$ /, заданный на финитных в L_2 последовательностях векторов. Этот оператор обладает следующими свойствами. Он эрмитов и положителен, коммутирует с представлением $\check{\mathcal{U}}(a,\Lambda)=\oplus\sum_{n=0}^{\infty}\check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)$ заданным в L_2, равен нулю на подпространстве $L_2\ominus L_2(sp,c)$, где

$$L_2(sp,c) = P_c P_{sp} L_2 = P_{sp} P_c L_2 \quad \left(P_c = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} P_c^n \right.$$

$\left. (P_c^0 = P_c^1 = \mathbf{1}),\ P_{sp} = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} P_{sp}^n \ (P_{sp}^0 = \mathbf{1}) \right)$, коммутирует с каждым из проекторов P_c и P_{sp} и, наконец, для его частей выполняется условие соподчинения /3.I0/.

Обратно, если в L_2 задан оператор $\check{\mathcal{E}} = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \check{\mathcal{E}}_n$, обладающий всеми перечисленными выше свойствами, то по нему однозначно восстанавливается некоторое квазиполе.

В доказательстве нуждается лишь последняя часть теоремы.

Пусть задан в L_2 оператор $\check{\mathcal{E}} = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \check{\mathcal{E}}_n$ со всеми необходимыми свойствами. Тогда последовательность функционалов $\mathcal{E}_{2n}$ $(\mathcal{E}_{2n}(\overleftarrow{f}_n \otimes g_n) = (\check{\mathcal{E}}_n f_n, g_n))$, очевидно, удовлетворяет все условия теоремы I-3. В этом нетрудно убедиться, учитывая положительность и ограниченность каждого оператора $\check{\mathcal{E}}_n$, а также справедливость соотношений /3.6/, /3.8/, /3.9/ и /3.I0/. Согласно теореме I-3, мы теперь можем однозначно восстановить некоторое квазиполе. ■

Рассмотрения данного параграфа открывают путь к построению примеров квазиполей.

§ 3-3. Пример квазиполя

В настоящем параграфе мы построим конкретный оператор, для которого выполняются все свойства перечисленные в теореме 3-2. Тем самым будет задан пример квазиполя.

Указанный оператор мы определяем как прямую сумму некоторых проекторов $\check{T}^n$, каждый из которых действует в пространстве L_2^n $(n=1,2,\dots)$.

Для определения самих $\check{T}^n$, нам нужны некоторые приготовления.

Обозначим через $\mathbb{P}_{sp}^n$ / $\mathbb{P}_{sp}^n \neq P_{sp}^n$, ср. /3.7// проектор в L_2^n $(n=1,2,\dots)$, действующий по следующей формуле:

$$(\mathbb{P}_{sp}^n f_n)(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\langle k_j,x_j\rangle}\times$$

$$\times\tilde{f}_n(k_1,\dots,k_n)\prod_{j=1}^{n}\theta_\varepsilon(k_j+\dots+k_1)\,d^{4n}k. \tag{3.13}$$

Покажем, что

$$\left[\mathbb{P}_{sp}^n,\ \check{\mathcal{U}}_n(a,\Lambda)\right]=0\quad\left((a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^\uparrow\right) \tag{3.14}$$

Действительно, поскольку множество $V_{+,\varepsilon}$ инвариантно относительно четырехмерных вращений $\Lambda\in L_+^\uparrow$, а функция $\theta_\varepsilon(q)$ является характеристической для этого множества, то

$$\left[\mathbb{P}_{sp}^n,\ \check{\mathcal{U}}_n(0,\Lambda)\right]=0$$

Далее, при переходе в пространстве L_2^n к фурье-образам, операторы $\check{\mathcal{U}}_n(a,1)$ переходят в операторы умножения на $\exp i\langle k_1+\dots+k_n,a\rangle$, а $\mathbb{P}_{sp}^n$ действует, как оператор умножения на характеристическую функцию $\prod_{j=1}^{n} \theta_\varepsilon(k_j+\ldots$ $\ldots+k_1)$, поэтому и

$$\left[P_{sp}^n , \check{\mathcal{U}}_n(a,1) \right] = 0$$

т.е. /3.14/ установлено.

Определим в каждом L_2^n $(n=1,2,\ldots)$ проектор $\check{T}^n$ на подпространство, образованное пересечением подпространств $P_c^n L_2^n$ и $\mathbf{P}_{sp}^n L_2^n$, т.е.

$$\check{T}^n L_2^n = P_c^n L_2^n \cap \mathbf{P}_{sp}^n L_2^n \qquad /3.15/$$

Докажем, что оператор $\check{T} = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \check{T}^n \quad (\check{T}^0 = 1)$ заданный на финитных последовательностях в $\mathbf{L}_2$, определяет некоторое квазиполе. Для этого установим, что оператор $\check{T}$ обладает всеми необходимыми свойствами /см. теорему 3-2/.

Очевидно, что оператор $\check{T}$ эрмитов и положителен.

Его перестановочность с операторами $\check{\mathcal{U}}(a,\Lambda)$ /см.§ 3-2/ следует из перестановочности каждого $\check{T}^n$ с $\mathcal{U}_n(a,\Lambda)$. Последнее вытекает из леммы 3-I и соотношений /3.14/ и /3.15/.

Покажем, что $\check{T} = P_c \check{T} P_c = P_{sp} \check{T} P_{sp}$, откуда будет следовать, что оператор $\check{T}$ равен нулю на подпространстве $\mathbf{L}_2 \ominus \mathbf{L}_2(sp,c)$ и коммутирует с каждым из проекторов P_c и P_{sp}. Действительно, из /3.15/ очевидно, что

$$\check{T}^n = P_c^n \check{T}^n P_c^n = P_{sp}^n \check{T}^n P_{sp}^n$$

поскольку $\mathbf{P}_{sp}^n < P_{sp}^n$ /ср. /3.7/ и /3.13//. Поэтому сделанное утверждение доказано.

Убедимся, наконец, в справедливости условий /3.10/ для операторов $\check{T}^n$ $(n=0,1,\dots)$. Из определения /3.3/ и соотношения /3.13/ видно, что $P_c^n < \mathbf{1} \otimes P_c^{n-1}$ и $P_{sp}^n < \mathbf{1} \otimes P_{sp}^{n-1}$ $(n=1,2,\dots)$. Поэтому

$$P_c^n L_2^n \cap P_{sp}^n L_2^n \subseteq (\mathbf{1} \otimes P_c^{n-1}) L_2^n \cap (\mathbf{1} \otimes P_{sp}^{n-1}) L_2^n$$

Следовательно, $\check{T}^n \leq \mathbf{1} \otimes \check{T}^{n-1}$, это и влечет справедливость соотношений /3.10/ для операторов $\check{T}^n$.

Таким образом оператор $\check{T} = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \check{T}^n$ действительно определяет некоторое квазиполе.

Следует отметить отличие этого квазиполя от ОСП. Оно состоит в следующем: во-первых, каждое подпространство $\check{T}^n L_2^n$ /см. /3.15// содержит функции не обязательно полностью симметрические, а также функции, для которых носитель их фурье-образа не принадлежит произведению $\underbrace{V_{+,\varepsilon} \times \dots \times V_{+,\varepsilon}}_{n}$; как это имеет место для ОСП; во-вторых между операторами $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$, соответствующими рассматриваемому квазиполю, вообще говоря не выполняются соотношения коммутации, вытекающие из аксиомы локальной коммутативности и имеющие конкретный вид для операторов рождения и уничтожения ОСП.

§ 3-4. Пример ТП с ослабленной аксиомой локальной коммутативности в терминах C^*- алгебр

В этом параграфе мы сконструируем систему C^*- алгебр, для которой выполняются почти все требования ТП в терминах алгебр ограниченных операторов. Исключением является аксиома локальной коммутативности. В предлагаемой ниже конструкции она выполняется лишь частично.

Отметим, что нетривиального примера ТП в терминах C^*- алгебр до сих пор также еще не построено. Поэтому рассмотрение всевозможных примеров систем C^*- алгебр, удовлетворяющих хотя бы лишь основной части аксиом ТП представляет интерес.

Ниже мы пользуемся данной в [2,5 и 38] формулировкой ТП в терминах алгебр ограниченных операторов.

Строящаяся система C^*- алгебр будет действовать в пространстве $L_2(sp, c)$ /см. § 3-2/. Легко убедиться, что это пространство приемлемо в качестве пространства состояний некоторого поля. Действительно, благодаря лемме 3-I, сужение представления $\check{\mathcal{U}}(a, \Lambda)$ на $L_2(sp, c)$ является снова унитарным непрерывным представлением группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$. При этом, ввиду явного вида проектора P_{sp}, очевидно выполнение аксиомы спектральности.

Пусть $\mathcal{O}$ есть произвольное ограниченное множество из R^4. Обозначим через $\mathcal{O}^c$ множество всех тех точек $x \in R^4$ для которых любая времениподобная или изотропная прямая /т.е. прямая в R^4, для которой всякий ее отрезок времениподобен или изотропен/, проходящая через x обязательно пересекает $\mathcal{O}$. Множество $\mathcal{O}^c$ называется причинной оболочкой множества $\mathcal{O}$.

Сопоставим каждому борелевскому множеству $\Delta \subseteq O^c$ и произвольной функции $f_1 \in L_2^1$ оператор $\tau(\Delta, f_1)$., определенный на финитных последовательностях $\boldsymbol{g} = (g_i)_{i=0}^{\infty}$ $(g_i \in L_2^i(sp,c))$ следующим образом:

$$\tau(\Delta, f_1)\boldsymbol{g} = \tau(\Delta, f_1)(g_0, g_1, \dots) =$$

$$= (0, \check{T}^1(\chi_\Delta f_1 \otimes g_0), \check{T}^2(\chi_\Delta f_1 \otimes g_1), \dots)$$

где χ_Δ характеристическая функция множества $\Delta \subseteq O^c$, а $\check{T}^i$ $(i=1,2,\dots)$ проектор, определенный в § 3-3.

Оператор $\tau(\Delta, f_1)$ ограничен. Действительно, $\| \check{T}^i(\chi_\Delta f_1 \otimes g_{i-1})\| \leq \|\chi_\Delta f_1\| \cdot \|g_{i-1}\|$, откуда следует, что норма оператора $\tau(\Delta, f_1)$ не превосходит нормы вектора $\chi_\Delta f_1 \in L_2^1$.

Рассмотрим для каждого ограниченного множества $O \subset R^4$ операторную алгебру, натянутую на линейную оболочку операторов $\tau(\Delta, f_1)$ и сопряженных к ним $(\tau(\Delta, f_1))^*$ $(\Delta \subseteq O, f_1 \in L_2^1$ Присоединяя к этой алгебре оператор $\mathbf{1}$ в качестве единичного элемента, вводя операцию инволюции, как переход к сопряженному оператору и пополняя ее относительно равномерной сходимости мы очевидно получим некоторую C^*- алгебру. Обозначим ее через $R(O)$.

Установим, какими из свойств, фигурирующих в определении ТП в терминах алгебр ограниченных операторов, обладает система

C^*- алгебр $R(O)$/ O пробегает всевозможные ограниченные области из R^4 /.

Пусть O_1 и O_2 две произвольные ограниченные област из R^4 причем такие, что $O_1 \subset O_2$. Понятно, что тогда и $O_1^c \subset O_2^c$ и, как следствие, очевидно, $R(O_1) \subset R(O_2)$ также. Т.е. имеет место свойство называемое изотонией.

Также просто устанавливается свойство ковариантности алгебр $R(O)$. Действительно, благодаря перестановочности операторов $\check{T}^n$ и $\check{\mathcal{U}}^n(a,\Lambda)$/см. § 3-3/, легко находим, что

$$\check{\mathcal{U}}(a,\Lambda)\, z(\Delta,f_1)\,\check{\mathcal{U}}^{-1}(a,\Lambda) = z(\Lambda^{-1}(O-a), f_{1,(a,\Lambda)})$$

Отсюда нетрудно сделать вывод о том, что

$$\check{\mathcal{U}}(a,\Lambda)\, R(O)\,\check{\mathcal{U}}^{-1}(a,\Lambda) = R(\Lambda^{-1}(O-a)),$$

где $\Lambda^{-1}(O-a)$- множество, полученное из O поточечным преобразованием Пуанкаре $(a,\Lambda)^{-1}$.

Перейдем к рассмотрению свойства, отвечающего аксиоме локальной коммутативности.

Пусть O_1 и O_2 два пространственно-подобно разделенные множества из R^4 . Этот факт мы будем обозначать так: $O_1 \sim O_2$. Покажем, что в этом случае $O_1^c \sim O_2^c$ также. Предположим противное, т.е. что существуют хотя бы две точки $x_1 \in O_1^c$ и $x_2 \in O_2^c$ такие, что прямая проходящая через них времениподобна или изотропна. Понятно, что соотношения $x_1 \in O_1$ и $x_2 \in O_2$ выполняться одновременно не могут так как $O_1 \sim O_2$. С другой стороны прямая проходящая через точки x_1 и x_2

должна пересекать как область O_1 так и область O_2, что следует из определения причинной оболочки множества. Но это, понятно, приводит к противоречию с условием $O_1 \sim O_2$.

Убедимся, что

$$[z(\Delta_1, f_1), z(\Delta_2, h_1)] = 0 \quad (\Delta_1 \in O_1^c, \Delta_2 \in O_2^c, f_1, h_1 \in L_2^1),$$

если $O_1 \sim O_2$. Действительно, для любой функциии $g_{n-2} \in L_2^{n-2}(sp, c)$ имеем

$$z(\Delta_1, f_1) z(\Delta_2, h_1) g_{n-2} = \check{T}^n(\chi_{\Delta_1} f_1 \otimes (\check{T}^{n-1}(\chi_{\Delta_2} h_1 \otimes g_{n-2}))$$

$$= \check{T}^n (1 \otimes \check{T}^{n-1})(\chi_{\Delta_1} f_1 \otimes \chi_{\Delta_2} h_1 \otimes g_{n-2}) =$$

$$= \check{T}^n(\chi_{\Delta_1} f_1 \otimes \chi_{\Delta_2} h_1 \otimes g_{n-2}),$$

где было использовано соотношение $\check{T}^n < 1 \otimes \check{T}^{n-1}$, установленное в § 3-3. Отсюда, ввиду того, что $\Delta_1 \subseteq O_1^c$, $\Delta_2 \subseteq O_2^c$ $(O_1 \sim O_2)$ и благодаря очевидному соотношению: $\check{T}^n < P_c^n$ /см. определение оператора $\check{T}^n$ / мы заключаем, что $[z(\Delta_1, f_1), z(\Delta_2, h_1)] = 0$, если $\Delta_1 \subseteq O_1^c$, $\Delta_2 \subseteq O_2^c$ и $O_1 \sim O_2$. Таким образом, мы фактически показали, что подалгебры алгебр $R(O)$, натянутые на л.о. операторов $z(\Delta, f_1)$ коммутируют между собою, если $O_1 \sim O_2$. Аналогичное утверждение справедливо и для эрмитово сопряженных подалгебр.

Для выполнения аксиомы локальной коммутативности в ТП в терминах C^*- алгебр требуется, чтобы соответствующие алгебры

$R(O)$ обладали свойством: $[R(O_1), R(O_2)] = 0$, если $O_1 \sim O_2$. В рассматриваемом здесь случае это свойство выполняется лишь частично, как было установлено выше. Соответствующий нашему случаю вариант аксиомы локальной коммутативности мы называем ослабленной аксиомой локальной коммутативности.

Так как мы имеем дело только со случаем эрмитового скалярного поля, то никаких правил суперотбора мы не вводили, поэтому и связанных с этими правилами свойств здесь не устанавливаем.

Пусть O произвольная, вообще неограниченная ,область из R^4. И пусть $(O_j)_{j=1}^{\infty}$ некоторая система ограниченных областей из R^4, покрывающих все O, т.е. $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ Тогда нетрудно убедиться, что для рассматриваемых здесь алгебр имеет место соотношение:

$$R(O) \equiv R\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} R(O_j)$$

не зависящее от выбора покрытия области O. Это свойство естественно назвать свойством счетной аддитивности алгебр $R(O)$.

Установим, наконец, свойство, отражающее принцип примитивно причинности в ТП. Покажем, что $R(O_2) \subset R(O_1)$, если множество O_2 принадлежит причинной тени множества O_1. Напомним, что причинная тень области O_1 состоит из тех точек $x \in R^4$, для которых всякий времениподобный или изотропный луч, проходящий через x и направленный в прошлое, пересекает O_1. Понятно, что если O_2 принадлежи причинной тени области O_1, то обязательно и $O_2^c \subset O_1^c$, откуда и следует справедливость записанного выше соотношения.

Таким образом, система алгебр $R(O)$ определяет некоторый пример ТП в терминах C^*-алгебр с ослабленной аксиомой локальной коммутативности.

ГЛАВА 4

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ОПЕРАТОРОВ

В математическом аппарате существующей ТП довольно часто встречаются ряды, элементами которых являются так называемые нормальные произведения операторов рождения и уничтожения свободного поля. Примером может служить ряд, определяющий матрицу рассеяния в подходе, основанном на теории возмущений. Такие ряды рассматривают, обычно, формально, не заботясь о их сходимости. Понятно, что этот факт является недостатком теории. Поэтому задача о нахождении условий, при которых указанные ряды сходятся в каком-либо смысле, представляет определенный интерес. Операторы, к которым сходятся такие ряды, называются представимыми в нормальной форме.

Обобщение представления Фока, данное в главе I, позволяет обобщить и задачу о нормальной форме операторов. При этом, в качестве аналогов операторов рождения и уничтожения берутся операторы $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ /см. § I - 2/. Задача о нормальной форме операторов в такой общей постановке является еще не решенной. В § 4 - I мы рассматриваем наиболее простой случай этой общей задачи, абстрагируясь почти от всех аксиом ТП.

В § 4 - 2 решается задача о представимости операторов в нормальной форме относительно обычных операторов рождения и уничтожения, действующих, однако, в более широком, чем фоковское, пространстве.

Эти результаты опубликованы в [35].

§ 4-I. Простейший вариант задачи о нормальной форме операторов

Пусть $\mathcal{H}$ - произвольное сепарабельное пространство Гильберта с инволюцией.

Напомним, что инволюцией называется определенное всюду в $\mathcal{H}$ отображение: $u \to \overleftarrow{u}$ $(u, \overleftarrow{u} \in \mathcal{H})$, удовлетворяющее условиям: $\overleftarrow{\overleftarrow{u}} = u$; $\overleftarrow{(\lambda u + \mu v)} = \bar{\lambda} \overleftarrow{u} + \bar{\mu} \overleftarrow{v}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$, $\overline{(u, v)} = (\overleftarrow{u}, \overleftarrow{v})$ $(u, v \in \mathcal{H})$.

Определим пространство

$$H = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \qquad /4.1/$$

где

$$H_n = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad /4.2/$$

есть n-я тензорная степень пространства $\mathcal{H}$, а $H_0 = \mathbb{C}$.

Обозначим через F множество всех финитных последовательностей $u = (u_n;\ u_n \in H_n)_{n=0}^{\infty}$ в H. Определим на F для каждого $v_n \in H_n$ $(n=0,1,\dots)$ оператор $A_+(v_n)$:

$$A_+(v_n)u = A_+(v_n)(u_0, u_1, u_2, \dots) = \qquad /4.3/$$

$$= (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, v_n \cdot u_0, v_n \otimes u_1, v_n \otimes u_2, \dots).$$

Сужение на F сопряженного к $A_+(\overleftarrow{v}_n)$ оператора обозначим через $A_-(v_n)$, где вектор $\overleftarrow{v}_n$ получен из v_n инволюцией, индуцированной в H_n отображением $v_1 \to \overleftarrow{v}_1$.

Отметим, что каждый оператор $A_+(v_n)$ $(n=2,3,\dots)$ является сильным пределом ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_+(v_1^{j_1}) \dots A_+(v_1^{j_n}) \qquad (v_1^{j_1}, \dots, v_1^{j_n} \in H_1)$$

где $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_1^{j_1} \otimes \dots \otimes v_1^{j_n} = v_n \in H_n$. Аналогичное утверждение справедливо и для оператора $A_-(v_n)$.

Очевидно, что $A_+(v_n)F \subset F$ и $A_-(v_n)F \subset F$. Понятно также, что

$$A_+(v_n)H_k \to H_{k+n}\,; \quad A_-(v_n)H_k \to H_{k-n}, \qquad /4.4/$$

причем

$$A_-(v_n)H_k = 0 \quad (k < n). \qquad /4.5/$$

<u>Определение 4.I.</u> Произведение операторов $A_+(V_n)$ и $A_-(V_m)$ $(n,m=0,1,\ldots)$, имеющее вид:

$$A_+(V_n)\,A_-(V_m) \qquad /4.6/$$

назовем нормальным.

Обозначим через R_{nm} линейную оболочку операторов вида /4.6/ при фиксированных числах n и m. Назовем последовательность операторов из R_{nm} сходящейся, если она сильно сходится на произвольном /своем для каждой последовательности/ плотном в H подмножестве из F. Пополнение R_{nm} относительно этой сходимости обозначим через $\overline{R}_{nm}$. Операторы из $\overline{R}_{nm}$ будем обозначать символами A^{nm}_{+-}, $B^{nm}_{+-}, \ldots$

<u>Определение 4-2.</u> Оператор A, действующий в пространстве H /4.I/ и имеющий область определения $\mathcal{D}(A)$, представи́м операторами $A_+(V_n)$ и $A_-(V_m)$ в нормальной форме, если существует двойной ряд вида

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} A^{nm}_{+-} \qquad \left(A^{nm}_{+-}\in\overline{R}_{nm}\right) \qquad /4.7/$$

<u>сильно</u> сходящийся к A на некотором плотном в H множестве векторов $N(A)\subset\mathcal{D}(A)\cap F$. Причем, $N(A)$ должно обладать свойством: замыкание оператора A совпадает с замыканием сужения A на $N(A)$.

Задача состоит в нахождении класса операторов, действующих в H и представимых в нормальной форме.

Как это ясно из дальнейшего в рассматриваемом случае, каждый ограниченный оператор представим в нормальной форме.

Пусть A некоторый неограниченный оператор. Решая вопрос о представимости его в нормальной форме, будем предполагать выполнеными следующие <u>исходные ограничения</u> на этот оператор.

а/ Оператор A является замкнутым и симметрическим.

б/ Операторная матрица $\hat{A} = \{A_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ $(A_{nm} = P_n A P_m$; P_n , P_m - проекторы в H на H_n, $H_m)$ является матричным представлением оператора A в H.

в/ Для оператора A существует базис обычного матричного представления $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ такой, что каждый его элемент e_j ; принадлежит одному из подпространств H_m $(m=0,1,\ldots)$

Напомним, что каждый замкнутый симметрический оператор A допускает матричное представление [33]. Т.е. в пространстве H существует ортонормированный базис $(e_j)_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ такой, что замыкание сужения A на $л.о.(e_j)_{j=0}^{\infty}$ совпадает с A.

Понятно, что множество всех элементов базиса $(e_j)_{j=0}^{\infty}$, попавших в H_m $(m=0,1,\ldots)$ образует базис матричного представления каждого оператора A_{nm} $(n=0,1,\ldots)$. Каждый элемент $e_j \in (e_j)_{j=0}^{\infty}$ мы снабжаем в дальнейшем дополнительным индексом, указывающим подпространство, в которое входит этот элемент: e_j^m. Обозначим, кроме того, $A_{nm} e_j^m = \ell_j^{n,m}$.

г/ Наконец требуется, чтобы при каждом $m = 1,2,\ldots$ из множества $\mathcal{D}(A) \cap H_m$ можно было выделить подмножество $N_m(A)$, обладающее свойствами: $N_m(A)$ плотно в H_m и из того, что $u_m \in N_m(A)$ следует, что $u_m \in л.о.\{(\mathcal{D}(A)) \cap H_k) \otimes H_{m-k}\}$ при каждом $k < m$. Кроме того предполагается, что замыкание сужения A на $F \cap \sum_{m=0}^{\infty} N_m(A)$ совпадает с A.

Нетрудно сообразить, что любой ограниченный оператор удовлетворяет все исходные условия а/ - г/. Нашей целью является доказательство того, что всякий, даже неограниченный оператор, удовлетворяющий условия а/ - г/, представим в нормальной форме. В качестве первого шага установим, что справедлива следующая

Лемма 4-I. Ряд операторов

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_+(\ell_j^{n,m}) A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,m}) \quad (n,m = 0,1,\ldots) \qquad /4.8/$$

сильно сходится к некоторому оператору

$$A_{+-}^{nm}(\ell^{n,m}, \overleftarrow{e}^{\,m}) \in \bar{R}_{nm} \quad \left(\ell^{n,m} \equiv (\ell_j^{n,m})_{j=0}^{\infty};\ \overleftarrow{e}^{\,m} \equiv (\overleftarrow{e}_j^{\,m})_{j=0}^{\infty}\right)$$

Этот оператор равен нулю на H_s $(s < m)$, совпадает с A_{nm} на H_m и равен $A_{nm} \otimes 1_{kk}$ на H_{m+k} / 1_{kk} - единичный оператор в H_k /.

Доказательство. Сходимость ряда /4.8/ на H_s $(s<m)$ к нулю следует из /4.5/.

Далее, ввиду /4.3/, $A_+(e_i^m)\Omega = e_i^m$, где через Ω мы обозначили $(1,0,0,\dots) = e_0^0 \in H$. Поэтому

$$A_-(\overleftarrow{e}_j^m) A_+(e_i^m)\Omega =$$

$$= (e_j^m, e_i^m) e_0^0 = \begin{cases} \Omega, & j = i \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

И, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_+(\ell_j^{n,m}) A_-(\overleftarrow{e}_j^m) A_+(e_i^m)\Omega =$$

$$= \ell_i^{n,m} = A_{nm} e_i^m$$

т.е. на H_m ряд /4.8/ сходится к A_{nm}.

Наконец, снова таки ввиду /4.3/, очевидно, что на каждом векторе $e_i^m \otimes u_k \in H_{m+k}$ ряд /4.8/ сходится к вектору $\ell_i^{n,m} \otimes u_k$. Отсюда и следует справедливость последнего утверждения леммы. ∎

Основным результатом данного параграфа является

<u>Теорема 4-I.</u> Произвольный неограниченный оператор A, действующий в пространстве H /4.I/ и удовлетворяющий все исходные ограничения а/ – г/ представим операторами $A_+(v_n)$ и $A_-(v_m)$ $(v_n \in H_n,\ v_m \in H_m;\ n,m = 0,1,\dots)$ в нормальной форме:

$$A = \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{+-}^{nm}, \qquad /4.9/$$

где

$$B^{nm}_{+-} = A^{nm}_{+-}\,(\ell^{n,m}, e^{m}) -$$

$$- A^{nm}_{+-}\,(\ell^{n-1,m-1} \otimes \alpha^{1}, \overleftarrow{\alpha}^{1} \otimes \overleftarrow{e}^{m}) \in \overline{R}_{nm} \qquad /4.10/$$

и где $A^{nm}_{+-}\,(\ell^{n,m}, e^{m})$ определен в лемме 4-I, а

$$A^{nm}_{+-}\,(\ell^{n-1,m-1} \otimes \alpha^{1}, \alpha^{1} \otimes \overleftarrow{e}^{m}) = \qquad /4.11/$$

$$= \sum_{j,z=0}^{\infty} A_{+}(\ell_j^{n-1,m-1}) A_{+}(\alpha_z^{1}) A_{-}(\overleftarrow{\alpha}_z^{1}) A_{-}(\overleftarrow{e}_j^{m-1}) \in \overline{R}_{n}$$

/ $(\alpha_z^1)_{z=0}^{\infty} \equiv \alpha^1$ - произвольный ортонормированный базис в H_1 /. Ряд /4.9/ сильно сходится к A на плотном в H множестве векторов $F \cap \sum_{m=0}^{\infty} N_m(A)$ /см. исходное ограничение г/ /.

<u>Доказательство.</u> Прежде всего убедимся, что выражение /4.11/ действительно определяет некоторый оператор из $\overline{R}_{nm}$. С этой целью покажем, что ряд

$$\sum_{z=0}^{\infty} A_{+}(\alpha_z^{1})\, A_{z}(\overleftarrow{\alpha}_z^{1}) \qquad /4.12/$$

сходится сильно к единичному оператору в подпространстве $H \ominus H_0$ /на H_0 ряд /4.12/ равен, очевидно нулю/. Благодаря /4.2/ множество векторов $\alpha_{z_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{z_j} \equiv$
$\equiv \alpha^{j}_{z_1,\dots,z_j} \in H_j \quad (z_1,\dots,z_j = 0,1,\dots)$

образует базис в H_j $(j=1,2,\ldots)$. Легко проверить, что

$$A_-(\overleftarrow{\alpha}_r^1)\,\alpha^j_{r_1,\ldots,r_j}=\begin{cases}\alpha^{j-1}_{r_2,\ldots,r_j}, & r_1=r\\ 0, & r_1\neq r.\end{cases}$$

Используя этот факт, убеждаемся, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_+(\alpha_r^1)\,A_-(\overleftarrow{\alpha}_r^1)\,\alpha^j_{r_1,\ldots,r_j}=$$

$$=\alpha^j_{r_1,\ldots,r_j}\qquad (j=1,2,\ldots)$$

Распространяя это равенство по линейности и непрерывности на все $H\ominus H_0$, заключаем, что ряд /4.12/ действительно сходится к единичному оператору на этом подпространстве.

Теперь нетрудно сообразить, что частичная сумма ряда /4.12/ $\sum_{r=0}^{M} A_+(\alpha_r^1)\,A_-(\overleftarrow{\alpha}_r^1)$ действует в каждом пространстве H_j $(j=1,2,\ldots)$ как проектор на подпространство з.л.о. $\{\alpha^j_{r_1,\ldots,r_j};\ r_1=0,1,\ldots,M;\ r_2,\ldots,r_j=0,1,\ldots$

Поэтому, с помощью простых рассуждений убеждаемся, что двойной ряд в /4.11/ сходится к тому же оператору из $\overline{R}_{nm}$, что и повторный ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_+(e_j^{n-1,m-1})\Big(\sum_{r=0}^{\infty} A_+(\alpha_r^1)\,A_-(\overleftarrow{\alpha}_r^1)\Big)A_-(\overleftarrow{e}_j^{m-}$$

Из вида этого ряда легко установить, что он равен нулю на всех H_s $(s\leq m-1)$ и сходится к оператору $A_{n-1,m-1}\otimes 1_{kk}$ на H_{m-1+k} при $k=1,2,\ldots$

Перейдем теперь к рассмотрению ряда /4.9/.

Покажем, что действие частичной суммы $B_N = \sum\limits_{n,m=0}^{N} B_{+-}^{nm}$ ряда /4.9/ из $H_{m'}$ в $H_{n'}$ $(n', m' \le N)$ совпадает с действием оператора $A_{n'm'}$. Благодаря лемме 4-I первое слагаемое оператора $B_{+-}^{n'm'}$ /4.10/ совпадает по своему действию из $H_{m'}$ в $H_{n'}$ с оператором $A_{n'm'}$. Поэтому нетрудно понять, что для справедливости сделанного утверждения достаточно показать, что разность

$$A_{+-}^{n'-1,m'-1}(\ell^{n'-1,m'-1}, e^{m'-1}) - A_{+-}^{n'm'}(\ell^{n'-1,m'-1} \otimes \overset{1}{\alpha}, \overset{\leftarrow 1}{\alpha} \otimes \overset{\leftarrow}{e}^{m'}$$

равна нулю на всех H_s при $s > m' = 0, 1, \ldots$. Но это действительно так, поскольку значение операторов, входящих в эту разность совпадают на всех H_s $(s > m')$, что следует из предыдущих рассмотрений.

Таким образом, для доказательства того, что $B_N \to A$ $(N \to \infty)$ на множестве векторов $N(A)$ осталось убедиться, что

$$\| P_{N+k} B_N u_{m'} \| \to 0, \; N \to \infty \quad (1 \le k \le N, \; k \le m' \le N),$$

для каждого вектора $u_{m'} \in N_{m'}(A)$.

Согласно исходному ограничению г/ каждый вектор $u_{m'} \in N_{m'}(A)$ может быть представлен в виде л.о. векторов типа $v_{m'-k} \otimes v_k$ $(v_{m'-k} \in \mathcal{D}(A) \cap H_{m'-k}, v_k \in H_k$

Поэтому, нетрудно подсчитать, что норма

$$\| P_{N+k} B_N u_{m'} \| = \| (A_{N,m'-k} \otimes \mathbb{1}_{kk}) u_{m'} \|$$

оценивается конечной суммой величин типа:

$$\| A_{N,m'-k} V_{m'-k} \| \cdot \| V_k \| .$$

Ввиду исходного ограничения б/, $\| A_{N,m'-k} V_{m'-k} \| \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно $B_N \to A$ $(N \to \infty)$. Теорема доказана. ■

§ 4-2. Задача о нормальной форме операторов в случае некоторого обобщения обычных операторов рождения и уничтожения

Здесь мы изучим вопрос о нормальной форме операторов в том же пространстве H /4.I/, что и в § 4 - I, однако исходить мы будем из иных операторов $A_+(V_n)$ и $A_-(V_n)$ x/.

При этом мы существенно будем пользоваться методикой изучения данного вопроса, имеющейся в [34] .

---

x/ Мы сохраняем в этом параграфе те же обозначения для сходственных величин, что и в § 4 - I.

Операторы $A_+(V_n)$ и $A_-(V_n)$ $(V_n \in H_n)$ мы определяем следующим образом $(u \in F)$:

$$A_+(V_n)u = A_+(V_n)(u_0, u_1, \dots, u_k, \dots) = \qquad /4.13/$$

$$= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, \sqrt{\frac{n!}{0!}}\, V_n \otimes u_0, \sqrt{\frac{(n+1)!}{1!}}\, V_n \otimes u_1, \dots, \sqrt{\frac{(n+k)!}{k!}}\, V_n \otimes u_k, \dots$$

а $A_-(V_n)$ равен сужению на F оператора $(A_+(\overleftarrow{V_n}))^*$.

Операторы $A_+(V_1)$ и $A_-(V_1)$ $(V_1 \in H_1)$, как не трудно заметить, являются расширениями обычных операторов рождения и уничтожения. Действительно, если в пространстве H /4.I/ выделить подпространство $H_B = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} Ⓢ H_n$ /или $H_F = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} ⓐ H_n$ /, где значки Ⓢ /или ⓐ / указывают, что произведение в /4.2/ симметризованно /или антисимметризованно/, то сужения операторов $A_+(V_1)$ и $A_-(V_1)$ на H_B /или H_F / удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы рождения и уничтожения свободного бозе- /либо ферми-/ поля /см. [12, 34] /.

Понятно, что операторы $A_+(V_n)$ и $A_-(V_n)$ $(V_n \in H_n$ являются сильными пределами рядов, элементы которых составлены из произведений n операторов $A_+(V_1)$ и $A_-(V_1)$, соответственно.

Без изменения переносятся на настоящий случай свойства /4.4/ и /4.5/ определения 4-I и 4-2, определение класса операторов $\bar{R}_{nm}$ $(n, m = 0, 1, \dots)$, а также исходные ограничения, налагаемые на оператор A, относительно которого решается вопрос о представимости его в нормальной форме.

Итак, пусть в пространстве H /4.1/ задан оператор A, удовлетворяющий сформулированным в § 4-1 исходным ограничениям. Выясним представим ли он в нормальной форме через операторы $A_+(v_n)$ и $A_-(v_n)$ $(v_n \in H_n, n=0,1,\dots)$, определенные формулой /4.13/.

Прежде всего установим аналог леммы 4-1.

<u>Лемма 4-2.</u> Ряд операторов

$$\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+(\ell_j^{n,m})\, A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,m}) \qquad /4.14/$$

сильно сходится к некоторому оператору $\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} A_{+-}^{nm}(\ell^{n,m}, \overleftarrow{e}^{\,m}) \in \bar{R}_{nm}$. Этот оператор равен нулю на H_s $(s<m)$, совпадает с A_{nm} на H_m и равен $\sqrt{\frac{(n+k)!\,(m+k)!}{n!\,k!\,m!\,k!}}\ \times$ $\times\,(A_{nm} \otimes \mathbb{1}_{kk})$ на H_{m+k} $(k=1,2,\dots)$.

Доказывается эта лемма совершенно так же, как и лемма 4-1.

Благодаря этой лемме, а также исходным ограничениям, оператор A можно, очевидно представить в виде:

$$A = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+(\ell_j^{n,m})\, P_0\, A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,m}) \right) \qquad /4.15/$$

где P_0 - проектор в H на H_0.

Докажем теперь следующую лемму.

<u>Лемма 4-3.</u> Проектор P_0 представим в нормальной форме:

$$P_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} A_+(e_j^k) A_-(\overleftarrow{e}_j^k) \Big) \qquad /4.16/$$

где $(e_j^k)_{j=0}^{\infty}$ - элементы базиса матричного представления оператора A, попавшие в H_k.

Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_+(e_j^k) A_-(\overleftarrow{e}_j^k) \quad (k=0,1,\dots) \qquad /4.17/$$

равен нулю на $H_s \ (s<k)$ и сходится к $\frac{(k+r)!}{r!} \cdot \mathbb{1}_{k+r,k+r}$ на $H_{k+r} \ (r=0,1,\dots)$.

<u>Доказательство.</u> То, что ряд /4.17/ на $H_s \ (s<k)$ равен нулю есть следствие /4.5/.

Очевидно, также, что ряд /4.17/ сходится к $k! \cdot \mathbb{1}_{kk}$ на каждом векторе $e_j^k \in H_k$.

Легко убедиться, непосредственным подсчетом, учитывая /4.13/ и лемму 4-2, что на всех векторах вида $e_j^k \otimes u_r$ $(u_r \in H_r)$ ряд /4.17/ сходится к $\frac{(k+r)!}{r!} \cdot \mathbb{1}_{k+r,k+r}$.

Дальше пользуемся линейностью и непрерывностью. Таким образом, обозначая ряд /4.17/ через $\mathbb{1}_{+-}^{kk}(e^k, \overleftarrow{e}^k)$, мы можем записать:

$$\mathbb{1}^{kk}_{+-}(e^k, \overleftarrow{e}^k) H_{k+r} = \frac{(k+r)!}{r!} H_{k+r} \quad (r = 0, 1, \ldots) \qquad /4.18/$$

Пусть $u_m \in H_m \ (m \geq 1)$, тогда

$$P_0 u_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \mathbb{1}^{kk}_{+-}(e^k, \overleftarrow{e}^k) u_m =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{m!}{(m-k)!} u_m = 0$$

поскольку

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{m!}{(m-k)!} = (1-1)^m = 0 .$$

Если $m = 0$ и $u_0 \in H_0$, то

$$P_0 u_0 = \mathbb{1} u_0 = u_0 .$$

Используя введенное обозначение, нормальную форму оператора P_0 представим в виде:

$$P_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbb{1}^{kk}_{+-}(e^k, \overleftarrow{e}^k) \qquad /4.16/$$

Отметим, что вместо базиса $e^k = (e^k_j)_{j=0}^{\infty}$ $(k = 0, 1, \ldots$ можно было бы в этой лемме использовать любой другой базис. ■

Подставим нормальную форму оператора P_0 /4.16 / в ряд /4.15/ и формально преобразуем его в новый двойной ряд:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} B_{+-}^{nm} \qquad /4.19/$$

где введено обозначение:

$$B_{+-}^{nm} = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \Big(\frac{1}{\sqrt{(n-k)!\,(m-k)!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+ (e_j^{n-k,m-k}) \times$$

$$\times \frac{(-1)^k}{k!} \mathbb{1}_{+-}^{kk} (e^k, \overleftarrow{e}^k) A_- (\overleftarrow{e}_j^{m-k}) \Big) \qquad /4.20/$$

Исходя из лемм 4-2 и 4-3 заключаем, что выражение /4.20/ определяет некоторый оператор из $\bar{R}_{nm}$.

<u>Лемма 4-4.</u> Частичные суммы ряда /4.19/ вида

$$B_N = \sum_{n,m=0}^{N} B_{+-}^{nm} \quad (N = 0,1,\dots) \qquad /4.21/$$

в $\oplus \sum_{n=0}^{N} H_n$ совпадают с A .

<u>Доказательство.</u> Среди слагаемых, входящих в /4.21/ из H_m в H_n действуют только операторы $B_{+-}^{n-p,m-p}$ $(p = 0,1,\dots,\min(n,m) \; ; \; n,m = 0,1,\dots,N)$.

Сумму этих операторов

$$\sum_{p=0}^{\min(n,m)} B_{+-}^{n-p,m-p} , \qquad /4.22/$$

используя обозначение /4.20/ можно переписать в виде:

$$\sum_{q=0}^{\min(n,m)} \frac{1}{\sqrt{(n-q)!\,(m-q)!}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} A_+(e_j^{n-q,m-q}) \Big(\sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k}{k!} \times \qquad /4.23/$$

$$\times\, 1_{+-}^{kk}(e^k, \overleftarrow{e}^k) \Big) A_-(\overleftarrow{e}_j^{m-q}) \Big)$$

Слагаемое при $q=0$, $\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+(e_j^{n,m}) A_-(\overleftarrow{e}_j^{m})$, согласно лемме 4-2 на H_m совпадает с оператором A_{nm}. Любое другое слагаемое /по q / ряда /4.23/ на H_m равно нулю, ввиду того, что

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot 1_{+-}^{kk}(e^k, \overleftarrow{e}^k)\, u_q = P_0\, u_q = 0$$

$$(\, u_q = A_-(\, e_j^{m-q}\,)\, u_m \;,\; u_m \in H_m\,)$$

Таким образом

$$P_n\, B_N\, P_m = A_{nm} \quad (n, m \le N), \qquad /4.24/$$

где, напомним, P_n и P_m есть проекторы в H на H_n и H_m, соответственно.

Несмотря на то, что частичные суммы /4.21/ ряда /4.19/ совпадают с A в подпространстве $\oplus \sum_{n=0}^{N} H_n$ $(N=0,1,\dots)$ не очевидно, что ряд /4.19/ сильно сходится к A во всем H. Если бы это было так, то ряд /4.19/ являлся бы представлением A в нормальной форме.

Пусть $u_k \in \mathcal{D}(A) \cap H_k$, тогда, вообще, при $k \leq N$

$$P_{N+r} B_N u_k \neq 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

Очевидно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы

$$B_N u_k \to A u_k \quad (N \to \infty, \ k = 0, 1, \ldots) \qquad /4.25/$$

является условие

$$\left\| \sum_{r=1}^{k} P_{N+r} B_N u_k \right\| \to 0, \ N \to \infty \qquad /4.26/$$

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 4-2. Пусть оператор A с областью определения $\mathcal{D}(A)$ удовлетворяет всем исходным ограничениям а/-г/, сформулированным в § 4 - I. Тогда он представим в нормальной форме в том и только в том случае, когда

$$\sqrt{\frac{(T+s)!}{T!}} \, \| A_{Tq} u_q \| \to 0, \ T \to \infty, \qquad /4.27/$$

при всех $s = 0, 1, \ldots$ и для любого $u_q \in N_q(A)$, $q = 0, 1, \ldots$ В этом случае ряд /4.19/ на плотном в H множестве векторов $N(A) = F \cap \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} N_m(A) \right)$ сходится сильно к оператору A.

Доказательство. Заметим, что сходимость двойного ряда /4.19/ на $N(A)$ к A эквивалентна сходимости частичных сумм /4.2I/ к A , ввиду того, что $N(A)\subset F$. Поэтому, очевидно, что теорема будет доказана, если будет установлена эквивалентность условий /4.26/ и /4.27/.

При $s=0$ условие /4.27/ имеет вид:

$$\| A_{Tq}\, u_q \| \to 0,\ T\to\infty \quad (u_q\in N_q(A)) \qquad /4.28/$$

оно всегда выполняется, так как $A u_q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n A u_q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{nq}\, u_q \in H$.

<u>Достаточность.</u> Покажем, что из /4.27/ следует /4.26/. Так как слагаемые в /4.26/ ортогональны, то достаточно показать, что /4.27/ влечет сходимость к нулю каждого слагаемого в отдельности, т.е. что

$$\| P_{N+r}\, B_N\, u_k \| \to 0,\ N\to\infty \quad (r=1,2,\dots,k) \qquad /4.29/$$

для любого $u_k\in N_k(A)$ $(k=0,1,\dots)$.

Используя /4.2I/ и /4.20/ нетрудно установить, что

$$P_{N+r}\, B_N\, u_k = \sum_{p=0}^{k-r} B_{+-}^{N-p,\,k-r-p}\, u_k = \qquad /4.30/$$

$$= \sum_{p=0}^{k-r} \frac{1}{\sqrt{(N-p)!\,(k-r-p)!}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} A_+ (e_j^{N-p,\,k-r-p}) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \mathbb{1}_{kk}(e^k, \overleftarrow{e}^k)\, A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,k-r-p}) \Big) u_k$$

Здесь и в дальнейшем мы всегда берем $N \geqslant k$.

Согласно лемме 4-3 /соотношение 4.18/:

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \mathbb{1}_{kk}(e^k, e^k)\, u_{p+r} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(p+r)!}{(p+r-k)!}\, u_{p+r} = c(p)\, u_{p+r}, \qquad /4.31/$$

где введено обозначение $c(p) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(p+r)!}{(p+r-k)!}$

Учитывая, что $A_-(e_j^{k-r-p})\, u_k \in H_{r+p}$ и подставляя /4.31/ в /4.30/, получаем:

$$P_{N+r} B_N u_k = \sum_{p=0}^{k-r} \frac{c(p)}{(N-p)!\,(k-r-p)!} \sum_{j=0}^{\infty} A_+(\ell_j^{N-p,k-r-p}) \times A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,k-r-p})\, u_k .$$

Из леммы /4.2/ следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{(N-p)!\,(k-r-p)!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+(\ell_j^{N-p,k-r-p}) A_-(e_j^{k-r-p})\, u_k =$$

$$= \frac{1}{(k+p)!} \sqrt{\frac{(N-r)!\,k!}{(N-p)!\,(k-r-p)!}} \cdot \left(A_{N-p,k-r-p} \otimes \mathbb{1}_{r+p,r+p} \right) u_k$$

Поэтому

$$P_{N+r} B_N u_k = \sum_{p=0}^{k-r} \frac{c(p)}{(r+p)!} \sqrt{\frac{(N-r)!\; k!}{(N-p)!\,(k-r-p)!}} \times$$

$$\times \left(A_{N-p,\,k-r-p} \otimes \mathbb{1}_{r+p,\,r+p} \right) u_k \qquad /4.32/$$

Напомним, что согласно исходному ограничению г/ каждый вектор $u_k \in N_k(A)$ можно представить конечной линейной комбинацией векторов вида $v_{k-r-p} \otimes v_{r+p}$ $(v_{k-r-p} \in \mathcal{D}(A) \cap H_{k-r-p},\, v_{r+p} \in H_{r+p}$. Учитывая это, делаем вывод, что каждое слагаемое суммы /4.32/ есть конечная линейная комбинация векторов вида:

$$\alpha(p) \sqrt{\frac{(T+s)!}{T!}} \left(A_{Tq}\, v_q \right) \otimes v_{k-q}, \qquad /4.33/$$

где

$$\alpha(p) = \frac{c(p)}{(r+p)!} \sqrt{\frac{k!}{(k-r-p)!}}\;;\quad T = N-p;\; s = p-r;$$

$q = k-r-p$. Теперь очевидно, что если выполнено условие /4.27/, то каждая последовательность векторов вида /4.33/ сходится сильно к нулю при $N = T+q \to \infty$ и, следовательно, справедливо /4.29/, а также /4.26/.

<u>Необходимость.</u> Пусть теперь выполнено условие /4.26/ или ему эквивалентное /4.29/.

При $z = k$ мы имеем

$$P_{N+k} B_N u_k = B_{+-}^{N,0} u_k = \frac{1}{\sqrt{N!}} A_+ (\ell^{N,0}) u_k =$$

$$= \sqrt{\frac{(N+k)!}{N!\,k!}} \left(A_{N_0} \otimes \mathbf{1}_{kk}\right)(\Omega \otimes u_k) \quad \left(\ell^{N,0} = A_{N_0} \Omega\right).$$

Отсюда, ввиду справедливости /4.29/ заключаем, что

$$\sqrt{\frac{(T+s)!}{T!}} \, \| A_{N_0} \Omega \| = 0, \quad T \to \infty,$$

где $T = N$, а $s = k = 1, 2, \ldots; \quad q = 0$.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методом математической индукции.

Предположим, что условие /4.27/ выполнено для всех $q = 0, 1, \ldots, t-1$ / t - любое натуральное число/ и докажем, что тогда оно выполняется и для $q = t$.

Пусть $u_k \in N_k(A)$ и $k \geq t+1$. Тогда, согласно /4.2I/ имеем:

$$P_{N+k-t} B_N u_k = \sum_{p=0}^{t} B_{+-}^{N-p,\,t-p} u_k$$

Используя соотношения, аналогичные /4.30, 3I/, получаем:

$$P_{N+k-t} u_k = \sum_{p=0}^{t} \frac{c(p)}{\sqrt{(N-p)!\,(t-p)!}} \sum_{j=0}^{\infty} A_+ (\ell_j^{N-p,\,t-p})$$

$$\times A_-(\overleftarrow{e}^{t-p})u_k.$$

Понятно, что каждое слагаемое в этой сумме, кроме первого, может быть приведено к виду /4.33/ и, в силу индуктивного предположения, стремится к нулю, при $N \to \infty$. Поэтому, ввиду справедливости /4.30/

$$\frac{c(0)}{\sqrt{N!\,t!}} \sum_{j=1}^{\infty} A_+(\ell_j^{N,t}) A_-(\overleftarrow{e}_j^{\,t}) u_k =$$

$$= \frac{c(0)}{\sqrt{N!\,t!}} A_{+-}^{Nt} u_k = \frac{c(0)}{(k-t)!} \sqrt{\frac{(N+k-t)!\,k!}{N!\,t!}} \times$$

$$\times (A_{Nt} \otimes \mathbb{1}_{k-t,k-t}) u_k \to 0, \; N \to \infty.$$

Отсюда, подставляя вместо u_k вектор $v_t \otimes v_{k-t}$ $(v_t \in$ $\in \mathcal{D}(A) \cap H_t$ убеждаемся, что

$$\sqrt{\frac{(N+s)!}{N!}} \, \| A_{Nt} v_t \| \to 0, \; N \to \infty,$$

где $s = k - t = 1, 2, \ldots$. Теорема полностью доказана. ∎

При переходе к подпространству H_B /или H_F / можно убедиться, проводя аналогичные предыдущим рассуждения, что условия теоремы 4-2 остаются достаточными для приведения операторов к нормальной форме также и в этом случае. Однако проверить необходимость этих условий затруднительно.

Тем не менее удается построить семейство ограниченных операторов в H_B, для приведения которых к нормальной форме условия теоремы 4-2 и необходимы. Приведем пример такого оператора.

Для произвольного $v_1 \in H_1$ ($\|v_1\| = 1$, $\overleftarrow{v}_1 = v_1$) определим в H_B оператор A следующим образом:

$$P_n A u = P_n A (u_0, u_1, \ldots) = P_n A (u_0, 0, 0, \ldots) =$$

$$= \alpha_n \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_1}_{n} \cdot u_0 \in (H_B)_n \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где числа $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ таковы, что $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, для ограниченности A. Очевидно, что $A u_0 \in H_B$.

Нетрудно сообразить, что оператор A можно представить в виде:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n!}} A_+ (\overset{n}{\otimes} v_1) P_0,$$

где $\overset{n}{\otimes} v_1 = \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_1}_{n}$. Подставляя сюда нормальную форму оператора P_0 /см. лемму 4-3/ и перегруппируя полученное выражение в ряд аналогичный /4.19/ нетрудно убедиться, что элемен ты B_{+-}^{n0} $(n = 0, 1, \ldots)$ этого ряда имеют вид:

$$B_{+-}^{n0} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n!}} A_+ (\overset{n}{\otimes} v_1).$$

Подсчитывая, как и при доказательстве теоремы 4-2 значение нормы $\| P_{N+k} B_N u_k \|$ для случая, когда $u_k = \overset{k}{\otimes} v_1$ получаем, что

$$\| P_{N+k} B_N (\overset{k}{\otimes} v_1) \| = \frac{|\alpha_N|}{\sqrt{N!}} \cdot \sqrt{\frac{(N+k)!}{k!}} \| \overset{N+k}{\otimes} v_1 \| =$$

$$= |\alpha_N| \cdot \sqrt{\frac{(N+k)!}{N!\, k!}} \,.$$

Отсюда заключаем, что условие $|\alpha_N| \cdot \sqrt{\frac{(N+k)!}{N!}} \to 0,\ N \to \infty$ аналогичное /4.27/, действительно необходимо для представимости оператора A в нормальной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wightman A.S., Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values, Phys. Rev. 101, 860 (1956).

2. Тодоров И.Т., Аксиоматический подход в квантовой теории поля [Дубна] 64, I, 5 /1964/.

3. Стритер Р., Вайтман А.С., PCT, спин и статистика и все такое, М., "Наука", 1966.

4. Йост Р., Общая теория квантованных полей, М., "Мир", 1967.

5. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., "Наука", 1969.

6. Березанский Ю.М., Кошманенко В.Д., Аксиоматическая теория поля в терминах операторных якобиевых матриц, ДАН СССР, 189, 273 /1969/.

7. Березанский Ю.М., Кошманенко В.Д., Аксиоматическая теория поля в терминах операторных якобиевых матриц, Теоретическая и математическая физика /в печати/.

8. Ахиезер Н.И., Классическая проблема моментов, М., "Физматгиз", 1961.

9. Березанский Ю.М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., "Наукова думка", 1965.

10. Borchers H.J., On the Structure of the Algebra of Field Operators, Nuovo Cimento, 24, 214 (1962).

11. Владимиров В.С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., "Наука", 1964.

12. Greenberg O.W., Generalized Free Field and Models of Local Field Theory, Ann. Phys., 16, 158 (1961).

13. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., "ИЛ", 1963.

14. Haag R. On Quantum Field Theory, Dan. Mat. Fys. Medd., 29, N 29 (1955).

15. Hall D., Wightman A.S., A Theorem on Invariant Analytic Functions wight Applications to Relativistic Quantum Field Theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 31, N 5 (1967)

16. Greenberg O.W., Haag's Theorem and Clothed Operators, Phys. Rev., 115, 706 (1959).

17. Federbush P.G., Johnson K.A., TheUniqueness of the Two-Point Function, Phys. Rev., 120, 1926 (1960).

18. Jost R., Properties of Wightman Functions, [Caianiello] Academic Press, New York, 127 (1961).

19. Гачок В.П., Одно обобщение теоремы Хаага, УМЖ, 13, 22 /1961/.

20. Licht A.L., Toll J.C., Two-Point Function and Generalized Free Field, Nuovo cimento, 21, 346 (1961).

21. Robinson D.W., Support of a Free Field in Momentum Space, Helv. Phys. Acta 35, 403 (1962).

22. Greenberg O.W., Heisenberg Field which Vanish on Domains of momentum space, J. Math. Phys. 3, 859 (1962).

23. Greenberg O.W., Licht A.L., Quantum Field - Theory Model whose Truncated Vacuum Expactations Values Vanish beyond some Order, J. Math. Phys. 4, 613 (1963).

24. Васильев А.Н., Один признак обобщенного свободного поля, ЖЭТФ, 49, 78I /I965/.

25. Garczyn'ski W., On the Haag's Theorem, Karpacz 1A, 123 (1968).

26. Csikor F., Pocsik G., Generalization of a Theorem by Schroer and Jost, Commun. Math. Phys. 6, 226 (1967).

27. Кошманенко В.Д., Про аксіоматичні поля, еквівалентні узагальненому вільному полю, ДАН УРСР, № 4, 337 /I970/.

28. Reeh H., Schlieder S., Bemerkungen zur Unitaraquivalinz von Lorentzinvarianten Feldern, Nuovo cimento, 22, 1051 (1961).

29. Кошманенко В.Д. Ослабленная аксиома локальной коммутативности, УМЖ, 22, 236 /I970/.

30. Кошманенко В.Д. Послаблена умова локальної коммутативності і приклад теорії ермітового скалярного поля, ІУ наукова конференція молодих математиків України, Тези доповідей, К., "Наукова думка", 1968.

31. Кошманенко В.Д. Про функціональну структуру простору станів квантової теорії поля, У наукова конференція молодих математиків України, Тези доповідей, К., "Наукова думка", 1970.

32. Haag R., Kastler D., An Algebraic Approach to Quantum Field Theory, J.Math. Phys. 5, 848 /1964/.

33. Ахиезер Н.И.,Глазман И.М.,Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., "Наука", 1966.

34. Березин Ф.А., Метод вторичного квантования, М.,"Наука", 1965.

35. Кошманенко В.Д., О нормальной форме операторов, УМЖ, 21, 210 /1969/.

36. Оксак А.И., О нормальной форме операторов в пространстве Фока, ДАН СССР, 184, 803 /1969/.

37. Ulman A., Preprint, Leipzig, Theoret.- Phys.Inst., 5/64.