КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Лагно Виктор Иванович

УДК 519.46:517.9

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ ПУАНКАРЕ P(2,3) И СИММЕТРИЙНАЯ РЕДУКЦИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН УССР,
доктор физико-математических наук, профессор
ФУЩИЧ В.И.

КИЕВ - 1988

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Изучение многих физических процессов, имеющих существенно нелинейный характер, сводится чаще всего к исследованию дифференциальных уравнений (ДУ), которые не всегда поддаются решению традиционными методами математической физики /метод разделения переменных, метод конечных разностей и др./. В этих случаях эффективно применяются теоретико-групповые методы, основанные на использовании широкой симметрии ДУ.

Основы группового анализа ДУ заложены в конце прошлого века норвежским математиком Софусом Ли [83], первоначальной целью которого было создание теории интегрирования обыкновенных ДУ, аналогичной теории Абеля решения алгебраических уравнений. Им же было введено и изучено фундаментальное понятие группы, допускаемой данной системой ДУ. Теоремы Ли о соответствии между локальными группами и алгебрами Ли позволяют сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным.

Систематическое исследование глобального строения групп Ли впервые предприняли Э.Картан и Г.Вейль. Современное изложение теории групп Ли дано Л.С.Понтрягиным [41].

С.Ли применил свою теорию к конкретным уравнениям и нашел их явные решения. При решении волнового уравнения эту теорию использовали А.Бэклунд, А.Пуанкаре, Э.Уиттекер. Важные идеи по отысканию точных решений ДУ высказал Г.Биркгоф. Методом обратной задачи теории рассеяния исследованы многочисленные одно- и двумерные волновые уравнения, построены их солитонные решения [24,34], но на многомерные ДУ метод обобщения не получил.

К настоящему времени построены и подробно изучены группы симметрии, допускаемые многими основными уравнениями теоретической и математической физики. В частности, исследована симметрия уравнений Максвелла [57] и Дирака [49], а также описаны гиперболические нелинейные ДУ в частных производных второго порядка, которые являются инвариантными относительно групп $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{G}(n)$ [50]. Изучению симметрийных свойств и построению точных решений нелинейных многомерных ДУ в частных производных /уравнения Монжа-Ампера, Лиувилля, Даламбера, эйконала/, а также некоторых систем ДУ для спинорного и векторного полей /системы Дирака, Навье-Стокса/ посвящены работы В.И.Фущича и его учеников [51,52,55,59,61,78].

Современному изложению группового анализа ДУ и его развитию за последние 25 лет посвящена монография Л.В.Овсянникова [39]. В ней, в частности, изложена, построенная Л.В.Овсянниковым, теория инвариантных и частично-инвариантных решений ДУ, с помощью которой найдены новые частные решения уравнений газовой динамики.

Конструктивная реализация идей и методов С.Ли для отыскания точных решений ДУ требует решения следующей проблемы: нахождение всех неэквивалентных подгрупп группы симметрии, допускаемой ДУ. На важность этой задачи неоднократно указывал Л.В.Овсянников [39].

Метод разделения переменных, который является одним из эффективных методов нахождения точных решений линейных ДУ, связан с подгрупповой структурой групп симметрии ДУ. Доказана следующая теорема [14]: каждому разбиению группы Лоренца на подгруппы, обладающие инвариантными операторами, соответствует одна координатная система, в которой уравнение Лапласа допускает полное разделение переменных. Позже этот подход был развит и применен к решению многих уравнений теоретической и математической физики [37,56,61].

Знание подгрупповой структуры группы Ли позволяет также решать задачу о редукции представлений группы по подгруппам. В работе [38] проведена редукция неприводимых унитарных представлений обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$ по ее подгруппам $P(1,n-k)$. Здесь же найден явный вид унитарного оператора, который связывает канонический базис представления с $P(1,n-k)$-базисом. Редукция неприводимых представлений алгебры $AP(1,4)$ по ее подалгебре Галилея $A\tilde{G}(3)$ рассмотрена в статье [77].

Как следует из сказанного, при решении ряда задач современной математики и физики важное значение имеет вопрос об описании непрерывных подгрупп групп Ли с точностью до определенной сопряженности, который сводится к решению задачи описания относительно сопряженности классов подалгебр алгебры Ли, соответствующей группы Ли.

На этом пути получен ряд важных результатов. Решена задача описания редуктивных подалгебр комплексных алгебр Ли и простых подалгебр простых классических вещественных алгебр Ли [22,23,28,36]. В работах М.С.Тауфика и Б.П.Комракова изучены полупростые и максимальные неприводимые подалгебры для некоторых классических вещественных алгебр Ли [29,42-44]. Исследованием максимальных разрешимых подалгебр классических вещественных алгебр Ли занимались Г.Цассенхауз, М.Перроуд и другие [85,96]. Найдены в явном виде все максимальные разрешимые подалгебры алгебры $ASU(p,q)$ [84], а также все максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебр $AO(p,q)$ и $AU(p,q)$ [2]. Описаны подалгебры некоторых конечных алгебр Ли малой размерности, а именно, $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [98], $AE(3)$, $AP(1,3)$ [66,67,82].

Систематическое изучение подалгебр конечномерной вещественной алгебры Ли L с нетривиальным разрешимым идеалом N было начато в статьях Й.Патеры, П.Винтерница, Г.Цассенхауза [86,87,93]. Предложенный там метод был затем развит и обобщен в работах В.И.Фущича, Л.Ф.Баранника и А.Ф.Баранника [2,10,54, 68]. Он состоит в следующем.

I. Находим представители F_i всех несопряженных классов подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$.

2. Для каждой подалгебры F_i находим все несопряженные инвариантные подпространства пространства N.

3. Вычисляем несопряженные подалгебры алгебры L, образующие которых имеют следующий вид: $P_k + \sum_m \alpha_m X_m$, X_j; где $P_k \in F_i$, X_m и $X_j \in N$, $\alpha_m \in R$.

Сопряженность определяется заданной группой автоморфизмов. В дальнейшем этот метод будем обозначать как ПВЦ-метод.

С помощью ПВЦ-метода проклассифицированы подалгебры следующих алгебр: $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [53,54]; $AP(1,3)$ [86]; $A\tilde{P}(1,2)$ [9I]; $A\tilde{P}(1,3)$ [87]; $AE(3)$ [69]; $AO(1,4)$[88]; $AO(2,3)$, $AOpt(1,2)$ [93]; $AOpt(1,3)$[7I]; $ASch(2)$, $A\hat{S}ch(2)$ [70]; $AP(1,4)$ [45-47,76]; $AE(4)$ [I]; $AE(5)$ [53,54]; $A\hat{P}(1,4)$ [6,68]; $AG(4)$ [8]; $ASch(3)$, $A\hat{S}ch(3)$ [I0]. Кроме того, с точностью до сопряженности найдены подалгебры всех действительных трех- и четырехмерных алгебр Ли [92].

Отметим также ряд общих результатов, полученных для некоторых действительных алгебр Ли. Явно выписаны одномерные и максимальные абелевы подалгебры алгебр $ASch(n)$, $A\hat{S}ch(n)$[I0]; максимальные приводимые и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\hat{O}(1,n)$[6,68]. Найдены максимальные абелевы подалгебры алгебр $AP(1,n)$, $AE(n)$ и $AG(n)$ [4,8,53,54], а также одномерные подалгебры алгебр $AO(p,1)$ и $AO(p,2)$ [2].

Не менее важной задачей теории групп и алгебр Ли, особенно в физических применениях, является задача определения инвариантных операторов групп и подгрупп (алгебр и подалгебр) Ли /функций генераторов, коммутирующих со всеми генераторами, которые порождают данную группу (алгебру) Ли/.

Инвариантные операторы (в частности, операторы Казимира) дают возможность классифицировать неприводимые представления данной группы (алгебры) Ли, а также расщеплять приводимые представления на неприводимые [16]. Они играют важную роль в теории специальных функций, поскольку последняя базируется на теории представлений групп, и различные специальные функции являются собственными функциями некоторых множеств инвариантных операторов [13].

Хорошо известны операторы Казимира для однородных классических групп [11], обобщенных групп Пуанкаре $P(p,q)$, Галилея $G(n)$, расширенной группы Галилея $\tilde{G}(n)$ и некоторых других неоднородных классических групп Ли, задаваемых стандартными представлениями [3,9,18-20,97]. Найдены также спектры операторов Казимира группы Пуанкаре $P(1,4)$ [48] и группы $ISL(6,C)$ [26]. Решена задача по отысканию инвариантных операторов подалгебр алгебр $AP(1,3)$ [89], $A\tilde{P}(1,2)$ [95], $AO(2,3)$ и $AO(1,4)$ [93], а также всех действительных алгебр Ли размерности не большей пяти и шестимерных нильпотентных алгебр Ли [90].

Интерес к изучению обобщенной группы Пуанкаре $P(2,3)$ вызван тем, что она имеет прямое отношение к ряду задач математической и теоретической физики. В работах В.Г.Кадышевского и его сотрудников [25,73,74] предложено использовать группу $P(2,3)$ и ее представления для расширения S-матрицы за массовую оболочку. Эта же группа представляет интерес в связи с задачей описания частиц с внутренней структурой [48,65,75]. Кроме того, группа $P(2,3)$ является группой симметрии некоторых уравнений квантовой механики [58].

В настоящей диссертации изучена подгрупповая структура группы Пуанкаре $P(2,3)$. Целью работы является:

- классификация всех связных подгрупп группы $P(2,3)$, или, что то же самое, представителей несопряженных классов подалгебр алгебры $AP(2,3)$;

- нахождение инвариантов неэквивалентных подалгебр алгебры $AP(2,2)$ и подалгебр коразмерности один алгебры $AP(2,3)$;

- применение полученных результатов для редукции и нахождения точных решений волновых уравнений.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка основной использованной литературы и двух приложений. Изложим вкратце содержание диссертации.

Первая глава. В §I получены некоторые общие результаты о связных подгруппах группы $P(2,n)$. В частности, описаны однопараметрические и максимальные разрешимые подгруппы этой группы. Во втором параграфе проведена классификация подалгебр алгебры $AP(2,2)$, а в третьем - подалгебр алгебры $AP(2,3)$.

Вторая глава. В первом параграфе найдены инварианты однопараметрических подгрупп группы $P(2,n)$. Вопросу классификации подалгебр алгебры $AP(2,2)$ и подалгебр коразмерности один алгебры $AP(2,3)$ относительно специального отношения эквивалентности посвящены второй и третий параграфы. В §4 построены инварианты найденных подалгебр. В последнем, пятом параграфе, получены инвариантные операторы всех несопряженных подалгебр алгебры $AP(2,2)$.

Третья глава. В §I проведена симметрийная редукция ультрагиперболического уравнения Даламбера. Во втором параграфе, на основании результатов редукции, получены точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Вопросам разделения переменных для уравнения Гельмгольца в пространствах Минковского M(2,2) и M(2,3) посвящен §3. Точные решения в виде неявных функций для одной системы ДУ найдены в четвертом параграфе.

В заключении дана краткая характеристика основных результатов исследования, а в приложениях приведены расщепляемые и нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,3)$.

Основные результаты диссертации докладывались на 19 Всесоюзной алгебраической конференции (г.Львов, 1987 г.), на научном семинаре отдела прикладных исследований Института математики АН УССР (г.Киев, 1985-1988 г.), на итоговых научных конференциях преподавателей Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (1987-1988 г.).

По теме диссертации опубликовано пять печатных работ [5, 30-33].

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР, доктору физико-математических наук, профессору В.И.Фущичу за постоянное внимание к работе и постановку задач, а также кандидату физико-математических наук, доценту Л.Ф.Баранніку за полезное обсуждение результатов и научное сотрудничество.

ГЛАВА I

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ ПУАНКАРЕ P(2,3)

В первой главе найдены в явном виде однопараметрические и максимальные разрешимые подгруппы обобщенной группы Пуанкаре $P(2,n)$. Эти общие результаты значительно упрощают задачу нахождения всех непрерывных замкнутых подгрупп группы P(2,3). Описаны все связные подгруппы групп P(2,2), P(2,3). Для исследования подгрупповой структуры применяется ПВЦ-метод.

§ I. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре $P(2,n)$

Пусть R - поле вещественных чисел; $\langle Y_1, \ldots, Y_s \rangle$ - векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1, \ldots, Y_s$; R^m - m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U = U_{2,n}$ - $2+n$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 - \ldots - x_{n+2} y_{n+2}\ ; \qquad \text{(I.I.I)}$$

$O(2,n)$ - группа линейных преобразований U, сохраняющих (X,X) для каждого $X \in U$.

Будем предполагать, что $O(2,n)$ реализована в виде группы вещественных матриц порядка $2+n$.

Определение I.I.I. Группой Пуанкаре $P(2,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{Vmatrix} \Delta & y \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где $\Delta \in O(2,n)$, $y \in R^{n+2}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы G. Используя определение алгебры Ли [4I], получаем, что $AO(2,n)$ состоит из матриц

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ -\alpha & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_{12} & \dots & \delta_{1,n-1} & \delta_{1,n} \\ \beta_2 & \gamma_2 & -\delta_{12} & 0 & \dots & \delta_{2,n-1} & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & -\delta_{1,n-1} & -\delta_{2,n-1} & \dots & 0 & \delta_{n-1,n} \\ \beta_n & \gamma_n & -\delta_{1,n} & -\delta_{2,n} & \dots & -\delta_{n-1,n} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (I.I.2)$$

Пусть E_{ik} - матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах ($i,k = 1,2,\dots,n+3$). Нетрудно установить, что базис алгебры $AP(2,n)$ образуют матрицы $J_{12} = E_{12} - E_{21}$;

$J_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$ ($a < b$; $a, b = 3,\dots, n+2$);

$J_{ia} = -E_{ia} - E_{ai}$ ($i = 1,2$; $a = 3,\dots, n+2$);

$P_j = E_{j,n+3}$ ($j = 1,2,\dots, n+2$).

Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma} \quad ;$$

$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta ; \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta} \quad ; \qquad (\text{I.I.3})$$

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \; ; \; g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \ldots = -g_{n+2,n+2} = 1 \; ;$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 \, , \quad \alpha \neq \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру АО$(2,n)$, а генераторы трансляций P_α – коммутативный идеал N, причем АР$(2,n) = N \oplus$ АО$(2,n)$. Легко увидеть, что $[X, Y] = X \cdot Y$, для любых $X \in$ АО$(2,n)$, $Y \in N$. Отождествим N и $U_{2,n}$, сопоставив P_i $n+2$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и нулями на остальных местах ($i = 1, 2, \ldots, n+2$).

Пусть C – такая матрица порядка $n+3$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to C X C^{-1}$ является автоморфизмом АР$(2,n)$. Если $C \in G$, где G – подгруппа группы Р$(2,n)$, то φ_C называется G-автоморфизмом.

Определение I.I.2. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры АР$(2,n)$ будут называться Р$(2,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(L_1) = L_2$ для некоторого Р$(2,n)$-автоморфизма φ_C алгебры АР$(2,n)$.

Пусть W – невырожденное подпространство пространства U. Если F – подалгебра АО(W), то тождественное отображение F является представлением F в АО(W) (О(W) – группа изометрий пространства W). Это представление будем называть тривиальным.

Определение I.I.3. Подалгебра $F \subset$ АО(W) называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Если тривиальное представление F вполне приводимо, то F называется вполне приводимой.

Здесь W - произвольное подпространство пространства U.

Определение I.I.4. Нормализатором W в AO(2, n) называется множество

$$Nor\, W = \{ X \in AO(2,n) \mid (\forall Y \in W)(X \cdot Y \in W\} .$$

Лемма I.I.I. Нормализатор $\langle P_1 + P_{n+2} \rangle$ в AO(2, n) совпадает с алгеброй $\tilde{AP}(1, n-1) = \langle G_2, \ldots, G_{n+1} \rangle \oplus (AO(1, n-1) \oplus \langle J_{1,n+2} \rangle)$, где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ ($a = 2, \ldots, n+1$), $AO(1, n-1) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, \ldots, n+1$. Базисные элементы алгебры $\tilde{AP}(1, n-1)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[G_a, J_{1,n+2}] = G_a \quad ; [J_{ab}, J_{1,n+2}] = [G_a, G_b] = 0 ;$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad} J_{bc} + g_{bc} J_{ad} - g_{ac} J_{bd} - g_{bd} J_{ac} \quad ; \quad (I.I.4)$$

$$[G_a, J_{bc}] = g_{ab} G_c - g_{ac} G_b \quad (a, b, c, d = 2, 3, \ldots, n+1).$$

Доказательство. Необходимо найти все матрицы вида (I.I.2), для которых $X \cdot (P_1 + P_{n+2}) = \lambda (P_1 + P_{n+2})$, где X искомая матрица. Непосредственными вычислениями получаем, что $\alpha = \gamma_n$, $\beta_i = -\delta_{in}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Значит, $Nor \langle P_1 + P_{n+2} \rangle = \tilde{AP}(1, n-1)$. Используя соотношения (I.I.3), убеждаемся в справедливости (I.I.4). Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $O[k, l]$ - подгруппа группы O(2, n), сохраняющая x_i и $g_{kk} x_k^2 + \ldots g_{ll} x_l^2$ ($k < l$, $i = 1, 2, \ldots, k-1, l+1, l+2, l+3, \ldots, n+2$); $AH[1,2] = \langle J_{12} \rangle$; $AH[3, 2d+1] = AH[3, 2d] = \langle J_{34}, \ldots, J_{2d-1, 2d} \rangle$ $\left(2 \le d \le \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$;

$$AH[3,3]=0\,;\quad G_a = J_{1a} - J_{a,n+2} \quad (a = 2,3,\ldots,n);$$

$$H_b = J_{2b} - J_{b,n+1} \quad (b = 3,\ldots,n);\quad M = G_2 + G_{n+1}\,; \qquad (I.I.5)$$

$$V = \langle G_2\,,\ldots,G_{n+1}\rangle;\quad \mathfrak{M} = \langle M, G_3\,,\ldots,G_n\,, H_3\,,\ldots,H_n\rangle;$$

$$D = -J_{1,n+2} + J_{2,n+1}\,;\quad S = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} - J_{1,n+1} - J_{2,n+2})\,;$$

$$Z = J_{1,n+2} + J_{2,n+1}\,;\quad T = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} + J_{1,n+1} + J_{2,n+2})\,.$$

Лемма I.I.2. Если $W = \langle P_1 + P_{n+2}\,, P_2 + P_{n+1}\rangle$, то $Nor\ W$ в AO(2, n) совпадает с алгеброй

$$AOpt(1,n-1) = \mathfrak{M} \oplus (AO[3,n] \oplus \langle D, S, T, Z\rangle\,.$$

Базисные генераторы алгебры $AOpt\,(1,n-1)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[D, G_a] = [G_a, Z] = G_a\;;\; [H_b, D] = [H_b, Z] = H_b;$$

$$[G_a, T] = H_a\,,\; [H_b, S] = -G_b\,,\; [M, Z] = 2M;$$

$$[D, S] = 2S\,,\; [D, T] = -2T\,,\; [T, S] = D\;; \qquad (I.I.6)$$

$$[G_a, J_{ab}] = -G_b\,,\; [H_b, J_{ab}] = H_a \quad (a, b = 3,\ldots,n)$$

(нулевые коммутаторы опущены).

Доказательство. Найдем все такие матрицы X вида (I.I.2), для которых $[X, W] \subset W$. Пусть $X\cdot(\mu(P_1 + P_{n+2}) + \varrho(P_2 + P_{n+1})) \in W$. Тогда

$$\mu \begin{Vmatrix} \beta_1 + \delta_{1,n} \\ \beta_2 + \delta_{2,n} \\ \cdots \\ \beta_{n-2} + \delta_{n-2,n} \end{Vmatrix} + \rho \begin{Vmatrix} \gamma_1 + \delta_{1,n-1} \\ \gamma_2 + \delta_{2,n-1} \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} + \delta_{n-2,n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad (I.I.7)$$

$$\begin{cases} \alpha\rho + \beta_{n-1}\rho + \beta_n\mu = \beta_n\mu + \gamma_n\rho - \delta_{n-1,n}\rho, \\ -\alpha\mu + \gamma_{n-1}\rho + \gamma_n\mu = \beta_{n-1}\mu + \gamma_{n-1}\rho + \delta_{n-1,n}\mu. \end{cases} \qquad (I.I.8)$$

Решаем систему уравнений (I.I.7). Пусть $\mu = 0$, $\rho = 1$. Тогда $\delta_{i,n-1} = -\gamma_i$ $(i = 1,2,\dots,n-2)$. Если $\mu = 1$, $\rho = 0$, то $\delta_{i,n} = -\beta_i$ ($i = 1,2,\dots, n-2$). Отсюда вытекает, что G_a , $H_a \in Nor(W)$ ($a = 3,\dots,n$).

Систему (I.I.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n}, \\ -\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n}. \end{cases}$$

Поскольку μ и ρ могут быть ненулевыми, то

$$\begin{cases} \alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n}, \\ -\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $\delta_{n-1,n} = \gamma_n - \beta_{n-1} - \alpha$, но тогда $Nor\, W$ содержит $\alpha J_{12} - \beta_{n-1} J_{1,n+1} - \gamma_n J_{2,n+2} + (\alpha + \beta_{n-1} - \gamma_n) J_{n+1,n+2} =$

$= \alpha(J_{12} + J_{n+1,n+2}) - \beta_{n-1}(J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}) - \gamma_n(J_{2,n+2} + J_{n+1,n+2})$,

для произвольных α , β_{n-1} , γ_n . Это значит, что $Nor\, W$ содержит генераторы $Y_1 = J_{12} + J_{n+1,n+2}$, $Y_2 = J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}$, $Y_3 = J_{2,n+2} + J_{n+1,n+2}$. На элементы β_n , γ_{n-1} матрицы X не налагаются никакие ограничения. Следовательно, $Nor\,W$ содержит также генераторы $Y_4 = J_{1,n+2}$, $Y_5 = J_{2,n+1}$. По той же причине $J_{ab} \in Nor\,W$ для $a, b = 3, \ldots, n$.

Очевидно, что $M = Y_1 - Y_3 + Y_2$, $D = -Y_4 + Y_5$, $Z = Y_4 + Y_5$, $S = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2 - Y_3)$, $T = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$.

Непосредственной проверкой, используя соотношения (I.I.3), убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (I.I.6). Лемма доказана.

Теорема I.I.I. Максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2,n)$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности следующими алгебрами:

I) $A\tilde{P}(1, n-1)$; 2) $AO_{pt}(1,n-1)$; 3) $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$, где $AO_1(1,k) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1,3,\ldots,k+2\rangle$, $AO_2(1,n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, k+3, k+4, \ldots, n+2\rangle$ $(k = 2,3,\ldots,[\frac{n}{2}];\ n \geq 4)$; 4) $AO_1(1,n)$; 5) $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$, где $AO_3(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = k+3, \ldots, n+2\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Доказательство. Пусть F – подалгебра алгебры $AO(2,n)$, U_1 – ненулевое подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U_1 – вырожденное пространство, то оно содержит F-инвариантное изотропное подпространство, сопряженное $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ или $\langle P_1 + P_{n+2},\ P_2 + P_{n+1}\rangle$. На основании лемм I.I.I и I.I.2 заключаем, что алгебра F $O(2,n)$-сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ или алгебры $AO_{pt}(1,n-1)$.

Если U_1 – невырожденное пространство, то $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$, а потому в силу теоремы Витта [35] нормализатор U_1 в $AO(2,n)$ сопряжен одной из алгебр: $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$

($k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$) ($n \geqslant 4$); $AO_1(1,n)$; $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$ ($k = 0,1,\ldots, n-1$). Теорема доказана.

На основании результатов доказанной теоремы и свойств конечномерных действительных алгебр Ли с нетривиальным разрешимым идеалом можно сделать следующий вывод.

Следствие I.I.I. Максимальные подалгебры алгебры AP(2, n) исчерпываются относительно P(2, n)-сопряженности следующими алгебрами:

I) $U \supset\!\!\!\!+ F$, где F - максимальная неприводимая подалгебра алгебры AO(2, n);

2) $A\hat{G}(1,n-1) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{1,n+2} \rangle$, где $A\hat{G}(1,n-1)$ - расширенная алгебра Галилея с базисом P_1 , $P_1 + P_{n+2}$, $G_2, G_3, \ldots, G_{n+1}$, P_2 , $P_3, \ldots, P_{n+1}$, J_{ab} ($a, b = 2,3,\ldots, n+1$);

3) $U \supset\!\!\!\!+ AO_{pt}(1,n-1)$;

4) $AP_1(1,k) \oplus AP_2(1,n-k)$, где $AP_1(1,k) = \langle P_1, P_3, P_4, \ldots, P_{k+2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO_1(1,k)$, $AP_2(1,n-k) = \langle P_2, P_{k+3}, P_{k+4}, \ldots, P_{n+2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO_2(1,n-k)$ ($k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$; $n \geqslant 4$);

5) $AP(2,k) \oplus AP_3(n-k)$, где $AP_3(n-k) = \langle P_{k+3}, \ldots, P_{n+2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO_3(n-k)$ ($k = 0,1,\ldots, n-1$).

Лемма I.I.3. Ненулевые подалгебры алгебры $\langle D, S, T \rangle$ исчерпываются относительно сопряженности, определяемой группой внутренних автоморфизмов алгебры $\langle D, S, T \rangle$, такими алгебрами: $\langle D \rangle, \langle T \rangle, \langle S + T \rangle$, $\langle D, T \rangle, \langle D, S, T \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим случай одномерных подалгебр. Пусть $X = \alpha_1 D + \alpha_2 T + \alpha_3 S$ ($\alpha_2 \neq 0$). Применив автоморфизм $exp(tS)$ и положив $t=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, с точностью до сопряженности можем брать $X'=\alpha_2 T+(\alpha_3-\alpha_1^2/\alpha_2)S$. Если $\alpha_3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}=0$, то получаем алгебру $\langle T\rangle$. Пусть $\alpha_3'=\alpha_3-\alpha_1^2/\alpha_2\neq 0$. Поскольку $exp(tD)(X')exp(-tD)=\alpha_2 e^{-2t}T+\alpha_3' e^{2t}S$, то при $e^{4t}=\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_3'}\right|$ убеждаемся, что X и $T\pm S$ сопряжены. Получаем алгебры $\langle T+S\rangle$ и $\langle T-S\rangle$. Далее, с помощью автоморфизмов $exp(T)$ и $exp(\frac{1}{2}S)$, нетрудно убедиться, что алгебра $\langle T-S\rangle$ сопряжена алгебре $\langle D\rangle$.

Случаи остальных одномерных подалгебр рассматриваются аналогично, а двумерные подалгебры ищем в предположении, что уже известны одномерные подалгебры. Лемма доказана.

Теорема I.I.2. Если n - четное число и $n\geqslant 4$, то алгебра AO(2, n) обладает относительно O(2, n)-сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$AH[1,2]\oplus AH[3,n+2]\ ;\ \mathfrak{M}\ \subset\!\!\!\!\!+\ (AH[3,n]\oplus\langle D,T,Z\rangle);$$

$$\mathfrak{M}\ \subset\!\!\!\!\!+\ (AH[3,n]\oplus\langle S+T,Z\rangle).$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+2}{2}$, $\frac{5n-2}{2}$, $\frac{5n-4}{2}$.

Если n - нечетное число и $n\geqslant 3$, то алгебра AO(2, n) обладает относительно O(2, n)-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$V\ \subset\!\!\!\!\!+\ (AH[3,n+1]\oplus\langle J_{1,n+2}\rangle)\ ;\ AH[1,2]\oplus AH[3,n+1]\ ;$$

$$\mathfrak{M}\ \subset\!\!\!\!\!+\ (AH[3,n]\oplus\langle D,T,Z\rangle);\ \mathfrak{M}\ \subset\!\!\!\!\!+\ (AH[3,n]\oplus\langle S+T,Z\rangle).$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+1}{2}$, $\frac{3n+1}{2}$, $\frac{5n-3}{2}$, $\frac{5n-5}{2}$.

Доказательство. Пусть $n\geqslant 3$, L - максимальная разрешимая подалгебра алгебры AO(2, n). Если все неприводимые L -

инвариантные подпространства пространства M(2, n) невырождены, то $L = AH[1,2] \oplus AH[3,n+2]$. Если в M(2, n) существует изотропное L -инвариантное подпространство, то L сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ или алгебры $AOpt(1, n-1)$.

Известно, что при четном n алгебра $AO[2, n+1]$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй $B = \langle H_3, \ldots, H_n \rangle \subset\!\!\!+ (AH[3,n] \oplus \langle J_{2,n+1} \rangle)$, а при нечетном n, кроме этой подалгебры, в $AO[2, n+1]$ существует еще одна максимальная разрешимая подалгебра $AH[3, n+1]$. Так как

$$[G_2, P_2 + P_{n+1}] = P_1 + P_{n+2}, \quad [G_{n+1}, P_2 + P_{n+1}] = -(P_1 + P_{n+2}),$$

то G_2, G_{n+1} содержатся в $AOpt(1, n-1)$, а значит $V \subset\!\!\!+ (B \oplus \langle J_{1,n+2} \rangle)$ является подалгеброй алгебры $AOpt(1, n-1)$. Алгебра $V \subset\!\!\!+ (AH[3,n+1] \oplus \langle J_{1,n+2} \rangle)$ (n - нечетное число) является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры AO(2, n).

Из леммы I.I.3 и того факта, что ортогональная алгебра обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с ее подалгеброй Картана, вытекает, что максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AOpt(1, n-1)$ исчерпываются алгебрами

$$\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ (AH[3,n] \oplus \langle D, T, Z \rangle), \quad \mathfrak{M} \subset\!\!\!+ (AH[3,n] \oplus \langle S+T, Z \rangle).$$

Поскольку эти алгебры имеют разные размерности, то они не сопряжены. Теорема доказана.

Теорема I.I.3. Пусть $\alpha, \beta, \lambda \in R$ и $\alpha, \beta > 0$, $0 < \lambda < 1$; $t = 1, \ldots, [(n-2)/2]$; $s = 1, \ldots, [(n-3)/2]$; $X_\ell = \alpha_1 J_{34} + \alpha_2 J_{56} + \ldots + \alpha_\ell J_{2\ell+1, 2\ell+2}$, где $\alpha_1 = 1$, $0 < \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_\ell \le 1$ при $\ell > 1$. Одномерные подалгебры алгебры AO(2, n) исчерпываются относительно O(2, n)-сопряженности такими алгебрами: $\Lambda_1=\langle D\rangle$; $\Lambda_2=\langle T\rangle$; $\Lambda_i=\langle M+(-1)^{i-1}\cdot 2T\rangle$ $(i=3,4)$;

$\Lambda_5=\langle D+\lambda Z\rangle$; $\Lambda_6=\langle D+Z\rangle$; $\Lambda_7=\langle T+Z\rangle$;

$\Lambda_8=\langle S+T+\alpha Z\rangle$; $\Lambda_9=\langle S+T\rangle$; $\Lambda_i=\langle S+T+(-1)^i M\rangle$

$(i=10,11)$; $\Lambda_{12}=\langle G_3+H_4\rangle$; $\Lambda_{13}=\langle G_3+T\rangle$;

$\Lambda_{14}=\langle 2G_3+D+Z\rangle$; $\Lambda_{15}=\langle X_\ell\rangle$ $(\ell=1,\ldots,[\frac{n}{2}])$;

$\Lambda_{16}=\langle X_\ell+G_{2\ell+3}\rangle$ $(\ell=t,\ n=2m+1;\ \ell=s,\ n=2m)$;

$\Lambda_{17}=\langle X_s+G_{2s+3}+H_{2s+4}\rangle$ $(2s+4\leq n)$; $\Lambda_{18}=\langle X_s+G_{2s+3}+T\rangle$;

$\Lambda_{19}=\langle X_s+\alpha(G_{2s+3}+D+Z)\rangle$; $\Lambda_{20}=\langle X_t+\alpha D\rangle$;

$\Lambda_{21}=\langle X_t+T\rangle$; $\Lambda_{22}=\langle X_t+M+2T\rangle$;

$\Lambda_{23}=\langle X_t+\alpha(D+Z)\rangle$; $\Lambda_{24}=\langle X_t+\alpha D+\beta Z\rangle$ $(\alpha>\beta)$;

$\Lambda_{25}=\langle X_t+\alpha(T+Z)\rangle$; $\Lambda_{26}=\langle X_t+\alpha(S+T)\rangle$;

$\Lambda_{27}=\langle X_t+\alpha(S+T)+\beta Z\rangle$; $\Lambda_j=\langle X_t+\alpha(S+T+(-1)^j M)\rangle$

$(j=28,29)$; $\Lambda_{30}=\langle X_t+S+T+G_3-H_4\rangle$ $(t\geq 2)$;

$\Lambda_{31}=\langle J_{12}\rangle$; $\Lambda_{32}=\langle X_\ell+\alpha J_{12}\rangle$ $(\ell=1,\ldots,[\frac{n}{2}])$;

$\Lambda_{33}=\langle X_{\frac{n-1}{2}}+\alpha J_{1,n+2}\rangle$ $(n=2m)$.

Доказательство. Одномерные подалгебры алгебры $AH[3,n]$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности алгебрами $\langle X_l \rangle$. Группа $O[3,n]$ является группой изометрий пространств $V = \langle G_3,\dots,G_n \rangle$ и $W = \langle H_3,\dots,H_n \rangle$. По теореме Витта одномерные подпространства пространства $V+W$ исчерпываются относительно $O[3,n]$-сопряженности такими пространствами: $\langle G_3 + \lambda H_3 + \mu H_4 \rangle$, $\langle H_3 \rangle$. Применив автоморфизмы $\exp(\theta T)$, $\exp(\frac{\pi}{2}(S+T))$ и $\exp(t J_{2,n+1})$, убеждаемся, что одномерные подпространства пространства $V+W$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности пространствами $\langle G_3 \rangle$ и $\langle G_3 + H_4 \rangle$. Алгебра $\langle D + \lambda M \rangle$ $(\lambda \neq 0)$ сопряжена алгебре $\langle T + Z \rangle$, алгебра $\langle M \rangle$ - алгебре $\langle T \rangle$, алгебра $\langle G_3 \rangle$ - алгебре $\langle M - 2T \rangle$.

Пусть

$$X = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \sum_{a=b}^{c} \alpha_a (G_{2a-1} - H_{2a}).$$

В силу теоремы 2 [54] существует такой $O(2,n)$-автоморфизм φ алгебры $AO(2,n)$, что

$$\varphi(X) = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \alpha (G_{2b-1} - H_b).$$

Если $\alpha > 0$, то автоморфизм $\exp(\theta Z)$ позволяет обратить α в 1. Теорема доказана.

Замечание. Для каждой из выписанных подалгебр n принимает такие значения, для которых есть смысл говорить о данной подалгебре.

Запись $\mathcal{Y}_{j,k} : T_1, \dots, T_m$ означает, что $k = 1, 2, \dots, m$; $\mathcal{Y}_{j,1} = T_1$, $\mathcal{Y}_{j,2} = T_2, \dots, \mathcal{Y}_{j,m} = T_m$.

Теорема I.I.4. Пусть $\delta, \rho \in R$; $\delta, \rho > 0$; $Z_0 = 0$, $\Lambda_0 = \langle Z_0 \rangle$; $\Lambda_j = \langle Z_j \rangle$ $(j = 1,2,\dots,33)$ пробегает множество одномерных подалгебр алгебры $AO(2,n)$, найденных в теореме I.I.3. Тогда одномерные подалгебры алгебры $AP(2,n)$ исчерпываются относительно $P(2,n)$-сопряженности алгебрами Λ_j и $\Lambda_{j,k} = \langle Z_j + Y_{j,k} \rangle$, где $Y_{j,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

$Y_{j,k} : \delta P_1, \delta P_{n+2}, P_1 + P_{n+2}$ $(j=0, \delta=1 ; j=23)$;

$Y_{j,1} = \delta P_3$ $(j = 1,5,7,8,\ldots,11,31)$; $Y_{2,k} : P_3, P_{n+2}$;

$Y_{3,k} : P_3, P_{n+1}$; $Y_{j,k} : \delta P_1, \delta P_3, P_1 - P_3$ $(j=4, \delta=1 ; j=6)$; $Y_{4,4} = P_{n+1}$; $Y_{12,k} : P_5, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+1} + \delta P_{n+2}$;

$Y_{13,k} : P_4, P_{n+1}$; $Y_{14,k} : \delta P_4, \delta P_{n+2}$;

$Y_{15,k} : \delta P_1, \delta P_{2l+3}, P_1 + P_{2l+3}$ $(l \leq [(n-1)/2])$;

$Y_{16,k} : \delta P_2, \delta P_{2l+4}, P_2 + P_{2l+4}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{17,k} : \delta P_{2s+5}, \delta P_{n+1} + \varrho P_{n+2}, \delta P_{n+1}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{18,k} : \delta P_{2s+4}, \delta P_{n+1}$; $Y_{19,k} : \delta P_{2s+4}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{j,1} : \delta P_{2s+3}$ $(j = 20,21,24,25,\ldots,30)$; $Y_{21,2} = \delta P_{n+2}$;

$Y_{22,k} : \delta P_{n+2}, \delta P_{n+1}$; $Y_{32,1} = \delta P_{n+2}$; $Y_{33,1} = \delta P_2$.

Доказательство. Первым рассмотрим случай нулевой алгебры Λ_0. Превратим U в псевдоевклидово пространство, положив

$(X, Y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3 - \ldots - \alpha_{n+1} \beta_{n+1} - \alpha_{n+2} \beta_{n+2}$, для $X = \sum_i \alpha_i P_i$, $Y = \sum_i \beta_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n+2)$. Пусть W - подпространство U. Поскольку $\dim W = 1$, то по теореме Витта W $O(2, n)$-сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1 \rangle$, $\langle P_{n+2} \rangle$, $\langle P_1 + P_{n+2} \rangle$.

Если мы будем рассматривать алгебру Λ_5, то применив автоморфизм $\exp(\sum_i t_i P_i)$ $(i = 1, 2, n+1, n+2)$, убеждаемся, что в этом случае подалгебра алгебры $AP(2, n)$ $P(2, n)$-сопряжена алгебре $\langle Z_5 + X_1 \rangle$, где $X_1 = \sum_i \alpha_i P_i$ $(i = \overline{3, n})$. Из теоремы Витта следует, что X_1 $P(2, n)$-сопряжен δP_3, т.е. подалгебра алгебры $AP(2, n)$ в этом случае $P(2, n)$-сопряжена алгебре $\langle Z_5 + \delta P_3 \rangle$. Аналогично рассматриваются случаи остальных алгебр Λ_j. Теорема доказана.

§ 2. Непрерывные подгруппы группы P(2,2)

Алгеброй Ли группы $P(2,2)$ будет алгебра $AP(2,2) = AO(2,2) \oplus \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, где $AO(2,2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1,2,3,4;\ a < b \rangle$. Перейдем к новому базису, состоящему из генераторов

$$B_1 = -\frac{1}{2}(J_{14} + J_{23}),\ B_2 = \frac{1}{2}(J_{24} - J_{13}),\ B_3 = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34});$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}),\quad C_2 = -\frac{1}{2}(J_{24} + J_{13}),\ C_3 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}).$$

С помощью соотношений (I.I.3) легко проверить, что имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[B_2, B_1] = B_3\ ;\ [B_3, B_1] = B_2\ ;\ [B_2, B_3] = B_1;$$

$$[C_2, C_1] = C_3\ ;\ [C_3, C_1] = C_2\ ;\ [C_2, C_3] = C_1;$$

$$[B_i, C_k] = 0 \ (i,k = 1,2,3); \qquad \text{(I.2.I)}$$

$$[B_1,P_1]=\tfrac{1}{2}P_4,\ [B_1,P_2]=\tfrac{1}{2}P_3,\ [B_1,P_3]=\tfrac{1}{2}P_2,\ [B_1,P_4]=\tfrac{1}{2}P_1;$$

$$[B_2,P_1]=\tfrac{1}{2}P_3,\ [B_2,P_2]=-\tfrac{1}{2}P_4,\ [B_2,P_3]=\tfrac{1}{2}P_1,\ [B_2,P_4]=-\tfrac{1}{2}P_2;$$

$$[B_3,P_1]=-\tfrac{1}{2}P_2,\ [B_3,P_2]=\tfrac{1}{2}P_1,\ [B_3,P_3]=-\tfrac{1}{2}P_4,\ [B_3,P_4]=\tfrac{1}{2}P_3;$$

$$[C_1,P_1]=-\tfrac{1}{2}P_4,\ [C_1,P_2]=\tfrac{1}{2}P_3,\ [C_1,P_3]=\tfrac{1}{2}P_2,\ [C_1,P_4]=-\tfrac{1}{2}P_1;$$

$$[C_2,P_1]=\tfrac{1}{2}P_3,\ [C_2,P_2]=\tfrac{1}{2}P_4,\ [C_2,P_3]=\tfrac{1}{2}P_1,\ [C_2,P_4]=\tfrac{1}{2}P_2;$$

$$[C_3,P_1]=-\tfrac{1}{2}P_2,\ [C_3,P_2]=\tfrac{1}{2}P_1,\ [C_3,P_3]=\tfrac{1}{2}P_4,\ [C_3,P_4]=-\tfrac{1}{2}P_3;$$

В дальнейшем через U будем обозначать векторное пространство $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, а через W - его подпространство.

Пусть π - проектирование алгебры AP(2, n) на алгебру AO(2, n); F - подалгебра алгебры AO(2, n); $\widehat{F}$ - такая подалгебра алгебры AP(2, n), что $\pi(\widehat{F}) = F$.

Определение I.2.I. Если алгебра $\widehat{F}$ P(2, n)-сопряжена алгебре $W \oplus F$, где W - F-инвариантное подпространство пространства U, то $\widehat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре AP(2, n). В противном случае алгебру $\widehat{F}$ будем называть нерасщепляемой в AP(2, n).

Поскольку подалгебры алгебры AO(2,2) известны [93], то классификация подалгебр алгебры AP(2,2) (согласно ПВЦ-методу) сводится к решению следующих двух задач:

I) для каждой подалгебры F алгебры AO(2,2) найти с точностью до сопряженности все подпространства W пространства U, инвариантные относительно F;

2) для каждой расщепляемой алгебры $W \niplus F$ изучить всевозможные алгебры $W + \hat{F}$, такие, что $\pi(\hat{F}) = F$, $\hat{F} \cap U \subset W$.

Лемма I.2.I. Пусть Γ - линейный оператор конечномерного векторного пространства U над R и $\Gamma^2 = \alpha \cdot 1_U$, где $\alpha^2 = 1$, 1_U - тождественный оператор U. Если $\alpha = -1$ ($\alpha = 1$), то U разлагается в прямую сумму двумерных (одномерных) инвариантных относительно Γ подпространств.

Доказательство. Пусть Q - вещественная линейная алгебра, порожденная Γ. Q можно рассматривать как скрещенную групповую алгебру группы порядка 2 и поля R. Поскольку Q - полупростая алгебра, то по теореме Веддерберна [40] каждый левый Q-модуль вполне приводим. При $\alpha = 1$ неприводимые Q-модули одномерны, а при $\alpha = -1$ - двумерны. Лемма доказана.

Лемма I.2.2. Подпространства пространства U, инвариантные относительно $F = \langle B_1 - B_3 \rangle$, исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности пространствами 0, $\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 \pm P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$, U.

Доказательство. Так как $[B_1 - B_3, P_1 + P_3] = P_2 + P_4$, $[B_1 - B_3, P_2 + P_4] = [B_1 - B_3, P_1 - P_3] = 0$, $[B_1 - B_3, P_2 - P_4] = -P_1 + P_3$, то U суть прямая сумма инвариантных относительно $B_1 - B_3$ подпространств $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$ и $\langle P_1 - P_3, P_2 - P_4 \rangle$. Если $[F, W] \subset W$, $W \subset U$ и $\dim W = 1$, то $W = \langle \alpha(P_2 + P_4) + \beta(P_1 - P_3) \rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(t\, C_3)$, отображаем W на $\langle P_1 - P_3 \rangle$. Если $\dim W \geq 2$, то W содержит $P_1 - P_3$, $\alpha(P_1 + P_3) + \beta(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$, $\alpha(P_2 + P_4)$. При $\alpha \neq 0$ получаем, что W содержит $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4$, $P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)$. Так как

$$\exp(2tC_3)(P_1+P_3+\delta(P_2-P_4))\exp(-2tC_3)=$$

$$=(\cos t+\delta\sin t)(P_1+P_3)+(\delta\cos t-\sin t)(P_2-P_4),$$

то, полагая $\cos t+\delta\sin t=0$, находим, что W сопряжено с $\langle P_1-P_3, P_2+P_4, P_2-P_4\rangle=\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$.

Если $\alpha=0$, то $\exp(2tC_2)W\exp(-2tC_2)$ содержит векторы P_1-P_3, $\beta e^{2t}(P_2+P_4)+\gamma(P_2-P_4)$. При $\beta\cdot\gamma\neq 0$ полагаем $e^{2t}|\beta|=|\gamma|$. Получаем вектор $P_2+P_4\pm(P_2-P_4)$, равный $2P_2$ или $2P_4$. Если $\dim W=2$, то $W=\langle P_1-P_3, P_2\rangle$ или $W=\langle P_1-P_3, P_4\rangle$. Если $\dim W=3$, то $W=\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$. При $\beta=0$, $\gamma\neq 0$ и $\dim W=2$ имеем $W=\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$, при $\gamma=0$, $\beta\neq 0$ и $\dim W=2$ - $W=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма I.2.3. Если $W\neq 0$, $W\neq U$ и $[B_2, W]\subset W$, то W P(2,2)-сопряжено с одним из следующих пространств: $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_1, P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2\pm P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2, P_4\rangle$.

Доказательство. Так как $(2B_2)^2=\mathrm{diag}\{1,1,1,1\}$, то по лемме I.2.I W будет прямой суммой инвариантных одномерных подпространств. На основании соотношений (I.2.I), $U_1=\langle P_1+P_3, P_2-P_4\rangle$ - линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению 1, а $U_2=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ - линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению -I. С точностью до автоморфизма $\exp(tC_3)$ одномерные инвариантные подпространства оператора B_2 исчерпываются $\langle P_1\pm P_3\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\{1,1,-1,-1\}$, отображает $\langle B_2\rangle$ на $\langle B_2\rangle$, а $\langle P_1-P_3\rangle$ на $\langle P_1+P_3\rangle$.

Пусть $W=\langle Y, Z\rangle$, где $Y\in U_1$, $Z\in U_2$. Применяя $\exp(tC_3)$, а затем $\exp(tC_2)$, получаем, что W сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1, P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_1-P_3+P_2+P_4\rangle$.

Пусть

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Lambda \in AO(2,2)$, $\Lambda^{-1} B_2 \Lambda = -B_2$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = P_1 + P_3$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_3) = -(P_1 - P_3)$. Значит, $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4 \rangle$ сопряжено с $\langle P_1, P_3 \rangle$.

Если $\dim W = 3$, то $U_1 \subset W$ или $U_2 \subset W$, а потому $W = \langle P_1 + P_3, P_2, P_4 \rangle$ или $W = \langle P_1, P_3, P_2 + P_4 \rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

не изменяет $\langle B_2 \rangle$ и отображает $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3 \rangle$ на $\langle P_1 + P_3, P_2, P_4 \rangle$. Лемма доказана.

Пусть $F_i(m)$ - подалгебра размерности m алгебры AO(2,2). Если речь идет о расщепляемых подалгебрах $W_1 \oplus F_i(m)$, $W_2 \oplus F_i(m)$, ..., $W_s \oplus F_i(m)$, то будем употреблять обозначение $F_{ij}(m) : W_1, W_2, \ldots, W_s$ ($j = 1, \ldots, s$). В формулировке теорем I.2.I, I.2.2 пространство, порожденное векторами $P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots, P_{a_s}$, будем обозначать $(a_1, \ldots, a_s)$, вектор $P_a + \omega P_b$ - $a\omega b$ $(\omega \neq 0)$, ab $(\omega = 1)$, $\overline{ab}$ $(\omega = -1)$.

Теорема I.2.I. Расщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности алгебрами

$F_{1j}(0)$: 0, (I), (3), (I3), (I,2), (I,3), (I,24), (3,4), (24,3), (I3,24), (I,2,3), (I,3,4), (I,24,3), U ($j = \overline{1,14}$);

$F_{2j}(1)=\langle B_1-B_3\rangle$: 0, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), ($\overline{13}$,2,4), U ($j = \overline{1,8}$);

$F_{3j}(1)=\langle B_2\rangle$: 0, (I3), (I,3), (I3,24), (I3,$\overline{24}$), (I3,2,4), U ($j = \overline{1,7}$);

$F_{4j}(1)=\langle B_3\rangle$: 0, (I,2), (3,4), (I3,24), U ($j = \overline{1,5}$);

$F_{ij}(1)=\langle B_1-B_3+(-1)^a(C_1-C_3)\rangle$: 0, (2$a$), ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,2$\omega$4), (I,6 - 2$a$,3), ($\overline{13}$,2,4), U ($a = 2, i = 5 \vee a = 1, i = 6$; $\omega > 0$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_{ij}(m)$: 0, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), (I3,24), ($\overline{13}$,2,4), U ($j = \overline{1,6}$; $\Gamma_7(1)=\langle -B_1+B_3+C_2\rangle$; $\Gamma_{18}(2)=\langle B_1-B_3, C_2\rangle$);

$F_{ij}(1)=\langle -B_1+B_3+(-1)^{a+1}C_3\rangle$: 0, ($\overline{13}$,24), U ($a = 1, i = 8 \vee a = 2, i = 9$; $j = \overline{1,3}$);

$F_{10j}(1)=\langle B_2+eC_2\rangle$: 0, (I3), (24), (I,3), (2,4), (I3,$\overline{24}$), (I3,24), (I,24,3), (I3,2,4), U ($0<|e|<1$, $j = \overline{1,10}$);

$F_{11j}(1)=\langle B_2+C_2\rangle$: 0, (2), (4), (I3), (24), (I,3), (2,4), (I3,2), (I3,4), (I3,24), (I3,2,4), (I,24,3), (I,2,3), (I,3,4), U ($j = \overline{1,15}$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, (I3,$\overline{24}$), U ($j = \overline{1,3}$) ($\Gamma_{12}(1)=\langle B_2-eC_3\rangle$, $e>0$; $\Gamma_{21}(2)=\langle B_2, C_3\rangle$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, (I,2), (3,4), U ($j=\overline{1,4}$;
$\Gamma_{13}(1)=\langle B_3+eC_3\rangle$ ($0<|e|<1$); $\Gamma_{22}(2)=\langle B_3, C_3\rangle$);

$F_{ij}(1)=\langle B_3+(-1)^a C_3\rangle$: 0, ($b$), (I,2), (3,4), (I, c, 3), U
($j=\overline{1,6}$; $a=1$, $b=1$, $c=4$, $i=14$; $a=2$, $b=3$, $c=2$, $i=15$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), ($\overline{13}$,2,4), U
($j=\overline{1,6}$; $\Gamma_{16}(2)=\langle B_1-B_3, B_2\rangle$, $\Gamma_{28}(2)=\langle B_1-B_3-C_2, C_1-C_3\rangle$,
$\Gamma_{30}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{31}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$,
$\Gamma_{35}(3)=\langle B_1-B_3, B_2+dC_2, C_1-C_3\rangle$ ($0<|d|<1$));

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,2,4), U
($j=\overline{1,7}$; $\Gamma_{17}(2)=\langle B_1-B_3, C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{33}(3)=\langle B_1-B_3, B_2+C_2, C_1-C_3\rangle$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, ($\overline{13}$,24), U ($j=\overline{1,3}$; $\Gamma_{19}(2)=\langle B_1-B_3, C_3\rangle$,
$\Gamma_{27}(2)=\langle B_2-dC_3, B_1-B_3\rangle$ ($d>0$), $\Gamma_{32}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_3\rangle$);

$F_{20j}(2)=\langle B_2, C_2\rangle$: 0, (13), (I,3), (13,24), (13,2,4), U
($j=\overline{1,6}$);

$F_{ij}(2)=\langle B_2+C_2, B_1-B_3+(-1)^a(C_1-C_3)\rangle$: 0, ($\overline{13}$), (2$a$), ($\overline{13}$,2),
($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,2ω4), ($\overline{13}$,2,4), (I,6 − 2a,3), U ($\omega>0$,
$j=\overline{1,9}$; $a=2$, $i=23 \vee a=1$, $i=24$);

$F_{25j}(2)=\langle B_2+C_2, B_1-B_3\rangle$: 0, ($\overline{13}$), (24), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), (13,24), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,24,3), U $(j=\overline{1,11})$;

$F_{26j}(2)=\langle B_2+\alpha C_2,\ B_1-B_3\rangle$: 0, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, (13,24), (1,24,3), $(\overline{13},2,4)$, U $(\alpha>0, \alpha\neq 1, j=\overline{1,9})$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, (13,24), U $(j=\overline{1,3}$; $\Gamma_{29}(3)=\langle B_1,B_2,B_3\rangle$, $\Gamma_{39}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_2\rangle)$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, U $(j=\overline{1,5}$; $\Gamma_{34}(3)=\langle B_1-B_3, B_2-C_2, C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{41}(4)=\langle B_1-B_3, B_2, C_1-C_3, C_2\rangle)$;

$F_{ij}(3)=\langle B_1+(-1)^a C_1,\ B_2+C_2,\ B_3+(-1)^a C_3\rangle$: 0, $(2a)$, $(1,6-2a,3)$, U $(j=\overline{1,4};\ a=1, i=36 \vee a=2,\ i=37)$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0, $(\overline{13},\overline{24})$, U $(i=\overline{1,3}$; $\Gamma_{38}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{42}(5)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1-C_3,C_2\rangle)$;

$F_{40j}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_3\rangle$: 0, U $(j=1,2)$;

$F_{43j}(6)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1,C_2,C_3\rangle$: 0, U $(j=1,2)$.

Доказательство. Для каждой из подалгебр алгебры АО(2,2) необходимо найти инвариантные подпространства пространства U и проверить их на сопряженность.

Сначала рассмотрим случай нулевой алгебры $F_1(0)$. Согласно теореме 1.1.3, одномерные подпространства пространства U исчерпываются пространствами $\langle P_1\rangle$, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3\rangle$. Пространства W, для которых $\dim W>1$, ищем в предположении, что известны одномерные инвариантные подпространства. Если W содержит вектор X ненулевой длины, то W сопряжено с $\langle X \rangle \oplus W'$, где $X = P_1$, $W' \subset \langle P_2, P_3, P_4 \rangle$ или $X = P_3$, $W' \subset \langle P_1, P_2, P_4 \rangle$.

Подпространства пространства $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$ исчерпываются пространствами $O, \langle P_2 \rangle, \langle P_2 + P_4 \rangle, \langle P_3 \rangle, \langle P_2, P_3 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_2 + P_4, P_3 \rangle$, $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$, а подпространства пространства $\langle P_1, P_2, P_4 \rangle$ – пространствами O, $\langle P_1 \rangle, \langle P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_4 \rangle$. Если W не содержит вектор ненулевой длины, то в силу теоремы о существовании ортогонального базиса и теоремы Витта заключаем, что $W = \langle P_1 + P_3 \rangle$ или $W = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$.

Два случая одномерных подалгебр алгебры АО(2,2) рассмотрены в леммах I.2.2 и I.2.3. Остальные случаи одномерных подалгебр исследуются аналогично.

Рассмотрим случай алгебры $F_{16}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle$. При нахождении инвариантных относительно $F_2(1) = \langle B_1 - B_3 \rangle$ подпространств пространства U, мы использовали только автоморфизмы $exp(t_i C_i)$ ($i = 2,3$). Поскольку эти автоморфизмы алгебру F_{16} отображают в себя, то среди инвариантных относительно F_2 подпространств следует отобрать те, которые выдерживают действие B_2, проверив затем их на сопряженность. Непосредственной проверкой убеждаемся, что инвариантные подпространства для F_{16} исчерпываются пространствами O, $\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$, U.

Пусть W – подпространство U, инвариантное относительно $F_{25}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 \rangle$. Легко получить, что $W = W_1 \oplus W_2$, где $W_1 \subset \langle P_2, P_4 \rangle$, а W_2 совпадает с одним из пространств: 0, $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1, P_3\rangle$. Автоморфизм $\exp(tC_2)$ не изменяет F_{25} и отображает пространство $P_2+\gamma P_4$ ($\gamma\neq 0$) на одно из следующих пространств: $\langle P_2\rangle$, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_2+P_4\rangle$, $\langle P_2-P_4\rangle$. Используя соотношения (I.2.I), находим, что W является одним из пространств:

$$0,\ \langle P_1-P_3\rangle,\ \langle P_2+P_4\rangle,\ \langle P_1-P_3, P_2\rangle,\ \langle P_1-P_3, P_4\rangle,$$
$$\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle,\ \langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle,\ \langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle,$$
$$\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle,\ U.$$

Аналогично исследуются случаи остальных подалгебр алгебры AO(2,2). Теорема доказана.

Пусть $\hat{F}_i$ - подалгебра алгебры AP(2,2), которая не является расщепляемой, т.е. $\pi(\hat{F}_i)=F_i=F_i(m)$ и $\hat{F}_i\neq F_i \oplus W_j$, где W_j - инвариантное относительно F_i подпространство пространства U. Запись $\hat{F}_i+W$ означает, что $[F_i, W]\subset \subset W$ и $\hat{F}_i\cap U\subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\hat{F}_i+W_1, \ldots, \hat{F}_i+W_s$, то будем употреблять обозначение $\hat{F}_{ij}: W_1, \ldots, W_s$ ($j=\overline{1,s}$).

Лемма I.2.4. Нерасщепляемые подалгебры $\hat{F}$ алгебры AP(2,2) с условием $\pi(\hat{F})=\langle B_1-B_3\rangle$ исчерпываются алгебрами $\hat{F}_{2j}=\langle B_1-B_3+P_1\rangle$: 0, $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$ ($j=\overline{1,7}$);

$\hat{F}_{2j}=\langle B_1-B_3+P_2\rangle$: $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$ ($j=\overline{8,10}$).

Доказательство. Пусть $X=B_1-B_3+\sum_i \alpha_i P_i$, $Y=\sum_i t_i P_i$ ($i=\overline{1,4}$). Тогда

$$exp(2Y)(X)exp(-2Y) = B_1 - B_3 + (\alpha_1 + t_2 - t_4) P_1 +$$
$$+ (\alpha_2 - t_1 - t_3) P_2 + (\alpha_3 - t_2 + t_4) P_3 + (\alpha_4 - t_1 - t_3) P_4.$$

Полагая $\alpha_3 - t_2 + t_4 = 0$, $\alpha_4 - t_1 - t_3 = 0$, можно предположить, что алгебра $\widehat{F}$ содержит $X = B_1 - B_3 + \alpha P_1 + \beta P_2$. Если $\widehat{F} \cap U = 0$, то, применяя автоморфизм $exp(2\theta C_3)$, убеждаемся, что $\widehat{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1 \rangle$. Автоморфизм АО(2,2), соответствующий матрице $diag\{1,-1,1,-1\}$, отображает $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1 \rangle$ на $\langle B_1 - B_3 - \alpha P_1 \rangle$. Поэтому будем предполагать, что $\alpha > 0$. Так как

$$exp(t(B_2 - C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) exp(-t(B_2 - C_2)) = e^{-t}(B_1 - B_3 + \alpha e^t P_1),$$

то можно считать, что $\alpha = 1$. В итоге получаем алгебру $\widehat{F}_{2.1} = \langle B_1 - B_3 + P_1 \rangle$. Пусть $W = \langle P_1 - P_3, P_2 \rangle$ или $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$. Тогда $\beta = 0$. Автоморфизм $exp(t(B_2 + C_2))$ не изменяет W. Так как

$$exp(t(B_2 + C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) exp(-t(B_2 + C_2)) = e^{-t}(B_1 - B_3) +$$
$$+ \alpha(ch\,t\, P_1 + sh\,t\, P_3) \text{ и } \alpha(ch\,t\, P_1 + sh\,t\, P_3) + \alpha\, sh\,t\,(P_1 - P_3) = \alpha e^t P_1,$$

то, полагая $|\alpha| e^{2t} = 1$, можно допускать, что $\alpha = 1$.

Аналогично исследуются остальные случаи W . Лемма доказана.

Лемма I.2.5. Все подалгебры $\widehat{F}_i$ алгебры АО(2,2) с условием $\pi(\widehat{F}_i) = F_i$ ($i = 3, 4, \overline{7,13}, \overline{18,22}, \overline{27,32}, \overline{36,43}$) являются расщепляемыми.

Доказательство. Алгебры F_i ($i = 29, 36, 37, 43$) являются полупростыми. В силу теоремы Уайтхеда [2I] для них не существует нерасщепляемых расширений. Отсюда вытекает, что расщепляемыми будут также алгебры $\widehat{F}_{38}$, $\widehat{F}_{39}$, $\widehat{F}_{40}$.

Пусть $X = -B_1 + B_3 + C_2 + \sum_i \alpha_i P_i$, $Y = \sum_i t_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). Непосредственно находим, что

$$\exp(2Y)(X)\exp(-2Y) = -B_1 + B_3 + C_2 + (\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4)P_1 +$$

$$+ (\alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4)P_2 + (\alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4)P_3 + (\alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3)P_4.$$

Полагаем

$$\begin{cases} \alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4 = 0 \\ \alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4 = 0 \\ \alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4 = 0 \\ \alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3 = 0 \end{cases} \tag{I.2.2}$$

Поскольку определитель, составленный из коэффициентов при t_1, t_2, t_3, t_4, равен I, то система (I.2.2) имеет одно решение. Следовательно, все подалгебры $\widehat{F}_7$ суть расщепляемые.

Рассмотрим случай алгебры $F_{18}(2) = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$. Алгебра $\widehat{F}_{18}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 + \sum_i \alpha_i P_i$, $X_2 = C_2$ ($i = \overline{1,4}$). Так как $[X_2[X_2, X_1]] = -\frac{1}{4}\sum_i \alpha_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$), то $\widehat{F}_{18}$ - расщепляемая алгебра.

Поскольку $F_7 \subset F_{28}$, то алгебра $\widehat{F}_{28}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 - C_2$, $X_2 = C_1 - C_3 + \sum_i \alpha_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). На основании соотношений (I.2.I) имеет место

$$X_2 - [X_1, X_2] = -\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}(P_2 + P_4) + \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}(P_1 - P_3) +$$

$$+ (\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{2})P_1 + (\alpha_2 + \frac{\alpha_4}{2})P_2 + (\alpha_3 + \frac{\alpha_1}{2})P_3 + (\alpha_4 + \frac{\alpha_2}{2})P_4.$$

Перебирая инвариантные подпространства алгебры F_{28}, находим, что для каждого из них $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1,4}$), т.е. $\widehat{F}_{28}$ - расщепляемая алгебра. Лемма доказана.

Теорема I.I.2. Нерасщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности алгебрами

$\hat{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1 \rangle$: 0,($\overline{13}$),($\overline{13}$,2),($\overline{13}$,$\overline{24}$),($\overline{13}$,24),($\overline{13}$,2,4) ($j = \overline{1,7}$);

$\hat{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2 \rangle$: ($\overline{13}$),($\overline{13}$,4),($\overline{13}$,$\overline{24}$) ($j = \overline{8,10}$);

$\hat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3) + P_{2a-1} \rangle$: 0,($2a$),($\overline{13}$),($\overline{13}$,2),($\overline{13}$,4),($\overline{13}$,$2\omega4$),($\overline{13}$,2,4) ($\omega>0$, $j = \overline{1,7}$; $a = 1, i = 6 \vee a = 2, i = 5$);

$\hat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3) + P_{2a} \rangle$: 0,($\overline{13}$),($\overline{13}$,$6-2a$),(I,3,$6-2a$) ($j = \overline{8,11}$; $a = 1, i = 6 \vee a = 2, i = 5$);

$\hat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$: 0,(4),(I3),(I,3),(I3,4),(I,3,4) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,6}$);

$\hat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_4 \rangle$: 0,(2),(I3),(I,3),(I3,2),(I,2,3) ($\alpha > 0$, $j = \overline{7,12}$);

$\hat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$: 0,(I3),(I,3) ($j = \overline{13,15}$);

$\hat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 \rangle$: (24),(I3,24),(I,24,3) ($j = \overline{16,18}$);

$\hat{F}_{14j} = \langle B_3 - C_3 + \alpha P_2 \rangle$: 0,(I),(3,4),(I,3,4) ($\alpha>0$, $j = \overline{1,4}$);

$\hat{F}_{15j} = \langle B_3 + C_3 + \alpha P_4 \rangle$: 0,(3),(I,2),(I,2,3) ($\alpha>0$, $j = \overline{1,4}$);

$\hat{F}_{17,1} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3 \rangle$; $\hat{F}_{17,2} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4 \rangle$;

$\hat{F}_{17,3} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4 \rangle$; $\hat{F}_{17,4} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3 \rangle$;

$\hat{F}_{17,5} = \langle B_1 - B_3 + P_2,\ C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4,\ P_1 - P_3 \rangle$ $(\beta, \gamma \in R)$;

$\hat{F}_{17,6} = \langle B_1 - B_3 + P_1,\ C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4,\ P_1 - P_3,\ P_2 \rangle$ $(\beta \geqslant 0)$;

$\hat{F}_{17,7} = \langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3 + P_4,\ P_1 - P_3,\ P_2 \rangle$;

$\hat{F}_{17,8} = \langle B_1 - B_3 + P_1,\ C_1 - C_3 + P_1 + \beta P_2,\ P_1 - P_3,\ P_4 \rangle$ $(\beta \geqslant 0)$;

$\hat{F}_{17,9} = \langle B_1 - B_3 + P_2,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3,\ P_4 \rangle$;

$\hat{F}_{17,10} = \langle B_1 - B_3 + \alpha P_2,\ C_1 - C_3 + P_1,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4 \rangle$ $(\alpha \geqslant 0)$;

$\hat{F}_{17,11} = \langle B_1 - B_3 + P_2,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4 \rangle$;

$\hat{F}_{17,12} = \langle B_1 - B_3 + P_1,\ C_1 - C_3 + \beta P_3,\ P_1 - P_3,\ P_2,\ P_4 \rangle$ $(\beta \in R)$;

$\hat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3),\ B_2 + C_2 + \alpha P_{2a} \rangle$: 0, $(\overline{1}3, 6-2a)$, $(\overline{1}3, 2\omega 4)$, $(1, 6-2a, 3)$ $(\alpha > 0,\ \omega > 0,\ j = \overline{1,4};\ a = 1,\ i = 24 \vee a = 2,\ i = 23)$;

$\hat{F}_{i5} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3),\ B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4,\ P_1 - P_3 \rangle$ $(\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \neq 0;\ a = 1,\ i = 24 \vee a = 2,\ i = 23)$;

$\hat{F}_{i6} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3),\ B_2 + C_2 + \alpha P_{6-2a},\ P_1 - P_3,\ P_{2a} \rangle$ $(\alpha > 0;\ a = 1,\ i = 24 \vee a = 2,\ i = 23)$;

$\hat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$: $(\overline{1}3)$, $(\overline{1}3, 4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,2})$;

$\hat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_4 \rangle$: $(\overline{1}3)$, $(\overline{1}3, 2)$ $(\alpha > 0,\ j = 3,4)$;

$\widehat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_4 \rangle$: $(\overline{13}, 24), (\overline{13}, \overline{24}), (1, 24, 3)$ $(j = \overline{5,7})$;

$\widehat{F}_{25.8} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$; $\widehat{F}_{25.9} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 \pm P_4,\ P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2,\ B_1 - B_3 + P_2 - P_4 \rangle$: $0, (\overline{13})$ $(j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2,\ B_1 - B_3 + P_4 \rangle$: $(24), (\overline{13}, 24), (13, 24), (1, 24, 3)$ $(j = \overline{3,6})$;

$\widehat{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_2,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_4,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 2)$ $(\alpha > 0,\ j = 3,4)$;

$\widehat{F}_{33,5} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_4,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{33,6} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 + P_4,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{34,1} = \langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3,\ B_2 - C_2 + P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{34,2} = \langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3,\ B_2 - C_2 + P_3,\ P_1 - P_3,\ P_2,\ P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + \frac{1}{3}C_2,\ C_1 - C_3 + P_2 + P_4 \rangle$: $0, (\overline{13})$ $(j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{35,3} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + \frac{1}{3}C_2,\ C_1 - C_3 + P_4,\ P_1 - P_3,\ P_2 - P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 - \frac{1}{3}C_2,\ C_1 - C_3 + P_2 \rangle$: $(\overline{13}, 24), (\overline{13}, 2, 4)$ $(j = \overline{4,5})$.

Основные этапы доказательства проведены в леммах I.2.4 и I.2.5. Остальные случаи подалгебр рассматриваются аналогично.

§ 3. Непрерывные подгруппы группы P(2,3)

На основании результатов, сформулированных в теореме I.I.I, мы можем сделать вывод, что максимальные приводимые подалгебры алгебры AO(2,3) исчерпываются относительно O(2,3)-сопряженности следующими алгебрами:

$AO(1,3)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{2,5}\rangle$; $AO(2,2)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{1,4}\rangle$;

$AO(2)\oplus AO(3)=\langle J_{12}\rangle\oplus\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{3,5}\rangle$;

$AO(2,1)\oplus AO(2)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{1,3}\rangle\oplus\langle J_{45}\rangle$;

$A\tilde{P}(1,2)=ASim(1,2)=\langle H_2,H_3,H_4\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{2,4}\rangle\oplus\langle J_{15}\rangle)$,

где $H_a=J_{1a}-J_{a5}$ ($a=\overline{2,4}$);

$AOpt(1,2)=\langle M,G_3,H_3\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle C,D,T,J_{15}\rangle$, где $G_3=$ $=J_{13}-J_{35}$, $H_3=J_{23}-J_{34}$, $M=J_{21}-J_{14}+J_{25}-J_{54}$,

$C=-J_{15}+J_{24}$, $D=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{25}+J_{14}+J_{45})$,

$T=-\frac{1}{2}(J_{12}-J_{25})+\frac{1}{2}(J_{14}-J_{45})$.

Пусть $K_1=J_{25}+J_{14}+\sqrt{3}\,J_{13}$, $K_2=-J_{15}+J_{24}-\sqrt{3}\,J_{23}$, $K_3=-2J_{45}+J_{11}$. Тогда $[K_1,K_2]=-K_3$, $[K_1,K_3]=-K_2$, $[K_2,K_3]=K_1$. Следовательно, $\langle K_1,K_2,K_3\rangle=AO(1,2)$.

Известно [93], что неприводимые подалгебры алгебры AO(2,3) исчерпываются алгебрами $\langle K_1, K_2, K_3 \rangle$ и AO(2,3). Таким образом, описание подалгебр алгебры AP(2,3) сводится к описанию подалгебр следующих алгебр:

1) $AP(1,3) \oplus \langle P_1 \rangle$; 2) $AE(2) \oplus AE(3)$; 3) $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$;

4) $AP(2,1) \oplus AE(2)$; 5) $A\tilde{G}(1,2) \oplus \langle J_{15} \rangle = ASim(1,2) \oplus U$;

6) $AOpt(1,2) \oplus U$.

Здесь $U = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$.

Поскольку подалгебры алгебры AO(2,3) известны [93], то классификация подалгебр алгебры AP(2,3) сводится к решению двух задач, которые аналогичны задачам, рассмотренным в предыдущем параграфе для классификации подалгебр алгебры AP(2,2).

Остановимся более подробно на случае алгебры $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$. Имеют место следующие утверждения.

Предложение I.3.I. Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ исчерпываются относительно P(2,3)-сопряженности расщепляемыми подалгебрами F алгебры AP(2,2), алгебрами $\langle F, P_5 \rangle$, а также следующими алгебрами:

$\mathcal{L}$: $\langle P_2 + P_5 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_5 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_4 + \alpha P_5 \rangle$,

$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 + P_5 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4 + \alpha P_5 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_5, P_4 + P_5 \rangle$,

$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_5, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2 + P_5, P_3, P_4 \rangle$ $(\mathcal{L} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 \rangle \vee$

$\vee\ \mathcal{L} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 \rangle$, $\alpha > 0$);

$\langle B_3 - C_3 \rangle$: $\langle P_1 + P_5 \rangle, \langle P_1 + P_5, P_2 \rangle, \langle P_1 + P_5, P_3, P_4 \rangle,$
$\langle P_1 + P_5, P_2, P_3, P_4 \rangle$;

$\mathcal{L}$: $\langle P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_4 + \alpha P_5 \rangle,$
$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 + P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 + \alpha P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_5, P_4 \rangle,$
$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4, P_2 + P_5 \rangle$ ($\mathcal{L} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 \rangle \vee \mathcal{L} =$
$= \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, B_2 + C_2 \rangle, \alpha > 0$).

Обозначим через $L : W_1, \ldots, W_5$ такие подалгебры алгебры $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$, что $\pi(L) = F_i$, $F_i : W_1, \ldots, W_5$ - расщепляемая подалгебра алгебры AP(2,2) ($i = \overline{2,28}, \overline{30,35}, \overline{38,42}$), и L принимает, соответственно i, следующие значения:

$\langle B_1 - B_3 + P_5 \rangle$; $\langle B_2 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_3 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_5 \rangle$;
$\langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_5 \rangle$; $\langle -B_1 + B_3 + C_2 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle -B_1 + B_3 + C_3 + \alpha P_5 \rangle$;
$\langle -B_1 + B_3 - C_3 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_2 + e C_2 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_2 + C_2 + \alpha P_5 \rangle$;
$\langle B_2 - e C_3 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_3 + e C_3 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_3 - C_3 + \alpha P_5 \rangle$;
$\langle B_3 + C_3 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_1 - B_3, B_2 + \alpha P_5 \rangle$; $\langle B_1 - B_3 + P_5, C_1 - C_3 + \delta P_5 \rangle$;
$\langle B_1 - B_3 + \gamma P_5, C_2 + \beta P_5 \rangle$; $\langle B_1 - B_3 + \mu P_5, C_3 + \rho P_5 \rangle$;
$\langle B_2 + a P_5, C_2 + b P_5 \rangle$; $\langle B_2 + a P_5, C_3 + b P_5 \rangle$;
$\langle B_3 + a P_5, C_3 + b P_5 \rangle$; $\langle B_2 + C_2 + \alpha P_5, B_1 - B_3 + C_1 - C_3 \rangle$;

$\langle B_2+C_2+\alpha P_5, B_1-B_3-C_1+C_3\rangle$; $\langle B_2+C_2+\alpha P_5, B_1-B_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_2-\alpha C_3+\alpha P_5, B_1-B_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1-B_3, C_1-C_3+\mu P_5, B_2+\varrho P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_2+b P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_3+b P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_1-C_3+P_5\rangle$;

$\langle B_1, B_2, B_3, C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_3+\alpha P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_1-C_3, C_2+b P_5\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_1-C_3, C_2+\alpha P_5\rangle$.

Здесь α и e имеют те же значения, что и в теореме I.2.I; $\alpha>0$, $\delta\in R$; μ , γ, a , b , β , ϱ такие, что $\gamma=1$, $\beta\geq 0 \vee \gamma=0$, $\beta>0$; $\mu=1$, $\varrho\in R \vee \mu=0$, $\varrho>0$; $a>0$, $b\in R \vee b>0$, $a=0$.

В следующем предложении употребляется та же форма записи подалгебр, что и в теоремах I.2.I, I.2.2.

Предложение I.3.2. Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)\oplus\langle P_5\rangle$ с точностью до P(2,3)-сопряженности исчерпываются нерасщепляемыми подалгебрами алгебры AP(2,2), алгебрами L : $W_1,\ldots, W_5$, а также следующими алгебрами:

$\langle B_3-C_3+P_5\rangle$: (I5),(I5,2),(I5,3,4),(I5,2,3,4);

$\langle B_3-C_3+P_2+P_5\rangle$: 0,(I),(4,5),(I,4,5);

$\langle B_3-C_3+\alpha P_2+\epsilon P_5\rangle$: (I5),(I5,3,4) ($\alpha>0$; ϵ = 0,I);

$\langle B_2+C_2+P_2+\alpha P_5\rangle$: (24),(I3,24),(I,24,3) $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_3+\alpha P_5, P_1-P_3, P_2+\beta P_4\rangle$ $(\alpha, \beta>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+\epsilon_1 P_2+\epsilon_2 P_3\rangle$: (25),($\bar{\mathrm{I}}$3,25),($\bar{\mathrm{I}}$3,4α5),
($\bar{\mathrm{I}}$3,245),($\bar{\mathrm{I}}$3,25,4) $(\epsilon_i = 0, 1;\ i = 1,2;\ \epsilon_1+\epsilon_2\neq 0\ ;\ \alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2, P_1, P_2+P_5, P_3, P_4\rangle$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_3\rangle$: ($\bar{\mathrm{I}}$3,2,4α5),($\bar{\mathrm{I}}$3,25,45) $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2+P_5\rangle$: 0,($\bar{\mathrm{I}}$3),($\bar{\mathrm{I}}$3,4),(I,3,4);

$\langle B_1-B_3+C_1-C_3, B_2+C_2+\beta P_2+\gamma P_5, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ $(\alpha, \beta, \gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+P_2-P_5\rangle$: 0,($\bar{\mathrm{I}}$3),(25),($\bar{\mathrm{I}}$3,4),
($\bar{\mathrm{I}}$3,25),($\bar{\mathrm{I}}$3,25,4),(I,3,4),(I,25,3,4);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\epsilon(P_2-P_5)+\beta P_4, P_1-P_3, P_2+P_5\rangle$ $(\epsilon = 0,$
$1;\ \beta>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_2+\gamma P_4\rangle$: ($\bar{\mathrm{I}}$3,4α5),($\bar{\mathrm{I}}$3,245)
$(\beta>0, \gamma\in R \vee \beta=0, \gamma>0\ ;\ \alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_4\rangle$: ($\bar{\mathrm{I}}$3,2,4α5),($\bar{\mathrm{I}}$3,25,45)
$(\alpha, \beta>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_4+\gamma P_5\rangle$: ($\bar{\mathrm{I}}$3),($\bar{\mathrm{I}}$3,2),($\bar{\mathrm{I}}$3,2α4)
$(\alpha, \beta, \gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+P_2+P_5+\beta P_4, P_1-P_3\rangle$ $(\beta>0)$;

$\langle B_1-B_3+\epsilon P_2+\gamma P_5,\ C_1-C_3-\epsilon P_2+\delta(P_2+P_4)+\mu P_5\rangle$
$(\epsilon=\mathrm{I},\ \gamma\geqslant 0,\ \delta\in R,\ \mu\in R \vee \epsilon=0,\ \gamma\geqslant 0,\ \delta=\mathrm{I},\ \mu\in R,\ \mu^2+\gamma^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_5,\ C_1-C_3+\gamma P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},2\alpha 5),(\overline{\mathrm{I}3},4\alpha 5)$ $(\alpha>0,\ \gamma\in R)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_2+\beta P_5,\ C_1-C_3+\gamma P_2+\epsilon P_4+\mu P_5,\ P_1-P_3\rangle$
$(\epsilon=\mathrm{I},\ \beta\geqslant 0,\ \alpha,\gamma,\mu\in R \vee \epsilon=0,\ \alpha=\mathrm{I},\ \beta\geqslant 0,\ \gamma,\mu\in R,\ \beta^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_1+\gamma P_5,\ C_1-C_3-P_1+\mu P_5+\delta P_4,\ P_2,\ P_1-P_3\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \mu,\delta\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_4+\mu P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},2),(\overline{\mathrm{I}3},2\alpha 5)$
$(\alpha>0,\ \gamma\geqslant 0,\ \mu\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_2,\ C_1-C_3+\mu P_2+P_4,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4+P_5\rangle$ $(\alpha,\mu\in R)$;

$\langle B_1-B_3+P_2,\ C_1-C_3+\gamma P_2,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4+P_5\rangle$ $(\gamma\in R)$;

$\langle B_1-B_3+P_1+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_1+\alpha P_2+\delta P_5,\ P_1-P_3,\ P_4\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \alpha,\delta\in R,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_2+\delta P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},4),(\overline{\mathrm{I}3},4\alpha 5)$
$(\alpha>0,\ \gamma\geqslant 0,\ \delta\in R,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_2+\gamma P_5,\ C_1-C_3+\delta P_3+\mu P_5,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \delta,\mu\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_5,\ C_1-C_3+P_3+\gamma P_5,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4\rangle$
$(\alpha>0,\ \gamma\in R \vee \alpha=0,\ \gamma>0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3 + P_2 \rangle$: $(\bar{1}3,245)$, $(\bar{1}3,2\alpha 5,4)$ $(\alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_1 + \gamma P_5,\ C_1 - C_3 + \delta P_1 + \mu P_5,\ P_1 - P_3,\ P_2,\ P_4 \rangle$
$(\gamma \geqslant 0,\ \mu, \delta \in R,\ \gamma^2 + \mu^2 \neq 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + \epsilon P_1,\ C_1 - C_3 + \epsilon P_3 + \gamma P_4,\ P_1 - P_3,\ P_2,\ P_4 + \alpha P_5 \rangle$
$(\gamma \geqslant 0, \alpha > 0,\ \epsilon = 1 \vee \epsilon = 0,\ \gamma = 1,\ \alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_1,\ C_1 - C_3 + P_3 + \gamma P_2,\ P_1 - P_3,\ P_2 + \alpha P_5,\ P_4 \rangle$
$(\gamma \geqslant 0,\ \alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_2,\ C_1 - C_3 + \gamma P_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4,\ P_2 + P_5 \rangle$ $(\gamma \geqslant 0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3 + P_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4,\ P_2 + P_5 \rangle$;

$\langle B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_5,\ B_1 - B_3,\ P_1 - P_3,\ P_4 \rangle$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_2 + C_2 + \alpha P_4 + \beta P_5,\ B_1 - B_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 \rangle$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4,\ B_2 + 3C_2 + \alpha P_5 \rangle$: 0, $(\bar{1}3)$, (24), $(\bar{1}3,24)$, $(13,24)$, $(1,24,3)$ $(\alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \beta P_5,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3,2,4\alpha 5)$, $(\bar{1}3,2\alpha 5,4)$, $(\bar{1}3,24,25)$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \gamma P_5,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3)$, $(\bar{1}3,4)$ $(\alpha, \gamma > 0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_4 + \gamma P_5,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3)$, $(\bar{1}3,2)$ $(\alpha, \gamma > 0)$;

$\langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 + P_4 + \gamma P_5,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3 \rangle$ $(\gamma > 0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+P_2+\gamma P_5, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_2+\gamma P_4, C_1-C_3\rangle$: $(\overline{13},2\beta 5)$, $(\overline{13},245)$, $(\overline{13},4\beta 5)$ $(\alpha, \beta>0, \gamma\in R$ $; \alpha=0, \gamma, \beta>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_4, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2+P_5\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+P_1-P_3+\gamma P_5, C_1-C_3\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_2-P_4, P_1-P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\gamma P_5, C_1-C_3+P_2, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+P_1+\gamma P_5, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\frac{1}{3}C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_2+P_4\rangle$: 0, $(\overline{13},24)$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-\frac{1}{3}C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_1+P_3\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(\alpha>0)$.

Предложения I.3.I, I.3.2 доказываются на основании теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли [86].

Списки всех подалгебр алгебры AP(2,3), несопряженных подалгебрам алгебры $AP(2,2)\oplus\langle P_5\rangle$, приведены в приложениях I и 2.

Г Л А В А II

ИНВАРИАНТЫ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ AP(2,3)

Во второй главе решена задача о нахождении инвариантов подгрупп группы Пуанкаре P(2,3) или, что равносильно, инвариантов подалгебр алгебры AP(2,3). Поскольку некоторые несопряженные подалгебры размерности большей I имеют одни и те же инварианты, требуется дополнительное отождествление подалгебр алгебры AP(2,3). Определено соответствующее отношение эквивалентности и проведена относительно этого отношения классификация подалгебр алгебры AP(2,2) и подалгебр коразмерности один алгебры AP(2,3). Найдены инварианты этих, а также одномерных подалгебр алгебры AP(2,n). Приведен список инвариантных операторов подалгебр алгебры AP(2,2), которые имеют размерность большую пяти.

§ I. Инварианты одномерных подалгебр алгебры AP(2,n)

В этой главе алгебру AP(2,n) будем рассматривать как алгебру Ли векторных полей на пространстве Минковского M(2,n). Инфинитезимальные операторы (I.I.3) представляются следующими дифференциальными операторами первого порядка:

$$J_{12}=x_1\partial_2-x_2\partial_1\ ,\ J_{ab}=x_b\partial_a-x_a\partial_b\ ,$$
$$J_{ia}=x_i\partial_a+x_a\partial_i\ ,\ P_j=\partial_j\ \left(\partial_j=\partial_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\ ;\right. \qquad (2.I.I)$$
$$\left.a,b=3,4,\ldots,n+2\ ;\ i=1,2\ ;\ j=1,\ldots,n+2\ \right).$$

Пусть G - подгруппа Ли группы $P(2,n)$, $AG = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_s \rangle$ - алгебра Ли группы G.

Определение 2.I.I. Не тождественно постоянная функция $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ называется инвариантом группы G, если $u(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in M(2n)$.

Известно [39], что $u(x)$ является инвариантом группы G тогда и только тогда, когда

$$\bar{X}_i u(x) = 0, \tag{2.I.2}$$

для всех $i = \overline{1,s}$.

Пусть r_* - общий ранг касательного отображения группы G [39], а $m = n+2-r_*$. Если $r_* < n+2$, то существует система из m функционально независимых инвариантов $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант группы G имеет вид $\Psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Любую такую систему функций $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ будем называть полной системой инвариантов (ПСИ) группы G или алгебры AG, а ее составляющие - основными инвариантами. Число r_* назовем рангом алгебры AG, а число m - коразмерностью AG.

Для случая одномерных подалгебр алгебры $AP(2,n)$ условие (2.I.2) представляет собой линейное однородное ДУ в частных производных первого порядка, которые решаются известными методами [I7]. Поскольку для этих алгебр $r_* = 1$, то $m = n+1$ и число основных инвариантов одномерных подалгебр алгебры $AP(2,n)$ равно $n+1$.

Все одномерные подалгебры алгебры $AP(2,n)$ получены в теоремах I.I.3 и I.I.4. Сохраним принятые там обозначения и кроме того условимся, что

$$y = y(x) = x_1 + x_{n+2}, \quad \bar{y} = \bar{y}(x) = x_1 - x_{n+2};$$

$$Z = Z(x) = x_2 + x_{n+1}\ ,\ \bar{Z} = \bar{Z}(x) = x_2 - x_{n+1}\ ;$$

$$h_a = h_a(x) = x_{2a-1}^2 + x_{2a}^2\ ;$$

$$\varphi = \varphi(x) = \arcsin\{\bar{y}(\bar{y}^2 + \bar{Z}^2)^{-\frac{1}{2}}\}\ ; \qquad (2.I.3)$$

$$\psi_a = \psi_a(x) = \mathrm{arctg}(x_{2a}\cdot(x_{2a-1})^{-1})\ ;$$

$$\vartheta_1 = \bar{y}^2 + \bar{Z}^2\ ,\ \vartheta_2 = 2\bar{y}\bar{Z}\ ,\ \vartheta_3 = \bar{y}x_4 + \bar{Z}x_3\ ;$$

$$\vartheta_4 = \bar{y}x_3 - \bar{Z}x_4,\ \vartheta_5 = \bar{y}Z - y\bar{Z}\ ,\ \vartheta_6 = \bar{y}y + \bar{Z}Z\ ,$$

$$\vartheta_7 = y^2 + Z^2\ .$$

Если $u_{j1}(x) = f_1(x), \ldots, u_{js}(x) = f_s(x)$, то будем употреблять обозначение $u_{jk} : f_1, \ldots, f_s$.

Предложение 2.I.I. ПСИ алгебры Λ_j ($j = \overline{1,11}$) составляют $x_3, x_4, \ldots, x_n$ и функции u_{jk}, задаваемые следующим образом: $u_{1k} : y\bar{y}, Z\bar{Z}, yZ$; $u_{2k} : y, \bar{Z}, \vartheta_6$;

$u_{3k} : x_1^2 + Z\bar{Z}, \bar{Z}, x_{n+2}$; $u_{4k} : x_1, \bar{Z}, Z\bar{Z} - x_{n+2}^2$;

$u_{5k} : y\bar{y}, Z\bar{Z}, y^{1+\lambda}\cdot Z^{1-\lambda}$; $u_{6k} : x_1, Z\bar{Z}, x_{n+2}$;

$u_{7k} : y\bar{Z}, \ln y - Zy^{-1}, \vartheta_6$; $u_{8k} : \vartheta_1\vartheta_7$,

$2\alpha\,\mathrm{arctg}(yZ^{-1}) + \ln\vartheta_7$, $2\alpha\,\mathrm{arctg}(\bar{Z}\bar{y}^{-1}) + \ln\vartheta_1$;

$u_{9k} : x_1^2 + x_2^2, x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2, \mathrm{arctg}(x_1x_2^{-1}) + \mathrm{arctg}(x_{n+1}x_{n+2}^{-1})$;

$u_{jk} : \vartheta_1, \vartheta_6, 2\vartheta_1\varphi + (-1)^j\vartheta_5$ ($j = \overline{10,11}$).

Доказательство. Как было указано выше, для нахождения

ПСИ алгебры Λ_j достаточно найти фундаментальные решения системы, соответствующей условию (2.I.2). Рассмотрим случай алгебры Λ_7. Согласно (I.I.5) и (2.I.I), получаем следующее уравнение:

$$[(x_{n+2}-\tfrac{1}{2}(x_2-x_{n+1}))\partial_1+(\tfrac{1}{2}(x_1+x_{n+2})+x_{n+1})\partial_2+$$
$$+(\tfrac{1}{2}(x_1+x_{n+2})+x_2)\partial_{n+1}+(\tfrac{1}{2}(x_2-x_{n+1})+x_1)\partial_{n+2}]u(x)=0.$$

Осуществив замену переменных по формулам $Z_1=x_1+x_{n+2}$, $Z_2=x_2-x_{n+1}$, $Z_{n+1}=\ln(x_1+x_{n+2})-(x_2+x_{n+1})/(x_1+x_{n+2})$, $Z_{n+2}=\ln(x_2-x_{n+1})-(x_1-x_{n+2})/(x_2-x_{n+1})$, $Z_i=x_i$ $(i=\overline{3,n})$, приходим к уравнению

$$[Z_1\partial_{Z_1}-Z_2\partial_{Z_2}]u(Z)=0,$$

из которого видно, что функции Z_i $(i=\overline{3,n+2})$ являются фундаментальными решениями исходного уравнения, а последнее уравнение имеет еще одно решение $Z_1\cdot Z_2$.

Возвратившись к исходным переменным и воспользовавшись формулами (2.I.3), получаем, что ПСИ алгебры Λ_7 составляют функции $y\bar{z}$, $\ln y-zy^{-1}$, $\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1}$, $x_3,\ldots,x_n$. Вместо $\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1}$ мы можем брать

$$\vartheta_6=\{\ln y\bar{z}-(\ln y-zy^{-1}+\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1})\}y\bar{z},$$

поскольку ϑ_6 является функцией инвариантов и полученная таким образом ПСИ будет функционально независимой.

Случаи остальных алгебр рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Запись Λ : $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ означает, что функции $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ образуют ПСИ алгебры Λ.

Предложение 2.I.2. Λ_{12} : $\bar{y},\bar{z}$, $y\bar{y}-x_3^2$, $z\bar{z}-x_4^2$, $\bar{y}x_4-\bar{z}x_3$, $x_5,x_6,\ldots,x_n$;

Λ_{13} : $y_1=\bar{y}^2+2x_3\bar{z}$, $y_2=3\bar{z}^2 y+3\bar{y}y_1-\bar{y}^3$, $\bar{y}^4+12\bar{z}^3 z+12y_2\bar{y}-6y_1\bar{y}^2$, $\bar{z}$, $x_4, x_5, \ldots, x_n$;

Λ_{14} : $\bar{y}$, $y\bar{y}-x_3^2$, $z\bar{z}$, $x_3-\bar{y}\ln z$, $x_4, x_5, \ldots, x_n$;

Доказательство предложения 2.I.2 аналогично доказательству предложения 2.I.I.

Предложение 2.I.3. ПСИ алгебры $\langle X_m\rangle$ от переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{2m+2}$ составляют функции h_α, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$ ($\alpha=2,\ldots,m+1$; $i=2,\ldots,m$).

Доказательство. Для алгебры $\langle X_m\rangle$ получаем следующее уравнение, соответствующее условию (2.I.2):

$$[-(x_3\partial_4-x_4\partial_3)-\alpha_2(x_5\partial_6-x_6\partial_5)-\ldots-\alpha_m(x_{2m+1}\partial_{2m+2}-x_{2m+2}\partial_{2m+1})]u=0.$$

Осуществив замену переменных по закону $y_3=x_3^2+x_4^2$, $y_4=x_4x_3^{-1}$, $\ldots$, $y_{2m+1}=x_{2m+1}^2+x_{2m+2}^2$, $y_{2m+2}=x_{2m+2}x_{2m+1}^{-1}$, и решив полученное уравнение

$$[-(1+y_4^2)\partial_{y_4}-\alpha_2(1+y_6^2)\partial_{y_6}-\ldots-\alpha_m(1+y_{2m+2}^2)\partial_{y_{2m+2}}]u(y)=0,$$

убеждаемся, что ПСИ алгебры $\langle X_m\rangle$ составляют функции h_α , $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$ ($\alpha=2,\ldots,m+1$; $i=2,\ldots,m$). Предложение доказано.

Следствие. Λ_{15} : x_1, x_2 , h_a , $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $x_{2\ell+3}$, $x_{2\ell+4}, \ldots, x_{n+2}$ ($\alpha=2,\ldots,\ell+1$; $i=2,\ldots,\ell$).

Предложение 2.I.4. Пусть $\Lambda_j=\langle X_s+Y_j\rangle$ ($j=16,\ldots,29$). ПСИ алгебры Λ_j составляют основные инварианты алгебры $\langle X_s\rangle$ от переменных $x_3,\ldots,x_{2s+2}$, основные инварианты алгебры $\langle Y_j\rangle$ от переменных x_1, x_2 , x_{2s+3}, $x_{2s+4},\ldots$, x_{n+2} и функция u_j , где $u_{16}=\bar{y}\psi_2+x_{2\ell+3}$; $u_{17}=\bar{y}\psi_2+x_{2s+3}$;

$u_{18}=\bar{z}\psi_2-\bar{y}$; $u_{19}=\alpha\bar{y}\psi_2+x_{2\ell+3}$; $u_{20}=\ln\bar{y}+\alpha\psi_2$;

$$U_{21} = y\psi_2 + Z\ ;\ U_{22} = x_1 - 2\bar{Z}\psi_2\ ;\ U_{23} = \ln \bar{Z} - 2\alpha\psi_2\ ;$$

$$U_{24} = \ln \bar{y} - (\beta - \alpha)\psi_2\ ;\ U_{25} = \ln \bar{Z} - \alpha\psi_2\ ;\ U_{26} = \psi_1 + \alpha\psi_2\ ;$$

$$U_{27} = \ln \vartheta_1 - 2\beta\psi_2\ ;\ U_{28} = \vartheta_5 + 2\alpha\vartheta_1\psi_2\ ;\ U_{29} = \vartheta_5 - 2\alpha\vartheta_1\psi_2 .$$

Значения α , β те же, что и в теореме I.I.3.

Для доказательства предложения нужно использовать результаты, полученные в предложениях 2.I.I - 2.I.3.

Теорема 2.I.I. ПСИ одномерных подалгебр алгебры АО(2,n) составляют ПСИ, найденные в предложениях 2.I.I - 2.I.4, а также следующие функции:

Λ_{30} : ϑ_1, ϑ_3, $\vartheta_5 + \vartheta_3 \arcsin(\vartheta_2 \cdot \vartheta_1^{-1})$, $\vartheta_1\vartheta_6 - \vartheta_4^2$, $\vartheta_1 \arcsin(\vartheta_2\vartheta_1^{-1}) - 2\vartheta_4$, h_a, $\alpha_i \arcsin(\vartheta_2\vartheta_1^{-1}) + 2\psi_{i+1}$, $x_{2s+3}, x_{2s+4}, \ldots, x_n$ $(a = \overline{3, s+1}\ ;\ i = \overline{2, s})$;

Λ_{31} : h_1, $x_3, x_4, \ldots, x_{n+2}$;

Λ_{32} : h_a, $\alpha_i\psi_1 + \alpha\psi_{i+1}$, $x_{2l+3}, x_{2l+4}, \ldots, x_{n+2}$ $(a = \overline{1, l+1}\ ;\ i = \overline{1, l})$;

Λ_{33} : $y\bar{y}$, x_2, h_a , $\alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}$, $\ln \bar{y} - \alpha\psi_2$ $\left(a = \overline{2, \frac{n+1}{2}}\ ;\ i = \overline{2, \frac{n-1}{2}}\right)$.

Значения α , α_i те же, что и в теореме I.I.3.

Доказательство теоремы частично проведено при доказательстве предложений 2.I.I - 2.I.4. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Предложение 2.I.5. Пусть $\Lambda_{j,k} = \langle \Lambda_j + Y_{j,k} \rangle$, где $\Lambda_j \neq 0$ и $[\Lambda_j , Y_{j,k}] = 0$ (см. теорему I.I.4). ПСИ алгебры $\Lambda_{j,k}$

составляют основные инварианты алгебры $\Lambda_j = \langle Z_j \rangle$ от переменных x_a, не аннулируемых Z_j, основные инварианты алгебры $\langle Y_{j,k} \rangle$ от остальных переменных, и функция $u_{j,k}$, определяемая следующим образом:

$u_{1.1} = x_3 + \delta \ln \bar{y}$; $u_{2.1} = \bar{y} + 2x_3 \bar{z}$; $u_{3.1} = x_1 + \bar{z} x_3$; $u_{4.1} = x_1 \bar{z} - x_{n+2}$;

$u_{4.2} = x_3 \bar{z} - x_{n+2}$; $u_{4.3} = (x_1 - x_3)\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{5.1} = \delta \ln y - (\lambda - 1) x_3$;

$u_{6.1} = x_1 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{6.2} = x_3 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{6.3} = x_1 - x_3 + 2 \ln \bar{z}$;

$u_{7.1} = x_3 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{8.1} = \delta \ln \vartheta_1 + 2\lambda x_3$; $u_{9.1} = \delta \operatorname{arctg}(x_{n+1} x_{n+2}^{-1}) - x_3$;

$u_{j.1} = \delta \vartheta_5 + 2\vartheta_1 x_3$ (j = 10,11); $u_{12.1} = x_4 - x_5 \bar{z}$; $u_{13.1} = \bar{y} + \bar{z} x_4$;

$u_{14.1} = 2x_4 - \delta \ln z$; $u_{15.1} = x_1 + \delta \psi_2$; $u_{15.2} = x_{2s+3} + \delta \psi_2$;

$u_{15.3} = x_1 + x_{2s+3} + 2\psi_2$; $u_{16.1} = x_2 \bar{y} - \delta x_{2\ell+3}$; $u_{16.2} = x_{2\ell+4} \bar{y} - \delta x_{2\ell+3}$;

$u_{16.3} = \bar{y}(x_2 + x_{2\ell+4}) - 2x_{2\ell+3}$; $u_{17.1} = \delta \psi_2 + x_{2s+5}$; $u_{18.1} = \delta \bar{y} + \bar{z} x_{2s+4}$;

$u_{19.1} = \delta x_{2s+3} - \bar{y} x_{2s+4}$; $u_{20.1} = \delta \ln \bar{y} - \alpha x_{2s+3}$; $u_{21.1} = x_{2s+3} y - \delta z$;

$u_{22.1} = \alpha x_1 + 2\bar{z} x_{n+2}$; $u_{23.1} = 2\alpha x_1 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{23.2} = 2\alpha x_{n+2} + \delta \ln z$;

$u_{23.3} = \alpha y + \ln \bar{z}$; $u_{24.1} = \delta \ln \bar{y} + (\beta - \alpha) x_{2s+3}$; $u_{25.1} = \delta \ln z + x_{2s+3}$;

$u_{26.1} = \delta \psi_1 - \alpha x_{2s+3}$; $u_{27.1} = \delta \ln \vartheta_1 + 2\beta x_{2s+3}$;

$u_{j,1} = \delta \vartheta_5 + (-1)^{j-1} 2\alpha \vartheta_1 x_{2s+3}$ (j = 28,29);

$u_{30.1} = \delta \arcsin(\vartheta_2 \vartheta_1^{-1}) - 2x_{2s+3}$; $u_{31.1} = \delta \psi_1 - x_3$;

$u_{32.1} = \delta \psi_2 + x_{n+2}$; $u_{33.1} = \delta \psi_2 + x_2$.

Значения α, δ, β, s, ℓ здесь те же, что и в теоремах I.I.3, I.I.4.

Доказательство. Для отыскания ПСИ указанных алгебр, удобно воспользоваться результатами, полученными в предложениях 2.I.I - 2.I.4 и теореме 2.I.I. Рассмотрим, например, случай алгебры $\Lambda_{15.1} = \langle X_l + \delta P_1 \rangle$.

Воспользовавшись результатами следствия предложения 2.I.3, осуществим замену переменных в уравнении для $\Lambda_{15.1}$, которое соответствует условию (2.I.2), по следующему закону: $Z_1 = x_1$, $Z_2 = x_2$, $Z_3 = h_2$, $Z_4 = x_4 x_3^{-1}$, $Z_5 = h_3$, $Z_6 = \alpha_2 \psi_2 - \psi_3$, ..., $Z_{2m+1} = h_m$, $Z_{2m+2} = \alpha_m \psi_2 - \psi_{m+1}$, $Z_{2m+3} = x_{2m+3}$, $Z_{2m+4} = x_{2m+4}$, ..., $Z_{n+2} = x_{n+2}$. В результате получим уравнение

$$[\delta \partial Z_1 - (1 + Z_4^2) \partial Z_4] U(Z) = 0,$$

решением которого является функция $Z_1 + \delta \operatorname{arctg} Z_4$. Следовательно, ПСИ алгебры $\Lambda_{15.1}$ составляют основные инварианты алгебры $\langle X_3 \rangle$, основные инварианты от остальных переменных алгебры $\langle \delta P_1 \rangle$: $x_2, x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots, x_{n+2}$; а также функция $x_1 + \delta \psi_2$.

Случаи остальных алгебр рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Теорема 2.I.2. ПСИ одномерных подалгебр алгебры AP(2, n) составляют ПСИ одномерных подалгебр алгебры AO(2, n), ПСИ алгебр $\Lambda_{j.k} = \langle \Lambda_j + Y_{j.k} \rangle$, где $\Lambda_j \neq 0$ и $[\Lambda_j, Y_{j.k}] = 0$, а также следующие функции:

$$\Lambda_{0.1} : x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; \quad \Lambda_{0.2} : x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};$$

$$\Lambda_{0.3} : \bar{y}, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; \quad \Lambda_{2.2} : y^2 - z, \bar{z}, x_1 + \bar{z} y,$$

$$x_3, x_4, \ldots, x_n;$$

$$\Lambda_{3.2} : 2x_1 - \bar{z}^2, 3x_2 + 3x_1 \bar{z} - \bar{z}^3, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+2};$$

$\Lambda_{4.4}$: $x_1, \bar{z}^2 + 2x_{n+2}, 3x_2 + \bar{z}^3 + 3\bar{z}x_{n+2}, x_3, x_4, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.2}$: $\bar{y}, 2x_4 + \bar{z}^2, y\bar{y} - x_3^2, \bar{y}\bar{z} + x_3, 3x_2 + 3\bar{z}x_4 + \bar{z}^3,$ $x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.3}$: $\bar{y}^2 + 2x_3, \bar{z}, z\bar{z} - x_4^2, \bar{y}\bar{z} + x_4, 3x_1 + 3x_3\bar{z} + \bar{z}^3,$ $x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.4}$: $\bar{y} - \delta\bar{z}, 3\delta^2 x_1 + 3\delta x_3\bar{y} + \bar{y}^3, 3x_2 + 3\bar{z}x_4 + \bar{z}^3,$ $y^2 + 2\delta x_3, \bar{z}^2 + 2x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{13.2}$: $\mu_1 = 2\bar{y} - \bar{z}^2, \mu_2 = 3\mu_1\bar{z} + \bar{z}^2 + 6x_3, \mu_3 = \mu_2\bar{z} + 3y -$ $- \frac{3}{2}\mu_1\bar{z}^2 - \frac{1}{4}\bar{z}^4, \mu_4 = 2x_2 + \frac{1}{3}(\mu_3\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_1\bar{z}^3 + \frac{1}{20}\bar{z}^5, x_4,$ $x_5, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{14.2}$: $\bar{y}^2 + 2\delta x_3, z\bar{z}, 2\alpha^2 x_1 + (\bar{y}^2 + 2\alpha x)\bar{y} - \frac{1}{3}\bar{y}^3, \bar{y} + \alpha \ln z,$ $x_4, x_5, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{16.4}$: $3\delta^2 x_1 + \bar{y}^3 + 3x_{2e+3}\bar{y}, \bar{y}^2 + 2\delta x_{2e+3}, 2\bar{y} - \delta\psi_2,$ $h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}, x_2, x_{2e+4}, x_{2e+5}, \ldots, x_{n+1}$;

$\Lambda_{17.2}$: $\bar{y}^2 + 2\rho x_{2s+3}, \bar{z}^2 + 2\delta x_{2s+4}, h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1},$ $3\delta^2 x_2 + 3\delta x_{2s+4}\bar{z} + \bar{z}^3, 3\rho^2 x_1 + 3\rho\bar{y}x_{2s+3} + \bar{y}^3,$ $\delta\bar{y} - \rho\bar{z}, \delta\psi_2 - 2\bar{y}, x_{2s+5}, x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{17.3}$: $\bar{y}, 2\delta x_{2s+4} + \bar{z}^2, h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}, 3\delta^2 x_2 + 3\delta x_{2s+4}\bar{z} +$

$+\bar{Z}^3$, $y\bar{y}-x_{2s+3}^2$, $\delta x_{2s+3}+\bar{y}\bar{Z}$, $\delta\psi_2-2\bar{y}$, x_{2s+5}, $x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{17.4}$: $2\delta x_{2s+3}+\bar{y}^2$, $\bar{Z}$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $3\delta^2 x_1+$ $+3\delta x_{2s+3}\bar{y}+\bar{y}^3$, $Z\bar{Z}-x_{2s+4}^2$, $\delta x_{2s+4}+\bar{y}\bar{Z}$, $\delta\psi_2-2\bar{Z}$, x_{2s+5}, $x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{18.2}$: $2\delta\bar{y}-\bar{Z}^2=\mu_1$, $\mu_2=2\delta^2 x_{2s+3}+\mu_1\bar{Z}+\frac{1}{3}\bar{Z}^3$, $\mu_3=\delta y+\frac{1}{\delta^2}(\mu_2\bar{Z}-\frac{1}{2}\bar{Z}^2-\frac{1}{12}\bar{Z}^4)$, $\mu_4=\delta Z+\delta\bar{y}+\frac{1}{\delta}\bar{Z}\mu_3-$ $-\frac{1}{\delta^3}(\frac{1}{2}\mu_2\bar{Z}^2-\frac{1}{6}\bar{Z}^3-\frac{1}{60}\bar{Z}^5)$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{Z}$, x_{2s+4}, $x_{2s+5}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{19.2}$: $\mu_1=2\delta x_{2s+3}+\bar{y}^2$, $Z\bar{Z}$, $2\alpha\bar{y}-\delta\ln\bar{Z}$, $2\delta x_1+\frac{1}{\gamma}(\bar{y}\mu_1-\frac{1}{3}\bar{y}^3)$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{y}$, x_{2s+4}, $x_{2s+5}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{21.2}$: $y^2-2\delta Z$, $\bar{Z}$, $y\bar{Z}+2\delta x_1$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2+2y$, x_{2s+3}, $x_{2s+4}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{22.2}$: $\mu_1=\delta x_1-\bar{Z}^2$, $\frac{1}{\delta}(2\mu_1\bar{Z}+\frac{2}{3}\bar{Z}^3)+\delta x_2$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{Z}$, x_{2s+3}, $x_{2s+4}, \ldots, x_n$, x_{n+2}.

Здесь δ, α_i, ρ, α принимают те же значения, что и в теореме I.I.4; $a=\overline{2, s+1}$; $i=\overline{2, s}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству предложений 2.I.I - 2.I.5.

§ 2. Неэквивалентные подалгебры алгебры AP(2,2)

Если коразмерность подалгебры алгебры AP(2,n) меньше чем $n+1$, то часто несопряженные подалгебры алгебры AP(2, n) дают одни и те же инварианты. Так, например, алгебры $F_{2.2} = \langle B_1 - B_3, P_1 - P_3 \rangle$ и $F_{2.5} = \langle B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$ несопряжены, имеют различную размерность, но одну и ту же коразмерность в пространстве M(2,2): $\operatorname{codim} F_{2.2} = \operatorname{codim} F_{2.5} = 2$; и одну и ту же ПСИ: $x_1 + x_3$, $x_2 - x_4$.

Определение 2.2.I. Пусть L_1 и L_2 - подалгебры алгебры AP(2,n). Если, для некоторого элемента $C \in$ P(2,n), подалгебры $C L_1 C^{-1}$ и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1 и L_2 будем называть эквивалентными. В этом случае будем употреблять обозначение $L_1 \simeq L_2$.

Определение 2.2.2. Если функции $f_i(x)$ ($i = \overline{1,k}$) являются инвариантами ненулевой подалгебры L алгебры AP(2,n), то L будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций.

Определение 2.2.3. Алгебра инвариантности называется минимальной, если она неэквивалентна ни одной своей собственной подалгебре.

Из эквивалентности минимальных алгебр не вытекает их сопряженность относительно группы P(2,n). Например, алгебры $\langle J_{13} - J_{35}, P_1 + P_5 \rangle$, $\langle P_3, P_1 + P_5 \rangle$ являются минимальными алгебрами инвариантности для функций $x_1 - x_5$, x_2, x_4 в пространстве M(2,3). Очевидно, что эти алгебры не являются P(2,3)-сопряженными. В то же время, поскольку для любых $L_1, L_2 \in$ $\in$ AP(2,n) справедливо $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, то для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры АР(2, n) существует одна максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

Предложение 2.2.I. Пусть L_1 , L_2 - подалгебры алгебры АР(2, n). $L_1 \approx L_2$ тогда и только тогда, когда максимальные алгебры инвариантности ПСИ подалгебр L_1 и L_2 Р(2, n)-сопряжены.

Доказательство. Если $L_1 \approx L_2$, то, для некоторого элемента $C \in$ Р(2, n), алгебры $C L_1 C^{-1}$ и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Пусть K_i - максимальная алгебра инвариантности ПСИ алгебры L_i ($i = 1,2$). Очевидно $C K_1 C^{-1}$ и K_2 обладают одними и теми же инвариантами, откуда, в силу единственности максимальной алгебры инвариантности, заключаем, что $C K_1 C^{-1} = K_2$.

Наоборот, если $C K_1 C^{-1} = K_2$ для $C \in$ Р(2, n), то $C L_1 C^{-1}$ и L_2 имеют одни и те же инварианты. Значит $L_1 \approx L_2$. Предложение доказано.

Как и в § 2 главы I, сохраняем принятый там базис алгебры АР(2,2). Кроме того, пусть АР(I,2) = $\langle P_1, P_3, P_4 \rangle \oplus$ $\oplus \langle J_{ab} \mid a,b = 1,3,4 \rangle$, АР(2,I) = $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = \overline{1,3} \rangle$. Отметим, что классификация относительно эквивалентности подалгебр алгебр АР(I,2), АР(2,I) и их ПСИ известны [7,8I] .

Теорема 2.2.I. Неэквивалентные расщепляемые подалгебры алгебры АР(2,2) исчерпываются расщепляемыми подалгебрами $K \subset AP(1,2)$, $L \subset AP(2,1)$, алгебрами $K \oplus \langle P_2 \rangle$, $L \oplus \langle P_4 \rangle$, и такими алгебрами:

$$F_1 = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle \; ; \; F_2 = \langle B_1 - B_3 \rangle \; ; \; F_j = \langle B_2 \rangle : 0,$$

$$\langle P_1 + P_3 \rangle \; , \; \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle , \; \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle \; (j = \overline{3,6});$$

$F_j = \langle B_3 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle\ (j = 7,8);$

$F_j = \langle -B_1 + B_3 + C_2 \rangle : 0,\ \langle P_1 - P_3 \rangle,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$ $(j = \overline{9,11});$

$F_{12} = \langle B_1 - B_3 + C_3 \rangle;\ F_{13} = \langle B_1 - B_3 - C_3 \rangle;$

$F_j = \langle B_2 + e C_2 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3 \rangle,\ \langle P_2 + P_4 \rangle,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle,$ $\langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle\ (0 < e < 1\ ;\ j = \overline{14,18});$

$F_{19} = \langle B_2 + C_2, P_2 + P_4 \rangle;\ F_j = \langle B_2 - e C_3 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$ $(e > 0\ ;\ j = 20,21);\ F_{22} = \langle B_3 + e C_3 \rangle\ (0 < |e| < 1);$

$F_{23} = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle;\ F_{24} = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle;\ F_{25} = \langle B_1 - B_3, C_3 \rangle;$

$F_{26} = \langle B_2, C_2 \rangle;\ F_{27} = \langle B_2, C_3 \rangle;\ F_{28} = \langle B_3, C_3 \rangle;$

$F_{29} = \langle B_2 + \alpha C_2, B_1 - B_3 \rangle\ (\alpha > 0,\ \alpha \neq 1);\ F_{30} = \langle B_2 - \alpha C_3, B_1 - B_3 \rangle$ $(\alpha > 0);\ F_{31} = \langle B_1 - B_3 - C_2, C_1 - C_3 \rangle;\ F_{32} = \langle B_1 - B_3, B_2 - C_2, C_1 - C_3 \rangle;$

$F_{33} = AO(2,2).$

Доказательство. Среди эквивалентных расщепляемых подалгебр алгебры АР(2,2) из перечня, приведенного в теореме I.2.I, выбираем одну подалгебру, а остальные исключаем. Поскольку все случаи в чем-то аналогичны, ограничимся рассмотрением только нескольких, наиболее характерных.

Так как согласно соотношениям (I.2.I) и (2.2.I)

$$B_1 - B_3 = -\tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 + \partial_4) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_4)(\partial_1 - \partial_3),$$

то $\langle B_1-B_3, P_1-P_3\rangle \simeq \langle P_2+P_4, P_1-P_3\rangle$,

$\langle B_1-B_3, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle \simeq \langle P_2+P_4, P_1-P_3\rangle$.

Далее, ранги алгебр $\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2, C_1-C_3\rangle$, $\langle B_1, B_2, B_3\rangle$, $\langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$ равны трем. Поскольку эти алгебры суть подалгебры алгебры AP(2,2), то функция $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$ является их инвариантом. Следовательно, рассматриваемые подалгебры эквивалентны алгебре AO(2,2). Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. Неэквивалентные нерасщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются нерасщепляемыми подалгебрами $K \subset AP(1,2)$, $L \subset AP(2,1)$, алгебрами $K \oplus \langle P_2\rangle$, $L \oplus \langle P_4\rangle$, и следующими алгебрами:

$K_j = \langle B_1-B_3+P_1\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle, \langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$ $(j=\overline{1,3})$;

$K_4 = \langle B_1-B_3+P_2, P_1-P_3\rangle$; $K_5 = \langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_3, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ $(\alpha>0)$; $K_j = \langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_4\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle$ $(j=6,7)$;

$K_j = \langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle$ $(j=8,9)$;

$K_{10} = \langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_1, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ $(\alpha>0)$;

$K_j = \langle B_2+C_2+P_2+P_4\rangle : 0, \langle P_1+P_3\rangle$ $(j=11,12)$;

$K_j = \langle B_2+C_2+P_2\rangle : \langle P_2+P_4\rangle, \langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$ $(j=13,14)$;

$K_{15} = \langle B_1-B_3+P_2-P_4, C_1-C_3\rangle$; $K_{16} = \langle B_1-B_3+P_4, C_1-C_3-P_4\rangle$;

$K_{17} = \langle B_1-B_3+P_2, C_1-C_3-P_4\rangle$; $K_{18} = \langle B_1-B_3+C_1-C_3, B_2+C_2+\alpha P_4\rangle$

$(\alpha > 0)$; $K_{19} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$ $(\alpha > 0)$;

$K_{20} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$; $K_j = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4 \rangle$: 0, $\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_2 + P_4 \rangle$ $(j = \overline{21, 23})$;

$K_{24} = \langle B_1 - B_3, 3B_2 + C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4 \rangle$.

Доказательство. Если ранг алгебры $L \subset AP(2,2)$ равен 2, а генераторы L имеют вид

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x_1, \ldots, x_s)\partial_i,$$

где $s \geqslant 2$, то $L \simeq \langle P_1, P_2, \ldots, P_2 \rangle$. Отсюда следует, что

$$\langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3 \rangle \simeq \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle;$$

$$\langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2 \rangle \simeq \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$$

$(\beta > 0)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

§ 3. Подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3)

В работах [7,60,8I] найдены все неэквивалентные подалгебры алгебры AP(I,3), а в теоремах 2.2.I, 2.2.2 приведены неэквивалентные подалгебры алгебры AP(2,2). Поэтому исключим из рассмотрения подалгебры вида $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$, где $K \subset AP(1,3) = \langle P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{2,5} \rangle$, $L \subset AP(2,2)$.

В дальнейшем, через $\mathcal{L}$ будем обозначать минимальную подалгебру коразмерности I алгебры AP(2,3), не эквивалентную

AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$, и обладающую тем свойством, что ее проекция $\pi(\mathcal{L})$ на AO(2,3) принадлежит нормализатору $AOpt(1,2)$ двумерного изотропного пространства $\langle P_1+P_5, P_2+P_4 \rangle$ в AO(2,3).

Положив в обозначениях (I.I.5) $n=3$, получаем следующие соотношения:

$$M=J_{12}-J_{25}+J_{14}-J_{45} \; ; D=-J_{15}+J_{24} \; ; Z=J_{15}+J_{24} \; ;$$

$$S=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}-J_{14}-J_{25}) \; ; T=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}+J_{14}+J_{25}) \; ;$$

$$G_3=J_{13}-J_{35} \, , H_3=J_{23}-J_{34} \; .$$

Указанные выше генераторы, удовлетворяют коммутационным соотношениям (I.I.6). Кроме того, пусть

$$N_1=P_1+P_5 \, , N_2=P_2+P_4 \, , Y_1=P_1-P_5 \, , Y_2=P_2-P_4 \; ;$$

$$AGL(2,R)=\langle D,S,T \rangle \oplus \langle Z \rangle \; ; U=\langle Y_1, Y_2, N_1, N_2, P_3 \rangle .$$

Генераторы трансляций N_1, N_2, Y_1, Y_2, P_3 связаны с генераторами D, S, T, Z, M, G_3, H_3 следующими коммутационными соотношениями:

$$[Z,Y_1]=[Y_1,D]=Y_1 \; ; [Z,Y_2]=[D,Y_2]=Y_2 \; ;$$

$$[N_1,Z]=[D,N_1]=N_1 \; ; [N_2,Z]=[N_2,D]=N_2 \; ;$$

$$[Y_1,S]=Y_2 \, , [S,N_2]=N_1 \, , [T,Y_2]=Y_1 \; ; \qquad (2,3,I)$$

$$[N_1,T]=N_2 \; ; [Y_1,G_3]=[Y_2,H_3]=2P_3 \; ; [Y_1,M]=2N_2 \; ;$$

$$[P_3,G_3]=N_1 \; ; [P_3,H_3]=N_2 \; ; [M,Y_2]=2N_1$$

(нулевые коммутаторы опущены).

В лемме I.I.2 показано, что $AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3 \rangle \oplus AGL(2,R)$. Очевидно, что $\mathcal{L} \subset AOpt(1,2) \oplus U$. Через τ и ε будем обозначать проектирование $\mathcal{L}$ соответственно на $AGL(2,R)$ и пространство $\langle P_3, G_3, H_3 \rangle$. В леммах 2.3.I - 2.3.7 и теореме 2.3.I проводится исследование алгебры $\mathcal{L}$ в зависимости от ее проекции $\tau(\mathcal{L})$. Если $\tau(L_1) \simeq \tau(L_2)$, но $L_1 \simeq L_2$, то в перечне подалгебр будет фигурировать только алгебра L_1.

Лемма 2.3.I. Если $\tau(\mathcal{L}) = 0$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из следующих алгебр:

$$\mathcal{L}_1 = \langle G_3 + 2Y_2 + \alpha N_2, H_3 + Y_1 + \beta Y_2, M + 2P_3, N_1 \rangle \ (\alpha, \beta \in R);$$

$$\mathcal{L}_2 = \langle G_3 + Y_2, H_3 + Y_1, M, N_1, N_2 \rangle;$$

$$\mathcal{L}_3 = \langle G_3 + Y_1, H_3 + Y_2, M, N_1, N_2 \rangle;$$

$$\mathcal{L}_4 = \langle G_3 + Y_1, H_3 - Y_2, M, N_1, N_2 \rangle.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$. С точностью до автоморфизма $\exp(\theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 + \theta_3 P_3)$ алгебра $\mathcal{L}$ содержит элементы

$$X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha N_2 + \delta M,$$

$$X_2 = H_3 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \sigma M.$$

Очевидно проекция $\sigma X_1 - \delta X_2$ на $\langle M \rangle$ равна нулю. Отсюда заключаем, что с точностью до автоморфизма $\exp(\theta(S+T))$ можно предполагать, что $\delta = 0$. Автоморфизм $\exp(\theta G_3)$ позволяет занулить и коэффициент σ.

Если $P_3 + \gamma_1 Y_1 + \gamma Y_2 + \delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $N_1 + 2\gamma_1 P_3$, $N_2 + 2\gamma P_3$, $2\gamma_1 N_1$, а потому N_1 , N_2, $P_3 \in \mathcal{L}$. Но в таком случае $\mathcal{L} \simeq L \oplus \langle P_5 \rangle$, где $L \subset$ AP(2,2). Противоречие.

Пусть $X_3 = [X_1, X_2]$. Очевидно, что

$X_3 = M + 2(\alpha_2 - \lambda_1) P_3$, где $\alpha_2 - \lambda_1 \neq 0$, $[X_3, X_1] =$

$(4\alpha_2 - 2\lambda_1) N_1 - 2\alpha_1 N_2$, $[X_3, X_2] = 2\lambda_2 N_1 + (2\alpha_2 - 4\lambda_1) N_2$.

Если $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент вида $\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2$, то, применяя автоморфизм $\exp\theta(S+T)$, получаем, что $N_1 \in \mathcal{L}$. Так как $\langle M + \mu P_3, N_1, N_2 \rangle \simeq \langle P_3, N_1, N_2 \rangle$, то $N_2 \notin \mathcal{L}$. Поэтому можно предполагать, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\lambda_1$. С точностью до автоморфизма $\exp(\theta Z)$ получаем, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$. Тогда, применяя автоморфизм $\exp(\theta_1 Y_1 + \theta_2 H_3 + \theta_3 P_3)$, получаем, что $\mathcal{L}$ содержит элементы

$$X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \beta N_2 , \; X_2 = P_3 + \gamma M + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2,$$

$$X_3 = [X_2, X_1] = (1 + 2\gamma\alpha_2) N_1 - 2\gamma\alpha_1 N_2 + 2\lambda_1 P_3, \; X_4 = [X_3, X_1] = 2\lambda_1 N_1.$$

За счет автоморфизма $\exp(\theta_1 H_3 + \theta_2 Y_1)$ можно допускать, что $\lambda_2 = 0$ при $\gamma \neq 0$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то N_1 , $P_3 - \gamma\alpha_1\lambda_1^{-1} N_2 \in \mathcal{L}$. Автоморфизм $\exp(\theta H_3)$ позволяет выделить P_3 , что противоречит определению $\mathcal{L}$. Значит, $\lambda_1 = 0$. Так как $\dim \mathcal{L} \geqslant 4$, то $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент $\delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 + \sigma M + \rho Y_2$. Анализируя возможные случаи, приходим к выводу, что $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\varepsilon(\mathcal{L}') = \langle G_3 \rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3 \rangle$, то $\mathcal{L}$ сопряжена алгебре $\langle G_3 + Y_1, Y_2, N_1, N_2 \rangle$, а последняя - эквивалентна алгебре $L \oplus \langle P_5 \rangle$, где $L \subset$ AP(2,2).

Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle P_3 \rangle$, то $P_3 \in \mathcal{L}$ или $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где

$\varepsilon(\mathcal{L}')=0$. Если $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3\rangle$, то с точностью до автоморфизмов $\exp\theta(S+T)$, $\exp(tT)$, $\exp(\theta_1 J_{15}+\theta_2 J_{24})$ алгебра $\mathcal{L}$ сопряжена одной из алгебр: $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.2. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$\mathcal{L}_5=\langle D+\alpha P_3, G_3+\beta Y_2, M+P_3, N_1\rangle$ ($\beta\neq 0$, $\alpha>0$);

$\mathcal{L}_6=\langle D, G_3+Y_2, M-2P_3, N_2\rangle$; $\mathcal{L}_7=\langle D+\alpha P_3, G_3+Y_2, N_1, N_2\rangle$ ($\alpha>0$); $\mathcal{L}_8=\langle D, G_3+Y_2, N_1, N_2\rangle$;

$\mathcal{L}_9=\langle D+\alpha P_3, M+P_3, N_1, Y_2\rangle$ ($\alpha>0$).

Доказательство. Так как D действует вполне приводимо на U и аннулирует в U только $\langle M, P_3\rangle$, то в силу предложения 2.I [68] пространство $\mathcal{L}\cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3\rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1\rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2\rangle$.

Если $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3, P_3\rangle$, то ранг алгебры $\mathcal{L}$ равен 5. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, P_3\rangle$. С точностью до сопряженности $G_3+\lambda Y_2\in\mathcal{L}$ ($\lambda\neq 0$). Проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1\rangle$ равна нулю. Если $M+\mu P_3\in\mathcal{L}$ ($\mu\neq 0$), то $D+\delta P_3\in\mathcal{L}$. При $\delta\neq 0$ получаем алгебру $\mathcal{L}_5$. Если $N_2\in\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}=\mathcal{L}_6$ Допустим, что $M+\mu P_3\notin\mathcal{L}$ ($\mu\neq 0$). В этом случае N_1, $N_2\in\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L}$ эквивалентна $\mathcal{L}_7$.

Пусть

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{J, 1, J\}$, сводит случай $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle H_3, P_3\rangle$ к случаю $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, P_3\rangle$.

Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3\rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3+\beta Y_2$, $H_3+\beta Y_1+\delta N_2$, M. Если $\beta\neq 0$, то $\mathcal{L}\approx\mathcal{L}_8$. Если $\beta=0$, то $\mathcal{L}\approx$ AO(2,3). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D+\lambda Z\rangle$ $(\lambda>0)$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{10}=\langle 3D+Z+\mu P_3, M+Y_1, Y_2, N_1\rangle \quad (\mu>0);$$

$$\mathcal{L}_{11}=\langle D+Z+\alpha P_3, G_3+Y_1, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha>0);$$

$$\mathcal{L}_{12}=\langle 3D+Z, M+Y_1, H_3, N_1\rangle .$$

Лемма 2.3.4. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle T\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{13}=\langle T+G_3+\alpha Y_1+Y_2, H_3+2Y_1+\beta N_1, M-2P_3, N_2\rangle \quad (\alpha,\beta\in R);$$

$$\mathcal{L}_{14}=\langle T+G_3+\alpha Y_1+Y_2, H_3+Y_1, M, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha\in R).$$

Доказательство лемм 2.3.3, 2.3.4 аналогично доказательству лемм 2.3.I, 2.3.2.

Лемма 2.3.5. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D, T\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна алгебре $\mathcal{L}_{15}=\langle D, T, H_3+Y_1, M+2P_3\rangle$.

Доказательство. На основании предложения 2.I [68] и леммы 3.I [68], алгебра $\mathcal{L}$ содержит $D+\alpha M+\beta P_3$, T, а $\mathcal{L}\cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3\rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1\rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2\rangle$, причем, если K - проекция $\mathcal{L}\cap U$ на $\langle G_3, Y_2, N_1\rangle$, то $[T, K]$ содержится в проекции $\mathcal{L}\cap U$ на $\langle H_3, Y_1, N_2\rangle$. Легко видеть, что $\langle T, N_2\rangle \approx \langle Y_1, N_2\rangle$, $\langle T, Y_1+\delta N_2\rangle \approx \langle Y_1, N_2\rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3, P_3\rangle$, то $\mathcal{L}\approx\mathcal{L}_{15}$. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})= =\langle G_3, H_3\rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3+\gamma Y_2$, $H_3-\gamma Y_1$. Так как $[G_3+\gamma Y_2, H_3-\gamma Y_1]=4\gamma P_3$, то $\gamma=0$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{L}\approx AO(2,3)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.6. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D+\lambda Z, T\rangle$ ($\lambda\neq 0$), то сопряжена одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{16}=\langle D+3Z, T+G_3, N_1, N_2\rangle;$$

$$\mathcal{L}_{17}=\langle D+3Z+\alpha P_3, T+G_3, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha>0);$$

$$\mathcal{L}_{18}=\langle D+3Z, T+G_3, M, H_3+\gamma N_2\rangle \quad (\gamma>0);$$

$$\mathcal{L}_{19}=\langle D+3Z, T+N_1, M, H_3\rangle.$$

Доказательство. На основании коммутационных соотношений (I.I.6) и (2.3.I), имеем

$$[D+\lambda Z, \alpha T+\beta G_3+\gamma H_3+\delta P_3+\rho_1 Y_1+\rho_2 Y_2+\mu_1 N_1+\mu_2 N_2+\sigma M]=$$
$$=-2\alpha T+(1-\lambda)(\beta G_3+\mu_1 N_1)-(1+\lambda)(\gamma H_3+\mu_2 N_2)+$$
$$+(\lambda-1)\rho_1 Y_1+(\lambda+1)\rho_2 Y_2-2\lambda\sigma M.$$

Пусть $\lambda\neq\pm\frac{1}{3}$, ± 1, ± 3. В силу предложения 2.I и леммы 3.I [68] алгебра $\mathcal{L}$ содержит $D+\lambda Z+\mu P_3$, T, а пространство $\mathcal{L}\cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M\rangle$, $\langle Y_1\rangle$, $\langle Y_2\rangle$, $\langle G_3, N_1\rangle$, $\langle H_3, N_2\rangle$, $\langle P_3\rangle$.

Если $G_3+\gamma N_1\in\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $[G_3+\gamma N_1, T]= = H_3+\gamma N_2$, а также M. В этом случае $\mathcal{L}= =\langle D+\lambda Z, G_3+\gamma N_1, H_3+\gamma N_2, M, T\rangle$, а потому $\mathcal{L}\approx AO(2,3)$.

Если $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D + Z + \mu P_3$, T, а пространство $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, Y_1 \rangle$, $\langle Y_2 \rangle$, $\langle G_3, N_1 \rangle$, $\langle H_3, N_2 \rangle$, $\langle P_3 \rangle$. Отсюда вытекает, что если $\mu = 0$, то $\mathcal{L} \simeq AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ или $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_{19}$, а если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$.

Если $\lambda = -\frac{1}{3}$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D - Z + \mu P_3$, T, а $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle Y_1 \rangle$, $\langle M, Y_2 \rangle$, $\langle G_3, N_1 \rangle$, $\langle H_3, N_2 \rangle$, $\langle P_3 \rangle$. Поскольку $[T, Y_2] = Y_1$, $\langle T, Y_1 \rangle \simeq \langle N_2, Y_1 \rangle$, то проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ равна нулю.

Если $\mu = 0$, то $\mathcal{L}$ сопряжена подалгебре алгебры AO(2,3) или $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$. Если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$.

Случаи $\lambda = \pm 1$, ± 3 рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.7. Если $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$, то $\mathcal{L}$ сопряжена одной из следующих алгебр:

$$\mathcal{L}_{20} = \langle D + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle \quad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \geq 0);$$

$$\mathcal{L}_{21} = \langle S + T + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle \quad (\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \neq 0).$$

Доказательство леммы 2.3.7 аналогично доказательству предыдущих лемм.

Теорема 2.3.I. Подалгебры коразмерности один алгебры AP(2,3), не эквивалентные алгебрам AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$, исчерпываются алгебрами, описанными в леммах 2.3.I-2.3.7.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случаев алгебр $\mathcal{R} \subset$ AP(2,3), проекции которых на AO(2,3) не сопряжены подалгебрам алгебры $AOpt(1,2)$. Пусть $G_a = J_{1a} - J_{a5}$ ($a = 2,3,4$), $AO[2,4] = \langle J_{cd} \mid c, d = 2,3,4 \rangle$, $\tilde{AP}'(I,2) =$

$= \langle G_2, G_3, G_4 \rangle \oplus (AO[2,4] \oplus \langle J_{15} \rangle)$. Так как

$$J_{15} = \frac{Z-D}{2}, \quad G_2 = \frac{M+2S}{2}, \quad G_4 = \frac{M-2S}{2},$$

то $J_{15}, G_2, G_3, G_4 \in AOpt(1,2)$. Отсюда вытекает, что подалгебра $\mathfrak{f}$ алгебры $A\tilde{P}'(1,2)$ не сопряжена подалгебре алгебры $AOpt(1,2)$ только в том случае, если ее проекция $\mathfrak{N}$ на $AO[2,4]$ не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$. Последнее условие выполняется тогда, когда $\mathfrak{N}$ сопряжена одной из следующих алгебр: $AO[2,4]$, $\langle J_{34} \rangle$.

Пусть $\mathcal{L}$ - подалгебра коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$, не эквивалентная алгебрам $AO(2,3)$, $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$; $\mathfrak{f} = \pi(\mathcal{L}) \subset A\hat{P}'(1,2)$, $\mathfrak{N} = \langle J_{34} \rangle$. В силу леммы 3.1 [68] алгебра $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию W на $\langle G_3, G_4, P_3, P_4 \rangle$. Если $W = 0$, то функция $x_3^2 + x_4^2$ будет инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \simeq \langle J_{34}, P_1, P_2, P_5 \rangle$. Если $P_3, P_4 \in W$, то $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Пусть $W \neq 0$ и $P_3, P_4 \notin W$. Тогда W обладает базисом $G_3 + \alpha P_3 + \beta P_4$, $G_4 - \beta P_3 + \alpha P_4$. Коммутатор этих элементов равен $2\beta N_1$.

Если $\beta \neq 0$, то $N_1 \in \mathcal{L}$. Отсюда легко получить, что $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $\beta = 0$, то с точностью до автоморфизма $\exp(\theta Y_1)$ имеем $W = \langle G_3, G_4 \rangle$. Если проекция $\mathcal{L}$ на $\langle J_{15} \rangle$ равна нулю, то $x_1 - x_5$ является инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \simeq \langle N_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Если проекция $\mathcal{L}$ на $\langle J_{15} \rangle$ отлична от нуля, то $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию Ω на $\langle N_1, G_2 \rangle$. Допустим, что $\Omega = \langle G_2 + \gamma N_1 \rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(\theta P_2)$, получаем, что $G_2 \in \Omega$. Если $N_1 \in \Omega$, то $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $N_1 \notin \Omega$, то $\mathcal{L} \simeq AO(2,3)$

или $\mathcal{L} \simeq L \oplus \langle P_5 \rangle$.

Случай $f = \pi(\mathcal{L})$, $\mathfrak{N} = AO[2,4]$ рассматривается аналогично. Если проекция $\mathcal{L}$ на AO(2,3) не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр: AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$. Теорема доказана.

§ 4. Инварианты подалгебр алгебры AP(2,2) и подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3)

В § 2 настоящей главы получен перечень всех неэквивалентных подалгебр алгебры AP(2,2). Для отыскания ПСИ этих подалгебр нужно для каждой из них решить систему ДУ (2.I.2). Подобная задача решалась в § I этой главы для однопараметрических подгрупп группы P(2,n). Опустив довольно громоздкие вычисления, приводим основные инварианты тех подалгебр, которые явно указаны в теоремах 2.2.I и 2.2.2. Относительно алгебр $K \subset$ $\subset$ AP(I,2), $L \subset$ AP(2,I), $K \oplus \langle P_2 \rangle$, $L \oplus \langle P_4 \rangle$ сделаем следующее замечание.

Поскольку инварианты алгебр K и L известны [7,60, 8I], то ПСИ алгебр K в пространстве M(2,2) составляют основные инварианты алгебр K в M(I,2) и функция x_2; алгебр L - основные инварианты L в M(2,I) и функция x_4. ПСИ алгебр $K \oplus \langle P_2 \rangle$ и $L \oplus \langle P_4 \rangle$ в M(2,2) полностью совпадают с ПСИ алгебр K и L в M(I,2) и M(2,I), соответственно.

Пусть $y_1 = x_1 + x_3$, $\bar{y}_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 + x_4$, $\bar{y}_2 = x_2 - x_4$. Запись L : $f_1(x), \ldots, f_5(x)$ означает, что функции $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_5(x)$ составляют ПСИ алгебры L .

1) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры AP(2,2).

$F_5 : \bar{y}_1 \bar{y}_2$; $F_6 : \bar{y}_1 y_2^{-1}$; $F_8 : \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2$; $F_{11} : 2\ln \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \bar{y}_2^{-1}$; $F_{17} : \bar{y}_1^{1-e} \cdot \bar{y}_2^{1+e}$; $F_{18} : \bar{y}_1^{e-1} \cdot y_2^{e+1}$; $F_{21} : \operatorname{arctg}(y_2 \bar{y}_1^{-1}) + \frac{e}{2} \ln(\bar{y}_1^2 + y_2^2)$; $F_{33} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$; $K_3 : y_1^2 + 2y_2$; $K_5 : \frac{1}{2}(\alpha y_1^2 + (\alpha+1)\bar{y}_2 + (\alpha-1) y_2)$; $K_{10} : \frac{1}{2}(y_1^2 + (1-\alpha) y_2 - (1+\alpha)\bar{y}_2)$; $K_{14} : \ln \bar{y}_1 - \bar{y}_2$; $K_{22} : \frac{1}{2}(y_2 \bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1} + \frac{1}{4} y_1 \bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $K_{23} : (y_1 \bar{y}_1 - \frac{1}{4} y_1 \bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $K_{24} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2^2 y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$.

2) Инварианты подалгебр коразмерности 2 алгебры AP(2,2).

$F_1 : \bar{y}_1, \bar{y}_2$; $F_4 : (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\ln(\bar{y}_1 y_2^{-1})$; $F_{10} : \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2, \ln y_1 + \frac{1}{2} y_2 y_1^{-1}$; $F_{15} : (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\ln(\bar{y}_1^{1-e} \bar{y}_2^{1+e})$; $F_{16} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\ln(y_1^{e-1} \bar{y}_2^{e+1})$; $F_{19} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, \bar{y}_2$; $F_{23} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \bar{y}_2 y_1^{-1}$; $F_{24} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}\ln(y_1 \bar{y}_2)$; $F_{25} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}\ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2)$; $F_{26} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$; $F_{27} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, y_1 y_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2$; $F_{28} : (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, (x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}$; $F_{29} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}\ln(y_1^{\alpha-1} \bar{y}_2^{\alpha+1})$; $F_{30} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y_1 \bar{y}_2^{-1}) + \frac{\alpha}{4}\ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2)$; $F_{31} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\ln y_1 - \frac{1}{4} y_2 y_1^{-1}$; $K_2 : y_2 + \frac{1}{2} y_1^2, \frac{1}{4}\bar{y}_2$; $K_4 : y^{\frac{1}{2}}, x_4 + \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2$; $F_{32} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\ln y_1$; $K_7 : y_1, x_2 + y_1 x_4$;

K_9: y_1, $x_4+y_1x_2$; K_{12}: $\frac{1}{2}\bar{y}_2$, $\ln\bar{y}_1-\frac{1}{2}y_2$;
K_{13}: $(y_1\bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1+\frac{1}{2}\bar{y}_2$; K_{15}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2+$
$+y_2^2y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1$; K_{16}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2-2x_2^2y_1^{-1}-2\bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}$,
y_1; K_{17}: $\frac{1}{2}((y_2-\bar{y}_2(1-y_1))^2+(2\bar{y}_1-\bar{y}_2^2)(1+(1-y_1)^2))^{\frac{1}{2}}$, y_1;
K_{18}: $(y_1\bar{y}_1+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha\ln y_1+x_4$; K_{19}: $(y_1\bar{y}_1-x_4^2)^{\frac{1}{2}}$,
$\alpha\ln y_1+x_2$; K_{20}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2+2\bar{y}_2\ln y_1)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln\bar{y}_2$;
K_{21}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2+y_2^2y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $(y_1\bar{y}_2+2y_2)y_1^{-\frac{1}{2}}$.

3) Инварианты подалгебр коразмерности 3 алгебры AP(2,2).

F_2: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1$, $\frac{1}{2}\ln\bar{y}_2$;
F_3: $(y_1\bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}$, $(y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln(y_1\bar{y}_2^{-1})$;
F_7: $(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $(x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}$, $\arcsin(x_2(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}})-$
$-\arcsin(x_4(x_3^2+x_4^2)^{-\frac{1}{2}})$; F_9: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $y_1\times\bar{y}_2$,
$\frac{1}{2}\ln y_1+\frac{1}{4}y_2y_1^{-1}$; F_{12}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $y_1^2+\bar{y}_2^2$,
$\dfrac{\bar{y}_1\bar{y}_2-y_1y_2}{y_1^2+\bar{y}_2^2}-2\arcsin\dfrac{\bar{y}_2}{(y_1^2+\bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$; F_{13}: $(y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$,
$y_1^2+\bar{y}_2^2$, $\dfrac{\bar{y}_1\bar{y}_2-y_1y_2}{y_1^2+\bar{y}_2^2}+2\arcsin\dfrac{\bar{y}_2}{(y_1^2+\bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$;

$F_{14}: (y_1\bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}$, $(y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln(\bar{y}_1^{\,1-e}\cdot\bar{y}_2^{\,1+e})$;

$F_{20}: (y_1\bar{y}_1+y_2\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $y_1y_2-\bar{y}_1\bar{y}_2$, $e\ln(y_1^2+\bar{y}_2^2)-$ $-2\,\mathrm{arctg}(\bar{y}_2\cdot y_1^{-1})$; $F_{22}: (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $(x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}$,

$(1-e)\arcsin\dfrac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}-(1+e)\arcsin\dfrac{x_4}{(x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}}$;

$K_1: x_3+\frac{1}{2}y_1\bar{y}_2$, $\frac{1}{4}y_2+\frac{1}{8}y_1^2$, $\bar{y}_2$;

$K_6: (y_1\bar{y}_1+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, y_1, $x_2+y_1x_4$;

$K_8: (y_1\bar{y}_1-x_4^2)^{\frac{1}{2}}$, y_1, $x_4+y_1x_2$;

$K_{11}: (y_1\bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}$, $\bar{y}_2$, $\frac{1}{4}y_2+\frac{1}{2}\ln y_1$.

Значения d, e, α в приведенных выше ПСИ те же, что и в теоремах 2.2.I, 2.2.2.

Подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3), не эквивалентные алгебрам AO(2,3), $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$, где $K\subset$ $\subset$ AP(I,3), $L\subset$ AP(2,2), получены в леммах 2.3.I - 2.3.7. Поскольку инварианты алгебр $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$ в пространстве M(2,3) полностью совпадают с инвариантами алгебр K и L в M(I,3) и M(2,2), соответственно, а ПСИ алгебр K [7,60,8I] и L известны, то достаточно указать ПСИ для алгебр AO(2,3) и $\mathcal{L}_i$ ($i=\overline{1,21}$).

Запись $L: f(x)$ означает, что функция $f(x)$ составляет ПСИ алгебры L. Кроме того, пусть $y_1=x_1+x_5$, $\bar{y}_1=$ $=x_1-x_5$, $y_2=x_2+x_4$, $\bar{y}_2=x_2-x_4$.

4) Инварианты подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3).

$\mathcal{L}_1 : y_2 - \bar{y}_1 x_3 - \frac{1}{4}(2\alpha - \bar{y}_1^{\,2})\bar{y}_2 + \frac{\beta}{4}(2\alpha \bar{y}_1 - \frac{1}{3}\bar{y}_1^{\,3})$;

$\mathcal{L}_2 : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2$; $\mathcal{L}_3 : x_3 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^{\,2} - \frac{1}{4}\bar{y}_2^{\,2}$;

$\mathcal{L}_4 : x_3 + \frac{1}{4}\bar{y}_2^{\,2} - \frac{1}{4}\bar{y}_1^{\,2}$; $\mathcal{L}_5 : \alpha\beta \ln \bar{y}_1 + \frac{1}{2}\beta y_2 \bar{y}_1^{\,-1} - \beta x_3 + \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_6 : (\bar{y}_1\bar{y}_2 x_3 - y_1\bar{y}_1 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2^{\,2})^{\frac{1}{2}}$; $\mathcal{L}_7 : x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_8 : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2$; $\mathcal{L}_9 : x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2} y_2 \bar{y}_1^{\,-1}$;

$\mathcal{L}_{10} : x_3 - \frac{\mu}{4}\ln(2y_2 - \bar{y}_1^{\,2})$; $\mathcal{L}_{11} : x_3 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^{\,2} + \frac{\alpha}{2}\ln \bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_{12} : \frac{1}{2}(2y_2\bar{y}_2 - 2x_3^2 - \bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{13} : \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - x_3\bar{y}_2 - \frac{\beta}{2}\bar{y}_1 + \frac{1}{4}\bar{y}_1\bar{y}_2^{\,2} + \frac{\alpha\beta}{2}\bar{y}_2 - \frac{\beta}{8}\bar{y}_2^{\,2} - \frac{\alpha}{12}\bar{y}_2^{\,3} + \frac{1}{32}\bar{y}_2^{\,4})$;

$\mathcal{L}_{14} : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \frac{1}{4}\alpha\bar{y}_2^{\,2} - \frac{1}{12}\bar{y}_2^{\,3}$;

$\mathcal{L}_{15} : (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2 - y_1^2\bar{y}_2^{\,-2} - 2x_3 y_1 \bar{y}_2^{\,-1})^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{16} : x_3 + \frac{1}{2}\bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2^{\,-1}$; $\mathcal{L}_{17} : x_3 + \frac{\alpha}{2}\ln \bar{y}_2 + \frac{1}{2}\bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2^{\,-1}$;

$\mathcal{L}_{18} : (y_1\bar{y}_1 - x_3^2 + y_2\bar{y}_2 - 2\gamma x_3 - \gamma\bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2^{\,-1} - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{19} : (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2 + \bar{y}_1^{\,2}\bar{y}_2^{\,-1})^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{20} : x_3 + \frac{\beta}{2}\ln(\bar{y}_1\bar{y}_2) + \frac{\alpha}{2}\ln(\bar{y}_2\bar{y}_1^{\,-1})$;

$\mathcal{L}_{21} : x_3 - \alpha\,\mathrm{arctg}(\bar{y}_2\bar{y}_1^{\,-1}) + \frac{\beta}{2}\ln(\bar{y}_1^{\,2} + \bar{y}_2^{\,2})$;

AO(2,3) : $(y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}$.

Значения α, β, γ, μ те же, что и в леммах 2.3.I - 2.3.7.

§ 5. Инвариантные операторы подалгебр алгебры AP(2,2)

Для нахождения инвариантных операторов подалгебр алгебры AP(2,2) /функций генераторов, коммутирующих со всеми генераторами, задающими данную подалгебру/, воспользуемся методом, предложенным в работах [15,64,72] . Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть $L=\langle X_1, X_2, \dots, X_s \rangle$ - вещественная алгебра Ли с операцией коммутирования

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k , \qquad (2.5.1)$$

где c_{ij}^k - структурные константы данной алгебры Ли. Тогда, произвольная функция $F(X)=F(X_1,\dots,X_s)$ называется инвариантным оператором алгебры L , если она коммутирует со всеми генераторами X_i , т.е. имеет место следующее соотношение:

$$[F(X), X_i] = 0 \qquad (i=\overline{1,s}). \qquad (2.5.2)$$

Пользуясь тем, что алгебра L изоморфна алгебре дифференциальных операторов, с аналогичной операцией коммутирования, произведем такую замену:

$$X_i \to \hat{X}_i = \sum_{jk} c_{ij}^k X_k \frac{\partial}{\partial X_j} . \qquad (2.5.3)$$

Тогда условие (2.5.2) заменяется системой ДУ в частных производных $\hat{X} F(X) = 0$, или, что то же самое,

$$\Big(\sum_{kj} c_{ij}^k X_k \frac{\partial}{\partial X_j}\Big) F(X) = 0 , \qquad (2.5.4)$$

которая является системой линейных однородных ДУ в частных производных первого порядка и решается известными методами [17].

Из вышеизложенного следует, что нахождение инвариантных операторов подалгебр алгебры L сводится к определению фундаментальных решений систем (2.5.4).

Сохраним в дальнейшем обозначения и нумерацию подалгебр алгебры AP(2,2), принятую в § 2 главы I. Так как инвариантные операторы действительных алгебр Ли размерности не большей пяти известны [90], будем рассматривать подалгебры алгебры AP(2,2), размерность которых больше пяти.

Остановимся более подробно на случае алгебры $F_{21,3}$. Для удобства рассматриваем указанную алгебру в следующем базисе:

$$F_{21,3} = \langle B_2, C_3, P_1 - P_3, P_1 + P_3, P_2 - P_4, P_2 + P_4 \rangle.$$

В этом базисе алгебра $F_{21,3}$ определяется такими структурными константами: $C_{13}^{3} = C_{16}^{3} = C_{23}^{6} = C_{24}^{5} = -\frac{1}{2}$, $C_{14}^{4} = C_{15}^{5} = C_{25}^{4} = C_{26}^{3} = \frac{1}{2}$, $C_{ij}^{k} = -C_{ji}^{k}$ (нулевые C_{ij}^{k} опущены).

Переобозначив $B_2 = X_1$, $C_3 = X_2$, $P_1 - P_3 = X_3$, $P_1 + P_3 = X_4$, $P_2 - P_4 = X_5$, $P_2 + P_4 = X_6$, получаем следующую систему (2.5.4) для алгебры $F_{21,3}$:

$$\left(X_3 \frac{\partial}{\partial X_3} - X_4 \frac{\partial}{\partial X_4} - X_5 \frac{\partial}{\partial X_5} + X_6 \frac{\partial}{\partial X_6} \right) F(X) = 0,$$

$$\left(X_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + X_5 \frac{\partial}{\partial X_4} - X_4 \frac{\partial}{\partial X_5} - X_3 \frac{\partial}{\partial X_6} \right) F(X) = 0,$$

$$\left(X_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_6 \frac{\partial}{\partial X_2} \right) F(X) = 0, \quad \left(X_6 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_3 \frac{\partial}{\partial X_2} \right) F(X) = 0.$$

Уравнения, являющиеся линейной комбинацией выписанных уравнений, опущены.

Два последних уравнения системы показывают, что $F(X)$ не зависит от X_1 и X_2, а два первых дают следующие фундаментальные решения системы: $(X_4^2+X_5^2)(X_3^2+X_6^2)$, $X_3X_4+X_5X_6$. Возвратившись к исходным обозначениям, получаем два инвариантных оператора алгебры $F_{21,3}$:

$$\{(P_1+P_3)^2+(P_2-P_4)\}\{(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2\},\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2.$$

Отметим, что найденные операторы имеют полиномиальный вид, а значит являются операторами Казимира, т.е. элементами центра универсальной обертывающей алгебры $F_{21,3}$.

Ниже, опустив довольно громоздкие вычисления, приводим явный вид инвариантных операторов для всех подалгебр алгебры AP(2,2), размерность которых больше пяти. Запись $L_1, \ldots, L_s$: $f_1, f_2, \ldots, f_k$ обозначает, что алгебры $L_1, \ldots, L_s$ имеют инвариантные операторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

$F_{20,6}$, $F_{29,3}$, $F_{30,6}$, $F_{31,6}$, $F_{32,3}$, $F_{33,7}$, $F_{35,6}$, $F_{42,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{16,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $\dfrac{P_1-P_3}{P_2+P_4}$; $F_{17,7}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, P_1-P_3 ; $F_{18,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)(P_2+P_4)$; $F_{19,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2$; $F_{20,6}$: $P_1^2-P_3^2$, $P_2^2-P_4^2$; $F_{21,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $[(P_1+P_3)^2+(P_2-P_4)^2][(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2]$; $F_{22,4}$: $P_1^2+P_2^2$, $P_3^2+P_4^2$; $F_{23,9}$: P_4, $P_1^2+P_2^2-P_3^2$; $F_{24,9}$: P_2, $P_1^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{25,11}$: P_2+P_4, $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{26,9}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)^{d-1}(P_2+P_4)^{d+1}$ $(d>0, \neq 1)$; $F_{27,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$,

$[P_1-P_3+i(P_2+P_4)]^{1+i\alpha}[P_1-P_3-i(P_2+P_4)]^{i\alpha-1}$ $(\alpha>0)$; $F_{28,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)^2\exp((P_2-P_4)/(P_1-P_3))$; $F_{34,4}$: $(B_1-B_3)(P_2-P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)-$ $-(C_1-C_3)(P_2+P_4)$, P_1-P_3 ; $F_{36,3}$: $P_1^2-P_3^2-P_4^2$, $(B_1-C_1)P_3-(B_2+C_2)P_4+(B_3-C_3)P_1$; $F_{37,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2$, $(B_1+C_1)P_1-(B_2+C_2)P_2-(B_3+C_3)P_3$; $F_{38,2}$: C_1-C_3 , $(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2-2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2$; $F_{43,1}$: $B_1^2+B_2^2-B_3^2$, $C_1^2+C_2^2-C_3^2$; $\tilde{F}_{34,2}$: P_1-P_3 , $2[(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2+P_3)(P_1-P_3)]+P_2^2-P_4^2$; $F_{34,5}$: P_1-P_3 , $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(B_1-B_3)(P_2-P_4)-$ $-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)$; $F_{36,4}$: P_2 , $P_1^2-P_3^2-P_4^2$, $(B_1-C_1)P_3-(B_2+C_2)P_4-(B_3-C_3)P_1$; $F_{37,4}$: P_4 , $P_1^2+P_2^2-P_3^2$, $(B_1+C_1)P_1-(B_2+C_2)P_2-(B_3+C_3)P_3$; $F_{41,4}$: $[(C_1-C_3)(P_2+P_4)-$ $-(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(B_2-C_2)(P_1-P_3)](P_1-P_3)^{-1}$; $F_{42,2}$: $[(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2+$ $+2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2](C_1-C_3)^{-1}$; $F_{38,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$,

$$(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2+2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_1^2-P_3^2)-$$
$$-(C_1-C_3)(P_2^2-P_4^2)-(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2;\ F_{39,3}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$(B_1-B_3)(P_1+P_3)(P_2-P_4)-(B_2+C_2)(P_2^2-P_4^2)-(C_2-B_2)(P_1^2-P_3^2)+$$
$$+(B_1+B_3)(P_1-P_3)(P_2+P_4);\ F_{40,2}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$(B_1+iB_2)(P_1+iP_2)(P_3+iP_4)-(B_3+C_3)(P_3^2+P_4^2)-$$
$$-(B_3-C_3)(P_1^2+P_2^2)+(B_1-iB_2)(P_1-iP_2)(P_3-iP_4);\ F_{41,5}:$$
$$P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,\ [(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+$$
$$+(B_2-C_2)(P_1-P_3)](P_1-P_3)^{-1};\ F_{43,2}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$[(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)]\times$$
$$\times[(C_1+C_3)(P_2-P_4)-(B_1+B_3)(P_2+P_4)-(B_2-C_2)(P_1+P_3)]+$$
$$+[(B_1+B_3)(P_1+P_3)-(B_2+C_2)(P_2-P_4)+(C_1-C_3)(P_1+P_3)]\times$$
$$\times[(B_2+C_2)(P_2+P_4)-(B_1-B_3)(P_1+P_3)-(C_1+C_3)(P_1-P_3)].$$

Алгебры $F_{30,5}$, $F_{31,5}$, $F_{33,6}$, $F_{35,5}$, $F_{39,2}$, $F_{41,3}$, $\widetilde{F}_{35,5}$ инвариантов не имеют.

Г Л А В А III

СИММЕТРИЙНАЯ РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО M(2,3)

Если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ - ПСИ подалгебры L алгебры инвариантности ДУ от n переменных, то анзац $\omega_s = f(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$ редуцирует данное ДУ к ДУ, зависящему от $(s-1)$ переменных. Такую редукцию будем называть симметрийной. В § I этой главы исследуется симметрийная редукция ультрагиперболического уравнения Даламбера, с использованием подгрупп групп P(2,2) и P(2,3). Во втором параграфе найдены решения некоторых из полученных редуцированных уравнений, по которым построены точные решения для нелинейных волновых уравнений Даламбера, Лиувилля, эйконала. Разделению переменных для уравнения Гельмгольца в пространстве M(2,3) посвящен § 3. В § 4 подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3) применены для нахождения точных решений одной релятивистски-инвариантной системы ДУ.

§ I. Симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера

Рассмотрим нелинейное ультрагиперболическое уравнение Даламбера

$$\Box_{2,3} u = F(u, (\nabla_{2,3} u)^2), \tag{3.I.I}$$

где

$$\Box_{2,3} u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - u_{55}, \tag{3.I.2}$$

$$(\nabla_{2,3} u)^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 - (u_5)^2, \tag{3.I.3}$$

$u_{\mu\nu}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u_\mu=\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, F - произвольная гладкая функция.

Пятимерное уравнение (3.1.1-3.1.3) является естественным обобщением линейного уравнения Даламбера (или, как это часто принято в физической литературе, уравнения Клейна-Гордона-Фока). Его группой симметрии является группа Пуанкаре P(2,3). Для симметрийной редукции уравнения (3.1.1) будем пользоваться подстановкой

$$u=\varphi(\omega), \qquad (3.1.4)$$

которая является частным случаем анзаца предложенного в работах [48,52] (здесь φ - произвольная дважды дифференцируемая функция, а $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_s)$ $(1\leq s<5)$ составляют ПСИ подгрупп группы P(2,3).

Опуская довольно громоздкие вычисления, приводим редуцированные уравнения, полученные в результате подстановки функции (3.1.4) в уравнение (3.1.1). Рассматриваются только те подалгебры алгебр AP(2,2) и AP(2,3), для которых в § 4 главы II явно найдены ПСИ.

1.1. Редукция в пространстве M(2,2)

а) Подалгебры коразмерности 1 алгебры AP(2,2).

Основной инвариант подалгебры $L\subset$ AP(2,2) коразмерности 1 обозначим через ω. Тогда, в результате подстановки функции $u=\varphi(\omega)$, соответствующей алгебрам F_j (j = 5,6, 8,11,17,18,21), K_3, K_{14}, уравнение (3.1.1) редуцируется к функциональному уравнению $F(\varphi)=0$.

Для остальных подалгебр этого класса получаем уравнение

$$k\ddot{\varphi}+\ell\frac{1}{\omega}\dot{\varphi}=F(\varphi, k(\dot{\varphi})^2), \qquad (3.1.5)$$

где $k=\alpha^2-1$, $\ell=0$ для K_5, K_{10}; $k=\frac{1}{2}$, $\ell=0$ для

K_{22}; $k=1$, $\ell=3$ для F_{33}, K_{24}; $k=1$, $\ell=1$ для K_{23}.

б) Подалгебры коразмерности 2 алгебры АР(2,2).

В этом случае ПСИ состоит из двух основных инвариантов. Обозначим их через ω_1 и ω_2 в том порядке, в котором они заданы в § 4 главы II. Здесь и дальше $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}$, $\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$.

Подстановка $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, соответствующая алгебре F_1, редуцирует уравнение (3.I.I) к функциональному. Для остальных алгебр этого класса получаем такие уравнения:

$$\varphi_{11} + k\,\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \ell\,\omega_1^{-1}\varphi_1 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k\,\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=-1$, $\ell=1$ для F_4; $k=1+e$, $\ell=1$ для F_{15}; $k=e-1$, $\ell=1$ для F_{16}; $k=0$, $\ell=1$ для F_{19}; $k=0$, $\ell=3$ для F_{23}; $k=1$, $\ell=3$ для F_{24}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, K_{15}, K_{20}; $k=\alpha$, $\ell=3$ для F_{29}, F_{30}; $k=1$, $\ell=1$ для K_{13};

$$k\,\varphi_{12} = F(\varphi, k\,\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=1$ для F_{10}, K_2; $k=-1$ для K_{12};

$$\varphi_{11} + k\,\varphi_{22} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + k\,\omega_2^{-1}\varphi_2 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для F_{26}, $k=-1$ для F_{28};

$$\varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_1 =$$

$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 - 4\omega_1^2(\varphi_2)^2 + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } F_{27};$$

$$k(1-\omega_1^2)\varphi_{22} = F(\varphi, k(1-\omega_1^2)(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для K_7; $k=-1$ для K_4, K_9;

$$\varphi_{11} + k\varphi_{22} + 2\alpha\,\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2 + 2\alpha\,\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k = 1$ для K_{19} ; $k = -1$ для K_{18} ;

$$\varphi_{11} + 2(\omega_2 - 2)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + (3 - 2\omega_2^{-1})\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 2(\omega_2 - 2)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } K_{16};$$
$$(\omega_2 - 1)\varphi_{11} + 2((\omega_2 - 1)^2 + 1)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 4(\omega_2 - 1)\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\omega_2 - 1)(\varphi_1)^2 + 2((\omega_2 - 1)^2 + 1)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } K_{17};$$
$$\varphi_{11} + 8\varphi_{22} + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 8(\varphi_2)^2 + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } K_{21}.$$

в) Подалгебры коразмерности 3 алгебры AP(2,2).

ПСИ таких алгебр состоит из трех основных инвариантов. Будем обозначать их через ω_1 , ω_2 , ω_3 в том порядке, в котором они приведены в § 4 предыдущей главы.

В результате подстановки $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, уравнение (3.I.I) редуцируется к ДУ в частных производных от трех переменных. Поскольку

$$\Box_{2,2} u = (\Box_{2,2}\,\omega^a \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}) + (\omega^a_{x_\mu}\,\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b},$$

$$(\nabla_{2,2} u)^2 = (\omega^a_{x_\mu}\,\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_b}, \quad \omega^\alpha_{x_\beta} = \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_\beta},$$

то для явного задания редуцированного уравнения нужно знать значения $\Box_{2,2}\,\omega^a$, $(\omega^a_{x_\mu}\,\omega^b_{x^\mu})$, т.е. достаточно указать явный вид полученного $\Box_{2,2} u$.

Ниже приведены значения $\Box_{2,2} U$, полученные в результате симметрийной редукции для каждой из указанных алгебр.

$$F_2 : \varphi_{11} + \omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 \quad ;$$

$$F_3 : \varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} - \omega_2^{-1}\varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + \omega_2^{-1}\varphi_2 \; ;$$

$$F_7 : \varphi_{11} - \varphi_{22} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2})\varphi_{33} + \omega_1^{-1}\varphi_1 - \omega_2^{-1}\varphi_2 \quad ;$$

$$F_9 : \varphi_{11} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + \varphi_{23} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 \quad ;$$

$$F_{12} : \varphi_{11} + 4(2\omega_2 - \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 ;$$

$$F_{13} : \varphi_{11} - 4(2\omega_2 + \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 ;$$

$$F_{14} : \varphi_{11} + \varphi_{22} + (1-e)\omega_1^{-1}\varphi_{13} + (1+e)\omega_2^{-1}\varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + \omega_2^{-1}\varphi_2 \; ;$$

$$F_{20} : \varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 4e\,\omega_1^{-1}\varphi_{13} - 8\varphi_{23} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 \; ;$$

$$F_{22} : \varphi_{11} - \varphi_{22} + [(1-e)^2\omega_1^{-2} - (1+e)^2\omega_2^{-2}]\varphi_{33} + \varphi_1 - \varphi_2 \quad ;$$

$$K_1 : -(1+\omega_3)\varphi_{11} + \varphi_{23} \quad ;$$

$$K_6 : \varphi_{11} + (1-\omega_2^2)\varphi_{33} + 2\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_3\omega_1^{-1}\varphi_{13} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1 \; ;$$

$$K_8 : \varphi_{11} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{33} + 2\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_3\omega_1^{-1}\varphi_{13} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1 \; ;$$

$$K_{11} : \varphi_{11} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + \varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1 \; .$$

Значения α , e , d , во всех приведенных выше редуцированных уравнениях, те же, что и в теоремах 2.2.I, 2.2.2.

I.2. Редукция в пространстве M(2,3)

Здесь приводятся результаты, полученные для симметрийной редукции уравнения (3.I.I-3.I.3), соответствующей случаю подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3). Подстановка $u=\varphi(\omega)$ редуцирует исходное уравнение к обыкновенному ДУ (3.I.5), в котором $k=-1$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_j$ ($j=\overline{2,4},\overline{7,11},14,16,17,20,21$); $k=-2\alpha$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_1$; $k=\beta(1-\beta)$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_5$, $k=-1$, $\ell=-1$ для $\mathcal{L}_6$; $k=\frac{1}{2}$, $\ell=1$ для $\mathcal{L}_{12}$; $k=1$, $\ell=4$ для $\mathcal{L}_{15}$, $\mathcal{L}_{18}$, $\mathcal{L}_{19}$, AO(2,3); $k=-\beta$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_{13}$.

Значения α и β те же, что и в леммах 2.3.I-2.3.7.

§ 2. О точных решениях нелинейных волновых уравнений в пространстве Минковского M(2,3)

Воспользуемся полученными в предыдущем параграфе результатами симметрийной редукции и укажем вид некоторых точных решений для следующих P(2,3)-инвариантных нелинейных волновых уравнений:

$$\Box_{2,3} u + \lambda u^m = 0 \qquad (m \neq 0,1) - \qquad (3.2.1)$$

уравнение Даламбера;

$$\Box_{2,3} u + \lambda e^u = 0 \quad - \qquad (3.2.2)$$

уравнение Лиувилля;

$$\Box_{2,3} u + \lambda \sin u = 0 \quad - \qquad (3.2.3)$$

уравнение Даламбера с нелинейностью $\sin u$;

$$(\nabla_{2,3} u)^2 = \lambda \quad - \qquad (3.2.4)$$

уравнение эйконала

(λ - ненулевой действительный параметр).

Отметим, что подобная задача для записанных выше уравнений в пространстве Минковского M(I,3) изучена в работах [60, 78,79,8I].

Решение уравнений (3.2.I-3.2.4) будем искать в виде

$$u = \varphi(\omega), \tag{3.2.5}$$

где ω является ПСИ некоторой подалгебры алгебры AP(2,3), а φ - неизвестная функция. Ограничимся случаем тех подалгебр коразмерности I алгебр AP(2,2) и AP(2,3), для которых редуцированное уравнение будет обыкновенным ДУ, т.е. алгебрами K_5 $(\alpha \neq 1)$, K_{10} $(\alpha \neq 1)$, K_{22}, F_{33}, K_{23}, K_{24}, $\mathcal{L}_1$ $(\alpha \neq 0)$, $\mathcal{L}_5$ $(\beta \neq 1)$, $\mathcal{L}_{13}$ $(\beta \neq 0)$ и всеми остальными подалгебрами коразмерности I алгебры AP(2,3).

а) Уравнение Даламбера.

В результате симметрийной редукции, соответствующей алгебрам, которые указаны выше, приходим к уравнению Эмдена-Фаулера

$$k\ddot{\varphi} + \ell\omega^{-1}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^{m} = 0, \tag{3.2.6}$$

общее решение которого не выражается в конечном виде через элементарные функции [I2]. При $m=2$ и $m=3$, $\ell=0$ можно получить общее решение уравнения (3.2.6), выражающееся через эллиптические функции [27].

Ограничимся частным решением уравнения (3.2.6), задаваемым функцией

$$\varphi = \left(-\frac{2k(1+m)+2\ell(1-m)}{\lambda(1-m)^2}\,\omega^2\right)^{\frac{1}{1-m}} \tag{3.2.7}$$

Подставив в выражение (3.2.7) вместо ω, k и ℓ их, известные для каждой из указанных алгебр, значения, получим 28 существенно различных точных решений уравнения (3.2.I).

б) Уравнение Лиувилля.

В результате симметрийной редукции, соответствующей алгебрам K_5, K_{10}, K_{22}, $\mathcal{L}_j$ ($j=\overline{1,5},\overline{7,11},13,14,16,17,20,21$), получаем уравнение

$$\ddot{\varphi}+\frac{\lambda}{k}e^{\varphi}=0. \qquad (3.2.8)$$

В зависимости от значений $\frac{\lambda}{k}$ решением уравнения (3.2.8) будет одна из функций, записанных ниже (C_1 и C_2 - постоянные интегрирования):

Если $\frac{\lambda}{k}>0$, $C_1>0$, то

$$C_1 e^{-\varphi}=ch^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2C_1\lambda}{k}}(\omega-C_2)\right). \qquad (3.2.9)$$

Если $\frac{\lambda}{k}<0$, то

$$C_1 e^{-\varphi}=sh^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1|\lambda|}{|k|}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega-C_2)\right),\ C_1>0,$$

$$C_1 e^{-\varphi}=sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1|\lambda|}{|k|}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega-C_2)\right),\ C_1<0, \qquad (3.2.10)$$

$$e^{-\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{k}(\omega-C_2)^2, \qquad C_1=0.$$

В случае алгебр K_{23} и $\mathcal{L}_6$ получаем следующее редуцированное уравнение:

$$\omega\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}+\lambda_1\omega e^{\varphi}=0, \qquad (3.2.11)$$

где $\lambda_1=\lambda$ для K_{23} и $\lambda_1=-\lambda$ для $\mathcal{L}_6$.

Решением уравнения (3.2.11) будет функция

$$\varphi=\ln\frac{8\mu C_1C_2}{\lambda_1\omega^2(C_1\omega^{\sqrt{\mu}}+C_2\omega^{-\sqrt{\mu}})^2},\ \mu>0,\ C_1\cdot C_2\lambda>0,$$

$$\varphi = \ln \frac{-2C_2}{\lambda_1 \omega^2 (C_1 + C_2 \ln\omega)^2}, \quad \lambda_1 < 0, C_2 > 0, \tag{3.2.12}$$

$$\varphi = \ln \frac{2\mu (C_1^2 + C_2^2)}{\lambda_1 \omega^2 (C_1 \cos(\sqrt{-\mu}\ln\omega) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu}\ln(\omega)))^2}, \quad \mu, \lambda_1 < 0,$$

где μ, C_1, C_2 - постоянные интегрирования.

Наконец, для алгебр F_{33}, K_{24}, $\mathcal{L}_{12}$, $\mathcal{L}_{15}$, $\mathcal{L}_{18}$, $\mathcal{L}_{19}$, AO(2,3), редуцированное уравнение имеет следующий вид:

$$\omega\ddot{\varphi} + \frac{\ell}{k}\dot{\varphi} + \frac{\lambda}{k} e^{\varphi} = 0. \tag{3.2.13}$$

Общее решение уравнения (3.2.13) неизвестно [27]. Если $\left(\frac{\ell}{k} - 1\right)\frac{\lambda}{k} > 0$, то функция

$$\varphi = \ln \frac{2(\ell - k)}{\lambda \omega^2} \tag{3.2.14}$$

является одним из частных его решений.

Следовательно, для уравнения Лиувилля (3.2.2) получены решения (3.2.9), (3.2.10), (3.2.12), (3.2.14), где ℓ, k и ω известны для каждой из указанных алгебр.

в) Уравнение Даламбера с нелинейностью $\sin u$.

В результате симметрийной редукции уравнения (3.2.3), соответствующей алгебрам K_5, K_{10}, K_{22}, $\mathcal{L}_j$ ($j = \overline{1,5}, \overline{7,11}, 13, 14, 16, 17, 20, 21$), получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{\lambda}{k}\sin\varphi = 0, \tag{3.2.15}$$

решение которого определяется интегралом [27]

$$\int \frac{d\varphi}{(\cos\varphi + C_1)^{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\omega + C_2. \tag{3.2.16}$$

В общем случае, интеграл, стоящий в левой части соотношения

(3.2.16), сводится к эллиптическому интегралу. Но если положить $C_1=1$, то получим следующее решение уравнения (3.2.15):

$$\varphi = 4\, \mathrm{arctg}\left(\exp\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\,\omega + C_2\right)\right) - \pi, \qquad (3.2.17)$$

где C_2 постоянная интегрирования.

Подставив в функцию (3.2.17) вместо k и ω их известные значения для каждой из указанных алгебр, получим девятнадцать существенно различных точных решений уравнения (3.2.3).

г) Уравнение эйконала.

В результате симметрийной редукции уравнения (3.2.4), соответствующей всем указанным алгебрам, получаем уравнение

$$k(\dot{\varphi})^2 = 1,$$

общим решением которого является функция

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{k}}\,\omega + C, \qquad (3.2.18)$$

где $1\,k>0$, C - постоянная интегрирования. Подставив вместо k и ω их известные значения, получим двадцать восемь различных точных решений уравнения эйкрнала (3.2.4).

§ 3. Разделение переменных для уравнения Гельмгольца

Как было указано во введении, существует тесная связь метода разделения переменных с групповыми свойствами ДУ. Эта связь состоит в том, что решение в разделенных переменных является собственной функцией некоторого набора операторов симметрии данного уравнения. Постулируя это свойство, дадим следующее определение решения в разделенных переменных.

Пусть

$$Lu = 0 - \qquad (3.3.I)$$

линейное ДУ, где оператор L и функция $u = u(x)$ определены в n-мерном пространстве $\mathfrak{M}$.

Определение 3.3.I. Функция $u = u(x)$ называется решением в разделенных переменных уравнения (3.3.I), если она дополнительно удовлетворяет следующему условию:

$$Q_i u = \lambda_i u, \qquad (3.3.2)$$

где Q_i образуют базис ($n-1$-)-мерной абелевой подалгебры алгебры симметрии данного уравнения.

Ограничимся только локальными операторами симметрии, а также будем требовать, чтобы ранг абелевой алгебры совпадал с размерностью.

Рассмотрим обобщенное уравнение Гельмгольца

$$u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - \ldots - u_{n+2,n+2} + m^2 u = 0 \qquad (3.3.3)$$

при $n=2$ и $n=3$.

Алгебра Ли AP(2, n) с образующими вида (2.I.I) является алгеброй симметрии уравнения (3.3.3). Поэтому условию (3.3.2) соответствует система линейных ДУ в частных производных первого порядка, решением которой будет функция

$$u(x) = f_1(\theta_1)\, f_2(\theta_2) \ldots f_{n-1}(\theta_{n-1})\, \varphi(\theta_n), \qquad (3.3.4)$$

где $f = f_1 f_2 \ldots f_{n-1}$ и θ_i - известные функции, а функцию φ нужно еще определить.

Для того чтобы найти функцию φ , подставляем значение функции (3.3.4) в исходное уравнение (3.3.3). В результате такой редукции, получим обыкновенное ДУ для функции $\varphi(\theta_n)$.

Чтобы получить в явном виде решение в разделенных переменных для уравнения (3.3.3), нужно подставить в выражение (3.3.4) найденное значение функции φ .

3.I. Разделение переменных в пространстве М(2,2)

Рассмотрим уравнение (3.3.3) для $n=2$. Решетка подалгебр АР(2,2) приведена в § 2 главы I. Учитывая сказанное выше, будем рассматривать следующие трехмерные абелевые алгебры: $F_{1.11}$, $F_{1.12}$, $F_{1.13}$, $F_{5,4}$, $F_{6,4}$, $F_{11,7}$, $F_{14,3}$, $F_{15,4}$, $F_{17,2}$, $\tilde{\tilde{F}}_{2,6}$, $\hat{F}_{5,4}$, $\hat{F}_{6,4}$, $\hat{F}^{a}_{17,4} = \langle B_1 - B_3 + \alpha(P_2 - P_4), C_1 - C_3 + P_2 + P_4, P_1 - P_3 \rangle$ ($\alpha \in R$).

Поскольку разделение переменных для каждой из алгебр проводится аналогично, более подробно рассмотрим случай алгебры $F_{17,2} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, P_1 - P_3 \rangle$. Согласно представлению (2.I.I), условие (3.3.2) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\left[\tfrac{1}{2}(x_2 - x_4)(\partial_1 - \partial_3) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 + \partial_4)\right]u = \lambda_1 u, \\
\left[\tfrac{1}{2}(x_2 + x_4)(\partial_1 + \partial_3) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 - \partial_4)\right]u = \lambda_2 u, \\
\left[\partial_1 - \partial_3\right]u = \lambda_3 u.
\end{gathered} \tag{3.3.5}$$

Решением системы (3.3.5) будет функция

$$u = \exp\left\{\frac{\lambda_3}{2}\left(x_1 - x_3 + \frac{x_2^2 - x_4^2}{x_1 + x_3}\right) - \frac{1}{x_1 + x_3}\left(\lambda_1 (x_2 + x_4) + \lambda_2 (x_2 - x_4)\right)\right\} \cdot \varphi(x_1 + x_3). \tag{3.3.6}$$

Фактически получено решение в разделенных переменных для уравнения (3.3.3), в котором неизвестна функция φ . Чтобы ее определить, подставим найденную функцию (3.3.6) в исходное уравнение (3.3.3). В результате такой редукции, получаем следующее ДУ:

$$2\lambda_3 \dot{\varphi} + \left(m^2 + \frac{2\lambda_3}{\xi} + \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\xi^2}\right)\varphi = 0 \qquad (3.3.7)$$

где $\varphi = \varphi(\xi)$, $\xi = x_1 + x_3$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\xi}$.

Подставив решение уравнения (3.3.7) в значение функции (3.3.6), получаем явный вид решения в разделенных переменных для уравнения (3.3.3) в случае алгебры $F_{17,2}$.

В таблице I указан общий вид функции (3.3.4) для каждой из перечисленных выше трехмерной абелевой подалгебры алгебры АР(2,2).

ТАБЛИЦА I. Функция $u = f \cdot \varphi(\xi)$ в пространстве М(2,2)

№	Алгебра	f	ξ
1	$F_{1,11}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3\}$	x_4
2	$F_{1,12}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4\}$	x_2
3	$F_{1,13}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \frac{\lambda_2}{2}(x_2 + x_4) + \lambda_3 x_3\}$	$x_2 - x_4$
4	$F_{5,4}$	$\exp\{-\lambda_1 \frac{x_2}{\xi} + \frac{\lambda_2}{2}(x_1 - x_3 + \frac{x_2^2}{\xi}) + \lambda_3 x_4\}$	$x_1 + x_3$
5	$F_{6,4}$	$\exp\{-\lambda_1 \frac{x_4}{\xi} + \frac{\lambda_2}{2}(x_1 - x_3 - \frac{x_4^2}{\xi}) + \lambda_3 x_2\}$	$x_1 + x_3$
6	$F_{11,7}$	$(x_1 - x_3)^{\lambda_1} \exp\{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_4\}$	$x_1^2 - x_3^2$

ТАБЛИЦА I (окончание)

7	$F_{14,3}$	$\exp\{\lambda_1 \operatorname{arctg}\frac{x_4}{x_3} + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2\}$	$x_3^2+x_4^2$
8	$F_{15,4}$	$\exp\{\lambda_1 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4\}$	$x_1^2+x_2^2$
9	$F_{17,2}$	$\exp\{\xi^{-1}(-\lambda_1(x_2+x_4)-\lambda_2(x_2-x_4)) +$ $+\frac{\lambda_3}{2}((x_1-x_3)+(x_2^2-x_4^2)\xi^{-1})\}$	x_1+x_3
10	$\tilde{F}_{2,6}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)-\lambda_2 x_3-\frac{\lambda_2}{2}(x_1+x_3)\xi +$ $+\frac{\lambda_3}{2}(x_2+x_4)+\frac{\lambda_3}{4}(x_1+x_3)^2\}$	x_2-x_4
11	$\tilde{F}_{5,4}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)+\lambda_2 x_1-\lambda_2 x_2(x_1+x_3)-$ $-\frac{\lambda_2}{3}(x_1+x_3)^3+\lambda_3 x_4\}$	$2x_2+$ $+(x_1+x_3)^2$
12	$\tilde{F}_{6,4}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)+\lambda_2 x_4(x_1+x_3)-\lambda_2 x_3 +$ $+\frac{\lambda_2}{3}(x_1+x_3)^3+\lambda_3 x_2\}$	$2x_4+$ $+(x_1+x_3)^2$
13	$\hat{F}_{17,4}^{\,\alpha}$ $\alpha\in R$	$\exp\{-\lambda_1\xi^{-1}(x_2+x_4)+2\lambda_1(4\alpha-\xi^2)^{-1}(x_2-x_4)+$ $+4\alpha\lambda_1\xi^{-1}(4\alpha-\xi^2)^{-1}(x_2+x_4)+\lambda_2(4\alpha-\xi^2)^{-1}\times$ $\times(\xi(x_2-x_4)+2\alpha(x_2+x_4))+\frac{\lambda_3}{2}(x_1-x_3)+$ $+\frac{\lambda_3}{2}\xi^{-1}(x_2^2-x_4^2)+\alpha\lambda_3(2\xi^2)^{-1}(x_2+x_4)^2-$ $-\lambda_3(2\xi^2(4\alpha-\xi^2))^{-1}(\xi(x_2-x_4)+$ $+2\alpha(x_2+x_4))^2\}$	x_1+x_3

В результате редукции исходного уравнения (3.3.3), в случае алгебр $F_{1,13}$, $F_{5,4}$, $F_{6,4}$, $F_{17,2}$, $\hat{F}_{2,6}$, приходим к уравнению

$$\rho \dot{\varphi} + (\delta + \mu_1 \xi + \mu_2 \xi^{-1} + \mu_3 \xi^{-2}) \varphi = 0, \qquad (3.3.8)$$

где значения ρ, δ, μ_1, μ_2, μ_3 для каждой из указанных алгебр приведены в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Редукция уравнения (3.3.3) к уравнению

$$\rho \dot{\varphi} + (\delta + \mu_1 \xi + \mu_2 \xi^{-1} + \mu_3 \xi^{-2}) \varphi = 0 .$$

№	Алгебра	ρ	δ	μ_1	μ_2	μ_3
1	$F_{1,13}$	$2\lambda_2$	$\lambda_1^2 - \lambda_3^2 + m^2$	0	0	0
2	$F_{5,4}$	$2\lambda_2$	$m^2 - \lambda_3^2$	0	λ_2	λ_1^2
3	$F_{6,4}$	$2\lambda_2$	$m^2 + \lambda_3^2$	0	λ_2	$-\lambda_1^2$
4	$F_{17,2}$	$2\lambda_3$	m^2	0	$2\lambda_3$	$4\lambda_1\lambda_2$
5	$\hat{F}_{2,6}$	$2\lambda_3$	$m^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2$	$-\lambda_2^2$	0	0

Для алгебры $\hat{F}^{a}_{17,4}$ получаем следующее уравнение:

$$2\lambda_3 \dot{\varphi} + (m - 2\lambda_3 \xi (4\alpha - \xi^2)^{-1} + 4\lambda_1 \lambda_2 (4\alpha + \xi^2)(4\alpha - \xi^2)^{-1} +$$

$$+ 8(\alpha \lambda_2^2 + \lambda_1^2)\xi(4\alpha - \xi^2)^{-2})\varphi = 0 . \qquad (3.3.9)$$

Случаи остальных алгебр приводят к обыкновенным ДУ второго порядка. Эти результаты сведены в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3. Редукция уравнения (3.3.3) к обыкновенному ДУ второго порядка.

№	Алгебра	Уравнение	μ
1	$F_{1,11}$ $F_{1,12}$	$\ddot{\varphi} + \mu\varphi = 0$	$\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - m^2$ $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + m^2$
2	$\tilde{F}_{5,4}$ $\tilde{F}_{6,4}$	$\ddot{\varphi} + (\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi)\varphi = 0$	$\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 + m^2$ $\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 - m^2$
3	$F_{11,7}$	$\xi\ddot{\varphi} + (1+\lambda_1)\dot{\varphi} + \frac{\mu}{4}\varphi = 0$	$\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + m^2$
4	$F_{14,3}$ $F_{15,4}$	$\xi^2\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} + (\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu}{4}\xi)\varphi = 0$	$-\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - m^2$ $m^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$

Анализ и решение полученных для определения φ уравнений будут проведены ниже.

3.2. Разделение переменных в пространстве M(2,3)

Рассмотрим уравнение (3.3.3) при $n = 3$. Решетка подалгебр алгебры AP(2,3) приведена в § 3 главы I и в приложениях I и 2. Сначала остановимся на тех четырехмерных абелевых подалгебрах алгебры AP(2,3), которые являются подалгебрами алгебры AP(2,2) $\oplus \langle P_5 \rangle$, т.е. представимы в виде

$$L \oplus \langle P_5 \rangle, \tag{3.3.10}$$

где L - трехмерная абелевая подалгебра алгебры AP(2,2).

Для каждой из алгебр вида (3.3.10), условием (3.3.2) будет система, соответствующая алгебре L, дополненная уравнением

$$[\partial_5]\, u = \lambda_4 u. \qquad (3.3.11)$$

Поэтому, решение в разделенных переменных в этом случае имеет вид

$$u = \exp(\lambda_4 x_5) \cdot f \cdot \varphi(\xi), \qquad (3.3.12)$$

где f и ξ известны и приведены в таблице I. Функция (3.3.12) является следствием того, что оператор симметрии P_5 действует в пространстве M(2,2) первых четырех независимых переменных как нулевой оператор.

Обозначим алгебры вида (3.3.10) через S_i ($i = \overline{1,13}$), где i - номер строки таблицы I, в которую помещена некоторая соответствующая S_i трехмерная абелевая подалгебра алгебры AP(2,2). Тогда, в функцию (3.3.12), соответствующую алгебре S_i, подставляем значения f и ξ с i-той строки таблицы I. В соответствии с этим получаем и редуцированные уравнения для определения φ.

Для алгебр S_3, S_4, S_5, S_9, S_{10} этим уравнением будет уравнение (3.3.8), в котором вместо δ берем $\delta - \lambda_4^2$; для алгебры S_{13} - уравнение (3.3.9), где в коэффициенте при φ добавлено $-\lambda_4^2$. Наконец, для остальных алгебр получены обыкновенные ДУ второго порядка из таблицы 3, а именно: первое для S_1 и S_2, второе для S_{11} и S_{12}, третье для S_6 и четвертое для S_7, S_8. Во всех этих уравнениях вместо μ берем $\mu + \epsilon\lambda_4^2$, где $\epsilon = 1$ для S_1, S_7, S_{12}, и $\epsilon = -1$ для S_2, S_6, S_8, S_{11}.

Кроме алгебр вида (3.3.14) рассмотрим остальные четырехмерные абелевые подалгебры алгебры AP(2,3):

$L_1 = \langle H_3, H_4, P_2, N_1 \rangle$; $L_2 = \langle H_2, H_3, H_4, N_1 \rangle$;

$L_3 = \langle H_3, H_4 + P_4, P_2, N_1 \rangle$; $L_4 = \langle H_2, H_3 + P_3, H_4 + \beta P_4, N_1 \rangle$;

$L_5 = \langle H_2 + H_4 + N_3, H_3, N_1, N_2 \rangle$;

$L_6 = \langle H_2 + H_4 - 2P_3, H_3 + N_3, N_1, N_2 \rangle$;

$L_7 = \langle H_2 + P_4, H_3 + \gamma P_3 + \alpha P_4, H_4 - P_2 + \alpha P_3 + \beta P_4, N_1 \rangle$;

где $\beta \in R$, $\alpha, \gamma \geq 0$, $H_a = J_{1a} - J_{a5}$ ($a = 2,3,4$); $N_1 = P_1 + P_5$, $N_2 = P_2 + P_4$, $N_3 = P_2 - P_4$, $L_i \notin AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ ($i = \overline{1,7}$).

В таблице 4 приведен явный вид функции $u = f \cdot \varphi(\xi)$ для каждой из алгебр L_i ($i = \overline{1,7}$).

ТАБЛИЦА 4. Вид функции $u = f \cdot \varphi(\xi)$ в M(2,3), $\xi = x_1 - x_5$.

№	Алгебра	f
1	L_1	$\exp\{\xi^{-1}(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4) + \lambda_3 x_2 + \frac{\lambda_4}{2}(x_1 + x_5) - \frac{\lambda_4}{2}(x_3^2 + x_4^2)\xi^{-1}\}$
2	L_2	$\exp\{\xi^{-1}(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 + \frac{\lambda_4}{2}(x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)) + \frac{\lambda_4}{2}(x_1 + x_5)\}$
3	L_3	$\exp\{\lambda_1 \xi^{-1} x_3 + \lambda_2 (1+\xi)^{-1} x_4 + \lambda_3 x_2 + \frac{\lambda_4}{2} \times (x_1 + x_5 - x_3^2 \xi^{-1} - x_4^2 (1+\xi)^{-1})\}$

ТАБЛИЦА 4 (окончание).

4	L_4	$\exp\{\lambda_1 \xi^{-1} x_2 + \lambda_2 (1+\xi)^{-1} x_3 + \lambda_3 (\beta+\xi)^{-1} x_4 +$ $+ \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_5 + x_2^2 \xi^{-1} - x_3^2 (1+\xi)^{-1} - x_4^2 (\beta+\xi)^{-1})\}$
5	L_5	$\exp\{ \frac{1}{2} (\lambda_1 (x_2 - x_4) + \lambda_4 ((x_2 + x_4) - \xi (x_2 - x_4))) + \lambda_2 x_3 \xi^{-1} +$ $+ \frac{\lambda_3}{2} (x_1 + x_5) + \frac{\lambda_3}{4} (x_2 - x_4)^2 - \lambda_3 (2\xi)^{-1} x_3^2 \}$
6	L_6	$\exp\{ - \frac{\lambda_1}{2} x_3 + \frac{\lambda_1}{4} (x_2 - x_4) \xi + \frac{\lambda_2}{2} (x_2 - x_4) +$ $+ \frac{\lambda_3}{2} (x_1 + x_3) - \frac{\lambda_3}{2} x_3 (x_2 - x_4) + \frac{\lambda_3}{8} (x_2 - x_4)^2 \xi +$ $+ \frac{\lambda_4}{2} (x_2 + x_4) + \frac{\lambda_4}{2} x_3 \xi - \frac{\lambda_4}{4} (x_2 - x_4) \xi^2 \}$
7	L_7	$\exp\{ \lambda_1 \xi^{-1} x_2 (1 - \theta^{-1} (\xi + \gamma)) + \lambda_1 \theta^{-1} (\xi + \gamma) x_4 -$ $- \alpha \lambda_1 \theta^{-1} x_3 + \lambda_3 \theta^{-1} ((\gamma + \xi) \xi x_4 - (\gamma + \xi) x_2 - \alpha \xi x_3) +$ $+ \lambda_2 (\gamma + \xi)^{-1} x_3 (1 + \alpha^2 \xi \theta^{-1}) - \alpha \lambda_2 \theta^{-1} (x_4 \xi - x_2) +$ $+ \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_5) + \lambda_4 (2\xi)^{-1} x_2^2 - \lambda_4 (2(\gamma + \xi))^{-1} \times$ $\times (1 + \alpha^2 \xi \theta^{-1}) x_3^2 - \lambda_4 (2 \xi \theta)^{-1} (\gamma + \xi) (x_4 \xi - x_2)^2 +$ $+ \alpha \lambda_4 \theta^{-1} x_3 (x_4 \xi - x_2) \}$ $\theta = (\gamma + \xi)(\xi(\beta + \xi) + 1) - \alpha^2 \xi$

Алгебрам L_1 , L_2 , L_5 и L_6 соответствует следующее обыкновенное ДУ первого порядка для определения функции φ :

$$h\dot{\varphi} + (\delta + \rho_1\xi + \rho_2\xi^2 + \mu_1\xi^{-1} + \mu_2\xi^{-2})\varphi = 0 \qquad (3.3.13)$$

где значения h , δ , ρ_i , μ_i (i = 1,2) приведены в таблице 5.

ТАБЛИЦА 5. Уравнение (3.3.13).

Алгебра	h	δ	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2
L_1	$2\lambda_4$	$m+\lambda_3^2$	0	0	$2\lambda_4$	$-\lambda_1^2-\lambda_2^2$
L_2	$2\lambda_4$	m	0	0	$3\lambda_4$	$\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2$
L_5	$2\lambda_3$	$m+\lambda_1\lambda_4$	$-\lambda_4^2$	0	λ_3	$-\lambda_2^2$
L_6	$2\lambda_3$	$m^2+\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_4-\frac{\lambda_1^2}{4}$	$\lambda_1\lambda_4$	$-\frac{3}{4}\lambda_4^2$	0	0

Для алгебры L_3 получаем уравнение

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (\delta + \lambda_4(\xi^{-1} + (1+\xi)^{-1}) - \lambda_1^2\xi^{-2} - \lambda_2^2(1+\xi)^{-2})\varphi = 0, \qquad (3.3.14)$$

где $\delta = m + \lambda_3^2$;

для алгебры L_4 -

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (m + 3\lambda_4\xi^{-1} + \lambda_1^2\xi^{-2} - \lambda_2^2(1+\xi)^{-2} - \lambda_3^2(\beta+\xi)^{-2})\varphi = 0\,; \qquad (3.3.15)$$

и, наконец, для алгебры L_7 -

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (m^2 + \lambda_4 q_1(\xi) + \lambda_1^2 q_2(\xi) + \lambda_2^2 q_3(\xi) + \lambda_3^2 q_4(\xi) +$$

$$+ 2\alpha\lambda_1\lambda_2 q_5(\xi) - 2\lambda_1\lambda_3 q_6(\xi) - 2\alpha\lambda_2\lambda_3 q_7(\xi))\varphi = 0, \qquad (3.3.16)$$

где $q_1(\xi) = \xi^{-1} - (\theta\xi)^{-1}(\gamma+\xi) + (1+\alpha^2\xi\theta^{-1})(\gamma+\xi)^{-1} + (\gamma+\xi)\xi\theta^{-1}$;

$q_2(\xi) = \xi^{-2}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1})^2 - (\gamma+\xi)^2\theta^{-2} - \alpha^2\theta^{-2}$;

$q_3(\xi) = \alpha^2(1-\alpha^2\xi^2)\theta^{-2} - (\gamma+\xi)^{-2}(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})^2$;

$q_4(\xi) = \theta^{-2}(\gamma+\xi)^2(1-\xi^2) - \alpha^2\xi^2\theta^{-2}$;

$q_5(\xi) = \xi^{-1}\theta^{-1}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1}) + \xi(\gamma+\xi)\theta^{-2} + (1+\alpha^2\xi\theta^{-1})\theta^{-1}(\gamma+\xi)^{-1}$;

$q_6(\xi) = (\gamma+\xi)\xi^{-1}\theta^{-1}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1}) + \xi\theta^{-2}((\gamma+\xi)^2+\alpha^2)$;

$q_7(\xi) = (\gamma+\xi)\theta^{-2} - (\gamma+\xi)\xi^2\theta^{-2} - \xi(\gamma+\xi)^{-1}\theta^{-1}(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})$.

3.3. Анализ и решение полученных уравнений

Все полученные обыкновенные ДУ первого порядка интегрируются в квадратурах. В общем случае их можно записать как следующее уравнение:

$$\varsigma\dot{\varphi} + g(\xi)\varphi = 0, \tag{3.3.I7}$$

где ς - числовой параметр, $g(\xi)$ - известная рациональная функция от ξ .

В зависимости от значений ς и $g(\xi)$, уравнение (3.2.I7) имеет следующие решения:

I) $\varsigma \equiv 0$, $g(\xi) \equiv 0$, φ - произвольная функция ξ ;

2) $\varsigma \equiv 0$, $g(\xi) \neq 0$, $\varphi = 0$;

3) $\varsigma \neq 0$, $g(\xi) \equiv 0$, $\varphi = const$;

4) $\varsigma \cdot g(\xi) \neq 0$, $\varphi = -\frac{1}{\varsigma}J + C$, (3.3.I8)

где $J = \int g(\xi)\, d\xi$, а C - постоянная интегрирования. В таблице 6 приведены значения J для всех полученных обыкновенных ДУ первого порядка, кроме уравнения (3.3.16).

ТАБЛИЦА 6. Значения J в решениях (3.3.18).

ДУ	J
(3.3.8)	$\delta\xi + \frac{1}{2}\mu_1\xi^2 + \mu_2 \ln\lvert\xi\rvert - \mu_3\xi^{-1}$
(3.3.9)	$m\xi + \lambda_3 \ln\lvert 4\alpha - \xi^2\rvert + 4(\alpha\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2\xi)(4\alpha - \xi^2)$
(3.3.13)	$\delta\xi + \frac{\delta_1}{2}\xi^2 + \frac{\delta_2}{3}\xi^3 + \mu_1 \ln\lvert\xi\rvert - \mu_2\xi^{-1}$
(3.3.14)	$\delta\xi + \lambda_4 \ln\lvert\xi(1+\xi)\rvert + \lambda_1^2\xi^{-1} + \lambda_2^2(1+\xi)^{-1}$
(3.3.15)	$m\xi + 3\lambda_4 \ln\lvert\xi\rvert - \frac{\lambda_1^2}{\xi} + \frac{\lambda_2^2}{1+\xi} + \frac{\lambda_3}{\beta+\xi}$

Для уравнения (3.3.16)

$$J = m^2\xi + \lambda_4 J_1 + \lambda_1^2 J_2 + \lambda_2^2 J_3 + \lambda_3^2 J_4 + 2\alpha\lambda_1\lambda_2 J_5 - 2\lambda_1\lambda_2 J_6 - 2\alpha\lambda_2\lambda_3 J_7,$$

где $J_i = \int q_i(\xi)\, d\xi \quad (i = \overline{1,7})$.

Поскольку значения J зависят от значений γ, β и α, а также очень громоздки, приведем в явном виде одно из них, а именно то, которое получается при $\gamma = \beta = 0$, $|\alpha| > 1$.

$$J = m^2\xi + \lambda_4 \ln|\theta| + \lambda_1^2(\theta^{-1} - \xi^{-1}) + \lambda_2^2(\xi^{-1} + \alpha^2\theta^{-1}) + \lambda_3^2\xi(\xi^2 + 1 - \alpha^2)^{-1} -$$

$$- 2\alpha\lambda_1\lambda_2\theta^{-1} - 2\lambda_1\lambda_2 \ln|\xi^2 + (1-\alpha^2)| + 2\alpha\lambda_2\lambda_3 \ln|\xi^2 + (1-\alpha^2)|.$$

Обыкновенные ДУ второго порядка приведены в таблице 3. Проанализируем их и укажем решения.

$$\ddot{\varphi} + \mu\varphi = 0. \qquad (3.3.19)$$

$$\varphi = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \xi\sqrt{|\mu|} + C_2 \operatorname{sh} \xi\sqrt{|\mu|} & \text{при } \mu<0, \\ C_1 + C_2\xi & \text{при } \mu=0, \\ C_1 \cos\xi\sqrt{\mu} + C_2 \sin\xi\sqrt{\mu} & \text{при } \mu>0, \end{cases} \qquad (3.3.20)$$

C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi\right)\varphi = 0. \qquad (3.3.21)$$

Если $\lambda_2 = 0$, то имеем предыдущий случай и решение имеет вид (3.3.20).

Если $\lambda_2 \neq 0$, то решение уравнения выражается через цилиндрическую функцию (функции Бесселя) [27]

$$\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi}\; Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3\lambda_2^2}\left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (3.3.22)$$

$$\xi\ddot{\varphi} + (1+\lambda_1)\dot{\varphi} + \frac{\mu}{4}\varphi = 0. \qquad (3.3.23)$$

Если $\mu = 0$, то

$$\varphi = \begin{cases} C_2 + C_1\xi^{-\lambda_1} & \text{при } \lambda_1 \neq 0, \\ C_2 + C_1 \ln|\xi| & \text{при } \lambda_1 = 0. \end{cases} \qquad (3.3.24)$$

Если $\mu \neq 0$, то исходное уравнение является уравнением типа Бесселя, и его решением является цилиндрическая функция [27]

$$\varphi = \xi^{-\frac{\lambda_1}{2}} Z_{\sqrt{\lambda_1^2}}(\sqrt{\mu}\,\xi). \qquad (3.3.25)$$

$$\xi^2\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu}{4}\xi\right)\varphi = 0. \qquad (3.3.26)$$

Если $\frac{\mu}{4} = 0$, (3.3.26) является уравнением Эйлера, решением которого есть

$$\varphi=\begin{cases} C_1+C_2\ln|\xi| & \text{при} \quad \frac{\lambda_1^2}{4}=0 \\ C_1\sin\left(\frac{\lambda_1^2}{4}\ln|\xi|\right)+C_2\cos\left(\frac{\lambda_1^2}{4}\ln|\xi|\right) & \text{при} \quad \frac{\lambda_1^2}{4}>0 \end{cases} \tag{3.3.27}$$

Если $\frac{\mu}{4}\neq 0$, то уравнение (3.3.26) является уравнением типа Бесселя и его решением будет цилиндрическая функция [27]

$$\varphi = Z_{\sqrt{-\lambda_1^2}}\left(\sqrt{\mu}\,\xi\right). \tag{3.3.28}$$

Отметим, что если ДУ (3.3.19) имеет решение, выражающееся через элементарные функции (3.3.20), то уравнения (3.3.21), (3.3.23),(3.3.26) наряду с решениями в элементарных функциях имеют решения, выражающиеся через функции Бесселя (3.3.22), (3.3.25),(3.3.28).

Подставив найденные значения функции φ в соответствующие выражения для функции $u(x)$, получим решения в разделенных переменных для уравнения Гельмгольца в пространствах M(2,2) и M(2,3).

§ 4. О точных решениях одной релятивистски-инвариантной системы ДУ

Рассмотрим следующую систему ДУ:

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ (\nabla u)^2=-1, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

где $\Box u = u_{11}-u_{22}-u_{33}-u_{44}$, $(\nabla u)^2=(u_1)^2-(u_2)^2-(u_3)^2-(u_4)^2$, $u=u(x)$, $x\in$ M(1,3). Система (3.4.1) встречается при исследовании уравнений Дирака [80] и Даламбера [63] .

Решение этой системы будем искать в виде неявной функции

$$W(u, x) = 0, \qquad (3.4.2)$$

где W - произвольная дважды дифференцируемая функция.

Предложение 3.4.I. Если $W_u \neq 0$, то система (3.4.I) на множестве решений (3.4.2) равносильна системе

$$\begin{cases} W_{uu} + \square W = 0, \\ (W_u)^2 + (\nabla W)^2 = 0. \end{cases} \qquad (3.4.3)$$

Доказательство предложения 3.4.I непосредственно следует из правил дифференцирования неявной функции.

Алгебра AP(2,3), реализованная в виде следующих дифференциальных операторов:

$$J_{u1} = u\partial_1 - x_1\partial_u, \quad J_{ua} = u\partial_a + x_a\partial_u,$$

$$J_{1a} = x_1\partial_a + x_a\partial_1, \quad J_{ab} = -x_a\partial_b + x_b\partial_a, \qquad (3.4.4)$$

$$P_u = \partial_u, \; P_i = \partial_i, \; \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \; \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \; i = \overline{1,4}, \; a, b = \overline{2,4};$$

является алгеброй симметрии системы (3.4.3). Будем искать решения системы (3.4.3) в виде функций

$$W = \varphi(\omega), \qquad (3.4.5)$$

где $\omega = \omega(u, x)$ - известная функция, являющаяся инвариантом некоторой подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3), а функция φ подлежит определению.

Инварианты подалгебр коразмерности I алгебр AP(2,2) и AP(2,3) найдены в главе II для реализации (2.I.I). Чтобы воспользоваться полученными инвариантами, а также результатами симметрийной редукции, установим между переменными "старой" и "новой" реализации следующее соответствие:

$$x_1 \to x_1\,,\ x_2 \to u\,,\ x_3 \to x_2\,,\ x_4 \to x_3\,,\ x_5 \to x_4 . \qquad (3.4.6)$$

Ограничиваясь тем случаем симметрийной редукции из § I настоящей главы, при котором произвольная дважды дифференцируемая функция $\varphi(\omega)$ является решением системы (3.4.3), можем сделать следующий вывод. Решением системы (3.4.3) является функция

$$W = \varphi(\omega), \qquad (3.4.6)$$

где φ - произвольная дважды дифференцируемая функция, а ω совпадает с одной из следующих функций:

$$(u-x_3)(x_1-x_2);\ (u-x_3)(x_1+x_2)^{-1};\ (u-x_3)^2+(x_1-x_2)^2;$$
$$2\ln(u-x_3)+(x_1-x_2)(u-x_3)^{-1};\ (u-x_3)^{1+e}(x_1-x_2)^{1-e};$$
$$(u+x_3)^{1+e}(x_1-x_2)^{e-1};\quad \operatorname{arctg}\left((u+x_3)(x_1-x_2)^{-1}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\ln\left((u+x_3)^2+(x_1-x_2)^2\right);\ 2(u+x_3)+(x_1+x_2)^2;$$
$$-2(u-x_3)+(x_1+x_2)^2;\quad u-x_3-\ln(x_1-x_2);$$
$$2(u-x_3)+(x_1+x_2)^2;\ u+x_3-(x_1-x_4)x_2+\frac{1}{4}(u-x_3)\times$$
$$\times(x_1-x_4)^2-\frac{1}{12}\beta(x_1-x_4)^3;\ \alpha\ln(x_1-x_4)+\frac{1}{2}(u+x_3)(x_1-x_4)^{-1}-$$
$$-x_2+\frac{1}{2}(u-x_3)(x_1-x_4)\ ;\ x_1+x_4-x_2(u-x_3)-\frac{1}{2}(x_1-x_4)+$$
$$+\frac{1}{4}(x_1-x_4)(u-x_3)^2-\frac{\gamma}{12}(u-x_3)^3+\frac{1}{32}(u-x_3)^4 .$$

Здесь $0<e<1$, $0<|\alpha|<1$, β, $\gamma\in R$, $\alpha>0$.

Приравняв правую часть выражения (3.4.6) нулю, получим некоторое множество точных решений исходной системы (3.4.I).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение представим основные результаты, полученные в исследовании.

Первая глава посвящена изучению связных подгрупп группы Пуанкаре P(2,3) относительно P(2,3)-сопряженности, что равносильно задаче о классификации подалгебр алгебры Ли AP(2,3) группы P(2,3) относительно P(2,3)-сопряженности. В первом параграфе рассматривается обобщенная группа Пуанкаре P(2,n). Найдены максимальные приводимые и максимальные разрешимые подалгебры алгебры AO(2,n). Оказалось, что в случае четного n алгебра AO(2,n) обладает тремя, а в случае нечетного n – четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами. Получен перечень одномерных подалгебр алгебры AP(2,n). Подалгебры алгебры AP(2,2) с точностью до P(2,2)-сопряженности описаны во втором параграфе. Третий параграф посвящен нахождению подалгебр алгебры AP(2,3). Полные списки этих подалгебр приведены в приложениях I и 2.

Во второй главе решается задача о нахождении инвариантов подалгебр алгебры AP(2,3). Алгебра AP(2,n) реализуется в виде дифференциальных операторов первого порядка, вследствие чего нахождение инвариантов сводится к решению систем линейных однородных ДУ в частных производных первого порядка. В первом параграфе найдены полные системы инвариантов (ПСИ) всех однопараметрических подгрупп группы P(2,n). В § 2 определяется отношение эквивалентности на множестве подалгебр алгебры AP(2,n), такое, что эквивалентные подалгебры имеют одну и ту же ПСИ, а неэквивалентные подалгебры – существенно разные ПСИ.

Здесь же найдены все неэквивалентные подалгебры алгебры AP(2,2), а в § 3 - неэквивалентные подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3). ПСИ этих подалгебр ищутся в четвертом, а инвариантные операторы подалгебр алгебры AP(2,2) - в пятом параграфе.

Применению полученных результатов для нахождения точных решений некоторых уравнений математической физики посвящена последняя третья глава диссертации. Симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера проведена в § I. Результаты симметрийной редукции применены в § 2 для нахождения точных решений некоторых волновых уравнений в пространстве Минковского M(2,3). Рассматривается случай подалгебр коразмерности I алгебр AP(2,2) и AP(2,3). Построены семейства точных решений уравнений Даламбера, Лиувилля, эйконала. В § 3 на основании группового подхода проводится разделение переменных для уравнения Гельмгольца. Построены в пространствах M(2,2) и M(2,3) множества решений в разделенных переменных.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Найденные максимальные подалгебры алгебры AP(2,n) и максимальные разрешимые подалгебры алгебры AO(2,n) могут быть использованы при исследовании подгрупповой структуры группы P(2,n) для $n \geqslant 4$; подалгебры алгебр AP(2,2), AP(2,3) и их инварианты и инвариантные операторы - при решении задачи о редукции представлений группы по подгруппам, а также для нахождения точных решений P(2,3)-инвариантных уравнений математической физики.

СПИСОК ОСНОВНОЙ ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д. Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства // Теоретико-алгебраич. методы в задачах мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 119-123.
2. Баранник А.Ф., Фущич В.И. О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп. - Киев, 1986. - 48 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 86.87).
3. Баранник Л.Ф. Операторы Казимира для расширенной группы Галилея n -мерного пространства // Теоретико-алгебраич. методы в задачах мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 108-110.
4. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подалгебры обобщенной алгебры Галилея // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 39-43.
5. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре AP(2,n). - Киев, 1985. - 52 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.89).
6. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\hat{P}(1,n)$. - Киев, 1985. - 50 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.90).
7. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре P(1,n). - Киев, 1986. - 40 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.86).
8. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре P(1,n) // Теоретико-групповые методы в физике. Труды Третьего семинара. Т.2. М.: Наука, 1986. - С. 169-175.

9. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Операторы Казимира для обобщенных групп Пуанкаре и группы Галилея // Там же. - С. 176-183.

10. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера. - Киев, 1987. - 48 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.16).

11. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения.-М.: Мир, 1980, 1. - 456 с., 2. - 396 с.

12. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во иностр. лит., 1954. - 216 с.

13. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука, 1965. - 588 с.

14. Винтерниц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца // Ядерная физика. - 1965. - 1, № 5. - С. 889-901.

15. Гельфанд И.М. Центр инфинитезимального группового кольца // Матем. сб. - 1950. - 26. - С. 103-112.

16. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. - М.: Физматгиз, 1958.- 368 с.

17. Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. - Київ.: Рад. шк., 1941. - 415 с.

18. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. I. Группа $IGL(n,R)$ // Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия. - 1980. - 21, № 2. - С. 3-7.

19. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. II. Группа $ISL(n,R)$ // Там же. - С. 7-10.

20. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф. Инвариантные операторы неоднородных групп. III. Группа $ISO(p,q)$ // Там же.- 21, № 4.- С. 23-27.

21. Джекобсон Н. Алгебры Ли. - М.: Мир, 1964. - 355 с.

22. Дынкин Е.Б. Максимальные подгруппы классических групп // Труды Моск. матем. об-ва. - 1952. - I, № 2. - С. 349-466.

23. Дынкин Е.Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр ЛИ // Матем. сб. - 1952. - 30, № 2. - С. 349-462.

24. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.- 320 с.

25. Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атом. ядра. - 1980. - 11, вып.I. - С. 5-36.

26. Кадышевский В.Г., Тодоров И.Г. Группа симметрии ISL(6) : представления и инварианты // Ядерная физика. - 1966. - 3, № I. - С. 135-144.

27. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

28. Карпелевич Ф.И. Простые подалгебры вещественных алгебр Ли// Труды Моск. матем. об-ва. - 1955. - 4, № I. - С. 3-112.

29. Комраков Б.П. Редуктивные подалгебры редуктивных вещественных алгебр Ли // Теоретико-групповые методы в физике. Труды третьего семинара. Т.2.- М.: Наука, 1986. - С. 205-212.

30. Лагно В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре AP(2,2) // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 96-107.

31. Лагно В.И. О подалгебрах обобщенной алгебры Пуанкаре AP(2,3) // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция: Тезисы сообщений. Часть первая. - Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР. - Львов, 1987. - С. 155.

32. Лагно В.И. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуан-

каре P(2,3) и их инвариантах // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 84-89.

33. Лагно В.И. Операторы Казимира подалгебр алгебры Пуанкаре AP(2,2) // Асимптотические методы решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. - Киев: КГПИ, 1987. - С. 55-62.

34. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. - М.: Наука, 1985. - 280 с.

35. Ленг С. Алгебра. - М.: Мир, 1968. - 564 с.

36. Мальцев А.И. О полупростых подгруппах групп Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1944. - 8, № 4. - С. 143-174.

37. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.

38. Никитин А. Г., Фущич В.И., Юрик И.И. Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам // Теор. и мат. физика. - 1976. - 26,№ 2.- С. 206-220.

39. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

40. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. - М.: Мир, 1986. - 603 с.

41. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.- М.: Наука,1984. - 520 с.

42. Тауфик М.С. О полупростых подалгебрах некоторых простых вещественных алгебр Ли // Успехи мат. наук. - 1975. - 30, № 4. - С. 261-262.

43. Тауфик М.С. О максимальных подалгебрах в классических вещественных алгебрах Ли // Вопр. теории групп и гомол. алгебры. - Ярославль. - 1979. - № 2. - С. 148-168.

44. Тауфик М.С. О полупростых подалгебрах псевдоунитарных ал-

гебр Ли // Геометрич. методы в задачах алгебры и анализа.- Ярославль. - 1980. - С. 86-115.

45. Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P(1,4) // Укр. мат. журн. - 1979. - 31, № 6. - С. 717-722.

46. Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера P(1,4). - Киев, 1978. - 36 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.18).

47. Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P(1,4) // Укр. мат. журн. - 1981. - 33, № 5. - С. 696-700.

48. Фущич В.И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе // Теор. и мат. физика. - 1970. - 4, № 3. - С. 360-382.

49. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в мат. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.- С. 5-44.

50. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исслед. в мат. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С. 5-29.

51. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико- алгебраич. исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 4-23.

52. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. - 1987. - 39, № 1. - С. 116-123.

53. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные под-

группы обобщенной группы Галилея.I. - Киев, 1985. - 46 с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.19).
54. Фущич В.И.,Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида // Укр. мат. журн. - 1986. - 38, № I. - С. 67-72.
55. Фущич В.И., Жданов Р.З. Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного поля // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 20-30.
56. Фущич В.И., Жданов Р.З. Об одном обобщении метода разделения переменных для линейных систем дифференциальных уравнений // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 4-16.
57. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983. - 196 с.
58. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики // Укр. мат. журн. - 1976. - 28, № 6. - С. 844-849.
59. Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и точные решения уравнения Монжа-Ампера // Докл. АН СССР. - 1983. - 273, № 3.- С,24-26.
60. Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М. Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. - Киев, 1986. - 36 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.27).
61. Фущич В.И., Штелень В.М. О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака // Теор.и мат. физика. - 1987. - 72, № I. - С. 35-44.
62. Шаповалов В.Н. Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка // Дифференциальные урав-

нения. - I980. - I6, № I0. - С. I864-I874.

63. Шульга М.В. Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, I985. - С. 36-38.

64. Abellanans L., Martinez Alonso L. A general setting for Casimir invariants // J. Math. Phys. - I975. - I6, N° 9.- P. I580-I584.

65. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M. Relation of the Inhomogeneous de Sitter Group to the Quantum Mechanics of Elementary Particles // J. Math. Phys. - I970. - II, N° 8 . - P. 2297-2305.

66. Bacry H., Combe P., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group // Repts. Math. Phys. - I974. - 5, N° 2. - P. I45-I86.

67. Bacry H., Combe P., Sorba P. Connected subgroup of the Poincare group.II.// Ibid. - I974. - 5, N° 3. - P.36I-392.

68. Barannik L.F., Fushchich W.I. On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincare group P(I,n) // J. Math. Phys. - I987. - 27, N° 7. - P. I445-I458.

69. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P. Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics // J. Math. Phys. - I977. - I8, N° I. - P. 72-83.

70. Burdet G., Patera J., Perrin M. et Winternitz P. Sous-algebres de Lie de l'algebre de Schrodinger // Ann. Sc. Math. Quebec. - I978. - 2, N° I. - P. 8I-I08.

7I. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P. The optical group and its subgroups // J. Math. Phys. - I978. - I9, N°8. - P. I758-I780.

72. Beltrametti E.G., Blasi A. On the number of Casimir operators associated with any Lie group // Phys. Lett. - I966.- 20, N°I. - P. 62-64.

73. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.T. Extension of the S-matrix of the mass shell and momentum space of constant curvature. - Dubna, I974. - 36 p.- (Preprint/Joint Institute for Nuclear Research; E2-6992).

74. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.T. Translation invariant quantum field with de-Sitter momentum space of the mass shell. - Dubna, I974. - 22 p. - (Preprint/Joint Institute for Nuclear research; E2-7936).

75. Fushchich W.I. On a motion equations for two particles in relativistics quantum mechanics // Lett. Nuovo Cim. - I974. - I0, N° 4. - P. I63-I68.

76. Fushchich W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuck V.M. Continuous subgroups of the Poincare group P(I,4)// J. Phys. A. Math. Gen. - I985. - I8, N°I4. - P.2893-2899.

77. Fushchich W.I., Nikitin A.G. Reduction of the representations of the generalised Poinkare algebra by the Galilei algebra // Ibid. - I980. - I3, N°II. - P. 23I9-2330.

78. Fushchich W.I., Seheda Yu.N. Some exact solutions of the many-dimensional sine-Gordon equations // Lett. Nuovo Cim. - I984. - 4I, N°I4. - P. 462-464.

79. Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations // J.Phys. A: Math. and Gen. - I983. - I6, N°I5. - P. 3645-3656.

80. Fushchich W.I.,Zhdanov R.Z. On some exact solutions of a sustem of non-linear differential equations for spinor and vector fields// Ibid.-I987.-20,N°I3.-P.4I73-4I90.

8I. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations// J.Math.Phys.-I984.-25,N°4.-P.79I-806.

82. Lassner W. Realization of the Poincare group on homogeneous Spaces// Acta phys. slov. - I973.-23,N°4.-P.I93-202.

83. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen: Bd. I-3. - Leipzig: Teubner, I888, I890, I893.

84. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of the SU(p,q) groups and all subgroups of SU(2,I) // J. Math. Phys.-I974.-I5,N°8.-P.I378-I393.

85. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H. Subgroups of the similitude group of three-dimensional Minkovski space // Can. J. Phys.-I976.-54,N°9.-P.950-96I.

86. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.I.General method and the Poincare group // J.Math.Phys.-I975.-I6,N°8.-P. I597-I6I4.

87. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.II. The similitude group// Ibid.- P.I6I5-I624.

88. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Quantum numbers f for particles in de Sitter space// Ibid.-I976.-I7,N°5.- P. 7I7-728.

89. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poincare group and their invariants// Ibid.-N°6.-P977-985.

90. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // Ibid. - I976.-I7,N°6.- P.986-994.

9I. Patera J.,Winternitz P., Zassenhaus H. The maximal solvable subgroups of SO(p,q) groups // Ibid.-I974.-I5,N°II. - P. I932-I938.

92. Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four- dimensional Lie algebras // Ibid.- I977.-I8,N°7.- P.I449-I455.

93. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental group of physics.III. The de Sitter groups // Ibid.-N°I2.-P.2259-2288.

94. Patera J., Saint-Aubin Y., Zassenhaus H. Finite subgroups of the generalised Lorentz groups O(p,q) // Ibid.- I980.- 2I ,N°2. - P. 234-239.

95. Peccia A. Subalgebras of the similitude algebra and their invariants // Ibid. - I977.-I8,N°2.-P.202-2I4.

96. Perroud M. The maximal solvable subalgebras of the real classical Lie algebras // Ibid. - I976.-I7,N°6.-P.I028-I033.

97. Perroud M. The fundamental invariants of inhomogeneous classical group // Ibid. - I983. - 24,N°6. - P. I38I-I39I.

98. Sorba P. The Galilei group and its connected subgroups // Ibid. - I976. - I7,N°6. - P. 94I-953.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение многих физических процессов, имеющих существенно нелинейный характер, сводится чаще всего к исследованию дифференциальных уравнений (ДУ), которые не всегда поддаются решению традиционными методами математической физики /метод разделения переменных, метод конечных разностей и др./. В этих случаях эффективно применяются теоретико-групповые методы, основанные на использовании широкой симметрии ДУ.

Основы группового анализа ДУ заложены в конце прошлого века норвежским математиком Софусом Ли [83], первоначальной целью которого было создание теории интегрирования обыкновенных ДУ, аналогичной теории Абеля решения алгебраических уравнений. Им же было введено и изучено фундаментальное понятие группы, допускаемой данной системой ДУ. Теоремы Ли о соответствии между локальными группами и алгебрами Ли позволяют сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным.

Систематическое исследование глобального строения групп Ли впервые предприняли Э.Картан и Г.Вейль. Современное изложение теории групп Ли дано Л.С.Понтрягиным [41].

С.Ли применил свою теорию к конкретным уравнениям и нашел их явные решения. При решении волнового уравнения эту теорию использовали А.Бэклунд, А.Пуанкаре, Э.Уиттекер. Важные идеи по отысканию точных решений ДУ высказал Г.Биркгоф. Методом обратной задачи теории рассеяния исследованы многочисленные одно- и двумерные волновые уравнения, построены их солитонные решения [24,34], но на многомерные ДУ метод обобщения не получил.

К настоящему времени построены и подробно изучены группы симметрии, допускаемые многими основными уравнениями теоретической и математической физики. В частности, исследована симметрия уравнений Максвелла [57] и Дирака [49], а также описаны гиперболические нелинейные ДУ в частных производных второго порядка, которые являются инвариантными относительно групп $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{G}(n)$ [50]. Изучению симметрийных свойств и построению точных решений нелинейных многомерных ДУ в частных производных /уравнения Монжа-Ампера, Лиувилля, Даламбера, эйконала/, а также некоторых систем ДУ для спинорного и векторного полей /системы Дирака, Навье-Стокса/ посвящены работы В.И.Фущича и его учеников [51,52,55,59,61,78].

Современному изложению группового анализа ДУ и его развитию за последние 25 лет посвящена монография Л.В.Овсянникова [39]. В ней, в частности, изложена, построенная Л.В.Овсянниковым, теория инвариантных и частично-инвариантных решений ДУ, с помощью которой найдены новые частные решения уравнений газовой динамики.

Конструктивная реализация идей и методов С.Ли для отыскания точных решений ДУ требует решения следующей проблемы: нахождение всех неэквивалентных подгрупп группы симметрии, допускаемой ДУ. На важность этой задачи неоднократно указывал Л.В.Овсянников [39].

Метод разделения переменных, который является одним из эффективных методов нахождения точных решений линейных ДУ, связан с подгрупповой структурой групп симметрии ДУ. Доказана следующая теорема [14]: каждому разбиению группы Лоренца на подгруппы, обладающие инвариантными операторами, соответствует одна координатная система, в которой уравнение Лапласа допускает полное разделение переменных. Позже этот подход был развит и применен к решению многих уравнений теоретической и математической физики [37,56,61].

Знание подгрупповой структуры группы Ли позволяет также решать задачу о редукции представлений группы по подгруппам. В работе [38] проведена редукция неприводимых унитарных представлений обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$ по ее подгруппам $P(1,n-k)$. Здесь же найден явный вид унитарного оператора, который связывает канонический базис представления с $P(1,n-k)$-базисом. Редукция неприводимых представлений алгебры $AP(1,4)$ по ее подалгебре Галилея $A\tilde{G}(3)$ рассмотрена в статье [77].

Как следует из сказанного, при решении ряда задач современной математики и физики важное значение имеет вопрос об описании непрерывных подгрупп групп Ли с точностью до определенной сопряженности, который сводится к решению задачи описания относительно сопряженности классов подалгебр алгебры Ли, соответствующей группы Ли.

На этом пути получен ряд важных результатов. Решена задача описания редуктивных подалгебр комплексных алгебр Ли и простых подалгебр простых классических вещественных алгебр Ли [22,23,28,36]. В работах М.С.Тауфика и Б.П.Комракова изучены полупростые и максимальные неприводимые подалгебры для некоторых классических вещественных алгебр Ли [29,42-44]. Исследованием максимальных разрешимых подалгебр классических вещественных алгебр Ли занимались Г.Цассенхауз, М.Перроуд и другие [85,96]. Найдены в явном виде все максимальные разрешимые подалгебры алгебры $ASU(p,q)$ [84], а также все максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебр $AO(p,q)$ и $AU(p,q)$ [2]. Описаны подалгебры некоторых конечных алгебр Ли малой размерности, а именно, $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [98], $AE(3)$, $AP(1,3)$ [66,67,82].

Систематическое изучение подалгебр конечномерной вещественной алгебры Ли L с нетривиальным разрешимым идеалом N было начато в статьях Й.Патеры, П.Винтерница, Г.Цассенхауза [86,87,93]. Предложенный там метод был затем развит и обобщен в работах В.И.Фущича, Л.Ф.Баранника и А.Ф.Баранника [2,10,54, 68]. Он состоит в следующем.

1. Находим представители F_i всех несопряженных классов подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$.

2. Для каждой подалгебры F_i находим все несопряженные инвариантные подпространства пространства N.

3. Вычисляем несопряженные подалгебры алгебры L, образующие которых имеют следующий вид: $P_k + \sum_m \alpha_m X_m$, X_j; где $P_k \in F_i$, X_m и $X_j \in N$, $\alpha_m \in R$.

Сопряженность определяется заданной группой автоморфизмов. В дальнейшем этот метод будем обозначать как ПВЦ-метод.

С помощью ПВЦ-метода проклассифицированы подалгебры следующих алгебр: $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [53,54]; $AP(1,3)$ [86]; $A\tilde{P}(1,2)$ [91]; $A\tilde{P}(1,3)$ [87]; $AE(3)$ [69]; $AO(1,4)$[88]; $AO(2,3)$, $AOpt(1,2)$ [93]; $AOpt(1,3)$[71]; $ASch(2)$, $A\tilde{S}ch(2)$ [70]; $AP(1,4)$ [45-47,76]; $AE(4)$ [1]; $AE(5)$ [53,54]; $A\tilde{P}(1,4)$ [6,68]; $AG(4)$ [8]; $ASch(3)$, $A\tilde{S}ch(3)$ [10]. Кроме того, с точностью до сопряженности найдены подалгебры всех действительных трех- и четырехмерных алгебр Ли [92].

Отметим также ряд общих результатов, полученных для некоторых действительных алгебр Ли. Явно выписаны одномерные и максимальные абелевы подалгебры алгебр $ASch(n)$, $A\tilde{S}ch(n)$[10]; максимальные приводимые и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$[6,68]. Найдены максимальные абелевы подалгебры алгебр $AP(1,n)$, $AE(n)$ и $AG(n)$ [4,8,53,54], а также одномерные подалгебры алгебр $AO(p,1)$ и $AO(p,2)$ [2].

Не менее важной задачей теории групп и алгебр Ли, особенно в физических применениях, является задача определения инвариантных операторов групп и подгрупп (алгебр и подалгебр) Ли /функций генераторов, коммутирующих со всеми генераторами, которые порождают данную группу (алгебру) Ли/.

Инвариантные операторы (в частности, операторы Казимира) дают возможность классифицировать неприводимые представления данной группы (алгебры) Ли, а также расщеплять приводимые представления на неприводимые [16]. Они играют важную роль в теории специальных функций, поскольку последняя базируется на теории представлений групп, и различные специальные функции являются собственными функциями некоторых множеств инвариантных операторов [13].

Хорошо известны операторы Казимира для однородных классических групп [11], обобщенных групп Пуанкаре $P(p,q)$, Галилея $G(n)$, расширенной группы Галилея $\tilde{G}(n)$ и некоторых других неоднородных классических групп Ли, задаваемых стандартными представлениями [3,9,18-20,97]. Найдены также спектры операторов Казимира группы Пуанкаре $P(1,4)$ [48] и группы $ISL(6,C)$ [26]. Решена задача по отысканию инвариантных операторов подалгебр алгебр $AP(1,3)$ [89], $A\tilde{P}(1,2)$ [95], $AO(2,3)$ и $AO(1,4)$ [93], а также всех действительных алгебр Ли размерности не большей пяти и шестимерных нильпотентных алгебр Ли [90].

Интерес к изучению обобщенной группы Пуанкаре $P(2,3)$ вызван тем, что она имеет прямое отношение к ряду задач математической и теоретической физики. В работах В.Г.Кадышевского и его сотрудников [25,73,74] предложено использовать группу $P(2,3)$ и ее представления для расширения S-матрицы за массовую оболочку. Эта же группа представляет интерес в связи с задачей описания частиц с внутренней структурой [48,65,75]. Кроме того, группа $P(2,3)$ является группой симметрии некоторых уравнений квантовой механики [58].

В настоящей диссертации изучена подгрупповая структура группы Пуанкаре $P(2,3)$. Целью работы является:

- классификация всех связных подгрупп группы $P(2,3)$, или, что то же самое, представителей несопряженных классов подалгебр алгебры $AP(2,3)$;

- нахождение инвариантов неэквивалентных подалгебр алгебры $AP(2,2)$ и подалгебр коразмерности один алгебры $AP(2,3)$;

- применение полученных результатов для редукции и нахождения точных решений волновых уравнений.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка основной использованной литературы и двух приложений. Изложим вкратце содержание диссертации.

Первая глава. В §I получены некоторые общие результаты о связных подгруппах группы $P(2,n)$. В частности, описаны однопараметрические и максимальные разрешимые подгруппы этой группы. Во втором параграфе проведена классификация подалгебр алгебры $AP(2,2)$, а в третьем - подалгебр алгебры $AP(2,3)$.

Вторая глава. В первом параграфе найдены инварианты однопараметрических подгрупп группы $P(2,n)$. Вопросу классификации подалгебр алгебры $AP(2,2)$ и подалгебр коразмерности один алгебры $AP(2,3)$ относительно специального отношения эквивалентности посвящены второй и третий параграфы. В §4 построены инварианты найденных подалгебр. В последнем, пятом параграфе, получены инвариантные операторы всех несопряженных подалгебр алгебры $AP(2,2)$.

Третья глава. В §I проведена симметрийная редукция ультрагиперболического уравнения Даламбера. Во втором параграфе, на основании результатов редукции, получены точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Вопросам разделения переменных для уравнения Гельмгольца в пространствах Минковского M(2,2) и M(2,3) посвящен §3. Точные решения в виде неявных функций для одной системы ДУ найдены в четвертом параграфе.

В заключении дана краткая характеристика основных результатов исследования, а в приложениях приведены расщепляемые и нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,3)$.

Основные результаты диссертации докладывались на 19 Всесоюзной алгебраической конференции (г.Львов, 1987 г.), на научном семинаре отдела прикладных исследований Института математики АН УССР (г.Киев, 1985-1988 г.), на итоговых научных конференциях преподавателей Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (1987-1988 г.).

По теме диссертации опубликовано пять печатных работ [5, 30-33].

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР, доктору физико-математических наук, профессору В.И.Фущичу за постоянное внимание к работе и постановку задач, а также кандидату физико-математических наук, доценту Л.Ф.Баранннику за полезное обсуждение результатов и научное сотрудничество.

ГЛАВА I

ПОДГРУППОВАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ ПУАНКАРЕ P(2,3)

В первой главе найдены в явном виде однопараметрические и максимальные разрешимые подгруппы обобщенной группы Пуанкаре P(2,n). Эти общие результаты значительно упрощают задачу нахождения всех непрерывных замкнутых подгрупп группы P(2,3). Описаны все связные подгруппы групп P(2,2), P(2,3). Для исследования подгрупповой структуры применяется ПВЦ-метод.

§ I. О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре P(2,n)

Пусть R - поле вещественных чисел; $\langle Y_1, \ldots, Y_s \rangle$ - векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1, \ldots, Y_s$; R^m - m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U = U_{2,n}$ - 2 + n-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 - \ldots - x_{n+2} y_{n+2}\ ; \qquad \text{(I.I.I)}$$

O(2,n) - группа линейных преобразований U, сохраняющих (X,X) для каждого $X \in U$.

Будем предполагать, что O(2,n) реализована в виде группы вещественных матриц порядка 2 + n.

Определение I.I.I. Группой Пуанкаре P(2,n) называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{Vmatrix} \Delta & y \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где $\Delta \in O(2,n)$, $y \in R^{n+2}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы G. Используя определение алгебры Ли [4I], получаем, что $AO(2,n)$ состоит из матриц

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ -\alpha & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_{12} & \dots & \delta_{1,n-1} & \delta_{1,n} \\ \beta_2 & \gamma_2 & -\delta_{12} & 0 & \dots & \delta_{2,n-1} & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & -\delta_{1,n-1} & -\delta_{2,n-1} & \dots & 0 & \delta_{n-1,n} \\ \beta_n & \gamma_n & -\delta_{1,n} & -\delta_{2,n} & \dots & -\delta_{n-1,n} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (I.I.2)$$

Пусть E_{ik} - матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах ($i, k = 1,2,\dots,n+3$). Нетрудно установить, что базис алгебры $AP(2,n)$ образуют матрицы $J_{12} = E_{12} - E_{21}$;

$J_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$ ($a < b$; $a, b = 3,\dots, n+2$);

$J_{ia} = -E_{ia} - E_{ai}$ ($i = 1,2$; $a = 3,\dots, n+2$);

$P_j = E_{j,n+3}$ ($j = 1,2,\dots, n+2$).

Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma} \quad ;$$

$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta ; \quad J_{\beta\alpha} = - J_{\alpha\beta} \quad ; \qquad (I.I.3)$$

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \; ; \; g_{11} = g_{22} = - g_{33} = \ldots = - g_{n+2,n+2} = 1 \; ;$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 \, , \quad \alpha \neq \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру АО(2, n), а генераторы трансляций P_α – коммутативный идеал N, причем АР(2, n) = $N \oplus$ АО(2, n). Легко увидеть, что $[X, Y] = X \cdot Y$, для любых $X \in$ АО(2, n), $Y \in N$. Отождествим N и $U_{2,n}$, сопоставив P_i $n+2$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и нулями на остальных местах (i =I,2,..., $n+2$).

Пусть C – такая матрица порядка $n+3$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to C X C^{-1}$ является автоморфизмом АР(2, n). Если $C \in G$, где G – подгруппа группы Р(2, n), то φ_C называется G-автоморфизмом.

Определение I.I.2. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры АР(2, n) будут называться Р(2, n)-сопряженными, если $\varphi_C(L_1) = L_2$ для некоторого Р(2, n)-автоморфизма φ_C алгебры АР(2, n).

Пусть W – невырожденное подпространство пространства U. Если F – подалгебра АО(W), то тождественное отображение F является представлением F в АО(W) (О(W) – группа изометрий пространства W). Это представление будем называть тривиальным.

Определение I.I.3. Подалгебра $F \subset$ АО(W) называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Если тривиальное представление F вполне приводимо, то F называется вполне приводимой.

Здесь W – произвольное подпространство пространства U.

Определение I.I.4. Нормализатором W в АО(2,n) называется множество

$$Nor\, W = \{ X \in AO(2,n) \mid (\forall Y \in W)(X \cdot Y \in W\} \ .$$

Лемма I.I.I. Нормализатор $\langle P_1 + P_{n+2} \rangle$ в АО(2,n) совпадает с алгеброй $A\tilde{P}(1, n-1) = \langle G_2, \ldots, G_{n+1} \rangle \oplus (AO(1, n-1) \oplus \langle J_{1,n+2} \rangle)$, где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ ($a = 2, \ldots, n+1$), $AO(1, n-1) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, \ldots, n+1$. Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[G_a, J_{1,n+2}] = G_a \quad ; [J_{ab}, J_{1,n+2}] = [G_a, G_b] = 0 ;$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad} J_{bc} + g_{bc} J_{ad} - g_{ac} J_{bd} - g_{bd} J_{ac} \quad ; \quad \text{(I.I.4)}$$

$$[G_a, J_{bc}] = g_{ab} G_c - g_{ac} G_b \quad (a, b, c, d = 2, 3, \ldots, n+1).$$

Доказательство. Необходимо найти все матрицы вида (I.I.2), для которых $X \cdot (P_1 + P_{n+2}) = \lambda (P_1 + P_{n+2})$, где X искомая матрица. Непосредственными вычислениями получаем, что $\alpha = \gamma_n$, $\beta_i = -\delta_{in}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Значит, $Nor \langle P_1 + P_{n+2} \rangle = A\tilde{P}(1, n-1)$. Используя соотношения (I.I.3), убеждаемся в справедливости (I.I.4). Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $O[k, l]$ – подгруппа группы О(2,n), сохраняющая x_i и $g_{kk} x_k^2 + \ldots g_{ll} x_l^2$ ($k < l$, $i = 1, 2, \ldots, k-1, l+1, l+2, l+3, \ldots, n+2$); $AH[1,2] = \langle J_{12} \rangle$; $AH[3, 2d+1] = AH[3, 2d] = \langle J_{34}, \ldots, J_{2d-1, 2d} \rangle$ $(2 \le d \le [\frac{n}{2}] + 1)$;

$$AH[3,3]=0\ ;\quad G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}\quad (a = 2,3,\ldots,n);$$

$$H_b = J_{2b} - J_{b,n+1}\quad (b = 3,\ldots,n);\quad M = G_2 + G_{n+1}\ ; \qquad (I.I.5)$$

$$V = \langle G_2\ ,\ldots, G_{n+1}\rangle;\ \mathfrak{M} = \langle M, G_3 ,\ldots, G_n , H_3 ,\ldots, H_n\rangle;$$

$$D = -J_{1,n+2} + J_{2,n+1}\ ;\quad S = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} - J_{1,n+1} - J_{2,n+2})\ ;$$

$$Z = J_{1,n+2} + J_{2,n+1}\ ;\quad T = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} + J_{1,n+1} + J_{2,n+2}).$$

Лемма I.I.2. Если $W = \langle P_1 + P_{n+2}\ , P_2 + P_{n+1}\rangle$, то $Nor\ W$ в AO(2, n) совпадает с алгеброй

$$AOpt\,(1,n-1) = \mathfrak{M} \oplus (AO[3,n] \oplus \langle D, S, T, Z\rangle .$$

Базисные генераторы алгебры $AOpt\ (1,n-1)$ связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[D, G_a] = [G_a, Z] = G_a\ ;\ [H_b, D] = [H_b, Z] = H_b;$$

$$[G_a, T] = H_a\ , [H_b, S] = -G_b\ ,\ [M, Z] = 2M;$$

$$[D, S] = 2S\ , [D, T] = -2T,\ [T, S] = D\ ; \qquad (I.I.6)$$

$$[G_a, J_{ab}] = -G_b\ , [H_b, J_{ab}] = H_a\ (a, b = 3,\ldots,n)$$

(нулевые коммутаторы опущены).

Доказательство. Найдем все такие матрицы X вида (I.I.2), для которых $[X, W] \subset W$. Пусть $X \cdot (\mu\,(P_1 + P_{n+2}) + \varrho\,(P_2 + P_{n+1})) \in W$. Тогда

$$\mu \left\| \begin{matrix} \beta_1 + \delta_{1,n} \\ \beta_2 + \delta_{2,n} \\ \cdots \\ \beta_{n-2} + \delta_{n-2,n} \end{matrix} \right\| + \rho \left\| \begin{matrix} \gamma_1 + \delta_{1,n-1} \\ \gamma_2 + \delta_{2,n-1} \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} + \delta_{n-2,n-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \qquad (I.I.7)$$

$$\begin{cases} \alpha \rho + \beta_{n-1} \rho + \beta_n \mu = \beta_n \mu + \gamma_n \rho - \delta_{n-1,n} \rho, \\ -\alpha \mu + \gamma_{n-1} \rho + \gamma_n \mu = \beta_{n-1} \mu + \gamma_{n-1} \rho + \delta_{n-1,n} \mu . \end{cases} \qquad (I.I.8)$$

Решаем систему уравнений (I.I.7). Пусть $\mu = 0$, $\rho = 1$. Тогда $\delta_{i,n-1} = -\gamma_i$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$. Если $\mu = 1$, $\rho = 0$, то $\delta_{i,n} = -\beta_i$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$. Отсюда вытекает, что G_a, $H_a \in Nor(W)$ $(a = 3,\ldots,n)$.

Систему (I.I.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n}, \\ -\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n} . \end{cases}$$

Поскольку μ и ρ могут быть ненулевыми, то

$$\begin{cases} \alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n}, \\ -\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n} . \end{cases}$$

Отсюда находим, что $\delta_{n-1,n} = \gamma_n - \beta_{n-1} - \alpha$, но тогда $Nor\, W$ содержит $\alpha J_{12} - \beta_{n-1} J_{1,n+1} - \gamma_n J_{2,n+2} + (\alpha + \beta_{n-1} - \gamma_n) J_{n+1,n+2} =$ $= \alpha (J_{12} + J_{n+1,n+2}) - \beta_{n-1} (J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}) - \gamma_n (J_{2,n+2} + J_{n+1,n+2})$, для произвольных α, β_{n-1}, γ_n. Это значит, что $Nor\, W$ содержит генераторы $Y_1 = J_{12} + J_{n+1,n+2}$, $Y_2 = J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}$, $Y_3 = J_{2,n+2} + J_{n+1,n+2}$. На элементы β_n, γ_{n-1} матрицы X не налагаются никакие ограничения. Следовательно, $Nor\,W$ содержит также генераторы $Y_4 = J_{1,n+2}$, $Y_5 = J_{2,n+1}$. По той же причине $J_{ab} \in Nor\,W$ для $a, b = 3, \dots, n$.

Очевидно, что $M = Y_1 - Y_3 + Y_2$, $D = -Y_4 + Y_5$, $Z = Y_4 + Y_5$, $S = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2 - Y_3)$, $T = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$.

Непосредственной проверкой, используя соотношения (I.I.3), убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (I.I.6). Лемма доказана.

Теорема I.I.I. Максимальные приводимые подалгебры алгебры AO(2, n) исчерпываются относительно O(2, n)-сопряженности следующими алгебрами:

I) $A\tilde{P}(1, n-1)$; 2) $AO_{pt}(1,n-1)$; 3) $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$, где $AO_1(1,k) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1,3,\dots,k+2\rangle$, $AO_2(1,n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, k+3, k+4, \dots, n+2\rangle$ $(k = 2,3,\dots,[\frac{n}{2}];\ n \geq 4)$; 4) $AO_1(1,n)$; 5) $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$, где $AO_3(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = k+3, \dots, n+2\rangle$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$.

Доказательство. Пусть F - подалгебра алгебры AO(2, n), U_1 - ненулевое подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U_1 - вырожденное пространство, то оно содержит F-инвариантное изотропное подпространство, сопряженное $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ или $\langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$. На основании лемм I.I.I и I.I.2 заключаем, что алгебра F O(2, n)-сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ или алгебры $AO_{pt}(1,n-1)$.

Если U_1 - невырожденное пространство, то $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$, а потому в силу теоремы Витта [35] нормализатор U_1 в AO(2, n) сопряжен одной из алгебр: $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$

($k = 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$) ($n \geq 4$); $AO_1(1,n)$; $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Теорема доказана.

На основании результатов доказанной теоремы и свойств конечномерных действительных алгебр Ли с нетривиальным разрешимым идеалом можно сделать следующий вывод.

Следствие I.I.I. Максимальные подалгебры алгебры AP(2, n) исчерпываются относительно P(2, n)-сопряженности следующими алгебрами:

I) $U \niplus F$, где F - максимальная неприводимая подалгебра алгебры AO(2, n);

2) $A\hat{G}(1,n-1) \niplus \langle J_{1,n+2} \rangle$, где $A\hat{G}(1,n-1)$ - расширенная алгебра Галилея с базисом P_1 , $P_1 + P_{n+2}$, $G_2, G_3, \ldots, G_{n+1}$, P_2 , $P_3, \ldots, P_{n+1}$, J_{ab} ($a, b = 2, 3, \ldots, n+1$);

3) $U \niplus AO_{pt}(1,n-1)$;

4) $AP_1(1,k) \oplus AP_2(1,n-k)$, где $AP_1(1,k) = \langle P_1, P_3, P_4, \ldots, P_{k+2} \rangle \niplus AO_1(1,k)$, $AP_2(1,n-k) = \langle P_2, P_{k+3}, P_{k+4}, \ldots, P_{n+2} \rangle \niplus AO_2(1,n-k)$ ($k = 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$; $n \geq 4$);

5) $AP(2,k) \oplus AP_3(n-k)$, где $AP_3(n-k) = \langle P_{k+3}, \ldots, P_{n+2} \rangle \niplus AO_3(n-k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Лемма I.I.3. Ненулевые подалгебры алгебры $\langle D, S, T \rangle$ исчерпываются относительно сопряженности, определяемой группой внутренних автоморфизмов алгебры $\langle D, S, T \rangle$, такими алгебрами: $\langle D \rangle, \langle T \rangle, \langle S + T \rangle$, $\langle D, T \rangle, \langle D, S, T \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим случай одномерных подалгебр. Пусть $X = \alpha_1 D + \alpha_2 T + \alpha_3 S$ ($\alpha_2 \neq 0$). Применив автоморфизм $\exp(tS)$ и положив $t=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, с точностью до сопряженности можем брать $X'=\alpha_2 T+(\alpha_3-\alpha_1^2/\alpha_2)S$. Если $\alpha_3-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}=0$, то получаем алгебру $\langle T\rangle$. Пусть $\alpha_3'=\alpha_3-\alpha_1^2/\alpha_2\neq 0$. Поскольку $\exp(tD)(X')\exp(-tD)=\alpha_2 e^{-2t}T+\alpha_3' e^{2t}S$, то при $e^{4t}=\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_3'}\right|$ убеждаемся, что X и $T\pm S$ сопряжены. Получаем алгебры $\langle T+S\rangle$ и $\langle T-S\rangle$. Далее, с помощью автоморфизмов $\exp(T)$ и $\exp(\frac{1}{2}S)$, нетрудно убедиться, что алгебра $\langle T-S\rangle$ сопряжена алгебре $\langle D\rangle$.

Случаи остальных одномерных подалгебр рассматриваются аналогично, а двумерные подалгебры ищем в предположении, что уже известны одномерные подалгебры. Лемма доказана.

Теорема I.I.2. Если n - четное число и $n\geqslant 4$, то алгебра AO(2, n) обладает относительно O(2, n)-сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$AH[1,2]\oplus AH[3,n+2]\quad;\quad \mathfrak{M} ⋺ (AH[3,n]\oplus\langle D,T,Z\rangle);$$

$$\mathfrak{M} ⋺ (AH[3,n]\oplus\langle S+T,Z\rangle).$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+2}{2}$, $\frac{5n-2}{2}$, $\frac{5n-4}{2}$.

Если n - нечетное число и $n\geqslant 3$, то алгебра AO(2, n) обладает относительно O(2, n)-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$V ⋺ (AH[3,n+1]\oplus\langle J_{1,n+2}\rangle)\quad;\quad AH[1,2]\oplus AH[3,n+1]\quad;$$

$$\mathfrak{M} ⋺ (AH[3,n]\oplus\langle D,T,Z\rangle);\quad \mathfrak{M} ⋺ (AH[3,n]\oplus\langle S+T,Z\rangle).$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+1}{2}$, $\frac{3n+1}{2}$, $\frac{5n-3}{2}$, $\frac{5n-5}{2}$.

Доказательство. Пусть $n\geqslant 3$, L - максимальная разрешимая подалгебра алгебры AO(2, n). Если все неприводимые L -

инвариантные подпространства пространства M(2, n) невырождены, то $L = AH[1,2] \oplus AH[3,n+2]$. Если в M(2, n) существует изотропное L-инвариантное подпространство, то L сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ или алгебры $AOpt(1, n-1)$.

Известно, что при четном n алгебра $AO[2, n+1]$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй $B = \langle H_3, \ldots, H_n\rangle \niplus (AH[3,n] \oplus \langle J_{2,n+1}\rangle)$, а при нечетном n, кроме этой подалгебры, в $AO[2, n+1]$ существует еще одна максимальная разрешимая подалгебра $AH[3, n+1]$. Так как

$$[G_2, P_2 + P_{n+1}] = P_1 + P_{n+2}, \quad [G_{n+1}, P_2 + P_{n+1}] = -(P_1 + P_{n+2}),$$

то G_2, G_{n+1} содержатся в $AOpt(1, n-1)$, а значит $V \niplus (B \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$ является подалгеброй алгебры $AOpt(1, n-1)$. Алгебра $V \niplus (AH[3, n+1] \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$ (n - нечетное число) является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры AO(2, n).

Из леммы I.I.3 и того факта, что ортогональная алгебра обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с ее подалгеброй Картана, вытекает, что максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AOpt(1, n-1)$ исчерпываются алгебрами

$$\mathfrak{M} \niplus (AH[3,n] \oplus \langle D, T, Z\rangle), \quad \mathfrak{M} \niplus (AH[3,n] \oplus \langle S+T, Z\rangle).$$

Поскольку эти алгебры имеют разные размерности, то они не сопряжены. Теорема доказана.

Теорема I.I.3. Пусть $\alpha, \beta, \lambda \in R$ и $\alpha, \beta > 0$, $0 < \lambda < 1$; $t = 1, \ldots, [(n-2)/2]$; $s = 1, \ldots, [(n-3)/2]$; $X_l = \alpha_1 J_{34} + \alpha_2 J_{56} + \ldots + \alpha_l J_{2l+1,2l+2}$, где $\alpha_1 = 1$, $0 < \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_l \leq 1$ при $l > 1$. Одномерные подалгебры алгебры AO(2, n) исчерпываются относительно O(2, n)-сопряженности такими алгебрами: $\Lambda_1=\langle D\rangle$; $\Lambda_2=\langle T\rangle$; $\Lambda_i=\langle M+(-1)^{i-1}\cdot 2T\rangle$ $(i=3,4)$;

$\Lambda_5=\langle D+\lambda Z\rangle$; $\Lambda_6=\langle D+Z\rangle$; $\Lambda_7=\langle T+Z\rangle$;

$\Lambda_8=\langle S+T+\alpha Z\rangle$; $\Lambda_9=\langle S+T\rangle$; $\Lambda_i=\langle S+T+(-1)^i M\rangle$

$(i=10,11)$; $\Lambda_{12}=\langle G_3+H_4\rangle$; $\Lambda_{13}=\langle G_3+T\rangle$;

$\Lambda_{14}=\langle 2G_3+D+Z\rangle$; $\Lambda_{15}=\langle X_\ell\rangle$ $(\ell=1,\ldots,[\frac{n}{2}])$;

$\Lambda_{16}=\langle X_\ell+G_{2\ell+3}\rangle$ $(\ell=t,\ n=2m+1;\ \ell=s,\ n=2m)$;

$\Lambda_{17}=\langle X_s+G_{2s+3}+H_{2s+4}\rangle$ $(2s+4\leq n)$; $\Lambda_{18}=\langle X_s+G_{2s+3}+T\rangle$;

$\Lambda_{19}=\langle X_s+\alpha(G_{2s+3}+D+Z)\rangle$; $\Lambda_{20}=\langle X_t+\alpha D\rangle$;

$\Lambda_{21}=\langle X_t+T\rangle$; $\Lambda_{22}=\langle X_t+M+2T\rangle$;

$\Lambda_{23}=\langle X_t+\alpha(D+Z)\rangle$; $\Lambda_{24}=\langle X_t+\alpha D+\beta Z\rangle$ $(\alpha>\beta)$;

$\Lambda_{25}=\langle X_t+\alpha(T+Z)\rangle$; $\Lambda_{26}=\langle X_t+\alpha(S+T)\rangle$;

$\Lambda_{27}=\langle X_t+\alpha(S+T)+\beta Z\rangle$; $\Lambda_j=\langle X_t+\alpha(S+T+(-1)^j M)\rangle$

$(j=28,29)$; $\Lambda_{30}=\langle X_t+S+T+G_3-H_4\rangle$ $(t\geqslant 2)$;

$\Lambda_{31}=\langle J_{12}\rangle$; $\Lambda_{32}=\langle X_\ell+\alpha J_{12}\rangle$ $(\ell=1,\ldots,[\frac{n}{2}])$;

$\Lambda_{33}=\langle X_{\frac{n-1}{2}}+\alpha J_{1,n+2}\rangle$ $(n=2m)$.

Доказательство. Одномерные подалгебры алгебры $AH[3,n]$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности алгебрами $\langle X_t \rangle$. Группа $O[3,n]$ является группой изометрий пространств $V = \langle G_3,\dots,G_n \rangle$ и $W = \langle H_3,\dots,H_n \rangle$. По теореме Витта одномерные подпространства пространства $V+W$ исчерпываются относительно $O[3,n]$-сопряженности такими пространствами: $\langle G_3 + \lambda H_3 + \mu H_4 \rangle$, $\langle H_3 \rangle$. Применив автоморфизмы $exp(\theta T)$, $exp(\frac{\pi}{2}(S+T))$ и $exp(t\, J_{2,n+1})$, убеждаемся, что одномерные подпространства пространства $V+W$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности пространствами $\langle G_3 \rangle$ и $\langle G_3 + H_4 \rangle$. Алгебра $\langle D + \lambda M \rangle$ $(\lambda \neq 0)$ сопряжена алгебре $\langle T + Z \rangle$, алгебра $\langle M \rangle$ - алгебре $\langle T \rangle$, алгебра $\langle G_3 \rangle$ - алгебре $\langle M - 2T \rangle$.

Пусть

$$X = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \sum_{a=b}^{c} \alpha_a (G_{2a-1} - H_{2a}).$$

В силу теоремы 2 [54] существует такой $O(2,n)$-автоморфизм φ алгебры $AO(2,n)$, что

$$\varphi(X) = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \alpha (G_{2b-1} - H_b).$$

Если $\alpha > 0$, то автоморфизм $exp(\theta Z)$ позволяет обратить α в 1. Теорема доказана.

Замечание. Для каждой из выписанных подалгебр n принимает такие значения, для которых есть смысл говорить о данной подалгебре.

Запись $\mathcal{Y}_{j,k} : T_1, \dots, T_m$ означает, что $k = 1, 2, \dots, m$; $\mathcal{Y}_{j,1} = T_1$, $\mathcal{Y}_{j,2} = T_2, \dots, \mathcal{Y}_{j,m} = T_m$.

Теорема I.I.4. Пусть $\delta, \rho \in R$; $\delta, \rho > 0$; $Z_0 = 0$, $\Lambda_0 = \langle Z_0 \rangle$; $\Lambda_j = \langle Z_j \rangle$ $(j = 1,2,\dots,33)$ пробегает множество одномерных подалгебр алгебры AO(2, n), найденных в теореме I.I.3. Тогда одномерные подалгебры алгебры AP(2, n) исчерпываются относительно P(2, n)-сопряженности алгебрами Λ_j и $\Lambda_{j,k} = \langle Z_j + Y_{j,k} \rangle$, где $Y_{j,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

$Y_{j,k} : \delta P_1, \delta P_{n+2}, P_1 + P_{n+2}$ ($j=0$, $\delta=1$; $j=23$);

$Y_{j,1} = \delta P_3$ ($j = 1,5,7,8,\ldots,11,31$); $Y_{2,k} : P_3, P_{n+2}$;

$Y_{3,k} : P_3, P_{n+1}$; $Y_{j,k} : \delta P_1, \delta P_3, P_1 - P_3$ ($j=4$, $\delta=1$; $j=6$); $Y_{4,4} = P_{n+1}$; $Y_{12,k} : P_5, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+1} + \delta P_{n+2}$;

$Y_{13,k} : P_4, P_{n+1}$; $Y_{14,k} : \delta P_4, \delta P_{n+2}$;

$Y_{15,k} : \delta P_1, \delta P_{2\ell+3}, P_1 + P_{2\ell+3}$ ($\ell \leq [(n-1)/2]$);

$Y_{16,k} : \delta P_2, \delta P_{2\ell+4}, P_2 + P_{2\ell+4}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{17,k} : \delta P_{2s+5}, \delta P_{n+1} + \varrho P_{n+2}, \delta P_{n+1}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{18,k} : \delta P_{2s+4}, \delta P_{n+1}$; $Y_{19,k} : \delta P_{2s+4}, \delta P_{n+2}$;

$Y_{j,1} : \delta P_{2s+3}$ ($j = 20,21,24,25,\ldots,30$); $Y_{21,2} = \delta P_{n+2}$;

$Y_{22,k} : \delta P_{n+2}, \delta P_{n+1}$; $Y_{32,1} = \delta P_{n+2}$; $Y_{33,1} = \delta P_2$.

Доказательство. Первым рассмотрим случай нулевой алгебры Λ_0. Превратим U в псевдоевклидово пространство, положив

$(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \ldots - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} - \alpha_{n+2}\beta_{n+2}$, для $X = \sum_i \alpha_i P_i$, $Y = \sum_i \beta_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n+2)$. Пусть W - подпространство U. Поскольку $\dim W = 1$, то по теореме Витта W $O(2, n)$-сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1 \rangle$, $\langle P_{n+2} \rangle$, $\langle P_1 + P_{n+2} \rangle$.

Если мы будем рассматривать алгебру Λ_5, то применив автоморфизм $\exp(\sum_i t_i P_i)$ $(i = 1, 2, n+1, n+2)$, убеждаемся, что в этом случае подалгебра алгебры $AP(2, n)$ $P(2, n)$-сопряжена алгебре $\langle Z_5 + X_1 \rangle$, где $X_1 = \sum_i \alpha_i P_i$ $(i = \overline{3, n})$. Из теоремы Витта следует, что X_1 $P(2, n)$-сопряжен δP_3, т.е. подалгебра алгебры $AP(2, n)$ в этом случае $P(2, n)$-сопряжена алгебре $\langle Z_5 + \delta P_3 \rangle$. Аналогично рассматриваются случаи остальных алгебр Λ_j. Теорема доказана.

§ 2. Непрерывные подгруппы группы P(2,2)

Алгеброй Ли группы P(2,2) будет алгебра $AP(2,2) = AO(2,2) \oplus \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, где $AO(2,2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1, 2, 3, 4;\ a < b \rangle$. Перейдем к новому базису, состоящему из генераторов

$$B_1 = -\tfrac{1}{2}(J_{14} + J_{23}),\ B_2 = \tfrac{1}{2}(J_{24} - J_{13}),\ B_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} - J_{34});$$

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(J_{14} - J_{23}),\quad C_2 = -\tfrac{1}{2}(J_{24} + J_{13}), C_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{34}).$$

С помощью соотношений (I.I.3) легко проверить, что имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[B_2, B_1] = B_3;\ [B_3, B_1] = B_2;\ [B_2, B_3] = B_1;$$

$$[C_2, C_1] = C_3;\ [C_3, C_1] = C_2;\ [C_2, C_3] = C_1;$$

$$[B_i, C_k] = 0 \quad (i,k = 1,2,3); \tag{I.2.I}$$

$$[B_1,P_1]=\frac{1}{2}P_4, [B_1,P_2]=\frac{1}{2}P_3, [B_1,P_3]=\frac{1}{2}P_2, [B_1,P_4]=\frac{1}{2}P_1;$$

$$[B_2,P_1]=\frac{1}{2}P_3, [B_2,P_2]=-\frac{1}{2}P_4, [B_2,P_3]=\frac{1}{2}P_1, [B_2,P_4]=-\frac{1}{2}P_2;$$

$$[B_3,P_1]=-\frac{1}{2}P_2, [B_3,P_2]=\frac{1}{2}P_1, [B_3,P_3]=-\frac{1}{2}P_4, [B_3,P_4]=\frac{1}{2}P_3;$$

$$[C_1,P_1]=-\frac{1}{2}P_4, [C_1,P_2]=\frac{1}{2}P_3, [C_1,P_3]=\frac{1}{2}P_2, [C_1,P_4]=-\frac{1}{2}P_1;$$

$$[C_2,P_1]=\frac{1}{2}P_3, [C_2,P_2]=\frac{1}{2}P_4, [C_2,P_3]=\frac{1}{2}P_1, [C_2,P_4]=\frac{1}{2}P_2;$$

$$[C_3,P_1]=-\frac{1}{2}P_2, [C_3,P_2]=\frac{1}{2}P_1, [C_3,P_3]=\frac{1}{2}P_4, [C_3,P_4]=-\frac{1}{2}P_3;$$

В дальнейшем через U будем обозначать векторное пространство $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, а через W - его подпространство.

Пусть π - проектирование алгебры AP(2, n) на алгебру AO(2, n); F - подалгебра алгебры AO(2, n); $\hat{F}$ - такая подалгебра алгебры AP(2, n), что $\pi(\hat{F}) = F$.

Определение I.2.I. Если алгебра $\hat{F}$ P(2, n)-сопряжена алгебре $W \oplus F$, где W - F-инвариантное подпространство пространства U, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре AP(2, n). В противном случае алгебру $\hat{F}$ будем называть нерасщепляемой в AP(2, n).

Поскольку подалгебры алгебры AO(2,2) известны [93], то классификация подалгебр алгебры AP(2,2) (согласно ПВЦ-методу) сводится к решению следующих двух задач:

I) для каждой подалгебры F алгебры AO(2,2) найти с точностью до сопряженности все подпространства W пространства U, инвариантные относительно F;

2) для каждой расщепляемой алгебры $W \niplus F$ изучить всевозможные алгебры $W + \hat{F}$, такие, что $\pi(\hat{F}) = F$, $\hat{F} \cap U \subset W$.

Лемма I.2.I. Пусть Γ - линейный оператор конечномерного векторного пространства U над R и $\Gamma^2 = \alpha \cdot 1_U$, где $\alpha^2 = 1$, 1_U - тождественный оператор U. Если $\alpha = -1$ ($\alpha = 1$), то U разлагается в прямую сумму двумерных (одномерных) инвариантных относительно Γ подпространств.

Доказательство. Пусть Q - вещественная линейная алгебра, порожденная Γ. Q можно рассматривать как скрещенную групповую алгебру группы порядка 2 и поля R. Поскольку Q - полупростая алгебра, то по теореме Веддерберна [40] каждый левый Q-модуль вполне приводим. При $\alpha = 1$ неприводимые Q-модули одномерны, а при $\alpha = -1$ - двумерны. Лемма доказана.

Лемма I.2.2. Подпространства пространства U, инвариантные относительно $F = \langle B_1 - B_3 \rangle$, исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности пространствами 0, $\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 \pm P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$, U.

Доказательство. Так как $[B_1 - B_3, P_1 + P_3] = P_2 + P_4$, $[B_1 - B_3, P_2 + P_4] = [B_1 - B_3, P_1 - P_3] = 0$, $[B_1 - B_3, P_2 - P_4] = -P_1 + P_3$, то U суть прямая сумма инвариантных относительно $B_1 - B_3$ подпространств $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$ и $\langle P_1 - P_3, P_2 - P_4 \rangle$. Если $[F, W] \subset W$, $W \subset U$ и $\dim W = 1$, то $W = \langle \alpha(P_2 + P_4) + \beta(P_1 - P_3) \rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(t\, C_3)$, отображаем W на $\langle P_1 - P_3 \rangle$. Если $\dim W \geq 2$, то W содержит $P_1 - P_3$, $\alpha(P_1 + P_3) + \beta(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$, $\alpha(P_2 + P_4)$. При $\alpha \neq 0$ получаем, что W содержит $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4$, $P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)$. Так как

$$\exp(2tC_3)(P_1+P_3+\delta(P_2-P_4))\exp(-2tC_3)=$$

$$=(\cos t+\delta\sin t)(P_1+P_3)+(\delta\cos t-\sin t)(P_2-P_4),$$

то, полагая $\cos t+\delta\sin t=0$, находим, что W сопряжено с $\langle P_1-P_3, P_2+P_4, P_2-P_4\rangle=\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$.

Если $\alpha=0$, то $\exp(2tC_2)W\exp(-2tC_2)$ содержит векторы P_1-P_3, $\beta e^{2t}(P_2+P_4)+\gamma(P_2-P_4)$. При $\beta\cdot\gamma\neq 0$ полагаем $e^{2t}|\beta|=|\gamma|$. Получаем вектор $P_2+P_4\pm(P_2-P_4)$, равный $2P_2$ или $2P_4$. Если $\dim W=2$, то $W=\langle P_1-P_3, P_2\rangle$ или $W=\langle P_1-P_3, P_4\rangle$. Если $\dim W=3$, то $W=\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$. При $\beta=0$, $\gamma\neq 0$ и $\dim W=2$ имеем $W=\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$, при $\gamma=0$, $\beta\neq 0$ и $\dim W=2$ - $W=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма I.2.3. Если $W\neq 0$, $W\neq U$ и $[B_2, W]\subset W$, то W P(2,2)-сопряжено с одним из следующих пространств: $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_1, P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2\pm P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2, P_4\rangle$.

Доказательство. Так как $(2B_2)^2=\mathrm{diag}\{1,1,1,1\}$, то по лемме I.2.I W будет прямой суммой инвариантных одномерных подпространств. На основании соотношений (I.2.I), $U_1=\langle P_1+P_3, P_2-P_4\rangle$ - линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению 1, а $U_2=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ - линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению -I. С точностью до автоморфизма $\exp(tC_3)$ одномерные инвариантные подпространства оператора B_2 исчерпываются $\langle P_1\pm P_3\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\{1,1,-1,-1\}$, отображает $\langle B_2\rangle$ на $\langle B_2\rangle$, а $\langle P_1-P_3\rangle$ на $\langle P_1+P_3\rangle$.

Пусть $W=\langle Y, Z\rangle$, где $Y\in U_1$, $Z\in U_2$. Применяя $\exp(tC_3)$, а затем $\exp(tC_2)$, получаем, что W сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1, P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_1-P_3+P_2+P_4\rangle$.

Пусть

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Lambda \in AO(2,2)$, $\Lambda^{-1} B_2 \Lambda = -B_2$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = P_1 + P_3$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_3) = -(P_1 - P_3)$. Значит, $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4 \rangle$ сопряжено с $\langle P_1, P_3 \rangle$.

Если $\dim W = 3$, то $U_1 \subset W$ или $U_2 \subset W$, а потому $W = \langle P_1 + P_3, P_2, P_4 \rangle$ или $W = \langle P_1, P_3, P_2 + P_4 \rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

не изменяет $\langle B_2 \rangle$ и отображает $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3 \rangle$ на $\langle P_1 + P_3, P_2, P_4 \rangle$. Лемма доказана.

Пусть $F_i(m)$ - подалгебра размерности m алгебры AO(2,2). Если речь идет о расщепляемых подалгебрах $W_1 \oplus F_i(m)$, $W_2 \oplus F_i(m)$, ..., $W_s \oplus F_i(m)$, то будем употреблять обозначение $F_{ij}(m): W_1, W_2, \ldots, W_s$ ($j = 1, \ldots, s$). В формулировке теорем I.2.I, I.2.2 пространство, порожденное векторами $P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots, P_{a_s}$, будем обозначать $(a_1, \ldots, a_s)$, вектор $P_a + \omega P_b$ - $a\omega b$ $(\omega \neq 0)$, ab $(\omega = 1)$, $\overline{ab}$ $(\omega = -1)$.

Теорема I.2.I. Расщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности алгебрами

$F_{1j}(0)$: $0, (1), (3), (13), (1,2), (1,3), (1,24), (3,4), (24,3), (13,24), (1,2,3), (1,3,4), (1,24,3), U \quad (j = \overline{1,14})$;

$F_{2j}(1)=\langle B_1-B_3\rangle$: $0, (\overline{13}), (\overline{13},2), (\overline{13},4), (\overline{13},24), (\overline{13},\overline{24}), (\overline{13},2,4), U \quad (j = \overline{1,8})$;

$F_{3j}(1)=\langle B_2\rangle$: $0, (13), (1,3), (13,24), (13,\overline{24}), (13,2,4), U \quad (j = \overline{1,7})$;

$F_{4j}(1)=\langle B_3\rangle$: $0, (1,2), (3,4), (13,24), U \quad (j = \overline{1,5})$;

$F_{ij}(1)=\langle B_1-B_3+(-1)^a(C_1-C_3)\rangle$: $0, (2a), (\overline{13}), (\overline{13},2), (\overline{13},4), (\overline{13},2\omega 4), (1,6-2a,3), (\overline{13},2,4), U \quad (a = 2, i = 5 \ \vee\ a = 1, i = 6;\ \omega > 0,\ j = \overline{1,9})$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_{ij}(m)$: $0, (\overline{13}), (\overline{13},24), (13,24), (\overline{13},2,4), U \quad (j = \overline{1,6};\ \Gamma_7(1)=\langle -B_1+B_3+C_2\rangle;\ \Gamma_{18}(2)=\langle B_1-B_3,\ C_2\rangle)$;

$F_{ij}(1)=\langle -B_1+B_3+(-1)^{a+1}C_3\rangle$: $0, (\overline{13},24), U \quad (a = 1, i = 8 \ \vee\ a = 2, i = 9;\ j = \overline{1,3})$;

$F_{10j}(1)=\langle B_2+eC_2\rangle$: $0, (13), (24), (1,3), (2,4), (13,\overline{24}), (13,24), (1,24,3), (13,2,4), U \quad (0<|e|<1,\ j = \overline{1,10})$;

$F_{11j}(1)=\langle B_2+C_2\rangle$: $0, (2), (4), (13), (24), (1,3), (2,4), (13,2), (13,4), (13,24), (13,2,4), (1,24,3), (1,2,3), (1,3,4), U \quad (j = \overline{1,15})$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: $0, (13,\overline{24}), U \quad (j = \overline{1,3})$
$(\Gamma_{12}(1)=\langle B_2-eC_3\rangle,\ e>0;\ \Gamma_{21}(2)=\langle B_2, C_3\rangle)$;

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0,(I,2),(3,4), U ($j=\overline{1,4}$;
$\Gamma_{13}(1)=\langle B_3+eC_3\rangle$ ($0<|e|<1$); $\Gamma_{22}(2)=\langle B_3, C_3\rangle$);

$F_{ij}(1)=\langle B_3+(-1)^a C_3\rangle$: 0,($b$),(I,2),(3,4),(I,$c$,3), U
($j=\overline{1,6}$; $a=1$, $b=1$, $c=4$, $i=14$; $a=2$, $b=3$, $c=2$, $i=15$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0,($\overline{13}$),($\overline{13}$,24),($\overline{13}$,$\overline{24}$),($\overline{13}$,2,4), U
($j=\overline{1,6}$; $\Gamma_{16}(2)=\langle B_1-B_3, B_2\rangle$, $\Gamma_{28}(2)=\langle B_1-B_3-C_2, C_1-C_3\rangle$,
$\Gamma_{30}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{31}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$,
$\Gamma_{35}(3)=\langle B_1-B_3, B_2+dC_2, C_1-C_3\rangle$ ($0<|d|<1$));

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0,($\overline{13}$),($\overline{13}$,2),($\overline{13}$,4),($\overline{13}$,24),($\overline{13}$,2,4), U
($j=\overline{1,7}$; $\Gamma_{17}(2)=\langle B_1-B_3, C_1-C_3\rangle$, $\Gamma_{33}(3)=\langle B_1-B_3, B_2+C_2, C_1-C_3\rangle$);

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: 0,($\overline{13}$,24), U ($j=\overline{1,3}$; $\Gamma_{19}(2)=\langle B_1-B_3, C_3\rangle$,
$\Gamma_{27}(2)=\langle B_2-\alpha C_3, B_1-B_3\rangle$ ($\alpha>0$), $\Gamma_{32}(3)=\langle B_1-B_3, B_2, C_3\rangle$);

$F_{20j}(2)=\langle B_2, C_2\rangle$: 0,(I3),(I,3),(I3,24),(I3,2,4), U
($j=\overline{1,6}$);

$F_{ij}(2)=\langle B_2+C_2, B_1-B_3+(-1)^a(C_1-C_3)\rangle$: 0,($\overline{13}$),(2$a$),($\overline{13}$,2),
($\overline{13}$,4),($\overline{13}$,2ω4),($\overline{13}$,2,4),(I,6 − 2a,3), U ($\omega>0$,
$j=\overline{1,9}$; $a=2$, $i=23$ $\vee$ $a=1$, $i=24$);

$F_{25j}(2)=\langle B_2+C_2, B_1-B_3\rangle$: 0,($\overline{13}$),(24),($\overline{13}$,24),($\overline{13}$,$\overline{24}$),

$(13,24),(\overline{13},2),(\overline{13},4),(\overline{13},2,4),(1,24,3),\ U\ (j=\overline{1,11});$

$F_{26j}(2)=\langle B_2+\alpha C_2,\ B_1-B_3\rangle$: $0,(\overline{13}),(24),(\overline{13},24),$
$(\overline{13},\overline{24}),(13,24),(1,24,3),(\overline{13},2,4),\ U\ (\alpha>0,\alpha\neq 1,j=\overline{1,9});$

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: $0,(13,24),\ U\ (j=\overline{1,3};$
$\Gamma_{29}(3)=\langle B_1,B_2,B_3\rangle,\ \Gamma_{39}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_2\rangle);$

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: $0,(\overline{13}),(\overline{13},24),(\overline{13},2,4),\ U$
$(j=\overline{1,5};\ \Gamma_{34}(3)=\langle B_1-B_3,B_2-C_2,C_1-C_3\rangle,\ \Gamma_{41}(4)=\langle B_1-B_3,B_2,C_1-C_3,C_2\rangle);$

$F_{ij}(3)=\langle B_1+(-1)^a C_1,\ B_2+C_2,\ B_3+(-1)^a C_3\rangle$: $0,(2a),$
$(1,6-2a,3),\ U\ (j=\overline{1,4};\ a=1,\ i=36\vee a=2,\ i=37);$

$F_{ij}(m)=\Gamma_i(m)$: $0,(\overline{13},\overline{24}),\ U\ (i=\overline{1,3};$
$\Gamma_{38}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1-C_3\rangle,\ \Gamma_{42}(5)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1-C_3,C_2\rangle);$

$F_{40j}(4)=\langle B_1,B_2,B_3,C_3\rangle$: $0,\ U\ (j=1,2);$

$F_{43j}(6)=\langle B_1,B_2,B_3,C_1,C_2,C_3\rangle$: $0,\ U\ (j=1,2).$

Доказательство. Для каждой из подалгебр алгебры $AO(2,2)$ необходимо найти инвариантные подпространства пространства U и проверить их на сопряженность.

Сначала рассмотрим случай нулевой алгебры $F_1(0)$. Согласно теореме 1.1.3, одномерные подпространства пространства U исчерпываются пространствами $\langle P_1\rangle$, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3\rangle$. Пространства W, для которых $\dim W>1$, ищем в предположении, что известны одномерные инвариантные подпространства. Если W содержит вектор X ненулевой длины, то W сопряжено с $\langle X \rangle \oplus W'$, где $X = P_1$, $W' \subset \langle P_2, P_3, P_4 \rangle$ или $X = P_3$, $W' \subset \langle P_1, P_2, P_4 \rangle$.

Подпространства пространства $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$ исчерпываются пространствами $0, \langle P_2 \rangle, \langle P_2 + P_4 \rangle, \langle P_3 \rangle, \langle P_2, P_3 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_2 + P_4, P_3 \rangle$, $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$, а подпространства пространства $\langle P_1, P_2, P_4 \rangle$ - пространствами 0, $\langle P_1 \rangle, \langle P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_4 \rangle$. Если W не содержит вектор ненулевой длины, то в силу теоремы о существовании ортогонального базиса и теоремы Витта заключаем, что $W = \langle P_1 + P_3 \rangle$ или $W = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$.

Два случая одномерных подалгебр алгебры AO(2,2) рассмотрены в леммах I.2.2 и I.2.3. Остальные случаи одномерных подалгебр исследуются аналогично.

Рассмотрим случай алгебры $F_{16}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle$. При нахождении инвариантных относительно $F_2(1) = \langle B_1 - B_3 \rangle$ подпространств пространства U, мы использовали только автоморфизмы $exp(t_i C_i)$ (i = 2,3). Поскольку эти автоморфизмы алгебру F_{16} отображают в себя, то среди инвариантных относительно F_2 подпространств следует отобрать те, которые выдерживают действие B_2, проверив затем их на сопряженность. Непосредственной проверкой убеждаемся, что инвариантные подпространства для F_{16} исчерпываются пространствами 0, $\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$, U.

Пусть W - подпространство U, инвариантное относительно $F_{25}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 \rangle$. Легко получить, что $W = W_1 \oplus W_2$, где $W_1 \subset \langle P_2, P_4 \rangle$, а W_2 совпадает с одним из пространств: O, $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1, P_3\rangle$. Автоморфизм $exp(t\,C_2)$ не изменяет F_{25} и отображает пространство $P_2+\gamma P_4$ $(\gamma\neq 0)$ на одно из следующих пространств: $\langle P_2\rangle$, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_2+P_4\rangle$, $\langle P_2-P_4\rangle$. Используя соотношения (I.2.I), находим, что W является одним из пространств:

$$O,\ \langle P_1-P_3\rangle,\ \langle P_2+P_4\rangle,\ \langle P_1-P_3, P_2\rangle,\ \langle P_1-P_3, P_4\rangle,$$
$$\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle, \langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle, \langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle,$$
$$\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle,\ U.$$

Аналогично исследуются случаи остальных подалгебр алгебры AO(2,2). Теорема доказана.

Пусть $\widehat{F}_i$ - подалгебра алгебры AP(2,2), которая не является расщепляемой, т.е. $\pi(\widehat{F}_i)=F_i=F_i(m)$ и $\widehat{F}_i\neq F_i \oplus W_j$, где W_j - инвариантное относительно F_i подпространство пространства U. Запись $\widehat{F}_i+W$ означает, что $[F_i, W]\subset \subset W$ и $\widehat{F}_i\cap U\subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\widehat{F}_i+W_1,\ldots,\widehat{F}_i+W_s$, то будем употреблять обозначение $\widehat{F}_{ij}: W_1,\ldots, W_s$ $(j=\overline{1,s})$.

Лемма I.2.4. Нерасщепляемые подалгебры $\widehat{F}$ алгебры AP(2,2) с условием $\pi(\widehat{F})=\langle B_1-B_3\rangle$ исчерпываются алгебрами

$$\widehat{F}_{2j}=\langle B_1-B_3+P_1\rangle : O, \langle P_1-P_3\rangle, \langle P_1-P_3, P_2\rangle, \langle P_1-P_3, P_4\rangle,$$
$$\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle, \langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle, \langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle\ (j=\overline{1,7});$$

$$\widehat{F}_{2j}=\langle B_1-B_3+P_2\rangle : \langle P_1-P_3\rangle, \langle P_1-P_3, P_4\rangle, \langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$$
$(j=\overline{8,10})$.

Доказательство. Пусть $X=B_1-B_3+\sum_i \alpha_i P_i$, $Y=\sum_i t_i P_i$ $(i=\overline{1,4})$. Тогда

$$\exp(2Y)(X)\exp(-2Y) = B_1 - B_3 + (\alpha_1 + t_2 - t_4) P_1 +$$
$$+ (\alpha_2 - t_1 - t_3) P_2 + (\alpha_3 - t_2 + t_4) P_3 + (\alpha_4 - t_1 - t_3) P_4 .$$

Полагая $\alpha_3 - t_2 + t_4 = 0$, $\alpha_4 - t_1 - t_3 = 0$, можно предположить, что алгебра $\widehat{F}$ содержит $X = B_1 - B_3 + \alpha P_1 + \beta P_2$. Если $\widehat{F} \cap U = 0$, то, применяя автоморфизм $\exp(2\theta C_3)$, убеждаемся, что $\widehat{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1 \rangle$. Автоморфизм AO(2,2), соответствующий матрице $diag\{1,-1,1,-1\}$, отображает $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1 \rangle$ на $\langle B_1 - B_3 - \alpha P_1 \rangle$. Поэтому будем предполагать, что $\alpha > 0$. Так как

$$\exp(t(B_2 - C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1)\exp(-t(B_2 - C_2)) = e^{-t}(B_1 - B_3 + \alpha e^{t} P_1),$$

то можно считать, что $\alpha = 1$. В итоге получаем алгебру $\widehat{F}_{2.1} = \langle B_1 - B_3 + P_1 \rangle$. Пусть $W = \langle P_1 - P_3, P_2 \rangle$ или $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$. Тогда $\beta = 0$. Автоморфизм $\exp(t(B_2 + C_2))$ не изменяет W. Так как

$$\exp(t(B_2 + C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1)\exp(-t(B_2 + C_2)) = e^{-t}(B_1 - B_3) +$$
$$+ \alpha(\operatorname{ch} t\, P_1 + \operatorname{sh} t\, P_3) \text{ и } \alpha(\operatorname{ch} t\, P_1 + \operatorname{sh} t\, P_3) + \alpha \operatorname{sh} t (P_1 - P_3) = \alpha e^{t} P_1,$$

то, полагая $|\alpha| e^{2t} = 1$, можно допускать, что $\alpha = 1$.

Аналогично исследуются остальные случаи W . Лемма доказана.

Лемма I.2.5. Все подалгебры $\widehat{F}_i$ алгебры AO(2,2) с условием $\pi(\widehat{F}_i) = F_i$ ($i = 3,4,\overline{7,13},\overline{18,22},\overline{27,32},\overline{36,43}$) являются расщепляемыми.

Доказательство. Алгебры F_i (i = 29,36,37,43) являются полупростыми. В силу теоремы Уайтхеда [21] для них не существует нерасщепляемых расширений. Отсюда вытекает, что расщепляемыми будут также алгебры $\widehat{F}_{38}$, $\widehat{F}_{39}$, $\widehat{F}_{40}$.

Пусть $X = -B_1 + B_3 + C_2 + \sum_i \alpha_i P_i$, $Y = \sum_i t_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). Непосредственно находим, что

$$exp(2Y)(X)exp(-2Y) = -B_1 + B_3 + C_2 + (\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4)P_1 +$$
$$+ (\alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4)P_2 + (\alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4)P_3 + (\alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3)P_4.$$

Полагаем

$$\begin{cases} \alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4 = 0 \\ \alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4 = 0 \\ \alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4 = 0 \\ \alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3 = 0 \end{cases} \qquad (\text{I}.2.2)$$

Поскольку определитель, составленный из коэффициентов при t_1, t_2, t_3, t_4, равен I, то система (I.2.2) имеет одно решение. Следовательно, все подалгебры $\widehat{F}_7$ суть расщепляемые.

Рассмотрим случай алгебры $F_{18}(2) = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$. Алгебра $\widehat{F}_{18}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 + \sum_i \alpha_i P_i$, $X_2 = C_2$ ($i = \overline{1,4}$). Так как $[X_2[X_2, X_1]] = -\frac{1}{4}\sum_i \alpha_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$), то $\widehat{F}_{18}$ - расщепляемая алгебра.

Поскольку $F_7 \subset F_{28}$, то алгебра $\widehat{F}_{28}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 - C_2$, $X_2 = C_1 - C_3 + \sum_i \alpha_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). На основании соотношений (I.2.I) имеет место

$$X_2 - [X_1, X_2] = -\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}(P_2 + P_4) + \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}(P_1 - P_3) +$$
$$+ \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{2}\right)P_1 + \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_4}{2}\right)P_2 + \left(\alpha_3 + \frac{\alpha_1}{2}\right)P_3 + \left(\alpha_4 + \frac{\alpha_2}{2}\right)P_4.$$

Перебирая инвариантные подпространства алгебры F_{28}, находим, что для каждого из них $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1,4}$), т.е. $\widehat{F}_{28}$ - расщепляемая алгебра. Лемма доказана.

Теорема I.I.2. Нерасщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются относительно P(2,2)-сопряженности алгебрами

$\widehat{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1 \rangle$: 0, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ ($j = \overline{1,7}$);

$\widehat{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2 \rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$ ($j = \overline{8,10}$);

$\widehat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3) + P_{2a-1} \rangle$: 0, $(2a)$, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2\omega 4)$, $(\overline{13},2,4)$ ($\omega > 0$, $j = \overline{1,7}$; $a = 1, i = 6 \vee a = 2, i = 5$);

$\widehat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3) + P_{2a} \rangle$: 0, $(\overline{13})$, $(\overline{13}, 6-2a)$, $(1,3,6-2a)$ ($j = \overline{8,11}$; $a = 1, i = 6 \vee a = 2, i = 5$);

$\widehat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$: 0, (4), (13), (1,3), (13,4), (1,3,4) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,6}$);

$\widehat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_4 \rangle$: 0, (2), (13), (1,3), (13,2), (1,2,3) ($\alpha > 0$, $j = \overline{7,12}$);

$\widehat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$: 0, (13), (1,3) ($j = \overline{13,15}$);

$\widehat{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 \rangle$: (24), (13,24), (1,24,3) ($j = \overline{16,18}$);

$\widehat{F}_{14j} = \langle B_3 - C_3 + \alpha P_2 \rangle$: 0, (1), (3,4), (1,3,4) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,4}$);

$\widehat{F}_{15j} = \langle B_3 + C_3 + \alpha P_4 \rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,4}$);

$\widehat{F}_{17,1} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3 \rangle$; $\widehat{F}_{17,2} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{17,3} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4 \rangle$; $\widehat{F}_{17,4} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{17,5} = \langle B_1 - B_3 + P_2,\ C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3 \rangle$ $(\beta, \gamma \in R)$;

$\widehat{F}_{17,6} = \langle B_1 - B_3 + P_1,\ C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2 \rangle$ $(\beta \geqslant 0)$;

$\widehat{F}_{17,7} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2 \rangle$;

$\widehat{F}_{17,8} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + P_1 + \beta P_2, P_1 - P_3, P_4 \rangle$ $(\beta \geqslant 0)$;

$\widehat{F}_{17,9} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{17,10} = \langle B_1 - B_3 + \alpha P_2, C_1 - C_3 + P_1, P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$ $(\alpha \geqslant 0)$;

$\widehat{F}_{17,11} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{17,12} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + \beta P_3, P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$ $(\beta \in R)$;

$\widehat{F}_{ij} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3), B_2 + C_2 + \alpha P_{2a} \rangle$: $0, (\overline{13}, 6-2a), (\overline{13}, 2\omega 4), (1, 6-2a, 3)$ $(\alpha > 0, \omega > 0, j = \overline{1,4};\ a = 1, i = 24 \vee a = 2, i = 23)$;

$\widehat{F}_{i5} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3), B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4, P_1 - P_3 \rangle$ $(\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta \neq 0;\ a = 1, i = 24 \vee a = 2, i = 23)$;

$\widehat{F}_{i6} = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a (C_1 - C_3), B_2 + C_2 + \alpha P_{6-2a}, P_1 - P_3, P_{2a} \rangle$ $(\alpha > 0;\ a = 1, i = 24 \vee a = 2, i = 23)$;

$\widehat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 4)$ $(\alpha > 0, j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 2)$ $(\alpha > 0, j = 3,4)$;

$\widehat{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_4 \rangle$: $(\overline{13}, 24), (\overline{13}, \overline{24}), (1, 24, 3)$ $(j = \overline{5,7})$;

$\widehat{F}_{25.8} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$; $\widehat{F}_{25.9} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 \pm P_4,\ P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2,\ B_1 - B_3 + P_2 - P_4 \rangle$: $0, (\overline{13})$ $(j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2,\ B_1 - B_3 + P_4 \rangle$: $(24), (\overline{13}, 24), (13, 24), (1, 24, 3)$ $(j = \overline{3,6})$;

$\widehat{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_2,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + \alpha P_4,\ C_1 - C_3 \rangle$: $(\overline{13}), (\overline{13}, 2)$ $(\alpha > 0,\ j = 3, 4)$;

$\widehat{F}_{33,5} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_4,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3,\ P_2 + P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{33,6} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + C_2 + P_2 + P_4,\ C_1 - C_3,\ P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{34,1} = \langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3,\ B_2 - C_2 + P_1 - P_3 \rangle$;

$\widehat{F}_{34,2} = \langle B_1 - B_3,\ C_1 - C_3,\ B_2 - C_2 + P_3,\ P_1 - P_3,\ P_2,\ P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + \frac{1}{3} C_2,\ C_1 - C_3 + P_2 + P_4 \rangle$: $0, (\overline{13})$ $(j = \overline{1,2})$;

$\widehat{F}_{35,3} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 + \frac{1}{3} C_2,\ C_1 - C_3 + P_4,\ P_1 - P_3,\ P_2 - P_4 \rangle$;

$\widehat{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3,\ B_2 - \frac{1}{3} C_2,\ C_1 - C_3 + P_2 \rangle$: $(\overline{13}, 24), (\overline{13}, 2, 4)$ $(j = \overline{4,5})$.

Основные этапы доказательства проведены в леммах I.2.4 и I.2.5. Остальные случаи подалгебр рассматриваются аналогично.

§ 3. Непрерывные подгруппы группы P(2,3)

На основании результатов, сформулированных в теореме I.I.I, мы можем сделать вывод, что максимальные приводимые подалгебры алгебры AO(2,3) исчерпываются относительно O(2,3)-сопряженности следующими алгебрами:

$AO(1,3)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{2,5}\rangle$; $AO(2,2)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{1,4}\rangle$;

$AO(2)\oplus AO(3)=\langle J_{12}\rangle\oplus\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{3,5}\rangle$;

$AO(2,1)\oplus AO(2)=\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{1,3}\rangle\oplus\langle J_{45}\rangle$;

$A\tilde{P}(1,2)=ASim(1,2)=\langle H_2,H_3,H_4\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b=\overline{2,4}\rangle\oplus\langle J_{15}\rangle)$,

где $H_a=J_{1a}-J_{a5}$ ($a=\overline{2,4}$);

$AOpt(1,2)=\langle M,G_3,H_3\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle C,D,T,J_{15}\rangle$, где $G_3=$ $=J_{13}-J_{35}$, $H_3=J_{23}-J_{34}$, $M=J_{21}-J_{14}+J_{25}-J_{54}$,

$C=-J_{15}+J_{24}$, $D=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{25}+J_{14}+J_{45})$,

$T=-\frac{1}{2}(J_{12}-J_{25})+\frac{1}{2}(J_{14}-J_{45})$.

Пусть $K_1=J_{25}+J_{14}+\sqrt{3}J_{13}$, $K_2=-J_{15}+J_{24}-\sqrt{3}J_{23}$, $K_3=-2J_{45}+J_{11}$. Тогда $[K_1,K_2]=-K_3$, $[K_1,K_3]=-K_2$, $[K_2,K_3]=K_1$. Следовательно, $\langle K_1,K_2,K_3\rangle=AO(1,2)$.

Известно [93], что неприводимые подалгебры алгебры AO(2,3) исчерпываются алгебрами $\langle K_1, K_2, K_3 \rangle$ и AO(2,3). Таким образом, описание подалгебр алгебры AP(2,3) сводится к описанию подалгебр следующих алгебр:

1) $AP(1,3) \oplus \langle P_1 \rangle$; 2) $AE(2) \oplus AE(3)$; 3) $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$;

4) $AP(2,1) \oplus AE(2)$; 5) $A\tilde{G}(1,2) \oplus \langle J_{15} \rangle = ASim(1,2) \oplus U$;

6) $AOpt(1,2) \oplus U$.

Здесь $U = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$.

Поскольку подалгебры алгебры AO(2,3) известны [93], то классификация подалгебр алгебры AP(2,3) сводится к решению двух задач, которые аналогичны задачам, рассмотренным в предыдущем параграфе для классификации подалгебр алгебры AP(2,2).

Остановимся более подробно на случае алгебры $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$. Имеют место следующие утверждения.

Предложение I.3.I. Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ исчерпываются относительно P(2,3)-сопряженности расщепляемыми подалгебрами F алгебры AP(2,2), алгебрами $\langle F, P_5 \rangle$, а также следующими алгебрами:

$$\mathcal{L}: \langle P_2 + P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2 + P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_4 + \alpha P_5 \rangle,$$

$$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 + P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 + \alpha P_5 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2 + P_5, P_4 + P_5 \rangle,$$

$$\langle P_1 - P_3, P_2 + P_5, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2 + P_5, P_3, P_4 \rangle \ (\mathcal{L} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 \rangle \vee$$

$$\vee\ \mathcal{L} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 \rangle, \alpha > 0);$$

$\langle B_3-C_3\rangle$: $\langle P_1+P_5\rangle$, $\langle P_1+P_5, P_2\rangle$, $\langle P_1+P_5, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1+P_5, P_2, P_3, P_4\rangle$;

$\mathcal{L}$: $\langle P_1-P_3, P_2+\alpha P_5\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_4+\alpha P_5\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2+P_4+P_5\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2, P_4+\alpha P_5\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2+\alpha P_5, P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2+P_4, P_2+P_5\rangle$ ($\mathcal{L}=\langle B_1-B_3, C_1-C_3\rangle \vee \mathcal{L}=\langle B_1-B_3, C_1-C_3, B_2+C_2\rangle$, $\alpha>0$).

Обозначим через $L : W_1, \ldots, W_5$ такие подалгебры алгебры $AP(2,2)\oplus\langle P_5\rangle$, что $\pi(L)=F_i$, $F_i : W_1, \ldots, W_5$ - расщепляемая подалгебра алгебры AP(2,2) ($i=\overline{2,28}$, $\overline{30,35}$, $\overline{38,42}$), и L принимает, соответственно i, следующие значения:

$\langle B_1-B_3+P_5\rangle$; $\langle B_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_5\rangle$; $\langle -B_1+B_3+C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle -B_1+B_3+C_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle -B_1+B_3-C_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_2+eC_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_2+C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_2-eC_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_3+eC_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_3-C_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_3+C_3+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3, B_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3+P_5, C_1-C_3+\delta P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3+\gamma P_5, C_2+\beta P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3+\mu P_5, C_3+\rho P_5\rangle$; $\langle B_2+aP_5, C_2+bP_5\rangle$; $\langle B_2+aP_5, C_3+bP_5\rangle$; $\langle B_3+aP_5, C_3+bP_5\rangle$; $\langle B_2+C_2+\alpha P_5, B_1-B_3+C_1-C_3\rangle$;

$\langle B_2+C_2+\alpha P_5, B_1-B_3-C_1+C_3\rangle$; $\langle B_2+C_2+\alpha P_5, B_1-B_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_2-\alpha C_3+\alpha P_5, B_1-B_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1-B_3, C_1-C_3+\mu P_5, B_2+\varrho P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_2+b P_5\rangle$; $\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_3+b P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2+\alpha P_5, C_1-C_3\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_1-C_3+P_5\rangle$;

$\langle B_1, B_2, B_3, C_2+\alpha P_5\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_3+\alpha P_5\rangle$;

$\langle B_1-B_3, B_2+a P_5, C_1-C_3, C_2+b P_5\rangle$; $\langle B_1, B_2, B_3, C_1-C_3, C_2+\alpha P_5\rangle$.

Здесь α и e имеют те же значения, что и в теореме I.2.I; $\alpha>0$, $\delta\in R$; μ , γ, a , b , β , ϱ такие, что $\gamma=1$, $\beta\geqslant 0$ $\vee$ $\gamma=0$, $\beta>0$; $\mu=1$, $\varrho\in R$ $\vee$ $\mu=0$, $\varrho>0$; $a>0$, $b\in R$ $\vee$ $b>0$, $a=0$.

В следующем предложении употребляется та же форма записи подалгебр, что и в теоремах I.2.I, I.2.2.

Предложение I.3.2. Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)\oplus\langle P_5\rangle$ с точностью до P(2,3)-сопряженности исчерпываются нерасщепляемыми подалгебрами алгебры AP(2,2), алгебрами L : $W_1,\ldots, W_5$, а также следующими алгебрами:

$\langle B_3-C_3+P_5\rangle$: (I5),(I5,2),(I5,3,4),(I5,2,3,4);

$\langle B_3-C_3+P_2+P_5\rangle$: 0,(I),(4,5),(I,4,5);

$\langle B_3-C_3+\alpha P_2+\epsilon P_5\rangle$: (I5),(I5,3,4) ($\alpha>0$; ϵ = 0,I);

$\langle B_2+C_2+P_2+\alpha P_5\rangle$: (24), (I3,24), (I,24,3) ($\alpha>0$);

$\langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_3+\alpha P_5, P_1-P_3, P_2+\beta P_4\rangle$ ($\alpha, \beta>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+\epsilon_1 P_2+\epsilon_2 P_3\rangle$: (25), ($\overline{I3}$,25), ($\overline{I3}$,4α5), ($\overline{I3}$,245), ($\overline{I3}$,25,4) ($\epsilon_i = 0,1$; $i = 1,2$; $\epsilon_1+\epsilon_2\neq 0$; $\alpha>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2, P_1, P_2+P_5, P_3, P_4\rangle$;

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_3\rangle$: ($\overline{I3}$,2,4α5), ($\overline{I3}$,25,45) ($\alpha>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2+P_5\rangle$: 0, ($\overline{I3}$), ($\overline{I3}$,4), (I,3,4);

$\langle B_1-B_3+C_1-C_3, B_2+C_2+\beta P_2+\gamma P_5, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ ($\alpha, \beta, \gamma>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+P_2-P_5\rangle$: 0, ($\overline{I3}$), (25), ($\overline{I3}$,4), ($\overline{I3}$,25), ($\overline{I3}$,25,4), (I,3,4), (I,25,3,4);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\epsilon(P_2-P_5)+\beta P_4, P_1-P_3, P_2+P_5\rangle$ ($\epsilon = 0, 1$; $\beta>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_2+\gamma P_4\rangle$: ($\overline{I3}$,4α5), ($\overline{I3}$,245) ($\beta>0, \gamma\in R \vee \beta=0, \gamma>0$; $\alpha>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_4\rangle$: ($\overline{I3}$,2,4α5), ($\overline{I3}$,25,45) ($\alpha, \beta>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+\beta P_4+\gamma P_5\rangle$: ($\overline{I3}$), ($\overline{I3}$,2), ($\overline{I3}$,2α4) ($\alpha, \beta, \gamma>0$);

$\langle B_1-B_3-C_1+C_3, B_2+C_2+P_2+P_5+\beta P_4, P_1-P_3\rangle$ ($\beta>0$);

$\langle B_1-B_3+\epsilon P_2+\gamma P_5,\ C_1-C_3-\epsilon P_2+\delta(P_2+P_4)+\mu P_5\rangle$
$(\epsilon=\mathrm{I},\ \gamma\geqslant 0,\ \delta\in R,\ \mu\in R \vee \epsilon=0,\ \gamma\geqslant 0,\ \delta=\mathrm{I},\ \mu\in R,\ \mu^2+\gamma^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_5,\ C_1-C_3+\gamma P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},2\alpha 5)$, $(\overline{\mathrm{I}3},4\alpha 5)$ $(\alpha>0,\ \gamma\in R)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_2+\beta P_5,\ C_1-C_3+\gamma P_2+\epsilon P_4+\mu P_5,\ P_1-P_3\rangle$
$(\epsilon=\mathrm{I},\ \beta\geqslant 0,\ \alpha,\gamma,\mu\in R \vee \epsilon=0,\ \alpha=\mathrm{I},\ \beta\geqslant 0,\ \gamma,\mu\in R,\ \beta^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_1+\gamma P_5,\ C_1-C_3-P_1+\mu P_5+\delta P_4,\ P_2,\ P_1-P_3\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \mu,\delta\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_4+\mu P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},2)$, $(\overline{\mathrm{I}3},2\alpha 5)$
$(\alpha>0,\ \gamma\geqslant 0,\ \mu\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_2,\ C_1-C_3+\mu P_2+P_4,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4+P_5\rangle$ $(\alpha,\mu\in R)$;

$\langle B_1-B_3+P_2,\ C_1-C_3+\gamma P_2,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4+P_5\rangle$ $(\gamma\in R)$;

$\langle B_1-B_3+P_1+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_1+\alpha P_2+\delta P_5,\ P_1-P_3,\ P_4\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \alpha,\delta\in R,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\gamma P_5,\ C_1-C_3+P_2+\delta P_5\rangle$: $(\overline{\mathrm{I}3},4)$, $(\overline{\mathrm{I}3},4\alpha 5)$
$(\alpha>0,\ \gamma\geqslant 0,\ \delta\in R,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+P_2+\gamma P_5,\ C_1-C_3+\delta P_3+\mu P_5,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4\rangle$
$(\gamma\geqslant 0,\ \delta,\mu\in R,\ \gamma^2+\mu^2\neq 0)$;

$\langle B_1-B_3+\alpha P_5,\ C_1-C_3+P_3+\gamma P_5,\ P_1-P_3,\ P_2+P_4\rangle$
$(\alpha>0,\ \gamma\in R \vee \alpha=0,\ \gamma>0)$;

$\langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_2 \rangle$: $(\bar{1}3, 245), (\bar{1}3, 2\alpha 5, 4)$ $(\alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_1 + \gamma P_5, C_1 - C_3 + \delta P_1 + \mu P_5, P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$ $(\gamma \geq 0, \mu, \delta \in R, \gamma^2 + \mu^2 \neq 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + \epsilon P_1, C_1 - C_3 + \epsilon P_3 + \gamma P_4, P_1 - P_3, P_2, P_4 + \alpha P_5 \rangle$ $(\gamma \geq 0, \alpha > 0, \epsilon = 1 \vee \epsilon = 0, \gamma = 1, \alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + P_3 + \gamma P_2, P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_5, P_4 \rangle$ $(\gamma \geq 0, \alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \gamma P_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4, P_2 + P_5 \rangle$ $(\gamma \geq 0)$;

$\langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4, P_2 + P_5 \rangle$;

$\langle B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_5, B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_4 \rangle$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_2 + C_2 + \alpha P_4 + \beta P_5, B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_2 \rangle$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, B_2 + 3C_2 + \alpha P_5 \rangle$: $0, (\bar{1}3), (24), (\bar{1}3, 24), (13, 24), (1, 24, 3)$ $(\alpha > 0)$;

$\langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \beta P_5, C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3, 2, 4\alpha 5), (\bar{1}3, 2\alpha 5, 4), (\bar{1}3, 24, 25)$ $(\alpha, \beta > 0)$;

$\langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \gamma P_5, C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3), (\bar{1}3, 4)$ $(\alpha, \gamma > 0)$;

$\langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4 + \gamma P_5, C_1 - C_3 \rangle$: $(\bar{1}3), (\bar{1}3, 2)$ $(\alpha, \gamma > 0)$;

$\langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4 + \gamma P_5, C_1 - C_3, P_1 - P_3 \rangle$ $(\gamma > 0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+P_2+\gamma P_5, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_2+\gamma P_4, C_1-C_3\rangle$: $(\overline{13},2\beta 5)$, $(\overline{13},245)$, $(\overline{13},4\beta 5)$ $(\alpha, \beta>0,\ \gamma\in R\ ;\ \alpha=0,\ \gamma, \beta>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+C_2+\alpha P_4, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2+P_5\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+P_1-P_3+\gamma P_5, C_1-C_3\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_2-P_4, P_1-P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+\gamma P_5, C_1-C_3+P_2, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-C_2+P_1+\gamma P_5, C_1-C_3, P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$ $(\gamma>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2+\frac{1}{3}C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_2+P_4\rangle$: 0, $(\overline{13},24)$ $(\alpha>0)$;

$\langle B_1-B_3, B_2-\frac{1}{3}C_2+\alpha P_5, C_1-C_3+P_1+P_3\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(\alpha>0)$.

Предложения I.3.I, I.3.2 доказываются на основании теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли [86].

Списки всех подалгебр алгебры AP(2,3), несопряженных подалгебрам алгебры $AP(2,2)\oplus\langle P_5\rangle$, приведены в приложениях I и 2.

ГЛАВА II

ИНВАРИАНТЫ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ AP(2,3)

Во второй главе решена задача о нахождении инвариантов подгрупп группы Пуанкаре P(2,3) или, что равносильно, инвариантов подалгебр алгебры AP(2,3). Поскольку некоторые несопряженные подалгебры размерности большей I имеют одни и те же инварианты, требуется дополнительное отождествление подалгебр алгебры AP(2,3). Определено соответствующее отношение эквивалентности и проведена относительно этого отношения классификация подалгебр алгебры AP(2,2) и подалгебр коразмерности один алгебры AP(2,3). Найдены инварианты этих, а также одномерных подалгебр алгебры AP(2,n). Приведен список инвариантных операторов подалгебр алгебры AP(2,2), которые имеют размерность большую пяти.

§ I. Инварианты одномерных подалгебр алгебры AP(2,n)

В этой главе алгебру AP(2,n) будем рассматривать как алгебру Ли векторных полей на пространстве Минковского M(2,n). Инфинитезимальные операторы (I.I.3) представляются следующими дифференциальными операторами первого порядка:

$$J_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 , \quad J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b ,$$

$$J_{ia} = x_i \partial_a + x_a \partial_i , \quad P_j = \partial_j \quad \left(\partial_j = \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} ; \right. \qquad (2.I.I)$$

$$\left. a, b = 3, 4, \ldots, n+2 ; \; i = 1, 2 ; \; j = 1, \ldots, n+2 \right).$$

Пусть G - подгруппа Ли группы $P(2,n)$, $AG = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_s \rangle$ - алгебра Ли группы G.

Определение 2.I.I. Не тождественно постоянная функция $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ называется инвариантом группы G, если $u(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in M(2n)$.

Известно [39], что $u(x)$ является инвариантом группы G тогда и только тогда, когда

$$\bar{X}_i\, u(x) = 0, \tag{2.I.2}$$

для всех $i = \overline{1,s}$.

Пусть r_* - общий ранг касательного отображения группы G [39], а $m = n+2-r_*$. Если $r_* < n+2$, то существует система из m функционально независимых инвариантов $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант группы G имеет вид $\Psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Любую такую систему функций $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ будем называть полной системой инвариантов (ПСИ) группы G или алгебры AG, а ее составляющие - основными инвариантами. Число r_* назовем рангом алгебры AG, а число m - коразмерностью AG.

Для случая одномерных подалгебр алгебры $AP(2,n)$ условие (2.I.2) представляет собой линейное однородное ДУ в частных производных первого порядка, которые решаются известными методами [I7]. Поскольку для этих алгебр $r_* = 1$, то $m = n+1$ и число основных инвариантов одномерных подалгебр алгебры $AP(2,n)$ равно $n+1$.

Все одномерные подалгебры алгебры $AP(2,n)$ получены в теоремах I.I.3 и I.I.4. Сохраним принятые там обозначения и кроме того условимся, что

$$y = y(x) = x_1 + x_{n+2}, \quad \bar{y} = \bar{y}(x) = x_1 - x_{n+2};$$

$$Z = Z(x) = x_2 + x_{n+1}\ ,\ \bar Z = \bar Z(x) = x_2 - x_{n+1}\ ;$$

$$h_a = h_a(x) = x_{2a-1}^2 + x_{2a}^2\ ;$$

$$\varphi = \varphi(x) = \arcsin\{\bar y(\bar y^2 + \bar Z^2)^{-\frac{1}{2}}\}\ ; \qquad (2.I.3)$$

$$\psi_a = \psi_a(x) = \operatorname{arctg}(x_{2a}\cdot(x_{2a-1})^{-1})\ ;$$

$$\vartheta_1 = \bar y^2 + \bar Z^2\ ,\ \vartheta_2 = 2\bar y\bar Z\ ,\ \vartheta_3 = \bar y x_4 + \bar Z x_3\ ;$$

$$\vartheta_4 = \bar y x_3 - \bar Z x_4,\ \vartheta_5 = \bar y Z - y\bar Z\ ,\ \vartheta_6 = \bar y y + \bar Z Z\ ,$$

$$\vartheta_7 = y^2 + Z^2\ .$$

Если $u_{j1}(x) = f_1(x), \ldots, u_{js}(x) = f_s(x)$, то будем употреблять обозначение $u_{jk}\ :\ f_1\ , \ldots,\ f_s$.

Предложение 2.I.I. ПСИ алгебры Λ_j ($j = \overline{1,11}$) составляют x_3 , $x_4, \ldots, x_n$ и функции u_{jk} , задаваемые следующим образом: $u_{1k}\ :\ y\bar y\ ,\ Z\bar Z\ ,\ yZ\ ;\ u_{2k} : y\ ,\ \bar Z\ ,\ \vartheta_6\ ;$

$$u_{3k}\ :\ x_1^2 + Z\bar Z\ ,\ \bar Z\ ,\ x_{n+2}\ ;\ u_{4k}\ :\ x_1,\ \bar Z\ ,\ Z\bar Z - x_{n+2}^2\ ;$$

$$u_{5k} : y\bar y\ ,\ Z\bar Z\ ,\ y^{1+\lambda}\cdot Z^{1-\lambda}\ ;\ u_{6k} : x_1\ ,\ Z\bar Z,\ x_{n+2}\ ;$$

$$u_{7k} : y\bar Z\ ,\ \ln y - Zy^{-1}\ ,\ \vartheta_6\ ;\ u_{8k} : \vartheta_1\vartheta_7\ ,$$

$$2\alpha\operatorname{arctg}(yZ^{-1}) + \ln\vartheta_7\ ,\ 2\alpha\operatorname{arctg}(\bar Z\bar y^{-1}) + \ln\vartheta_1\ ;$$

$$u_{9k}\ :\ x_1^2 + x_2^2,\ x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2,\ \operatorname{arctg}(x_1 x_2^{-1}) + \operatorname{arctg}(x_{n+1}x_{n+2}^{-1});$$

$$u_{jk}\ :\ \vartheta_1\ ,\ \vartheta_6\ ,\ 2\vartheta_1\varphi + (-1)^j\vartheta_5 \qquad (\ j = \overline{10,11}).$$

Доказательство. Как было указано выше, для нахождения

ПСИ алгебры Λ_j достаточно найти фундаментальные решения системы, соответствующей условию (2.I.2). Рассмотрим случай алгебры Λ_7. Согласно (I.I.5) и (2.I.I), получаем следующее уравнение:

$$[(x_{n+2}-\tfrac{1}{2}(x_2-x_{n+1}))\partial_1+(\tfrac{1}{2}(x_1+x_{n+2})+x_{n+1})\partial_2+$$
$$+(\tfrac{1}{2}(x_1+x_{n+2})+x_2)\partial_{n+1}+(\tfrac{1}{2}(x_2-x_{n+1})+x_1)\partial_{n+2}]u(x)=0.$$

Осуществив замену переменных по формулам $Z_1=x_1+x_{n+2}$, $Z_2=x_2-x_{n+1}$, $Z_{n+1}=\ln(x_1+x_{n+2})-(x_2+x_{n+1})/(x_1+x_{n+2})$, $Z_{n+2}=\ln(x_2-x_{n+1})-(x_1-x_{n+2})/(x_2-x_{n+1})$, $Z_i=x_i$ ($i=\overline{3,n}$), приходим к уравнению

$$[Z_1\partial_{Z_1}-Z_2\partial_{Z_2}]u(Z)=0,$$

из которого видно, что функции Z_i ($i=\overline{3,n+2}$) являются фундаментальными решениями исходного уравнения, а последнее уравнение имеет еще одно решение $Z_1\cdot Z_2$.

Возвратившись к исходным переменным и воспользовавшись формулами (2.I.3), получаем, что ПСИ алгебры Λ_7 составляют функции $y\bar{z}$, $\ln y-zy^{-1}$, $\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1}$, $x_3,\ldots,x_n$. Вместо $\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1}$ мы можем брать

$$\vartheta_6=\{\ln y\bar{z}-(\ln y-zy^{-1}+\ln\bar{z}-\bar{y}\bar{z}^{-1})\}y\bar{z},$$

поскольку ϑ_6 является функцией инвариантов и полученная таким образом ПСИ будет функционально независимой.

Случаи остальных алгебр рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Запись Λ : $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ означает, что функции $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ образуют ПСИ алгебры Λ.

Предложение 2.I.2. Λ_{12} : $\bar{y},\bar{z},\ y\bar{y}-x_3^2,\ z\bar{z}-x_4^2,$ $\bar{y}x_4-\bar{z}x_3,\ x_5,x_6,\ldots,\ x_n$;

$\Lambda_{13}: y_1=\bar{y}^2+2x_3\bar{z}, \quad y_2=3\bar{z}^2y+3\bar{y}y_1-\bar{y}^3,$
$\bar{y}^4+12\bar{z}^3z+12y_2\bar{y}-6y_1\bar{y}^2, \bar{z}, x_4, x_5, \ldots, x_n;$
$\Lambda_{14}: \bar{y}, y\bar{y}-x_3^2, z\bar{z}, x_3-\bar{y}\ln z, x_4, x_5, \ldots, x_n;$

Доказательство предложения 2.I.2 аналогично доказательству предложения 2.I.I.

Предложение 2.I.3. ПСИ алгебры $\langle X_m\rangle$ от переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{2m+2}$ составляют функции h_α, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$ ($\alpha=2,\ldots,m+1$; $i=2,\ldots,m$).

Доказательство. Для алгебры $\langle X_m\rangle$ получаем следующее уравнение, соответствующее условию (2.I.2):

$$[-(x_3\partial_4-x_4\partial_3)-\alpha_2(x_5\partial_6-x_6\partial_5)-\ldots-\alpha_m(x_{2m+1}\partial_{2m+2}-x_{2m+2}\partial_{2m+1})]u=0.$$

Осуществив замену переменных по закону $y_3=x_3^2+x_4^2$, $y_4=x_4x_3^{-1}$, $\ldots$, $y_{2m+1}=x_{2m+1}^2+x_{2m+2}^2$, $y_{2m+2}=x_{2m+2}x_{2m+1}^{-1}$, и решив полученное уравнение

$$[-(1+y_4^2)\partial_{y_4}-\alpha_2(1+y_6^2)\partial_{y_6}-\ldots-\alpha_m(1+y_{2m+2}^2)\partial_{y_{2m+2}}]u(y)=0,$$

убеждаемся, что ПСИ алгебры $\langle X_m\rangle$ составляют функции h_α, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$ ($\alpha=2,\ldots,m+1$; $i=2,\ldots,m$). Предложение доказано.

Следствие. $\Lambda_{15}: x_1, x_2, h_\alpha, \alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}, x_{2\ell+3}, x_{2\ell+4}, \ldots, x_{n+2}$ ($\alpha=2,\ldots,\ell+1$; $i=2,\ldots,\ell$).

Предложение 2.I.4. Пусть $\Lambda_j=\langle X_s+Y_j\rangle$ ($j=16,\ldots,29$). ПСИ алгебры Λ_j составляют основные инварианты алгебры $\langle X_s\rangle$ от переменных $x_3,\ldots,x_{2s+2}$, основные инварианты алгебры $\langle Y_j\rangle$ от переменных $x_1, x_2, x_{2s+3}, x_{2s+4},\ldots, x_{n+2}$ и функция u_j, где $u_{16}=\bar{y}\psi_2+x_{2\ell+3}$; $u_{17}=\bar{y}\psi_2+x_{2s+3}$; $u_{18}=\bar{z}\psi_2-\bar{y}$; $u_{19}=\alpha\bar{y}\psi_2+x_{2\ell+3}$; $u_{20}=\ln\bar{y}+\alpha\psi_2$;

$$u_{21} = y\psi_2 + Z\ ;\quad u_{22} = x_1 - 2\bar{Z}\psi_2\ ;\quad u_{23} = \ln\bar{Z} - 2\alpha\psi_2\ ;$$

$$u_{24} = \ln\bar{y} - (\beta-\alpha)\psi_2\ ;\quad u_{25} = \ln\bar{Z} - \alpha\psi_2\ ;\quad u_{26} = \psi_1 + \alpha\psi_2\ ;$$

$$u_{27} = \ln\vartheta_1 - 2\beta\psi_2\ ;\quad u_{28} = \vartheta_5 + 2\alpha\vartheta_1\psi_2\ ;\quad u_{29} = \vartheta_5 - 2\alpha\vartheta_1\psi_2 .$$

Значения α , β те же, что и в теореме I.I.3.

Для доказательства предложения нужно использовать результаты, полученные в предложениях 2.I.I - 2.I.3.

Теорема 2.I.I. ПСИ одномерных подалгебр алгебры АО(2,n) составляют ПСИ, найденные в предложениях 2.I.I - 2.I.4, а также следующие функции:

$$\Lambda_{30}\ :\ \vartheta_1,\ \vartheta_3,\ \vartheta_5 + \vartheta_3 \arcsin(\vartheta_2\cdot\vartheta_1^{-1}),\ \vartheta_1\vartheta_6 - \vartheta_4^2,$$
$$\vartheta_1 \arcsin(\vartheta_2\vartheta_1^{-1}) - 2\vartheta_4,\ h_a,\ \alpha_i \arcsin(\vartheta_2\vartheta_1^{-1}) + 2\psi_{i+1},$$
$$x_{2s+3}, x_{2s+4}, \ldots, x_n \quad (a = \overline{3, s+1}\ ;\ i = \overline{2, s}\ );$$

$$\Lambda_{31}\ :\ h_1,\ x_3, x_4, \ldots, x_{n+2}\ ;$$

$$\Lambda_{32}\ :\ h_a,\ \alpha_i\psi_1 + \alpha\psi_{i+1},\ x_{2l+3}, x_{2l+4}, \ldots, x_{n+2}$$
$$(\ a = \overline{1, l+1}\ ;\ i = \overline{1, l}\ );$$

$$\Lambda_{33}\ :\ y\bar{y},\ x_2,\ h_a,\ \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1},\ \ln\bar{y} - \alpha\psi_2$$
$$(\ a = \overline{2, \tfrac{n+1}{2}}\ ;\ i = \overline{2, \tfrac{n-1}{2}}\ ).$$

Значения α , α_i те же, что и в теореме I.I.3.

Доказательство теоремы частично проведено при доказательстве предложений 2.I.I - 2.I.4. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Предложение 2.I.5. Пусть $\Lambda_{j,k} = \langle \Lambda_j + Y_{j,k} \rangle$, где $\Lambda_j \neq 0$ и $[\Lambda_j , Y_{j,k}] = 0$ (см. теорему I.I.4). ПСИ алгебры $\Lambda_{j,k}$

составляют основные инварианты алгебры $\Lambda_j = \langle Z_j \rangle$ от переменных x_a, не аннулируемых Z_j, основные инварианты алгебры $\langle Y_{j,k} \rangle$ от остальных переменных, и функция $u_{j,k}$, определяемая следующим образом:

$u_{1.1} = x_3 + \delta \ln \bar{y}$; $u_{2.1} = \bar{y} + 2x_3\bar{z}$; $u_{3.1} = x_1 + \bar{z}x_3$; $u_{4.1} = x_1\bar{z} - x_{n+2}$;

$u_{4.2} = x_3\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{4.3} = (x_1 - x_3)\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{5.1} = \delta \ln y - (\lambda - 1)x_3$;

$u_{6.1} = x_1 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{6.2} = x_3 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{6.3} = x_1 - x_3 + 2\ln \bar{z}$;

$u_{7.1} = x_3 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{8.1} = \delta \ln \vartheta_1 + 2\lambda x_3$; $u_{9.1} = \delta \operatorname{arctg}(x_{n+1}x_{n+2}^{-1}) - x_3$;

$u_{j.1} = \delta\vartheta_5 + 2\vartheta_1 x_3$ ($j = 10, 11$); $u_{12.1} = x_4 - x_5\bar{z}$; $u_{13.1} = \bar{y} + \bar{z}x_4$;

$u_{14.1} = 2x_4 - \delta \ln z$; $u_{15.1} = x_1 + \delta\psi_2$; $u_{15.2} = x_{2s+3} + \delta\psi_2$;

$u_{15.3} = x_1 + x_{2s+3} + 2\psi_2$; $u_{16.1} = x_2\bar{y} - \delta x_{2l+3}$; $u_{16.2} = x_{2l+4}\bar{y} - \delta x_{2l+3}$;

$u_{16.3} = \bar{y}(x_2 + x_{2l+4}) - 2x_{2l+3}$; $u_{17.1} = \delta\psi_2 + x_{2s+5}$; $u_{18.1} = \delta\bar{y} + \bar{z}x_{2s+4}$;

$u_{19.1} = \delta x_{2s+3} - \bar{y}x_{2s+4}$; $u_{20.1} = \delta \ln \bar{y} - \alpha x_{2s+3}$; $u_{21.1} = x_{2s+3}y - \delta z$;

$u_{22.1} = \alpha x_1 + 2\bar{z}x_{n+2}$; $u_{23.1} = 2\alpha x_1 + \delta \ln \bar{z}$; $u_{23.2} = 2\alpha x_{n+2} + \delta \ln z$;

$u_{23.3} = \alpha y + \ln \bar{z}$; $u_{24.1} = \delta \ln \bar{y} + (\beta - \alpha)x_{2s+3}$; $u_{25.1} = \delta \ln z + x_{2s+3}$;

$u_{26.1} = \delta\psi_1 - \alpha x_{2s+3}$; $u_{27.1} = \delta \ln \vartheta_1 + 2\beta x_{2s+3}$;

$u_{j,1} = \delta\vartheta_5 + (-1)^{j-1} 2\alpha\vartheta_1 x_{2s+3}$ ($j = 28, 29$);

$u_{30.1} = \delta \arcsin(\vartheta_2\vartheta_1^{-1}) - 2x_{2s+3}$; $u_{31.1} = \delta\psi_1 - x_3$;

$u_{32.1} = \delta\psi_2 + x_{n+2}$; $u_{33.1} = \delta\psi_2 + x_2$.

Значения α, δ, β, s, l здесь те же, что и в теоремах I.I.3, I.I.4.

Доказательство. Для отыскания ПСИ указанных алгебр, удобно воспользоваться результатами, полученными в предложениях 2.I.I - 2.I.4 и теореме 2.I.I. Рассмотрим, например, случай алгебры $\Lambda_{15.1} = \langle X_\ell + \delta P_1 \rangle$.

Воспользовавшись результатами следствия предложения 2.I.3, осуществим замену переменных в уравнении для $\Lambda_{15.1}$, которое соответствует условию (2.I.2), по следующему закону: $Z_1 = x_1$, $Z_2 = x_2$, $Z_3 = h_2$, $Z_4 = x_4 x_3^{-1}$, $Z_5 = h_3$, $Z_6 = \alpha_2 \psi_2 - \psi_3$, ..., $Z_{2m+1} = h_m$, $Z_{2m+2} = \alpha_m \psi_2 - \psi_{m+1}$, $Z_{2m+3} = x_{2m+3}$, $Z_{2m+4} = x_{2m+4}$, ..., $Z_{n+2} = x_{n+2}$. В результате получим уравнение

$$[\delta \partial Z_1 - (1 + Z_4^2) \partial Z_4] U(Z) = 0,$$

решением которого является функция $Z_1 + \delta \operatorname{arctg} Z_4$. Следовательно, ПСИ алгебры $\Lambda_{15.1}$ составляют основные инварианты алгебры $\langle X_3 \rangle$, основные инварианты от остальных переменных алгебры $\langle \delta P_1 \rangle$: $x_2, x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots, x_{n+2}$; а также функция $x_1 + \delta \psi_2$.

Случаи остальных алгебр рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Теорема 2.I.2. ПСИ одномерных подалгебр алгебры AP(2, n) составляют ПСИ одномерных подалгебр алгебры AO(2, n), ПСИ алгебр $\Lambda_{j.k} = \langle \Lambda_j + \mathcal{Y}_{j.k} \rangle$, где $\Lambda_j \neq 0$ и $[\Lambda_j, \mathcal{Y}_{j.k}] = 0$, а также следующие функции:

$\Lambda_{0.1}$: $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$; $\Lambda_{0.2}$: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$;

$\Lambda_{0.3}$: $\bar{y}, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$; $\Lambda_{2.2}$: $y^2 - z$, $\bar{z}$, $x_1 + \bar{z} y$, $x_3, x_4, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{3.2}$: $2x_1 - \bar{z}^2$, $3x_2 + 3x_1 \bar{z} - \bar{z}^3$, $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+2}$;

$\Lambda_{4.4}$: $x_1, \bar{z}^2 + 2x_{n+2}, 3x_2 + \bar{z}^3 + 3\bar{z}x_{n+2}, x_3, x_4, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.2}$: $\bar{y}, 2x_4 + \bar{z}^2, y\bar{y} - x_3^2, \bar{y}\bar{z} + x_3, 3x_2 + 3\bar{z}x_4 + \bar{z}^3$, $x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.3}$: $\bar{y}^2 + 2x_3, \bar{z}, z\bar{z} - x_4^2, \bar{y}\bar{z} + x_4, 3x_1 + 3x_3\bar{z} + \bar{z}^3$, $x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{12.4}$: $\bar{y} - \delta\bar{z}, 3\delta^2 x_1 + 3\delta x_3\bar{y} + \bar{y}^3, 3x_2 + 3\bar{z}x_4 + \bar{z}^3$, $y^2 + 2\delta x_3, \bar{z}^2 + 2x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{13.2}$: $\mu_1 = 2\bar{y} - \bar{z}^2$, $\mu_2 = 3\mu_1\bar{z} + \bar{z}^2 + 6x_3$, $\mu_3 = \mu_2\bar{z} + 3y - \frac{3}{2}\mu_1\bar{z}^2 - \frac{1}{4}\bar{z}^4$, $\mu_4 = 2x_2 + \frac{1}{3}(\mu_3\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{z}^2\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_1\bar{z}^3 + \frac{1}{20}\bar{z}^5$, x_4, $x_5, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{14.2}$: $\bar{y}^2 + 2\delta x_3, z\bar{z}, 2\alpha^2 x_1 + (\bar{y}^2 + 2\alpha x)\bar{y} - \frac{1}{3}\bar{y}^3, \bar{y} + \alpha \ln z$, $x_4, x_5, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{16.4}$: $3\delta^2 x_1 + \bar{y}^3 + 3x_{2e+3}\bar{y}$, $\bar{y}^2 + 2\delta x_{2e+3}$, $2\bar{y} - \delta\psi_2$, $h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}, x_2, x_{2e+4}, x_{2e+5}, \ldots, x_{n+1}$;

$\Lambda_{17.2}$: $\bar{y}^2 + 2\rho x_{2s+3}$, $\bar{z}^2 + 2\delta x_{2s+4}$, $h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}$, $3\delta^2 x_2 + 3\delta x_{2s+4}\bar{z} + \bar{z}^3$, $3\rho^2 x_1 + 3\rho\bar{y}x_{2s+3} + \bar{y}^3$, $\delta\bar{y} - \rho\bar{z}$, $\delta\psi_2 - 2\bar{y}$, $x_{2s+5}, x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{17.3}$: $\bar{y}, 2\delta x_{2s+4} + \bar{z}^2$, $h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}$, $3\delta^2 x_2 + 3\delta x_{2s+4}\bar{z} +$

$+\bar{z}^3$, $y\bar{y}-x^2_{2s+3}$, $\delta x_{2s+3}+\bar{y}\bar{z}$, $\delta\psi_2-2\bar{y}$, x_{2s+5}, $x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{17.4}$: $2\delta x_{2s+3}+\bar{y}^2$, $\bar{z}$, h_a , $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $3\delta^2 x_1+3\delta x_{2s+3}\bar{y}+\bar{y}^3$, $z\bar{z}-x^2_{2s+4}$, $\delta x_{2s+4}+\bar{y}\bar{z}$, $\delta\psi_2-2\bar{z}$, $x_{2s+5}, x_{2s+6}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{18.2}$: $2\delta\bar{y}-\bar{z}^2=\mu_1$, $\mu_2=2\delta^2 x_{2s+3}+\mu_1\bar{z}+\frac{1}{3}\bar{z}^3$, $\mu_3=\delta y+\frac{1}{\delta^2}(\mu_2\bar{z}-\frac{1}{2}\bar{z}^2-\frac{1}{12}\bar{z}^4)$, $\mu_4=\delta z+\delta\bar{y}+\frac{1}{\delta}\bar{z}\mu_3-\frac{1}{\delta^3}(\frac{1}{2}\mu_2\bar{z}^2-\frac{1}{6}\bar{z}^3-\frac{1}{60}\bar{z}^5)$, h_a , $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{z}$, $x_{2s+4}, x_{2s+5}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{19.2}$: $\mu_1=2\delta x_{2s+3}+\bar{y}^2$, $z\bar{z}$, $2\alpha\bar{y}-\delta\ln\bar{z}$, $2\delta x_1+\frac{1}{\gamma}(\bar{y}\mu_1-\frac{1}{3}\bar{y}^3)$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{y}$, $x_{2s+4}, x_{2s+5}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{21.2}$: $y^2-2\delta z$, $\bar{z}$, $y\bar{z}+2\delta x_1$, h_a, $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2+2y$, $x_{2s+3}, x_{2s+4}, \ldots, x_n$;

$\Lambda_{22.2}$: $\mu_1=\delta x_1-\bar{z}^2$, $\frac{1}{\delta}(2\mu_1\bar{z}+\frac{2}{3}\bar{z}^3)+\delta x_2$, h_a , $\alpha_i\psi_2-\psi_{i+1}$, $\delta\psi_2-2\bar{z}$, $x_{2s+3}, x_{2s+4}, \ldots, x_n$, x_{n+2}.

Здесь δ , α_i , ρ , α принимают те же значения, что и в теореме I.I.4; $a=\overline{2,s+1}$; $i=\overline{2,s}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству предложений 2.I.I – 2.I.5.

§ 2. Неэквивалентные подалгебры алгебры АР(2,2)

Если коразмерность подалгебры алгебры АР(2,n) меньше чем $n+1$, то часто несопряженные подалгебры алгебры АР(2,n) дают одни и те же инварианты. Так, например, алгебры $F_{2.2} = \langle B_1 - B_3, P_1 - P_3 \rangle$ и $F_{2.5} = \langle B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$ несопряжены, имеют различную размерность, но одну и ту же коразмерность в пространстве М(2,2): $\operatorname{codim} F_{2.2} = \operatorname{codim} F_{2.5} = 2$; и одну и ту же ПСИ: $x_1 + x_3$, $x_2 - x_4$.

Определение 2.2.I. Пусть L_1 и L_2 - подалгебры алгебры АР(2,n). Если, для некоторого элемента $C \in$ Р(2,n), подалгебры $C L_1 C^{-1}$ и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1 и L_2 будем называть эквивалентными. В этом случае будем употреблять обозначение $L_1 \approx L_2$.

Определение 2.2.2. Если функции $f_i(x)$ ($i = \overline{1,k}$) являются инвариантами ненулевой подалгебры L алгебры АР(2,n), то L будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций.

Определение 2.2.3. Алгебра инвариантности называется минимальной, если она неэквивалентна ни одной своей собственной подалгебре.

Из эквивалентности минимальных алгебр не вытекает их сопряженность относительно группы Р(2,n). Например, алгебры $\langle J_{13} - J_{35}, P_1 + P_5 \rangle$, $\langle P_3, P_1 + P_5 \rangle$ являются минимальными алгебрами инвариантности для функций $x_1 - x_5$, x_2 , x_4 в пространстве М(2,3). Очевидно, что эти алгебры не являются Р(2,3)-сопряженными. В то же время, поскольку для любых L_1, $L_2 \in$ $\in$ АР(2,n) справедливо $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, то для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры AP(2, n) существует одна максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

Предложение 2.2.I. Пусть L_1, L_2 - подалгебры алгебры AP(2, n). $L_1 \approx L_2$ тогда и только тогда, когда максимальные алгебры инвариантности ПСИ подалгебр L_1 и L_2 P(2, n)-сопряжены.

Доказательство. Если $L_1 \approx L_2$, то, для некоторого элемента $C \in P(2,n)$, алгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Пусть K_i - максимальная алгебра инвариантности ПСИ алгебры L_i ($i = 1,2$). Очевидно CK_1C^{-1} и K_2 обладают одними и теми же инвариантами, откуда, в силу единственности максимальной алгебры инвариантности, заключаем, что $CK_1C^{-1} = K_2$.

Наоборот, если $CK_1C^{-1} = K_2$ для $C \in P(2,n)$, то CL_1C^{-1} и L_2 имеют одни и те же инварианты. Значит $L_1 \approx L_2$. Предложение доказано.

Как и в § 2 главы I, сохраняем принятый там базис алгебры AP(2,2). Кроме того, пусть AP(I,2) = $\langle P_1, P_3, P_4 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = 1,3,4 \rangle$, AP(2,I) = $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = \overline{1,3} \rangle$. Отметим, что классификация относительно эквивалентности подалгебр алгебр AP(I,2), AP(2,I) и их ПСИ известны [7,8I].

Теорема 2.2.I. Неэквивалентные расщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются расщепляемыми подалгебрами $K \subset AP(1,2)$, $L \subset AP(2,1)$, алгебрами $K \oplus \langle P_2 \rangle$, $L \oplus \langle P_4 \rangle$, и такими алгебрами:

$F_1 = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$; $F_2 = \langle B_1 - B_3 \rangle$; $F_j = \langle B_2 \rangle$: 0, $\langle P_1 + P_3 \rangle$, $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$ ($j = \overline{3,6}$);

$F_j = \langle B_3 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$ ($j = 7,8$);

$F_j = \langle -B_1 + B_3 + C_2 \rangle : 0,\ \langle P_1 - P_3 \rangle,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$ ($j = \overline{9,11}$);

$F_{12} = \langle B_1 - B_3 + C_3 \rangle$; $F_{13} = \langle B_1 - B_3 - C_3 \rangle$;

$F_j = \langle B_2 + eC_2 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3 \rangle,\ \langle P_2 + P_4 \rangle,\ \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle,$ $\langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$ ($0 < e < 1$; $j = \overline{14,18}$);

$F_{19} = \langle B_2 + C_2, P_2 + P_4 \rangle$; $F_j = \langle B_2 - eC_3 \rangle : 0,\ \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$ ($e > 0$; $j = 20,21$); $F_{22} = \langle B_3 + eC_3 \rangle$ ($0 < |e| < 1$);

$F_{23} = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle$; $F_{24} = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$; $F_{25} = \langle B_1 - B_3, C_3 \rangle$;

$F_{26} = \langle B_2, C_2 \rangle$; $F_{27} = \langle B_2, C_3 \rangle$; $F_{28} = \langle B_3, C_3 \rangle$;

$F_{29} = \langle B_2 + \alpha C_2, B_1 - B_3 \rangle$ ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$); $F_{30} = \langle B_2 - \alpha C_3, B_1 - B_3 \rangle$ ($\alpha > 0$); $F_{31} = \langle B_1 - B_3 - C_2, C_1 - C_3 \rangle$; $F_{32} = \langle B_1 - B_3, B_2 - C_2, C_1 - C_3 \rangle$;

$F_{33} = AO(2,2)$.

Доказательство. Среди эквивалентных расщепляемых подалгебр алгебры AP(2,2) из перечня, приведенного в теореме I.2.I, выбираем одну подалгебру, а остальные исключаем. Поскольку все случаи в чем-то аналогичны, ограничимся рассмотрением только нескольких, наиболее характерных.

Так как согласно соотношениям (I.2.I) и (2.2.I)

$$B_1 - B_3 = -\tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 + \partial_4) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_4)(\partial_1 - \partial_3),$$

то $\langle B_1-B_3, P_1-P_3\rangle \simeq \langle P_2+P_4, P_1-P_3\rangle$,

$\langle B_1-B_3, P_1-P_3, P_2+P_4\rangle \simeq \langle P_2+P_4, P_1-P_3\rangle$.

Далее, ранги алгебр $\langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2, C_1-C_3\rangle$, $\langle B_1, B_2, B_3\rangle$, $\langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$ равны трем. Поскольку эти алгебры суть подалгебры алгебры AP(2,2), то функция $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$ является их инвариантом. Следовательно, рассматриваемые подалгебры эквивалентны алгебре AO(2,2). Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. Неэквивалентные нерасщепляемые подалгебры алгебры AP(2,2) исчерпываются нерасщепляемыми подалгебрами $K \subset AP(1,2)$, $L \subset AP(2,1)$, алгебрами $K \oplus \langle P_2\rangle$, $L \oplus \langle P_4\rangle$, и следующими алгебрами:

$K_j = \langle B_1-B_3+P_1\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle, \langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$ $(j=\overline{1,3})$;

$K_4 = \langle B_1-B_3+P_2, P_1-P_3\rangle$; $K_5 = \langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_3, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ $(\alpha>0)$; $K_j = \langle B_1-B_3+C_1-C_3+P_4\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle$ $(j=6,7)$;

$K_j = \langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_2\rangle : 0, \langle P_1-P_3\rangle$ $(j=8,9)$;

$K_{10} = \langle B_1-B_3-C_1+C_3+P_1, P_1-P_3, P_2+\alpha P_4\rangle$ $(\alpha>0)$;

$K_j = \langle B_2+C_2+P_2+P_4\rangle : 0, \langle P_1+P_3\rangle$ $(j=11,12)$;

$K_j = \langle B_2+C_2+P_2\rangle : \langle P_2+P_4\rangle, \langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$ $(j=13,14)$;

$K_{15} = \langle B_1-B_3+P_2-P_4, C_1-C_3\rangle$; $K_{16} = \langle B_1-B_3+P_4, C_1-C_3-P_4\rangle$;

$K_{17} = \langle B_1-B_3+P_2, C_1-C_3-P_4\rangle$; $K_{18} = \langle B_1-B_3+C_1-C_3, B_2+C_2+\alpha P_4\rangle$

$(\alpha > 0)$; $K_{19} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle$ $(\alpha > 0)$;

$K_{20} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle$; $K_j = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4 \rangle$: 0,

$\langle P_1 - P_3 \rangle$, $\langle P_2 + P_4 \rangle$ $(j = \overline{21,23})$;

$K_{24} = \langle B_1 - B_3, 3B_2 + C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4 \rangle$.

Доказательство. Если ранг алгебры $L \subset AP(2,2)$ равен 2, а генераторы L имеют вид

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x_1, \ldots, x_s)\partial_i,$$

где $s \geqslant 2$, то $L \approx \langle P_1, P_2, \ldots, P_2 \rangle$. Отсюда следует, что

$\langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3 \rangle \approx \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$;

$\langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2 \rangle \approx \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$

$(\beta > 0)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

§ 3. Подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3)

В работах [7,60,8I] найдены все неэквивалентные подалгебры алгебры AP(I,3), а в теоремах 2.2.I, 2.2.2 приведены неэквивалентные подалгебры алгебры AP(2,2). Поэтому исключим из рассмотрения подалгебры вида $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$, где $K \subset AP(I,3) = \langle P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{2,5} \rangle$, $L \subset AP(2,2)$.

В дальнейшем, через $\mathcal{L}$ будем обозначать минимальную подалгебру коразмерности I алгебры AP(2,3), не эквивалентную

AO(2,3), $\langle P_1\rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5\rangle$, и обладающую тем свойством, что ее проекция $\pi(\mathcal{L})$ на AO(2,3) принадлежит нормализатору $AOpt(1,2)$ двумерного изотропного пространства $\langle P_1+P_5, P_2+P_4\rangle$ в AO(2,3).

Положив в обозначениях (I.I.5) $n=3$, получаем следующие соотношения:

$$M=J_{12}-J_{25}+J_{14}-J_{45} \quad ; D=-J_{15}+J_{24} \ ; Z=J_{15}+J_{24} \ ;$$

$$S=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}-J_{14}-J_{25}) \ ; T=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}+J_{14}+J_{25}) \ ;$$

$$G_3=J_{13}-J_{35} \ , H_3=J_{23}-J_{34} \ .$$

Указанные выше генераторы, удовлетворяют коммутационным соотношениям (I.I.6). Кроме того, пусть

$$N_1=P_1+P_5 \ , N_2=P_2+P_4, \ Y_1=P_1-P_5 \ , \ Y_2=P_2-P_4 \quad ;$$

$$AGL(2,R)=\langle D,S,T\rangle \oplus \langle Z\rangle \ ; \ U=\langle Y_1,Y_2,N_1,N_2,P_3\rangle .$$

Генераторы трансляций N_1, N_2, Y_1, Y_2, P_3 связаны с генераторами D , S , T , Z , M , G_3 , H_3 следующими коммутационными соотношениями:

$$[Z,Y_1]=[Y_1,D]=Y_1 \quad ; [Z,Y_2]=[D,Y_2]=Y_2 \ ;$$

$$[N_1,Z]=[D,N_1]=N_1 \quad ; [N_2,Z]=[N_2,D]=N_2 \ ;$$

$$[Y_1,S]=Y_2 \ , [S,N_2]=N_1 \ , \ [T,Y_2]=Y_1 \ ; \qquad (2,3,I)$$

$$[N_1,T]=N_2 \ ; [Y_1,G_3]=[Y_2,H_3]=2P_3 \ ; [Y_1,M]=2N_2 \ ;$$

$$[P_3,G_3]=N_1 \quad ; [P_3,H_3]=N_2 \quad ; [M,Y_2]=2N_1$$

(нулевые коммутаторы опущены).

В лемме I.1.2 показано, что $AOpt(1,2)=\langle M,G_3,H_3\rangle \oplus AGL(2,R)$. Очевидно, что $\mathcal{L} \subset AOpt(1,2) \oplus U$. Через τ и ε будем обозначать проектирование $\mathcal{L}$ соответственно на $AGL(2,R)$ и пространство $\langle P_3, G_3, H_3 \rangle$. В леммах 2.3.I - 2.3.7 и теореме 2.3.I проводится исследование алгебры $\mathcal{L}$ в зависимости от ее проекции $\tau(\mathcal{L})$. Если $\tau(L_1) \approx \tau(L_2)$, но $L_1 \simeq L_2$, то в перечне подалгебр будет фигурировать только алгебра L_1.

Лемма 2.3.I. Если $\tau(\mathcal{L})=0$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из следующих алгебр:

$$\mathcal{L}_1=\langle G_3+2Y_2+\alpha N_2,\ H_3+Y_1+\beta Y_2,\ M+2P_3,\ N_1\rangle\ (\alpha,\beta\in R);$$

$$\mathcal{L}_2=\langle G_3+Y_2,\ H_3+Y_1,\ M,\ N_1,\ N_2\rangle;$$

$$\mathcal{L}_3=\langle G_3+Y_1,\ H_3+Y_2,\ M,\ N_1,\ N_2\rangle;$$

$$\mathcal{L}_4=\langle G_3+Y_1,\ H_3-Y_2,\ M,\ N_1,\ N_2\rangle.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3, P_3\rangle$. С точностью до автоморфизма $exp(\theta_1 Y_1+\theta_2 Y_2+\theta_3 P_3)$ алгебра $\mathcal{L}$ содержит элементы

$$X_1=G_3+\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2+\alpha N_2+\delta M,$$

$$X_2=H_3+\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2+\mu_1 N_1+\mu_2 N_2+\sigma M.$$

Очевидно проекция $\sigma X_1-\delta X_2$ на $\langle M\rangle$ равна нулю. Отсюда заключаем, что с точностью до автоморфизма $exp(\theta(S+T))$ можно предполагать, что $\delta=0$. Автоморфизм $exp(\theta G_3)$ позволяет занулить и коэффициент σ.

Если $P_3+\gamma_1 Y_1+\gamma Y_2+\delta_1 N_1+\delta_2 N_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $N_1+2\gamma_1 P_3$, $N_2+2\gamma P_3$, $2\gamma_1 N_1$, а потому N_1, N_2, $P_3\in\mathcal{L}$. Но в таком случае $\mathcal{L}\simeq L\oplus\langle P_5\rangle$, где $L\subset$ AP(2,2). Противоречие.

Пусть $X_3=[X_1, X_2]$. Очевидно, что
$X_3=M+2(\alpha_2-\lambda_1)P_3$, где $\alpha_2-\lambda_1\neq 0$, $[X_3,X_1]=$
$(4\alpha_2-2\lambda_1)N_1-2\alpha_1 N_2$, $[X_3,X_2]=2\lambda_2 N_1+(2\alpha_2-4\lambda_1)N_2$.

Если $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент вида $\rho_1 N_1+\rho_2 N_2$, то, применяя автоморфизм $\exp\theta(S+T)$, получаем, что $N_1\in\mathcal{L}$. Так как $\langle M+\mu P_3, N_1, N_2\rangle\simeq\langle P_3, N_1, N_2\rangle$, то $N_2\notin\mathcal{L}$. Поэтому можно предполагать, что $\alpha_1=0$, $\alpha_2=2\lambda_1$. С точностью до автоморфизма $\exp(\theta Z)$ получаем, что $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1$.

Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, P_3\rangle$. Тогда, применяя автоморфизм $\exp(\theta_1 Y_1+\theta_2 H_3+\theta_3 P_3)$, получаем, что $\mathcal{L}$ содержит элементы

$$X_1=G_3+\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2+\beta N_2,\ X_2=P_3+\gamma M+\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2+\mu_1 N_1+\mu_2 N_2,$$

$$X_3=[X_2, X_1]=(1+2\gamma\alpha_2)N_1-2\gamma\alpha_1 N_2+2\lambda_1 P_3,\ X_4=[X_3,X_1]=2\lambda_1 N_1.$$

За счет автоморфизма $\exp(\theta_1 H_3+\theta_2 Y_1)$ можно допускать, что $\lambda_2=0$ при $\gamma\neq 0$. Если $\lambda_1\neq 0$, то N_1, $P_3-\gamma\alpha_1\lambda_1^{-1}N_2\in\mathcal{L}$. Автоморфизм $\exp(\theta H_3)$ позволяет выделить P_3, что противоречит определению $\mathcal{L}$. Значит, $\lambda_1=0$. Так как $\dim\mathcal{L}\geqslant 4$, то $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент $\delta_1 N_1+\delta_2 N_2+\sigma M+\rho Y_2$. Анализируя возможные случаи, приходим к выводу, что $\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}'$, где $\varepsilon(\mathcal{L}')=\langle G_3\rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3\rangle$, то $\mathcal{L}$ сопряжена алгебре $\langle G_3+Y_1, Y_2, N_1, N_2\rangle$, а последняя - эквивалентна алгебре $L\oplus\langle P_5\rangle$, где $L\subset$ AP(2,2).

Если $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle P_3\rangle$, то $P_3\in\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}'$, где

$\varepsilon(\mathcal{L}') = 0$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$, то с точностью до автоморфизмов $\exp\theta(S+T)$, $\exp(tT)$, $\exp(\theta_1 J_{15} + \theta_2 J_{24})$ алгебра $\mathcal{L}$ сопряжена одной из алгебр: $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.2. Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$\mathcal{L}_5 = \langle D + \alpha P_3, G_3 + \beta Y_2, M + P_3, N_1 \rangle$ $(\beta \neq 0, \alpha > 0)$;

$\mathcal{L}_6 = \langle D, G_3 + Y_2, M - 2P_3, N_2 \rangle$; $\mathcal{L}_7 = \langle D + \alpha P_3, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle$

$(\alpha > 0)$; $\mathcal{L}_8 = \langle D, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle$;

$\mathcal{L}_9 = \langle D + \alpha P_3, M + P_3, N_1, Y_2 \rangle$ $(\alpha > 0)$.

Доказательство. Так как D действует вполне приводимо на U и аннулирует в U только $\langle M, P_3 \rangle$, то в силу предложения 2.I [68] пространство $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3 \rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$.

Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$, то ранг алгебры $\mathcal{L}$ равен 5. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$. С точностью до сопряженности $G_3 + \lambda Y_2 \in \mathcal{L}$ $(\lambda \neq 0)$. Проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1 \rangle$ равна нулю. Если $M + \mu P_3 \in \mathcal{L}$ $(\mu \neq 0)$, то $D + \delta P_3 \in \mathcal{L}$. При $\delta \neq 0$ получаем алгебру $\mathcal{L}_5$. Если $N_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L} = \mathcal{L}_6$ Допустим, что $M + \mu P_3 \notin \mathcal{L}$ $(\mu \neq 0)$. В этом случае N_1, $N_2 \in \mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L}$ эквивалентна $\mathcal{L}_7$.

Пусть

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Автоморфизм, соответствующий матрице $diag\{J, 1, J\}$, сводит случай $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle H_3,P_3\rangle$ к случаю $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, P_3\rangle$.

Пусть $\varepsilon(\mathcal{L})=\langle G_3, H_3\rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3+\beta Y_2$, $H_3+\beta Y_1+\delta N_2$, M. Если $\beta\neq 0$, то $\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}_8$. Если $\beta=0$, то $\mathcal{L}\simeq$ AO(2,3). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D+\lambda Z\rangle$ $(\lambda>0)$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{10}=\langle 3D+Z+\mu P_3, M+Y_1, Y_2, N_1\rangle \quad (\mu>0);$$

$$\mathcal{L}_{11}=\langle D+Z+\alpha P_3, G_3+Y_1, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha>0);$$

$$\mathcal{L}_{12}=\langle 3D+Z, M+Y_1, H_3, N_1\rangle.$$

Лемма 2.3.4. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle T\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{13}=\langle T+G_3+\alpha Y_1+Y_2, H_3+2Y_1+\beta N_1, M-2P_3, N_2\rangle \quad (\alpha,\beta\in R);$$

$$\mathcal{L}_{14}=\langle T+G_3+\alpha Y_1+Y_2, H_3+Y_1, M, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha\in R).$$

Доказательство лемм 2.3.3, 2.3.4 аналогично доказательству лемм 2.3.I, 2.3.2.

Лемма 2.3.5. Если $\tau(\mathcal{L})=\langle D,T\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна алгебре $\mathcal{L}_{15}=\langle D, T, H_3+Y_1, M+2P_3\rangle$.

Доказательство. На основании предложения 2.I [68] и леммы 3.I [68], алгебра $\mathcal{L}$ содержит $D+\alpha M+\beta P_3$, T, а $\mathcal{L}\cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3\rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1\rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2\rangle$, причем, если K - проекция $\mathcal{L}\cap U$ на $\langle G_3, Y_2, N_1\rangle$, то $[T, K]$ содержится в проекции $\mathcal{L}\cap U$ на $\langle H_3, Y_1, N_2\rangle$. Легко видеть, что $\langle T, N_2\rangle \approx \langle Y_1, N_2\rangle$, $\langle T, Y_1+\delta N_2\rangle \approx \langle Y_1, N_2\rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3\rangle$, то $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{15}$. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3\rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3+\gamma Y_2$, $H_3-\gamma Y_1$. Так как $[G_3+\gamma Y_2, H_3-\gamma Y_1] = 4\gamma P_3$, то $\gamma=0$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.6. Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D+\lambda Z, T\rangle$ $(\lambda\neq 0)$, то сопряжена одной из алгебр:

$$\mathcal{L}_{16} = \langle D+3Z, T+G_3, N_1, N_2\rangle;$$

$$\mathcal{L}_{17} = \langle D+3Z+\alpha P_3, T+G_3, N_1, N_2\rangle \quad (\alpha>0);$$

$$\mathcal{L}_{18} = \langle D+3Z, T+G_3, M, H_3+\gamma N_2\rangle \quad (\gamma>0);$$

$$\mathcal{L}_{19} = \langle D+3Z, T+N_1, M, H_3\rangle.$$

Доказательство. На основании коммутационных соотношений (I.I.6) и (2.3.I), имеем

$$[D+\lambda Z, \alpha T+\beta G_3+\gamma H_3+\delta P_3+\rho_1 Y_1+\rho_2 Y_2+\mu_1 N_1+\mu_2 N_2+\sigma M] =$$
$$= -2\alpha T+(1-\lambda)(\beta G_3+\mu_1 N_1)-(1+\lambda)(\gamma H_3+\mu_2 N_2)+$$
$$+(\lambda-1)\rho_1 Y_1+(\lambda+1)\rho_2 Y_2-2\lambda\sigma M.$$

Пусть $\lambda\neq \pm\frac{1}{3}$, ± 1, ± 3. В силу предложения 2.I и леммы 3.I [68] алгебра $\mathcal{L}$ содержит $D+\lambda Z+\mu P_3$, T, а пространство $\mathcal{L}\cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M\rangle, \langle Y_1\rangle, \langle Y_2\rangle, \langle G_3, N_1\rangle, \langle H_3, N_2\rangle, \langle P_3\rangle$.

Если $G_3+\gamma N_1 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $[G_3+\gamma N_1, T] = H_3+\gamma N_2$, а также M. В этом случае $\mathcal{L} = \langle D+\lambda Z, G_3+\gamma N_1, H_3+\gamma N_2, M, T\rangle$, а потому $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$.

Если $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D + Z + \mu P_3$, T, а пространство $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, Y_1 \rangle$, $\langle Y_2 \rangle$, $\langle G_3, N_1 \rangle$, $\langle H_3, N_2 \rangle$, $\langle P_3 \rangle$. Отсюда вытекает, что если $\mu = 0$, то $\mathcal{L} \simeq AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ или $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_{19}$, а если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$.

Если $\lambda = -\frac{1}{3}$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D - Z + \mu P_3$, T, а $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle Y_1 \rangle$, $\langle M, Y_2 \rangle$, $\langle G_3, N_1 \rangle$, $\langle H_3, N_2 \rangle$, $\langle P_3 \rangle$. Поскольку $[T, Y_2] = Y_1$, $\langle T, Y_1 \rangle \simeq \langle N_2, Y_1 \rangle$, то проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ равна нулю.

Если $\mu = 0$, то $\mathcal{L}$ сопряжена подалгебре алгебры AO(2,3) или $AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$. Если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$.

Случаи $\lambda = \pm 1$, ± 3 рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.3.7. Если $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$, то $\mathcal{L}$ сопряжена одной из следующих алгебр:

$$\mathcal{L}_{20} = \langle D + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle \quad (\alpha \neq \beta, \ \alpha, \beta \geq 0);$$

$$\mathcal{L}_{21} = \langle S + T + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle \quad (\alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta \neq 0).$$

Доказательство леммы 2.3.7 аналогично доказательству предыдущих лемм.

Теорема 2.3.I. Подалгебры коразмерности один алгебры AP(2,3), не эквивалентные алгебрам AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$, исчерпываются алгебрами, описанными в леммах 2.3.I-2.3.7.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случаев алгебр $\mathcal{K} \subset$ AP(2,3), проекции которых на AO(2,3) не сопряжены подалгебрам алгебры $AOpt(1,2)$. Пусть $G_a = J_{1a} - J_{a5}$ ($a = 2,3,4$), $AO[2,4] = \langle J_{cd} \mid c, d = 2,3,4 \rangle$, $\tilde{A\acute{P}}$(I,2) =

$= \langle G_2, G_3, G_4 \rangle \oplus (AO[2,4] \oplus \langle J_{15} \rangle)$. Так как

$$J_{15} = \frac{Z-D}{2}, \quad G_2 = \frac{M+2S}{2}, \quad G_4 = \frac{M-2S}{2},$$

то J_{15}, G_2, $G_3, G_4 \in AOpt(1,2)$. Отсюда вытекает, что подалгебра f алгебры $\tilde{AP}'(1,2)$ не сопряжена подалгебре алгебры $AOpt(1,2)$ только в том случае, если ее проекция $\mathcal{H}$ на $AO[2,4]$ не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$. Последнее условие выполняется тогда, когда $\mathcal{H}$ сопряжена одной из следующих алгебр: $AO[2,4]$, $\langle J_{34} \rangle$.

Пусть $\mathcal{L}$ - подалгебра коразмерности I алгебры AP(2,3), не эквивалентная алгебрам AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$; $f = \pi(\mathcal{L}) \subset \hat{AP}'(1,2)$, $\mathcal{H} = \langle J_{34} \rangle$. В силу леммы 3.I [68] алгебра $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию W на $\langle G_3, G_4, P_3, P_4 \rangle$. Если $W = 0$, то функция $x_3^2 + x_4^2$ будет инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \simeq \langle J_{34}, P_1, P_2, P_5 \rangle$. Если P_3, $P_4 \in W$, то $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Пусть $W \neq 0$ и P_3, $P_4 \notin W$. Тогда W обладает базисом $G_3 + \alpha P_3 + \beta P_4$, $G_4 - \beta P_3 + \alpha P_4$. Коммутатор этих элементов равен $2\beta N_1$.

Если $\beta \neq 0$, то $N_1 \in \mathcal{L}$. Отсюда легко получить, что $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $\beta = 0$, то с точностью до автоморфизма $exp(\theta Y_1)$ имеем $W = \langle G_3, G_4 \rangle$. Если проекция $\mathcal{L}$ на $\langle J_{15} \rangle$ равна нулю, то $x_1 - x_5$ является инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \simeq \langle N_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Если проекция $\mathcal{L}$ на $\langle J_{15} \rangle$ отлична от нуля, то $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию Ω на $\langle N_1, G_2 \rangle$. Допустим, что $\Omega = \langle G_2 + \gamma N_1 \rangle$. Применяя автоморфизм $exp(\theta P_2)$, получаем, что $G_2 \in \Omega$. Если $N_1 \in \Omega$, то $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $N_1 \notin \Omega$, то $\mathcal{L} \simeq$ AO(2,3) или $\mathcal{L} \simeq L \oplus \langle P_5 \rangle$.

Случай $f = \pi(\mathcal{L})$, $\mathfrak{N} = AO[2,4]$ рассматривается аналогично. Если проекция $\mathcal{L}$ на AO(2,3) не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр: AO(2,3), $\langle P_1 \rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5 \rangle$. Теорема доказана.

§ 4. Инварианты подалгебр алгебры AP(2,2) и подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3)

В § 2 настоящей главы получен перечень всех неэквивалентных подалгебр алгебры AP(2,2). Для отыскания ПСИ этих подалгебр нужно для каждой из них решить систему ДУ (2.I.2). Подобная задача решалась в § I этой главы для однопараметрических подгрупп группы P(2, n). Опустив довольно громоздкие вычисления, приводим основные инварианты тех подалгебр, которые явно указаны в теоремах 2.2.I и 2.2.2. Относительно алгебр $K \subset$ $\subset$ AP(I,2), $L \subset$ AP(2,I), $K \oplus \langle P_2 \rangle$, $L \oplus \langle P_4 \rangle$ сделаем следующее замечание.

Поскольку инварианты алгебр K и L известны [7,60, 8I], то ПСИ алгебр K в пространстве M(2,2) составляют основные инварианты алгебр K в M(I,2) и функция x_2; алгебр L - основные инварианты L в M(2,I) и функция x_4. ПСИ алгебр $K \oplus \langle P_2 \rangle$ и $L \oplus \langle P_4 \rangle$ в M(2,2) полностью совпадают с ПСИ алгебр K и L в M(I,2) и M(2,I), соответственно.

Пусть $y_1 = x_1 + x_3$, $\bar{y}_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 + x_4$, $\bar{y}_2 = x_2 - x_4$. Запись L : $f_1(x), \ldots, f_5(x)$ означает, что функции $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_5(x)$ составляют ПСИ алгебры L.

1) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры AP(2,2).

$F_5 : \bar{y}_1 \bar{y}_2$; $F_6 : \bar{y}_1 y_2^{-1}$; $F_8 : \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2$; $F_{11} : 2 \ln \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \bar{y}_2^{-1}$; $F_{17} : \bar{y}_1^{1-e} \cdot \bar{y}_2^{1+e}$; $F_{18} : \bar{y}_1^{e-1} \cdot y_2^{e+1}$; $F_{21} : \operatorname{arctg}(y_2 \bar{y}_1^{-1}) + \frac{e}{2} \ln(\bar{y}_1^2 + y_2^2)$; $F_{33} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$; $K_3 : y_1^2 + 2 y_2$; $K_5 : \frac{1}{2}(\alpha y_1^2 + (\alpha+1)\bar{y}_2 + (\alpha-1) y_2)$; $K_{10} : \frac{1}{2}(y_1^2 + (1-\alpha) y_2 - (1+\alpha)\bar{y}_2)$; $K_{14} : \ln \bar{y}_1 - \bar{y}_2$; $K_{22} : \frac{1}{2}(y_2 \bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1} + \frac{1}{4} y_1 \bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $K_{23} : (y_1 \bar{y}_1 - \frac{1}{4} y_1 \bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $K_{24} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2^2 y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$.

2) Инварианты подалгебр коразмерности 2 алгебры AP(2,2).

$F_1 : \bar{y}_1, \bar{y}_2$; $F_4 : (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \ln(\bar{y}_1 y_2^{-1})$; $F_{10} : \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2$, $\ln y_1 + \frac{1}{2} y_2 y_1^{-1}$; $F_{15} : (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \ln(\bar{y}_1^{1-e} \bar{y}_2^{1+e})$; $F_{16} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \ln(y_1^{e-1} \bar{y}_2^{e+1})$; $F_{19} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, \bar{y}_2$; $F_{23} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \bar{y}_2 y_1^{-1}$; $F_{24} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4} \ln(y_1 \bar{y}_2)$; $F_{25} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4} \ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2)$; $F_{26} : (y_1 \bar{y}_1)^{\frac{1}{2}}, (y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$; $F_{27} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, y_1 y_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2$; $F_{28} : (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, (x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}$; $F_{29} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{4} \ln(y_1^{\alpha-1} \bar{y}_2^{\alpha+1})$; $F_{30} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(y_1 \bar{y}_2^{-1}) + \frac{\alpha}{4} \ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2)$; $F_{31} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \ln y_1 - \frac{1}{4} y_2 y_1^{-1}$; $K_2 : y_2 + \frac{1}{2} y_1^2, \frac{1}{4} \bar{y}_2$; $K_4 : y^{\frac{1}{2}}, x_4 + \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2$; $F_{32} : (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \ln y_1$; $K_7 : y_1, x_2 + y_1 x_4$;

K_9 : y_1 , $x_4+y_1x_2$; K_{12}: $\frac{1}{2}\bar y_2$, $\ln\bar y_1-\frac{1}{2}y_2$;

K_{13}: $(y_1\bar y_1)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1+\frac{1}{2}\bar y_2$; K_{15}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+$
$+y_2^2y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1$; K_{16} : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2-2x_2^2y_1^{-1}-2\bar y_1)^{\frac{1}{2}}$,
y_1 ; K_{17}: $\frac{1}{2}((y_2-\bar y_2(1-y_1))^2+(2\bar y_1-\bar y_2^2)(1+(1-y_1)^2))^{\frac{1}{2}}$, y_1 ;

K_{18}: $(y_1\bar y_1+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha\ln y_1+x_4$; K_{19}: $(y_1\bar y_1-x_4^2)^{\frac{1}{2}}$,
$\alpha\ln y_1+x_2$; K_{20}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+2\bar y_2\ln y_1)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln\bar y_2$;

K_{21} : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+y_2^2y_1^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $(y_1\bar y_2+2y_2)y_1^{-\frac{1}{2}}$.

3) Инварианты подалгебр коразмерности 3 алгебры AP(2,2).

F_2 : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln y_1$, $\frac{1}{2}\ln\bar y_2$;

F_3 : $(y_1\bar y_1)^{\frac{1}{2}}$, $(y_2\bar y_2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}\ln(y_1\bar y_2^{-1})$;

F_7 : $(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $(x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}$, $\arcsin(x_2(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}})-$
$-\arcsin(x_4(x_3^2+x_4^2)^{-\frac{1}{2}})$; F_9 : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{\frac{1}{2}}$, $y_1^{x}\bar y_2$,
$\frac{1}{2}\ln y_1+\frac{1}{4}y_2y_1^{-1}$; F_{12} : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{\frac{1}{2}}$, $y_1^2+\bar y_2^2$,
$$\frac{\bar y_1\bar y_2-y_1y_2}{y_1^2+\bar y_2^2}-2\arcsin\frac{\bar y_2}{(y_1^2+\bar y_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$; F_{13} : $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{\frac{1}{2}}$,

$$y_1^2+\bar y_2^2,\quad \frac{\bar y_1\bar y_2-y_1y_2}{y_1^2+\bar y_2^2}+2\arcsin\frac{\bar y_2}{(y_1^2+\bar y_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$;

$F_{14}: (y_1\bar y_1)^{\frac12}, \ (y_2\bar y_2)^{\frac12}, \ \frac12 \ln(\bar y_1^{\,1-e}\cdot \bar y_2^{\,1+e})$;

$F_{20}: (y_1\bar y_1 + y_2\bar y_2)^{\frac12}, \ y_1y_2 - \bar y_1\bar y_2, \ e\ln(y_1^2+\bar y_2^2)-$
$-2\,\mathrm{arctg}(\bar y_2\cdot y_1^{-1})$; $F_{22}: (x_1^2+x_2^2)^{\frac12}, (x_3^2+x_4^2)^{\frac12}$,

$(1-e)\arcsin\frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac12}} - (1+e)\arcsin\frac{x_4}{(x_3^2+x_4^2)^{\frac12}}$;

$K_1: x_3+\frac12 y_1\bar y_2, \ \frac14 y_2 + \frac18 y_1^2, \ \bar y_2$;

$K_6: (y_1\bar y_1 + x_2^2)^{\frac12}, \ y_1, \ x_2 + y_1x_4$;

$K_8: (y_1\bar y_1 - x_4^2)^{\frac12}, \ y_1, \ x_4 + y_1x_2$;

$K_{11}: (y_1\bar y_1)^{\frac12}, \ \bar y_2, \ \frac14 y_2 + \frac12 \ln y_1$.

Значения d, e, α в приведенных выше ПСИ те же, что и в теоремах 2.2.I, 2.2.2.

Подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3), не эквивалентные алгебрам AO(2,3), $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$, где $K\subset$ $\subset$ AP(I,3), $L\subset$ AP(2,2), получены в леммах 2.3.I - 2.3.7. Поскольку инварианты алгебр $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$ в пространстве M(2,3) полностью совпадают с инвариантами алгебр K и L в M(I,3) и M(2,2), соответственно, а ПСИ алгебр K [7,60,8I] и L известны, то достаточно указать ПСИ для алгебр AO(2,3) и $\mathcal{L}_i$ $(i=\overline{1,21})$.

Запись $L: f(x)$ означает, что функция $f(x)$ составляет ПСИ алгебры L. Кроме того, пусть $y_1 = x_1 + x_5$, $\bar y_1 = x_1 - x_5$, $y_2 = x_2 + x_4$, $\bar y_2 = x_2 - x_4$.

4) Инварианты подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3).

$\mathcal{L}_1 : y_2 - \bar{y}_1 x_3 - \frac{1}{4}(2\alpha - \bar{y}_1^2)\bar{y}_2 + \frac{\beta}{4}(2\alpha \bar{y}_1 - \frac{1}{3}\bar{y}_1^3)$;

$\mathcal{L}_2 : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1 \bar{y}_2$; $\mathcal{L}_3 : x_3 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^2 - \frac{1}{4}\bar{y}_2^2$;

$\mathcal{L}_4 : x_3 + \frac{1}{4}\bar{y}_2^2 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^2$; $\mathcal{L}_5 : \alpha\beta \ln \bar{y}_1 + \frac{1}{2}\beta y_2 \bar{y}_1^{-1} - \beta x_3 + \frac{1}{2}\bar{y}_1 \bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_6 : (\bar{y}_1 \bar{y}_2 x_3 - y_1 \bar{y}_1 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $\mathcal{L}_7 : x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2}\bar{y}_1 \bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_8 : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1 \bar{y}_2$; $\mathcal{L}_9 : x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2} y_2 \bar{y}_1^{-1}$;

$\mathcal{L}_{10} : x_3 - \frac{\mu}{4}\ln(2y_2 - \bar{y}_1^2)$; $\mathcal{L}_{11} : x_3 - \frac{1}{4}\bar{y}_1^2 + \frac{\alpha}{2}\ln \bar{y}_2$;

$\mathcal{L}_{12} : \frac{1}{2}(2y_2\bar{y}_2 - 2x_3^2 - \bar{y}_1^2 \bar{y}_2)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{13} : \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - x_3\bar{y}_2 - \frac{\beta}{2}\bar{y}_1 + \frac{1}{4}\bar{y}_1\bar{y}_2^2 + \frac{\alpha\beta}{2}\bar{y}_2 - \frac{\beta}{8}\bar{y}_2^2 - \frac{\alpha}{12}\bar{y}_2^3 + \frac{1}{32}\bar{y}_2^4)$;

$\mathcal{L}_{14} : x_3 - \frac{1}{2}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \frac{1}{4}\alpha\bar{y}_2^2 - \frac{1}{12}\bar{y}_2^3$;

$\mathcal{L}_{15} : (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2 - y_1^2\bar{y}_2^{-2} - 2x_3 y_1 \bar{y}_2^{-1})^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{16} : x_3 + \frac{1}{2}\bar{y}_1^2\bar{y}_2^{-1}$; $\mathcal{L}_{17} : x_3 + \frac{\alpha}{2}\ln\bar{y}_2 + \frac{1}{2}\bar{y}_1^2\bar{y}_2^{-1}$;

$\mathcal{L}_{18} : (y_1\bar{y}_1 - x_3^2 + y_2\bar{y}_2 - 2\gamma x_3 - \gamma\bar{y}_1^2\bar{y}_2^{-1} - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{19} : (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2 + \bar{y}_1^2\bar{y}_2^{-1})^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{L}_{20} : x_3 + \frac{\beta}{2}\ln(\bar{y}_1\bar{y}_2) + \frac{\alpha}{2}\ln(\bar{y}_2\bar{y}_1^{-1})$;

$\mathcal{L}_{21} : x_3 - \alpha\,\mathrm{arctg}(\bar{y}_2\bar{y}_1^{-1}) + \frac{\beta}{2}\ln(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2)$;

AO(2,3) : $(y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}$.

Значения α, β, γ, μ те же, что и в леммах 2.3.I - 2.3.7.

§ 5. Инвариантные операторы подалгебр алгебры AP(2,2)

Для нахождения инвариантных операторов подалгебр алгебры AP(2,2) /функций генераторов, коммутирующих со всеми генераторами, задающими данную подалгебру/, воспользуемся методом, предложенным в работах [15,64,72] . Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть $L = \langle X_1, X_2, \dots, X_s \rangle$ - вещественная алгебра Ли с операцией коммутирования

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k , \qquad (2.5.1)$$

где c_{ij}^k - структурные константы данной алгебры Ли. Тогда, произвольная функция $F(X) = F(X_1, \dots, X_s)$ называется инвариантным оператором алгебры L , если она коммутирует со всеми генераторами X_i , т.е. имеет место следующее соотношение:

$$[F(X), X_i] = 0 \qquad (i = \overline{1,s}). \qquad (2.5.2)$$

Пользуясь тем, что алгебра L изоморфна алгебре дифференциальных операторов, с аналогичной операцией коммутирования, произведем такую замену:

$$X_i \to \hat{X}_i = \sum_{jk} c_{ij}^k X_k \frac{\partial}{\partial X_j} . \qquad (2.5.3)$$

Тогда условие (2.5.2) заменяется системой ДУ в частных производных $\hat{X} F(X) = 0$, или, что то же самое,

$$\Big(\sum_{kj} c_{ij}^k X_k \frac{\partial}{\partial X_j}\Big) F(X) = 0 , \qquad (2.5.4)$$

которая является системой линейных однородных ДУ в частных производных первого порядка и решается известными методами [17].

Из вышеизложенного следует, что нахождение инвариантных операторов подалгебр алгебры L сводится к определению фундаментальных решений систем (2.5.4).

Сохраним в дальнейшем обозначения и нумерацию подалгебр алгебры AP(2,2), принятую в § 2 главы I. Так как инвариантные операторы действительных алгебр Ли размерности не большей пяти известны [90], будем рассматривать подалгебры алгебры AP(2,2), размерность которых больше пяти.

Остановимся более подробно на случае алгебры $F_{21,3}$. Для удобства рассматриваем указанную алгебру в следующем базисе:

$$F_{21,3} = \langle B_2, C_3, P_1 - P_3, P_1 + P_3, P_2 - P_4, P_2 + P_4 \rangle.$$

В этом базисе алгебра $F_{21,3}$ определяется такими структурными константами: $C_{13}^{3} = C_{16}^{3} = C_{23}^{6} = C_{24}^{5} = -\frac{1}{2}$, $C_{14}^{4} = C_{15}^{5} = C_{25}^{4} = C_{26}^{3} = \frac{1}{2}$, $C_{ij}^{k} = -C_{ji}^{k}$ (нулевые C_{ij}^{k} опущены).

Переобозначив $B_2 = X_1$, $C_3 = X_2$, $P_1 - P_3 = X_3$, $P_1 + P_3 = X_4$, $P_2 - P_4 = X_5$, $P_2 + P_4 = X_6$, получаем следующую систему (2.5.4) для алгебры $F_{21,3}$:

$$\left(X_3 \frac{\partial}{\partial X_3} - X_4 \frac{\partial}{\partial X_4} - X_5 \frac{\partial}{\partial X_5} + X_6 \frac{\partial}{\partial X_6} \right) F(X) = 0,$$

$$\left(X_6 \frac{\partial}{\partial X_3} + X_5 \frac{\partial}{\partial X_4} - X_4 \frac{\partial}{\partial X_5} - X_3 \frac{\partial}{\partial X_6} \right) F(X) = 0,$$

$$\left(X_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_6 \frac{\partial}{\partial X_2} \right) F(X) = 0, \quad \left(X_6 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_3 \frac{\partial}{\partial X_2} \right) F(X) = 0.$$

Уравнения, являющиеся линейной комбинацией выписанных уравнений, опущены.

Два последних уравнения системы показывают, что $F(X)$ не зависит от X_1 и X_2, а два первых дают следующие фундаментальные решения системы: $(X_4^2+X_5^2)(X_3^2+X_6^2)$, $X_3X_4+X_5X_6$. Возвратившись к исходным обозначениям, получаем два инвариантных оператора алгебры $F_{21,3}$:

$$\{(P_1+P_3)^2+(P_2-P_4)\}\{(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2\},\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2.$$

Отметим, что найденные операторы имеют полиномиальный вид, а значит являются операторами Казимира, т.е. элементами центра универсальной обертывающей алгебры $F_{21,3}$.

Ниже, опустив довольно громоздкие вычисления, приводим явный вид инвариантных операторов для всех подалгебр алгебры AP(2,2), размерность которых больше пяти. Запись $L_1, \ldots, L_s$: $f_1, f_2, \ldots, f_k$ обозначает, что алгебры $L_1, \ldots, L_s$ имеют инвариантные операторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

$F_{20,6}$, $F_{29,3}$, $F_{30,6}$, $F_{31,6}$, $F_{32,3}$, $F_{33,7}$, $F_{35,6}$, $F_{42,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{16,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $\dfrac{P_1-P_3}{P_2+P_4}$; $F_{17,7}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, P_1-P_3 ; $F_{18,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)(P_2+P_4)$; $F_{19,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2$; $F_{20,6}$: $P_1^2-P_3^2$, $P_2^2-P_4^2$; $F_{21,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $[(P_1+P_3)^2+(P_2-P_4)^2][(P_1-P_3)^2+(P_2+P_4)^2]$; $F_{22,4}$: $P_1^2+P_2^2$, $P_3^2+P_4^2$; $F_{23,9}$: P_4, $P_1^2+P_2^2-P_3^2$; $F_{24,9}$: P_2, $P_1^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{25,11}$: P_2+P_4, $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$; $F_{26,9}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(P_1-P_3)^{d-1}(P_2+P_4)^{d+1}$ $(d>0, \neq 1)$; $F_{27,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$,

$[P_1-P_3+i(P_2+P_4)]^{1+i\alpha}[P_1-P_3-i(P_2+P_4)]^{i\alpha-1}$ $(\alpha>0)$; $F_{28,6}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$,
$(P_1-P_3)^2\exp((P_2-P_4)/(P_1-P_3))$; $F_{34,4}$: $(B_1-B_3)(P_2-P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)-$
$-(C_1-C_3)(P_2+P_4)$, P_1-P_3 ; $F_{36,3}$: $P_1^2-P_3^2-P_4^2$,
$(B_1-C_1)P_3-(B_2+C_2)P_4+(B_3-C_3)P_1$; $F_{37,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2$,
$(B_1+C_1)P_1-(B_2+C_2)P_2-(B_3+C_3)P_3$; $F_{38,2}$: C_1-C_3,
$(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2-2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2$;
$F_{43,1}$: $B_1^2+B_2^2-B_3^2$, $C_1^2+C_2^2-C_3^2$; $\tilde{F}_{34,2}$: P_1-P_3,
$2[(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2+P_3)(P_1-P_3)]+P_2^2-P_4^2$;
$F_{34,5}$: P_1-P_3, $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$, $(B_1-B_3)(P_2-P_4)-$
$-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)$; $F_{36,4}$: P_2, $P_1^2-P_3^2-P_4^2$,
$(B_1-C_1)P_3-(B_2+C_2)P_4-(B_3-C_3)P_1$; $F_{37,4}$: P_4, $P_1^2+P_2^2-P_3^2$,
$(B_1+C_1)P_1-(B_2+C_2)P_2-(B_3+C_3)P_3$; $F_{41,4}$: $[(C_1-C_3)(P_2+P_4)-$
$-(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(B_2-C_2)(P_1-P_3)](P_1-P_3)^{-1}$; $F_{42,2}$: $[(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2+$
$+2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2](C_1-C_3)^{-1}$; $F_{38,3}$: $P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2$,

$$(B_1-B_3)(P_2-P_4)^2+2B_2(P_1-P_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_1^2-P_3^2)-$$
$$-(C_1-C_3)(P_2^2-P_4^2)-(B_1+B_3)(P_1-P_3)^2;\ F_{39,3}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$(B_1-B_3)(P_1+P_3)(P_2-P_4)-(B_2+C_2)(P_2^2-P_4^2)-(C_2-B_2)(P_1^2-P_3^2)+$$
$$+(B_1+B_3)(P_1-P_3)(P_2+P_4);\ F_{40,2}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$(B_1+iB_2)(P_1+iP_2)(P_3+iP_4)-(B_3+C_3)(P_3^2+P_4^2)-$$
$$-(B_3-C_3)(P_1^2+P_2^2)+(B_1-iB_2)(P_1-iP_2)(P_3-iP_4);\ F_{41,5}:$$
$$P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,\ [(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+$$
$$+(B_2-C_2)(P_1-P_3)](P_1-P_3)^{-1};\ F_{43,2}:\ P_1^2+P_2^2-P_3^2-P_4^2,$$
$$[(B_1-B_3)(P_2-P_4)-(C_1-C_3)(P_2+P_4)+(B_2-C_2)(P_1-P_3)]\times$$
$$\times[(C_1+C_3)(P_2-P_4)-(B_1+B_3)(P_2+P_4)-(B_2-C_2)(P_1+P_3)]+$$
$$+[(B_1+B_3)(P_1+P_3)-(B_2+C_2)(P_2-P_4)+(C_1-C_3)(P_1+P_3)]\times$$
$$\times[(B_2+C_2)(P_2+P_4)-(B_1-B_3)(P_1+P_3)-(C_1+C_3)(P_1-P_3)].$$

Алгебры $F_{30,5}$, $F_{31,5}$, $F_{33,6}$, $F_{35,5}$, $F_{39,2}$, $F_{41,3}$, $\tilde{F}_{35,5}$ инвариантов не имеют.

ГЛАВА III

СИММЕТРИЙНАЯ РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО M(2,3)

Если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ - ПСИ подалгебры L алгебры инвариантности ДУ от n переменных, то анзац $\omega_s = f(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$ редуцирует данное ДУ к ДУ, зависящему от $(s-1)$ переменных. Такую редукцию будем называть симметрийной. В § I этой главы исследуется симметрийная редукция ультрагиперболического уравнения Даламбера, с использованием подгрупп групп P(2,2) и P(2,3). Во втором параграфе найдены решения некоторых из полученных редуцированных уравнений, по которым построены точные решения для нелинейных волновых уравнений Даламбера, Лиувилля, эйконала. Разделению переменных для уравнения Гельмгольца в пространстве M(2,3) посвящен § 3. В § 4 подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3) применены для нахождения точных решений одной релятивистски-инвариантной системы ДУ.

§ I. Симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера

Рассмотрим нелинейное ультрагиперболическое уравнение Даламбера

$$\Box_{2,3} u = F(u, (\nabla_{2,3} u)^2), \tag{3.I.I}$$

где

$$\Box_{2,3} u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - u_{55}, \tag{3.I.2}$$

$$(\nabla_{2,3} u)^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 - (u_5)^2, \tag{3.I.3}$$

$u_{\mu\nu}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u_\mu=\dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, F - произвольная гладкая функция.

Пятимерное уравнение (3.I.I-3.I.3) является естественным обобщением линейного уравнения Даламбера (или, как это часто принято в физической литературе, уравнения Клейна-Гордона-Фока). Его группой симметрии является группа Пуанкаре Р(2,3). Для симметрийной редукции уравнения (3.I.I) будем пользоваться подстановкой

$$u=\varphi(\omega), \tag{3.I.4}$$

которая является частным случаем анзаца предложенного в работах [48,52] (здесь φ - произвольная дважды дифференцируемая функция, а $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_s)$ $(1\leq s<5)$ составляют ПСИ подгрупп группы Р(2,3).

Опуская довольно громоздкие вычисления, приводим редуцированные уравнения, полученные в результате подстановки функции (3.I.4) в уравнение (3.I.I). Рассматриваются только те подалгебры алгебр АР(2,2) и АР(2,3), для которых в § 4 главы II явно найдены ПСИ.

I.I. Редукция в пространстве М(2,2)

а) Подалгебры коразмерности I алгебры АР(2,2).

Основной инвариант подалгебры $L\subset$ АР(2,2) коразмерности I обозначим через ω. Тогда, в результате подстановки функции $u=\varphi(\omega)$, соответствующей алгебрам F_j (j = 5,6, 8,II,I7,I8,2I), K_3, K_{14}, уравнение (3.I.I) редуцируется к функциональному уравнению $F(\varphi)=0$.

Для остальных подалгебр этого класса получаем уравнение

$$k\ddot{\varphi}+\ell\frac{1}{\omega}\dot{\varphi}=F(\varphi,k(\dot{\varphi})^2), \tag{3.I.5}$$

где $k=\alpha^2-1$, $\ell=0$ для K_5, K_{10}; $k=\frac{1}{2}$, $\ell=0$ для

K_{22}; $k=1$, $\ell=3$ для F_{33}, K_{24}; $k=1$, $\ell=1$ для K_{23}.

б) Подалгебры коразмерности 2 алгебры AP(2,2).

В этом случае ПСИ состоит из двух основных инвариантов. Обозначим их через ω_1 и ω_2 в том порядке, в котором они заданы в § 4 главы II. Здесь и дальше $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}$, $\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$.

Подстановка $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, соответствующая алгебре F_1, редуцирует уравнение (3.I.I) к функциональному. Для остальных алгебр этого класса получаем такие уравнения:

$$\varphi_{11} + k\,\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \ell\,\omega_1^{-1}\varphi_1 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k\,\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=-1$, $\ell=1$ для F_4; $k=1+e$, $\ell=1$ для F_{15}; $k=e-1$, $\ell=1$ для F_{16}; $k=0$, $\ell=1$ для F_{19}; $k=0$, $\ell=3$ для F_{23}; $k=1$, $\ell=3$ для F_{24}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, K_{15}, K_{20}; $k=\alpha$, $\ell=3$ для F_{29}, F_{30}; $k=1$, $\ell=1$ для K_{13};

$$k\,\varphi_{12} = F(\varphi, k\,\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=1$ для F_{10}, K_2; $k=-1$ для K_{12};

$$\varphi_{11} + k\,\varphi_{22} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + k\,\omega_2^{-1}\varphi_2 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для F_{26}, $k=-1$ для F_{28};

$$\varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_1 =$$

$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 - 4\omega_1^2(\varphi_2)^2 + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } F_{27};$$

$$k(1-\omega_1^2)\varphi_{22} = F(\varphi, k(1-\omega_1^2)(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для K_7; $k=-1$ для K_4, K_9;

$$\varphi_{11} + k\varphi_{22} + 2\alpha\,\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2 + 2\alpha\,\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=1$ для K_{19}; $k=-1$ для K_{18};

$$\varphi_{11} + 2(\omega_2-2)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + (3-2\omega_2^{-1})\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 2(\omega_2-2)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } K_{16};$$

$$(\omega_2-1)\varphi_{11} + 2((\omega_2-1)^2+1)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 4(\omega_2-1)\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\omega_2-1)(\varphi_1)^2 + 2((\omega_2-1)^2+1)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \text{ для } K_{17};$$

$$\varphi_{11} + 8\varphi_{22} + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 =$$
$$= F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 8(\varphi_2)^2 + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \quad \text{для } K_{21}.$$

в) Подалгебры коразмерности 3 алгебры АР(2,2).

ПСИ таких алгебр состоит из трех основных инвариантов. Будем обозначать их через ω_1, ω_2, ω_3 в том порядке, в котором они приведены в § 4 предыдущей главы.

В результате подстановки $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, уравнение (3.I.I) редуцируется к ДУ в частных производных от трех переменных. Поскольку

$$\Box_{2,2} u = (\Box_{2,2}\omega^a \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}) + (\omega^a_{x_\mu}\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b},$$

$$(\nabla_{2,2} u)^2 = (\omega^a_{x_\mu}\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_b}, \quad \omega^\alpha_{x_\beta} = \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_\beta},$$

то для явного задания редуцированного уравнения нужно знать значения $\Box_{2,2}\omega^a$, $(\omega^a_{x_\mu}\omega^b_{x^\mu})$, т.е. достаточно указать явный вид полученного $\Box_{2,2} u$.

Ниже приведены значения $\square_{2,2} U$, полученные в результате симметрийной редукции для каждой из указанных алгебр.

F_2 : $\varphi_{11} + \omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1$;

F_3 : $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} - \omega_2^{-1}\varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + \omega_2^{-1}\varphi_2$;

F_7 : $\varphi_{11} - \varphi_{22} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2})\varphi_{33} + \omega_1^{-1}\varphi_1 - \omega_2^{-1}\varphi_2$;

F_9 : $\varphi_{11} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + \varphi_{23} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1$;

F_{12} : $\varphi_{11} + 4(2\omega_2 - \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1$;

F_{13} : $\varphi_{11} - 4(2\omega_2 + \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1$;

F_{14} : $\varphi_{11} + \varphi_{22} + (1-e)\omega_1^{-1}\varphi_{13} + (1+e)\omega_2^{-1}\varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + \omega_2^{-1}\varphi_2$;

F_{20} : $\varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 4e\,\omega_1^{-1}\varphi_{13} - 8\varphi_{23} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1$;

F_{22} : $\varphi_{11} - \varphi_{22} + [(1-e)^2\omega_1^{-2} - (1+e)^2\omega_2^{-2}]\varphi_{33} + \varphi_1 - \varphi_2$;

K_1 : $-(1+\omega_3)\varphi_{11} + \varphi_{23}$;

K_6 : $\varphi_{11} + (1-\omega_2^2)\varphi_{33} + 2\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_3\omega_1^{-1}\varphi_{13} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1$;

K_8 : $\varphi_{11} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{33} + 2\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 2\omega_3\omega_1^{-1}\varphi_{13} + 2\omega_1^{-1}\varphi_1$;

K_{11} : $\varphi_{11} + \omega_1^{-1}\varphi_{13} + \varphi_{23} + \omega_1^{-1}\varphi_1$.

Значения α , e , δ , во всех приведенных выше редуцированных уравнениях, те же, что и в теоремах 2.2.I, 2.2.2.

I.2. Редукция в пространстве M(2,3)

Здесь приводятся результаты, полученные для симметрийной редукции уравнения (3.I.I-3.I.3), соответствующей случаю подалгебр коразмерности I алгебры AP(2,3). Подстановка $u = \varphi(\omega)$ редуцирует исходное уравнение к обыкновенному ДУ (3.I.5), в котором $k=-1$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_j$ ($j = \overline{2,4}, \overline{7,11}, 14, 16, 17, 20, 21$); $k=-2\alpha$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_1$; $k=\beta(1-\beta)$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_5$, $k=-1$, $\ell=-1$ для $\mathcal{L}_6$; $k=\frac{1}{2}$, $\ell=1$ для $\mathcal{L}_{12}$; $k=1$, $\ell=4$ для $\mathcal{L}_{15}$, $\mathcal{L}_{18}$, $\mathcal{L}_{19}$, AO(2,3); $k=-\beta$, $\ell=0$ для $\mathcal{L}_{13}$.

Значения α и β те же, что и в леммах 2.3.I-2.3.7.

§ 2. О точных решениях нелинейных волновых уравнений в пространстве Минковского M(2,3)

Воспользуемся полученными в предыдущем параграфе результатами симметрийной редукции и укажем вид некоторых точных решений для следующих P(2,3)-инвариантных нелинейных волновых уравнений:

$$\Box_{2,3} u + \lambda u^m = 0 \qquad (m \neq 0,1) - \qquad (3.2.1)$$

уравнение Даламбера;

$$\Box_{2,3} u + \lambda e^u = 0 \quad - \qquad (3.2.2)$$

уравнение Лиувилля;

$$\Box_{2,3} u + \lambda \sin u = 0 \quad - \qquad (3.2.3)$$

уравнение Даламбера с нелинейностью $\sin u$;

$$(\nabla_{2,3} u)^2 = \lambda \quad - \qquad (3.2.4)$$

уравнение эйконала

(λ - ненулевой действительный параметр).

Отметим, что подобная задача для записанных выше уравнений в пространстве Минковского М(I,3) изучена в работах [60, 78,79,8I].

Решение уравнений (3.2.I-3.2.4) будем искать в виде

$$u = \varphi(\omega), \tag{3.2.5}$$

где ω является ПСИ некоторой подалгебры алгебры АР(2,3), а φ - неизвестная функция. Ограничимся случаем тех подалгебр коразмерности I алгебр АР(2,2) и АР(2,3), для которых редуцированное уравнение будет обыкновенным ДУ, т.е. алгебрами K_5 $(\alpha \neq 1)$, K_{10} $(\alpha \neq 1)$, K_{22}, F_{33}, K_{23}, K_{24}, $\mathcal{L}_1$ $(\alpha \neq 0)$, $\mathcal{L}_5$ $(\beta \neq 1)$, $\mathcal{L}_{13}$ $(\beta \neq 0)$ и всеми остальными подалгебрами коразмерности I алгебры АР(2,3).

а) Уравнение Даламбера.

В результате симметрийной редукции, соответствующей алгебрам, которые указаны выше, приходим к уравнению Эмдена-Фаулера

$$k\ddot{\varphi} + \ell\omega^{-1}\dot{\varphi} + \lambda\varphi^{m} = 0, \tag{3.2.6}$$

общее решение которого не выражается в конечном виде через элементарные функции [I2]. При $m=2$ и $m=3$, $\ell=0$ можно получить общее решение уравнения (3.2.6), выражающееся через эллиптические функции [27].

Ограничимся частным решением уравнения (3.2.6), задаваемым функцией

$$\varphi = \left(- \frac{2k(1+m)+2\ell(1-m)}{\lambda(1-m)^2}\,\omega^2 \right)^{\frac{1}{1-m}} \tag{3.2.7}$$

Подставив в выражение (3.2.7) вместо ω, k и ℓ их, известные для каждой из указанных алгебр, значения, получим 28 существенно различных точных решений уравнения (3.2.I).

б) Уравнение Лиувилля.

В результате симметрийной редукции, соответствующей алгебрам K_5, K_{10}, K_{22}, $\mathcal{L}_j$ ($j=\overline{1,5},\overline{7,11},13,14,16,17,20,21$), получаем уравнение

$$\ddot{\varphi}+\frac{\lambda}{k}e^{\varphi}=0. \tag{3.2.8}$$

В зависимости от значений $\frac{\lambda}{k}$ решением уравнения (3.2.8) будет одна из функций, записанных ниже (C_1 и C_2 - постоянные интегрирования):

Если $\frac{\lambda}{k}>0$, $C_1>0$, то

$$C_1 e^{-\varphi}=ch^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2C_1\lambda}{k}}(\omega-C_2)\right). \tag{3.2.9}$$

Если $\frac{\lambda}{k}<0$, то

$$C_1 e^{-\varphi}=sh^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1|\lambda|}{|k|}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega-C_2)\right),\ C_1>0,$$

$$C_1 e^{-\varphi}=sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1|\lambda|}{|k|}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega-C_2)\right),\ C_1<0, \tag{3.2.10}$$

$$e^{-\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{k}(\omega-C_2)^2,\qquad C_1=0.$$

В случае алгебр K_{23} и $\mathcal{L}_6$ получаем следующее редуцированное уравнение:

$$\omega\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}+\lambda_1\omega e^{\varphi}=0, \tag{3.2.11}$$

где $\lambda_1=\lambda$ для K_{23} и $\lambda_1=-\lambda$ для $\mathcal{L}_6$.

Решением уравнения (3.2.11) будет функция

$$\varphi=\ln\frac{8\mu C_1C_2}{\lambda_1\omega^2(C_1\omega^{\sqrt{\mu}}+C_2\omega^{-\sqrt{\mu}})^2},\quad \mu>0,\ C_1\cdot C_2\lambda>0,$$

$$\varphi = \ln \frac{-2C_2}{\lambda_1 \omega^2 (C_1 + C_2 \ln \omega)^2}, \quad \lambda_1 < 0,\ C_2 > 0, \tag{3.2.12}$$

$$\varphi = \ln \frac{2\mu (C_1^2 + C_2^2)}{\lambda_1 \omega^2 (C_1 \cos(\sqrt{-\mu} \ln \omega) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu} \ln(\omega)))^2}, \quad \mu, \lambda_1 < 0,$$

где μ, C_1, C_2 - постоянные интегрирования.

Наконец, для алгебр F_{33}, K_{24}, $\mathcal{L}_{12}$, $\mathcal{L}_{15}$, $\mathcal{L}_{18}$, $\mathcal{L}_{19}$, AO(2,3), редуцированное уравнение имеет следующий вид:

$$\omega \ddot{\varphi} + \frac{\ell}{k} \dot{\varphi} + \frac{\lambda}{k} e^{\varphi} = 0. \tag{3.2.13}$$

Общее решение уравнения (3.2.13) неизвестно [27]. Если $\left(\frac{\ell}{k} - 1\right)\frac{\lambda}{k} > 0$, то функция

$$\varphi = \ln \frac{2(\ell - k)}{\lambda \omega^2} \tag{3.2.14}$$

является одним из частных его решений.

Следовательно, для уравнения Лиувилля (3.2.2) получены решения (3.2.9), (3.2.10), (3.2.12), (3.2.14), где ℓ, k и ω известны для каждой из указанных алгебр.

в) Уравнение Даламбера с нелинейностью $\sin u$.

В результате симметрийной редукции уравнения (3.2.3), соответствующей алгебрам K_5, K_{10}, K_{22}, $\mathcal{L}_j$ ($j = \overline{1,5}, \overline{7,11}, 13, 14, 16, 17, 20, 21$), получаем уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{\lambda}{k} \sin \varphi = 0, \tag{3.2.15}$$

решение которого определяется интегралом [27]

$$\int \frac{d\varphi}{(\cos\varphi + C_1)^{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\, \omega + C_2. \tag{3.2.16}$$

В общем случае, интеграл, стоящий в левой части соотношения

(3.2.16), сводится к эллиптическому интегралу. Но если положить $C_1 = 1$, то получим следующее решение уравнения (3.2.15):

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\,\omega + C_2\right)\right) - \pi, \tag{3.2.17}$$

где C_2 постоянная интегрирования.

Подставив в функцию (3.2.17) вместо k и ω их известные значения для каждой из указанных алгебр, получим девятнадцать существенно различных точных решений уравнения (3.2.3).

г) Уравнение эйконала.

В результате симметрийной редукции уравнения (3.2.4), соответствующей всем указанным алгебрам, получаем уравнение

$$k(\dot{\varphi})^2 = 1,$$

общим решением которого является функция

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{k}}\,\omega + C, \tag{3.2.18}$$

где $1\,k > 0$, C – постоянная интегрирования. Подставив вместо k и ω их известные значения, получим двадцать восемь различных точных решений уравнения эйкрнала (3.2.4).

§ 3. Разделение переменных для уравнения Гельмгольца

Как было указано во введении, существует тесная связь метода разделения переменных с групповыми свойствами ДУ. Эта связь состоит в том, что решение в разделенных переменных является собственной функцией некоторого набора операторов симметрии данного уравнения. Постулируя это свойство, дадим следующее определение решения в разделенных переменных.

Пусть

$$Lu = 0 - \qquad (3.3.I)$$

линейное ДУ, где оператор L и функция $u = u(x)$ определены в n -мерном пространстве $\mathfrak{M}$.

Определение 3.3.I. Функция $u = u(x)$ называется решением в разделенных переменных уравнения (3.3.I), если она дополнительно удовлетворяет следующему условию:

$$Q_i u = \lambda_i u, \qquad (3.3.2)$$

где Q_i образуют базис ($n-1$-)-мерной абелевой подалгебры алгебры симметрии данного уравнения.

Ограничимся только локальными операторами симметрии, а также будем требовать, чтобы ранг абелевой алгебры совпадал с размерностью.

Рассмотрим обобщенное уравнение Гельмгольца

$$u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - \ldots - u_{n+2,n+2} + m^2 u = 0 \qquad (3.3.3)$$

при $n=2$ и $n=3$.

Алгебра Ли AP(2, n) с образующими вида (2.I.I) является алгеброй симметрии уравнения (3.3.3). Поэтому условию (3.3.2) соответствует система линейных ДУ в частных производных первого порядка, решением которой будет функция

$$u(x) = f_1(\theta_1) f_2(\theta_2) \ldots f_{n-1}(\theta_{n-1})\, \varphi(\theta_n), \qquad (3.3.4)$$

где $f = f_1 f_2 \ldots f_{n-1}$ и θ_i - известные функции, а функцию φ нужно еще определить.

Для того чтобы найти функцию φ , подставляем значение функции (3.3.4) в исходное уравнение (3.3.3). В результате такой редукции, получим обыкновенное ДУ для функции $\varphi(\theta_n)$.

Чтобы получить в явном виде решение в разделенных переменных для уравнения (3.3.3), нужно подставить в выражение (3.3.4) найденное значение функции φ .

3.I. Разделение переменных в пространстве M(2,2)

Рассмотрим уравнение (3.3.3) для $n=2$. Решетка подалгебр AP(2,2) приведена в § 2 главы I. Учитывая сказанное выше, будем рассматривать следующие трехмерные абелевые алгебры: $F_{1.11}$, $F_{1.12}$, $F_{1.13}$, $F_{5,4}$, $F_{6,4}$, $F_{11,7}$, $F_{14,3}$, $F_{15,4}$, $F_{17,2}$, $\tilde{\tilde{F}}_{2,6}$, $\hat{F}_{5,4}$, $\hat{F}_{6,4}$, $\hat{F}^{a}_{17,4} = \langle B_1 - B_3 + \alpha(P_2 - P_4), C_1 - C_3 + P_2 + P_4, P_1 - P_3 \rangle$ ($\alpha \in R$).

Поскольку разделение переменных для каждой из алгебр проводится аналогично, более подробно рассмотрим случай алгебры $F_{17,2} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, P_1 - P_3 \rangle$. Согласно представлению (2.I.I), условие (3.3.2) имеет следующий вид:

$$\left[\tfrac{1}{2}(x_2 - x_4)(\partial_1 - \partial_3) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 + \partial_4)\right]u = \lambda_1 u,$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(x_2 + x_4)(\partial_1 + \partial_3) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 - \partial_4)\right]u = \lambda_2 u, \tag{3.3.5}$$

$$[\partial_1 - \partial_3]u = \lambda_3 u.$$

Решением системы (3.3.5) будет функция

$$u = \exp\left\{\frac{\lambda_3}{2}\left(x_1 - x_3 + \frac{x_2^2 - x_4^2}{x_1 + x_3}\right) - \frac{1}{x_1 + x_3}\left(\lambda_1(x_2 + x_4) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_2(x_2 - x_4)\right)\right\} \cdot \varphi(x_1 + x_3). \tag{3.3.6}$$

Фактически получено решение в разделенных переменных для уравнения (3.3.3), в котором неизвестна функция φ . Чтобы ее определить, подставим найденную функцию (3.3.6) в исходное уравнение (3.3.3). В результате такой редукции, получаем следующее ДУ:

$$2\lambda_3 \dot{\varphi} + \left(m^2 + \frac{2\lambda_3}{\xi} + \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\xi^2} \right) \varphi = 0 \qquad (3.3.7)$$

где $\varphi = \varphi(\xi)$, $\xi = x_1 + x_3$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\xi}$.

Подставив решение уравнения (3.3.7) в значение функции (3.3.6), получаем явный вид решения в разделенных переменных для уравнения (3.3.3) в случае алгебры $F_{17,2}$.

В таблице I указан общий вид функции (3.3.4) для каждой из перечисленных выше трехмерной абелевой подалгебры алгебры AP(2,2).

ТАБЛИЦА I. Функция $u = f \cdot \varphi(\xi)$ в пространстве M(2,2)

№	Алгебра	f	ξ
1	$F_{1,11}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3\}$	x_4
2	$F_{1,12}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4\}$	x_2
3	$F_{1,13}$	$\exp\{\lambda_1 x_1 + \frac{\lambda_2}{2}(x_2 + x_4) + \lambda_3 x_3\}$	$x_2 - x_4$
4	$F_{5,4}$	$\exp\{-\lambda_1 \frac{x_2}{\xi} + \frac{\lambda_2}{2}(x_1 - x_3 + \frac{x_2^2}{\xi}) + \lambda_3 x_4\}$	$x_1 + x_3$
5	$F_{6,4}$	$\exp\{-\lambda_1 \frac{x_4}{\xi} + \frac{\lambda_2}{2}(x_1 - x_3 - \frac{x_4^2}{\xi}) + \lambda_3 x_2\}$	$x_1 + x_3$
6	$F_{11,7}$	$(x_1 - x_3)^{\lambda_1} \exp\{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_4\}$	$x_1^2 - x_3^2$

ТАБЛИЦА I (окончание)

7	$F_{14,3}$	$\exp\{\lambda_1 \operatorname{arctg}\frac{x_4}{x_3} + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2\}$	$x_3^2+x_4^2$
8	$F_{15,4}$	$\exp\{\lambda_1 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4\}$	$x_1^2+x_2^2$
9	$F_{17,2}$	$\exp\{\xi^{-1}(-\lambda_1(x_2+x_4)-\lambda_2(x_2-x_4)) + \frac{\lambda_3}{2}((x_1-x_3)+(x_2^2-x_4^2)\xi^{-1})\}$	x_1+x_3
10	$\tilde{F}_{2,6}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)-\lambda_2 x_3-\frac{\lambda_2}{2}(x_1+x_3)\xi + \frac{\lambda_3}{2}(x_2+x_4)+\frac{\lambda_3}{4}(x_1+x_3)^2\}$	x_2-x_4
11	$\tilde{F}_{5,4}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)+\lambda_2 x_1-\lambda_2 x_2(x_1+x_3) - \frac{\lambda_2}{3}(x_1+x_3)^3+\lambda_3 x_4\}$	$2x_2+(x_1+x_3)^2$
12	$\tilde{F}_{6,4}$	$\exp\{\lambda_1(x_1+x_3)+\lambda_2 x_4(x_1+x_3)-\lambda_2 x_3 + \frac{\lambda_2}{3}(x_1+x_3)^3+\lambda_3 x_2\}$	$2x_4+(x_1+x_3)^2$
13	$\hat{F}_{17,4}^{\alpha}$, $\alpha\in R$	$\exp\{-\lambda_1\xi^{-1}(x_2+x_4)+2\lambda_1(4\alpha-\xi^2)^{-1}(x_2-x_4) + 4\alpha\lambda_1\xi^{-1}(4\alpha-\xi^2)^{-1}(x_2+x_4)+\lambda_2(4\alpha-\xi^2)^{-1}\times (\xi(x_2-x_4)+2\alpha(x_2+x_4))+\frac{\lambda_3}{2}(x_1-x_3) + \frac{\lambda_3}{2}\xi^{-1}(x_2^2-x_4^2)+\alpha\lambda_3(2\xi^2)^{-1}(x_2+x_4)^2 - \lambda_3(2\xi^2(4\alpha-\xi^2))^{-1}(\xi(x_2-x_4) + 2\alpha(x_2+x_4))^2\}$	x_1+x_3

В результате редукции исходного уравнения (3.3.3), в случае алгебр $F_{1,13}$, $F_{5,4}$, $F_{6,4}$, $F_{17,2}$, $\hat{F}_{2,6}$, приходим к уравнению

$$\rho\dot{\varphi}+(\delta+\mu_1\xi+\mu_2\xi^{-1}+\mu_3\xi^{-2})\varphi=0, \qquad (3.3.8)$$

где значения ρ, δ, μ_1, μ_2, μ_3 для каждой из указанных алгебр приведены в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Редукция уравнения (3.3.3) к уравнению

$$\rho\dot{\varphi}+(\delta+\mu_1\xi+\mu_2\xi^{-1}+\mu_3\xi^{-2})\varphi=0 .$$

№	Алгебра	ρ	δ	μ_1	μ_2	μ_3
1	$F_{1,13}$	$2\lambda_2$	$\lambda_1^2-\lambda_3^2+m^2$	0	0	0
2	$F_{5,4}$	$2\lambda_2$	$m^2-\lambda_3^2$	0	λ_2	λ_1^2
3	$F_{6,4}$	$2\lambda_2$	$m^2+\lambda_3^2$	0	λ_2	$-\lambda_1^2$
4	$F_{17,2}$	$2\lambda_3$	m^2	0	$2\lambda_3$	$4\lambda_1\lambda_2$
5	$\hat{F}_{2,6}$	$2\lambda_3$	$m^2+2\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2$	$-\lambda_2^2$	0	0

Для алгебры $\hat{F}^{a}_{17,4}$ получаем следующее уравнение:

$$2\lambda_3\dot{\varphi}+(m-2\lambda_3\xi(4\alpha-\xi^2)^{-1}+4\lambda_1\lambda_2(4\alpha+\xi^2)(4\alpha-\xi^2)^{-1}+$$

$$+8(\alpha\lambda_2^2+\lambda_1^2)\xi(4\alpha-\xi^2)^{-2})\varphi=0. \qquad (3.3.9)$$

Случаи остальных алгебр приводят к обыкновенным ДУ второго порядка. Эти результаты сведены в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3. Редукция уравнения (3.3.3) к обыкновенному ДУ второго порядка.

№	Алгебра	Уравнение	μ
1	$F_{1,11}$ $F_{1,12}$	$\ddot{\varphi} + \mu\varphi = 0$	$\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - m^2$ $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + m^2$
2	$\tilde{F}_{5,4}$ $\tilde{F}_{6,4}$	$\ddot{\varphi} + (\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi)\varphi = 0$	$\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 + m^2$ $\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 - m^2$
3	$F_{11,7}$	$\xi\ddot{\varphi} + (1+\lambda_1)\dot{\varphi} + \frac{\mu}{4}\varphi = 0$	$\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + m^2$
4	$F_{14,3}$ $F_{15,4}$	$\xi^2\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} + (\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu}{4}\xi)\varphi = 0$	$-\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - m^2$ $m^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$

Анализ и решение полученных для определения φ уравнений будут проведены ниже.

3.2. Разделение переменных в пространстве M(2,3)

Рассмотрим уравнение (3.3.3) при $n = 3$. Решетка подалгебр алгебры AP(2,3) приведена в § 3 главы I и в приложениях I и 2. Сначала остановимся на тех четырехмерных абелевых подалгебрах алгебры AP(2,3), которые являются подалгебрами алгебры AP(2,2) $\oplus$ $\langle P_5 \rangle$, т.е. представимы в виде

$$L \oplus \langle P_5 \rangle, \tag{3.3.10}$$

где L - трехмерная абелевая подалгебра алгебры AP(2,2).

Для каждой из алгебр вида (3.3.10), условием (3.3.2) будет система, соответствующая алгебре L, дополненная уравнением

$$[\partial_5]\, u = \lambda_4 u. \qquad (3.3.11)$$

Поэтому, решение в разделенных переменных в этом случае имеет вид

$$u = \exp(\lambda_4 x_5) \cdot f \cdot \varphi(\xi), \qquad (3.3.12)$$

где f и ξ известны и приведены в таблице I. Функция (3.3.12) является следствием того, что оператор симметрии P_5 действует в пространстве M(2,2) первых четырех независимых переменных как нулевой оператор.

Обозначим алгебры вида (3.3.10) через S_i ($i = \overline{1,13}$), где i - номер строки таблицы I, в которую помещена некоторая соответствующая S_i трехмерная абелевая подалгебра алгебры AP(2,2). Тогда, в функцию (3.3.12), соответствующую алгебре S_i, подставляем значения f и ξ с i-той строки таблицы I. В соответствии с этим получаем и редуцированные уравнения для определения φ.

Для алгебр S_3, S_4, S_5, S_9, S_{10} этим уравнением будет уравнение (3.3.8), в котором вместо δ берем $\delta - \lambda_4^2$; для алгебры S_{13} - уравнение (3.3.9), где в коэффициенте при φ добавлено $-\lambda_4^2$. Наконец, для остальных алгебр получены обыкновенные ДУ второго порядка из таблицы 3, а именно: первое для S_1 и S_2, второе для S_{11} и S_{12}, третье для S_6 и четвертое для S_7, S_8. Во всех этих уравнениях вместо μ берем $\mu + \epsilon \lambda_4^2$, где $\epsilon = 1$ для S_1, S_7, S_{12}, и $\epsilon = -1$ для S_2, S_6, S_8, S_{11}.

Кроме алгебр вида (3.3.14) рассмотрим остальные четырехмерные абелевые подалгебры алгебры AP(2,3):

$L_1 = \langle H_3, H_4, P_2, N_1 \rangle$; $L_2 = \langle H_2, H_3, H_4, N_1 \rangle$;

$L_3 = \langle H_3, H_4 + P_4, P_2, N_1 \rangle$; $L_4 = \langle H_2, H_3 + P_3, H_4 + \beta P_4, N_1 \rangle$;

$L_5 = \langle H_2 + H_4 + N_3, H_3, N_1, N_2 \rangle$;

$L_6 = \langle H_2 + H_4 - 2P_3, H_3 + N_3, N_1, N_2 \rangle$;

$L_7 = \langle H_2 + P_4, H_3 + \gamma P_3 + \alpha P_4, H_4 - P_2 + \alpha P_3 + \beta P_4, N_1 \rangle$;

где $\beta \in R$, $\alpha, \gamma \geq 0$, $H_a = J_{1a} - J_{a5}$ ($a = 2,3,4$);
$N_1 = P_1 + P_5$, $N_2 = P_2 + P_4$, $N_3 = P_2 - P_4$, $L_i \notin AP(2,2) \oplus \langle P_5 \rangle$ ($i = \overline{1,7}$).

В таблице 4 приведен явный вид функции $u = f \cdot \varphi(\xi)$ для каждой из алгебр L_i ($i = \overline{1,7}$).

ТАБЛИЦА 4. Вид функции $u = f \cdot \varphi(\xi)$ в M(2,3), $\xi = x_1 - x_5$.

№	Алгебра	f
1	L_1	$\exp\{\xi^{-1}(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4) + \lambda_3 x_2 + \frac{\lambda_4}{2}(x_1 + x_5) - \frac{\lambda_4}{2}(x_3^2 + x_4^2)\xi^{-1}\}$
2	L_2	$\exp\{\xi^{-1}(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 + \frac{\lambda_4}{2}(x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)) + \frac{\lambda_4}{2}(x_1 + x_5)\}$
3	L_3	$\exp\{\lambda_1 \xi^{-1} x_3 + \lambda_2 (1+\xi)^{-1} x_4 + \lambda_3 x_2 + \frac{\lambda_4}{2} \times (x_1 + x_5 - x_3^2 \xi^{-1} - x_4^2 (1+\xi)^{-1})\}$

ТАБЛИЦА 4 (окончание).

4	L_4	$\exp\{\lambda_1 \xi^{-1} x_2 + \lambda_2 (1+\xi)^{-1} x_3 + \lambda_3 (\beta+\xi)^{-1} x_4 + \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_5 + x_2^2 \xi^{-1} - x_3^2 (1+\xi)^{-1} - x_4^2 (\beta+\xi)^{-1})\}$
5	L_5	$\exp\{ \frac{1}{2} (\lambda_1 (x_2 - x_4) + \lambda_4 ((x_2 + x_4) - \xi (x_2 - x_4))) + \lambda_2 x_3 \xi^{-1} + \frac{\lambda_3}{2} (x_1 + x_5) + \frac{\lambda_3}{4} (x_2 - x_4)^2 - \lambda_3 (2\xi)^{-1} x_3^2 \}$
6	L_6	$\exp\{ -\frac{\lambda_1}{2} x_3 + \frac{\lambda_1}{4} (x_2 - x_4) \xi + \frac{\lambda_2}{2} (x_2 - x_4) + \frac{\lambda_3}{2} (x_1 + x_3) - \frac{\lambda_3}{2} x_3 (x_2 - x_4) + \frac{\lambda_3}{8} (x_2 - x_4)^2 \xi + \frac{\lambda_4}{2} (x_2 + x_4) + \frac{\lambda_4}{2} x_3 \xi - \frac{\lambda_4}{4} (x_2 - x_4) \xi^2 \}$
7	L_7	$\exp\{ \lambda_1 \xi^{-1} x_2 (1 - \theta^{-1} (\xi + \gamma)) + \lambda_1 \theta^{-1} (\xi + \gamma) x_4 - \alpha \lambda_1 \theta^{-1} x_3 + \lambda_3 \theta^{-1} ((\gamma + \xi) \xi x_4 - (\gamma + \xi) x_2 - \alpha \xi x_3) + \lambda_2 (\gamma + \xi)^{-1} x_3 (1 + \alpha^2 \xi \theta^{-1}) - \alpha \lambda_2 \theta^{-1} (x_4 \xi - x_2) + \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_5) + \lambda_4 (2\xi)^{-1} x_2^2 - \lambda_4 (2(\gamma + \xi))^{-1} \times (1 + \alpha^2 \xi \theta^{-1}) x_3^2 - \lambda_4 (2\xi\theta)^{-1} (\gamma + \xi) (x_4 \xi - x_2)^2 + \alpha \lambda_4 \theta^{-1} x_3 (x_4 \xi - x_2) \}$ $\theta = (\gamma + \xi)(\xi(\beta + \xi) + 1) - \alpha^2 \xi$

Алгебрам L_1, L_2, L_5 и L_6 соответствует следующее обыкновенное ДУ первого порядка для определения функции φ:

$$h\dot{\varphi} + (\delta + \rho_1 \xi + \rho_2 \xi^2 + \mu_1 \xi^{-1} + \mu_2 \xi^{-2})\varphi = 0 \qquad (3.3.13)$$

где значения h, δ, ρ_i, μ_i ($i = 1,2$) приведены в таблице 5.

ТАБЛИЦА 5. Уравнение (3.3.13).

Алгебра	h	δ	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2
L_1	$2\lambda_4$	$m+\lambda_3^2$	0	0	$2\lambda_4$	$-\lambda_1^2-\lambda_2^2$
L_2	$2\lambda_4$	m	0	0	$3\lambda_4$	$\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2$
L_5	$2\lambda_3$	$m+\lambda_1\lambda_4$	$-\lambda_4^2$	0	λ_3	$-\lambda_2^2$
L_6	$2\lambda_3$	$m^2+\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_4-\frac{\lambda_1^2}{4}$	$\lambda_1\lambda_4$	$-\frac{3}{4}\lambda_4^2$	0	0

Для алгебры L_3 получаем уравнение

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (\delta + \lambda_4(\xi^{-1} + (1+\xi)^{-1}) - \lambda_1^2\xi^{-2} - \lambda_2^2(1+\xi)^{-2})\varphi = 0, \qquad (3.3.14)$$

где $\delta = m + \lambda_3^2$;

для алгебры L_4 -

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (m + 3\lambda_4\xi^{-1} + \lambda_1^2\xi^{-2} - \lambda_2^2(1+\xi)^{-2} - \lambda_3^2(\beta+\xi)^{-2})\varphi = 0; \qquad (3.3.15)$$

и, наконец, для алгебры L_7 -

$$2\lambda_4\dot{\varphi} + (m^2 + \lambda_4 q_1(\xi) + \lambda_1^2 q_2(\xi) + \lambda_2^2 q_3(\xi) + \lambda_3^2 q_4(\xi) +$$

$$+ 2\alpha\lambda_1\lambda_2 q_5(\xi) - 2\lambda_1\lambda_3 q_6(\xi) - 2\alpha\lambda_2\lambda_3 q_7(\xi))\varphi = 0, \qquad (3.3.16)$$

где $q_1(\xi)=\xi^{-1}-(\theta\xi)^{-1}(\gamma+\xi)+(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})(\gamma+\xi)^{-1}+(\gamma+\xi)\xi\theta^{-1}$;

$q_2(\xi)=\xi^{-2}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1})^2-(\gamma+\xi)^2\theta^{-2}-\alpha^2\theta^{-2}$;

$q_3(\xi)=\alpha^2(1-\alpha^2\xi^2)\theta^{-2}-(\gamma+\xi)^{-2}(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})^2$;

$q_4(\xi)=\theta^{-2}(\gamma+\xi)^2(1-\xi^2)-\alpha^2\xi^2\theta^{-2}$;

$q_5(\xi)=\xi^{-1}\theta^{-1}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1})+\xi(\gamma+\xi)\theta^{-2}+(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})\theta^{-1}(\gamma+\xi)^{-1}$;

$q_6(\xi)=(\gamma+\xi)\xi^{-1}\theta^{-1}(1-(\gamma+\xi)\theta^{-1})+\xi\theta^{-2}((\gamma+\xi)^2+\alpha^2)$;

$q_7(\xi)=(\gamma+\xi)\theta^{-2}-(\gamma+\xi)\xi^2\theta^{-2}-\xi(\gamma+\xi)^{-1}\theta^{-1}(1+\alpha^2\xi\theta^{-1})$.

3.3. Анализ и решение полученных уравнений

Все полученные обыкновенные ДУ первого порядка интегрируются в квадратурах. В общем случае их можно записать как следующее уравнение:

$$\rho\dot{\varphi}+g(\xi)\varphi=0, \qquad (3.3.17)$$

где ρ - числовой параметр, $g(\xi)$ - известная рациональная функция от ξ .

В зависимости от значений ρ и $g(\xi)$, уравнение (3.2.17) имеет следующие решения:

I) $\rho\equiv 0$, $g(\xi)\equiv 0$, φ - произвольная функция ξ ;

2) $\rho\equiv 0$, $g(\xi)\neq 0$, $\varphi=0$;

3) $\rho\neq 0$, $g(\xi)\equiv 0$, $\varphi=const$;

4) $\rho\cdot g(\xi)\neq 0$, $\varphi=-\frac{1}{\rho}J+C$, (3.3.18)

где $J=\int g(\xi)\,d\xi$, а C - постоянная интегрирования. В таблице 6 приведены значения J для всех полученных обыкновенных ДУ первого порядка, кроме уравнения (3.3.I6).

ТАБЛИЦА 6. Значения J в решениях (3.3.I8).

ДУ	J
(3.3.8)	$\delta\xi+\frac{1}{2}\mu_1\xi^2+\mu_2\ln\|\xi\|-\mu_3\xi^{-1}$
(3.3.9)	$m\xi+\lambda_3\ln\|4\alpha-\xi^2\|+4(\alpha\lambda_2^2+\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2\xi)(4\alpha-\xi^2)$
(3.3.I3)	$\delta\xi+\frac{\delta_1}{2}\xi^2+\frac{\delta_2}{3}\xi^3+\mu_1\ln\|\xi\|-\mu_2\xi^{-1}$
(3.3.I4)	$\delta\xi+\lambda_4\ln\|\xi(1+\xi)\|+\lambda_1^2\xi^{-1}+\lambda_2^2(1+\xi)^{-1}$
(3.3.I5)	$m\xi+3\lambda_4\ln\|\xi\|-\frac{\lambda_1^2}{\xi}+\frac{\lambda_2^2}{1+\xi}+\frac{\lambda_3}{\beta+\xi}$

Для уравнения (3.3.I6)

$$J=m^2\xi+\lambda_4J_1+\lambda_1^2J_2+\lambda_2^2J_3+\lambda_3^2J_4+2\alpha\lambda_1\lambda_2J_5-2\lambda_1\lambda_2J_6-2\alpha\lambda_2\lambda_3J_7,$$

где $J_i=\int q_i(\xi)\,d\xi \quad (i=\overline{1,7})$.

Поскольку значения J зависят от значений γ , β и α, а также очень громоздки, приведем в явном виде одно из них, а именно то, которое получается при $\gamma=\beta=0$, $|\alpha|>1$.

$$J=m^2\xi+\lambda_4\ln|\theta|+\lambda_1^2(\theta^{-1}-\xi^{-1})+\lambda_2^2(\xi^{-1}+\alpha^2\theta^{-1})+\lambda_3^2\xi(\xi^2+1-\alpha^2)^{-1}-$$

$$-2\alpha\lambda_1\lambda_2\theta^{-1}-2\lambda_1\lambda_2\ln|\xi^2+(1-\alpha^2)|+2\alpha\lambda_2\lambda_3\ln|\xi^2+(1-\alpha^2)|.$$

Обыкновенные ДУ второго порядка приведены в таблице 3. Проанализируем их и укажем решения.

$$\ddot{\varphi}+\mu\varphi=0. \tag{3.3.I9}$$

$$\varphi = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \xi \sqrt{|\mu|} + C_2 \operatorname{sh} \xi \sqrt{|\mu|} & \text{при } \mu < 0, \\ C_1 + C_2 \xi & \text{при } \mu = 0, \\ C_1 \cos \xi \sqrt{\mu} + C_2 \sin \xi \sqrt{\mu} & \text{при } \mu > 0, \end{cases} \tag{3.3.20}$$

C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi\right)\varphi = 0. \tag{3.3.21}$$

Если $\lambda_2 = 0$, то имеем предыдущий случай и решение имеет вид (3.3.20).

Если $\lambda_2 \neq 0$, то решение уравнения выражается через цилиндрическую функцию (функции Бесселя) [27]

$$\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\xi}\; Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{3\lambda_2^2}\left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda_2^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{3.3.22}$$

$$\xi\ddot{\varphi} + (1 + \lambda_1)\dot{\varphi} + \frac{\mu}{4}\varphi = 0. \tag{3.3.23}$$

Если $\mu = 0$, то

$$\varphi = \begin{cases} C_2 + C_1 \xi^{-\lambda_1} & \text{при } \lambda_1 \neq 0, \\ C_2 + C_1 \ln|\xi| & \text{при } \lambda_1 = 0. \end{cases} \tag{3.3.24}$$

Если $\mu \neq 0$, то исходное уравнение является уравнением типа Бесселя, и его решением является цилиндрическая функция [27]

$$\varphi = \xi^{-\frac{\lambda_1}{2}} Z_{\sqrt{\lambda_1^2}}(\sqrt{\mu}\,\xi). \tag{3.3.25}$$

$$\xi^2\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\mu}{4}\xi\right)\varphi = 0. \tag{3.3.26}$$

Если $\frac{\mu}{4} = 0$, (3.3.26) является уравнением Эйлера, решением которого есть

$$\varphi=\begin{cases} C_1+C_2\ln|\xi| & \text{при}\quad \frac{\lambda_1^2}{4}=0 \\ C_1\sin\left(\frac{\lambda_1^2}{4}\ln|\xi|\right)+C_2\cos\left(\frac{\lambda_1^2}{4}\ln|\xi|\right) & \text{при}\quad \frac{\lambda_1^2}{4}>0 \end{cases} \qquad (3.3.27)$$

Если $\frac{\mu}{4}\neq 0$, то уравнение (3.3.26) является уравнением типа Бесселя и его решением будет цилиндрическая функция [27]

$$\varphi = Z_{\sqrt{-\lambda_1^2}}\,(\sqrt{\mu}\,\xi\,). \qquad (3.3.28)$$

Отметим, что если ДУ (3.3.19) имеет решение, выражающееся через элементарные функции (3.3.20), то уравнения (3.3.21), (3.3.23),(3.3.26) наряду с решениями в элементарных функциях имеют решения, выражающиеся через функции Бесселя (3.3.22), (3.3.25),(3.3.28).

Подставив найденные значения функции φ в соответствующие выражения для функции $U(x)$, получим решения в разделенных переменных для уравнения Гельмгольца в пространствах M(2,2) и M(2,3).

§ 4. О точных решениях одной релятивистски-инвариантной системы ДУ

Рассмотрим следующую систему ДУ:

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ (\nabla u)^2 = -1, \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

где $\Box u = u_{11}-u_{22}-u_{33}-u_{44}$, $(\nabla u)^2=(u_1)^2-(u_2)^2-(u_3)^2-(u_4)^2$, $u = u(x)$, $x\in$ M(1,3). Система (3.4.1) встречается при исследовании уравнений Дирака [80] и Даламбера [63] .

Решение этой системы будем искать в виде неявной функции

$$W(u,x)=0, \tag{3.4.2}$$

где W - произвольная дважды дифференцируемая функция.

Предложение 3.4.I. Если $W_u \neq 0$, то система (3.4.I) на множестве решений (3.4.2) равносильна системе

$$\begin{cases} W_{uu} + \Box W = 0, \\ (W_u)^2 + (\nabla W)^2 = 0. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Доказательство предложения 3.4.I непосредственно следует из правил дифференцирования неявной функции.

Алгебра AP(2,3), реализованная в виде следующих дифференциальных операторов:

$$J_{u1} = u\partial_1 - x_1\partial_u, \quad J_{ua} = u\partial_a + x_a\partial_u,$$

$$J_{1a} = x_1\partial_a + x_a\partial_1, \quad J_{ab} = -x_a\partial_b + x_b\partial_a, \tag{3.4.4}$$

$$P_u = \partial_u, \ P_i = \partial_i, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = \overline{1,4}, \ a, b = \overline{2,4};$$

является алгеброй симметрии системы (3.4.3). Будем искать решения системы (3.4.3) в виде функций

$$W = \varphi(\omega), \tag{3.4.5}$$

где $\omega = \omega(u,x)$ - известная функция, являющаяся инвариантом некоторой подалгебры коразмерности I алгебры AP(2,3), а функция φ подлежит определению.

Инварианты подалгебр коразмерности I алгебр AP(2,2) и AP(2,3) найдены в главе II для реализации (2.I.I). Чтобы воспользоваться полученными инвариантами, а также результатами симметрийной редукции, установим между переменными "старой" и "новой" реализации следующее соответствие:

$$x_1 \to x_1\,,\ x_2 \to u\,,\ x_3 \to x_2\,,\ x_4 \to x_3\,,\ x_5 \to x_4. \qquad (3.4.6)$$

Ограничиваясь тем случаем симметрийной редукции из § I настоящей главы, при котором произвольная дважды дифференцируемая функция $\varphi(\omega)$ является решением системы (3.4.3), можем сделать следующий вывод. Решением системы (3.4.3) является функция

$$W = \varphi(\omega), \qquad (3.4.6)$$

где φ - произвольная дважды дифференцируемая функция, а ω совпадает с одной из следующих функций:

$$(u-x_3)(x_1-x_2);\ (u-x_3)(x_1+x_2)^{-1};\ (u-x_3)^2+(x_1-x_2)^2;$$
$$2\ln(u-x_3)+(x_1-x_2)(u-x_3)^{-1};\ (u-x_3)^{1+e}(x_1-x_2)^{1-e};$$
$$(u+x_3)^{1+e}(x_1-x_2)^{e-1};\quad \operatorname{arctg}\left((u+x_3)(x_1-x_2)^{-1}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\ln\left((u+x_3)^2+(x_1-x_2)^2\right);\ 2(u+x_3)+(x_1+x_2)^2;$$
$$-2(u-x_3)+(x_1+x_2)^2;\quad u-x_3-\ln(x_1-x_2);$$
$$2(u-x_3)+(x_1+x_2)^2;\ u+x_3-(x_1-x_4)x_2+\frac{1}{4}(u-x_3)\times$$
$$\times(x_1-x_4)^2-\frac{1}{12}\beta(x_1-x_4)^3;\ \alpha\ln(x_1-x_4)+\frac{1}{2}(u+x_3)(x_1-x_4)^{-1}-$$
$$-x_2+\frac{1}{2}(u-x_3)(x_1-x_4);\ x_1+x_4-x_2(u-x_3)-\underline{\frac{1}{2}(x_1-x_4)+}$$
$$+\frac{1}{4}(x_1-x_4)(u-x_3)^2-\frac{\gamma}{12}(u-x_3)^3+\frac{1}{32}(u-x_3)^4.$$

Здесь $0<e<1$, $0<|\alpha|<1$, $\beta,\ \gamma\in R$, $\alpha>0$.

Приравняв правую часть выражения (3.4.6) нулю, получим некоторое множество точных решений исходной системы (3.4.I).