Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ЛАГНО Віктор Іванович

УДК 517.95

РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГЕБР ЛІ ГРУП ЛОКАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ГРУПОВИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Наукові консультанти
академік НАН України,
доктор фіз.–мат. наук, професор
САМОЙЛЕНКО
Анатолій Михайлович
член–кореспондент НАН України,
доктор фіз.–мат. наук, професор
$\boxed{\textbf{ФУЩИЧ Вільгельм Ілліч}}$

Київ — 2003

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. Вирішення багатьох фундаментальних проблем різної природи потребує побудови і розв'язування математичних моделей процесів, що досліджуються. У багатьох випадках поняттю математична модель процесу відповідають деякі цілком визначені диференціальні рівняння, відомі розв'язки яких дозволяють з певною точністю описати даний процес. Як правило, диференціальні рівняння і додаткові умови (початкові, крайові) випливають як із загальних законів (наприклад, законів зберігання), так і зі специфічних законів, які притаманні кожному конкретному процесові (вони відображають його найбільш характерні риси). Найбільш прості і, в той же час, найменш точні формулювання законів приводять до лінійних задач. Але досить часто опис процесів в термінах лінійних рівнянь є незадовільним, оскільки відповідна математична модель "не відчуває" більш тонких (нелінійних) ефектів, які притаманні досліджуваному процесу. Класичним прикладом цього є солітонні рівняння, що описують суттєво нелінійний ефект фазового зсуву взаємодіючих солітонних розв'язків. Отже наступному (більш точному) наближенню реального процесу відповідає нелінійна математична модель, для дослідження якої (на відміну від лінійних моделей) в арсеналі дослідника є у наявності досить обмежений математичний апарат.

У той же час, точні розв'язки (в замкненому вигляді) диференціальних рівнянь завжди відігравали і продовжують відігравати велику роль у формуванні правильного розуміння якісних особливостей багатьох явищ і процесів в різних областях природознавства. Точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі таких складних нелінійних ефектів, як просторова локалізація процесів перенесення, множинність або відсутність стаціонарних станів при певних умовах, існування режимів із загостренням тощо. Навіть ті частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які не мають ясного фізичного змісту, можуть бути використаними в якості "тестових" задач під час перевірки коректності та оцінки точності різних числових, асимптотичних та наближених аналітичних методів. Окрім цього, модельні рівняння і задачі, які допускають точні розв'язки, служать основою для розробки нових числових, асимптотичних та наближених методів, які, у свою чергу, дозволяють досліжувати вже більш складні задачі, що не мають точного аналітичного розв'язку.

Більшість рівнянь прикладної та теоретичної фізики, хімії, біології містять параметри або функції, які знаходяться експериментально і тому не є строго фіксованими. У той же час, рівняння, які моделюють реальні явища та процеси, повинні бути досить простими для того, щоб їх можна було успішно проаналізувати та розв'язати. В якості одного із можливих критеріїв простоти можна взяти вимогу, щоб модельне рівняння допускало розв'язок у замкненому вигляді. З іншого ж боку, особливий інтерес для різних прикладань викликають рівняння, що залежать від довільних функцій або містять багато вільних параметрів, які можна задавати за розсудом дослідника. А для таких рівнянь відсутні загальні методи точного інтегрування.

Ця ситуація суттєво змінюється, якщо нелінійне диференціальне рівняння, яке відповідає деякій моделі, має нетривіальні симетрійні властивості. У цьому випадкові для аналізу і побудови точних розв'язків рівняння можна використовувати методи групового аналізу диференціальних рівнянь (див., наприклад, монографії [26, 49, 51, 57, 103, 104] та роботи [50, 52]).

В дисертаційній роботі розглядаються задачі, що належать до класичних проблем сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь, на яких ми зупиняємося нижче.

Витоки теорії групового аналізу диференціальних рівнянь знаходяться у фундаментальних роботах Софуса Лі та його учнів [166]–[171]. Саме Лі створив і першим використав (для двовимірного рівняння теплопровідності) механізми теоретико–групової редукції, коли розв'язок досліджуваного диференціального рівняння шукається у вигляді підстановки спеціальної будови (анзацу), яка зводить (редукує) дане рівняння до диференціального рівняння з меншою кількістю незалежних змінних.

Подальший розвиток теоретико–групових методів дослідження диференціальних рівнянь, перш за все, пов'язаний з роботами Г. Біркгофа [8], Л.І. Сєдова [64], А. Моргана [177], В.Г. Костенка [30], Л.В. Овсяннікова [46]–[50], Н.Х. Ібрагімова [23, 24] та ряду інших математиків. Підсумком цього періоду є опублікування відомої монографії [51], після чого в математичній науці остаточно оформився важливий напрямок, який за пропозицією Л.В. Овсяннікова отримав назву "Груповий аналіз диференціальних рівнянь". Слід відзначити, що суттєвий вклад в розвиток як класичних, так і некласичних групових методів дослідження диференціальних рівнянь був зроблений Київською школою математиків, яку в середині семидесятих років минулого століття створив і очолив В.І. Фущич (див., наприклад, монографії [72, 76, 82, 83, 87]).

Однією із основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є вивчення дії групи перетворень, яку допускає дане диференціальне рівняння (система рівнянь), на множині розв'язків рівняння. Дія групи інваріантності вносить у множину розв'язків певну алгебраїчну структуру, яку у подальшому можна використовувати для вирішення ряду важливих проблем.

Як правило, під час побудови математичних моделей різних процесів, отримуються диференціальні рівняння, симетрійні властивості яких невідомі. Тому принципово важливою є чисто технічна задача знаходження найбільш широкої (максимальної) групи симетрії, яку допускає задане диференціальне рівняння (або система рівнянь). На сьогоднішній день вивчено симетрійні властивості багатьох відомих модельних рівнянь механіки, газової динаміки, квантової фізики. Слід відзначити, що вагомий вклад у розв'язування цієї проблеми внесли вчені Росії (перш за все, Л.В. Овсянніков і його учні [9, 10, 24, 25, 29, 39, 47, 48]) та України (В.І. Фущич і його учні [70, 75, 79, 80, 81, 84, 86, 88, 93, 124, 126]). Виявилося, що багато модельних диференціальних рівнянь допускають нетривіальні групи інваріантності. Це означає, що, явно чи неявно, під час відбору диференціального рівняння, в якості математичної моделі деякого реального процесу, певну роль відіграє симетрія.

За наявності ж у диференціального рівняння нетривіальних симетрійних властивостей, конструктивним стає використання методу симетрійної редукції для побудови точних розв'язків цього рівняння. Так, із використанням вказаного методу, були отримані класи багатопараметричних точних розв'язків ряду нелінійних диференціальних рівнянь (наприклад, рівняння ейконала, д'Аламбера, Ліувілля [4, 124, 126], теплопровідності й Шрьодінгера [5, 125, 137], Борна–Інфельда [85, 117], Буссінеска (із теорії фільтрації рідин) [66, 98], Монжа–Ампера [86, 117],полігармонічних рівнянь [63]) та систем нелінійних диференціальних рівнянь (як то: газової динаміки [42, 69], Нав'є–Стокса [42, 61, 123], Дірака [76, 129, 133, 134]).

Не дивлячись на те, що у вирішенні проблеми симетрійної редукції нелінійних диференціальних рівнянь досягнуто значного прогресу, її розв'язання для ряду рівнянь і систем рівнянь залишається актуальним і сьогодні. Особливо це має місце тоді, коли інші відомі методи інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь виявляються малоефективними або й взагалі не можуть бути використаними. А, як відзначав один із фундаторів методу оберненої задачі розсіювання В.Є. Захаров у передмові до російського видання [27] відомої монографії Ф.Калоджеро та А. Дегаспіса, до ряду важливих задач нелінійної математичної фізики, які мають універсальне значення (зокрема, до рівнянь Янга–Міллса у просторі Мінковського), математика ще не знайшла ефективних підходів. Також відзначимо, що в рамках програми "Підмоделі. Газова динаміка" [53] метод симетрійної редукції ефективно використовується групою російських математиків, яку очолює Л.В. Овсянніков, для аналізу та побудови інваріантних і частково–інваріантних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь газової динаміки (див., наприклад, [41, 45, 54, 56, 89, 90, 91]).

Перш за все, у зв'язку з можливістю використання теоретико–групових методів для аналізу та інтегрування диференціальних рівнянь, які допускають нетривіальні групи інваріантності, важливою є задача виділення із заданого класу рівнянь тих, що мають найвищі симетрійні властивості, тобто задача групової класифікації диференціальних рівнянь. Розв'язування цієї задачі є важливим не лише із суто математичних міркувань, а й мотивується можливістю використання отриманих результатів у різних прикладних проблемах.

Як відзначалося вище, модельні диференціальні рівняння часто містять параметри або функції, які не є строго фіксованими(вони містять деякий довільний елемент). Саме повний опис таких специфікацій довільного елемента даного диференціального рівняння, для яких це рівняння допускає найбільш широкі групи інваріантності, і складає суть задачі групової класифікації диференціальних рівнянь [51].

Історія розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь бере початок ще з робіт С.Лі [166]–[168], де він, зокрема, довів теорему, яка стверджує, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними допускає не більш ніж трипараметричну групу нетривіальних перетворень.

Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь було здійснено в 1959 році Л.В. Овсянніковим у відомій статті [47], де він запропонував метод (Лі–Овсяннікова) для її розв'язування та здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Ця стаття поклала початок численним циклам робіт з групової класифікації диференціальних рівнянь (досить повний огляд робіт, присвячених розв'язуванню цієї задачі, станом на початок 90–х років 20 століття, можна знайти в першому томі відомого довідника [112] під редакцією Н.Х. Ібрагімова). Відзначимо, що стійкий інтерес до розв'язування задачі групової класифікації спостерігається й в останні роки (див., наприклад, роботи С.В. Мелешка [41, 175, 176], А.Г. Нікітіна, Р.Вілтшіра (R.Wiltshire) [178], Ф. Гунгора (F. Güngor) [145], П. Олвера [147] та інших [67, 97, 114, 140, 142, 144, 146, 152, 174, 182, 192, 199, 201]).

Але, як показує аналіз відомих робіт з групової калсифікації диференціальних рівнянь, використання методу Лі–Овсяннікова дозволяє здійснити повне розв'язання цієї задачі лише для тих рівнянь, які містять довільні функції однієї змінної. Показовою у цьому плані є робота Н.Х. Ібрагімова, М. Торрізі (M.Torrisi) та А. Валенті (A. Valenti) [149], в якій вони розглядали групову класифікацію рівняння

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x), \qquad u = u(t, x),$$

і отримали опис лише окремих класів рівнянь заданого вигляду з нетривіальними симетрійними властивостями. Очевидним є те, що подальший прогрес у розв'язуванні задачі групової класифікації вимагає нових підходів до роз'язування цієї проблеми.

Нарешті, ще однією важливою задачею групового аналізу диференціальних рівнянь, на якій ми тут зупиняємося, є задача побудови найбільш загального диференціального рівняння з частинними похідними, яке допускає в якості групи інваріантності деяку відому групу локальних перетворень. Добре відомо [51, 57], що найбільш загальний розв'язок цієї задачі передбачає побудову повної множини диференціальних інваріантів певного порядку для даної групи локальних перетворень. Знаючи множину диференціальних інваріантів такої групи, можна визначити структуру всіх диференціальних рівнянь, які допускають цю групу в якості групи інваріантності.

В.І. Фущич та І.А. Єгорченко [73, 74, 130] знайшли повну множину диференціальних інваріантів другого порядку для відомих реалізацій (зображень) алгебр Лі груп Евкліда, Пуанкаре та Галілея в класі лінійних диференціальних операторів першого порядку (або, що те саме, в класі векторних полів Лі цих груп).

Очевидним є те, що повне розв'язання вказаної задачі для деякої групи локальних перетворень, передбачає наявності повного переліку реалізацій алгебри Лі цієї групи в класі векторних полів Лі. Тому, Дж. Рідо (G. Rideau) та П.Вінтерніту [189, 190], вивчаючи найбільш загальний вигляд хвильових і еволюційних рівнянь у двовимірному просторі–часі, які інваріантні відносно груп Пуанкаре та Галілея, попередньо провели опис реалізацій алгебр Лі цих груп в одному класі векторних полів Лі й отримали ряд нових, ще невідомих реалізацій.

Саме бажання отримати ще невідомі, у певному сенсі нелінійні, реалізації алгебр Лі важливих груп локальних перетворень і було спонукальним мотивом появи ряду робіт [77, 131, 173, 200, 203] В. І. Фущича, Р. З. Жданова, І. А. Єгорченко, В. Н. Бойка та інших, в яких були побудовані нові реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,2)$, $P(1,3)$ та Галілея $G(1,1)$, $G(1,3)$. У зв'язку з цим природно виникає інтерес до розв'язування задачі повного опису реалізацій алгебр Лі найбільш важливих і відомих груп локальних перетворень в класі лінійних диференціальних операторів першого порядку, які у подальшому можуть розглядатися як алгебри інваріантності диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Таким чином, подальше розвинення методів класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є важливим і актуальним на сучасному етапі розвитку загальної теорії диференціальних рівнянь і набуває особливо важливого значення тоді, коли інші методи дослідження і розв'язування диференціальних рівнянь є неефективними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках тем "Аналітичні та симетрійні методи досліджень диференціальних моделей математичної фізики" (номер держреєстрації 0198U001993) та "Теоретико–груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є повне розв'язання задачі групової класифікації для нелінійних (квазілінійних) рівнянь еволюційного типу найбільш загального вигляду у двовимірному просторі–часі, симетрійна редукція до систем звичайних диференціальних рівнянь і побудова інваріантних розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського та повний опис в одному класі векторних полів Лі реалізацій алгебр Лі ряду важливих груп локальних перетворень, які розглядаються як групи інваріантності диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Для цього, поряд з класичними методами групового аналізу диференціальних рівнянь, відомими методами інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, використовуються новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь та лінійна конструкція конформно–інваріантних анзаців для довільного векторного поля, яким відповідає редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації вперше одержано такі результати.

1. Запропоновано й обгрунтовано новий конструктивний метод розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь.

2. Повністю розв'язано задачу групової класифікації для двовимірного рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом загального вигляду.

3. Повністю розв'язано задачу групової класифікації для загального двовимірного квазілінійного рівняння еволюційного типу.

4. Побудовано універсальну лінійну конструкцію конформно–інваріантних анзаців для довільного векторного поля, яким відповідає редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.

5. З використанням побудованих анзаців отримано багатопараметричні сім'ї конформно–інваріантних розв'язків системи рівнянь Максвелла у вакуумі.

6. Здійснено повну процедуру симетрійної редукції $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського до систем звичайних диференціальних рівнянь за підгрупами групи Пуанкаре та розширеної групи Пуанкаре.

7. Отримано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського.

8. Проведено повний опис коваріантних реалізацій алгебр Лі групи Пуанкаре $P(n,m)$, розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(n,m)$ та конформної групи $C(n,m)$ у випадку однієї залежної функції.

9. Побудовано усі реалізації алгебр Лі груп $O(3)$, $O(4)$ та $O(1,2)$, $O(2,2)$ в класі векторних полів Лі у довільному скінченновимірному просторі дійсних змінних.

10. Знайдено нові коваріантні реалізації алгебр Лі груп Евкліда $E(3)$, $E(4)$ та Пуанкаре $P(1,2)$, $P(2,2)$ у випадку довільної скінченної кількості залежних змінних.

11. Отримано нові (неколваріантні) реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре та Галілея в просторах малої розмірності, що дало можливість побудувати ще невідомі класи пуанкаре– та галілей–інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку у двовимірному просторі–часі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та розвинені в ній методи можуть бути використаними в подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь. При вирішенні прикладних проблем її результати можна застосовувати для дослідження конкретних модельних диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. В роботах, які опубліковано разом з іншими авторами і включено до автореферату, особистий внесок дисертанта такий. У роботах [38, 78] В.І. Фущичу належить загальна постановка задач, дисертанту— розробка методів дослідження і доведення теорем. У роботах [119, 135, 162, 209, 210] В.І. Фущичу належить загальна постановка задач, дисертанту— розробка методів дослідження, доведення теорем і симетрійна редукція диференціальних рівнянь, Р.З. Жданову— уточнення методів дослідження і обговорення отриманих результатів. У роботах [18]–[20], [204]–[207], [205] Р. З. Жданову належать обговорення постановки задач, методів дослідження та отриманих результатів, дисертанту—розробка методів дослідження та розв'язання задач. В оглядах [208] та [99] дисертанту належать результати II, III, V та I,II,III частин відповідно. У роботах [1, 36] А.М. Самойленку належать обговорення результатів й уточнення деяких формулювань тверджень, дисертанту—розробка методів дослідження і розв'язання задачі групової класифікації. А.О. Абраменко [1], А.М. Онищенку [161] та В.Ф. Смалію [37] належить перевірка складних технічних викладок.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідалися на Всеукраїнській конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково–технічних дослідженнях" (Львів, 1995), V Міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 1996), Українській конференції "Моделирование и исследование устойчивых систем" (Київ, 1996), Міжнародній конференції "Modelling and Investigation of Systems Stability" (Київ, 1997), I, II, III та IV Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995, 1997, 1999, 2001), XXXI Симпозіумі з математичної фізики (Торунь, Польща, 1999), VIII Міжнародній конференції "Modern Group Analysis" (Уфа, Росія, 2000), XVI Міжнародному симпозіумі з нелінійної акустики (Москва, Росія, 2002), Міжнародній конференції "Inverse Problem and Nonlinear Equations" (Харьків, 2002).

Окрім цього, результати дисертації були предметом доповідей на наукових семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (керівники член–кореспондент НАН України, професор Фущич В.І., професор Нікітін А.Г., 1995–2002), на науковому семінарі з нелінінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник академік НАН України, професор Скрипник І.В., 1999), на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань Інституту математики НАН України (керівник академік НАН України, професор Самойленко А.М., 2001), на науковому семінарі "Алгебраїчні питання функціонального аналізу" Інституту математики НАН України (керівник професор Самойленко Ю.С., 2001, 2002), на об'єднаному семінарі з математичної фізики відділів математичних методів в статистичній механіці та прикладних досліджень Інституту математики НАН України (керівники член–кореспондент НАН України, професор Петрина Д.Я. та професор Нікітін А.Г., 2002).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 24 роботах [1, 20, 32, 33], [36]–[38], [78, 99, 119, 135, 155, 156], [158]–[160],[162],[204]–[210] у профільних наукових виданнях. Частково вони також висвітлені в статтях [18, 19, 34, 35, 161] в інших математичних часописах та в матеріалах [154, 157] міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація містить зміст, вступ, п'ять розділів, висновки, список використаних джерел, що містить 212 найменувань, три додатки та 11 таблиць. Повний обсяг дисертації 347 сторінок, з них список використаних джерел, додатки та таблиці займають 54 сторінки.

Короткий зміст основної частини дисертації. Основна частина дисертації складається з п'яти розділів. Кожен розділ роботи розпочинається зі вступу, в якому перераховані задачі, що в ньому розглядаються, і подано зміст розділу за підрозділами. В заключній частині кожного розділу підведено підсумки і сформульовано висновки.

Перший розділ дисертації присвячений розгляду однієї із центральних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь, а саме— задачі групової класифікації диференціальних рівнянь заданого вигляду.

У першому підрозділі здійснено детальну постановку задачі, яка буде розв'язуватися. Тут же проведено огляд відомих результатів з групової класифікації диференціальних рівнянь еволюційного типу та проаналізовано можливості подальшого прогресу у розв'язуванні задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з використанням класичного методу Лі–Овсяннікова. Далі проведено обгрунтування й опис нового підходу до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є власне синтезом методу Лі–Овсяннікова, результатів класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності. На закінчення першого підрозділу, з використанням запропонованого методу, проведено групову класифікацію двовимірного лінійного диференціального рівняння гіперболічного типу

$$u_{tx} + A(t,x)u_t + B(t,x)u_x + C(t,x)u = 0$$

і показано, що отриманий результат збігається з результатом Л.В. Овсяннікова [48], який він отримав у класичному підході, додатково використовуючи інваріанти Лапласа.

У другому підрозділі першого розділу, який розбито на три пункти, здійснено попередню групову класифікацію рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). \qquad (0.1)$$

У першому пункті, з використанням стандартних методів, знайдено загальний вигляд інфінітезимальних операторів, які генерують групу інваріантності рівняння (0.1), та описано перетворення простору незалежних та залежної змінних, що складають групу еквівалентності цього рівняння. Опис нелінійних рівнянь вигляду (0.1), які допускають одно– та двопараметричні групи інваріантності, проведено в другому пунктові, а рівнянь, які допускають трипараметричні групи інваріантності,— в третьому пунктові другого підрозділу.

Завершенню групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (0.1) присвячений третій підрозділ розділу, який розбито на три пункти. У першому пункті описано нелінійні рівняння вигляду (0.1), алгебри Лі максимальних груп інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві. Виявилося, що з точністю до еквівалентності такі рівняння вичерпуються відомим рівнянням Бюргерса, максимальна група інваріантності якого є п'ятипараметричною групою локальних перетворень. Повний опис досліджуваних рівнянь, які інваріантні відносно чотирипараметричних розкладних та нерозкладних розв'язних груп інваріантності отримано в другому та третьому пунктах відповідно. Оскільки отримані рівняння не містять довільних функцій і відповідні групи інваріантності є їх максимальними групами інваріантності (за винятком одного випадку, який приводить до вже отриманого рівняння Бюргерса), то на цьому групова класифікація нелінійних рівнянь вигляду (0.1) є завершеною.

В останньому, четвертому, підрозділі розділу підведено підсумки і зроблено висновки до першого розділу роботи.

У другому розділі центральною є задача групової класифікації квазілінійних двовимірних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x), \qquad F \neq 0. \qquad (0.2)$$

Тут дещо змінено порядок виконання кроків алгоритму запропонованого методу групової класифікації диференціальних рівнянь і в першому підрозділі, який розбито на два пункти, отримано попередні результати групової класифікації рівняння (0.2) та проведено опис досліджуваних рівнянь, які інваріантні відносно напівпростих груп локальних перетворень, та рівнянь, які допускають групи інваріантності, алгебри Лі операторів симетрії яких мають нетривіальний розклад Леві. Повну класифікацію рівнянь (0.2), які інваріантні відносно розв'язних груп локальних перетворень здійснено в другому підрозділі розділу, який складається з двох пунктів. Проведені дослідження показали, що найвищі симетрійні властивості серед квазілінійних рівнянь вигляду (0.2) мають 35 рівнянь, максимальними групами інваріантності яких є чотирипараметричні групи локальних перетворень, та 5 рівнянь, максимальними групами інваріантності яких є п'ятипараметричні групи локальних перетворень.

Проблема побудови інваріантних розв'язків для рівнянь вигляду (0.1) та (0.2) з нетривіальними симетрійними властивостями розглядається в третьому підрозділі другого розділу. Тут, перш за все, здійснено огляд відомих точних розв'язків рівняння Буссінеска з теорії фільтрації і показано, що вони можуть бути отриманими в результаті використання симетрійних властивостей цього рівняння. Симетрійна редукція рівнянь, максимальні групи інваріантності яких є чотирипараметричними групами локальних перетворень, розглянута в першому пункті підрозділу. Отримані результати симетрійної редукції і точні розв'язки для ряду нелінійних рівнянь вигляду (0.1) та (0.2) зведені в додаткові 1. Другий пункт підрозділу присвячений розглядові питання про можливість побудови нових точних розв'язків досліджуваних рівнянь з використанням некласичних симетрій (так званих, Q–умовних симетрій). Показано, що для одного класу операторів Q–умовної симетрії ця задача є еквівалентною інтегруванню самого досліджуваного рівняння. А оскільки, як показала безпосередня перевірка, для ряду досліджуваних рівнянь Q–

умовна симетрія в іншому класі операторів збігається зі звичайною (в сенсі Лі) симетрією, то класична симетрійна редукція для ряду важливих нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними залишається основним генератором точних розв'язків.

В останньому, четвертому, підрозділі підведено підсумки і сформульовано висновки до другого розділу.

У третьому розділі дисертації розв'язується проблема побудови універсальної конструкції $P(1,3)$–, $\tilde{P}(1,3)$– та $C(1,3)$–інваріантних анзаців, яким відповідає редукція ряду важливих диференціальних рівнянь з частинними похідними (модельних рівнянь релятивістської фізики) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Для цього, в першому підрозділі розділу, проведено аналіз загальної процедури симетрійної редукції диференціальних рівнянь і показано, що базисні оператори алгебр Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $C(1,3)$, які є групами інваріантності згаданих вище рівнянь, мають вигляд, який дозволяє здійснювати побудову відповідних їм анзаців у лінійній формі. Другий підрозділ розділу присвячений описові підалгебр рангу 3 алгебр Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ та $C(1,3)$. Саме таким підалгебрам і відповідає симетрійна редукція до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Безпосередню побудову $P(1,3)$–, $\tilde{P}(1,3)$– та $C(1,3)$–інваріанітних анзаців здійснено в третьому підрозділі розділу. Тут для кожної із підалгебр рангу 3 алгебр Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ та $C(1,3)$ знайдено явний вигляд усіх функцій, що входять у відповідні анзаци.

Використанню побудованої лінійної конструкції інваріантних анзаців для симетрійної редукції і побудови точних розв'язків рівнянь Максвелла у вакуумі присвячений четвертий підрозділ розділу. У першому пункті підрозділу проведено аналіз симетрійних властивостей рівнянь Максвелла. Адаптацію лінійної конструкції конформно–інваріантних анзаців для полів Максвелла здійснено в другому пункті підрозділу. В останньому пункті проведено відбір тих підалгебр алгебри Лі конформної групи, відповідна яким симетрійна редукція приводить до суттєво нових розв'язків рівнянь Максвелла, що не отримуються прямим інтегруванням у певних класах функцій. Тут же побудовано десять сімей багатопараметричних точних розв'язків рівнянь Максвелла.

В останньому, п'ятому, підрозділі підведено підсумки і зроблено висновки до третього розділу.

Четвертий розділ дисертації присвячений проблемі інтегрування $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського. У першому підрозділі, перш за все, проведено огляд відомих результатів для рівнянь Янга–Міллса в просторах різної метрики і вказано на особливості, які мають ці рівняння в просторі Мінковського. У першому пункті підрозділу проведено аналіз симетрійних властивостей і побудовано формули розмноження розв'язків рівнянь Янга–Міллса локальними групами перетворень, що генеруються операторами симетрії, які допускають ці рівняння. У другому пункті першого підрозділу здіснено побудову $P(1,3)$– та $\tilde{P}(1,3)$–інваріантних анзаців для полів Янга–Міллса. Використання процедури розмноження розв'язків перетвореннями із групи Лоренца дозволило отримати ці анзаци у явному коваріантному вигляді.

Симетрійна редукція $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь проведена у другому підрозділі розділу. При цьому явна коваріантна форма анзаців дозволила здійснити симетрійну редукцію у загальному вигляді. Тут же розглянуто і симетрійну редукцію самодуальних рівнянь Янга–Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь. Повні переліки редукованих систем наведено в додатках 2 ($\tilde{P}(1,3)$–інваріантна редукція $SU(2)$ Янга–Міллса) та 3 ($P(1,3)$– та $\tilde{P}(1,3)$–інваріантна редукція самодуальних рівнянь Янга–Міллса).

Аналізу ряду редукованих систем та їх інтегруванню присвячений третій підрозділ розділу. Тут же побудовано ряд багатопараметричних сімей інваріантних (неабелевих) розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса.

У четвертому, останньому, підрозділі розділу підведено підсумки і зроблено висновки до четвертого розділу.

Останній, п'ятий, розділ дисертації присвячений розглядові проблеми опису реалізацій алгебр Лі ряду важливих груп локальних перетворень в класі векторних полів Лі. Такі реалізації у подальшому можуть розглядатися як алгебри інваріантності систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перший підрозділ має допоміжний характер. У ньому ми вводимо в розгляд основні означення та поняття.

У другому підрозділі проведено повний опис, так званих, коваріантних реалізацій алгебр Лі групи Пуанкаре $P(n,m)$, розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(n,m)$ та конформної групи $C(n,m)$ у випадку, коли простір залежних змінних є одновимірним. Виявилося, що для випадку $max\{n,m\} \geq 3$ усі такі реалізації вичерпуються відомими (стандартними) реалізаціями. До нових (у тому числі нелінійних) реалізацій привів розгляд алгебр Лі груп $P(2,2), \tilde{P}(1,2), \tilde{P}(2,2), C(1,2), C(2,2)$.

У третьому підрозділі проведено дослідження коваріантних реалізацій алгебр Лі груп Евкліда $E(3)$ та $E(4)$, а в четвертому підрозділі— груп Пуанкаре $P(1,2)$ та $P(2,2)$ у випадку, коли простір залежних змінних має довільну скінченну розмірність. Відзначимо, що тут же було проведено опис усіх реалізацій алгебр Лі груп $O(3), O(1,2), O(4), O(2,2)$ в класі векторних полів Лі, які визначені в просторі змінних довільної скінченної розмірності.

У п'ятому підрозділі ми розглянули питання про існування довільних (не обов'язково коваріантних) реалізацій алгебр Лі груп Пуанкаре в просторах малої розмірності. Отримані реалізації були використані для побудови нових нелінійних пуанкаре–інваріантних диференціальних рівнянь другого порядку.

Аналогічна задача для алгебр Лі груп Галілея в двовимірному просторі–часі досліджувалася в шостому підрозділі розділу.

В останньому, сьомому, підрозділі підведено підсумки і зроблено висновки до п'ятого розділу.

В кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Подяки. Я із вдячністю згадую свого першого наукового керівника члена–кореспондента НАН України, професора Фущича В.І., яким було сформульовано ряд задач, розв'язання яких увійшло в дану роботу. Я висловлюю щиру подяку академіку НАН України, професору Самойленку А.М., який зацікавився науковою тематикою дисертанта і підтримка якого сприяла завершенню роботи над дисертацією. Також я дуже вдячний доктору фіз.–мат. наук Жданову Р.З. за довголітню плідну наукову співпрацю; професору Нікітіну А.Г. та всім співробітникам відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за постійний інтерес до моїх результатів, підтримку і допомогу.

РОЗДІЛ 1

Групова класифікація диференціальних рівнянь: новий підхід до розв'язування задачі та класифікація рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом

Перший розділ присвячений розгляду однієї із центральних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь, а саме—*задачі групової класифікації* диференціальних рівнянь заданого вигляду. Ця задача має таке формулювання: для класу диференціальних рівнянь заданого вигляду знайти ядро основних груп інваріантності і вказати усі спеціалізації довільних елементів (як правило, це деякі довільні функції), які дають розширення ядра основних груп. Іншими словами: серед рівнянь заданого вигляду виділити ті, які мають найвищі симетрійні властивості.

У першому підрозділі ми здійснюємо загальну постановку задачі, яку будемо розв'язувати, проводимо огляд відомих результатів та зупиняємося на методах розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь. Тут же ми обгрунтовуємо новий підхід до розв'язування цієї задачі та наводимо його детальний опис.

Попередній груповій класифікації рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом присвячений другий підрозділ. Тут, зокрема, здійснено опис усіх таких рівнянь, які допускають одно–, дво– та трипараметричні групи інваріантності.

В третьому підрозділі першого розділу ми завершуємо групову класифікацію рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом. Тут ми проводимо опис рівнянь із заданого класу, які мають найвищі симетрійні властивості. В останньому, четвертому, підрозділі ми підводимо підсумки і робимо висновки.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [19, 154, 161, 207].

Перш ніж переходити до викладу результатів, зауважимо, що усі наші дослідження, як у цьому розділі, так і далі, відносяться до досить малих областей і ми припускаємо, коли спеціально не обумовлено супротивне, що усі функції, які нам зустрічаються, є неперервними і мають неперервні похідні за аргументами потрібних порядків.

1.1. Задача групової класифікації диференціальних рівнянь та методи її розв'язування

Як відзначалося вище, у першому підрозділі ми здійснюємо постановку задачі, яку будемо розв'язувати, проводимо огляд відомих результатів та зупиняємося на методах розв'язування задачі групової класифікації.

Якщо розглядати множину диференціальних рівнянь та множину груп перетворень ізольовано одну від одної, то питання класифікації належних їм об'єктів розглядаються на основі введення ознак різної природи. Так, для диференціальних рівнянь класифікаційними ознаками можуть бути властивості лінійності та квазілінійності. Для груп перетворень в якості таких ознак беруть ізоморфізми та гомоморфізми, структурні властивості та багато інших. Проте в груповому аналізі диференціальних рівнянь ці дві множини вивчаються спільно, на основі відповідності між системою диференціальних рівнянь та її групою інваріантності.

Ця властивість є відображенням і приводить до розширення класифікаційних можливостей для кожної із цих множин. Оскільки відображення "рівняння$\longrightarrow$група перетворень" не є взаємно однозначним, то вплив перетворень на класифікаційні можливості для диференціальних рівнянь повинні бути, взагалі кажучи, більш сильними, ніж зворотній вплив. Тому на перший план висуваються задачі групової класифікації диференціальних рівнянь.

Однією із сильних класифікаційних ознак є подібність груп перетворень. А саме: якщо основні групи яких–небудь рівнянь подібні, то групові властивості цих рівнянь, взагалі кажучи, є однаковими. Зокрема, якщо одне рівняння перетворити локальною заміною змінних в інше рівняння, то основні групи цих рівнянь виявляються подібними. Тому груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом відразу усього класу рівнянь, які отримуються із даного рівняння заміною змінних.

У подальшому ставиться задача про класифікацію диференціальних рівнянь фіксованої будови, які змінюються лише за рахунок так званого "довільного елемента" (як правило, це є деякі довільні функції незалежних та залежних змінних, що входять в дані рівняння).

Об'єктом наших досліджень у цьому та наступному розділах є нелінійні (квазілінійні) рівняння, які належать до класу рівнянь еволюційного типу

$$u_t = f(t, x, u, u_x)u_{xx} + g(t, x, u, u_x), \tag{1.1}$$

де функції f та g є довільними гладкими функціями своїх аргументів, $u = u(t, x)$. Тут і далі $u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$.

Відзначимо, що рівняння вигляду (1.1) займають важливе місце серед диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких рівнянь, зокрема, приводять задачі опису процесів тепло– та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та сольоності моря в глибину і т.п.

Відносно рівняння (1.1) задача групової класифікації звучить так: *описати всі рівняння вигляду (1.1), які мають найвищі симетрійні властивості*. Згідно зі сказаним вище, для цього нам достатньо вказати по одному представникові із кожного класу рівнянь, які мають подібні групи симетрії.

Групова класифікація лінійних рівнянь вигляду (1.1) відома (дивись, наприклад, [51]). Виявляється, що лінійне рівняння вигляду (1.1) допускає більш ніж двопараметричну групу симетрії (ми не враховуємо тривіальну нескінченновимірну симетрію) лише у двох випадках:

1) коли воно є рівносильним лінійному рівнянню теплопровідності

$$u_t = u_{xx};$$

2) коли воно є рівносильним рівнянню

$$u_t = u_{xx} + mx^{-2}u, \quad m \in R, \ m \neq 0.$$

Враховуючи це, тут ми розглядаємо задачу *групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.1).* При цьому, ті із рівнянь, які локальними замінами змінних зводяться до лінійних, ми вважаємо "несуттєво" нелінійними рівняннями і з подальшого розгляду вилучаємо. Прикладом такого "несуттєво" нелінійного рівняння вигляду (1.1) є "модифіковане" рівняння Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + u_x^2,$$

яке локальною заміною змінних

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = \ln|\omega|, \quad \omega = \omega(\bar{t}, \bar{x}),$$

зводиться до лінійного рівняння теплопровідності

$$\omega_{\bar{t}} = \omega_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Як відзначалося у вступі, проблема групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними, після виходу у світ класичної статті [47] Л.В. Овсяннікова, де він здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \qquad f(u) \neq const,$$

стала однією із центральних задач сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь (див., наприклад, огляд робіт у довіднику [112] станом на початок 90–х років минулого століття). Тут ми зупинимося лише на тих роботах, в яких була здійснена групова класифікація нелінійних рівнянь вигляду (1.1):

$$
\begin{aligned}
[2] &: \ u_t = f(u_x)u_{xx}, \quad f \neq const; \\
[14,\ 199] &: \ u_t = [f(u)u_x]_x + g(u), \quad g \neq 0; \\
[115,\ 181] &: \ u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x; \\
[109] &: \ u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x + h(u); \\
[138] &: \ u_t = (u^n)_{xx} + g(x)u^m + f(x)u^s u_x, \quad n \neq 0; \\
[116] &: \ f(x)u_t == [g(x)D(u)u_x]_x - K(u)u_x, \quad f \cdot g \neq 0, \\
& D \neq const.
\end{aligned}
$$

Із наведеного вище переліку видно, що групова класифікація здійснена лише для рівнянь вигляду (1.1), які містять довільні функції одного аргументу. Щоб зрозуміти, чим це викликано, зупинимося на алгоритмові методу Лі–Овсяннікова.

Виконання алгоритму методу Лі–Овсяннікова групової класифікації диференціальних рівнянь полягає у здійсненні таких кроків:

- використовуючи стандартний метод Лі, знаходимо основну групу симетрії досліджуваного рівняння, визначальну систему та класифікуюче співвідношення;

- здійснюємо побудову групи перетворень еквівалентності (надалі позначаємо її $\mathcal{E}$) досліджуваного рівняння;

- використовуючи перетворення із групи $\mathcal{E}$, проводимо аналіз класифікуючого співвідношення і знаходимо можливі специфікації довільного елемента, що входить в досліджуване рівняння;

- для кожного із отриманих значень довільного елемента розв'язуємо визначальну систему і досліджуємо можливості розширення основної групи симетрії даного рівняння.

Відзначимо, що замість третього кроку алгоритму можна, для побудови специфікацій довільного елемента, використовувати й інфінітезимальний критерій інваріантності, беручи оптимальну систему підгруп групи $\mathcal{E}_c$ (неперервної підгрупи групи $\mathcal{E}$).

Отже, метод Лі–Овсяннікова групової класифікації диференціальних рівнянь є ефективним у тих випадках, коли вдається здійснити повний аналіз класифікуючого співвідношення або побудувати повну оптимальну систему підгруп групи перетворень $\mathcal{E}_c$.

Повертаючись до наведеного вище переліку рівнянь вигляду (1.1), для яких було повністю розв'язано задачу групової класифікації, відзначимо, що для всіх із них класифікуючими співвідношеннями є системи звичайних диференціальних рівнянь, а групи $\mathcal{E}_c$ є скінченнопараметричними групами перетворень. Наприклад, для рівняння

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u), \quad f \neq 0, \tag{1.2}$$

виконання першого кроку алгоритму методу Лі–Овсяннікова показує, що група інваріантності цього рівняння генерується інфінітезимальним оператором

$$\mathrm{v} = a(t)\partial_t + b(t,x)\partial_x + c(t,x,u)\partial_u,$$

де функції a, b, c, f, g задовольняють визначальну систему рівнянь

$$\begin{aligned} &(2b_x - \dot{a})f = cf', && c_t + (c_u - \dot{a})g - c_{xx}f = cg', \\ &-b_t + fb_{xx} - 2(fc_x)_u = 0, && f'(c_u + 2b_x - \dot{a}) - (fc)_{uu} = 0, \end{aligned}$$

яка є системою чотирьох звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій f і g і з якої легко отримуємо, що класифікуючою умовою для функції f $(f' \neq 0)$ є рівняння

$$(f(f')^{-1})_{uu} = 0.$$

З іншого боку, група $\mathcal{E}_c$ рівняння (1.2) є шестипараметричною групою перетворень і серед операторів, що її генерують, ненульову дію в просторі $\langle u, f\rangle$ мають оператори

$$E_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, \quad E_2 = \partial_u, \quad E_3 = \frac{1}{2}x\partial_x + f\partial_f,$$

які складають базис тривимірної алгебри Лі, для якої неважко провести опис усіх підалгебр.

Інша ситуація виникає, коли задача групової класифікації розглядається для диференціального рівняння, яке містить довільні функції двох і більше аргументів. Зупинимося, наприклад, на випадкові лінійного рівняння другого порядку гіперболічного типу:

$$u_{tx} + A(t,x)u_t + B(t,x)u_x + C(t,x)u = 0, \tag{1.3}$$

де $u = u(t,x)$. Виконання першого кроку алгоритму методу Лі–Овсяннікова показує, що група інваріантності рівняння (1.3) генерується інфінітезимальним оператором

$$\mathrm{v} = f(t)\partial_t + g(x)\partial_x + h(t,x)u\partial_u, \tag{1.4}$$

в якому функції f, g, h задовольняють рівності

$$\begin{aligned} &h_t + B\dot{f} + fB_t + gB_x = 0,\\ &h_x + Ag' + gA_x + fA_t = 0,\\ &h_{tx} + C\dot{f} + fC_t + Cg' + gC_x + Ah_t + Bh_x = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

де $\dot{f} = \frac{df(t)}{dt}$, $g' = \frac{dg(x)}{dx}$ (ми виключаємо із розгляду тривіальну нескінченновимірну симетрію з оператором $X = \omega(t,x)\partial_u$, де ω є довільним розв'язком рівняння (1.3)).

Очевидною є неможливість прямого аналізу системи (1.5).

Далі, прямі обрахунки показали, що групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1.3) формують два такі класи перетворень:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \tau = \alpha(t),\ \xi = \beta(x),\ v = \theta(t,x)u + \rho(t,x),\\ &(b) \qquad \tau = \alpha(x), \xi = \beta(x), \quad v = \theta(t,x)u + \rho(t,x), \end{aligned} \tag{1.6}$$

де α, β—довільні гладкі функції своїх аргументів, а функції θ, ρ задовольняють рівність

$$\rho\theta_{tx} + \theta_t\rho_x + \theta_x\rho_t - 2\rho\theta^{-1}\theta_t\theta_x - \theta\rho_{tx} +$$
$$+A[\theta_t\rho - \theta\rho_t] + B[\theta_x\rho - \theta\rho_x] - C\theta\rho = 0.$$

Окрім цього, внаслідок невиродженості перетворень (1.6), $\theta \neq 0$, похідні функцій α та β теж відмінні від нуля.

Ми бачимо, що для рівняння (1.3) група еквівалентності $\mathcal{E}$ є нескінченнопараметричною, а тому питання про опис її підгруп залишається відкритим.

Отже, пряме застосування методу Лі–Овсяннікова не дає можливості провести повну групову класифікацію рівняння (1.3). Потрібно ввести в розгляд якісь додаткові умови.

Дійсно, Л.В. Овсянніков здійснив [48] групову класифікацію рівняння (1.3), використовуючи інваріанти Лапласа (дивись, також, [51]):

$$h = A_t + AB - C, \qquad k = B_x + AB - C,$$

взявши в якості класифікуючого співвідношення їх відношення. Основний отриманий ним класифікаційний результат формулюється так:

Рівняння (1.3) допускає алгебру інваріантності розмірності вищої ніж 2 тоді і тільки тоді, коли функції

$$p = \frac{k}{h}, \qquad q = \frac{1}{h}(\ln\, h)_{xy}$$

є сталими величинами. У такому випадкові рівняння (1.3) є еквівалентним рівнянню Ейлера–Пуассона

$$u_{tx} - \frac{2u_t}{q(t+x)} - \frac{2pu_x}{q(t+x)} + \frac{4pu}{q^2(t+x)^2} = 0,$$

коли $q \neq 0$, *або рівнянню*

$$u_{tx} + tu_t + pxu_x + ptxu = 0,$$

коли $q = 0$.

Нетривіальні алгебри інваріантності цих рівнянь є чотиривимірними.

Зауважимо, що під час групової класифікації рівняння (1.3) із розгляду було вилучено випадки тих рівнянь, які мають нетривіальні нескінченновимірні симетрії й інтегруються в загальному вигляді.

Очевидним є те, що неможливість безпосереднього використання методу Лі–Овсяннікова для групової класифікації диференціальних рівнянь, які містять довільні функції двох і більше змінних, суттєво звужує класи рівнянь, що підлягають такому дослідженню. З іншого боку, якщо суттєвого прогресу в розв'язуванні задачі групової класифікації диференціальних рівнянь (у класичному сенсі) не вдається досягти, в статті [40] було описано усі двовимірні рівняння еволюційного типу довільного порядку, які інваріантні відносно нетривіальних груп контактних перетворень. Це є ще одним спонукальним мотивом до розширення класів рівнянь, які підлягають (у класичному розумінні) повній груповій класифікації.

В роботах [19, 207] нами було запропоновано новий підхід до проведення групової класифікації диференціальних рівнянь, який дозволив суттєво розширити множину рівнянь, для яких вдається цю задачу розв'язати повністю. На алгоритмові нового методу та одному прикладові його застосування ми і зупиняємося далі в цьому підрозділі.

Запропонований в [19, 207] новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь є власне синтезом методу Лі–Овсяннікова, результатів класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності, й спирається на наступні відомі положення групового аналізу диференціальних рівнянь та теорії абстрактних алгебр Лі (див., наприклад, [51, 57]).

- Якщо диференціальне рівняння має нетривіальну симетрію, то воно є інваріантним відносно деякої скінченновимірної алгебри Лі інфінітезимальних операторів, тип якої цілком визначається структурними константами.

- В результаті дії перетворень із групи $\mathcal{E}$, (групи локальних перетворень, які залишають вигляд рівняння незмінним) дане рівняння переходить в еквівалентне йому рівняння, а його алгебра інваріантності— в подібну (ізоморфну) їй алгебру Лі операторів симетрії. При цьому, внаслідок збереження загального вигляду еквівалентних рівнянь, базисні оператори обох алгебр інваріантності теж належать до цілком визначеного класу інфінітезимальних операторів.

- Відомою є класифікація усіх неізоморфних дійсних алгебр Лі до розмірності 6 включно [7, 43, 44, 92, 194, 195]. Це дає можливість у відомому класі операторів з точністю до еквівалентності, яку визначає деяка група перетворень, вивчити усі можливі реалізації цих алгебр Лі, а потім перевірити, чи можуть вони бути алгебрами інваріантності рівнянь заданого класу.

Виходячи зі сказаного вище, ми для групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.1) будемо використовувати підхід, який полягає у виконанні такого алгоритму.

I. На першому кроці, із використанням інфінітезимального методу Лі, знаходимо систему визначальних рівнянь для інфінітезимального оператора, що генерує групу симетрії досліджуваного рівняння. Визначальні рівняння, які явно залежать від довільних функцій та їх похідних, ми називаємо *класифікуючими*. Інтегруючи ті із визначальних рівнянь, які не залежать від довільних функцій, одержуємо найбільш загальний вигляд інфінітезимального оператора, що допускається досліджуваним рівнянням. Також, використовуючи прямий чи інфінітезимальний методи, будуємо групу еквівалентності $\mathcal{E}$ даного рівняння.

II. На другому кроці, просуваючись поетапно, ми проводимо групову класифікацію досліджуваних рівнянь, які допускають алгебри інваріантності невисоких розмірностей (наприклад, не вищих за 3). Для цього ми попередньо будуємо реалізації одно–, дво– та тривимірних алгебр Лі в класі знайдених на першому кроці інфінітезимальних операторів з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення із групи $\mathcal{E}$. Підставляючи значення функцій в отриманих базисних операторах реалізацій в класифікуючі рівняння, ми знаходимо відповідні значення довільних функцій у відповідних інваріантних рівняннях. Тут же вилучаємо ті із реалізацій, які не можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного вигляду. Тим самим ми залишаємося саме в рамках задачі групової класифікації диференціальних рівнянь заданого вигляду. Зауважимо, що поступове підвищення розмірності алгебр інваріантності приводить до зменшення ступеню довільності функцій, що входять в диференціальні рівняння досліджуваного вигляду.

III. Третій крок передбачає завершення групової класифікації даного рівняння. Для цього ми використовуємо як класичні методи (якщо довільні функції в рівняннях є вже функціями одного аргументу), так і подальше розширення вже відомих реалізацій алгебр Лі до реалізацій алгебр Лі вищих розмірностей, які можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного вигляду.

Результатом групової класифікації повинен бути перелік нееквівалентних рівнянь досліджуваного вигляду з наведеними максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Тому *задача групової класифікації вважається розв'язаною повністю*, якщо доведено, що:

1) побудовані алгебри Лі операторів симетрії є максимальними алгебрами інваріантності отриманих рівнянь;

2) в рамках сформульованої задачі отриманий перелік рівнянь містить

лише нееквівалентні рівняння (тобто такі рівняння, які перетвореннями із групи $\mathcal{E}$ не зводяться одне в одне).

Для побудови максимальної алгебри інваріантності достатньо використати інфінітезимальний метод Лі. Перевірці ж на еквівалентність підлягають ті із рівнянь, максимальні алгебри інваріантності яких є ізоморфними. При цьому, щоб показати, що отримані рівняння є нееквівалентними, достатньо переконатися, що не існують перетворення із групи $\mathcal{E}$, які зводять одну алгебру інваріантності в іншу.

Перш ніж переходити до групової класифікації рівнянь вигляду (1.1), розглянемо у запропонованому підході групову класифікацію рівняння (1.3) і впевнимося, що використання нового методу приводить до вже відомого результату.

Як було показано вище, групу інваріантності рівняння (1.3) генерують інфінітезимальні оператори вигляду (1.4). Також, внаслідок лінійності, рівняння (1.3) допускає оператор $u\partial_u$ і при цьому має місце комутаційне співвідношення

$$[\mathrm{v}, u\partial_u] = 0$$

для довільного оператора v вигляду (1.4). Отже, оператори v (1.4) і $u\partial_u$ складають базис двовимірної абелевої алгебри Лі (позначимо її $A_{2.1}$). Тому для рівняння (1.3) виконання другого кроку алгоритму розпочинаємо із побудови реалізацій алгебри $A_{2.1}$. Має місце твердження.

Твердження 1.1.1 *Нехай алгеброю інваріантності рівняння (1.3) є алгебра Лі операторів симетрії ізоморфна алгебрі $A_{2.1}$. Тоді з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення (1.6) із групи $\mathcal{E}$, існують дві реалізації алгебри $A_{2.1}$, які є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1.3):*

$$\begin{aligned} A^1_{2.1} &= \langle u\partial_u, \partial_t\rangle, \\ A^2_{2.1} &= \langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x\rangle. \end{aligned}$$

Відповідні інваріантні рівняння мають такий вигляд:

$$A^1_{2.1} \ : \ u_{tx} + B(x)u_x + u = 0; \tag{1.7}$$

$$A^2_{2.1} \ : \ u_{tx} + B(z)u_x + C(z)u = 0, \quad z = t - x, \quad |B| + |C| \neq 0. \tag{1.8}$$

Нагадаємо, що тут ми не враховуємо тривіальну нескінченновимірну симетрію рівняння (1.3), та вилучаємо із розгляду ті із рівнянь, які інтегруються в загальному вигляді.

Доведення. Перш за все переконаємося, що в операторі v вигляду (1.4) хоча б одна із функцій f або g є ненульовою. Дійсно, якщо $f = g = 0$, то класифікуюча система (1.5) зводиться до системи

$$h_t = h_x = h_{tx} = 0,$$

з якої випливає, що $h = c = const$, і оператор $\mathrm{v} = cu\partial_u$ є лінійно залежним з оператором $u\partial_u$.

Отже, хоча б одна із функцій f або g в операторі v є ненульовою. При цьому з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення з групи $\mathcal{E}$, можемо завжди вважати, що $f \neq 0$. Дійсно, якщо в (1.4) $f = 0$, то $g \neq 0$, і заміна змінних $t \to x, \ x \to t$ показує справедливість припущення.

Нехай, спочатку, в операторі v $\ f \neq 0, \ g = 0$, тобто

$$\mathrm{v} = f(t)\partial_t + h(t,x)u\partial_u.$$

Заміна змінних (1.6) (a), де функція α є розв'язком рівняння $\dot{\alpha} = f^{-1}$, функція θ—ненульовим розв'язком рівняння $f\theta_t + h\theta = 0, \quad \rho = \rho(x)$, зводить оператор v в оператор

$$\tilde{\mathrm{v}} = \partial_\tau.$$

Повернувшись до початкових позначень змінних, приходимо до реалізації $A^1_{2.1}$.

Нехай, далі, $f \cdot g \neq 0$. Тоді заміна змінних (1.6) (a) , де α є розв'язком рівняння $\dot{\alpha} f = 1$, g є розв'язком рівняння $\beta' g = 1$, θ —ненульовим розв'язком рівняння

$$f\theta_t + g\theta_x + h\theta = 0,$$

а ρ—розв'язком рівняння

$$f\rho_t + g\rho_x = 0,$$

зводить оператор v в оператор $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_\tau + \partial_\xi$.

Повернувшись до початкових позначень змінних, приходимо до реалізації $A^2_{3.1}$.

Нееквівалентність отриманих реалізацій випливає з того, що зведення оператора $\partial_t+\partial_x$ в оператор ∂_τ потребує в (1.6) (a) $\dot{\alpha} = 0$. А це суперечить умові невиродженості заміни змінних (1.6).

Переходимо до побудови відповідних інваріантних рівнянь.

Для оператора ∂_t визначальна система (1.5) набуває вигляду

$$A_t = 0, \qquad B_t = 0, \qquad C_t = 0,$$

тобто, в інваріантному рівнянні $A = A(x),\ B = B(x),\ C = C(x)$.

Далі, заміна змінних (1.6) (a), де $\alpha = t,\ \theta = \exp(\int A(x)dx),\ \beta$—довільна функція, така що $\beta' \neq 0$, якщо $C = AB$, або $\beta = \int (C - AB)dx$, якщо $C \neq AB$, зводить інваріантне рівняння до рівняння

$$v_{\tau\xi} + B(\xi)v_\xi + \epsilon v = 0, \quad \epsilon = 0, 1,$$

залишаючи вигляд базисних операторів алгебри $A^1_{2.1}$ незмінним.

Якщо $\epsilon = 0$, то рівняння

$$u_{tx} + B(x)u_x = 0$$

має загальний розв'язок

$$u = \int \varphi(x)e^{-tB(x)}dx + \psi(t),$$

де φ, ψ—довільні гладкі функції своїх аргументів. Згідно зі сказаним вище, це рівняння ми вилучаємо із подальшого розгляду.

Отже, з точністю до позначень незалежних і залежної змінних прийшли до рівняння (1.7).

Аналогічно, розглядаючи реалізацію $A^2_{2.1}$, приходимо до рівняння (1.8).

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що у випадку довільних значень функцій B і C в рівняннях (1.7), (1.8) реалізації $A^1_{2.1}, A^2_{2.1}$ є їх максимальними алгебрами інваріантності.

Твердження доведене.

Здійснена попередня групова класифікація рівняння (1.3) дозволяє, для подальшого аналізу можливостей розширення симетрії досліджуваного класу рівнянь, використовувати й стандартні методи.

Так, для рівняння (1.7) визначальна система (1.5) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&h_t + B\dot{f} + gB_x = 0, \quad B = B(x),\\
&h_x = 0,\\
&\dot{f} + g' = 0.
\end{aligned}$$

З двох останніх рівнянь системи випливає, що $h = h(t)$, $f = \lambda t + \lambda_1$, $g = -\lambda x + \lambda_2$, де $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$— довільні дійсні сталі.

Внаслідок цього перше рівняння системи набуває вигляду

$$\dot{h} = (\lambda x - \lambda_2)B_x - \lambda B.$$

Оскільки права частина останньої рівності залежить лише від x, а ліва лише від t, то

$$h = \lambda_3 t + \lambda_4, \qquad \lambda_3, \lambda_4 \in R,$$

а функція $B = B(x)$ задовольняє рівняння

$$(\lambda x - \lambda_2)B_x - \lambda B = \lambda_3.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
B &= mx + m_1, \quad m, m_1 \in R,\\
\lambda_3 &= -m\lambda_2 - \lambda m_1.
\end{aligned}$$

Далі безпосередньою перевіркою переконуємося, що заміна змінних

$$t \to t, \quad x \to x, \quad u = e^{-m_1 t} v, \quad v = v(t, x),$$

дозволяє покласти в B і λ_3 $m_1 = 0$. Отже, отримали рівняння

$$u_{tx} + mxu_x + u = 0, \quad m \in R,$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є чотиривимірна розв'язна алгебра Лі операторів симетрії

$$\langle u\partial_u, \partial_t, t\partial_t - x\partial_x, \partial_x - mtu\partial_u \rangle.$$

Для рівняння (1.8) визначальна система (1.5) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&h_t + B\dot{f} + B'(f - g) = 0,\\
&C(\dot{f} + g') + C'(f - g) = 0,\\
&h = h(t), \quad B' = \frac{dB}{dz}, \quad C' = \frac{dC}{dz}, \quad z = t - x,
\end{aligned}$$

дослідження якої приводить до рівняння

$$u_{tx} + \frac{m}{z}u_x + \frac{k}{z^2}u = 0, \quad m, k \in R, \ |m| + |k| \neq 0, \ z = t - x,$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є чотиривимірна алгебра Лі з базисними операторами

$$\langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x - mtu\partial_u \rangle.$$

Безпосередня перевірка показала, що ця алгебра є ізоморфною алгебрі $sl(2, R) \oplus \langle u\partial_u \rangle$, яка містить напівпростий фактор Леві.

Із проведених вище міркувань випливає справедливість такого твердження.

Твердження 1.1.2 *Рівняння вигляду (1.3) допускає алгебру інваріантності розмірності вищої за два тоді, коли воно є еквівалентним рівнянню*

$$u_{tx} + mxu_x + u = 0 \quad (m \in R)$$

або рівнянню

$$u_{tx} + \frac{m}{z}u_x + \frac{k}{z^2}u = 0, \quad z = t - x, \quad k, m \in R, \quad |k| + |m| \neq 0,$$

алгебрами інваріантності яких є відповідно такі чотиривимірні алгебри Лі нетривіальних операторів симетрії:

$$\langle \partial_t, t\partial_t - x\partial_x, \partial_x - mtu\partial_u, u\partial_u \rangle \ (m \in R);$$
$$\langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x - mtu\partial_u \rangle \ (m \in R).$$

Переконаємося, що отриманий в твердженні 1.1.2 результат збігається із класифікаційним результатом Л.В. Овсяннікова.

Дійсно, перше із наведених в твердженні 1.1.2 рівнянь заміною змінних

$$\overline{t} = -t, \quad \overline{x} = x, \quad v = e^{tx}u$$

зводиться до рівняння

$$v_{\overline{t}\overline{x}} + \overline{t}v_{\overline{t}} + (1-m)\overline{x}v_{\overline{x}} + (1-m)\overline{t}\overline{x}v = 0,$$

яке з точністю до позначення змінних і сталої $(1 - m = p)$ збігається із другим рівнянням із класифікації Овсяннікова.

Поклавши в другому рівнянні із твердження 1.1.2 $k = \dfrac{2}{q}$, $m = \dfrac{2(1-p)}{q}$, бачимо, що заміна змінних

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = -x, \quad v = z^{\frac{2}{q}}u, \quad z = t - x$$

зводить його до рівняння

$$v_{\overline{t}\overline{x}} - \frac{2v_{\overline{t}}}{q(\overline{t}+\overline{x})} - \frac{2pv_{\overline{x}}}{q(\overline{t}+\overline{x})} + \frac{4pv}{q^2(\overline{t}+\overline{x})} = 0,$$

яке є рівнянням Ейлера–Пуассона.

Зауважимо, що зі сказаного вище випливає така основна відмінність запропонованого методу від класичного методу Лі–Овсяннікова. Якщо в класичному методові на чільному місці завжди знаходяться специфікації функцій, від яких приходять до відповідних їм алгебр Лі операторів симетрії, то в запропонованому нами методові вирішальну роль в груповій класифікації рівняння відіграють саме алгебри Лі операторів симетрії (реалізації алгебр Лі), які і визначають відповідні специфікації довільних функцій в досліджуваному рівнянні.

1.2. Попередня групова класифікація рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом

У другому та третьому підрозділах ми розглядаємо задачу групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.1), де $f = 1$, $g = F(t, x, u, u_x)$— гладка функція своїх аргументів, яка є нелінійною хоча б за однією із змінних u або u_x.

Отже, розглядається задача групової класифікації квазілінійних рівнянь вигляду

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad u = u(t, x). \tag{1.9}$$

1.2.1. Оператори симетрії та група еквівалентності рівняння (1.9). На першому кроці групової класифікації рівняння (1.9) знайдемо вигляд інфінітезимальних операторів групи симетрії даного рівняння та побудуємо його групу еквівалентності.

Згідно із відомим алгоритмом Лі [51, 57], найбільш загальний вигляд інфінітезимальних операторів шукаємо у класі операторів

$$Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{1.10}$$

де $\tau = \tau(t, x, u)$, $\xi = \xi(t, x, u)$, $\eta = \eta(t, x, u)$—довільні дійсні гладкі функції, які визначені у просторі $\mathrm{V} = R_2 \times R_1$ незалежних $R_2 = \langle t, x\rangle$ та залежної $R_1 = \langle u\rangle$ змінних. Умова інваріантності рівняння (1.9) відносно оператора Q (1.10) має вигляд [51, 57]

$$\varphi^t - \varphi^{xx} - \tau F_t - \xi F_x - \eta F_u - \varphi^x F_{u_x}|_{(1.9)} = 0, \tag{1.11}$$

де $\varphi^t, \varphi^x, \varphi^{xx}$—коефіцієнти у двічі продовженому операторі Q, які визначаються згідно з такими формулами:

$$\begin{aligned}
\varphi^t &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\
\varphi^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
\varphi^{xx} &= D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_t(\tau) - u_{xx} D_x(\xi),\\
D_t &= \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \ldots,\\
D_x &= \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \ldots.
\end{aligned}$$

Умова $|_{(1.9)}$ означає заміну в (1.11) диференціальної змінної u_t на $u_{xx} + F(t,x,u,u_x)$. Виконавши відповідні перетворення та обчислення в (1.11), приходимо до такого твердження.

Твердження 1.2.1 *Група симетрії рівняння (1.9) генерується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$Q = 2a(t)\partial_t + (\dot{a}(t)x + b(t))\partial_x + f(t,x,u)\partial_u, \tag{1.12}$$

де функції a, b, f, F задовольняють рівність

$$\begin{aligned}
&f_t - u_x(\ddot{a}x + \dot{b}) + (f_u - 2\dot{a})F = f_{xx} + 2u_x f_{xu} + u_x^2 f_{uu} + \\
&+2aF_t + (\dot{a}x + b)F_x + fF_u + f_x F_{u_x} + u_x(f_u - \dot{a})F_{u_x}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Неважко переконатися у тому, що коли на функцію F не накладено ніяких додаткових умов, окрім її гладкості за аргументами, то із (1.13) випливає, що оператор Q (1.12) є нульовим. Тобто, в загальному випадкові рівняння (1.9) має нульову групу інваріантності. Рівність (1.13) у подальшому ми називаємо класифікуючим рівнянням.

Очевидним є те, що прямий аналіз і побудова розв'язків рівняння (1.13) є неможливими, і, виходячи з нього, ми не можемо отримати повний перелік специфікацій функцій F у рівнянні (1.9), для яких рівняння матиме нетривіальну симетрію. Знайдемо групу $\mathcal{E}$ рівняння (1.9)

Для побудови групи еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1.9) використовуємо прямий метод. Нехай перетворення

$$\tau = \alpha(t,x,u,), \quad \xi = \beta(t,x,u,), \quad v = \gamma(t,x,u,) \tag{1.14}$$

є невиродженою заміною змінних у просторі $V = \langle t, x, u \rangle$, яка трансформує рівняння (1.9) в рівняння

$$v_\tau = v_{\xi\xi} + G(\tau, \xi, v, v_\xi). \tag{1.15}$$

Згідно із загальним правилом заміни змінних, має місце рівність

$$u_x = \frac{v_\tau \alpha_x + v_\xi \beta_x - \gamma_x}{\gamma_u - v_\tau \alpha_u - v_\xi \beta_u},$$

але із (1.15), внаслідок довільності функції G, випливає, що повинно бути

$$u_x \to g(\tau, \xi, v, v_\xi),$$

тобто, в (1.14) обов'язково $\alpha_x = \alpha_u = 0$, або $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$. Тоді заміні змінних (1.14), де $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$, відповідають співвідношення

$$\begin{aligned} u_t &= v_\tau \dot\alpha (\gamma_u - v_\xi \beta_u)^{-1} + \theta_1(\tau, \xi, v, v_\xi), \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \{ \beta_x^2 (\gamma_u - v_\xi \beta_u)^{-1} + 2\beta_x \beta_u (v_\xi \beta_x - \gamma_x)(\gamma_u - v_\xi \beta_u)^{-2} + \\ &\quad + \beta_u^2 (v_\xi \beta_x - \gamma_x)^2 (\gamma_u - v_\xi \beta_u)^{-3} \} + \theta_2(\tau, \xi, v, v_\xi), \end{aligned}$$

де θ_1, θ_2—деякі відомі функції своїх аргументів.

Врахувавши вигляд рівняння (1.15), приходимо до рівності

$$\dot\alpha (\gamma_u - v_\xi \beta_u)^2 = \beta_x^2 (\gamma_u - v_\xi \beta_u)^2 + 2\beta_x \beta_u (v_\xi \beta_x - \gamma_x)(\gamma_u - v_\xi \beta_u) + \beta_u^2 (v_\xi \beta_x - \gamma_x)^2.$$

Оскільки α, β, γ не залежать від u_x (а тому і відповідні вирази в нових змінних від v_ξ), то, провівши розщеплення останньої рівності за степенями v_ξ, отримуємо таку визначальну систему для функцій α, β, γ:

$$\begin{aligned} &(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u^2 = \gamma_x \beta_u (\gamma_x \beta_u - 2\beta_x \gamma_u), \\ &-2(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u \beta_u = 2\beta_x^2 \gamma_u \beta_u, \quad \dot\alpha \beta_u^2 = 0. \end{aligned}$$

Так як $\dot\alpha \neq 0$, то з останнього рівняння системи випливає, що $\beta_u = 0$, і система зводиться до рівняння

$$(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u^2 = 0.$$

Внаслідок невиродженості заміни змінних (1.14), $\gamma_u \neq 0$, а тому $\dot\alpha = \beta_x^2$. Звідси випливає, що $\dot\alpha > 0$, а $\beta = \pm\sqrt{\dot\alpha}x + \rho(t)$. Прийшли до такого твердження.

Твердження 1.2.2 *Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1.9) складають перетворення*

$$\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = \varepsilon\sqrt{\dot{T}(t)}x + X(t), \quad \bar{u} = U(t, x, u), \tag{1.16}$$

де $\dot{T}(t) > 0, \quad U_u \neq 0, \quad \dot{T} = \dfrac{dT}{dt}, \ \varepsilon = \pm 1.$

1.2.2. Інваріантність рівняння (1.9) відносно одно– та двовимірних алгебр Лі операторів симетрії. Тут ми, згідно з другим пунктом алгоритму методу, проводимо класифікацію рівнянь вигляду (1.9) , які допускають одно– та двопараметричні групи інваріантності.

Як було показано вище, інфінітезимальні оператори, які складають базис алгебри Лі інваріантності рівняння (1.9), мають вигляд (1.12). Для спрощення їх вигляду можемо використовувати заміни змінних (1.16), які зберігають інваріантним вигляд рівняння (1.9).

Теорема 1.2.1 *Існують перетворення (1.16) із групи $\mathcal{E}$, які зводять оператор (1.12) до одного із таких операторів:*

$$Q = \pm\partial_t, \tag{1.17}$$

$$Q = \partial_x, \tag{1.18}$$

$$Q = \partial_u. \tag{1.19}$$

Доведення. Нехай Q має вигляд (1.12). Тоді, здійснивши заміну змінних (1.16), приходимо до оператора

$$\begin{aligned} Q \to \tilde{Q} \ &= \ 2a\dot{T}\partial_{\bar{t}} + [2a(\dot{X} + \frac{1}{2}x\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}) + \\ &+\varepsilon(\dot{a}x + b)\sqrt{\dot{T}}]\partial_{\bar{x}} + [2aU_t + (\dot{a}x + b)U_x + fU_u]\partial_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Врахувавши, що оператор Q не може бути нульовим оператором, розрізняємо випадки $f = 0$ та $f \neq 0$.

Випадок 1. $f = 0$.

У цьому випадкові в (1.16) покладаємо $U = U(u)$, а тому

$$\tilde{Q} = 2a\dot{T}\partial_{\overline{t}} + [2a(\dot{X} + \frac{1}{2}x\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}) + \varepsilon(\dot{a}x + b)\sqrt{\dot{T}}]\partial_{\overline{x}}.$$

Якщо $a = 0$, то $b \neq 0$, і, поклавши в (1.16) T рівним розв'язку рівняння $\dot{T} = |b|^{-2}$, приходимо до оператора

$$\tilde{Q} = \pm\partial_{\overline{x}}.$$

З точністю до дії перетворень (1.16) можемо вважати, що

$$\tilde{Q} = \partial_{\overline{x}}.$$

Якщо ж $a \neq 0$, то поклавши в (1.16) $\varepsilon = 1$, T рівним розв'язкові рівняння $\dot{T} = \dfrac{1}{2|a|}$, X рівним розв'язкові рівняння

$$2a\dot{X} + b\sqrt{\dot{T}} = 0,$$

приходимо до оператора

$$\tilde{Q} = \pm\partial_{\overline{t}}.$$

Випадок 2. $f \neq 0$.

Якщо $a = b = 0$, то, поклавши в (1.16) функцію U рівною розв'язкові рівняння

$$fU_u = 1,$$

приходимо до оператора

$$\tilde{Q} = \partial_{\overline{u}}.$$

Якщо ж $|a| + |b| \neq 0$, то, поклавши в (1.16) функцію U рівною розв'язкові рівняння

$$2aU_t + (\dot{a}x + b)U_x + fU_u = 0, \qquad U_u \neq 0,$$

приходимо до вже розглянутого випадку.

Прямою перевіркою можна переконатися, що отримані оператори не можна звести один в інший перетвореннями (1.16) з групи $\mathcal{E}$ рівняння (1.9).

Теорема доведена.

Із доведеної теореми випливає наслідок, який містить перший класифікаційний результат для нелінійних рівнянь вигляду (1.9).

Наслідок 1.2.1 *Якщо нелінійне рівняння вигляду (1.9) допускає одновимірну алгебру інваріантності A_1, то з точністю до еквівалентності воно збігається з одним із таких трьох рівнянь:*

$$u_t = u_{xx} + F(x, u, u_x), \tag{1.20}$$

$$u_t = u_{xx} + F(t, u, u_x), \tag{1.21}$$

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u_x). \tag{1.22}$$

Максимальні алгебри інваріантості цих рівнянь відповідно мають вигляд

$$A_1^1 = \langle \partial_t \rangle, \quad A_1^2 = \langle \partial_x \rangle, \quad A_1^3 = \langle \partial_u \rangle.$$

Доведення. Припустимо, що рівняння (1.9) допускає одновимірну алгебру інваріантності. Тоді базисний оператор цієї алгери має вигляд (1.12) і, згідно з результатами теореми 1.2.1, зводиться перетвореннями із групи $\mathcal{E}$ до одного із операторів (1.17)–(1.19). Класифікуюче рівняння (1.13) для оператора (1.17) набуває вигляду

$$\pm F_t = 0,$$

звідки випливає, що $F = F(x, u, u_x)$. Отже, відповідне інваріантне рівняння має вигляд (1.20), для якого класифікуюче рівняння (1.13) набуває вигляду

$$f_t - u_x(\ddot{a}x + \dot{b}) + (f_u - 2\dot{a})F = f_{xx} + 2u_x f_{xu} + u_x^2 f_{uu} +$$
$$+(\dot{a}x + b)F_x + fF_u + f_x F_{u_x} + u_x(f_u - \dot{a})F_{u_x}.$$

Якщо F є довільною функцією своїх аргументів, то мають місце рівності

$$f_t = f_{xx}, \quad \ddot{a}x + \dot{b} = -2f_{xu}, \quad f_{uu} = 0,$$
$$f = 0, \quad f_x = 0, \quad f_u - \dot{a} = f_u - 2\dot{a} = 0, \quad \dot{a}x + b = 0,$$

звідки випливає, що в операторі (1.12) $f = \dot{a} = b = 0$, тобто,

$$Q = \lambda_1 \partial_t, \quad \lambda_1 \in R.$$

Отже максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.20) є одновимірна алгебра Лі операторів симетрії A_1^1.

Аналогічно проводиться і розгляд операторів (1.18) та (1.19), який приводить до рівнянь (1.21), (1.22) з максимальними алгебрами інваріантності A_1^2, A_1^3 відповідно.

Нееквівалентність отриманих рівнянь випливає з нееквівалентності їх реалізацій.

Наслідок доведено.

Добре відомо [7, 12], що серед дійсних двовимірних алгебр Лі $A_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ розрізняють дві алгебри Лі:

$$A_{2.1} \ : \ [e_1, e_2] = 0;$$
$$A_{2.2} \ : \ [e_1, e_2] = e_2.$$

Для вивчення їх реалізацій в класі операторів (1.12), ми можемо використовувати результати теореми 1.2.1 та наслідку із неї, поклавши відразу один з базисних операторів цих алгебр рівним базисному операторові однієї із реалізацій $A_1^i (i = 1, 2, 3)$. При цьому, для спрощення вигляду другого базисного оператора ми можемо використовувати відповідно перетворення

$$\begin{aligned} A_1^1 &: \ \bar{t} = t + \lambda_1, \quad \overline{x} = \varepsilon x + \lambda_2, \quad \overline{u} = U(x, u), \\ A_1^2 &: \ \bar{t} = t + \lambda_1, \quad \overline{x} = x + X(t), \quad \overline{u} = U(x, u), \\ A_1^3 &: \ \bar{t} = T(t), \quad \overline{x} = \varepsilon \sqrt{\dot{T}} x + X(t), \quad \overline{u} = u + U(t, x), \end{aligned} \tag{1.23}$$

які залишають вигляд базисних операторів алгебр A_1^i $(i = 1, 2, 3)$ незмінним.

Лема 1.2.1 *З точністю до еквівалентності реалізації алгебри $A_{2.1}$ вичерпуються такими алгебрами Лі операторів симетрії:* $\langle \partial_t, \partial_x \rangle$, $\langle \partial_t, \partial_u \rangle$, $\langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x + \partial_u \rangle$, $\langle \partial_u, g(t, x)\partial_u \rangle$ $(g \neq const)$, $\langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x \rangle$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$.

Доведення. Для побудови реалізацій алгебри $A_{2.1}$, внаслідок того, що ця алгебра є абелевою алгеброю Лі, достатньо провести розширення реалізацій одновимірних алгебр Лі ще одним оператором вигляду (1.12).

Нехай $e_1 = \partial_t$, а оператор e_2 має вигляд (1.12). Перевіривши виконання комутаційного співвідношення, яке визначає алгебру $A_{2.1}$, бачимо, що

$$e_2 = \lambda\partial_x + f(x,u)\partial_u, \quad \lambda = const.$$

Якщо $\lambda = 0$, то $f \neq 0$ і перше із перетворень (1.23), де U є розв'язком рівняння $fU_u = 1$, зводить дану реалізацію до другої реалізації із переліку твердження.

Якщо $\lambda \neq 0$, то перше із перетворень (1.23), де U—розв'язок рівняння

$$\lambda U_x + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

зводить дану реалізацію до першої реалізації із переліку твердження.

Нехай, тепер, $e_1 = \partial_x$. Тоді

$$e_2 = \lambda\partial_t + b(t)\partial_x + f(t,u)\partial_u, \quad \lambda = const.$$

Якщо $\lambda = f = 0$, то має місце остання реалізація із перерахованих у перелікові реалізацій.

Якщо $\lambda = 0$, $f \neq 0$, то друге із перетворень (1.23), де U— розв'язок рівняння $fU_u = 1$, зводить дану реалізацію до третьої реалізації із переліку. Якщо ж $\lambda \neq 0$, то друге із перетворень (1.23), де X та U рівні розв'язкам рівнянь

$$\lambda\dot{X} + b = 0, \quad \lambda U_t + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

зводить дану реалізацію до першої реалізації із переліку.

Нехай, нарешті, $e_1 = \partial_u$. Тоді

$$e_2 = 2a(t)\partial_t + (\dot{a}x + b)\partial_x + f(t,x)\partial_u.$$

У цьому випадкові третя заміна змінних (1.23) зводить оператори e_1, e_2 до операторів

$$\overline{e}_1 = \partial_{\overline{u}},$$

$$\begin{aligned}\overline{e}_2 &= 2a\dot{T}\partial_{\overline{t}} + [2a(\varepsilon\frac{\ddot{T}}{2\sqrt{\dot{T}}}x + \dot{X}) + \varepsilon\sqrt{\dot{T}}(\dot{a}x + b)]\partial_{\overline{x}} + \\ &+[2aU_t + U_x(\dot{a}x + b) + f]\partial_{\overline{u}}.\end{aligned}$$

Якщо $a = b = 0$, то маємо четверту реалізацію із переліку, де $f \neq const$. Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то, поклавши в заміні змінних T, U рівними розв'язкам рівнянь

$$\sqrt{\dot{T}}|b| = 1, \qquad bU_x + f = 0,$$

зводимо e_1, e_2 до базисних операторів третьої реалізації із переліку.

Якщо ж $a \neq 0$, то, поклавши T, X, U рівними розв'язкам рівнянь

$$\begin{aligned}&2|a|\dot{T} = 1, \qquad 2a\dot{X} + \varepsilon\sqrt{\dot{T}}b = 0,\\ &2aU_t + U_x(\dot{a}x + b) + f = 0,\end{aligned}$$

зводимо оператори e_1, e_2 до вигляду

$$\overline{e}_1 = \partial_{\overline{u}}, \qquad \overline{e}_2 = \pm\partial_{\overline{t}}.$$

Тобто, з точністю до позначень приходимо до другої реалізації із переліку.

Для завершення доведення залишається переконатися в нееквівалентності отриманих реалізацій.

Оскільки усі випадки розглядаються аналогічно, зупинимося лише на випадкові першої і другої реалізацій із переліку. Нехай $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, $\overline{e}_1 = \partial_{\overline{t}}$, $\overline{e}_2 = \partial_{\overline{u}}$. Припустивши, що існують перетворення (1.16), які зводять оператор e_1 в оператор $E_1 = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2$, оператор e_2 в оператор $E_2 = \gamma\overline{e}_1 + \delta\overline{e}_2$, $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, приходимо до рівності $\dot{T} = 0$, яка суперечить умові невиродженості групи перетворень $\mathcal{E}$. Отже, перша й друга реалізації із переліку є нееквівалентними.

Лема доведена.

Лема 1.2.2 *З точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення із групи $\mathcal{E}$, реалізації алгебри $A_{2.2}$ вичерпуються такими алгебрами Лі операторів:*

$$\langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t\rangle, \quad \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x\rangle,$$
$$\langle -u\partial_u, \partial_u\rangle, \quad \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u\rangle,$$
$$\langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u\rangle \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Доведення леми 1.2.1 проводиться аналогічно доведенню леми 1.2.1, тому тут ми його не наводимо.

Використовуючи результати лем 1.2.1 та 1.2.2, приходимо до другого класифікаційного результату для досліджуваного класу рівнянь (1.9). Далі ми використовуємо такі позначення:

$$\begin{aligned}
A^1_{2.1} &= \langle \partial_t, \partial_x\rangle; \quad A^2_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_u\rangle; \quad A^3_{2.1} = \langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x + \partial_u\rangle;\\
A^1_{2.2} &= \langle -t\partial_x - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t\rangle; \quad A^2_{2.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x\rangle;\\
A^3_{2.2} &= \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u\rangle; \quad A^4_{2.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u\rangle \quad (\epsilon = \pm 1).
\end{aligned}$$

Теорема 1.2.2 *Нелінійні рівняння вигляду (1.9), які допускають двовимірні алгебри інваріантності, з точністю до еквівалентності вичерпуються такими рівняннями:*

$$\begin{aligned}
A^1_{2.1} &: \ u_t = u_{xx} + \tilde{F}(u, u_x);\\
A^2_{2.1} &: \ u_t = u_{xx} + \tilde{F}(x, u_x);\\
A^3_{2.1} &: \ u_t = u_{xx} - \dot{\alpha}uu_x + \tilde{F}(t, u_x), \quad \alpha = \alpha(t);\\
A^1_{2.2} &: \ u_t = u_{xx} + u_x^2\tilde{F}(u, xu_x);\\
A^2_{2.2} &: \ u_t = u_{xx} + t^{-1}\tilde{F}(u, tu_x^2);\\
A^3_{2.2} &: \ u_t = u_{xx} + u_x\tilde{F}(t, e^x u_x);\\
A^4_{2.2} &: \ u_t = u_{xx} + u_x\tilde{F}(x, e^{\epsilon t}u_x), \quad \epsilon = \pm 1.
\end{aligned}$$

Першою у кожному рядкові переліку вказано одну із семи реалізацій двовимірних алгебр Лі, які для довільних значень функцій $\tilde{F}$ є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

Доведення. Якщо рівняння вигляду (1.9) допускає двовимірну алгебру Лі інваріантності, то базис цієї алгебри складають оператори вигляду (1.12). Згідно з результатами лем 1.2.1 та 1.2.2, з точністю до еквівалентності такі алгебри інваріантності належать до множини реалізацій алгебр $A_{2.1}$ та $A_{2.2}$, які отримано у згаданих вище лемах.

Тому для доведення теореми достатньо із множини отриманих реалізацій алгебр $A_{2.1}$, $A_{2.2}$ відібрати ті, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1.9). Для цього достатньо вказати вигляд функцій F у відповідних інваріантних рівняннях.

Для першої та другої реалізацій із леми 1.2.1 (ми їх позначаємо відповідно $A^1_{2.1}, A^2_{2.1}$) вигляд інваріантних рівнянь є очевидним:

$$\begin{aligned} A^1_{2.1} &: \; u_t = u_{xx} + \tilde{F}(u, u_x); \\ A^2_{2.1} &: \; u_t = u_{xx} + \tilde{F}(x, u_x). \end{aligned}$$

Для третьої реалізації із леми 1.2.1 (реалізації $A^3_{2.1}$) перевірка класифікуючого рівняння (1.13), з урахуванням $F = F(t, u, u_x)$, приводить до рівності

$$-\dot{\alpha} u_x = F_u,$$

звідки випливає, що $A^3_{2.1}$—інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = u_{xx} - \dot{\alpha} u u_x + \tilde{F}(t, u_x).$$

Перевірка класифікуючого рівняння (1.13) для четвертої реалізації алгебри $A_{2.1}$ із леми 1.2.1, з урахуванням $F = F(t, x, u_x)$, привела до рівності

$$g_t = g_{xx} + g_x F_{u_x}, \quad g = g(t, x).$$

Оскільки $g \neq const$, то обов'язково $g_x \neq 0$, а тому

$$F = (g_t - g_{xx}) g_x^{-1} u_x + \tilde{F}(t, x),$$

звідки випливає, що відповідне інваріантне рівняння є лінійним диференціальним рівнянням і з подальшого розгляду ми його вилучаємо.

Нарешті, розгляд останньої із реалізацій алгебри $A_{2.1}$ привів до умови

$$\dot{\alpha} u_x = 0,$$

звідки випливає $\dot{\alpha} = 0$, а це суперечить умові існування цієї реалізації. Отже, ця реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь досліджуваного вигляду.

Провівши аналогічний аналіз для реалізацій алгебри $A_{2.2}$ із переліку леми 1.2.2, ми отримали, що лише третя із них не задовольняє умов сформульованої задачі: відповідне інваріантне рівняння

$$u_t = u_{xx} + u_x \tilde{F}(t, x)$$

є лінійним.

Решта ж реалізацій алгебри $A_{2.2}$ (реалізації $A^i_{2.2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$) задовольняють умови сформульованої задачі і відповідні їм інваріантні рівняння мають вигляд, який наведено у формулюванні теореми.

Для завершення доведення теореми ми, використовуючи стандартний метод Лі, переконалися, що максимальні алгебри інваріантності отриманих рівнянь збігаються із відповідними реалізаціями двовимірних алгебр Лі операторів симетрії.

Теорема доведена.

1.2.3. Інваріантність рівняння (1.9) відносно тривимірних алгебр Лі операторів симетрії. Згідно з відомим переліком [43], дійсні тривимірні алгебри Лі $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3, \rangle$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються двома простими алгебрами Лі

$$\begin{aligned} so(3) &: [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2; \\ sl(2, R) &: [e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \end{aligned}$$

двома розкладними розв'язними алгебрами Лі

$$\begin{aligned} A_{3.1} &: [e_i, e_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ A_{3.2} &: [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0; \end{aligned}$$

та сімома нерозкладними розв'язними алгебрами Лі

$$
\begin{aligned}
A_{3.3} &: \; [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0; \\
A_{3.4} &: \; [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\
A_{3.5} &: \; [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\
A_{3.6} &: \; [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\
A_{3.7} &: \; [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = qe_2, \quad [e_1, e_2] = 0, \quad 0 < |q| < 1; \\
A_{3.8} &: \; [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = 0; \\
A_{3.9} &: \; [e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, \quad [e_1, e_2] = 0, \; q > 0.
\end{aligned}
$$

Класифікацію нелінійних рівнянь, які допускають тривимірні алгебри інваріантності, розпочинаємо із розгляду реалізацій простих алгебр Лі $so(3)$ та $sl(2, R)$ в класі операторів (1.12).

Лема 1.2.3 *В класі операторів (1.12) не існують реалізації алгебри* $so(3)$, *а реалізації алгебри* $sl(2, R)$ *з точністю до еквівалентності вичерпуються такими трійками операторів:*

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x \rangle, \\
&\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle, \\
&\langle \partial_u, u\partial_u, -u^2\partial_u \rangle.
\end{aligned}
$$

<u>Доведення.</u> Під час побудови реалізацій алгебр $so(3)$ та $sl(2, R)$ ми, грунтуючись на результатах теореми 1.2.1 та наслідку до неї, відразу покладаємо, що один із базисних операторів цих алгебр пробігає множину операторів $\{\partial_t, \partial_x, \partial_u\}$.

Розглянемо спочатку питання про існування реалізацій алгебри $so(3)$. Нехай $e_1 = \partial_t$, а оператори e_2, e_3 мають вигляд (1.12). Перевіривши виконання комутаційних співвідношень $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_3, e_1] = e_2$, бачимо, що з точністю до еквівалентності можна покласти

$$
e_2 \;=\; 2\alpha \cos t\partial_t + [-\alpha x \sin t + \beta \cos(t + \gamma)]\partial_x +
$$

$$
\begin{aligned}
& +\varphi(x,u)\cos[t+\psi(x,u)]\partial_u, \\
e_3 &= -2\alpha\sin t\partial_t - [\alpha x\cos t + \beta\sin(t+\gamma)]\partial_x - \\
& -\varphi(x,u)\sin[t+\psi(x,u)]\partial_u,
\end{aligned}
$$

де α, β, γ—довільні дійсні сталі, φ та ψ—довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів.

Але виконання третього комутаційного співвідношення $[e_2, e_3] = e_1$ приводить до умови $4\alpha^2 = -1$, яка не має сенсу в дійсній області.

Якщо $e_1 = \partial_x$, то аналогічні міркування приводять до хибної рівності $1 = 0$.

Нарешті, якщо $e_1 = \partial_u$, то, перевіривши комутаційні співвідношення, які визначають алгебру $so(3)$, бачимо, що

$$
e_2 = \varphi(t,x)\cos u\partial_u, \quad e_3 = -\varphi(t,x)\sin u\partial_u,
$$

де $\varphi^2 = -1$.

Отже, в класі операторів (1.12) не існують реалізації алгебри $so(3)$.

Перейдемо тепер до розгляду реалізацій алгебри $sl(2,R)$. Нехай e_2 пробігає множину операторів $\{\partial_t, \partial_x, \partial_u\}$, а оператори e_1, e_3 мають вигляд (1.12).

Якщо $e_2 = \partial_t$, то, перевіривши виконання комутаційних співвідношень, які визначають алгебру $sl(2,R)$, бачимо, що з точністю до еквівалентності можемо покласти

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \lambda_1 e^{-t}(2\partial_t - x\partial_x), \\
e_3 &= -\frac{1}{2}\lambda_1^{-1}e^t\partial_t - \frac{1}{4}\lambda_1^{-1}xe^t\partial_x + \epsilon x^2 e^t\partial_u,
\end{aligned}
$$

де $\lambda_1 \in R, \ \lambda_1 \neq 0, \ \epsilon = 0, 1$.

Далі, заміна змінних

$$
\overline{t} = \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}e^t, \qquad \overline{x} = \sqrt{\frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1}}xe^{\frac{1}{2}t}, \qquad \overline{u} = \frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1}u, \quad \lambda_1 \neq 0,
$$

зводить оператор e_2 в оператор $\overline{t}\partial_{\overline{t}} + \frac{1}{2}\overline{x}\partial_{\overline{x}}$, оператор e_1 в оператор $\partial_{\overline{t}}$, а оператор e_3 в оператор $-\overline{t}^2\partial_{\overline{t}} - \overline{t}\overline{x}\partial_{\overline{x}} + \epsilon\overline{x}^2\partial_{\overline{u}}$ $(\epsilon = 0, 1)$. Отже, в залежності від значення ϵ маємо одну із двох перших наведених у формулюванні реалізацій алгебри $sl(2, R)$.

Якщо $e_2 = \partial_x$, то перевірка комутаційних співвідношень, які визначають алгебру $sl(2, R)$, приводить до хибної рівності $-2 = 0$.

Якщо ж $e_2 = \partial_u$, то, перевіривши виконання комутаційних співвідношень, які визначають алгебру $sl(2, R)$, бачимо, що з точністю до еквівалентності можемо покласти

$$\begin{aligned} e_1 &= e^{-u}\partial_u, \\ e_3 &= -e^u\partial_u. \end{aligned}$$

Далі, заміна змінних

$$\bar{t} = t, \qquad \overline{x} = x, \qquad \overline{u} = e^u$$

зводить оператор e_1 в оператор $\partial_{\overline{u}}$, оператор e_2 — в оператор $\overline{u}\partial_{\overline{u}}$, а оператор e_3—в оператор $-\overline{u}^2\partial_{\overline{u}}$. Прийшли до третьої реалізації із наведеного переліку у формулюванні леми. В нееквівалентності отриманих реалізацій алгебри $sl(2, R)$ переконуємося безпосередньою перевіркою.

Лема доведена.

Теорема 1.2.3 *Нелінійні рівняння вигляду (1.9), які допускають алгебри інваріантності ізоморфні напівпростим алгебрам Лі, з точністю до еквівалентності вичерпуються рівнянням*

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega),$$

де G—довільна гладка функція змінної $\omega = 2u - xu_x$. У випадку довільного значення функції G максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння є така реалізація алгебри $sl(2, R)$:

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle.$$

Доведення. З точністю до ізоморфізму серед найнижчих напівпростих дійсних алгебр Лі розрізняють дві тривимірні алгебри Лі [7]: $so(3)$, $sl(2, R)$.

Згідно з результатами леми 1.2.3, в класі операторів (1.12) реалізації алгебри $so(3)$ не існують, а реалізації алгебри $sl(2,R)$ з точністю до еквівалентності вичерпуються однією із таких реалізацій:

$$\langle\partial_t, t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t-tx\partial_x\rangle,$$
$$\langle\partial_t, t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t-tx\partial_x+x^2\partial_u\rangle,$$
$$\langle\partial_u, u\partial_u, -u^2\partial_u\rangle.$$

Оскільки перші дві реалізації містять оператор ∂_t, то у відповідних їм інваріантних рівняннях $F=F(x,u,u_x)$. За цих умов класифікуюче рівняння (1.13) для оператора $t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x$ набуває вигляду

$$-2F = xF_x - u_xF_{u_x},$$

звідки випливає, що

$$F = x^{-2}\tilde{F}(u,\omega), \quad \omega = xu_x. \tag{1.24}$$

Тоді для оператора $-t^2\partial_t-tx\partial_x$ класифікуюче рівняння (1.13) набуває вигляду

$$-2\omega = 0,$$

звідки випливає, що перша реалізація алгебри $sl(2,R)$ не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (1.9).

Для оператора $-t^2\partial_t-tx\partial_x+x^2\partial_u$ класифікуюче рівняння (1.13), де F має вигляд (1.24), набуває вигляду

$$2\tilde{F}_\omega+\tilde{F}_u = \omega-2,$$

звідки випливає, що у відповідному інваріантному рівнянні

$$F = \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega), \qquad \omega = 2u - xu_x. \tag{1.25}$$

Третя реалізація алгебри $sl(2,R)$ містить оператор ∂_u, тому у відповідному інваріантному рівнянні $F=F(t,x,u_x)$. Але вже вимога інваріантності рівняння відносно оператора $u\partial_u$ приводить до рівності

$$F = u_xF_{u_x},$$

звідки випливає, що

$$F = u_x \tilde{F}(t, x),$$

тобто, відповідне останній реалізації інваріантне рівняння є лінійним.

Підводячи підсумок, бачимо, що $sl(2, R)$–інваріантні нелінійні рівняння вигляду (1.9) вичерпуються одним рівнянням, яке наведене у формулюванні теореми і максимальна алгебра інваріантності якого, як показала безпосередня перевірка, збігається з відповідною реалізацією алгебри $sl(2, R)$.

Для доведення теореми залишається переконатися, що отриманим рівнянням вичерпуються нелінійні рівняння вигляду (1.9), алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі або містять їх як підалгебри. Для цього нам достатньо переконатися, що, окрім відомої реалізації алгебри $sl(2, R)$, в класі операторів (1.12) не існують такі реалізації напівпростих дійсних алгебр Лі, які б задовольняли умовам сформульованої задачі.

Згідно з відомою теоремою Картана [7, 92], будь–яка напівпроста дійсна алгебра Лі може бути розкладеною у пряму суму попарно ортогональних простих алгебр Лі і цей розклад єдиний (з точністю до ізоморфізму). Відомо (див. напр., [7, 12, 92]), що в теорії абстрактних алгебр Лі розрізняють чотири типи класичних простих алгебр Лі над полем дійсних чисел:

- Тип A_{n-1} $(n > 1)$ містить чотири дійсні форми алгебри $sl(n, C)$: $su(n)$, $sl(n, R)$, $su(p, q)$ $(p + q = n,\ p \geq q)$, $su^*(2n)$.
- Тип D_n $(n > 1)$ містить три дійсні форми алгебри $so(2n, C)$: $so(2n)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n,\ p \geq q)$, $so^*(2n)$.
- Тип B_n $(n > 1)$ містить дві дійсні форми алгебри $so(2n + 1, C)$: $so(2n + 1)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n + 1, p > q)$.
- Тип C_n $(n \geq 1)$ містить три дійсні форми алгебри $sp(n, C)$: $sp(n)$, $sp(n, R)$, $sp(p, q)$ $(p + q = n, p \geq q)$.

Серед найнижчих класичних простих алгебр Лі з точністю до ізоморфізму розрізняють дві алгебри $so(3)$ та $sl(2,R)$. Звідси випливає, що усі можливі реалізації тривимірних простих алгебр Лі в класі операторів (1.12), які задовольняють умову сформульованої задачі, вичерпуються реалізацією алгебри $sl(2,R)$

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle. \tag{1.26}$$

Наступною розмірністю класичних напівпростих алгебр Лі є розмірність 6. Розрізняють (з точністю до ізоморфізму) чотири шестивимірні напівпрості алгебри Лі: $so(4)$, $so(3,1), so(2,2)$ та $so^*(4)$. Оскільки $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, $so^*(4) \sim so(3) \oplus sl(2,R)$, а алгебра $so(3,1)$ містить алгебру $so(3)$ як підалгебру, то питання про існування реалізацій шестивимірних алгебр залишається відкритим лише для алгебри $so(2,2)$. Але $so(2,2) \sim sl(2,R) \oplus sl(2,R)$, тому, поклавши $so(2,2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \rangle$, де оператори e_1, e_2, e_3 збігаються відповідно з базисними операторами реалізації (1.26), а оператори $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ мають вигляд (1.12), із виконання комутаційних співвідношень $[e_i, \tilde{e}_j] = 0$ $(i,j = 1,2,3)$ отримуємо, що

$$\tilde{e}_j = \lambda_j \partial_u \qquad (j = 1,2,3),$$

де λ_j—довільні дійсні сталі. Звідси випливає, що в заданому класі операторів не існують і реалізації алгебри $so(2,2)$.

До аналогічного результату привів розгляд і напівпростих класичних алгебр Лі, які мають наступну розмірність 8: $sl(3,R), su(3), su(2,1)$.

Далі, оскільки $su^*(4) \sim so(5,1)$, а алгебра $so(5,1)$ містить як підалгебру алгебру $so(4)$, то в класі заданих операторів не мають реалізацій відмінних від реалізації (1.26) алгебри типу A_{n-1} $(n > 1)$ та типу D_n $(n > 1)$.

Не матимуть реалізацій відмінних від (1.26) і алгебри типів B_n $(n > 1)$ та C_n $(n \geq 1)$. Справді, вже для $n = 2$ алгебри типу B_n містять як підалгебри алгебри $so(4)$ та $so(3,1)$. Також мають місце такі співвідношення:

$sp(2,R) \sim so(3,2)$ (підалгеброю $so(3,2)$ є $so(3,1)$), $sp(1,1) \sim so(4,1)$ (підалгеброю $so(4,1)$ є $so(3,1)$), $sp(2) \sim so(5)$ (підалгеброю $so(5)$ є $so(4)$).

Залишається розглянути випадки виняткових напівпростих дійсних алгебр Лі, які належать до одного із п'яти типів [92]: G_1, F_4, E_6, E_7, E_8. Оскільки їх розгляд проводиться аналогічно, детально зупиняємося на перших двох типах цих алгебр.

Тип G_2 містить компактну дійсну форму g_2 та одну некомпактну дійсну форму g_2'. Оскільки $g_2 \cap g_2' \sim su(2) \oplus su(2) \sim so(4)$ і алгебра $so(4)$ не має реалізацій в заданому класі операторів, то в цьому класі операторів не мають реалізацій і алгебри g_2 та g_2'.

Тип F_4 містить компактну дійсну форму f_4 та дві некомпактні дійсні форми f_4', f_4''. Оскільки $f' \cap f_4 \sim sp(3) \oplus su(2)$, $f_4'' \cap f_4 \sim so(9)$, то в заданому класі операторів не мають реалізацій і алгебри цього типу.

Теорема доведена.

Тепер перейдемо до класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.9), алгебрами інваріантності яких є розв'язні тривимірні дійсні алгебри Лі операторів симетрії.

Як було вказано вище, тривимірні розв'язні дійсні алгебри Лі вичерпуються з точністю до ізоморфізму двома розкладними алгебрами Лі ($A_{3.1}$ та $A_{3.2}$) й сімома нерозкладними алгебрами Лі ($A_{3.i}$, $i = 3, 4, \dots, 9$).

Розгляд розпочинаємо із побудови $A_{3.1}$– та $A_{3.2}$–інваріантних рівнянь. Для опису реалізацій алгебр $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $(i = 1, 2)$ ми суттєво використовуємо результати лем 1.2.1, 1.2.2 та теореми 1.2.2. Так, оскільки $A_{3.1} = 3A_1 = A_{2.1} \oplus A_1$, де $A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $A_1 = \langle e_3 \rangle$, то, під час побудови реалізацій алгебри $A_{3.1}$ в класі операторів (1.12), ми можемо відразу покласти, що алгебра $A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle$ збігається з однією із реалізацій $A^i_{2.i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Для спрощення вигляду оператора e_3 будемо використовувати перетворення

$$\bar{t} = t + \lambda_1,\ \overline{x} = x + \lambda_2,\ \overline{u} = U(u); \tag{1.27}$$

$$\bar{t} = t + \lambda_1,\ \overline{x} = \epsilon x + \lambda_2,\ \overline{u} = u + U(x); \tag{1.28}$$

$$\bar{t} \;=\; t+\lambda_1,\ \overline{x}=x+X(t),\ \overline{u}=u+U(t), \tag{1.29}$$

які зберігають відповідно вигляд базисних операторів реалізацій $A^1_{2.1}, A^2_{2.1}$, $A^3_{2.1}$ незмінним. В (1.27)–(1.29) $\lambda_1, \lambda_2 \in R,\ \epsilon = \pm 1$.

Нехай $A_{2.1} = A^1_{2.1}$. Тоді $e_1 = \partial_t,\ e_2 = \partial_x$, а тому $e_3 = f(u)\partial_u$. Врахувавши дію перетворення (1.27), маємо реалізацію

$$e_1 = \partial_t, \qquad e_2 = \partial_x, \qquad e_3 = \partial_u. \tag{1.30}$$

Нехай, тепер, $A_{2.1} = A^2_{2.1}$. Тоді $e_1 = \partial_t,\ e_2 = \partial_u$, а $e_3 = \lambda\partial_x + f(x)\partial_u$, $\lambda \in R$. Якщо $\lambda = 0$, то має місце реалізація

$$e_1 = \partial_t, \qquad e_2 = \partial_u, \qquad e_3 = f(x)\partial_u, \qquad f' \neq 0. \tag{1.31}$$

Якщо ж $\lambda \neq 0$, то, поклавши в перетвореннях (1.28) функцію U рівною розв'язкові рівняння

$$\lambda U_x + f(x) = 0,$$

переконуємося, що у цьому випадкові оператори e_i $(i = 1, 2, 3)$ зводяться до операторів вигляду (1.30).

Нехай, нарешті, $A_{2.1} = A^3_{2.1}$. Тоді $e_1 = \partial_x,\ e_2 = \alpha(t)\partial_x + \partial_u$, а тому

$$e_3 = 2\lambda\partial_t + b(t)\partial_x + f(t)\partial_u,$$

де $2\lambda\dot{\alpha} = 0,\ \lambda \in R$.

Якщо $\lambda \neq 0$, то $\dot{\alpha} = 0$, і, поклавши в (1.29) X та U рівними розв'язкам відповідно рівнянь

$$2\lambda\dot{X} + b = 0, \qquad 2\lambda U_t + f = 0,$$

зводимо оператори e_i $(i = 1, 2, 3)$ до трійки операторів вигляду (1.30). Якщо ж $\lambda = 0$, то має місце реалізація

$$e_1 = \partial_x,\ \ e_2 = \alpha(t)\partial_x + \partial_u,\ \ e_3 = \beta(t)\partial_x + \gamma(t)\partial_u, \tag{1.32}$$

де гладкі функції $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ набувають значень, які гарантують лінійну незалежність операторів e_1, e_2, e_3.

Отже, з точністю до еквівалентності, яка визначається перетвореннями із групи $\mathcal{E}$, маємо три реалізації алгебри $A_{3.1}$, які визначаються трійками (1.30)–(1.32) операторів e_i $(i = 1, 2, 3)$.

Визначимо вигляд рівнянь (1.9), які інваріантні відносно кожної із отриманих реалізацій алгеби $A_{3.1}$.

У випадку реалізації (1.30) вигляд рівняння є очевидним:

$$u_t = u_{xx} + G(u_x).$$

Якщо базисні оператори алгебри $A_{3.1}$ мають вигляд (1.31), то $F = \tilde{F}(x, u_x)$, й умова інваріантності (1.13) для оператора e_3 набуває вигляду

$$f'' + f'\tilde{F}_{u_x} = 0, \qquad f' \neq 0.$$

Звідси випливає, що

$$\tilde{F} = -f''(f')^{-1}u_x + G(x),$$

тобто, відповідне інваріантне рівняння є лінійним.

Нехай, нарешті, базисні оператори алгебри $A_{3.1}$ мають вигляд (1.32). Тоді $F = -\dot{\alpha}uu_x + \tilde{F}(t, u_x)$, й умова інваріантності (1.13) для оператора e_3 набуває вигляду

$$\dot{\gamma} = (\dot{\beta} - \gamma\dot{\alpha})u_x,$$

звідки випливає, що $\gamma = C_1$, $\beta = \gamma\alpha + C_2$, $C_1, C_2 \in R$. Але тоді $e_3 = C_1(\alpha\partial_x + \partial_u) + C_2\partial_x = C_1e_2 + C_2e_1$, що суперечить умові лінійної незалежності операторів e_i $(i = 1, 2, 3)$.

Отже, підсумовуючи сказане вище, бачимо, що в класі операторів (1.12) існує одна реалізація алгебри $A_{3.1}$, яка є алгеброю інваріантності нелінійного рівняння вигляду (1.9). А саме:

$$\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u \rangle :\ u_t = u_{xx} + G(u_x).$$

Розгляд реалізацій алгебри $A_{3.2}$ проводився аналогічно. Оскільки $A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$, де $A_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $A_1 = \langle e_3 \rangle$, то під час опису реалізацій алгебри $A_{3.2}$ ми відразу поклали, що алгебра $A_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle$ збігається з однією із реалізацій $A^i_{2.2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Результати обчислень показали, що існують сім реалізацій алгебри $A_{3.2}$, які задовольняють умовам сформульованої задачі.

Зведені результати класифікації рівнянь (1.9), які інваріантні відносно тривимірних розкладних розв'язних дійсних алгебр Лі подано в таблиці 1.1. Там ми використовуємо такі позначення:

$$
\begin{aligned}
A^1_{3.1} &= \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u \rangle; \\
A^1_{3.2} &= \langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u \rangle; \\
A^2_{3.2} &= \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u \rangle; \\
A^3_{3.2} &= \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u \rangle; \\
A^4_{3.2} &= \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \alpha(t)\partial_x \rangle \ (\dot{\alpha} \neq 0); \\
A^5_{3.2} &= \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t \rangle; \\
A^6_{3.2} &= \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \ (\epsilon = \pm 1); \\
A^7_{3.2} &= \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_t + \lambda\partial_x \rangle \ (\lambda > 0, \epsilon = \pm 1).
\end{aligned}
$$

Таблиця 1.1

$A_{3.1}$– **та** $A_{3.2}$–**інваріантні рівняння (1.9)**

Алгебра	Функція F
$A^1_{3.1}$	$G(u_x)$
$A^1_{3.2}$	$u_x^2 G(\omega), \quad \omega = xu_x,$
$A^2_{3.2}$	$t^{-1}G(\omega), \quad \omega = tu_x^2,$
$A^3_{3.2}$	$-\frac{1}{2}t^{-1}u\sqrt{\lvert\omega\rvert} + t^{-1}G(\omega), \quad \omega = tu_x^2,$
$A^4_{3.2}$	$-\dot{\alpha}\alpha^{-1}u_x \ln\lvert\omega\rvert + u_x G(t), \quad \dot{\alpha} \neq 0, \quad \omega = e^x u_x,$
$A^5_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = e^x u_x,$
$A^6_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = e^{\epsilon t} u_x, \quad \epsilon = \pm 1,$
$A^7_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = (u_x)^\lambda e^{\epsilon(\lambda t - x)}, \quad \lambda > 0, \quad \epsilon = \pm 1$

Безпосереднє використання алгоритму Лі показало, що для довільних значень функцій G в отриманих рівнянннях відповідні реалізації алгебр $A_{3.1}$ та $A_{3.2}$ є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Для завершення групової класифікації $A_{3.1}$– та $A_{3.2}$–інваріантних рівнянь нам потрібно переконатися, що значення функцій F із таблиці 1.1 визначають нееквівалентні $A_{3.2}$–інваріантні рівняння досліджуваного вигляду. Для цього нам достатньо переконатися в нееквівалентності їх алгебр інваріантності.

Оскільки доведення цього факту передбачає виконання значного обсягу стандартних обчислень, ми тут обмежимося розглядом лише реалізацій $A^2_{3.2}$ та $A^3_{3.2}$.

Нехай

$$\begin{aligned} e_1 &= -2t\partial_t - x\partial_x, \qquad e_2 = \partial_x, \qquad e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u; \\ \tilde{e}_1 &= -2\overline{t}\partial_{\overline{t}} - \overline{x}\partial_{\overline{x}}, \qquad \tilde{e}_2 = \partial_{\overline{x}}, \qquad \tilde{e}_3 = \partial_{\overline{u}}. \end{aligned}$$

Припустимо, що реалізації $A^2_{3.2}$ та $A^3_{3.2}$ є еквівалентними. Тоді повинні існувати такі перетворення вигляду (1.16), які зводять реалізацію $A^3_{3.2} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ в реалізацію $A^2_{3.2} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \rangle$:

$$e_i \overset{(1.16)}{\rightarrow} E_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\tilde{e}_j \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1.33}$$

де $\alpha_{ij} \in R,\ det||\alpha_{ij}|| \neq 0,\ i, j = 1, 2, 3$. Виконання (1.33) приводить до таких рівностей:

$$\begin{aligned} & t\dot{T} = \alpha_{11}T, \\ & 2t(\frac{\epsilon}{2}\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}x + \dot{X}) - \epsilon x\sqrt{\dot{T}} = -\epsilon\alpha_{11}\sqrt{\dot{T}}x - \alpha_{11}X + \alpha_{12}, \\ & 2tU_t - xU_x = \alpha_{13}, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \epsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{22}, \\ & U_x = \alpha_{23}, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \epsilon\sqrt{|t|}\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{32}, \\ & \sqrt{|t|}U_x + U_u = \alpha_{33}, \quad \epsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Врахувавши, що $\epsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{22} \neq 0$ (інакше перетворення будуть виродженими), приходимо до рівності $\sqrt{|t|}\alpha_{22} = \alpha_{32}$, звідки випливає, що

$\alpha_{22} = \alpha_{32} = 0$. Отримана суперечність показує, що наше припущення є хибним. Отже, реалізації $A^2_{3.2}$ та $A^3_{3.2}$ є нееквівалентними.

Далі проводимо класифікацію нелінійних рівнянь вигляду (1.9), алгебрами інваріантності яких є нерозкладні тривимірні розв'язні алгебри Лі $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, де $i = 3, 4, \ldots, 9$. Оскільки їх розгляд проводиться аналогічно,ми детально зупиняємося лише на описові $A_{3.3}$–інваріантних рівнянь, опускаючи ряд громіздких, але стандартних обчислень.

Структура алгебри $A_{3.3}$ така, що оператори e_1, e_2 складають базис алгебри Лі $A_{2.1}$. Згідно з результатами теореми 1.2.2 алгебра $A_{2.1}$ має три нееквівалентні реалізації, які є максимальними алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1.9).

Тому, під час розгляду реалізацій алгебри $A_{3.3}$, можемо відразу покласти, що оператори e_1, e_2 складають базис однієї із реалізацій $A^i_{2.1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Для спрощення вигляду оператора e_3 використовуємо перетворення (1.27), (1.28), (1.29) відповідно.

Нехай оператори e_1, e_2 складають базис реалізації $A^1_{2.1}$. Тоді, якщо $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, то перевірка комутаційних співвідношень

$$[e_1, e_3] = 0, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \tag{1.34}$$

показує, що в класі операторів (1.12) не існує оператор e_3, який би доповнював оператори e_1, e_2 до базису алгебри $A_{3.3}$.

Якщо $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_t$, то із виконання комутаційних співвідношень (1.34) випливає, що

$$e_3 = (t + \lambda)\partial_x + f(u)\partial_u, \quad \lambda \in R.$$

Неважко переконатися, що існують перетворення (1.27), які зводять оператор e_3 до вигляду (залишаємо початкові позначення змінних)

$$e_3 = t\partial_x + \epsilon\partial_u, \quad \epsilon = 0, 1. \tag{1.35}$$

Найбільш загальний вигляд рівняння (1.9), яке інваріантне відносно алгебри $A^1_{2.1}$, такий:

$$u_t = u_{xx} + \tilde{F}(u, u_x). \tag{1.36}$$

Тому умова інваріантності рівняння (1.9) відносно знайденої реалізації алгебри $A_{3.3}$ збігається з такою умовою інваріантності рівняння (1.36) відносно оператора (1.35):

$$-u_x = \epsilon \tilde{F}_u.$$

Звідси випливає, що в (1.35) обов'язково $\epsilon = 1$, а в (1.36)

$$\tilde{F} = -uu_x + G(u_x).$$

Розгляд випадків, коли оператори e_1, e_2 складають базис реалізацій $A^2_{2.1}, A^3_{2.1}$, показав, що існують ще чотири нееквівалентні реалізації алгебри $A_{3.3}$, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1.9):

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x \rangle : \quad u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + G(u_x), \quad \lambda > 0;\\
&\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + b(t)\partial_x \rangle : \quad u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{b}u_x^2 + G(t), \quad \dot{b} \neq 0;\\
&\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda\partial_t \rangle : \quad u_t = u_{xx} + G(\omega), \quad \omega = t - \lambda u_x, \quad \lambda \neq 0;\\
&\langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, \partial_x, x\partial_u + 2\lambda t[t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u] \rangle :\\
&u_t = u_{xx} - 2\lambda uu_x + t^{-3}G(\omega), \quad \omega = u_x t^2 - \frac{t}{2\lambda}, \ \lambda \neq 0.
\end{aligned}$$

Отримані результати для нерозкладних тривимірних розв'язних алгебр Лі зведено в таблиці 1.2. Там ми використовуємо позначення:

$$\begin{aligned}
A^1_{3.3} &= \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u \rangle;\\
A^2_{3.3} &= \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x \rangle \ \ (\lambda > 0);\\
A^3_{3.3} &= \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + b(t)\partial_x \rangle \ \ \ (\ddot{b} \neq 0);\\
A^4_{3.3} &= \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda\partial_t \rangle \ \ (\lambda \neq 0);\\
A^5_{3.3} &= \langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, \partial_x, x\partial_u + 2\lambda t[t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u] \rangle \ \ (\lambda \neq 0);\\
A^1_{3.4} &= \langle \partial_u, \partial_t, \ \ t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u \rangle;\\
A^2_{3.4} &= \langle \partial_x, \ \ \partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, \ \ 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{3.4}^3 &= \langle \partial_u, \quad \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u \rangle; \\
A_{3.4}^4 &= \langle \partial_u + \alpha\partial_x, \partial_x, \alpha^2(\dot{\alpha})^{-1}\partial_t + (1+\alpha)x\partial_x + [(1-\alpha)u + x]\partial_u \rangle;
\end{aligned}
$$

де $\alpha = \alpha(t)$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$ —розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння

$$
\alpha^2\ddot{\alpha} + 2(\dot{\alpha})^2 = 0; \tag{1.37}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{3.5}^1 &= \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + u\partial_u \rangle; \\
A_{3.5}^2 &= \langle \partial_x, \quad \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle; \\
A_{3.6}^1 &= \langle \partial_t, \quad \partial_u, \quad t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - u\partial_u \rangle; \\
A_{3.6}^2 &= \langle \partial_x, \quad \partial_u + \lambda t\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle \ (\lambda \geq 0); \\
A_{3.7}^1 &= \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x \rangle; \\
A_{3.7}^2 &= \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + u\partial_u \rangle; \\
A_{3.7}^3 &= \langle \partial_t, \quad \partial_u, \quad t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, \pm 1); \\
A_{3.7}^4 &= \langle \partial_x, \quad \partial_u + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, \quad 2t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle \\
&\quad\ (0 < |q| < 1, \ \lambda \in R_4); \\
A_{3.8}^1 &= \langle \partial_x, \quad \lambda t\partial_x + \partial_u, \quad -\lambda(t^2 + \lambda^{-2})\partial_t - \lambda tx\partial_x + (\lambda tu - x)\partial_u \rangle \\
&\quad\ (\lambda \neq 0); \\
A_{3.9}^1 &= \langle \partial_x, \quad \alpha\partial_x + \partial_u, \quad -(\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + \\
&\quad\ +(q-\alpha)x\partial_x + [(\alpha+q)u - x]\partial_u \rangle;
\end{aligned}
$$

де $q > 0$; $\alpha = \alpha(t)$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$ —розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння

$$
(1+\alpha^2)\ddot{\alpha} = 2q(\dot{\alpha})^2. \tag{1.38}
$$

Таблиця 1.2

Рівняння (1.9), інваріантні відносно нерозкладних тривимірних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	Функція F
$A^1_{3.3}$	$-uu_x + G(u_x)$
$A^2_{3.3}$	$\lambda^{-1}x + G(u_x), \quad \lambda \neq 0$
$A^3_{3.3}$	$-\frac{1}{2}\dot{b}(t)u_x^2, \quad \ddot{b} \neq 0$
$A^4_{3.3}$	$G(\omega), \quad \omega = t - \lambda u_x, \quad \lambda \neq 0$
$A^5_{3.3}$	$-2\lambda uu_x + t^{-3}G(\omega), \quad \omega = u_x t^2 - \frac{t}{2\lambda}, \quad \lambda \neq 0$
$A^1_{3.4}$	$2\ln\lvert u_x\rvert G(\omega), \quad \omega = x^{-1}u_x$
$A^2_{3.4}$	$\frac{1}{2}t^{-1}uu_x + \lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(u_x)$
$A^3_{3.4}$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(\omega), \quad \omega = t^{-1}u_x^2$
$A^4_{3.4}$	$-\dot{\alpha}uu_x + \alpha^{-6}\exp(2\alpha^{-1})G(\omega), \quad \omega = u_x\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^3$
$A^1_{3.5}$	$G(\omega), \quad \omega = x^{-1}u_x$
$A^2_{3.5}$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(u_x)$
$A^1_{3.6}$	$x^{-4}G(\omega), \quad \omega = x^3u_x$
$A^2_{3.6}$	$-\lambda uu_x + \lvert t\rvert^{-\frac{3}{2}}G(\omega), \quad \omega = tu_x, \quad \lambda \geq 0$
$A^1_{3.7}$	$u_x^2G(u)$
$A^2_{3.7}$	$G(\omega), \quad \omega = u^{-1}u_x^2$
$A^3_{3.7}$	$x^{2(q-1)}G(\omega), \quad \omega = x^{1-2q}u_x$
$A^4_{3.7}$	$-\frac{1}{2}\lambda(1-q)\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}(1+q)}uu_x + \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}(q-2)}G(\omega),\ \omega = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}(1-q)}u_x$
$A^1_{3.8}$	$-\lambda uu_x + (t^2+\lambda^{-2})^{-\frac{3}{2}}G(\omega),\ \omega = \lambda u_x(t^2+\lambda^{-2}) - t$
$A^1_{3.9}$	$-\dot{\alpha}uu_x + (1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\exp(q\arctan\alpha)G(\omega),\ \omega = u_x(1+\alpha^2) - \alpha$

Зауважимо, що нам вдалося знайти загальні розв'язки рівнянь (1.37) та (1.38). Вони мають досить громіздкий вигляд, визначають функцію $\alpha(t)$ неявно і містять інтеграли, які в загальному випадкові не визначаються через елементарні функції.

Так, загальний розв'язок рівняння (1.37) має вигляд

$$\int_0^{\alpha} \exp(-2\xi^{-1})d\xi = \lambda t + \lambda_1, \quad \lambda, \lambda_1 \in R, \quad \lambda \neq 0;$$

а рівняння (1.38) —

$$\int_0^{\alpha} \exp(-2q \arctan \xi)d\xi = \lambda t + \lambda_1, \quad \lambda, \lambda_1 \in R, \quad \lambda \neq 0.$$

Відзначимо також, що отримані реалізації, як показала безпосередня перевірка, є нееквівалентними і, для довільних значень функцій G вони є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

1.3. Завершення групової класифікації рівняння (1.9)

У цьому підрозділі ми виконуємо останній крок алгоритму методу групової класифікації диференціальних рівнянь. Тут ми проводимо опис нелінійних рівнянь досліджуваного вигляду із найвищими симетрійними властивостями. Для цього нам потрібно отримати повний перелік нееквівалентних рівнянь вигляду (1.9), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за 3.

Згідно з теоремою Леві–Мальцева [7], кожна дійсна алгебра Лі є або алгеброю Лі, що має нетривіальний розклад Леві, або розв'язною алгеброю Лі. Виходячи із цього, ми завершення групової класифікації розпочинаємо з опису тих нелінійних рівнянь вигляду (1.9), алгебри інваріантності яких мають нетривіальний фактор Леві, тобто містять як підалгебри деякі напівпрості алгебри Лі операторів симетрії.

1.3.1. Інваріантність відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві. Якщо диференціальне рівняння допускає алгебру Лі операторів симетрії з нетривіальним фактором Леві, то воно є інваріантним відносно деякої напівпростої алгебри Лі операторів симетрії. Згідно з результатами теореми 1.2.3, нелінійні рівняння вигляду (1.9) з такою властивістю вичерпуються рівнянням

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega), \quad \omega = 2u - xu_x, \tag{1.39}$$

максимальна алгебра інваріантності якого

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle$$

є ізоморфною алгебрі $sl(2,R)$. Оскільки рівняння (1.39) містить довільну функцію одного аргументу, то для вивчення можливостей розширення його симетрійних властивостей ми можемо використовувати стандартні прийоми.

Класифікуюче рівняння (1.13) для рівняння (1.39) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&[x^{-1}(f_x - 2x^{-1}f) + 2ux^{-2}(f_u - x^{-1}b) - \\
&-x^{-2}(f_u + x^{-1}b)\omega]G_\omega + x^{-2}(f_u + 2x^{-1}b)G = \\
&= x^{-2}(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u)\omega^2 - [x^{-1}(\ddot{x} + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x) + \\
&+4ux^{-2}(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u)\omega + 4u^2x^{-2}(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u) + \\
&+2ux^{-1}(\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x) - f_t - x^{-1}f_x + f_{xx}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Оскільки в рівнянні (1.40) функції a, b, f є функціями змінних t, x, u, а функція G залежить від змінної $\omega = 2u - xu_x$, то розширення симетрійних властивостей рівняння (1.39) можливе лише для тих значень функції G, які є розв'язками звичайного диференціального рівняння

$$(m\omega + n)\dot{G} + pG = k\omega^2 + l\omega + s, \tag{1.41}$$

де $m, n, k, l, s \in R$, $|m| + |n| + |p| \neq 0$, $\dot{G} = \frac{dG}{d\omega}$.

Оскільки аналіз значень функцій G, які є розв'язками рівняння (1.41), вимагає громіздких, але стандартних обчислень, то ми тут лише відзначимо, що до розширення симетрії рівняння (1.39) в рамках сформульованої задачі приводить лише випадок функції

$$G = 1 - \frac{1}{4}\omega^2.$$

У цьому випадкові група інваріантності рівняння (1.39) генерується оператором

$$\begin{aligned} Q &= (2\lambda_1 t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_3)\partial_t + [(2\lambda_1 t + \lambda_2)x + \lambda_4 t + \lambda_5]\partial_x + \\ &+ [-2\lambda_1 x^2 - \lambda_4 x + x^{-1}(\lambda_4 t + \lambda_5)(1+u)]\partial_u \end{aligned}$$

і є п'ятипараметричною групою локальних перетворень. Тут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5 \in R$.

Але заміна змінних

$$t = t, \quad x = x, \quad u = xv - 1, \quad v = v(t, x),$$

зводить отримане рівняння

$$u_t = u_{xx} + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}$$

до добре відомого рівняння Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + vv_x.$$

Тому, з проведених міркувань, випливає таке твердження.

Теорема 1.3.1 *З точністю до еквівалентності нелінійні рівняння вигляду (1.9), які допускають алгебри інваріантності, ізоморфні алгебрам Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, вичерпуються рівнянням Бюргерса*

$$u_t = u_{xx} + uu_x,$$

максимальна алгебра інваріантності якого

$$\langle \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u, t\partial_x - \partial_u, \partial_x \rangle$$

є ізоморфною алгебрі $sl(2, R) \uplus A_{2.1}$.

Тепер перейдемо до опису нелінійних рівнянь вигляду (1.9), алгебри інваріантності яких є розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії розмірності вищої за три.

1.3.2. Інваріантність відносно чотиривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії. Оскільки усі нелінійні рівняння вигляду (1.9), які інваріантні відносно тривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії, містять довільні функції однієї змінної, то для завершення їх групової класифікації можна використовувати стандартні методи. З іншого боку, можна сподіватися, що, продовжуючи дослідження в запропонованому підході, ми в нелінійних рівняннях, які будуть інваріантними відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії, отримаємо функції F, які матимуть вже повністю визначений вигляд. Дійсно, як буде показано нижче, такими виявляються усі рівняння, що дає можливість завершити групову класифікацію рівняння (1.9), описавши рівняння, алгебри інваріантності яких є чотиривимірними розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії.

Розгляд розпочинаємо із опису рівнянь, які є інваріантними відносно чотиривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії.

Розрізняють [43] 10 розкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі: $4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1$, $A_{2.2} \oplus 2A_1 = A_{3.2} \oplus A_1$, $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$, $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 3, 4, \ldots, 9)$. Очевидним є те, що усі ці алгебри, окрім алгебри $2A_{2.2}$, є прямою сумою деякої тривимірної розв'язної алгебри Лі $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ та одновимірної алгебри $A_1 = \langle e_4 \rangle$. Це дає можливість, під час розгляду реалізацій чотиривимірних розв'язних алгебр Лі використовувати відомі результати для тривимірних та двовимірних (у випадку алгебри $2A_{2.2}$) алгебр Лі.

Оскільки розгляд випадків усіх алгебр проводиться аналогічним чином, детально зупинимося лише на реалізаціях алгебр $4A_1$ та $2A_{2.2}$.

Алгебра $4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1$

Згідно з результатами попереднього пункту, для алгебри $A_{3.1}$ існує одна реалізація в класі операторів (1.13), яка є алгеброю інваріантності нелінійного рівняння вигляду (1.9). Отже

$$e_1 = \partial_t, \qquad e_2 = \partial_x, \qquad e_3 = \partial_u.$$

Але оскільки алгебра 4A$_1$ є абелевою, то

$$e_4 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \quad \lambda_i \in R, \quad i = 1, 2, 3,$$

тобто, оператор e_4 є лінійною комбінацією операторів e_i $(i = 1, 2, 3)$. Звідси випливає, що в класі операторів (1.12) не існують реалізації алгебри $4A_1$,які були б алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь (1.9).

Алгебра $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$

Алгебра $2A_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3, e_4 \rangle$, де $[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_4$, містить як підалгебру алгебру $A_{3.2}$. При цьому, в ролі третього оператора, який комутує з операторами e_1, e_2, може бути як оператор e_3, так і оператор e_4. У відповідності із цим і проводимо розгляд реалізації цієї алгебри.

1) $A^1_{3.2} = \langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u \rangle$.

Нехай $e_3 = \partial_u$. Тоді $e_4 = e^u \partial_u$ і відповідне інваріантне рівняння (1.9) набуває вигляду

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \frac{\lambda}{x} u_x, \quad \lambda \in R.$$

Якщо ж $e_4 = \partial_u$, то $e_3 = -u\partial_u$ і відповідне інваріантне рівняння є лінійним.

2) $A^2_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u \rangle$.

Якщо $e_3 = \partial_u$, то $e_4 = e^u \partial_u$ і відповідне інваріантне рівняння (1.9) набуває вигляду

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \lambda \frac{u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in R.$$

Якщо ж $e_4 = \partial_u$, то

$$e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \quad \lambda \in R,$$

а відповідне інваріантне рівняння (1.9) має вигляд

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{|t|}},$$

де $\epsilon = 1$ для $t > 0$ і $\epsilon = -1$ для $t < 0$, $\lambda, \beta \in R$, $\lambda \neq 0$.

3) $A^3_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u\rangle$.

Якщо $e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u$, то $e_4 = e^u\partial_u$ і приходимо до рівняння

$$u_t = u_{xx} - \frac{\epsilon u u_x}{2\sqrt{|t|}} + \frac{\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| - u_x^2 + \frac{\lambda u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in R,$$

де $\epsilon = 1$ для $t > 0$ і $\epsilon = -1$ для $t < 0$.

Використавши далі заміну змінних

$$v = -e^{-u}, \qquad v = v(t,x), \qquad u = u(t,x),$$

переконуємося, що цей випадок міститься у попередньому, де $u < 0$, $\lambda = 1, \beta = \lambda$. Тому окремо його розглядати не будемо.

Якщо ж $e_4 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u$, то перевірка комутаційних співвідношень показує, що в класі операторів (1.12) доповнення цієї реалізації алгебри $A_{3.2}$ до реалізації алгебри $2A_{2.2}$ є неможливим.

4) $A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \alpha(t)\partial_x\rangle$ $(\dot\alpha \neq 0)$.

Якщо $e_3 = \alpha(t)\partial_x$, то перевірка комутаційних співвідношень приводить до умови $\alpha = 1$. Якщо ж $e_4 = \alpha(t)\partial_x, \dot\alpha \neq 0$, то перевірка комутаційних співвідношень показує, що $\alpha = e^{\lambda t}$, $\lambda \neq 0$ і $e_3 = \frac{1}{\lambda}\partial_t + \beta(t)\partial_x$. З точністю до перетворень еквівалентності

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x} = x + X(t), \qquad \overline{u} = u,$$

де X—розв'язок рівняння $\frac{1}{\lambda}\dot X + \beta = 0$, можемо покласти

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \frac{1}{\lambda}\partial_t, \quad e_4 = e^{\lambda t}\partial_x, \quad \lambda \neq 0.$$

Тоді, з точністю до дії заміни змінних

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x} = x - \frac{C}{\lambda}, \qquad \overline{u} = u,$$

яка залишає вигляд базисних операторів даної алгебри Лі незмінним, відповідне інваріантне рівняння набуває вигляду (в початкових позначеннях змінних)

$$u_t = u_{xx} - \lambda(xu_x + u_x \ln|u_x|), \quad \lambda \neq 0.$$

5) $A^5_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t \rangle$.

Якщо $e_3 = \partial_t$, то

$$e_4 = \lambda_1 e^t \partial_x + \lambda_2 e^{t-x} \partial_u, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

Відповідне інваріантне рівняння (1.9) є нелінійним за умови $\lambda_1 \neq 0$. Тому можемо покласти

$$e_4 = e^t \partial_x + \lambda e^{t-x} \partial_u, \quad \lambda \in R,$$

і відповідне інваріантне рівняння набуде вигляду

$$u_t = u_{xx} + u_x(1 - \lambda e^{-x} u_x^{-1})[\beta - \ln|u_x e^x - \lambda|] + \lambda e^{-x}, \quad \lambda, \beta \in R.$$

Заміна змінних

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x} = x, \qquad \overline{u} = \beta e^{-x} + u$$

залишає вигляд операторів e_1, e_2, e_3 незмінною, а оператор e_4 зводить до оператора $(\beta = \lambda)$ $e_4 = e^{\overline{t}} \partial_{\overline{u}}$. Отже, результат можна подати так:

$$\langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t, e^t \partial_x \rangle : u_t = u_{xx} - u_x \ln|u_x| - xu_x + \lambda u_x, \quad \lambda \in R.$$

Нарешті, заміна змінних

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x} = x - \lambda, \qquad \overline{u} = u$$

дозволяє в побудованому рівнянні покласти $\lambda = 0$. Зауважимо, що цей випадок міститься в попередньому, якщо там $\lambda = 1$.

Якщо $e_4 = \partial_t$, то в класі операторів (1.13) не існують реалізації алгебри $2A_{2.2}$.

6) $A^6_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$.

Якщо $e_3 = \partial_x$, то $e_4 = e^{x-\epsilon t}\partial_u$, і відповідне інваріантне рівняння є лінійним. Якщо ж покласти $e_4 = \partial_x$, то розширення даної алгебри до реалізації алгебри $2A_{2.2}$ є неможливим.

7) $A^7_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_t + \lambda\partial_x \rangle$ $(\lambda > 0, \quad \epsilon = \pm 1)$.

Якщо $e_3 = \partial_t + \lambda\partial_x$, то $e_4 = e^{(1+\epsilon)x-\epsilon t}\partial_u$, і відповідне інваріантне рівняння є лінійним.

Якщо ж $e_4 = \partial_t + \lambda\partial_x$, то спроба розширення $A^7_{3.2}$ до реалізації алгебри $2A_{2.2}$ приводить до хибних співвідношень.

Підведемо попередній підсумок. В класі операторів (1.12) існують чотири нееквівалентні реалізації алгебри $2A_{2.2}$, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь (1.9):

$$\langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u, e^u\partial_u \rangle : u_t = u_{xx} - u_x^2 + \frac{\lambda}{x}u_x, \quad \lambda \in R; \tag{1.42}$$

$$\langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u, e^u\partial_u \rangle : u_t = u_{xx} - u_x^2 + \lambda\frac{u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in R; \tag{1.43}$$

$$\begin{gathered}\langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \partial_u \rangle : \\ u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{|t|}}; \\ \epsilon = 1 \text{ для } t > 0 \text{ і } \epsilon = -1 \text{ для } t < 0, \ \lambda \neq 0, \quad \beta \in R;\end{gathered} \tag{1.44}$$

$$\langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \frac{1}{\lambda}\partial_t, e^{\lambda t}\partial_x \rangle : u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln|u_x|), \tag{1.45}$$
$\lambda \neq 0$.

Розгляд реалізацій решти чотиривимірних розкладних алгебр Лі показав, що існує ще лише одна реалізація алгебри $A_{3.7} \oplus A_1$, а саме, реалізація $A^1_{3.7} \oplus \langle u\partial_u \rangle$, яка є алгеброю інваріантності нелінійного рівняння

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{-1}u_x^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.46}$$

Отже, серед нелінійних рівнянь вигляду (1.9) лише п'ять рівнянь (1.42)–(1.46) є інваріантними відносно чотиривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії. Проведемо подальший аналіз цих рівнянь і вилучимо із розгляду ті, які не задовольняють умовам сформульованої задачі.

Рівняння (1.42).

Згідно з інфінітезимальним методом Лі дослідження симетрії диференціального рівняння, отримуємо, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.42) є нескінченновимірна алгебра операторів симетрії. При цьому, в залежності від значень параметра λ, її базис складають такі оператори:

1. $\lambda \neq 0, 2$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \qquad Q_2 = \partial_t, \qquad Q_3 = \partial_u, \\ Q_4 &= 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + [\frac{1}{2}x^2 + (1+\lambda)t]\partial_u, \\ Q_\infty &= g(t,x)e^u\partial_u, \qquad g_t = g_{xx} + \frac{\lambda}{x}g_x; \end{aligned}$$

2. $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \qquad Q_2 = \partial_t, \qquad Q_3 = \partial_u, \\ Q_4 &= 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + [\frac{1}{2}x^2 + t]\partial_u, \\ Q_5 &= t\partial_x + \frac{1}{2}x\partial_u, \qquad Q_6 = \partial_x, \\ Q_\infty &= g(t,x)e^u\partial_u, \qquad g_t = g_{xx}; \end{aligned}$$

3. $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \qquad Q_2 = \partial_t, \qquad Q_3 = \partial_u, \\ Q_4 &= 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + \frac{1}{2}(x^2 + 3t)\partial_u, \\ Q_5 &= t\partial_x + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}t)\partial_u, \qquad Q_6 = \partial_x + \frac{1}{x}\partial_u, \\ Q_\infty &= g(t,x)e^u\partial_u, \qquad g_t = g_{xx} + \frac{2}{x}g_x. \end{aligned}$$

Безпосередня перевірка показує, що заміна змінних

$$\bar{t} = t, \qquad \overline{x} = x, \qquad \overline{u} = u - \ln|x|,$$

зводить третій випадок до другого.

Отже, прийшли до двох нееквівалентних рівнянь

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u_x^2; \\ u_t &= u_{xx} + \frac{\lambda}{2}u_x - u_x^2, \quad \lambda \neq 0.2. \end{aligned}$$

Але ці рівняння заміною змінних

$$u = -\ln|v|, \qquad u = u(t,x), \qquad v = v(t,x) \tag{1.47}$$

зводяться відповідно до лінійних рівнянь теплопровідності

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}; \\ v_t &= v_{xx} + \frac{\lambda}{x}v_x, \quad \lambda \neq 0, 2. \end{aligned}$$

Тому, нелінійність в рівнянні (1.42) є неістотною.

Рівняння (1.43)

Дане рівняння заміною змінних (1.47) зводиться до такого лінійного рівняння теплопровідності:

$$v_t = v_{xx} + \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}v_x.$$

Рівняння (1.44)

Використання алгоритму Лі показало, що побудована реалізація алгебри $2A_{2.2}$ є максимальною алгеброю інваріантності даного рівняння.

Рівняння (1.45)

Використання алгоритму Лі показало, що побудована реалізація алгебри $2A_{2.2}$ є максимальною алгеброю інваріантності даного рівняння.

Рівняння (1.46)

Дане рівняння заміною змінних

$$v = \ln|u|, \qquad v = v(t,x), \qquad u = u(t,x),$$

зводиться до модифікованого рівняння Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + (\lambda + 1)v_x^2,$$

яке є еквівалентним лінійному рівнянню теплопровідності.

Для завершення групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.9), які допускають чотиривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії, залишається переконатися в нееквівалентності рівнянь (1.44) та (1.45). Для цього переконаємося, що відповідні їм реалізації алгебри $2A_{2.2}$ є нееквівалентними.

Нехай

$$\begin{aligned} e_1 &= -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \quad e_4 = \partial_u; \\ \tilde{e}_1 &= \partial_{\overline{x}} - \overline{u}\partial_{\overline{u}}, \quad \tilde{e}_2 = \partial_{\overline{u}}, \quad \tilde{e}_3 = \lambda^{-1}\partial_{\overline{t}}, \quad \tilde{e}_4 = e^{\lambda t}\partial_{\overline{x}}, \end{aligned}$$

де $\lambda \neq 0$.

Припустимо, що існують такі перетворення (1.16), які зводять реалізацію $2A_{2.2} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ в реалізацію $2A_{2.2} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\rangle$:

$$e_i \overset{(1.16)}{\to} E_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij}\tilde{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.48}$$

де $\alpha_{ij} \in R$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, $det||\alpha_{ij}|| \neq 0$. Тоді виконання умов (1.48) приводить до таких рівностей:

$$\begin{aligned} &-2t\dot{T} = \lambda^{-1}\alpha_{13}, \quad -2tU_t - xU_x = -\alpha_{11}U + \alpha_{12}; \\ &-2t(\frac{\varepsilon}{2}\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}x + \dot{X}) - \varepsilon\sqrt{\dot{T}}x = \alpha_{11} + \alpha_{24}e^{\lambda t}; \\ &\varepsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{21} + \alpha_{24}e^{\lambda t}, \quad U_x = -\alpha_{21}U + \alpha_{22}, \quad \alpha_{23} = 0, \\ &\lambda\sqrt{|t|}\varepsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{31} + e^{\lambda t}\alpha_{34}, \quad \alpha_{33} = 0, \\ &-uU_u + \lambda\sqrt{|t|}U_x = -\alpha_{31}U + \alpha_{32}, \\ &\alpha_{41} = \alpha_{43} = \alpha_{44} = 0, \quad U_u = \alpha_{42}. \end{aligned}$$

Розглянувши рівності, які містять лише значення функції U та її похідних, отримуємо, що

$$U = \alpha_{42}u + \alpha_{32}, \quad \alpha_{42} \neq 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{31} = 1.$$

Але, за цих умов, розгляд рівностей, які містять лише функцію $\dot{T}$, приводить до виконання умови $1 = 0$.

Отже, наше припущення є хибним, а рівняння (1.44), (1.45) є нееквівалентними.

1.3.3. Інваріантність відносно нерозкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі. Серед чотиривимірних нерозкладних розв'язних дійсних алгебр Лі $A_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ розрізняють десять алгебр [43] (наведено значення лише ненульових комутаційних співвідношень):

$$
\begin{array}{lll}
A_{4.1} : & [e_2, e_4] = e_1, & [e_3, e_4] = e_2; \\
A_{4.2} : & [e_1, e_4] = qe_1, & [e_2, e_4] = e_2, \\
 & [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad q \neq 0; & \\
A_{4.3} : & [e_1, e_4] = e_1, & [e_3, e_4] = e_2; \\
A_{4.4} : & [e_1, e_4] = e_1, & [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \\
 & [e_3, e_4] = e_2 + e_3; & \\
A_{4.5} : & [e_1, e_4] = e_1, & [e_2, e_4] = qe_2, \\
 & [e_3, e_4] = pe_3, & -1 \leq p \leq q \leq 1, \quad p \cdot q \neq 0; \\
A_{4.6} : & [e_1, e_4] = qe_1, & [e_2, e_4] = pe_2 - e_3, \\
 & [e_3, e_4] = e_2 + pe_3, & q \neq 0, \quad p \geq 0; \\
A_{4.7} : & [e_2, e_3] = e_1, & [e_1, e_4] = 2e_1, \\
 & [e_2, e_4] = e_2, & [e_3, e_4] = e_2 + e_3; \\
A_{4.8} : & [e_2, e_3] = e_1, & [e_1, e_4] = (1 + q)e_1, \\
 & [e_2, e_4] = e_2, & [e_3, e_4] = qe_3, \quad |q| \leq 1; \\
A_{4.9} : & [e_2, e_3] = e_1, & [e_1, e_4] = 2qe_1, \\
 & [e_2, e_4] = qe_2 - e_3, & [e_3, e_4] = e_2 + qe_3, \quad q \geq 0; \\
A_{4.10} : & [e_1, e_3] = e_1, & [e_2, e_3] = e_2, \\
 & [e_1, e_4] = -e_2, & [e_2, e_4] = e_1.
\end{array}
$$

Неважко переконатися, що алгебри $A_{4.i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ мають комутативний ідеал, який збігається з алгеброю $A_{3.1} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, алгебри $A_{4.i}$ $(i = 7, 8, 9)$—нільпотентний ідеал, який збігається з алгеброю $A_{3.3} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, а алгебра $A_{4.10}$—розв'язний ідеал $A_{3.5} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Це дає можливість для побудови реалізацій чотиривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі використовувати вже відомі результати для алгебр $A_{3.1}, A_{3.3}$ та $A_{3.5}$.

Оскільки розгляд усіх випадків проводився аналогічно за схемою, яка була використана під час побудови рівнянь, інваріантних відносно чотиривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії, то тут ми лише коротко зупинимося на результаті проведених досліджень.

Для алгебр $A_{4.1}, A_{4.4}, A_{4.6}, A_{4.10}$ не існують реалізації в класі операторів (1.12), які б задовольняли умови сформульованої задачі.

Існують:
дві нееквівалентні реалізації алгебри $A_{4.2}$

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t, \partial_u, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u\rangle,\\
&\langle \partial_x, \partial_u, \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+x)\partial_u\rangle,
\end{aligned}$$

які відповідно є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + \lambda \exp(-u_x), \quad \lambda \neq 0;\\
u_t &= u_{xx} + 2\ln|u_x|;
\end{aligned}$$

одна реалізація алгебри $A_{4.3}$

$$\langle \partial_u, \partial_x, \partial_t, t\partial_x + u\partial_u\rangle,$$

яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = u_{xx} - u_x \ln|u_x| + \lambda u_x, \quad \lambda \in R;$$

одна реалізація алгебри $A_{4.5}$

$$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + ku\partial_u\rangle, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1,$$

яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = u_{xx} + \lambda|u_x|^{\frac{2k-2}{2k-1}}, \lambda \neq 0, k \neq 0, \frac{1}{2}, 1;$$

одна реалізація алгебри $A_{4.7}$

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u \rangle,$$

яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4t}u_x^2;$$

три нееквівалентні реалізації алгебри $A_{4.8}$

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u \rangle;\\
&\langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u \rangle,\ \ \lambda > 0;\\
&\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (1+q)u\partial_u \rangle,\\
&|q| \neq 1, \quad \lambda \neq 0,
\end{aligned}$$

які відповідно є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - uu_x + \lambda|u_x|^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda \neq 0;\\
u_t &= u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{|u_x|}, \quad \lambda > 0, \quad m \neq 0;\\
u_t &= u_{xx} - \frac{\lambda\epsilon}{4}(1-q)|t|^{-\frac{1}{2}(1+q)}u_x^2,\\
&\quad \lambda \neq 0, |q| \neq 1,\ \epsilon = 1 \text{ для } t > 0,\ \epsilon = -1 \text{ для } t < 0;
\end{aligned}$$

та одна реалізація алгебри $A_{4.9}$

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \alpha\partial_x, -(\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + (q-\alpha)x\partial_x + (2qu - \frac{1}{2}x^2)\partial_u \rangle,$$

яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2 + (\lambda - \alpha)(1+\alpha^2)^{-1}, \quad \lambda \in R,$$

$\alpha = \alpha(t)$, $(\dot{\alpha} \neq 0)$ є розв'язком рівняння (1.38).

Оскільки усі рівняння, які отримано у цьому підрозділі, є нееквівалентними і не містять довільних функцій, то задачу групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.9) можна вважати розв'язаною.

1.4. Висновки до розділу 1

У першому розділі ми запропонували новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь, який дозволяє значно розширити ступінь довільності елементів (функцій), що входять у досліджувані рівняння. Запропонований метод є власне синтезом методу Лі–Овсяннікова, результатів класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності, й спирається на ряд відомих положень групового аналізу диференціальних рівнянь. Його використання, зокрема, дозволило нам, не уводячи в розгляд додаткових співвідношень, отримати нове доведення класифікаційної теореми Л.В. Овсяннікова для лінійних рівнянь гіперболічного типу (1.3).

Також, використання запропонованого методу дозволило провести повну групову класифікацію найбільш загального двовимірного рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом (1.9).

Як випливає із проведених міркувань, найвищі симетрійні властивості серед нелінійних рівнянь досліджуваного вигляду має відоме рівняння Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + uu_x.$$

Максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння є п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії

$$\langle \partial_x, t\partial_x - \partial_u, \partial_t, -2t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u \rangle.$$

Також існують одинадцять нелінійних рівнянь вигляду (1.9), максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Перелік цих рівнянь зведено в таблиці 1.3, де ми використовуємо такі позначення:

$$\begin{aligned}
2A^1_{2.2} &= \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \partial_u \rangle \ (\lambda \neq 0);\\
2A^2_{2.2} &= \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \frac{1}{\lambda}\partial_t, e^{\lambda t}\partial_x \rangle \ (\lambda \neq 0);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^1_{4.2} &= \langle \partial_t, \partial_u, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u \rangle; \\
A^2_{4.2} &= \langle \partial_x, \partial_u, \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u \rangle; \\
A^1_{4.3} &= \langle \partial_u, \partial_x, \partial_t, t\partial_x + u\partial_u \rangle; \\
A^1_{4.5} &= \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + ku\partial_u \rangle \ (k \neq 0, \frac{1}{2}, 1); \\
A^1_{4.7} &= \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u \rangle; \\
A^1_{4.8} &= \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u \rangle; \\
A^2_{4.8} &= \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u \rangle \ (\lambda > 0); \\
A^3_{4.8} &= \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (1+q)u\partial_u \rangle \\
&\quad (|q| \neq 1,\ \lambda \neq 0); \\
A^1_{4.9} &= \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \alpha\partial_x, -(\dot\alpha)^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + \\
&\quad +(q-\alpha)x\partial_x + (2qu - \frac{1}{2}x^2)\partial_u \rangle,
\end{aligned}
$$

де $q > 0$, функція $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$ є розв'язком рівняння (1.38).

На закінчення стисло підсумуємо основні результати цього розділу:

1) запропоновано новий метод групової класифікації диференціальних рівнянь;

2) з використанням запропонованого методу отримано нове доведення класифікаційної теореми Л.В. Овсяннікова для рівняння вигляду (1.3);

3) здійснено повну групову класифікацію найбільш загального двовимірного рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом.

Таблиця 1.3

Рівняння (1.9), інваріантні відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

N п/п	Рівняння	Максимальна алгебра інваріантності
1	$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{\lvert t\rvert}} \ln \lvert tu_x^2\rvert + \frac{\beta u_x}{\sqrt{\lvert t\rvert}},$ $\epsilon = 1$ для $t > 0$, $\epsilon = -1$ для $t < 0$, $\beta \in R$, $\lambda \neq 0$	$2A_{2.2}^1$
2	$u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln \lvert u_x\rvert)$, $\lambda \neq 0$	$2A_{2.2}^2$
3	$u_t = u_{xx} + \lambda \exp(-u_x)$, $\lambda \neq 0$	$A_{4.2}^1$
4	$u_t = u_{xx} + 2 \ln \lvert u_x\rvert$	$A_{4.2}^2$
5	$u_t = u_{xx} - u_x \ln \lvert u_x\rvert + \lambda u_x$, $\lambda \in R$	$A_{4.3}^1$
6	$u_t = u_{xx} + \lambda\lvert u_x\rvert^{\frac{2k-2}{2k-1}}$, $\lambda \neq 0$, $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$	$A_{4.5}^1$
7	$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4t}u_x^2$	$A_{4.7}^1$
8	$u_t = u_{xx} - uu_x + \lambda\lvert u_x\rvert^{\frac{3}{2}}$, $\lambda \neq 0$	$A_{4.8}^1$
9	$u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{\lvert u_x\rvert}$, $\lambda > 0$, $m \neq 0$	$A_{4.8}^2$
10	$u_t = u_{xx} - \frac{\lambda\epsilon}{4}(1-q)\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}(1+q)}u_x^2,$ $\lambda \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 1$; $\epsilon = 1$ для $t > 0$, $\epsilon = -1$ для $t < 0$	$A_{4.8}^3$
11	$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2 + (\lambda - \alpha)(1 + \alpha^2)^{-1}$, $\lambda \in R$	$A_{4.9}^1$

РОЗДІЛ 2

Нелінійні рівняння еволюційного типу: групова класифікація та точні розв'язки

У другому розділі ми розглядаємо групову класифікацію квазілінійних рівнянь вигляду (1.1) та використовуємо відомі групи інваріантності ряду отриманих рівнянь для побудови їх точних розв'язків.

Описові нелінійних рівнянь вигляду (1.1), інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, присвячений перший підрозділ розділу. Тут же отримано ряд попередніх результатів групової класифікації розглядуваного класу рівнянь, які використовуються у подальших дослідженнях.

У другому підрозділі ми проводимо опис нелінійних рівнянь вигляду (1.1), алгебри інваріантності яких є розв'язними дійсними алгебрами Лі операторів симетрії, і завершуємо задачу групової класифікації.

Проблемі інтегрування та побудови точних розв'язків ряду нелінійних рівнянь вигляду (1.1), грунтуючись на їх нетривіальних симетрійних властивостях, присвячений третій підрозділ другого розділу. Тут ми зупиняємося на симетрійній редукції цих рівнянь та можливостях використання некласичної, так званої Q–умовної симетрії рівнянь еволюційного типу для побудови їх нових розв'язків.

У четвертому підрозділі підведено підсумки і зроблено висновки до другого розділу.

Основні результати розділу опубліковані в статтях [1, 36, 204, 206] та оглядові [99].

2.1. Інваріантність рівнянь відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві

Основним об'єктом досліджень, які ми проводимо в другому розділі, є рівняння вигляду

$$u_t = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \tag{2.1}$$

де $F \neq 0$.

Основною задачею тут є групова класифікація нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Як і в попередньому розділі, ми для її розв'язування використовуємо запропонований в [19, 207] метод, дещо змінивши порядок виконання кроків його алгоритму.

Так, виконавши дослідження згідно з першим кроком алгоритму, ми далі проводимо опис нелінійних рівнянь вигляду (2.1), алгебри інваріантності яких є алгебрами Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві.

2.1.1. Попередні результати групової класифікації рівняння (2.1). Згідно із алгоритмом Лі, інфінітезимальні оператори групи симетрії рівняння (2.1) шукаємо у вигляді (1.10).

Умова інваріантності рівняння (2.1) відносно оператора (1.10) має вигляд

$$\varphi^t - [\tau F_t + \xi F_x + \eta F_u + \varphi^x F_{u_x}]u_{xx} - \varphi^{xx}F - \tau G_t - \xi G_x - \eta G_u - \varphi^x G_{u_x}|_{(2.1)} = 0.$$

Провівши необхідні обчислення і перетворення, та здійснивши розщеплення отриманої рівності за степенями вільних диференціальних змінних u_{tx}, u_{xx}, приходимо до такого результату.

Твердження 2.1.1 *Група симетрії рівняння (2.1) генерується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$Q = a(t)\partial_t + b(t,x,u)\partial_x + c(t,x,u)\partial_u, \tag{2.2}$$

де дійсні гладкі функції $a,\ b,\ c,\ F,\ G$ *задовольняють такі дві рівності:*

$$\begin{aligned}
&(2b_x + 2u_xb_u - \dot{a})F = aF_t + bF_x + \\
&+cF_u + (c_x + u_xc_u - u_xb_x - u_x^2b_u)F_{u_x}, \\
&c_t - u_xb_t + (c_u - \dot{a} - u_xb_u)G + (u_xb_{xx} - c_{xx} - \\
&-2u_xc_{ux} - u_x^2c_{uu} + 2u_x^2b_{xu} + u_x^3b_{uu})F = \\
&aG_t + bG_x + cG_u + (c_x + u_xc_u - u_xb_x - u_x^2b_u)G_{u_x}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Тут і далі $\dot{a} = \dfrac{da}{dt},\ \ddot{a} = \dfrac{d^2a}{dt^2}$ і т.п.

Для побудови групи еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (2.1) потрібно із множини невироджених замін змінних простору $V = R_2 \times R_1$ незалежних $R_2 = \langle t, x\rangle$ та залежної $R_1 = \langle u\rangle$ змінних

$$\bar{t} = \alpha(t,x,u),\quad \bar{x} = \beta(t,x,u),\quad v = \gamma(t,x,u),\quad \frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(t,x,u)} \neq 0,$$

вибрати ті перетворення, які зберігають вигляд рівняння (2.1) незмінним.

Твердження 2.1.2 *Групу* $\mathcal{E}$ *складають перетворення*

$$\bar{t} = T(t),\quad \bar{x} = X(t,x,u),\quad v = U(t,x,u), \tag{2.4}$$

де $\dot{T} \neq 0,\quad \dfrac{D(X,U)}{D(x,u)} \neq 0.$

Доведення твердження 2.1.2 проводиться аналогічно доведенню твердження 1.2.2, тому тут ми на ньому не зупиняємося.

Як випливає із результатів твердження 2.1.1, інфінітезимальні оператори, що генерують групу інваріантності рівняння (2.1), належать до більш широкого класу лінійних диференціальних операторів, ніж інфінітезимальні оператори, які генерують групу симетрії рівняння (1.9). З іншого боку і група еквівалентності рівняння (2.1) є значно ширшою за групу еквівалентності рівняння (1.9). Зокрема, вона містить перетворення

$$\overline{t} = t,\qquad \overline{x} = u,\qquad \overline{v} = x, \tag{2.5}$$

яке значно звужує перелік нееквівалентних рівнянь вигляду (2.1). У цьому ми переконуємося, завершуючи виконання першого кроку алгоритму методу групової класифікації для рівняння (2.1).

Теорема 2.1.1 *Існують заміни змінних (2.4), які зводять оператор (2.2) в один із таких двох операторів:*

$$Q = \partial_t; \tag{2.6}$$

$$Q = \partial_x. \tag{2.7}$$

Доведення. В результаті виконання заміни змінних (2.4) оператор (2.2) трансформується в оператор

$$Q \to \bar{Q} = a\dot{T}\partial_{\bar{t}} + (aX_t + bX_x + cX_u)\partial_{\bar{x}} + (aU_t + bU_x + cU_u)\partial_v. \tag{2.8}$$

Нехай в (2.2) $a \neq 0$. Тоді, поклавши в (2.4) функцію T рівною розв'язку рівняння $\dot{T} = a^{-1}$, а функції X та U—рівними фундаментальним розв'язкам однорідного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

$$aY_t + bY_x + cY_u = 0, \quad Y = Y(t, x, u),$$

переконуємося, що оператор (2.8) набуває вигляду

$$\bar{Q} = \partial_{\bar{t}}.$$

Нехай, тепер, в (2.2) $a = 0$. Тоді в (2.2) обов'язково або $b \neq 0$, або $c \neq 0$. Якщо $b \neq 0$, то, поклавши в (2.4) функцію X рівною частинному розв'язкові рівняння

$$bX_x + cX_u = 1,$$

а функцію U рівною фундаментальному розв'язкові рівняння

$$bU_x + cU_u = 0,$$

зводимо оператор (2.8) в оператор

$$\bar{Q} = \partial_{\bar{x}}.$$

Якщо ж в (2.2) $b = 0$, $c \neq 0$, то з точністю до дії заміни змінних (2.5) маємо попередній випадок.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що не існують перетворення з групи $\mathcal{E}$, які зводять оператор (2.6) в оператор $\partial_{\bar{x}}$.

Теорему доведено.

Наслідок 2.1.1 *Якщо нелінійне рівняння вигляду (2.1) допускає одновимірну алгебру інваріантності* A_1*, то з точністю до еквівалентності воно збігається з одним із таких двох рівнянь:*

$$u_t = F(x,u,u_x)u_{xx} + G(x,u,u_x), \tag{2.9}$$

$$u_t = F(t,u,u_x)u_{xx} + G(t,u,u_x). \tag{2.10}$$

Алгебри інваріантності цих рівнянь відповідно мають вигляд $A_1^1 = \langle \partial_t \rangle$, $A_1^2 = \langle \partial_x \rangle$.

Доведення. Якщо рівняння (2.1) допускає одновимірну алгебру інваріантності, то її базисний оператор має вигляд (2.2) і перетвореннями (2.4) може бути зведеним до одного із операторів (2.6), (2.7).

Використовуючи класифікуючі рівняння (2.3), переконуємося, що інваріантні відносно цих операторів рівняння вигляду (2.1) відповідно збігаються з рівняннями (2.9), (2.10). Використання інфінітезимального методу Лі показало, що коли функції F і G в отриманих рівняннях є довільними функціями своїх аргументів, то відповідні одновимірні алгебри Лі операторів симетрії є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Нарешті, нееквівалентність рівнянь (2.9), (2.10) випливає із нееквівалентності їх алгебр інваріантності.

Наслідок доведено.

Використовуючи результати твердження 2.1.1, 2.1.2, теореми 2.1.1 та наслідку із неї, перейдемо до подальшої групової класифікації рівнянь вигляду (2.1). Як відзначалося вище, спочатку ми проводимо опис нелінійних рівнянь вигляду (2.1), алгебри інваріантності яких є алгебрами Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві.

2.1.2. Інваріантність рівнянь (2.1) відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві. Якщо максимальна алгебра інваріантності диференціального рівняння є алгеброю Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, то вона містить як підалгебру деяку напівпросту алгебру Лі операторів симетрії. Отже, перш за все, таке диференціальне рівняння буде інваріантним відносно деякої напівпростої алгебри Лі операторів симетрії. Тому тут, як і під час розгляду рівнянь вигляду (1.9), ми стартуємо з опису $so(3)$– та $sl(2,R)$–інваріантних нелінійних рівнянь вигляду (2.1).

Теорема 2.1.2 *З точністю до еквівалентності в класі операторів (2.2) існує одна реалізація алгебри* $so(3)$

$$\langle \partial_x, \tan u \ \sin x\partial_x + \cos x\partial_u, \tan u \ \cos x\partial_x - \sin x\partial_u \rangle, \tag{2.11}$$

яка є алгеброю інваріантності рівняння вигляду (2.1). При цьому в (2.1)

$$F = \frac{\sec^2 u}{1+\omega^2}, \quad G = \frac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\tan u + \sqrt{1+\omega^2}\tilde{G}(t), \ \omega = u_x \sec u. \tag{2.12}$$

Якщо в (2.12) $\tilde{G}$*—довільна функція свого аргументу, то реалізація (2.11) є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння.*

<u>Доведення.</u> Алгебра $so(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ визначається такими комутаційними співвідношеннями:

$$[e_1, e_2] = e_3, \ [e_1, e_3] = -e_2, \ [e_2, e_3] = e_1. \tag{2.13}$$

Для опису реалізацій алгебри $so(3)$ ми повинні в якості базисних операторів e_i $(i = 1, 2, 3)$ взяти оператори вигляду (2.2) і відібрати такі трійки операторів, які задовольняють комутаційні співвідношення (2.13).

Для спрощення вигляду цих операторів ми можемо використовувати перетворення (2.4).

Згідно з результатами теореми 2.1.1, один із базисних операторів алгебри $so(3)$ (наприклад, оператор e_1) ми можемо відразу покласти рівним ∂_t або ∂_x.

Нехай $e_1 = \partial_t$. Тоді із виконання перших двох комутаційних співвідношень (2.13) випливає, що

$$\begin{aligned} e_2 &= \lambda \cos t \partial_t + [b \cos t + \beta \sin t]\partial_x + [c \cos t + \gamma \sin t]\partial_u, \\ e_3 &= -\lambda \sin t \partial_t + [-b \sin t + \beta \cos t]\partial_x + [-c \sin t + \gamma \cos t]\partial_u, \end{aligned}$$

де $\lambda = const \in R$; $b = b(x, u)$, $c = c(x, u)$, $\beta = \beta(x, u)$, $\gamma = \gamma(x, u)$ —довільні гладкі функції своїх аргументів. Але перевірка третього комутаційного співвідношення (2.13) приводить до рівності $\lambda^2 = -1$, яка є хибною в дійсній області. Отже, у цьому випадкові не існують реалізації алгебри $so(3)$ в класі операторів (2.2).

Нехай, тепер, $e_1 = \partial_x$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед перетворень групи $\mathcal{E}$ лише перетворення

$$\bar{t} = T(t),\ \bar{x} = x + X(t, u),\ v = U(t, u),\ \dot{T} \neq 0,\ U_u \neq 0 \tag{2.14}$$

залишає вигляд оператора e_1 незмінним.

Далі, із виконання перших двох комутаційних співвідношень (2.13), випливає, що

$$\begin{aligned} e_2 &= \alpha \cos(x + \gamma)\partial_x + \beta \cos(x + \theta)\partial_u, \\ e_3 &= -\alpha \sin(x + \gamma)\partial_x - \beta \sin(x + \theta)\partial_u, \end{aligned} \tag{2.15}$$

де $\alpha = \alpha(t, u)$, $\gamma = \gamma(t, u)$, $\beta = \beta(t, u)$, $\theta = \theta(t, u)$— довільні гладкі функції своїх аргументів. Якщо в (2.15) $\beta = 0$, то перевірка третього комутаційного співвідношення (2.13) приводить до рівності $\alpha^2 = -1$, яка є хибною в дійсній області. Тому в (2.15) обов'язково $\beta \neq 0$. Поклавши в (2.14) $X = \theta$, а функцію U — рівною розв'язкові рівняння $U_u = \beta^{-1}$, бачимо, що оператори e_2, e_3 в результаті такої заміни змінних трансформуються в оператори (залишаємо початкові позначення змінних)

$$\begin{aligned} e_2 &= \alpha\cos(x+\gamma)\partial_x + \cos x\partial_u, \\ e_3 &= -\alpha\sin(x+\gamma)\partial_x - \sin x\partial_u, \end{aligned}$$

де $\alpha = \alpha(t,u)$, $\gamma = \gamma(t,u)$—довільні гладкі функції своїх аргументів.

Перевірка третього комутаційного співвідношення (2.13) для отриманих операторів e_1, e_2 привела до рівностей $\cos\gamma = 0$, $\alpha^2 + \alpha_u\sin\gamma = -1$, звідки випливає, що

$$\begin{aligned} e_2 &= \tan[u\pm\tilde{\alpha}(t)]\sin x\partial_x + \cos x\partial_u, \\ e_3 &= \tan[u\pm\tilde{\alpha}(t)]\cos x\partial_x - \sin x\partial_u, \end{aligned}$$

де $\tilde{\alpha}(t)$—довільна гладка функція змінної t.

Нарешті, поклавши в (2.14) $T = t$, $X = 0$, $U = u \pm \tilde{\alpha}(t)$ переконуємося, що отримана реалізація зводиться до реалізації вигляду (2.11).

Перевіримо далі, чи буде реалізація (2.11) алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (2.1). Для оператора e_1 в інваріантному рівнянні $F = F(t,u,u_x)$, $G = G(t,u,u_x)$. Тому, для операторів e_2 і e_3 умови (2.3) є еквівалентними такій системі диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &F_u - u_x\tan\, uF_{u_x} = 2\tan\, u\cdot F, \\ &(1+u_x^2\sec^2 u)F_{u_x} = -2u_x\sec^2 u\cdot F, \\ &u_x\sec^2 u\cdot G + u_x\tan\, u(1-2u_x^2\sec^2 u)F = (1+u_x^2\sec^2 u)\cdot G_{u_x}, \\ &(1+2u_x^2\sec^2 u)F = G_u - u_x\tan\, uG_{u_x}. \end{aligned}$$

Із перших двох рівнянь системи випливає, що $F = \dfrac{\sec^2 u}{1+\omega^2}\tilde{F}(t)$, де $\omega = u_x\sec u$. Із четвертого рівняння системи отримуємо, що $G = \dfrac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\tan\, u\tilde{F}(t) + \bar{G}(t,\omega)$. Нарешті, із третього рівняння системи випливає, що $\bar{G} = \sqrt{1+\omega^2}\tilde{G}(t)$. Отже, якщо реалізація (2.11) алгебри $so(3)$ є алгеброю інваріантності рівняння (2.1), то в інваріантному рівнянні

$$F = \frac{\sec^2 u}{1+\omega^2}\tilde{F}(t),\ G = \frac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\tan u\tilde{F}(t) + \sqrt{1+\omega^2}\tilde{G}(t), \qquad (2.16)$$

де $\omega = u_x \sec u$.

Тут $\tilde{F}(t)$, $\tilde{G}(t)$—довільні гладкі функції своїх аргументів і при цьому $\tilde{F}(t) \neq 0$.

Заміна змінних (2.14), де $X = 0$, $U = u$ залишає вигляд операторів реалізації (2.11) незмінним. Тому, поклавши T рівним розв'язкові рівняння $\dot{T} = \tilde{F}$, можемо трансформувати отримане рівняння (2.16) в таке, де $\tilde{F}(t) = 1$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для довільної функції $\tilde{G}(t)$ реалізація (2.11) є максимальною алгеброю інваріантності отриманого рівняння вигляду (2.1), де функції F і G мають значення (2.14).

Теорему доведено.

Теорема 2.1.3 *З точністю до еквівалентності в класі операторів (2.2) існують п'ять реалізацій алгебри $sl(2,R)$, які є алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (2.1):*

$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle; \qquad (2.17)$$

$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2-t)\partial_x, \partial_t, \rangle; \qquad (2.18)$$

$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, -x^2\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle; \qquad (2.19)$$

$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, (u^{-4} - x^2)\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle; \qquad (2.20)$$

$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, -(u^{-4} + x^2)\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle. \qquad (2.21)$$

Значення функцій F і G у відповідних інваріантних рівняннях такі:

$sl(2,R)$	F	G
(2.17)	$\tilde F(\omega)$	$x^{-2}\left[\tilde G(\omega)-2u\tilde F(\omega)+u^2-u\omega\right]$, $\omega=2u-xu_x$
(2.18)	ω^{-3}	$x^{-2}\left[-\frac{1}{4}\omega+3\omega^{-2}+\omega^{-1}\tilde G(u)\right]$, $\omega=xu_x$
(2.19)	u^{-4}	$-2u^{-5}u_x^2$
(2.20)	$u^{-4}\left(1+4\omega^2\right)^{-1}$	$u\left[\sqrt{1+4\omega^2}\tilde G(t)-\frac{10\omega^2+1}{8\omega^2+2}\right]$, $\omega=u^{-3}u_x$
(2.21)	$u^{-4}\left(1-4\omega^2\right)^{-1}$	$u\left[\sqrt{\lvert 1-4\omega^2\rvert}\tilde G(t)+\frac{10\omega^2-1}{8\omega^2-2}\right]$, $\omega=u^{-3}u_x$

Якщо в інваріантних рівняннях функції $\tilde F$ *і* $\tilde G$ *є довільними функціями своїх аргументів, то відповідні реалізації алгебри* $sl(2,R)$ *є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* $u_t=u^{-4}u_{xx}-2u^{-5}u_x^2$ *(третього в переліковi) є п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії, ізоморфна алгебрі* $sl(2,R)\oplus L_{2.1}$, *де* $sl(2,R)$ *збігається з реалізацією (2.19), а* $L_{2.1}=\langle 4t\partial_t+u\partial_u,\partial_t\rangle$.

Доведення. Алгебра $sl(2,R)=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$ визначається такими комутаційними співвідношеннями:

$$[e_1,e_2]=2e_2,\quad [e_1,e_3]=-2e_3,\quad [e_2,e_3]=e_1. \tag{2.22}$$

Згідно із результатами теореми 2.1.1, ми можемо відразу один із базисних операторів реалізації алгебри $sl(2,R)$ (вибираємо оператор e_3) взяти рівним оператору ∂_t або оператору ∂_x.

Нехай $e_3=\partial_t$. Тоді із виконання другого комутаційного співвідношення (2.22) випливає, що з точністю до еквівалентності оператор e_1 збігається або з оператором $2t\partial_t$, або з оператором $2t\partial_t+x\partial_x$.

Якщо $e_1 = 2t\partial_t$, то із виконання решти комутаційних співвідношень (2.22) випливає, що $e_2 = -t^2\partial_t$. Прийшли до реалізації $\langle 2t\partial_t, -t^2\partial_t, \partial_t\rangle$. Але вимога того, що отримана реалізація є алгеброю інваріантності рівняння (2.1), приводить до рівності $F = 0$, яка суперечить припущенню, що в рівнянні $F \neq 0$.

Якщо ж $e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x$, то з точністю до еквівалентності мають місце реалізація $\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x, \partial_t\rangle$ та реалізації (2.17) і (2.18) алгебри $sl(2, R)$.

Перевірка умов (2.3) показує, що перша реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівняння (2.1); для реалізації (2.17)

$$F = \tilde{F}(\omega), \quad G = x^{-2}\left[\tilde{G}(\omega) - 2u\tilde{F}(\omega) + u^2 - u\omega\right], \ \omega = 2u - xu_x,$$

а для реалізації (2.18)

$$F = \omega^{-3}\tilde{F}(u), \quad G = x^{-2}\left[-\frac{1}{4}\omega + 3\omega^{-2}\tilde{F}(u) + \omega^{-1}\tilde{G}(u)\right], \ \omega = xu_x.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що заміна змінних

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = U(v), \quad U' \neq 0, \quad v = v(t, x),$$

залишає вигляд базисних операторів реалізації (2.18) незмінним. Тому, поклавши функцію U рівною розв'язкові рівняння $(U')^3 = \tilde{F}(U)$, бачимо, що з точністю до еквівалентності, в знайдених для реалізації (2.18) значеннях функцій F і G, можна покласти $\tilde{F} \equiv 1$.

Нехай, тепер, $e_3 = \partial_x$. Тоді із виконання комутаційних співвідношень (2.22) випливає, що з точністю до еквівалентності в класі операторів (2.2) реалізації алгебри $sl(2, R)$ вичерпуються реалізацією $\langle 2x\partial_x, -x^2\partial_x, \partial_x\rangle$ та реалізаціями (2.19), (2.20), (2.21).

Перевірка умов (2.3) показує, що перша реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (2.1). Решта реалізацій задовольняють умови поставленої задачі. При цьому, для реалізації (2.19)

$$F = u^{-4}\tilde{F}(t), \quad G = -2u^{-5}u_x^2\tilde{F}(t) + u\tilde{G}(t);$$

для реалізації (2.20)

$$F = \frac{1}{u^4\left(1+4\omega^2\right)}\tilde{F}(t), \quad G = u\left[\sqrt{1+4\omega^2}\tilde{G}(t) - \frac{10\omega^2+1}{8\omega^2+2}\tilde{F}(t)\right],$$
$$\omega = u^{-3}u_x;$$

а для реалізації (2.21)

$$F = \frac{1}{u^4\left(1-4\omega^2\right)}\tilde{F}(t), \quad G = u\left[\sqrt{|1-4\omega^2|}\tilde{G}(t) + \frac{10\omega^2-1}{8\omega^2-2}\tilde{F}(t)\right],$$
$$\omega = u^{-3}u_x.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що заміна змінних

$$\bar{t} = T, \quad \bar{x} = x, \quad v = U(t)u, \quad T \neq 0, \quad U \neq 0,$$

залишає вигляд базисних операторів реалізації (2.19) незмінним. Поклавши тут функції T та U рівними розв'язкам рівнянь $\dot{U} = U\tilde{G}(t)$, $U \neq 0$, $\dot{T} = \tilde{F}U^4$, бачимо, що з точністю до еквівалентності в першому отриманому інваріантному рівнянні можна покласти $\tilde{F} \equiv 1$, $\tilde{G} \equiv 0$.

Аналогічно, безпосередньою перевіркою переконуємося, що заміна змінних

$$\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = x, \quad v = u$$

залишає вигляд базисних операторів реалізацій (2.20), (2.21) незмінним. Поклавши в ній $T(t) = \int^t \tilde{F}(\xi)d\xi$, бачимо, що у відповідних інваріантних рівняннях з точністю до еквівалентності можна вважати $\tilde{F} \equiv 1$.

Рівняння, яке є інваріантним відносно реалізації (2.19) не містить довільних функцій. Тому, скориставшись алгоритмом Лі, знаходимо, що його максимальною алгеброю інваріантності є п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії, яка є прямою сумою напівпростої алгебри $sl(2,R)$ з базисними операторами (2.19) та двовимірної розв'язної алгебри Лі $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t\rangle$.

Решта інваріантних рівнянь містять довільні функції і безпосередня перевірка показує, що у загальному випадкові відповідні реалізації алгебри $sl(2,R)$ є їх максимальними алгебрами інваріантності.

Для завершення доведення теореми потрібно переконатися в нееквівалентності отриманих $sl(2,R)$–інваріантних рівнянь. Оскільки розмірність максимальної алгебри інваріантності третього в переліковi рівняння дорівнює 5, то його нееквівалентність решті рівнянь (алгебри інваріантності яких мають розмірність 3) є очевидною.

Для перевірки нееквівалентності решти рівнянь безпосередньою перевіркою переконуємося, що не існують такі перетворення (2.4), які зводять алгебри інваріантності цих рівнянь одна в одну.

Зупинимося, наприклад, на випадкові першого і другого рівнянь із переліку. Нехай

$$\begin{aligned} e_1 &= 2t\partial_t + x\partial_x, \qquad e_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \qquad e_3 = \partial_t. \\ \overline{e}_1 &= 2\overline{t}\partial_{\overline{t}} + \overline{x}\partial_{\overline{x}}, \qquad e_2 = -\overline{t}^2\partial_{\overline{t}} - \overline{x}(\overline{x}^2 - \overline{t})\partial_{\overline{x}}, \qquad \overline{e}_3 = \partial_{\overline{t}}. \end{aligned}$$

Припустимо, що існують перетворення (2.4), які зводять реалізацію (2.17) в реалізацію (2.18):

$$e_i \overset{(2.4)}{\rightarrow} E_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\overline{e}_j, \tag{2.23}$$

де $\alpha_{ij} \in R$ $(i,j = 1,2,3)$, $det||\alpha_{ij}|| \neq 0$. Із виконання (2.23) випливає, що повинні виконуватися рівності

$$\begin{aligned} &2t\dot{T} = 2\alpha_{11}T - \alpha_{12}T^2 + \alpha_{13}, \qquad 2tU_t + xU_x = 0, \\ &2tX_t + xX_x = \alpha_{11}X + \alpha_{12}X(X^2 - T), \\ &-t^2\dot{T} = 2\alpha_{21}T - \alpha_{22}T^2 + \alpha_{23}, \\ &-t^2X_t - txX_x + x^2X_u = \alpha_{21}X + \alpha_{22}X(X^2 - T), \\ &-t^2U_t - txU_x + x^2U_u = 0, \qquad U_t = 0, \\ &\dot{T} = 2\alpha_{31}T - \alpha_{32}T^2 + \alpha_{33}, \qquad X_t = \alpha_{31}X + \alpha_{32}X(X^2 - T). \end{aligned}$$

Але тоді $U_t = U_x = U_u = 0$. А це суперечить умові невиродженості замін змінних (2.4). Отже наше припущення є хибним, а тому перше і друге $sl(2, R)$–інваріантні рівняння із переліку теореми є нееквівалентними.

Теорема доведена.

Теорема 2.1.4 *В класі операторів (2.2), окрім отриманих реалізацій алгебр* $so(3)$ *та* $sl(2, R)$, *не існують інші реалізації напівпростих алгебр Лі, які були б алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1).*

Доведення.Як і в доведенні теореми 1.2.3, тут нам достатньо переконатися, що в класі операторів (2.2), окрім реалізацій, отриманих в теоремах 2.1.2 та 2.1.3, не існують інші реалізації напівпростих дійсних алгебр Лі, які б задовольняли умови сформульованої задачі, тобто, які були б алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1).

Розглянемо спочатку випадок класичних напівпростих дійсних алгебр Лі. Алгебри розмірності 3 розглянуто в теоремах 2.1.2 та 2.1.3, тому подальшому дослідженню підлягають алгебри розмірності 6: $so(4), so(3,1)$, $so(2,2), so^*(4)$.

Оскільки $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, то $so(4) = \langle e_i, \bar{e}_i | i = 1,2,3\rangle$, де $\langle e_1, e_2, e_3\rangle = so(3)$, $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\rangle = so(3)$ і $[e_i, \bar{e}_j] = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Згідно з результатами теореми 2.1.2 існує єдина реалізація алгебри $so(3)$, яка є алгеброю інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Покладемо базисні оператори e_i $(i = 1, 2, 3)$ відповідно рівними базисним операторам реалізації (2.11).Тоді із умови $[e_i, \bar{e}_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ випливає, що оператори $\bar{e}_j$ потрібно розглядати в такому класі операторів:

$$\bar{e} = a(t)\partial_t, \quad a \neq 0. \tag{2.24}$$

Так як заміна змінних

$$\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = x, \quad v = u,$$

залишає вигляд операторів (2.11) незмінним, то один з операторів $\bar{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ вигляду (2.24) можна звести до оператора $\partial_{\bar{t}}$. Нехай $\bar{e}_1 = \partial_t$. Тоді перевірка комутаційних співвідношень алгебри $so(3)$ показує, що

$$\bar{e}_2 = \lambda \cos(t + \lambda_1)\partial_t, \quad \bar{e}_3 = -\lambda \sin(t + \lambda_1),$$

де $\lambda_1, \lambda \in R$ і $\lambda^2 = -1$. Але остання рівність в дійсній області є хибною. Звідси випливає, що не існують реалізації алгебри $so(4)$ в класі операторів (2.2), які були б алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (2.1).

Оскільки $so^*(4) \sim so(3) \oplus sl(2, R)$, то для побудови її реалізацій потрібно описати реалізації алгебри $sl(2, R)$ в класі операторів (2.24). Але, як було показано під час доведення теореми 2.1.3, в класі операторів (2.24) існує єдина реалізація цієї алгебри $\langle 2t\partial_t, -t^2\partial_t, \partial_t \rangle$, яка не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (2.1).

Алгебра $so(3, 1)$ має розклад Картана $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \dot{+} \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$, де $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = so(3)$, $[e_i, N_j] = \epsilon_{ijl} N_l$, $[N_i, N_j] = -\epsilon_{ijl} e_l, i, j, l = 1, 2, 3$; ϵ_{ijl}— антисиметричний тензор третього рангу, $\epsilon_{123} = 1$. Тому, поклавши оператори e_i $(i = 1, 2, 3)$ рівними відповідно базисним операторам реалізації (2.11), отримуємо, що з точністю до еквівалентності

$$\begin{aligned} N_1 &= \cos u \partial_u, \ N_2 = -\sec u \ \cos x \partial_x + \sin u \ \sin x \partial_u, \\ N_3 &= \sec u \ \sin x \partial_x + \sin u \ \cos x \partial_u. \end{aligned}$$

Але перевірка умов (2.3) вже для оператора N_1, приводить до рівності $F = 0$, що суперечить вимозі $F \neq 0$ в рівнянні (2.1).

Під час опису реалізацій алгебри $so(2, 2)$, ми скористалися тим, що $so(2, 2) \sim sl(2, R) \oplus sl(2, R)$. Це дало можливість вибрати базисні оператори цієї алгебри так, що $so(2, 2) = \langle e_i, \bar{e}_i \ | i = 1, 2, 3 \rangle$, де $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = sl(2, R)$, $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = sl(2, R)$ і $[e_i, \bar{e}_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Перебір усіх трійок (2.17)–(2.21) для операторів e_i $(i = 1, 2, 3)$ показав, що не існують реалізації алгебри $so(2, 2)$, які були б алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1).

Отже, не існує жодна реалізація шестивимірних класичних напівпростих алгебр Лі, які б задовольняли умови поставленої задачі.

До аналогічного результату привів і розгляд алгебр Лі, які мають наступну розмірність 8: $sl(3,R)$, $su(3)$ та $su(2,1)$.

А як було показано в доведенні теореми 1.2.3, у цьому випадкові не існуватимуть реалізації як класичних напівпростих алгебр Лі розмірності вищої за 3, так і реалізації виняткових напівпростих алгебр Лі.

Теорема доведена

Оскільки отриманими в теоремах 2.1.2 та 2.1.3 рівняннями вичерпуються ті, що допускають напівпрості алгебри Лі операторів симетрії, то для опису рівнянь, алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві, потрібно вивчити можливості розширення симетрійних властивостей рівнянь, які вже містять довільні функції одного аргументу.

Провівши, згідно з класичним методом Лі–Овсяннікова, досить громіздкі, але стандартні обчислення, ми отримали, що нелінійні рівняння вигляду (2.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є алгебри Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, з точністю до еквівалентності вичерпуються сімома рівняннями. Нижче ми наводимо перелік цих рівнянь та відповідних їм алгебр інваріантності.

1) $u_t = \dfrac{\sec^2 u}{1+u_x^2\sec^2 u}u_{xx} + \dfrac{1+2u_x^2\sec^2 u}{1+u_x^2\sec^2 u}\tan u + \lambda\sqrt{1+u_x^2\sec^2 u},\ \lambda\in R;$

$so(3)\oplus L_1$, $so(3)$— реалізація (2.11), $L_1=\langle\partial_t\rangle$;

2) $u_t = x^{-3}u_x^{-3}u_{xx} - \dfrac{1}{4}x^{-1}u_x + 3x^{-4}u_x^{-2} + \lambda x^{-3}u_x^{-1},\ \lambda\in R;$

$sl(2,R)\oplus L_1$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.18), $L_1=\langle\partial_u\rangle$;

3) $u_t = \dfrac{u^2}{u^6+4u_x^2}u_{xx} - \dfrac{10uu_x^2+u^7}{8u_x^2+2u^6} + \lambda u^{-2}\sqrt{u^6+4u_x^2},\ \lambda\in R;$

$sl(2,R)\oplus L_1$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.20), $L_1=\langle\partial_t\rangle$;

4) $u_t = \dfrac{u^2}{u^6-4u_x^2}u_{xx} + \dfrac{10uu_x^2-u^7}{8u_x^2-2u^6} + \lambda u^{-2}\sqrt{|u^6-4u_x^2|},\ \lambda\in R;$

$sl(2,R) \oplus L_1$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.21), $L_1 = \langle \partial_t \rangle$;

5) $u_t = \lambda[2u - xu_x]u_{xx} + [4\gamma - 4\lambda - 1]x^{-2}u^2 + [1 + 2\lambda - 4\gamma]x^{-1}uu_x + \gamma u_x^2$,

$\lambda \neq 0$, $\gamma \in R$; $sl(2,R) \oplus L_1$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.17),

$L_1 = \langle x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$;

6) $u_t = u^{-4}u_{xx} - 2u^{-5}u_x^2$;

$sl(2,R) \oplus L_{2.1}$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.19), $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t \rangle$;

7) $u_t = u_{xx} + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 - 2x^{-2}u$;

$sl(2,R) \ni\!\!\!+ L_{2.2}$, $sl(2,R)$ — реалізація (2.17),
$L_{2.2} = \langle t\partial_x + [tx^{-1}(u+2) - x]\partial_u, \partial_x + x^{-1}(u+2)\partial_u \rangle$.

Зауважимо, що шосте із переліку рівняння заміною змінних

$$\bar{t} = t, \qquad \bar{x} = x, \qquad v = u^3$$

зводиться до відомого рівняння

$$v_{\bar{t}} = (v^{-\frac{4}{3}}v_{\bar{x}})_{\bar{x}},$$

яке було отримане Л.В. Овсянніковим [47] під час групової класифікації нелінійного рівняння теплопровідності.Сьоме ж рівняння заміною змінних

$$\bar{t} = t, \qquad \bar{x} = x, \qquad u = xv - 2, \qquad v = v(\bar{t}, \bar{x}),$$

зводиться до рівняння Бюргерса

$$v_{\bar{t}} = v_{\bar{x}\bar{x}} - vv_{\bar{x}}.$$

2.2. Інваріантність рівняння (2.1) відносно розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Як і під час класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1.9), ми і тут, проводячи опис нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (2.1), які допускають розв'язні алгебри Лі операторів симетрії, рухаємося поетапно, йдучи від алгебр розмірності 1 до алгебр розмірності 2, від алгебр розмірності 2 до алгебр розмірності 3 і т.д.

Класифікацію рівнянь, які допускають дво– та тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії, ми називаємо попередньою класифікацією, а класифікацію рівнянь, які допускають алгебри Лі операторів симетрії розмірності вищої за три,— завершенням класифікації.

2.2.1. Попередня класифікація рівнянь. Згідно із результатами теореми 2.1.1 та наслідку до неї, нелінійні рівняння вигляду (2.1), алгебри інваріантності яких є одновимірними алгебрами Лі операторів симетрії, з точністю до еквівалентності вичерпуються такими двома рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \langle \partial_t \rangle : u_t = F(x,u,u_x)u_{xx} + G(x,u,u_x); \\ A_1^2 &= \langle \partial_x \rangle : u_t = F(t,u,u_x)u_{xx} + G(t,u,u_x); \end{aligned}$$

Кожна із двовимірних дійсних алгебр Лі $A_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, які, як було вказано вище, з точністю до ізоморфізму вичерпуються алгебрами $A_{2.1}$ ($[e_1, e_2] = 0$) та $A_{2.2}$ ($[e_1, e_2] = e_2$), містить як підалгебру одновимірну алгебру A_1. Тому, під час побудови реалізацій двовимірних алгебр Лі, ми проводимо розширення в класі операторів (2.2) відомих реалізацій алгебри A_1 до реалізацій алгебр $A_{2.1}$ та $A_{2.2}$.

Зупинимося детально на розглядові випадку алгебри $A_{2.1}$.

Нехай $e_1 = \partial_t$, а e_2 —оператор вигляду (2.2). Тоді із виконання комутаційного співвідношення, яке визначає алгебру $A_{2.1}$, випливає, що з точністю до вибору базису цієї алгебри можемо покласти

$$e_2 = b(x,u)\partial_x + c(x,u)\partial_u. \tag{2.25}$$

Оскільки оператор (2.25) ми можемо розглядати як дотичне векторне поле, визначене в просторі $R_2 = \langle x, u \rangle$, то, згідно з відомою теоремою про подібність векторних полів [51, с. 41], можемо покласти $e_2 = \partial_u$. Отже, має місце реалізація $\langle \partial_t, \partial_u \rangle$.

Нехай, тепер, $e_1 = \partial_x$, e_2— оператор вигляду (2.2). Тоді із виконання комутаційного співвідношення випливає, що

$$e_2 = a(t)\partial_t + b(t,u)\partial_x + c(t,u)\partial_u. \tag{2.26}$$

Якщо в (2.26) $a \neq 0$, то, використовуючи заміну змінних

$$\overline{t} = T(t),\ \overline{x} = x + X(t,u),\ v = U(t,u),\ \dot{T} \neq 0,\ U_u \neq 0, \tag{2.27}$$

де $\dot{T} = a^{-1}$, а функції X та U є розв'язками відповідно рівнянь $aX_t + xX_u + b = 0;\ aU_t + cU_u = 0,\ U_u \neq 0$, ми зводимо оператор (2.26) до оператора $\bar{e}_2 = \partial_{\overline{t}}$.

Якщо в (2.26) $a = 0,\ c \neq 0$, то, поклавши в (2.27) $T = t$, а функції X та U рівними розв'язкам рівнянь $cX_u + b = 0,\ \ cU_u = 1$, зводимо оператор (2.26) до оператора $\bar{e}_2 = \partial_v$.

Нарешті, ящо в (2.26) $a = c = 0$, то, як неважко в цьому переконатися, існують перетворення (2.27), які, в залежності від значень функції b ($b_u = 0$ або $b_u \neq 0$), зводять оператор (2.26) до операторів $\bar{e}_2 = \overline{t}\partial_{\overline{x}}$ та $\bar{e}_2 = v\partial_{\overline{x}}$ відповідно.

Отже ми отримали такі чотири реалізації алгебри $A_{2.1} : \langle\partial_t, \partial_u\rangle, \langle\partial_x, \partial_u\rangle, \langle\partial_x, t\partial_x\rangle, \langle\partial_x, u\partial_x\rangle$.

Перевірка умов (2.3) для третьої із отриманих реалізацій приводить до рівності $u_x = 0$, звідки випливає, що ця реалізація не може бути алгеброю інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1).

Для четвертої із отриманих реалізацій інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = u_x^{-2}F(t,u)u_{xx} + u_xG(t,u),$$

але заміна змінних (2.5) зводить його до лінійного рівняння

$$v_{\overline{t}} = F(\overline{t},\overline{x})v_{\overline{x}\overline{x}} - G(\overline{t},\overline{x}).$$

Тому і четверта реалізація не задовольняє умови сформульованої задачі.

Подальша перевірка показала, що існують лише дві нееквівалентні реалізації алгебри $A_{2.1}$, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Значення функцій F та G у відповідних інваріантних рівняннях наведено в таблиці 2.1, де використано позначення

$$A^1_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_u \rangle;$$
$$A^2_{2.1} = \langle \partial_x, \partial_u \rangle.$$

Таблиця 2.1

Інваріантність рівнянь вигляду (2.2) відносно двовимірних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
$A^1_{2.1}$	$\tilde{F}(x, u_x)$	$\tilde{G}(x, u_x)$
$A^2_{2.1}$	$\tilde{F}(t, u_x)$	$\tilde{G}(t, u_x)$
$A^1_{2.2}$	$x\tilde{F}(u, \omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(u, \omega),\ \omega = xu_x$
$A^2_{2.2}$	$t\tilde{F}(u, \omega)$	$t^{-1}\tilde{G}(u, \omega),\ \omega = tu_x$
$A^3_{2.2}$	$u^2\tilde{F}(t, u_x)$	$u\tilde{G}(t, u_x)$

Вивчення реалізацій алгебри $A_{2.2}$ проводилося аналогічно. В результаті проведених обчислень ми отримали три нееквівалентні реалізації алгебри $A_{2.2}$, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Значення функцій F та G в інваріантних рівняннях наведено в таблиці 2.1, де використано позначення

$$A^1_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t \rangle;$$
$$A^2_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x \rangle;$$
$$A^3_{2.2} = \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_x \rangle.$$

Зауважимо, що, у випадку довільних значень функцій в рівняннях з таблиці 2.1, відповідні реалізації двовимірних алгебр Лі є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

Тепер перейдемо до класифікації нелінійних рівнянь вигляду (2.1), які допускають тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Спочатку зупинимося на $A_{3.1}$– та $A_{3.2}$–інваріантних рівняннях, тобто, рівняннях, алгебри інваріантності яких є тривимірними розкладними розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії.

Очевидно, що для побудови реалізацій цих алгебр в розглядуваному класі операторів достатньо доповнити оператором e_3 вигляду (2.2) вже відомі реалізації двовимірних алгебр $A^i_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle$ $(i = 1, 2)$ (для алгебри $A_{3.1}$) та $A^i_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ (для алгебри $A_{3.2}$). Провівши відповідні обчислення, ми отримали одну реалізацію алгебри $A_{3.1}$ та шість нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{3.2}$, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1):

$$
\begin{aligned}
A^1_{3.1} &= \langle \partial_t, \partial_u, \partial_x \rangle; \\
A^1_{3.2} &= \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t, \partial_u \rangle; \\
A^2_{3.2} &= \langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_t, xu\partial_u \rangle; \\
A^3_{3.2} &= \langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle; \\
A^4_{3.2} &= \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u \rangle; \\
A^5_{3.2} &= \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t \rangle; \\
A^6_{3.2} &= \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_u, tx\partial_x \rangle.
\end{aligned}
$$

Значення функцій F і G у відповідних інваріантних рівняннях наведені в таблиці 2.2, де $\tilde{F}$ та $\tilde{G}$— довільні гладкі функції своїх аргументів.

Відзначимо, що безпосередня перевірка показала, що наведені вище реалізації є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь, коли функції $\tilde{F}$ та $\tilde{G}$ є довільними функціями своїх аргументів.

У першому розділі наведено перелік перелік тривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі, який містить сім алгебр $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $(i = 3, 4, \ldots, 9)$.

Таблиця 2.2

Інваріантність рівнянь вигляду (2.1) відносно тривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
$A^1_{3.1}$	$\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x)$
$A^1_{3.2}$	$x\tilde{F}(\omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(\omega),\ \omega = xu_x$
$A^2_{3.2}$	$u^{-1}e^{x\omega}\tilde{F}(x)$	$e^{x\omega}[\tilde{G}(x) - \omega^2\tilde{F}(x)],\ \omega = u^{-1}u_x$
$A^3_{3.2}$	$t^{-1}x^2\tilde{F}(\omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(\omega),\ \omega = t^{-1}x^2u_x$
$A^4_{3.2}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$t^{-1}\tilde{G}(\omega),\ \omega = tu_x$
$A^5_{3.2}$	$x^2\tilde{F}(u_x)$	$x\tilde{G}(u_x)$
$A^6_{3.2}$	$x^2\tilde{F}(t)$	$xt^{-1}u_x \ln\lvert u_x\rvert + xu_x\tilde{G}(t)$

Усі ці алгебри містять двовимірний абелевий ідеал $A_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$. Тому для опису їх реалізацій в розглядуваному класі операторів, достатньо провести розширення реалізацій алгебри $A_{2.1}$, доповнивши їх оператором e_3 вигляду (2.2). Нагадаємо, що розглядові підлягають як реалізації $A^i_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$ $(i = 1, 2)$, так і реалізації $\tilde{A}^i_{2.1} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2\rangle$ $(i = 1, 2)$, де $\tilde{e}_1 = e_2, \tilde{e}_2 = e_1$.

Зупинимося детально на побудові реалізацій алгебри $A_{3.3}$ (алгебра Вейля), яка є нільпотентною алгеброю Лі.

Спочатку розглянемо розширення реалізації $A^1_{2.1}$.

Якщо $e_1 = \partial_t, e_2 = \partial_u$, то із виконання комутаційного співвідношення $[e_2, e_3] = e_1$, де e_3 має вигляд (2.2), випливає рівність $b_u\partial_x + c_u\partial_u = \partial_t$, виконання якої приводить до хибної рівності $1 = 0$.

Якщо ж $e_1 = \partial_u, e_2 = \partial_t$, то $e_3 = \tilde{b}(x)\partial_x + [t + \tilde{c}(x)]\partial_u$, і з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення з групи $\mathcal{E}$, приходимо до таких трьох реалізацій алгебри $A_{3.3}$: $\langle\partial_u, \partial_t, \partial_x + t\partial_u\rangle$, $\langle\partial_u, \partial_t, t\partial_u\rangle$, $\langle\partial_u, \partial_t, (t + x)\partial_u\rangle$.

Перевірка умов (2.3) показує, що друга реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (2.1), а інваріантне відносно третьої реалізації рівняння є лінійним. Умови задачі задовольняє лише перша отримана реалізація.

Використовуючи реалізацію $A^2_{2.1}$, ми повинні враховувати дві можливості: $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_u$ та $e_1 = \partial_u, e_2 = \partial_x$. Але оскільки заміна змінних (2.5) зводить перший випадок до другого і навпаки, то можна обмежитися розглядом лише, наприклад, другого випадку.

В результаті приходимо ще до таких реалізацій алгебри $A_{3.3}$, які є алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (2.1): $\langle\partial_u, \partial_x, \partial_t + x\partial_u\rangle$, $\langle\partial_u, \partial_x, t\partial_x + x\partial_u\rangle$.

Подальша пряма перевірка показала, що із знайдених реалізацій лише дві задовольняють умови задачі і є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1):

$$\begin{aligned} A^1_{3.3} &= \langle\partial_u, \partial_t, t\partial_u + \partial_x\rangle; \\ A^2_{3.3} &= \langle\partial_u, \partial_x, t\partial_x + x\partial_u\rangle. \end{aligned}$$

Значення функцій F та G у відповідних інваріантних рівняннях наведені в таблиці 2.3.

Зауважимо, що для запису реалізації $A^1_{3.3}$ ми використали перетворення еквівалентності (2.5).

Розгляд решти тривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі проводився аналогічно. Нижче наведено їх нееквівалентні реалізації, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1), а в таблиці 2.3— значення функцій F та G у відповідних інваріантних рівняннях.

$$\begin{aligned} A^1_{3.4} &= \langle\partial_u, \partial_t, t\partial_t + x\partial_x + [t+u]\partial_u\rangle; \\ A^2_{3.4} &= \langle\partial_u, \partial_t, t\partial_t + [t+u]\partial_u\rangle; \\ A^3_{3.4} &= \langle\partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + (x+u)\partial_x + u\partial_u\rangle; \\ A^4_{3.4} &= \langle\partial_x, \partial_u, (x+u)\partial_x + u\partial_u\rangle; \\ A^1_{3.5} &= \langle\partial_t, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u\rangle; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^2_{3.5} &= \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + u\partial_u \rangle; \\
A^3_{3.5} &= \langle \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle; \\
A^1_{3.6} &= \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle; \\
A^2_{3.6} &= \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t - u\partial_u \rangle; \\
A^3_{3.6} &= \langle \partial_x, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle; \\
A^4_{3.6} &= \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x - u\partial_u \rangle; \\
A^1_{3.7} &= \langle \partial_u, \partial_t, qt\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle \ (q \neq 0, \pm 1); \\
A^2_{3.7} &= \langle \partial_u, \partial_t, qt\partial_t + u\partial_u \rangle \ (q \neq 0, \pm 1); \\
A^3_{3.7} &= \langle \partial_x, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle \ (0 < |q| < 1); \\
A^4_{3.7} &= \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + qu\partial_u \rangle \ (0 < |q| < 1); \\
A^1_{3.8} &= \langle \partial_x, \partial_u, \partial_t + u\partial_x - x\partial_u \rangle; \\
A^2_{3.8} &= \langle \partial_x, \partial_u, u\partial_x - x\partial_u \rangle; \\
A^1_{3.9} &= \langle \partial_x, \partial_u, \partial_t + (u + qx)\partial_x + (qu - x)\partial_u \rangle \ (q > 0); \\
A^2_{3.9} &= \langle \partial_x, \partial_u, (u + qx)\partial_x + (qu - x)\partial_u \rangle \ (q > 0).
\end{aligned}
$$

Таблиця 2.3

Інваріантність рівнянь вигляду (2.1) відносно нерозкладних тривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
$A^1_{3.3}$	$\tilde{F}(u_x)$	$x + \tilde{G}(u_x)$
$A^2_{3.3}$	$\tilde{F}(t)$	$-\frac{1}{2}u_x^2 + \tilde{G}(t)$
$A^1_{3.4}$	$x\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x) + \ln\lvert x\rvert$
$A^2_{3.4}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(x)$	$\tilde{G}(x) + \ln\lvert u_x\rvert$
$A^3_{3.4}$	$u_x^{-2}\tilde{F}(\omega)$	$u_x e^{-\frac{1}{u_x}}\tilde{G}(\omega),\ \omega = 2u_x^{-1} - \ln\lvert t\rvert$
$A^4_{3.4}$	$u_x^{-2}\tilde{F}(t)\exp(2u_x^{-1})$	$u_x\tilde{G}(t)\exp(u_x^{-1})$
$A^1_{3.5}$	$x\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x)$

Продовження таблиці 2.3

Алгебра	F	G
$A^2_{3.5}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(x)$	$\tilde{G}(x)$
$A^3_{3.5}$	$\tilde{F}(u_x)$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}\tilde{G}(u_x)$
$A^1_{3.6}$	$x\tilde{F}(\omega)$	$x^{-2}\tilde{G}(\omega),\ \omega = x^2u_x$
$A^2_{3.6}$	$u_x\tilde{F}(x)$	$u_x^2\tilde{G}(x)$
$A^3_{3.6}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$t^{-2}\tilde{G}(\omega),\ \omega = t^2u_x$
$A^4_{3.6}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(t)$	$\sqrt{\lvert u_x\rvert}\tilde{G}(t)$
$A^1_{3.7}$	$\lvert x\rvert^{2-q}\tilde{F}(u_x)$	$\lvert x\rvert^{1-q}\tilde{G}(u_x)\ (q \neq 0, \pm 1)$
$A^2_{3.7}$	$\lvert u_x\rvert^{-q}\tilde{F}(x)$	$\lvert u_x\rvert^{1-q}\tilde{G}(x), q \neq 0, \pm 1$
$A^3_{3.7}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$\lvert t\rvert^{q-1}\tilde{G}(\omega),$ $\omega = \lvert t\rvert^{1-q}u_x(0 < \lvert q\rvert < 1)$
$A^4_{3.7}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{2}{q-1}}\tilde{F}(t)$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{q}{q-1}}\tilde{G}(t)\ (0 < \lvert q\rvert < 1)$
$A^1_{3.8}$	$(1+u_x^2)^{-1}\tilde{F}(\omega)$	$\sqrt{1+u_x^2}\tilde{G}(\omega),\ \omega = t + \arctan u_x$
$A^2_{3.8}$	$(1+u_x^2)^{-1}\tilde{F}(t)$	$\sqrt{1+u_x^2}\tilde{G}(t)$
$A^1_{3.9}$	$\dfrac{\exp(-2q\arctan u_x)\tilde{F}(\omega)}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp(-q\arctan u_x)\tilde{G}(\omega),$ $\omega = t + \arctan u_x\ (q > 0)$
$A^2_{3.9}$	$\dfrac{\exp(-2q\arctan u_x)\tilde{F}(t)}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp(-q\arctan u_x)\tilde{G}(t),$ $(q > 0)$

Зауважимо, що розширення області значень параметра q в реалізаціях $A^1_{3.7}, A^2_{3.7}$ алгебри $A_{3.7}$ дозволило звести чотири нееквівалентні реалізації цієї алгебри в дві. Відзначимо також, що для довільних значень функцій $\tilde{F}$ та $\tilde{G}$ з таблиці 2.3 відповідні реалізації алгебр Лі є максимальними алгебрами інваріантності отриманих рівнянь.

2.2.2. Завершення групової класифікації. Наступний крок методу групової класифікації передбачає опис нелінійних рівнянь вигляду (2.1), які є інваріантними відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі.

У першому розділі наведено перелік цих алгебр, згідно з яким, вони вичерпуються 10 розкладними в пряму суму розв'язних алгебр Лі нижчої розмірності та 10 нерозкладними алгебрами Лі. Оскільки нелінійні рівняння вигляду (2.1), які інваріантні відносно тривимірних розв'язних алгебр Лі містять довільні функції, які залежать від одного аргументу, то слід сподіватися, що в нелінійних рівняннях, які інваріантні відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі, ці функції набудуть цілком конкретного вигляду.

Дійсно, як буде показано нижче, такими будуть усі отримані рівняння за винятком рівняння

$$u_t = F(u_x)u_{xx}. \tag{2.28}$$

Групову класифікацію нелінійних рівнянь вигляду (2.28) було проведено в [2] (див. також [3]).

Враховуючи це, ми у подальших дослідженнях будемо вимагати, щоб рівняння вигляду

$$u_t = F(u_x)u_{xx} + G(u_x)$$

або еквівалентні йому рівняння, замінами змінних (2.4) не зводилися не лише до лінійних рівнянь, а й до рівнянь вигляду (2.28).

Нагадаємо, що серед розкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі розрізняють алгебри

$$\begin{aligned} &4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1, && A_{3.2} \oplus A_1, \\ &2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}, && A_{3.i} \oplus A_1 \quad (i = 3, 4, \ldots, 9). \end{aligned}$$

Провівши розширення реалізації $A^1_{3.1}$ у випадку алгебри $4A_1$ та реалізацій $A^i_{3.2}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ у випадку алгебри $A_{3.2} \oplus A_1$ оператором

e_4 вигляду (2.2), ми отримали, що в рамках сформульованої задачі не існують реалізації алгебр $4A_1$ та $A_{3.2} \oplus A_1$, які б задовольняли умови сформульованої задачі.

В результаті розгляду реалізацій алгебри $2A_{2.2}$ ми прийшли до чотирьох нееквівалентних реалізацій, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Нижче вказано ці реалізації та відповідні їм значення функцій F та G в інваріантних рівняннях:

$$\begin{aligned}
2A_{2.2}^1 &= A_{3.2}^1 \subset\!\!\!\!+ \langle -u\partial_u + kx\partial_x \rangle \quad (k \neq 0): \\
&\quad F = \lambda x|\omega|^{-k}, \quad G = \beta x^{-1}|\omega|^{1-k}, \quad \lambda \neq 0, \beta \in R, \omega = xu_x; \\
2A_{2.2}^2 &= A_{3.2}^2 \subset\!\!\!\!+ \langle x\partial_x \rangle: \\
&\quad F = \lambda x^2 u^{-1} \exp\omega, \quad G = (\beta - \lambda\omega^2)\exp\omega, \\
&\quad \lambda \neq 0, \beta \in R, \omega = xu^{-1}u_x; \\
2A_{2.2}^3 &= A_{3.2}^4 \subset\!\!\!\!+ \langle -u\partial_u + kt\partial_t \rangle \quad (k \neq 0, 1): \\
&\quad F = \lambda t|\omega|^{\frac{2k}{1-k}}, \quad G = \beta t^{-1}|\omega|^{\frac{1}{1-k}}, \quad \omega = tu_x, \quad \lambda \neq 0, \beta \in R; \\
2A_{2.2}^4 &= A_{3.2}^4 \subset\!\!\!\!+ \langle -u\partial_u + t\partial_x \rangle: \\
&\quad F = \lambda t, \quad G = u_x \ln|tu_x| + \beta u_x, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in R.
\end{aligned}$$

У всіх отриманих інваріантних рівняннях функції F та G набувають цілком конкретних значень. Тому, для повного розв'язку задачі, залишається знайти максимальні алгебри інваріантності цих рівнянь, розв'язавши для кожної із отриманих пар функцій F та G визначальні рівняння (2.3). Попередньо ми провели спрощення вигляду функцій F та G, використовуючи для цього максимальні групи перетворень еквівалентності в класі замін змінних (2.4) для кожної із отриманих реалізацій $2A_{2.2}^i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Зупинимося детально на випадкові реалізації $2A_{2.2}^1$. Нехай

$$\begin{aligned}
&2A_{2.2} = \langle e_i | i = 1, 2, 3, 4 \rangle, \qquad 2\tilde{A}_{2.2} = \langle \bar{e}_i, i = 1, 2, 3, 4 \rangle, \\
&[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_4, \quad [e_i, e_j] = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4); \\
&[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_2, \quad [\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{e}_4, \quad [\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4).
\end{aligned}$$

Тоді взаємнооднозначну відповідність між алгебрами $2A_{2.2}$ та $2\tilde{A}_{2.2}$ встановлюють такі два ізоморфізми:

$$1)\qquad \bar{e}_1 = e_3 + \gamma e_4,\quad \bar{e}_2 = \alpha e_4,\quad \bar{e}_3 = e_1 + \mu e_2,\quad \bar{e}_4 = \tilde{\beta} e_2;$$

$$2)\qquad \bar{e}_1 = e_1 + \gamma e_2,\quad \bar{e}_2 = \alpha e_2,\quad \bar{e}_3 = e_3 + \mu e_4,\quad \bar{e}_4 = \tilde{\beta} e_4;$$

де $\alpha \cdot \tilde{\beta} \neq 0;\quad \alpha, \tilde{\beta}, \gamma, \mu \in R.$

Далі безпосередні обчислення показали, що для реалізації $2A^1_{2.2}$ максимальну групу перетворень еквівалентності в класі замін змінних (2.4) складають перетворення

$$\bar{t} = \alpha t + \gamma, \qquad \overline{x} = \delta x, \qquad v = \tilde{\beta} u + \mu, \tag{2.29}$$

де $\alpha, \delta, \tilde{\beta}, \gamma, \mu \in R,\quad \alpha \cdot \delta \cdot \tilde{\beta} \neq 0.$

Заміна змінних (2.29), де $\lambda \cdot \delta \cdot \alpha^{-1} |\beta|^k = 1$ зводить рівняння, інваріантне відносно реалізації $2A^1_{2.2}$, до рівняння

$$v_{\bar{t}} = |\overline{x}|^{1-k} |v_{\overline{x}}|^{-k} v_{\overline{x}\overline{x}} + \beta |\overline{x}|^{-k} |v_{\overline{x}}|^{1-k},\quad \beta \in R,\quad k \neq 0.$$

Провівши аналогічні обрахунки для решти отриманих реалізацій алгебри $2A_{2.2}$, ми отримали, що з точністю до еквівалентності у подальшому можемо розглядати такі інваріантні рівняння:

$$2A^1_{2.2}\ :\ u_t = |x|^{1-k} |u_x|^{-k} u_{xx} + \beta |x|^{-k} |u_x|^{1-k},$$
$$\beta \in R,\quad k \neq 0; \tag{2.30}$$

$$2A^2_{2.2}\ :\ u_t = x^2 u^{-1} \exp(\omega) u_{xx} + (\beta - \omega^2) \exp \omega,$$
$$\omega = x u^{-1} u_x,\quad \beta \in R; \tag{2.31}$$

$$2A^3_{2.2}\ :\ u_t = \pm |t|^{\frac{k+1}{1-k}} |u_x|^{\frac{2k}{1-k}} u_{xx} + \epsilon |t|^{\frac{k}{1-k}} |u_x|^{\frac{1}{1-k}},$$
$$\epsilon = 0, 1,\quad k \neq 0, 1; \tag{2.32}$$

$$2A^4_{2.2}\ :\ u_t = \lambda t u_{xx} + u_x \ln |t u_x|,\quad \lambda \neq 0. \tag{2.33}$$

Підстановка значень функцій F та G в рівняннях (2.30)–(2.33) у рівняння (2.3) та подальше дослідження відповідних визначальних систем показали таке.

1. Якщо в рівнянні (2.30) $k \neq 0, 2,\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2}$ або $k = 2, \beta \neq \frac{5}{4}$, то реалізація $2A^1_{2.2}$ є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння.

   Якщо ж в (2.30) $k = 2, \beta = \frac{5}{4}$, то максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння є п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії. Її базис складають базисні оператори реалізації $2A^1_{2.2}$ $(k = 2)$ та оператор $4xu\partial_x - u^2\partial_u$. Але неважко переконатися, що ця алгебра Лі є ізоморфною алгебрі $sl(2, R) \oplus A_{2.2}$ і заміна змінних

   $$\bar{t} = t, \qquad \bar{x} = u, \qquad v = \alpha|x|^{\frac{1}{4}}, \ \ \alpha \neq 0,$$

   зводить її базисні оператори до операторів, які складають базис реалізації $sl(2, R) \oplus L_{2.1}$, де $sl(2, R)$—реалізація (2.19), $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t\rangle$. Отже, рівняння (2.30), де $k = 2,\ \beta = \frac{5}{4}$, є еквівалентним отриманому вище рівнянню, яке зводиться до нелінійного рівняння теплопровідності із класифікації Л.В. Овсяннікова [47].

   Нарешті, якщо в (2.30) $k \neq 0, 2$ і $\beta = \frac{k-1}{k-2}$, то дане рівняння перетвореннями з групи $\mathcal{E}$ зводиться до рівняння вигляду (2.28).

2. Якщо в рівнянні (2.31) $\beta \neq -2$, то реалізація $2A^2_{2.2}$ є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння. Якщо ж $\beta = -2$, то максимальна алгебра інваріантності даного рівняння є п'ятивимірною алгеброю Лі операторів симетрії

   $$\langle \partial_t, -xu\partial_u, x^2\partial_x + \ln|x^2u|xu\partial_u, 2t\partial_t + 2u\partial_u - x\partial_x, t\partial_t + u\partial_u\rangle.$$

   Але заміна змінних

   $$\bar{t} = t, \qquad \bar{x} = -x^{-1}, \qquad v = x^{-1}\ln|u| + 2x^{-1}(1 + \ln|x|)$$

зводить таке рівняння до рівняння

$$v_{\bar{t}} = \exp(v_{\bar{x}})v_{\bar{x}\bar{x}},$$

яке належить до класу рівнянь (2.28).

3. Реалізація $2A^3_{2.2}$ $(k \neq 0, 1)$ є максимальною алгеброю симетрії рівняння (2.32), якщо $\epsilon = 1$. Якщо ж у цьому рівнянні $\epsilon = 0$, то його максимальною алгеброю інваріантності є п'ятивимірна алгебра Лі операторів симетрії

$$2A^3_{2.2} \;\; (k \neq 0, 1) \mathbin{\ooalign{$\subset$\cr$+$}} \langle |t|^{\frac{1+k}{k-1}}\partial_t \rangle.$$

Але заміна змінних

$$\bar{t} = \frac{1}{2}(1-k)|t|^{\frac{2}{1-k}}, \qquad \bar{x} = x, \qquad v = u,$$

зводить це рівняння до рівняння

$$v_{\bar{t}} = \pm|v_{\bar{x}}|^{\frac{2k}{1-k}} v_{\bar{x}\bar{x}},$$

яке належить до рівнянь вигляду (2.28).

4. Реалізація $2A^4_{2.2}$ є максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2.33).

Розгляд випадку алгебри $A_{3.3} \oplus A_1$ показав, що в рамках сформульованої задачі ця алгебра не має реалізацій в класі операторів (2.2). Для алгебри $A_{3.5} \oplus A_1$ ми отримали реалізацію $A^2_{3.5} \oplus \langle \partial_x \rangle$, але відповідне інваріантне рівняння

$$u_t = u_x^{-1} u_{xx}$$

належить до класу рівнянь (2.28). Розгляд випадку алгебри $A_{3.7} \oplus A_1$ привів до рівняння

$$u_t = u_x^{-2} u_{xx} + u_x^{-1},$$

яке заміною змінних (2.5) зводиться до рівняння еквівалентного лінійному рівнянню теплопровідності.

Для решти розкладних чотиривимірних алгебр Лі ми отримали ще вісім нееквівалентних реалізацій, які є максимальними алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Зведений результат групової класифікації нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (2.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії подано в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Інваріантність рівнянь вигляду (2.1) відносно розкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
$2A^1_{2.2},\quad (k \neq 0, 2)$	$\lvert x\rvert^{1-k}\lvert u_x\rvert^{-k}$	$\beta\lvert x\rvert^{-k}\lvert u_x\rvert^{1-k}, \beta \neq \frac{k-1}{k-2}$
$2A^1_{2.2}\ (k = 2)$	$x^{-1}u_x^{-2}$	$\beta x^{-2}u_x^{-1}, \beta \neq \frac{5}{4}$
$2A^2_{2.2}$	$x^2u^{-1}\exp\omega$	$(\beta - \omega^2)\exp\omega,$
		$\omega = xu^{-1}u_x,\ \beta \neq -2$
$2A^3_{2.2}\ (k \neq 0, 1)$	$\pm\lvert t\rvert^{\frac{k+1}{1-k}}\lvert u_x\rvert^{\frac{2k}{1-k}}$	$\lvert t\rvert^{\frac{k}{1-k}}\lvert u_x\rvert^{\frac{1}{1-k}}$
$2A^4_{2.2}$	$\lambda t,\quad \lambda \neq 0$	$u_x\ln\lvert tu_x\rvert$
$A^2_{3.4} \oplus \langle\partial_x\rangle$	u_x^{-1}	$\ln\lvert u_x\rvert$
$A^4_{3.4} \oplus \langle\partial_t\rangle$	$u_x^{-2}\exp(2u_x^{-1})$	$u_x\exp(u_x^{-1})$
$A^2_{3.6} \oplus \langle\partial_x\rangle$	u_x	u_x^2
$A^4_{3.6} \oplus \langle\partial_t\rangle$	u_x^{-1}	$\sqrt{\lvert u_x\rvert}$

Продовження таблиці 2.4

Алгебра	F	G
$A^2_{3.7} \oplus \langle \partial_x \rangle$	$\lvert u_x \rvert^{-q}$	$\lvert u_x \rvert^{1-q}$
$(q \neq 0, \pm 1, 2)$		
$A^4_{3.7} \oplus \langle \partial_t \rangle$	$\lvert u_x \rvert^{\frac{2}{q-1}}$	$\lvert u_x \rvert^{\frac{q}{q-1}}$
$(0 < \lvert q \rvert < 1)$		
$A^2_{3.8} \oplus \langle \partial_t \rangle$	$(1+u_x^2)^{-1}$	$\sqrt{1+u_x^2}$
$A^2_{3.9} \oplus \langle \partial_t \rangle$ $(q > 0)$	$\dfrac{\exp(-2q \arctan u_x)}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp(-q \arctan u_x)$

Як і в попередньому розділі, вивчення реалізацій нерозкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі проводимо доповненням відомих реалізацій тривимірних розв'язних алгебр Лі $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ оператором e_4 вигляду (2.2) за такою схемою: $A_{4.i} = A_{3.1} \niplus \langle e_4 \rangle \quad (i = 1, \ldots, 6)$, $A_{4.i} = A_{3.3} \niplus \langle e_4 \rangle \quad (i = 7, 8, 9)$, $\quad A_{4.10} = A_{3.5} \niplus \langle e_4 \rangle$.

Оскільки існує одна реалізація алгебри $A_{3.1}$, яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = F(u_x)u_{xx} + G(u_x), \tag{2.34}$$

то реалізації алгебр $A_{4.i}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ можуть бути алгебрами інваріантності лише нелінійних рівнянь, які належать до рівнянь вигляду (2.34).

Безпосередні обчислення показали, що в рамках сформульованої задачі алгебра $A_{4.1}$ не має реалізацій. Для решти алгебр із розглядуваного класу, ми, вилучивши із розгляду випадки, коли інваріантні рівняння еквівалентні рівнянню (2.28), отримали сім реалізацій, які є максимальними алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1):

$$A^1_{4.2} = A^1_{3.1} \niplus \langle qt\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, 1);$$

$$A^2_{4.2} = A^1_{3.1} \niplus \langle t\partial_t + (t+x)\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, 1);$$

$$A^1_{4.3} = A^1_{3.1} \oplus \langle t\partial_t + x\partial_u\rangle;$$

$$A^2_{4.3} = A^1_{3.1} \oplus \langle t\partial_x + u\partial_u\rangle;$$

$$A^1_{4.4} = A^1_{3.1} \oplus \langle t\partial_t + (t+x)\partial_x + (x+u)\partial_u\rangle;$$

$$A^1_{4.5} = A^1_{3.1} \oplus \langle t\partial_t + px\partial_x + qu\partial_u\rangle \quad (p < q,\ p\cdot q \neq 0;\ p, q, \neq 1);$$

$$A^1_{4.6} = A^1_{3.1} \oplus \langle qt\partial_t + (px+u)\partial_x + (pu-x)\partial_u\rangle \quad (q \neq 0;\ p \geq 0).$$

Відповідні значення функцій F та G в інваріантних рівняннях подано в таблиці 2.5. Там же ми вказали і рівняння (2.28), максимальною алгеброю інваріантності якого для довільних значень функції F є така реалізація алгебри $A_{4.5}$ $(p = q = \frac{1}{2})$:

$$A^2_{4.5} = A^1_{3.1} \oplus \langle t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u\rangle.$$

Розгляд реалізацій алгебр $A_{4.i}$ $(i = 7, 8, 9)$ ми проводили доповненням відомих реалізацій алгебри $A_{3.3}$ оператором e_4 вигляду (2.2). При цьому, під час розгляду відомих реалізацій алгебри $A_{3.3} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, ми враховували такий ізоморфізм для цієї алгебри: $e_1 \to e_1,\ e_2 \to -e_3,\ e_3 \to e_2$.

Дослідження для алгебр $A_{4.7}$ та $A_{4.9}$ привели до трьох нееквівалентних реалізацій

$$A^1_{4.7} = A^1_{3.3} \oplus \langle t\partial_t + (x-t)\partial_x + (2u - \frac{1}{2}t^2)\partial_u\rangle,$$

$$A^2_{4.7} = A^2_{3.3} \oplus \langle -\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u\rangle,$$

$$A^1_{4.9} = A^2_{3.3} \oplus \langle -(1+t^2)\partial_t + (q-t)x\partial_x + (2qu - \frac{1}{2}x^2)\partial_u\rangle \quad (q > 0),$$

які є максимальними алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1). Значення функцій F та G у цих рівняннях подано в таблиці 2.5.

Розгляд алгебри $A_{4.8}$ привів до чотирьох нееквівалентних реалізацій, які є алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (2.1):

$$A^1_{4.8} = A^1_{3.3} \oplus \langle t\partial_t + qx\partial_x + (1+q)u\partial_u\rangle \quad (q \in R),$$

$$A^2_{4.8} = A^1_{3.3} \niplus \langle t\partial_t + k\partial_x + u\partial_u\rangle \quad (k \neq 0),$$

$$A^3_{4.8} = A^1_{3.3} \niplus \langle x\partial_x + u\partial_u + k^{-1}(\partial_t + x\partial_u)\rangle \quad (k \neq 0),$$

$$A^4_{4.8} = A^2_{3.3} \niplus \langle (1-q)t\partial_t + x\partial_x + (1+q)u\partial_u\rangle \quad (|q| \neq 1).$$

Реалізації $A^2_{4.8}, A^4_{4.8}$ є максимальними алгебрами інваріантості відповідних нелінійних рівнянь вигляду (2.1), значення функцій F та G в яких подано в таблиці 2.5.

Для реалізації $A^1_{4.8}$ з точністю до еквівалентності інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = \lambda |u_x|^{2q-1} u_{xx} + x + \epsilon |u_x|^q, \tag{2.35}$$

де, коли $q = 0, 1$, то $\epsilon = 0$, $\lambda = \pm 1$, а коли $q \neq 0, 1$, то або $\epsilon = 0, \lambda = \pm 1$ або $\epsilon = 1, \lambda \neq 0$.

Подальше дослідження рівняння (2.35) показало, що для $q \neq -\frac{1}{2}$ реалізація $A^1_{4.8}$ є його максимальною алгеброю інваріантності. Якщо ж $q = -\frac{1}{2}$, то заміна змінних (2.5) зводить рівняння (2.35) до рівняння Бюргерса

$$v_{\overline{t}} = \lambda v_{\overline{xx}} - v v_{\overline{x}}.$$

У випадку реалізації $A^3_{4.8}$ інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = \pm \exp(2ku_x) u_{xx} + x + \epsilon \exp(ku_x), \quad k \neq 0, \epsilon = 0, 1.$$

Якщо $\epsilon = 1$ то реалізація $A^3_{4.8}$ є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння. Якщо ж $\epsilon = 0$, то заміна змінних

$$\overline{t} = \frac{1}{2k} e^{2kt}, \quad \overline{x} = -x, \quad v = -2ku + 2ktx, \quad k \neq 0,$$

зводить дане рівняння до рівняння

$$v_{\overline{t}} = \pm \exp(v_{\overline{x}}) v_{\overline{xx}},$$

яке належить до рівнянь класу (2.28).

Нарешті, провівши доповнення реалізацій алгебри $A_{3.5} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ оператором e_4 вигляду (2.2), ми отримали одну реалізацію алгебри $A_{4.10}$

$$A^1_{4.10} = A^3_{3.5} \oplus \langle 2kt\partial_t + u\partial_x - x\partial_u\rangle, \quad k \geq 0,$$

яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_t = \frac{\exp(2k\arctan u_x)}{1+u_x^2}u_{xx} + \beta|t|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+u_x^2}\exp(k\arctan u_x), \;\; k \geq 0, \; \beta \neq 0.$$

Повний перелік нееквівалентних рівнянь вигляду (2.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є нерозкладні чотиривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії, подано в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Інваріантність рівняння (2.1) відносно нерозкладних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
$A^1_{4.2}$	$\exp(2-q)u_x$	$\exp(1-q)u_x, \quad q \neq 0,1$
$A^2_{4.2}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{1}{q-1}}$	$(1-q)^{-1}u_x \ln\lvert u_x\rvert, \quad q \neq 0,1$
$A^1_{4.3}$	$\exp(-u_x)$	$\exp(-u_x)$
$A^2_{4.3}$	1	$-u_x \ln\lvert u_x\rvert$
$A^1_{4.4}$	$\exp u_x$	$-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.5}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{2p-1}{q-p}}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{q-1}{q-p}}, p < q,$
		$p \cdot q \neq 0, \quad p, q \neq 1$
$A^2_{4.5}$	$\tilde{F}(u_x)$	0
$A^1_{4.6}$	$\dfrac{\exp[(q-2p)\arctan u_x]}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp[(q-p)\arctan u_x],$
		$q \neq p, \; p \geq 0$
$A^1_{4.7}$	$\lambda u_x, \; \lambda \neq 0$	$x + u_x \ln\lvert u_x\rvert$
$A^2_{4.7}$	$\pm\exp(-2t)$	$-\frac{1}{2}u_x^2$

Продовження таблиці 2.5

Алгебра	F	G
$A^1_{4.8}$ $(q\neq -\frac{1}{2})$	$\pm\lvert u_x\rvert^{2q-1}$	x
$A^1_{4.8}$ $(q\neq 0,1)$	$\lambda\lvert u_x\rvert^{2q-1},\ \lambda\neq 0$	$x+\lvert u_x\rvert^q$
$A^2_{4.8}$	$\lambda\lvert u_x\rvert^{-1},\ \lambda\neq 0$	$x-k\ln\lvert u_x\rvert,\ k\neq 0$
$A^3_{4.8}$	$\pm\exp(2ku_x)$	$x+\exp(ku_x),\ k\neq 0$
$A^4_{4.8}$ $(\lvert q\rvert\neq 1)$	$\lvert t\rvert^{\frac{1+q}{1-q}}$	$-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.9}$ $(q>0)$	$\pm\exp(-2q\arctan t)$	$\mp\dfrac{t\exp(-2q\arctan t)}{1+t^2}-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.10}$	$\dfrac{\exp(2k\arctan u_x]}{1+u_x^2}$	$\beta\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+u_x^2}\exp(k\arctan u_x)$, $k\geq 0,\ \beta\neq 0$

Для завершення групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (2.1) нам залишається провести аналіз рівнянь, алгебрами інваріантності яких є п'ятивимірні алгебри Лі операторів симетрії. У першій частині роботи ми отримали два таких рівняння, алгебри інваріантності яких є напівпрямими сумами напівпростої та розв'язної алгебр Лі. Згідно з класифікацією [2, 3] є ще три рівняння вигляду (2.28), алгебри інваріантності яких є п'ятивимірними розв'язними алгебрами Лі операторів симетрії:

$$A_5^1 = A^2_{4.5} \oplus \langle t\partial_t - x\partial_u\rangle;$$

$$A_5^2 = A^2_{4.5} \oplus \langle nt\partial_t - u\partial_u\rangle,\ (n\geq -1, n\neq 0);$$

$$A_5^3 = A^2_{4.5} \oplus \langle nt\partial_t + u\partial_x - x\partial_u\rangle,\ (n\geq 0).$$

При цьому алгебри A_5^i $(i=1,2,3)$ потрапляють в різні класи нерозкладних п'ятивимірних розв'язних алгебр Лі із відомої класифікації п'ятивимірних розв'язних алгебрЛі [44]:

$$A_5^2\sim A_{5.34}(p=2), A_5^3\sim A_{5.33}(p=2+n, q=-n),\ \ A_5^4\sim A_{5.35}(p=2, q=n).$$

Отже відповідні їм інваріантні рівняння є нееквівалентними. В таблиці 2.6 ми звели перелік нелінійних рівнянь вигляду (2.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є п'ятивимірні розв'язні алгебри Лі.

Таблиця 2.6

Інваріантність рівняння (2.1) відносно п'ятивимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії

Алгебра	F	G
A_5^1	$\exp u_x$	0
A_5^2	$u_x^n,\ n \geq -1,\ n \neq 0$	0
A_5^3	$\dfrac{\exp(n \arctan u_x)}{1+u_x^2},\ n \geq 0$	0

Оскільки усі рівняння, які отримано у цьому підрозділі, є нееквівалентними і не містять довільних функцій, то задачу групової класифікації квазілійних рівнянь еволюційного типу (2.1) можна вважати розв'язаною.

2.3. Симетрійна редукція та точні розв'язки нелінійних рівнянь еволюційного типу

У цьому підрозділі ми використовуємо відомі симетрійні властивості нелінійних рівнянь вигляду (1.9) та (2.1) для побудови їх точних розв'язків. Розгляду підлягає ряд рівнянь, алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за 3 (тобто рівняння, праві частини яких не містять довільних функцій).

Перш ніж переходити до виконання процедури симетрійної редукції для рівнянь вигляду (1.9), (2.1), відзначимо, що важливі класи відомих точних розв'язків (наприклад, розв'язків типу біжучої хвилі, автомодельних розв'язків) ряду модельних нелінійних рівнянь розглядуваного вигляду є саме інваріантними розв'язками. Проілюструємо це на прикладі відомого в теорії фільтрації [6, 58] рівняння Буссінеска

$$h_t = km^{-1}(hh_x)_x. \tag{2.36}$$

Тут k—коефіцієнт фільтрації, m—пористість грунту, $h = h(t, x)$— напирання в момент часу t в перерізі, що визначається абсцисою x.

Перший точний розв'язок рівняння (2.36) був отриманий Буссінеском [105], який для розв'язування задачі з граничними умовами

$$h(t, 0) = 0, \qquad h_x|_{x=L} = 0$$

використав метод Фур'є і шукав розв'язок у вигляді

$$h = T(t)X(x).$$

Знайдений Буссінеском розв'язок має вигляд

$$h = \frac{H_0 F(\xi)}{1 + \frac{3b^2 k H_0}{2mL^2} t}, \tag{2.37}$$

де H_0—відома стала, $\xi = \frac{x}{L}$,

$$b = \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}} = \frac{1}{3} B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) \approx 0,86236,$$

$F(\xi)$—обернення рівності

$$\xi = \frac{1}{b} \int_0^F \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}}.$$

Розв'язок рівняння (2.36) типу миттєвого джерела

$$h = \frac{m}{6kt} [(\frac{9kt}{m})^{\frac{2}{3}} - x^2] \qquad (0 \le x \le (\frac{9kt}{m})^{\frac{2}{3}} = l) \tag{2.38}$$

отримав Баренблатт [6].

Соколов [68] розглядав узагальнене рівняння Буссінеска для випадку двох просторових змінних ($h = h(t, x, y)$):

$$h_t = \frac{1}{2} a^2 [(h^2)_{xx} + (h^2)_{yy}], \qquad a^2 = \frac{k}{m}. \tag{2.39}$$

Він побудував такі частинні розв'язки рівняння (2.39):

$$h = -\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{8a^2(t-t_0)} + C|t-t_0|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.40}$$

$$h + H_0 \ln|1 - hH_0^{-1}| = Ax + By + a^2(A^2+B^2)t + C, \tag{2.41}$$

$$h = Ax + By + a^2(A^2+B^2)t + C, \tag{2.42}$$

де H_0, A, B, C—довільні сталі інтегрування, $H_0 \neq 0$.

Соколов також уточнив розв'язок

$$\begin{aligned} h &= \frac{m}{8kt}\Big(4\sqrt{\frac{kt}{\pi m}} - r^2\Big), \quad 0 \le r \le 2\Big(\frac{kt}{\pi m}\Big)^{\frac{1}{4}} = l, \\ &h = 0, \qquad r \ge l, \end{aligned} \tag{2.43}$$

рівняння Буссінеска

$$h_t = \frac{a^2}{2r}[r(h^2)_r]_r,$$

що відповідає осесиметричному рухові грунтових вод. Розв'язок (2.43) був отриманий в [6] і наведений в [58] у невірному виглядові.

Зауважимо, що перераховані вище розв'язки було отримано без явного використання симетрійних властивостей рівнянь (2.36) та (2.39).

Більш за все, вперше симетрійні властивості одновимірного рівняння Буссінеска були досліджені Овсянніковим під час групової класифікації нелінійного рівняння теплопровідності [47]. Симетрія дво– та тривимірного рівняння Буссінеска була досліджена Дородніциним, Князєвою та Свірщевським [15]. Сєрова [66] розглядала рівняння

$$u_t = F(u) \triangle u \tag{2.44}$$

в просторі $n+1$ незалежних змінних $t, x_1, \ldots, x_n$. Зокрема, частинним випадком рівняння (2.44) для $F = \lambda\sqrt{u}$ є рівняння

$$u_t = \lambda\sqrt{u} \triangle u, \qquad \lambda \neq 0, \tag{2.45}$$

до якого зводиться n–вимірне рівняння Буссінеска

$$v_t = \frac{1}{2}\lambda \triangle v^2, \qquad \lambda \neq 0,$$

локальною заміною $u = v^2$.

В роботі [66], з використанням методу симетрійної редукції, було побудовано ряд точних розв'язків рівняння (2.45). Систематичний розгляд симетрійної редукції тривимірного рівняння Буссінеска до звичайних диференціальних рівнянь проведено в статті [98].

Як показав аналіз результатів робіт [66, 98], усі відомі точні розв'язки рівняння Буссінеска (отримані Буссінеском, Баренблаттом та Соколовим) є інваріантними розв'язками. Так, розв'язок (2.37) отримується в результаті редукції рівняння (2.36), яка відповідає оператору симетрії $t\partial_t - h\partial_h$. Розв'язки (2.38), (2.40)–(2.42) збігаються (з точністю до позначення сталих) з інваріантними розв'язками, які можна знайти в [66, 98].

Перейдемо тепер до розгляду самої процедури побудови інваріантних розв'язків нелінійних рівнянь еволюційного типу.

2.3.1. Симетрійна редукція і побудова точних розв'язків. Процедура симетрійної редукції диференціальних рівнянь з частинними похідними, які мають нетривіальні алгебри інваріантності до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, передбачає наявність оптимального переліку підалгебр деякої розмірності даної алгебри Лі операторів симетрії. Класифікацію підалгебр дійсних алгебр Лі невисокої розмірності з точністю до спряженості, яку визначають дії груп внутрішніх автоморфізмів цих алгебр, проведено в [184]. Оскільки тут ми розглядаємо задачу симетрійної редукції диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними до звичайних диференціальних рівнянь, то для редукції потрібно використовувати одновимірні підалгебри алгебр Лі операторів симетрії досліджуваних рівнянь. При цьому ці підалгебри повинні задовольняти необхідні умови існування редукції, які у нашому випадкові зводяться до виконання умови [51]

$$|\tau| + |\xi| \neq 0 \tag{2.46}$$

в деякій області простору V $= \langle t, x, u\rangle$ для даного оператора симетрії вигляду (1.10). Тому, використовуючи переліки одновимірних підалгебр із [184], ми, перш за все, відбираємо ті із них, які задовольняють умову (2.46).

Симетрійна редукція рівнянь вигляду (1.9) та (2.1) з найвищими симетрійними властивостями (рівнянь, які допускають п'ятипараметричні групи інваріантності) розглянуто в [2, 3, 47, 57]. Тому тут ми обмежилися розглядом ряду рівнянь, максимальними групами інваріантності яких є чотирипараметричні групи локальних перетворень.

Розглянемо детально симетрійну редукцію першого рівняння із таблиці 1.3, яке для $t > 0$ набуває такого вигляду:

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda u_x}{4\sqrt{t}} \ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{t}}, \quad \lambda \neq 0, \ \beta \in R. \tag{2.47}$$

Максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння є реалізація

$$2A^1_{2.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x, \partial_u\rangle \ (\lambda \neq 0).$$

Згідно з результатами класифікації [184], одновимірні підалгебри алгебри

$$2A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3, e_4\rangle \ ([e_1, e_2] = e_2, \ [e_3, e_4] = e_4)$$

вичерпуються такими алгебрами: $\langle e_2\rangle, \langle e_4\rangle, \langle e_3\rangle, \langle e_1 + \alpha e_3\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle, \langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ $(\alpha \in R, \ \epsilon = \pm 1)$. Оскільки в даному випадкові

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x, \quad e_4 = \partial_u,$$

то умову (2.46) задовольняють усі підалгебри, за винятком $\langle e_4\rangle$.

Подальше проведення процедури симетрійної редукції рівняння (2.47) вимагає побудови підстановок (анзаців), відповідних кожній із перерахованих вище одновимірних підалгебр алгебри інваріантності. Для цього потрібно розв'язати рівняння

$$L[F(t, x, u)] = 0, \tag{2.48}$$

де L—базисний оператор однієї із одновимірних підалгебр.

Оскільки (2.48) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку, то його загальний розв'язок визначається двома фундаментальними розв'язками [13, 31]

$$\omega_1 = \omega_1(t, x, u), \qquad \omega_2 = \omega_2(t, x, u).$$

При цьому, внаслідок виконання умови (2.46), можемо вважати, що $\dfrac{\partial \omega_1}{\partial u} \neq 0$. Тоді, відповідний одновимірній підалгебрі анзац має вигляд

$$\omega_1 = \varphi(\omega_2) \tag{2.49}$$

і редукує рівняння (2.47) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією φ незалежної змінної ω_2.

Проінтегрувавши, якщо це вдається, редуковане рівняння і підставивши знайдене значення функції φ в (2.49), ми й отримаємо інваріантний розв'язок рівняння (2.47).

Перейдемо тепер до розгляду деяких конкретних випадків одновимірних підалгебр із наведеного вище переліку.

<u>Алгебра $\langle e_2 \rangle$</u>

Оскільки $e_2 = \partial_x$, то рівняння (2.48) має два розв'язки $\omega_1 = u,\ \omega_2 = t$. Тому відповідний анзац (2.49) де φ—довільна двічі неперервно диференційована функція свого аргументу, має вигляд

$$u = \varphi(t)$$

і зводить рівняння (2.47) до рівняння

$$\varphi' = 0,$$

загальний розв'язок якого

$$\varphi = C = const$$

приводить до тривіального розв'язку досліджуваного рівняння

$$u = C.$$

У подальшому ми із розгляду вилучимо і ті одновимірні підалгебри алгебр Лі операторів симетрії досліджуваних рівнянь, відповідна яким симетрійна редукція приводить до тривіальних розв'язків.

<u>Алгебра $\langle e_3 \rangle$</u>

Тут $e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x$, тому розв'язки рівняння (2.48) визначають функції $\omega_1 = u\exp(\frac{x}{\lambda\sqrt{t}})$, $\omega_2 = t$, внаслідок чого відповідний анзац має вигляд

$$u = \varphi(t)\exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}})$$

і зводить рівняння (2.47) до рівняння

$$\varphi' = \frac{1}{2t}[A - \ln|\varphi|]\varphi, \qquad A = \lambda^{-2}[2 + \lambda^2\ln|\lambda| - 2\lambda\beta].$$

Отримане рівняння легко інтегрується

$$\varphi = \pm\exp(A + Ct^{-\frac{1}{2}}), \quad C \in R, \quad C \neq 0,$$

і приводить до такого інваріантного розв'язку рівняння (2.47):

$$\begin{aligned} u &= \pm\exp[\lambda^{-2}(2 + \lambda^2\ln|\lambda| - 2\lambda\beta) + \frac{C - \lambda^{-1}x}{\sqrt{t}}], \\ &\quad C \in R, \quad C \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in R. \end{aligned}$$

<u>Алгебра $\langle e_1 \rangle$</u>

Тут $e_1 = -2t\partial_u - x\partial_x$ є інфінітезимальним оператором однопараметричної групи розтягів простору незалежних змінних. Згідно з [51], таким операторам відповідають автомодельні розв'язки. Провівши стандартні обрахунки, отримуємо, що інваріантний анзац має вигляд

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = tx^{-2},$$

а відповідне редуковане рівняння

$$4\omega^2\varphi'' + [6\omega - 1 - \lambda\sqrt{\omega}\ln 2 - \frac{3}{2}\lambda\sqrt{\omega}\ln\omega - 2\beta\sqrt{\omega} - \lambda\sqrt{\omega}\ln\,|\varphi'|]\varphi' = 0$$

допускає зниження порядку на одиницю.

З іншого боку, нормалізатор алгебри $\langle e_1\rangle$ в алгебрі $2A_{2.2}$ збігається з алгеброю $\langle e_1, e_3, e_4\rangle$ і має нетривіальну частину $\langle e_3, e_4\rangle$. Тому редуковане рівняння гарантовано допускає двопараметричну групу інваріантності [51]. В груповому аналізі диференціальних рівнянь добре відомо, що звичайне диференціальне рівняння, яке допускає двопараметричну групу інваріантності інтегрується в квадратурах (див., наприклад, [57, 150]). Тому процедуру побудови анзаца, відповідного алгебрі $\langle e_1\rangle$, проведемо так.

Знайдемо заміну змінних

$$\bar\omega = \mathrm{W}(\omega), \quad \bar u = u, \quad \omega = tx^{-2}, \tag{2.50}$$

яка зводить оператори e_3, e_4 до операторів

$$e_3 \to \bar e_3 = -\bar u\partial_{\bar u} - \bar\omega\partial_{\bar\omega}, \qquad e_4 \to \bar e_4 = \partial_{\bar u}.$$

Оскільки

$$\partial_u \overset{(2.50)}{\to} \partial_{\bar u}, \quad -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x \overset{(2.50)}{\to} -u\partial_{\bar u} - 2\lambda\omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{W}'\partial_{\bar\omega},$$

то функція W в (2.50) повинна задовольняти рівняння

$$2\lambda\omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{W}' = \mathrm{W}, \quad \mathrm{W} \neq 0.$$

Звідси випливає, що в (2.50) можемо покласти

$$\mathrm{W} = \exp(-\lambda^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}) = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}).$$

Згідно із цим, побудову відповідного операторові e_1 анзаца здійснюємо в просторі змінних $\langle u, \omega\rangle$, де $\omega = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}})$ і приходимо до такої підстановки:

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}). \tag{2.51}$$

Анзац (2.51) зводить рівняння (2.47) до рівняння

$$\omega\varphi'' = [\frac{1}{2}\lambda^2\ln|\varphi'| + A]\varphi', \quad A = \lambda\beta - 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln|\lambda|. \tag{2.52}$$

Рівняння (2.52) легко інтегрується і його загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi = \pm \int \exp[C_1 \omega^{\frac{\lambda^2}{2}} - 2\lambda^{-2} A] d\omega + C_2, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 \in R.$$

У відповідності із цим шуканий автомодельний розв'язок рівняння (2.47) такий:

$$\begin{aligned} u &= \pm \int \exp[C_1 \omega^{\frac{\lambda^2}{2}} - 2\lambda^{-2} A] d\omega + C_2, \\ \omega &= \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}), \qquad A = \lambda\beta - 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \ln|\lambda|, \\ &\quad \lambda C_1 \neq 0, \ \beta, C_2 \in R. \end{aligned}$$

Алгебра $\langle e_1 + \alpha e_3 \rangle$ $(\alpha \neq 0)$

Тут нормалізатор алгебри містить нетривіальну одновимірну підалгебру $\langle e_1 - \alpha e_3 \rangle$. Тому, підібравши в просторі функцій $\langle u t^{-\frac{\alpha}{2}}, \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha\lambda}{2} \ln t \rangle$, інваріантних відносно оператора $e_1 + \alpha e_3$, нові змінні $\bar{u}, \omega$ так, щоб оператор $e_1 - \alpha e_3$ зводився до оператора ∂_ω, приходимо до анзаца

$$u = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}) \varphi(\omega), \qquad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha\lambda}{2} \ln t,$$

який зводить рівняння (2.47) до рівняння

$$\varphi'' - \frac{2}{\lambda}\varphi' - \frac{1}{2}\alpha\lambda\varphi' + \frac{1}{\lambda^2}\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi' - \frac{1}{2}\varphi) \ln|\varphi' - \frac{1}{\lambda}\varphi| + \beta[\varphi' - \frac{1}{\lambda}\varphi] = 0. \quad (2.53)$$

Рівняння (2.53) не містить незалежної змінної і допускає зниження порядку на одиницю. В загальному вигляді нам його проінтегрувати не вдалося. Але воно має частинний розв'язок

$$\varphi = \pm\lambda \exp\frac{2(1 - \lambda\beta)}{\lambda^2},$$

якому відповідає такий інваріантний розв'язок рівняння (2.47):

$$u = \pm\lambda \exp[-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}} + \frac{2(1 - \lambda\beta)}{\lambda^2}].$$

<u>Алгебра $\langle e_1 + \epsilon e_4 \rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$</u>

Розв'язавши рівняння (2.48), приходимо до анзаца

$$u = \varphi(\omega) - \frac{1}{2}\epsilon \ln t, \qquad \omega = tx^{-2},$$

який зводить рівняння (2.47) до рівняння

$$4\omega^2\varphi'' + [6\omega - 1 - (\lambda \ln 2 + 2\beta - \frac{3\lambda}{2}\ln \omega)\sqrt{\omega}]\varphi' - \lambda\sqrt{\omega}\varphi' \ln|\varphi'| + \frac{1}{2}\epsilon\omega^{-1} = 0,$$

яке нам також в загальному вигляді проінтегрувати не вдалося. Відзначимо лише, що це рівняння, як і попереднє, допускає зниження порядку на одиницю, оскільки не містить явно функції φ.

<u>Алгебра $\langle e_2 + \epsilon e_4 \rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$</u>

Тут можна використовувати високу розмірність нетривіальної частини нормалізатора цієї підалгебри в алгебрі $2A_{2.2}$. Але й пряма редукція за анзацом

$$u = \varphi(t) + \epsilon x$$

приводить до рівняння

$$\varphi' = \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}(\frac{\lambda}{4}\ln t + \beta),$$

яке легко інтегрується і має такий загальний розв'язок:

$$\varphi = \frac{1}{2}\lambda\epsilon\sqrt{t}(\ln t - 2) + 2\epsilon\beta\sqrt{t} + C.$$

Відповідний інваріантний розв'язок рівняння (2.47) має вигляд

$$u = \frac{1}{2}\lambda\epsilon\sqrt{t}(\ln t - 2) + 2\epsilon\beta\sqrt{t} + \epsilon x + C, \quad \lambda \neq 0, \quad \epsilon = \pm 1, \ \beta, C \in R.$$

<u>Алгебра $\langle e_2 + \epsilon e_3 \rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$</u>

Тут нетривіальна частина нормалізатора підалгебри в алгебрі $2A_{2.2}$ має розмірність рівну одиниці, а відповідний оператору $e_2 + \epsilon e_3$ анзац

$$u = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t} + \epsilon})\varphi(t)$$

редукує рівняння (2.47) до звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\varphi' = (\lambda\sqrt{t}+\epsilon)^{-1}[(\lambda\sqrt{t}+\epsilon)^{-1} - \frac{1}{4}\lambda t^{-\frac{1}{2}} \ln(t(\lambda\sqrt{t}+\epsilon)^{-2}\varphi^2) - \beta t^{-\frac{1}{2}}]\varphi. \quad (2.54)$$

Рівняння (2.54) є інваріантним відносно однопараметричної групи перетворень з інфінітезимальним оператором $(\lambda\sqrt{t}+\epsilon)^{-1}\varphi\partial_\varphi$. Тому зведення цього оператора до оператора ∂_z, де z—нова шукана функція змінної t, приводить до підстановки

$$\varphi = \exp[(\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-1}z],$$

яка преретворює рівняння (2.54) в рівняння

$$z' = (\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-1} - \frac{1}{4}\lambda t^{-\frac{1}{2}} \ln[t(\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-2}] - \beta t^{-\frac{1}{2}}.$$

Проінтегрувавши останнє, отримуємо

$$\begin{aligned} z &= 2(\lambda^{-1} - \beta)\sqrt{t} - \frac{1}{2}\lambda\sqrt{t}(\ln t - 2) - 2\epsilon\lambda^{-2}\ln|\epsilon + \lambda\sqrt{t}| + \\ &+ (\epsilon + \lambda\sqrt{t})(\ln|\epsilon + \lambda\sqrt{t}| - 1) + C, \end{aligned}$$

у відповідності із чим

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1(\ln|\epsilon + \lambda\sqrt{t}| - 1) \cdot \\ &\cdot \exp\frac{\sqrt{t}[4\lambda(1-\lambda\beta) - \lambda^3(\ln t - 2)] - 4\epsilon\ln|\epsilon + \lambda\sqrt{t}|}{2\lambda^2(\epsilon + \lambda\sqrt{t})}, \qquad (2.55) \\ & C_1 \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \ \beta \in R, \ \epsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Відповідний інваріантний розв'язок рівняння (2.47) має вигляд

$$u = \exp(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}+\epsilon})\varphi,$$

де φ—функція (2.55).

Використовуючи аналогічні міркування, ми провели симетрійну редукцію та побудували інваріантні розв'язки решти рівнянь вигляду (1.9), які наведені в таблиці 1.3, та ряду рівнянь вигляду (2.1), які теж інваріантні відносно чотирипараметричних груп інваріантності. Отримані результати зведено в **додаткові 1**, де ми для кожного розглянутого рівняння наводимо алгебру інваріантності та відповідні одновимірним підалгебрам інваріантні розв'язки або анзаци і редуковані рівняння, якщо останні не вдалося проінтегрувати в загальному вигляді.

2.3.2. Про використання некласичних локальних симетрій для інтегрування рівнянь. У 1969 році Блумен і Кул опублікували статтю [102], де показали, що лінійне одновимірне рівняння теплопровідності є інваріантним відносно таких груп локальних перетворень, які не можна знайти в класичному підході Лі. Активне дослідження наявності таких прихованих (некласичних) симетрій в нелінійних диференціальних рівняннях з частинними похідними було зініційовано роботами [110, 130, 133, 165, 179, 180], де були побудовані такі нові точні розв'язки ряду нелінійних рівнянь, які не можна отримати традиційною симетрійною редукцією. У подальшому перелік нелінійних рівнянь, для яких розв'язування задачі знаходження некласичних симетрій привело до нетривіальних результатів, значно розширився (див., наприклад, [22, 71, 87, 108, 111, 128, 141, 143, 212] та цитовану там літературу).

Систематичне дослідження некласичних симетрійних властивостей нелінійних рівнянь еволюційного типу виходить за межі кола задач, які ми розв'язуємо. Тому тут ми обмежуємося лише розглядом питання про можливість використання некласичних симетрій, які, слідуючи роботам [65, 87, 128, 130], будемо далі називати умовними (Q–умовними), для побудови нових точних розв'язків ряду рівнянь, розглянутих вище.

Розглянемо спочатку одновимірне рівняння еволюційного типу у найбільш загальному вигляді

$$u_t = \Phi(t, x, u, u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{2.56}$$

В (2.56) $u = u(t, x),\ u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n.$

Згідно із загальною процедурою знаходження умовних симетрій диференціальних рівнянь з частинними похідними [87, 128], ми, використовуючи інфінітезімальний метод Лі–Овсяннікова, будемо шукати оператори умовної симетрії у вигляді

$$Q = T(t,x,u)\partial_t + X(t,x,u)\partial_x + U(t,x,u)\partial_u, \tag{2.57}$$

де T, X, U—довільні достатньо гладкі функції своїх змінних.

На відміну від пошуку класичних симетрій, тут, разом з рівнянням (2.56), ми розглядаємо й рівняння

$$Qu = 0. \tag{2.58}$$

Наявність умови (2.58) дає додаткові зв'язки між диференціальними змінними, внаслідок чого визначальна система для коефіцієнтів оператора (2.57) містить меншу, ніж в класичному випадкові, кількість рівнянь. Саме це і визначає можливість наявності у визначальної системи нових, у порівнянні з класичним випадком, розв'язків.

Традиційно розрізняють два випадки: $T = 1$ або $T = 0,\ X = 1$. Розглянемо другий випадок.

Теорема 2.3.1 *Нехай рівняння вигляду (2.56) є умовно інваріантним відносно оператора (2.57), в якому $T = 0,\ X = 1$. Тоді визначальне для функції $U(t,x,u)$ рівняння є еквівалентним рівнянню (2.56).*

<u>Доведення.</u> Критерій умовної інваріантності рівняння (2.56) відносно оператора (2.57), в якому $T = 0,\ X = 1$, має вигляд

$$D_t U - D_x \Psi|_{u_t=\Psi} = 0. \tag{2.59}$$

Тут $\Psi = \Psi(t,x,u)$ отримується із $\Phi = \Phi(t,x,u_1,\ldots,u_n)$ заміною змінних $u_1, u_2, \ldots, u_n$ значеннями функції U та її похідних, які випливають з умови

$$u_x = U(t,x,u)$$

та її диференціальних наслідків. В (2.59), як і раніше,

$$\begin{aligned} D_t &= \partial_t + u_t\partial_u + \ldots, \\ D_x &= \partial_x + u_x\partial_u + \ldots. \end{aligned}$$

Умова (2.59) приводить до рівності

$$U_t + \Psi U_u - \left[\frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u}\right]\Psi = 0.$$

Здійснивши підстановку

$$U(t,x,u) = -\frac{\omega_x}{\omega_u}, \tag{2.60}$$

де $\omega = \omega(t,x,u)$ нова залежна змінна, приходимо до такого рівняння з частинними похідними:

$$\begin{aligned}&\omega_u^{-2}(\omega_x\omega_{ut} - \omega_u\omega_{xt}) + \omega_u^{-2}(\omega_x\omega_{uu} - \omega_u\omega_{xu})H - \\ &-\omega_u^{-1}(\omega_u\frac{\partial}{\partial x} - \omega_u\frac{\partial}{\partial u})H = 0,\end{aligned} \tag{2.61}$$

де H функція змінних t, x, ω і похідних функції ω, отримана з Ψ заміною змінних (2.60).

Рівняння (2.61) записується в такій еквівалентній формі:

$$\omega_u^{-2}\left(\omega_u\frac{\partial}{\partial x} - \omega_x\frac{\partial}{\partial u}\right)(\omega_t + \omega_u H) = 0,$$

звідки випливає існування такої гладкої функції $f = f(t,\omega)$, що

$$\omega_t + \omega_u H = f.$$

Здійснивши в останньому рівнянні перетворення годографа

$$t = y_0, \quad x = y_1, \quad u = \mathrm{V}(y_0,y_1,y_2), \quad \omega = y_2,$$

приходимо до рівняння

$$\mathrm{V}_{y_0} - \Phi(y_0, y_1, \mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n) = -f(y_0,y_2)\mathrm{V}_{y_2}, \quad \mathrm{V}_i = \frac{\partial^i \mathrm{V}}{\partial y_1^i}. \tag{2.62}$$

Нарешті, заміна незалежних змінних

$$z_0 = y_o, \quad z_1 = y_1, \quad z_2 = \Omega(y_0, y_2),$$

де функція Ω є першим інтегралом рівняння

$$\Omega_{y_0} + f(y_0,y_2)\Omega_{y_2} = 0,$$

показує, що функція $\mathrm{V} = \mathrm{V}(z_0, z_1, z_2)$ є розв'язком рівняння

$$\mathrm{V}_{z_0} - F(z_0, z_1, \mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n) = 0,$$

яке містить змінну z_2 як параметр.

Останнє ж рівняння з точністю до позначень збігається з рівнянням (2.56).

Теорема доведена.

Інша ситуація виникає, коли здійснюється пошук операторів умовної симетрії рівнянь вигляду (2.56) в класі операторів (2.57), де $T = 1$. Наявність операторів умовної симетрії у цьому випадкові гарантувати наперед не можна (окрім операторів ліївської симетрії, яка є частинним випадком умовної).

Проілюструємо сказане, розглянувши ряд рівнянь вигляду (1.9). Отже, для рівнянь вигляду (1.9) здійснюємо пошук операторів симетрії в класі операторів

$$Q = \partial_t + A(t, x, u)\partial_x + B(t, x, u)\partial_u, \tag{2.63}$$

де A, B—довільні гладкі функції своїх аргументів.

Здійснивши стандартні обчислення і перетворення,ми отримали, що визначальне рівняння для оператора (2.63), який допускається рівнянням (1.9), має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&B_t - B_{xx} + 2BA_x - u_x[A_t - 2BA_u + 2B_{xu} - A_{xx} + 2AA_x] + \\
&+u_x^2[2A_{xu} - B_{uu} - 2AA_u] + u_x^3 A_{uu} = \\
&= [2A_x - B_u + 3u_x A_u]F + F_t + AF_x + BF_u + \\
&+[B_x + u_x(B_u - A_x) - u_x^2 A_u]F_{u_x}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Подальший розгляд рівнянь із таблиці 1.3, для яких була розглянута процедура симетрійної редукції, показав, що всі із них в класі операторів (2.63) не допускають операторів симетрії, відмінних від операторів ліївської симетрії.

Так, для третього рівняння із таблиці 1.3 визначальне рівняння (2.64), після підстановки в нього значення функції F, розщеплюється на систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&A_u = 0, \quad B_u - A_x = 0, \quad B_{uu} = 0, \quad B_u - B_x = 0,\\
&A_t + 2B_{xu} - A_{xx} + 2AA_x = 0,\\
&B_t - B_{xx} + 2BA_x = 0,
\end{aligned}$$

загальний розв'язок якої

$$A = \frac{x + C_2}{C_1 + 2t}, \; B = \frac{x + u + C_3}{C_1 + 2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R,$$

визначає такий оператор умовної симетрії:

$$Q = \partial_t + \frac{(x + C_2)\partial_x + (x + u + C_3)\partial_u}{C_1 + 2t}.$$

Далі, скориставшись тим, що коли оператор Q є оператором умовної симетрії, то й оператор $f(t, x, u)Q$ є теж оператором умовної симетрії [87, 212], приходимо до оператора

$$\mathrm{v} = (C_1 + 2t)\partial_t + (x + C_2)\partial_x + (x + u + C_3)\partial_u,$$

який належить до алгебри Лі $A^1_{4.2}$ операторів симетрії, яку допускає розглядуване рівняння.

Підсумовуючи сказане вище, можемо зробити висновок, що класичні методи побудови інваріантних розв'язків залишаються одним із основних генераторів точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними (зокрема, нелінійних рівнянь еволюційного типу).

2.4. Висновки до розділу 2

Основною задачею, яка розглядалася у другому розділі дисертації, є задача групової класифікації найбільш загального квазілінійного рівняння еволюційного типу (2.1). Використання запропонованого в першому розділі методу розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь дозволило здійснити повну групову класифікацію рівнянь вигляду (2.1). Виявилося, що серед досліджуваних рівнянь найвищі симетрійні властивості мають 35 рівнянь, максимальними групами інваріантності яких є чотирипараметричні групи локальних перетворень, та 5 рівнянь, максимальними групами інваріантності яких є п'ятипараметричні групи локальних перетворень. При цьому, останні 5 рівнянь вичерпуються відомими модельними рівняннями: рівнянням Бюргерса, нелінійним рівнянням теплопровідності [47] та трьома рівняннями нелінійної фільтрації [2, 3]. Це показує, що, явно чи неявно, під час вибору рівняння для опису моделі деякого реального процесу, враховуються його нетривіальні симетрійні властивості.

Також можна відзначити, що використання запропонованого методу дозволило значно розширити класи диференціальних рівнянь, для яких повне розв'язання задачі групової класифікації є конструктивним. Про це свідчать і результати роботи [211], в якій, з використанням даного методу, проведено повний опис нелінійних двовимірних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно одно–, дво та трипараметричних груп локальних перетворень.

Результати третього підрозділу свідчать, що класична симетрійна редукція залишається головним генератором точних розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Дійсно, з теореми 2.3.1 випливає, що

1) взагалі кажучи, в класі операторів (2.57), де $T = 0,\ X = 1$, гарантовано міститься нескінченна множина операторів умовної симетрії рівнянь вигляду (2.56);

2) але проблема знаходження цих операторів є еквівалентною побудові нових точних розв'язків досліджуваного рівняння,які не можна отримати в класичному підході Лі.

Розгляд же операторів (2.57), де $T = 1$, як було показано вище, часто привести до операторів класичної ліївської симетрії.

Разом з тим слід, відзначити, що, не дивлячись на значні технічні труднощі, дослідження умовної симетрії дозволяє отримувати нові точні розв'язки деяких нелінійних рівнянь вигляду (2.57) (див., наприклад, статті [65, 139, 141]).

На закінчення стисло підсумуємо основні результати другого розділу:

1) здійснено повну групову класифікацію квазілійних рівнянь еволюційного типу (2.1);

2) побудовано ряд нових точних розв'язків нелінійних двовимірних рівнянь еволюційного типу;

3) для загального рівняння еволюційного типу доведено теорему про еквівалентність задачі знаходження одного класу операторів Q–умовної симетрії та задачі інтегрування самого рівняння.

РОЗДІЛ 3

Конформно–інваріантні анзаци для довільного векторного поля

У третьому розділі ми проводимо побудову інваріантних підстановок (анзаців), яким відповідає редукція відомих в релятивістській фізиці модельних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (рівняння Максвелла, Дірака, Вейля, $SU(2)$–рівняння Янга–Міллса тощо) до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Попередній аналіз процедури симетрійної редукції таких систем, який здійснено в першому підрозділі, показує, що структура ряду важливих груп локальних перетворень (групи Пуанкаре $P(1,3)$, розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ та конформної групи $C(1,3)$), які є групами інваріантності відомих систем диференціальних рівнянь, дозволяє здійснювати повну побудову таких анзаців у лінійній формі.

У другому підрозділі розділу ми наводимо переліки тих підалгебр алгебр Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ та $C(1,3)$, відповідні яким анзаци редукують системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Явний вигляд $P(1,3)$–, $\tilde{P}(1,3)$–та $C(1,3)$–інваріантних анзаців отримано в третьому підрозділі розділу.

Використанню отриманих конформно–інваріантних анзаців для інтегрування системи рівнянь Максвелла у вакуумі присвячений четвертий підрозділ розділу.

У п'ятому, останньому, підрозділі підведено підсумки та зроблено висновки до третього розділу.

Основні результати розділу опубліковані в статтях [21, 34, 35, 37, 118, 156] та оглядові [208].

3.1. Лінійна форма конформно–інваріантних анзаців

У першому підрозділі третього розділу ми зупиняємося на можливості побудови конформно–інваріантних анзаців у лінійному вигляді. Для цього ми, перш за все, проводимо аналіз процедури симетрійної редукції систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних.

Розглянемо систему S диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$S : \underset{A}{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots, \underset{r}{\mathbf{u}}) = 0, \quad A = 1, \ldots, m, \tag{3.1}$$

яка визначена у відкритій області $M \subset X \times U \simeq R^p \times R^q$ простору p незалежних та q залежних змінних. В (3.1) і далі $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^q) \in U$, $\underset{l}{\mathbf{u}} = \{\dfrac{\partial^l u^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}, \ 0 \le \alpha_i \le l, \ \sum_{i=1}^p \alpha_i = l\}$, $l = 1, 2, \ldots, r$, F_A—достатньо гладкі скалярні функції своїх аргументів.

Нехай G—локальна група перетворень, яка діє в M, є групою інваріантності системи (3.1) і її векторні поля Лі мають вигляд

$$X_a = \xi_a^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{x_i} + \eta_j^a(\mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{u^j}, \ a = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

де ξ_a^i, η_j^a—довільні гладкі функції в M, $\partial_{u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. Зауважимо, що оператори (3.2) складають базис алгебри Лі AG групи G, тобто мають місце співвідношення

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c, \ a, b, c = 1, \ldots, n,$$

де C_{ab}^c—структурні константи, які визначають тип алгебри AG, $[\cdot, \cdot]$—комутатор.

Розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ системи (3.1), де $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^q)$, називається G–інваріантним розв'язком, якщо він залишається незмінним при всіх перетвореннях із групи G. Це означає, що для довільного $g \in G$ функції $\mathbf{f}$ та $g(\mathbf{f})$ (якщо вона визначена) збігаються в їх загальній області визначення. Більш точно, ми можемо визначити G–інваріантний розв'язок системи (3.1) як розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, графік $\Gamma_{\mathbf{f}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\} \subset M$ якого —суть локально G–інваріантна підмножина множини M.

Якщо G—група симетрії системи (3.1), то, при виконанні деяких додаткових припущень про регулярність дії групи G, ми можемо знайти всі G–інваріантні розв'язки системи S, розв'язавши редуковану систему диференціальних рівнянь, яку будемо позначати S/G, і яка міститиме вже меншу кількість незалежних змінних ніж досліджувана система (3.1).

Для того, щоб побачити, як здійснюється процедура симетрійної редукції, розглянемо випадок, коли група G діє в M проектовно (саме такі групи перетворень і підлягають подальшому дослідженню). Це означає, що всі перетворення g із G мають вигляд

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}) = g((\mathbf{x}, \mathbf{u})) = (\Psi_g(\mathbf{x}), \Phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

тобто, закон перетворення незалежних змінних $\mathbf{x}$ не містить залежних змінних (якщо група G діє в M проектовно, то у векторних полях Лі (3.2) $\xi^i_a = \xi^i_a(\mathbf{x})$). Цим самим визначена проектовна дія групи G $\overline{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}) = \Psi_g(\mathbf{x})$ в довільній підмножині $\Omega \subset X$.

Надалі вважаємо, що дія групи G в M та її проектовна дія в Ω є регулярними й орбіти цих дій мають одну й ту ж розмірність s (цю розмірність ще називають рангом групи G або її алгебри Лі AG). Відзначимо, що умова $rankG = s$ рівносильна умові [51]

$$rank \parallel \xi^i_a(\mathbf{x}_0) \parallel = rank \parallel \xi^i_a(\mathbf{x}_0), \eta^a_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \parallel = s \tag{3.3}$$

в довільній точці $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \in M$. Також далі вважаємо, що $s < p$ (випадок $s = p$ є тривіальним, а для $s > p$ не існують G–інваріантні функції).

Якщо виконуються зроблені припущення, то існують [51, 57] $p-s$ функціонально–незалежних інваріантів $y^1 = \omega^1(\mathbf{x}), y^2 = \omega^2(\mathbf{x}), \ldots, y^{p-s} = \omega^{p-s}(\mathbf{x})$ (перша група інваріантів) проектовної дії групи G в Ω, кожен з яких є також інваріантом повної дії групи G в M, та q функціонально–незалежних інваріантів дії групи G в M вигляду $v^1 = g^1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $v^2 = g^2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ldots, v^q = g^q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (друга група інваріантів). Запишемо повний набір інваріантів групи G у вигляді

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{3.4}$$

Далі, оскільки має місце рівність

$$\operatorname{rank}\left|\left|\frac{\partial g^j}{\partial u^i}\right|\right| = q, \quad i, j = 1, \ldots, q,$$

то, згідно з відомою теоремою про існування неявної функції, другу систему (3.4) можна розв'язати відносно $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{3.5}$$

Для першої системи (3.4) має місце умова

$$\operatorname{rank}\left|\left|\frac{\partial \omega^j}{\partial x_i}\right|\right| = p - s, \quad j = 1, \ldots, p-s; \quad i = 1, \ldots, p.$$

Виберемо $p-s$ незалежних змінних $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{p-s})$ так, що

$$\operatorname{rank}\left|\left|\frac{\partial \omega^j}{\partial \tilde{x}_i}\right|\right| = p - s, \quad i, j = 1, \ldots, p-s,$$

і назвемо їх головними, а решту s незалежних змінних $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_s)$ назвемо параметричними (в усі подальші формули вони дійсно входять як параметри). Тоді, першу систему (3.4) можна розв'язати відносно головних змінних:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}). \tag{3.6}$$

Підставивши (3.6) в (3.5) приходимо до рівності

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$$

або

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{v}). \tag{3.7}$$

Зауважимо, що в (3.5)–(3.7) $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}^1, \ldots, \tilde{r}^q)$, $\mathbf{r} = (r^1, \ldots, r^q)$, $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^{p-s})$—деякі коректно визначені функції. Побудована так G–інваріантна функція $\mathbf{u}$ (3.7) називається *анзацом*. В результаті підстановки анзацу (3.7) систему (3.1) ми, згідно з теоремою про умовне існування інваріантних розв'язків [51], приходимо до системи рівнянь, яка не залежить від параметричних змінних, а є системою диференціальних рівнянь відносно $\mathbf{v}$ як функцій змінних $\mathbf{y}$. Це і є редукована система S/G, в якій кількість незалежних змінних $y^1, \ldots, y^{p-s}$ на s менша від кількості незалежних змінних в системі (3.1). Якщо $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$—розв'язок редукованої системи, то, підставивши його значення в (3.7), ми тим самим отримаємо G–інваріантний розв'язок системи (3.1).

Підводячи підсумок, сформулюємо алгоритм симетрійної редукції та побудови інваріантних розв'язків системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. Він полягає у виконанні наступних п'яти кроків.

(I) З використанням інфінітезимального методу Лі проводиться дослідження симетрійних властивостей даної системи рівнянь. Далі вважаємо, що система має нетривіальну симетрію.

(II) Вибирається s —"степінь симетрії" інваріантних розв'язків та знаходиться оптимальна система підгруп рангу s групи симетрії. На практиці для цього використовують відомий факт [51], що вказана вище задача еквівалентна задачі класифікації підалгебр рангу s алгебри Лі групи інваріантності з точністю до спряженості, яка, як правило, визначається групою внутрішніх автоморфізмів даної алгебри Лі.

(III) Для кожної із отриманих підгруп проводиться побудова повної множини функціонально–незалежних інваріантів, а з неї—анзацу.

(IV) З використанням отриманого анзацу здійснюється редукція досліджуваної системи до системи, яка містить меншу на s кількість незалежних змінних.

(V) Досліджується редукована система і знаходяться її розв'язки. Кожному такому розв'язкові відповідає деякий інваріантний розв'язок досліджуваної системи.

Зауважимо, що повне розв'язання задачі симетрійної редукції та побудови інваріантних розв'язків досліджуваної системи рівнянь вимагає повторення кроків (III)–(V) для кожної із отриманих на (II) кроці підгруп.

На сьогоднішній день дослідження симетрійних властивостей проведене для багатьох відомих рівнянь та систем рівнянь, які зустрічаються в сучасній теоретичній та математичній фізиці. Виявилося, що серед отриманих груп інваріантності центральне місце посідають групи, які ізоморфні групам Евкліда, Пуанкаре, Галілея та групам, що є їх природними розширеннями (конформні групи, групи Шрьодінгера). Це стало одним із спонукальних мотивів до вивчення проблеми опису неперервних підгруп фундаментальних груп фізики, яке систематично було розпочате в роботі Й. Патери, П. Вінтернітца та Х. Цассенхауса [183], де було запропоновано загальний метод дослідження та уточнено вже відомий перелік підгруп групи Пуанкаре $P(1,3)$. Використання цього методу дозволило отримати опис підгруп ряду згаданих вище груп (див., наприклад, [72] та цитовану там літературу).

Згідно зі сказаним вище, для ряду фундаментальних систем рівнянь з частинними похідними перші два кроки сформульованого алгоритму здійснено повністю. Виконання ж (III) та (IV) кроків для систем диференціальних рівнянь вимагає значного обсягу обчислювальної роботи. Разом з тим, структура векторних полів Лі, які складають базис алгебр Лі груп інваріантності досліджуваних систем рівнянь, дозволяє значно спростити процедуру побудови анзаців, якщо відразу врахувати можливість їх отримання в лінійній формі. Саме із використанням такого підходу в [75, 76, 133, 134] і було отримано широкі класи точних розв'язків ряду лінійних та нелінійних спінорних рівнянь.

Зупинимося далі на п'ятнадцятипараметричній групі конформних перетворень $C(1,3)$, яка діє у відкритій області $M \subset R^{1,3} \times R^q$ чотиривимірного простору–часу Мінковського незалежних змінних x_0, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та q–вимірного простору залежних змінних $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^q)$. Як відзначалося вище, ця група перетворень є групою інваріантності ряду важливих лінійних та нелінійних рівнянь з частинними похідними математичної та теоретичної фізики.

Конформна група $C(1,3)$ породжується генераторами трансляцій P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), поворотів J_{ab} ($a, b = 1, 2, 3,\ a < b$), псевдоповоротів (перетворень Лоренца) J_{0a} ($a = 1, 2, 3$), перетворень подібності (дилатації) D та генераторами конформних перетворень K_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), які складають базис алгебри Лі $c(1,3)$ конформної групи й задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha, \\
&[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$[P_\mu, D] = P_\mu, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0, \qquad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
&[K_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} K_\beta - g_{\mu\beta} K_\alpha, \ [D, K_\mu] = K_\mu, \\
&[K_\mu, K_\nu] = 0, \ [P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu} D - J_{\mu\nu}). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Тут $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,\ g_{\mu\nu}$—метричний тензор простору Мінковського $R^{1,3}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0; \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Зауважимо, що конформна група $C(1,3)$ містить як підгрупи дві важливі групи перетворень:

1) групу Пуанкаре $P(1,3)$, базис алгебри Лі $p(1,3)$ якої складають

генератори $P_\mu, J_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, що задовольняють комутаційні співвідношення (3.8);

2) розширену групу Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, базис алгебри Лі $\tilde{p}(1,3)$ якої складають генератори $P_\mu, J_{\mu\nu}, D$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, що задовольняють комутаційні співвідношення (3.8), (3.9).

Аналізуючи результати досліджень (в класичному підході Лі) симетрійних властивостей ряду фундаментальних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (у тому числі й рівнянь Максвелла та Янга–Міллса в просторі Мінковського, на симетрійних властивостях яких ми більш детально зупинимося нижче), приходимо до висновку, що відомі реалізації в класі векторних полів Лі груп $P(1,3), \tilde{P}(1,3), C(1,3)$ (див., наприклад, [51, 82, 83, 87, 120, 121, 128]) можна подати у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
P_\mu &= \partial_{x_\mu},\\
J_{\mu\nu} &= x^\mu\partial_{x_\nu} - x^\nu\partial_{x_\mu} - (S_{\mu\nu}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
D &= x_\mu\partial_{x_\mu} - k(E\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
K_0 &= 2x_0D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_0} - 2x_a(S_{0a}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
K_1 &= -2x_1D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_1} + 2x_0(S_{01}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) -\\
&\quad -2x_2(S_{12}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) - 2x_3(S_{13}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
K_2 &= -2x_2D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_2} + 2x_0(S_{02}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) +\\
&\quad +2x_1(S_{12}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) - 2x_3(S_{23}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
K_3 &= -2x_3D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_3} + 2x_0(S_{03}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) +\\
&\quad +2x_1(S_{13}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) + 2x_2(S_{23}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

У формулах (3.11) $S_{\mu\nu}$ — суть $q\times q$—матриці, що реалізують зображення алгебри Лі $o(1,3)$ групи перетворень Лоренца $O(1,3)$, тобто мають місце комутаційні співвідношення

$$[S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta}S_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}S_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}S_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}S_{\mu\alpha}, \tag{3.12}$$

де $\mu,\nu,\alpha,\beta = 0,1,2,3;$ $g_{\mu\nu}$—тензор простору Мінковського $R^{1,3}$; E—одинична $q\times q$—матриця, $\mathbf{u} = (u^1,u^2,\ldots,u^q)^T$, $\partial_{\mathbf{u}} = (\partial_{u^1},\partial_{u^2},\ldots,\partial_{u^q})^T$;

символ $(* \cdot *)$ означає скалярний добуток. Також нагадаємо, що, тут і далі, піднімання та опускання індексів μ, ν здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $R^{1,3}$, а за індексами, що повторюються, передбачено підсумовування в межах їх зміни: від 0 до 3 за індексами μ, ν та від 1 до 3 за індексом a. Число k— деяке цілком визначене число, яке називається степенем конформності алгебри $c(1,3)$.

Як випливає із співвідношень (3.11), істотною особливістю інфінітезимальних операторів, які реалізують базис алгебри $c(1,3)$, є та, що вони мають вигляд (3.2), де функції ξ^i_a є функціями лише незалежних змінних $\mathbf{x} \in X = R^p$, а функції η^a_j лінійно залежать від $\mathbf{u}$.

Отже, нехай локальна група перетворень G діє проектовно в M, $AG = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$—її алгебра Лі, базис якої складають інфінітезимальні оператори вигляду

$$\begin{aligned} X_a &= \xi^i_a(\mathbf{x})\partial_{x_i} + \rho^a_{jk}(\mathbf{x})u^k\partial_{u^j} \\ &\quad (a = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, p;\ j, k = 1, \ldots, q). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Згідно зі сказаним вище, у цьому випадкові група G має два класи інваріантів: перший клас складають $p-s$ (де s—ранг групи G) функціонально–незалежних інваріантів

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}),\ \mathbf{w} = (\omega^1, \ldots, \omega^{p-s}), \tag{3.14}$$

а другий клас — q інваріантів

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\ \mathbf{h} = (h^1, \ldots, h^q). \tag{3.15}$$

При цьому, функції $\mathbf{w}$ та $\mathbf{h}$ є інваріантами групи G тоді і тільки тоді, коли [51] вони є відповідно розв'язками таких двох систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\xi^i_a(\mathbf{x})\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \omega = \omega(\mathbf{x}), \tag{3.16}$$

та

$$\xi^i_a(\mathbf{x})\frac{\partial h}{\partial x_i} + \rho^a_{jk}(\mathbf{x})u^k\frac{\partial h}{\partial u^j},\ h = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{3.17}$$

В (3.16), (3.17) $a = 1, \dots, n;\ i = 1, \dots, p;\ j, k = 1, \dots, q.$

У загальному випадкові G–інваріантний анзац має вигляд (3.6), де $\mathbf{v} \equiv \mathbf{h}$. Але, як показано в [76], у випадкові, коли інфінітезимальні оператори групи G мають вигляд (3.13), G–інваріантний анзац для векторного поля $\mathbf{u}$ можна подати у лінійній формі

$$\mathbf{u} = \Lambda(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{w}), \tag{3.18}$$

де $\Lambda(\mathbf{x})$—деяка відома невироджена в $\Omega \subset M$ $q \times q$–матриця, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q)^T$, $\mathbf{h} = (h^1, \dots, h^q)^T$.

Знайдемо умови, яким повинна задовольняти матриця $\Lambda(\mathbf{x})$ в анзацові (3.18).

Лема 3.1.1 *Нехай G–інваріантний анзац має вигляд (3.18). Тоді існує така невироджена в Ω $q \times q$–матриця $H(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})$, яка є розв'язком матричного диференціального рівняння з частинними похідними*

$$\xi_a^i(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} + H(\mathbf{x})\Gamma_a(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.19}$$

де $\Gamma_a(\mathbf{x})$—деякі відомі $q \times q$–матриці, які визначаються виглядом інфінітезимальних операторів (3.13).

Доведення. Якщо G–інваріантний анзац має вигляд (3.18), то виконується рівність

$$\mathbf{h} = H(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

де $H(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})$, тобто, другий клас інваріантів (3.15) групи G повинні складати функції, які є лінійними формами функцій u^j :

$$h^b = h_{bl}(\mathbf{x})u^l, \quad b, l = 1, \dots, q.$$

Необхідною і достатньою умовою того, що функція h^b є інваріантом групи G, є те [51], що вона задовольняє рівняння (3.17):

$$\xi_a^i(\mathbf{x}) \frac{\partial h_{bl}(\mathbf{x})}{\partial x_i} u^l + \rho_{jl}^a(\mathbf{x}) u^l h_{bj}(\mathbf{x}) = 0$$

або

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial h_{bl}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + h_{bj}(\mathbf{x})\rho_{jl}^a(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.20}$$

для всіх значень b. В (3.20) $a = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, p$; $b, j, l = 1, \ldots, q$. Поклавши $H(\mathbf{x}) =\| h_{bj}(\mathbf{x}) \|$, $\Gamma_a(\mathbf{x}) =\| \rho_{jl}^a(\mathbf{x}) \|$, бачимо, що другий доданок лівої частини рівності (3.20) є елементом матриці $H(\mathbf{x})\Gamma_a(\mathbf{x})$ $(a = 1, \ldots, n)$, який записаний у клітинці (b, l), тобто, матриця $H(\mathbf{x})$ задовольняє рівняння (3.19), де матриця $\Gamma_a(\mathbf{x})$ цілком визначається виглядом інфінітезимальних операторів (3.13).

Лему доведено.

У лемі 3.1.1 кожному операторові X_a $(a = 1, \ldots, n)$ алгебри Лі AG співставлено деяку матрицю Γ_a. Використовуючи запис (3.11) інфінітезимальних операторів конформної групи, неважко переконатися, що такими матрицями для базисних операторів алгебри $c(1, 3)$ є матриці:

- генератори трансляцій P_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$—нульові $q \times q$—матриці;
- генератори поворотів та перетворень Лоренца $J_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 01, 2, 3)$— $q \times q$–матриці $-S_{\mu\nu}$, де $S_{\mu\nu}$ реалізують зображення алгебри $o(1, 3)$ і задовольняють комутаційні співвідношення (3.12);
- оператор дилатації D—матриця $-kE$, де k—степінь конформності алгебри $c(1, 3)$, а E—одинична $q \times q$–матриця;
- генератори конформних перетвореньK_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$—матриці

$$\begin{aligned}
&-2x_0kE - 2x_aS_{0a}\ (a = 1, 2, 3) \text{ для оператора } K_0,\\
&2x_1kE + 2x_0S_{01} - 2x_2S_{12} - 2x_3S_{13} \text{ для оператора } K_1,\\
&2x_2kE + 2x_0S_{02} + 2x_1S_{12} - 2x_3S_{23} \text{ для оператора } K_2,\\
&2x_3kE + 2x_0S_{03} + 2x_1S_{13} + 2x_2S_{23} \text{ для оператора } K_3.
\end{aligned}$$

Тут матриці E та $S_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ й стала k такі ж, як і для операторів $J_{\mu\nu}$ та D.

Відома форма матриць Γ_a для операторів алгебри $c(1,3)$ дозволяє визначити і клас матриць $H = \Lambda^{-1}$ з анзацу (3.18).

Так, якщо алгебра AG є деякою підалгеброю алгебри Пуанкаре $p(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} | \ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \rangle$, то матриці Γ_a належать множині матриць $S_{\mu\nu}$. Тому природним є пошук матриць H у класі матриць, які реалізують зображення групи Лоренца $O(1,3)$ (такі матриці є невиродженими) і які, використовуючи експоненціальне відображення, можна подати у вигляді

$$\tilde{H} = \prod_j \exp(\theta_j S_j), \ j = 1, \dots, 6, \tag{3.21}$$

де S_j—відомі матриці $S_{\mu\nu}$, а $\theta_j = \theta_j(x_0, \mathbf{x})$—довільні гладкі функції, визначені в $\tilde{\Omega} \subset R^{1,3}$.

У випадкові, коли AG є деякою підалгеброю розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,3) = p(1,3) \dotplus \langle D \rangle$, множина матриць S_j $(j = 1, \dots, 6)$ доповнюється матрицею E, а тому тут

$$H = [\exp \theta E] \tilde{H}, \tag{3.22}$$

де $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x})$—довільна гладка в $\tilde{\Omega}$ функція, а $\tilde{H}$— матриця (3.21).

Нарешті, якщо AG є деякою підалгеброю конформної алгебри $c(1,3)$, то тут матиці Γ_a є лінійними комбінаціями матриць E та $S_{\mu\nu}$, а тому і у цьому випадкові матрицю H природно шукати у вигляді (3.22).

3.2. Підалгебри рангу 3 конформної алгебри $c(1,3)$

У цьому підрозділі ми зупиняємося на описові підалгебр алгебр Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ та $C(1,3)$, які в подальшому будемо використовувати для побудови анзаців.

Як відзначалося вище, метою третього розділу роботи є побудова конформно–інваріантних анзаців, яким відповідає симетрійна редукція досліджуваних систем з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Згідно з другим кроком алгоритму симетрійної редукції, ми повинні здійснити побудову оптимальної системи підалгебр рангу $s = 3$ конформної алгебри $c(1, 3)$ (оскільки розмірність простору незалежних змінних $R^{1,3}$ $p = 4$, то відповідні саме таким підалгебрам редуковані системи міститимуть $p - s = 1$ незалежну змінну).

Класифікація підалгебр алгебр $p(1, 3), \tilde{p}(1, 3), c(1, 3)$, проведена з точністю до спряженості відносно різних груп автоморфізмів, на сьогоднішній день відома (див., наприклад, [72]). Оскільки подальшому дослідженню підлягають конформно–інваріантні системи диференціальних рівнянь, то тут ми використовуємо відому класифікацію підалгебр вказаних алгебр, проведену з точністю до спряженості відносно конформної групи.

Для того, щоб отримати перелік шуканих підалгебр, ми повинні для кожної із підалгебр алгебр $p(1, 3), \tilde{p}(1, 3), c(1, 3)$, наведених в [72], перевірити виконання умови (3.3), де $s = 3$. Очевидним є той факт, що розгляду підлягають лише ті із підалгебр, розмірність яких не менша за 3.

Нехай $c(1, 3)$—конформна алгебра з базисними операторами (3.11), а $c^{(1)}(1, 3)$—конформна алгебра, яка породжується операторами

$$\begin{aligned} &P_\mu^{(1)} = \partial_{x_\mu}, \quad J_{\mu\nu}^1 = x^\mu \partial_{x_\nu} - x^\nu \partial_{x_\mu}, \\ &D^{(1)} = x_\mu \partial_{x_\mu}, \quad K^{(1)} = 2x^\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_\mu}, \ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Відзначимо, що дія конформної групи $C(1, 3)$ з інфінітезимальними операторами (3.23) обмежується лише простором незалежних змінних $R^{1,3}$. Тому будемо говорити, що дія алгебри $c^{(1)}(1, 3)$ у просторі залежних змінних R^q є нульовою.

Лема 3.2.1 *Нехай L—підалгебра алгебри $c(1, 3)$, s—ранг L, $s^{(1)}$ранг проекції L на $c^{(1)}(1, 3)$. Якщо $s = s^{(1)}$, то $dimL = s$.*

Доведення. Доведення проводимо від супротивного. При цьому достатньо розглянути один випадок, коли розмірність L більша ніж s.

Отже, припустимо, що $dim\, L > s$. Нехай $X_1, \ldots, X_m$ складають базис L і нехай ранг функціональної матриці, що відповідає проекціям операторів $X_1, \ldots, X_m$ на $c^{(1)}(1,3)$ дорівнює s. Також вважаємо, що лінійний простір, натягнутий на $X_1, \ldots, X_m$ містить $L \cap \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$.

Позначимо через $S_0^{(1)} = (x_0^0, \mathbf{x}^0) \in \tilde{\Omega}$ точку, в якій ранг функціональної матриці, що відповідає проекціям операторів $X_1, \ldots, X_m$ на $c^{(1)}(1,3)$ дорівнює s. Нехай $X_1^0, \ldots, X_s^0$, $X_{s+1}^0, \ldots X_m^0$—значенння векторних полів у точці $S_0^{(1)}$. Існують такі константи $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, що дія векторного поля $\alpha_1 X_1^0 + \ldots + \alpha_s X_s^0 + X_{s+1}^0$ на простір $U = R^q$ є ненульовою. Справді, якби дія цього векторного поля на простір R^q була нульовою, то векторне поле $\alpha_1 X_1^0 + \ldots + \alpha_s X_s^0 + X_{s+1}^0$ належало б до простору $\langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$, що суперечить зробленим припущенням ($dim\, L > s,\ rank\ L = s$). Звідси випливає, що функціональна матриця, складена для векторних полів $X^1, \ldots, X_s, \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_s X_s + X_{s+1}$, має в деякій точці $(x_0^0, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ (перші чотири координати такі ж, як і у точки $S_0^{(1)}$) ненульовий мінор порядку $s+1$, що теж суперечить зробленим припущенням. Отже, $dim\ L = s$. Лему доведено.

Із доведеної леми випливає, що в досліджуваному випадкові умову (3.3), де $s = 3$, потрібно перевірити лише для тривимірних підалгебр алгебр $p(1,3), \tilde{p}(1,3), c(1,3)$ із переліку [72]. При цьому можна обмежитися перевіркою виконання першої із умов (3.3).

Зупинимося на підалгебрах алгебри $p(1,3)$, базисні оператори якої мають вигляд (3.11). Перша із умов (3.3) не виконується лише для таких тривимірних підалгебр алгебри $p(1,3)$ із переліку, отриманого в [72]: $\langle G_1, P_0{+}P_3, P_1 \rangle, \langle J_{12}, P_1, P_2 \rangle, \langle J_{03}, P_0, P_3 \rangle, \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,\ \ \langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle$. Цим підалгебрам відповідають так звані частково–інваріантні розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад, [51]), які тут не розглядатимуться. Вилучивши ці підалгебри із загального переліку, ми прийшли до результату, який сформульовано у вигляді твердження.

Твердження 3.2.1 *Підалгебри рангу* 3 *алгебри* $p(1,3)$, *базисні оператори якої мають вигляд (3.11), з точністю до спряженості, що визначається групою внутрішніх автоморфізмів алгебри* $c(1,3)$ *вичерпуються такими підалгебрами:*

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle P_0, P_1, P_2\rangle; \quad L_2 = \langle P_1, P_2, P_3\rangle;\\
L_3 &= \langle M, P_1, P_2\rangle; \quad L_4 = \langle J_{03} + \alpha J_{12}, P_1, P_2\rangle;\\
L_5 &= \langle J_{03}, M, P_1\rangle; \quad L_6 = \langle J_{03} + P_1, P_0, P_3\rangle;\\
L_7 &= \langle J_{03} + P_1, M, P_2\rangle; \quad L_8 = \langle J_{12} + \alpha J_{03}, P_0, P_3\rangle;\\
L_9 &= \langle J_{12} + P_0, P_1, P_2\rangle; \quad L_{10}^j = \langle J_{12} + (-1)^j P_3, P_1, P_2\rangle;\\
L_{11}^j &= \langle J_{12} + (-1)^j 2T, P_1, P_2\rangle; \quad L_{12} = \langle G_1, M, P_2 + \alpha P_1\rangle;\\
L_{13}^j &= \langle G_1 + (-1)^j P_2, M, P_1\rangle; \quad L_{14} = \langle G_1 + 2T, M, P_2\rangle;\\
L_{15} &= \langle G_1 + 2T, M, P_1 + \alpha P_2\rangle; \quad L_{16} = \langle J_{12}, J_{03}, M\rangle;\\
L_{17}^j &= \langle G_1^j, G_2^j, M\rangle; \quad L_{18} = \langle J_{03}, G_1, P_2\rangle;\\
L_{19} &= \langle G_1, J_{03}, M\rangle; \quad L_{20} = \langle G_1, J_{03} + P_2, M\rangle;\\
L_{21} &= \langle G_1, J_{03} + P_1 + \alpha P_2, M\rangle; \quad L_{22} = \langle G_1, G_2, J_{03} + \alpha J_{12}\rangle;
\end{aligned}$$

де $\alpha \in R,\ j = 1,2;\ M = P_0 + P_3,\ T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3),\ G_a = J_{0a} - J_{a3}\ (a = 1,2);$ *в алгебрі* L_{17}^j $G_1^j = G_1 + (-1)^j P_2,\ G_2^j = G_2 - (-1)^j P_1 + \alpha P_2.$

Аналогічно ми провели і розгляд тривимірних підалгебр алгебр $\tilde{p}(1,3)$ та $c(1,3)$. При цьому, із переліку підалгебр алгебри $\tilde{p}(1,3)$ ми попередньо вилучили ті із підалгебр, які спряжені підалгебрам алгебри $p(1,3)$, а із переліку підалгебр конформної алгебри — ті із підалгебр, які спряжені підалгебрам алгебри $\tilde{p}(1,3)$. Отримані результати подано в наступних двох твердженнях.

Твердження 3.2.2 *Підалгебри рангу* 3 *алгебри* $\tilde{p}(1,3)$, *базисні оператори якої мають вигляд (3.11), з точністю до спряженості, що визначається групою внутрішніх автоморфізмів алгебри* $c(1,3)$, *вичерпуються підалгебрами рангу* 3 *алгебри* $p(1,3)$, *що наведені в твердженні*

3.2.1, та такими підалгебрами:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \langle D, P_0, P_3\rangle; \quad F_2 = \langle J_{12} + \alpha D, P_0, P_3\rangle;\\
F_3 &= \langle J_{12}, D, P_0\rangle; \quad F_4 = \langle J_{12}, D, P_3\rangle;\\
F_5 &= \langle J_{03} + \alpha D, P_0, P_3\rangle; \quad F_6 = \langle J_{03} + \alpha D, P_1, P_2\rangle;\\
F_7 &= \langle J_{03} + \alpha D, M, P_1\rangle \ (a \neq 0);\\
F_8 &= \langle J_{03} + D + (-1)^j 2T, P_1, P_2\rangle;\\
F_9 &= \langle J_{03} + D + (-1)^j 2T, M, P_1\rangle; \quad F_{10} = \langle J_{03}, D, P_1\rangle;\\
F_{11} &= \langle J_{03}, D, M\rangle; \quad F_{12} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_0, P_3\rangle \ (\alpha \neq 0);\\
F_{13} &= \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_1, P_2\rangle \ (\alpha \neq 0);\\
F_{14} &= \langle J_{12} + \alpha(J_{03} + D + 2T), P_1, P_2\rangle \ (\alpha \neq 0);\\
F_{15} &= \langle J_{12} + \alpha J_{03}, D, M\rangle \ (\alpha \neq 0);\\
F_{16} &= \langle J_{03} + \alpha D, J_{12} + \beta D, M\rangle \ (0 \leq |\alpha| \leq 1,\ \beta \geq 0, |\alpha| + |\beta| \neq 0);\\
F_{17} &= \langle J_{03} + D + (-1)^j 2T, J_{12} + 2\alpha T, M\rangle \ (\alpha \in R);\\
F_{18} &= \langle J_{03} + D, J_{12} + (-1)^j 2T, M\rangle; \quad F_{19} = \langle J_{03}, J_{12}, D\rangle;\\
F_{20} &= \langle G_1, J_{03} + \alpha D, P_2\rangle \ (0 < |\alpha| \leq 1);\\
F_{21} &= \langle J_{03} + D, G_1 + (-1)^j P_2, M\rangle;\\
F_{22} &= \langle J_{03} - D + (-1)^j M, G_1, P_2\rangle;\\
F_{23} &= \langle J_{03} + 2D, G_1 + (-1)^j 2T, M\rangle;\\
F_{24} &= \langle J_{03} + 2D, G_1 + (-1)^j 2T, P_2\rangle.
\end{aligned}
$$

Тут $M = P_0 + P_3,\ G_1 = J_{01} - J_{13},\ T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$; *де це спеціально не оговорено,* $\alpha, \beta > 0;\ j = 1, 2.$

Твердження 3.2.3 *Підалгебри рангу* 3 *алгебри* $c(1,3)$*, базисні оператори якої мають вигляд (3.11), з точністю до спряженості, що визначається групою внутрішніх автоморфізмів алгебри* $c(1,3)$*, вичерпуються підалгебрами рангу* 3 *алгебр* $p(1,3), \tilde{p}(1,3)$*, що наведені в твердженнях 3.2.1 та 3.2.2, а також такими алгебрами:*

$$
C_1 = \langle S + T + J_{12}, G_1 + P_2, M\rangle;
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \langle S+T+J_{12}+G_1+P_2, G_2-P_1, M\rangle;\\
C_3 &= \langle J_{12}, S+T, M\rangle; \quad C_4=\langle S+T, Z, M\rangle;\\
C_5 &= \langle S+T+\alpha J_{12}, Z, M\rangle \ (\alpha\neq 0);\\
C_6 &= \langle S+T+J_{12}+\alpha Z, G_1+P_2, M\rangle \ (\alpha\neq 0);\\
C_7 &= \langle S+T+J_{12}, Z, G_1+P_2\rangle;\\
C_8 &= \langle S+T+\beta Z, J_{12}+\alpha Z, M\rangle \quad (\alpha,\beta\in R, |\alpha|+|\beta|\neq 0);\\
C_9 &= \langle J_{12}, S+T, Z\rangle; \quad C_{10}=\langle D-J_{03}, S, T\rangle;\\
C_{11} &= \langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+K_0-P_0,\\
&\quad -D+J_{02}-\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-2(K_2-P_2)\rangle;\\
C_{12} &= \langle P_0+K_0\rangle\oplus\langle J_{12}, K_3-P_3\rangle;\\
C_{13} &= \langle 2J_{12}+K_3-P_3, 2J_{13}-K_2+P_2, 2J_{23}+K_1-P_1\rangle;\\
C_{14} &= \langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+K_0-P_0, 2J_{12}+K_3-P_3\rangle;
\end{aligned}
$$

де $M=P_0+P_3,\ G_{0a}=J_{0a}-J_{a3}\ (a=1,2), Z=J_{03}+D, S=\frac{1}{2}(K_0+K_3)$, $T=\frac{1}{2}(P_0-P_3)$.

Зауваження. Під час класифікації підалгебр розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,3)$, в [72], окрім перетворень із групи внутрішніх автоморфізмів алгебри $c(1,3)$, використовувалися дискретні симетрії Φ_1, Φ_2, Φ_3, дія яких на базисні оператори алгебри $\tilde{p}(1,3)$ задана в таблиці 3.1.

Тому, отриманий в [72] перелік підалгебр алгебр $p(1,3), \tilde{p}(1,3)$ ми доповнили підалгебрами, які отримуються із підалгебр вказаного переліку в результаті дії на них перетворень Φ_1, Φ_2, Φ_3.

3.3. Конформно–інваріантні анзаци для довільного векторного поля

У цьому підрозділі, використовуючи отриманий в твердженнях 3.2.1–3.2.3 перелік підалгебр рангу 3 алгебри $c(1,3)$, базисні оператори якої мають вигляд (3.11), ми здійснюємо побудову явного вигляду конформно–

інваріантних анзаців, яким відповідає симетрійна редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Як було підкреслено в підрозділі 3.1, ці анзаци можна будувати в лінійній формі (3.18). При цьому, природним є пошук матриць $H = \Lambda^{-1}$ у вигляді (3.22). Згідно з лемою 3.1.1, матриця H повинна задовольняти рівняння (3.19). Очевидно, що пошук цієї матриці (для кожної із підалгебр рангу 3 конформної алгебри) як розв'язку рівняння (3.19), вимагає значного об'єму обчислювальної роботи. Тому спочатку проведемо деякі допоміжні міркування.

Таблиця 3.1.

Оператори	Дія перетворень		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
P_0	$-P_0$	P_0	$-P_0$
P_1	$-P_1$	$-P_1$	P_1
$P_a \quad (a = 2, 3)$	$-P_a$	P_a	$-P_a$
J_{03}	J_{03}	J_{03}	J_{03}
J_{12}	J_{12}	$-J_{12}$	$-J_{12}$
G_1	G_1	$-G_1$	$-G_1$
G_2	G_2	G_2	G_2
M	$-M$	M	$-M$
T	$-T$	T	$-T$
D	D	D	D

Нехай $H_a = S_{0a} - S_{a3}, \tilde{H}_a = S_{0a} + S_{a3}$ $(a = 1, 2)$. Надалі в цьому розділі ми використовуємо базис алгебри $o(1, 3)$, який складають матриці $S_{03}, S_{12}, H_a, \tilde{H}_a$ $(a = 1, 2)$. Врахувавши (3.12), неважко отримати, що для цих матриць виконуються такі комутаційні співвідношення:

$$[S_{03}, S_{12}] = [H_1, H_2] = [\tilde{H}_1, \tilde{H}_2] = 0,$$

$$\begin{aligned}
&[H_a, S_{03}] = H_a, [\tilde{H}_a, S_{03}] = -\tilde{H}_a \ (a = 1, 2),\\
&[H_1, S_{12}] = -H_2, [H_2, S_{12}] = H_1,\\
&[\tilde{H}_1, S_{12}] = -\tilde{H}_2,\ [\tilde{H}_2, S_{12}] = \tilde{H}_1,\\
&[H_1, \tilde{H}_1] = [H_2, \tilde{H}_2] = -2S_{03},\\
&[\tilde{H}_2, H_1] = [H_2, \tilde{H}_1] = 2S_{12}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Також мають місце співвідношення

$$[E, S_{12}] = [E, S_{03}] = [E, H_a] = [E, \tilde{H}_a] = 0, \tag{3.25}$$

де $a = 1, 2$.

Врахувавши сказане вище, будемо шукати матрицю $H = H(x_0, \mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(x_0, \mathbf{x})$ у вигляді

$$\begin{aligned}
H \ = \ &\exp\{(-\ln\theta)E\} \exp(\theta_0 S_{03}) \exp(-\theta_3 S_{12}) \exp(-2\theta_1 H_1) \times\\
&\times \exp(-2\theta_2 H_2) \exp(-2\theta_4 \tilde{H}_1) \exp(-2\theta_5 \tilde{H}_2),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

де $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x}),\ \theta_0 = \theta_0(x_0, \mathbf{x}), \theta_m = \theta_m(x_0, \mathbf{x})\ (m = 1, 2, \ldots, 5)$—довільні гладкі функції, визначені в деякій відкритій області $\tilde{\Omega} \subset R^{1,3}$ чотиривимірного простору Мінковського незалежних змінних $x_0, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Нехай, далі, $L = \langle X_a | a = 1, 2, 3\rangle$—деяка підалгебра рангу 3 алгебри $c(1, 3)$, базис якої, внаслідок (3.11), складають оператори, які можна подати у такому загальному вигляді:

$$X_a = \xi_a^\mu(x_0, \mathbf{x})\partial_{x_\mu} + (\tilde{\Gamma}_a \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{u}}),\ a = 1, 2, 3. \tag{3.27}$$

В операторах (3.27) матриці $\tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma}_a(x_0, \mathbf{x})$ визначаються через відомі матриці Γ_a в базисних операторах конформної алгебри (їх явний вигляд наведено в підрозділі 3.1), а тому можемо покласти, що

$$\tilde{\Gamma}_a = f^a E + f_0^a S_{03} + f_1^a H_1 + f_2^a H_2 + f_3^a S_{12} + f_4^a \tilde{H}_1 + f_5^a \tilde{H}_2 \ (a = 1, 2, 3), \tag{3.28}$$

де $f^a = f^a(x_0, \mathbf{x}),\ f_0^a = f_0^a(x_0, \mathbf{x}), f_m^a = f_m^a(x_0, \mathbf{x})\ (m = 1, \ldots, 5)$—деякі відомі гладкі функції. Зокрема, якщо X_a є лінійною комбінацією генераторів трансляцій, то $\Gamma_a = 0$, а тому в (3.28) $f^a = f_0^a = f_m^a = 0$.

Згідно з результатами леми 3.1.1, для побудови відповідного підалгебрі L анзаца (3.18) ми повинні знайти розв'язки систем (3.16) та (3.19), які у нашому випадкові набувають вигляду

$$\xi_a^\mu \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = 0, \tag{3.29}$$

$$\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + H \cdot \tilde{\Gamma}_a = 0, \tag{3.30}$$

де $\xi_a^\mu = \xi_a^\mu(x_0, \mathbf{x}), \tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma}(x_0, \mathbf{x})$ визначаються виглядом базисних операторів підалгебри L (зокрема, $\tilde{\Gamma}_a$ мають вигляд (3.28)), H—матриця (3.26), $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x}),\ a = 1, 2, 3;\ \mu = 0, 1, 2, 3$.

Зупинимося на розглядові системи (3.30).

Лема 3.3.1 *Нехай H має вигляд (3.26). Тоді*

$$\begin{aligned}
\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} &= H\{-\theta^{-1}\xi_a^\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} E + \xi_a^\mu \frac{\partial \theta_0}{\partial x_\mu}[(1 + 8\theta_1\theta_4 + 8\theta_2\theta_5)S_{03} + \\
&+8(\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4)S_{12} + 2\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 - 2(\theta_4 + 4\theta_1\theta_4^2 + 8\theta_2\theta_4\theta_5 - \\
&-4\theta_1\theta_5^2)\tilde{H}_1 - 2(\theta_5 + 4\theta_2\theta_5^2 + 8\theta_1\theta_4\theta_5 - 4\theta_2\theta_4^2)\tilde{H}_2] - \\
&-\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_3}{\partial x_\mu}[8(\theta_2\theta_4 - \theta_1\theta_5)S_{03} + (1 + 8\theta_1\theta_4 + 8\theta_2\theta_5)S_{12} + \\
&+2\theta_2 H_1 - 2\theta_1 H_2 + 2(\theta_5 + 4\theta_2\theta_5^2 - 4\theta_2\theta_4^2 + 8\theta_1\theta_4\theta_5)\tilde{H}_1 - \\
&-2(\theta_4 + 4\theta_1\theta_4^2 - 4\theta_1\theta_5^2 + 8\theta_2\theta_4\theta_5)\tilde{H}_2] - \\
&-2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_1}{\partial x_\mu}[4\theta_4 S_{03} + 4\theta_5 S_{12} + H_1 + 4(\theta_5^2 - \theta_4^2)\tilde{H}_1 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_2] - \\
&-2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_2}{\partial x_\mu}[4\theta_5 S_{03} - 4\theta_4 S_{12} + H_2 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_1 + 4(\theta_4^2 - \theta_5^2)\tilde{H}_2] - \\
&-2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_4}{\partial x_\mu}\tilde{H}_1 - 2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_5}{\partial x_\mu}\tilde{H}_2]\},
\end{aligned}$$

де $a = 1, 2, 3,\ \mu = 0, 1, 2, 3.$

Доведення. Подіявши лінійним оператором $\xi_a^\mu \partial_{x_\mu}$ на матрицю H (3.26), приходимо до рівності, права частина якої є сумою семи доданків:

$$\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} = \sum_{i=1}^{7} D_i. \tag{3.31}$$

Оскільки процедури винесення матриці H вліво для усіх доданків із правої частини рівності (3.31) є аналогічними (до того ж D_i мають досить громіздкий вигляд), зупинимося тут на розгляді цієї процедури лише для одного із семи доданків:

$$D_4 = \exp\{(-\ln\theta)E\} \prod_i \Lambda_i (-2\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_1}{\partial x_\mu} H_1) \prod_j \Lambda_j, \tag{3.32}$$

де $i = 1, 2, 3;\ j = 4, 5, 6$.

В (3.32) ми використовуємо позначення

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \exp(\theta_0 S_{03}), \quad \Lambda_2 = \exp(-\theta_3 S_{12}), \\ \Lambda_3 &= \exp(-2\theta_1 H_1), \quad \Lambda_4 = \exp(-2\theta_3 H_2), \\ \Lambda_5 &= \exp(-2\theta_4 \tilde{H}_1), \quad \Lambda_6 = \exp(-2\theta_5 \tilde{H}_2). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Винісши матрицю H вліво в правій частині рівності (3.32), приходимо до рівності

$$D_4 = H(-2\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_1}{\partial x_\mu})\Lambda_6^{-1}\Lambda_5^{-1}\Lambda_4^{-1} H_1 \Lambda_4 \Lambda_5 \Lambda_6, \tag{3.34}$$

де $\Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$ —матриці (3.33).

Для спрощення правої частини рівності (3.34) використовуємо відому формулу Кемпбелла–Хаусдорфа (див., наприклад, [82, 83]):

$$\begin{aligned} &\exp(\tau A) B \exp(-\tau A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \{A, B\}^n, \\ &\{A, B\}^n = [A, \{A, B\}^{n-1}], \quad \{A, B\}^0 = B, \end{aligned}$$

для довільних матриць A, B.

Врахувавши комутаційні співвідношення (3.24), (3.25), бачимо, що

$$\Lambda_4^{-1} H_1 \Lambda_1 = \exp(2\theta_2 H_2) H \exp(-2\theta_2 H_2) = H_1,$$

а тому

$$\begin{aligned} &\Lambda_5^{-1}\Lambda_4^{-1} H \Lambda_4 \Lambda_5 = \Lambda_5^{-1} H_1 \Lambda_5 = \exp(2\theta_4 \tilde{H}_1) H_1 \exp(-2\theta_4 \tilde{H}_1) = \\ &= H_1 + 4\theta_4 S_{03} - 4\theta_4^2 \tilde{H}_1, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\Lambda_6^{-1}\Lambda_5^{-1}\Lambda_4^{-1}H_1\Lambda_4\Lambda_5\Lambda_6 = \exp(2\theta_5\tilde{H}_2)(H_1 + 4\theta_4 S_{03} - 4\theta_2^2\tilde{H}_1) \times$$
$$\times \exp(-2\theta_5\tilde{H}_2) = H_1 + 4\theta_4 S_{03} + 4\theta_5 S_{12} + 4(\theta_5^2 - \theta_4^2)\tilde{H}_1 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_2.$$

Отже,

$$D_4 = H(-2\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_2}{\partial x_\mu})[H_1 + 4\theta_4 S_{03} + 4\theta_5 S_{12} + 4(\theta_5^2 - \theta_4^2)\tilde{H}_1 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_2].$$

Провівши такі ж міркування для решти доданків із правої частини рівності (3.31), переконуємося у справедливості леми.

Лема доведена.

Теорема 3.3.1 *Система (3.30) зводиться до такої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для визначення значень функцій* $\theta, \theta_0, \theta_m$ $(m = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$\begin{aligned}
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu} = f^a\theta,\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_0}{\partial x_\mu} = 4(\theta_4 f_1^a + \theta_5 f_2^a) - f_0^a,\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_1}{\partial x_\mu} = 4(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_5) f_1^a +\\
&+4(\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4) f_2^a - \theta_1 f_0^a - \theta_2 f_3^a + \frac{1}{2} f_1^a,\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_2}{\partial x_\mu} = 4(\theta_2\theta_4 - \theta_1\theta_5) f_1^a +\\
&+4(\theta_2\theta_5 + \theta_1\theta_4) f_2^a - \theta_2 f_0^a + \theta_1 f_3^a + \frac{1}{2} f_2^a,\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_3}{\partial x_\mu} = 4(\theta_4 f_2^a - \theta_5 f_1^a) + f_3^a, \qquad\qquad (3.35)\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_4}{\partial x_\mu} = \theta_4 f_0^a - 2(\theta_4^2 - \theta_5^2) f_1^a - 4\theta_4\theta_5 f_2^a - \theta_5 f_3^a + \frac{1}{2} f_4^a,\\
&\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_5}{\partial x_\mu} = \theta_5 f_0^a - 4\theta_4\theta_5 f_1^a + 2(\theta_4^2 - \theta_5^2) f_2^a + \theta_4 f_3^a + \frac{1}{2} f_5^a.
\end{aligned}$$

В (3.35) $\mu = 0, 1, 2, 3;$ $a = 1, 2, 3.$ *Вигляд лінійних операторів* $\xi_a^\mu \partial_{x_\mu}$ *та функцій* $f^a, f_0^a,$ f_m^a $(m = 1, 2, \ldots, 5)$ *визначається базисними операторами підалгебри* L *рангу* 3 *алгебри* $c(1, 3)$.

Доведення. Підставивши знайдене в лемі 3.3.1 значення $\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu}$ в ліву частину рівності (3.30), бачимо, що оскільки $H \neq 0$, то вона є рівносильною системі рівностей, ліві частини яких є лінійними комбінаціями матриць $E, S_{01}, S_{12}, H_a, \tilde{H}_a$ $(a = 1, 2)$. Тому рівність нулю лівої частини (3.30) еквівалентна рівності нулю коефіцієнтів біля цих матриць. Врахувавши вигляд (3.28) матриць $\tilde{\Gamma}_a$, в результаті досить громіздких перетворень приходимо до системи (3.35).

Теорема доведена.

Згідно з проведеними вище міркуваннями, побудова конформно–інваріантних анзаців для довільного векторного поля, яким відповідає симетрійна редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь, зводиться до знаходження фундаментального розв'язку системи (3.29) та частинних розв'язків системи (3.35) для кожної із підалгебр рангу 3 алгебри $c(1, 3)$, які наведені в твердженнях 3.2.1–3.2.3. Оскільки процедура інтегрування вказаних систем є хоча й громіздкою, але стандартною, ми відразу наводимо результати обчислень в трьох наступних твердженнях.

Твердження 3.3.1 *Для кожної із підалгебр* L_j $(j = 1, 2, \ldots, 22)$, *які наведені в твердженні 3.2.1, існує анзац (3.18), де*

$$\Lambda^{-1} = H = \exp(\theta_0 S_{03}) \exp(-\theta_3 S_{12}) \exp(-2\theta_1 H_1) \exp(-2\theta_2 H_2).$$

При цьому, функції $\theta_\mu = \theta_\mu(x_0, \mathbf{x})$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$ *можна подати у такому вигляді:*

$$\begin{aligned}
L_1 &: \ \theta_\mu = 0 \ (\mu = 0, 1, 2, 3), \ \omega = x_3; \\
L_2 &: \ \theta_\mu = 0 \ (\mu = 0, 1, 2, 3), \ \omega = x_0; \\
L_3 &: \ \theta_\mu = 0 \ (\mu = 0, 1, 2, 3), \ \omega = \xi; \\
L_4 &: \ \theta_0 = -\ln|\xi|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \alpha \ln|\xi|, \quad \omega = \xi \cdot \eta; \\
L_5 &: \ \theta_0 = -\ln|\xi|, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_2;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_6 &: \theta_0 = x_1, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_2;\\
L_7 &: \theta_0 = x_1, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_1 + \ln|\xi|;\\
L_8 &: \theta_0 = \alpha \arctan x_1 x_2^{-1}, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,\\
&\quad\ \theta_3 = -\arctan x_1 x_2^{-1}, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2;\\
L_9 &: \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -x_0, \quad \omega = x_3;\\
L_{10} &: \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -(-1)^i x_3, \quad \omega = x_0;\\
L_{11} &: \theta_0 = \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{(-1)^i}{2}\xi, \quad \omega = \eta;\\
L_{12} &: \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}(x_1 - \alpha x_2)\xi^{-1}, \quad \omega = \xi;\\
L_{13} &: \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{(-1)^i}{2}x_2, \quad \omega = \xi;\\
L_{14} &: \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{4}\xi, \quad \omega = \xi^2 - 4x_1;\\
L_{15} &: \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{4}\xi, \quad \omega = \alpha\xi^2 - 4(\alpha x_1 - x_2);\\
L_{16} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -\arctan x_1 x_2^{-1}, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2;\\
L_{17} &: \theta_0 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}[(-1)^i x_2 + (\alpha+\xi)x_1][1 + (\alpha+\xi)\xi]^{-1},\\
&\quad\ \theta_2 = \frac{1}{2}[(-1)^i x_1 - x_2\xi][1 + (\alpha+\xi)\xi]^{-1}, \quad \omega = \xi;\\
L_{18} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1}, \quad \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = \xi\eta - x_1^2;\\
L_{19} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1}, \quad \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_2;\\
L_{20} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1}, \quad \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = \ln|\xi| + x_2;\\
L_{21} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = -\frac{1}{2}(x_1 + \ln|\xi|)\xi^{-1},\\
&\quad\ \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = \alpha\ln|\xi| + x_2;\\
L_{22} &: \theta_0 = -\ln|\xi|, \ \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi^{-1}, \theta_3 = \alpha\ln|\xi|,\\
&\quad\ \omega = x_\mu x^\mu \ (\mu = 0,1,2,3).
\end{aligned}
$$

Тут $i = 1, 2;\ \alpha \in R; \xi = x_0 - x_3, \eta = x_0 + x_3.$

Твердження 3.3.2 *Для кожної із підалгебр F_j $(j = 1, 2, \ldots, 24)$, що наведені в твердженні 3.2.2, існує анзац (3.18), де*

$$\Lambda^{-1} = H = \exp\{(-\ln\theta)E\}\exp(\theta_0 S_{03})\exp(-\theta_3 S_{12})\exp(-2\theta_1 H_1), \quad \theta_1\theta_3 = 0.$$

При цьому, функції $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x})$, $\theta_0 = \theta_0(x_0, \mathbf{x})$, $\theta_1 = \theta_1(x_1, \mathbf{x})$, $\theta_3 = \theta_3(x_3, \mathbf{x})$, $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$ *можна подати у такому вигляді:*

$$
\begin{aligned}
F_1 \; &: \; \theta = |x_1|^{-k}, \quad \theta_0 = \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_2 x_1^{-1};\\
F_2 \; &: \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \theta_1 = 0, \quad \theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1},\\
&\quad\; \omega = \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha \arctan x_2 x_1^{-1}, \; \alpha > 0;\\
F_3 \; &: \; \theta = |x_3|^{-k}, \theta_0 = \theta_1 = 0, \theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \omega = (x_1^2 + x_2^2) x_3^{-2};\\
F_4 \; &: \; \theta = |x_0|^{-k}, \theta_0 = \theta_1 = 0, \theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \omega = (x_1^2 + x_2^2) x_0^{-2};\\
F_5 \; &: \; \theta = |x_1|^{-k}, \quad \theta_0 = \alpha^{-1} \ln|x_1|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0,\\
&\quad\; \omega = x_2 x_1^{-1}, \quad \alpha > 0;\\
F_6 \; &: \; \theta = |\xi\eta|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|\eta\xi^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0,\\
&\quad\; \omega = (1-\alpha)\ln|\eta| + (1+\alpha)\ln|\xi|, \quad \alpha > 0;\\
F_7 \; &: \; \theta = |x_2|^{-k}, \theta_0 = \alpha^{-1}\ln|x_2|, \theta_1 = \theta_3 = 0, \omega = |\xi|^{\alpha}|x_2|^{1-\alpha}, \alpha > 0;\\
F_8 \; &: \; \theta = |\eta|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|\eta|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0,\\
&\quad\; \omega = \xi - (-1)^j \ln|\eta|, \quad j = 1, 2;\\
F_9 \; &: \; \theta = |x_2|^{-k}, \quad \theta_0 = \ln|x_2|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0,\\
&\quad\; \omega = \xi - 2(-1)^j \ln|x_2|, \quad j = 1, 2;\\
F_{10} \; &: \; \theta = |x_2|^{-k}, \quad \theta_0 = \ln|\eta x_2^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \omega = \xi\eta x_2^{-2};\\
F_{11} \; &: \; \theta = |x_2|^{-1}, \quad \theta_0 = -\ln|\xi x_2^{-1}|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \omega = x_2 x_1^{-1};\\
F_{12} \; &: \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\alpha \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \theta_1 = 0,\\
&\quad\; \theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2\beta \arctan x_2 x_1^{-1},\\
&\quad\; \alpha \neq 0, \quad \beta > 0;\\
F_{13} \; &: \; \theta = |\xi\eta|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln|\eta\xi^{-1}|, \quad \theta_1 = 0,\\
&\quad\; \theta_3 = -\frac{1}{2\alpha}\ln|\eta\xi^{-1}|, \quad \omega = (\alpha-\beta)\ln|\eta| + (\alpha+\beta)\ln|\xi|,
\end{aligned}
$$

$$\alpha \neq 0, \quad \beta > 0;$$

$$F_{14} \; : \; \theta = |\eta|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|\eta|,$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_3 = -\frac{1}{2}\ln|\eta|, \quad \omega = \xi - \ln|\eta|;$$

$$F_{15} \; : \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\alpha \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = \ln(x_1^2 + x_2^2)\xi^{-2} + 2\alpha \arctan x_2 x_1^{-1},$$

$$\alpha \neq 0;$$

$$F_{16} \; : \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)\xi^{-2}, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1-\alpha}\xi^{2\alpha} + 2\beta \arctan x_2 x_1^{-1},$$

$$0 \leq |\alpha| \leq 1, \beta \geq 0, |\alpha| + |\beta| \neq 0;$$

$$F_{17} \; : \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \; \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2), \; \theta_1 = 0,$$

$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \; \omega = \xi - (-1)^j \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha \arctan x_2 x_1^{-1},$$

$$\alpha \in R, \quad j = 1, 2;$$

$$F_{18} \; : \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2), \quad \theta_1 = 0,$$

$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = \xi + 2(-1)^j \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad j = 1, 2;$$

$$F_{19} \; : \; \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln|\xi\eta^{-1}|, \quad \theta_1 = 0,$$

$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)(\xi\eta)^{-1};$$

$$F_{20} \; : \; \theta = |\xi\eta - x_1^2|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2\alpha}\ln|\xi\eta - x_1^2|, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1},$$

$$\theta_3 = 0, \quad \omega = |\xi|^{2\alpha}|\xi\eta - x_1^2|^{1-\alpha}, \; 0 \leq |\alpha| \leq 1;$$

$$F_{21} \; : \; \theta = |x_1 - (-1)^j \xi x_2|^{-k}, \quad \theta_0 = \ln|x_1 - (-1)^j \xi x_2|,$$

$$\theta_1 = -\frac{(-1)^j}{2}x_2, \quad \theta_3 = 0, \quad \omega = \xi, \quad j = 1, 2;$$

$$F_{22} \; : \; \theta = |\xi|^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln|\xi|, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi^{-1},$$

$$\theta_3 = 0, \quad \omega = \eta - x_1^2\xi^{-1} + (-1)^j \ln|\xi|, \quad j = 1, 2;$$

$$F_{23} \; : \; \theta = |x_2|^{-k}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|x_2|, \quad \theta_1 = -\frac{(-1)^j}{4}\xi^{-1},$$

$$\theta_3 = 0, \quad \omega = (\xi^2 - 4(-1)^j x_1)x_2^{-1}, \quad j = 1, 2;$$

$$F_{24} \ : \ \theta = |\xi^2 - 4(-1)^j x_1|^{-k}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|\xi^2 - 4(-1)^j|x_1|,$$
$$\theta_1 = -\frac{(-1)^j}{4}\xi, \quad \theta_3 = 0,$$
$$\omega = (\eta - (-1)^j x_1 \xi + \frac{1}{6}\xi^3)^2(\xi^2 - 4(-1)^j x_1)^{-3}, j = 1, 2.$$

Тут k — деяка стала величина (степінь конформності алгебри $c(1,3)$), $\xi = x_0 - x_3,\ \eta = x_0 + x_3$.

Твердження 3.3.3 *Для кожної із підалгебр C_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$, що наведені у твердженні 3.2.3, існує анзац (3.18), де*

$$\Lambda^{-1} = H = \exp\{(-\ln\theta)E\}\exp(\theta_0 S_{03})\exp(-\theta_3 S_{12})\exp(-2\theta_1 H_1)\exp(-2\theta_2 H_2).$$

При цьому, функції $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x})$, $\theta_\mu = \theta_\mu(x_0, \mathbf{x})$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$ можна подати у такому вигляді:

$$C_1 \ : \ \theta = (1 + \xi^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln(1 + \xi^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_1\xi)(1 + \xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - \xi x_2)(1 + \xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = -\arctan\xi, \quad \omega = (x_1 - x_2\xi)(1 + \xi^2)^{-1};$$
$$C_2 \ : \ \theta = (1 + \xi^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln(1 + \xi^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_1\xi)(1 + \xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2\xi)(1 + \xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = -\arctan\xi, \quad \omega = (x_2 + x_1\xi)(1 + \xi^2)^{-1} - \arctan\xi;$$
$$C_3 \ : \ \theta = (1 + \xi^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln(1 + \xi^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi(1 + \xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi(1 + \xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = \arctan x_2 x_1^{-1}, \quad \omega = (1 + \xi^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1};$$
$$C_4 \ : \ \theta = |x_1|^{-k}, \quad \theta_0 = \ln|x_1| - \ln(1 + \xi^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi(1 + \xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi(1 + \xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = 0, \quad \omega = x_2 x_1^{-1};$$
$$C_5 \ : \ \theta = ((x_1^2 + x_2^2)(1 + \xi^2)^{-1})^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)(1 + \xi^2)^{-1},$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi(1+\xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi(1+\xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = \arctan x_2x_1^{-1}, \quad \omega = \arctan x_2x_1^{-1} + \alpha\arctan\xi, \quad \alpha \neq 0;$$

$$C_6 \ : \ \theta = [(x_1 - x_2\xi)^2(1+\xi^2)^{-1}]^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln[(x_1 - x_2\xi)^2(1+\xi^2)^{-3}],$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_1\xi)(1+\xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2\xi)(1+\xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = -\arctan\xi, \quad \omega = \alpha\arctan\xi - \ln[(x_1 - x_2\xi)(1+\xi^2)^{-1}],$$
$$\alpha \neq 0;$$

$$C_7 \ : \ \theta = [(x_1 - x_2\xi)^2(1+\xi^2)^{-1}]^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln[(x_1 - x_2\xi)^2(1+\xi^2)^{-3}],$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_1\xi)(1+\xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2\xi)(1+\xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = -\arctan\xi,$$
$$\omega = [\eta(1+\xi^2)^2 - 2x_1(x_2 + x_1\xi) - \xi(x_1^2\xi^2 - x_2^2)][x_1 - \xi x_2]^{-2} - \xi;$$

$$C_8 \ : \ \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln[(x_1^2 + x_2^2)(1+\xi^2)^{-2}],$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi(1+\xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi(1+\xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = \arctan x_2x_1^{-1},$$
$$\omega = \ln(x_1^2 + x_2^2)(1+\xi^2)^{-1} + 2\alpha\arctan x_2x_1^{-1} - 2\beta\arctan\xi,$$
$$\alpha, \beta \in R, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0;$$

$$C_9 \ : \ \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2) - \ln(1+\xi^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\xi(1+\xi^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\xi(1+\xi^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = \arctan x_2x_1^{-1}, \quad \omega = \eta(1+\xi^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1} - \xi;$$

$$C_{10} \ : \ \theta = (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{k}{2}}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2),$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1\eta(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}x_2\eta(x_1^2 + x_2^2)^{-1},$$
$$\theta_3 = 0, \quad \omega = x_2x_1^{-1}.$$

Тут k—деяке стале число (степінь конформності алгебри $c(1,3)$), $\xi = x_0 - x_3, \eta = x_0 + x_3$.

Зауважимо, що в твердженні 3.3.3 ми обмежилися переліком анзаців, які відповідають підалгебрам C_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$, оскільки анзаци, відповідні підалгебрам C_j $(j = 11, 12, 13, 14)$ мають громіздкий вигляд, містять функції, які визначаються неявно, і в подальших дослідженнях ми їх не використовуємо.

3.4. Симетрійна редукція і точні розв'язки рівнянь Максвелла

У четвертому підрозділі третього розділу ми використовуємо отримані конформно–інваріантні анзаци для побудови точних розв'язків рівнянь Максвелла у вакуумі.

Добре відомо, що електромагнітне поле описується вектором електричного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ та вектором магнітного поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_0, \mathbf{x})$ (далі ми називаємо їх полями Максвелла), які у випадку відсутності зарядів задовольняють систему рівнянь Максвелла у вакуумі:

$$
\begin{aligned}
&rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_0}, \qquad && div\mathbf{H} = 0,\\
&rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial\, x_0}, \qquad && div\mathbf{E} = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Ця система є об'єктом дослідження багатьох фізиків і математиків вже понад сто років. Ще Г.Лоренц [172] та А. Пуанкаре [186, 187] встановили, що рівняння Максвелла інваріантні відносно групи перетворень простору, яку, за пропозицією А. Пуанкаре, назвали групою перетворень Лоренца. Сучасного вигляду рівнянням Максвелла надали Г.Герц та О. Хевісайд. І. Лармор [163] та Г. Райніч [188] знайшли, що рівняння (3.36) інваріантні відносно сім'ї однопараметричних перетворень (Хевісайда–Лармора–Райніча)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E} \to \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{H}\sin\theta,\\
&\mathbf{H} \to \mathbf{H}\cos\theta - \mathbf{E}\sin\theta,
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

а Г. Бейтмен [100] та Е. Канінгем [113] встановили інваріантність рівнянь Максвелла відносно перетворень конформної групи.

Лише порівняно недавно (Ібрагімов [24]) було показано, що група $C(1,3) \otimes H$, де $C(1,3)$ — група конформних перетворень простору Мінковського, а H—група перетворень Хевісайда–Лармора–Райніча (3.37) є максимальною (в сенсі Лі) групою інваріантності рівнянь (3.36). Цей результат по суті збігається з тим, який було отримано раніше без використання алгоритму Лі. Відзначимо, що порівняно недавно було також знайдено додаткові (нелієвські) симетрії рівнянь Максвелла (див., наприклад, Фущич, Нікітін [82, 120]).

Традиційні методи математичної фізики, які використовують для побудови розв'язків рівнянь Максвелла, передбачають попереднє зведення системи (3.36) до незачеплених систем диференціальних рівнянь другого порядку з меншою кількістю функцій (наприклад, до рівнянь Максвелла для вектор–потенціалу). При цьому, для зведення використовуються нелокальні заміни, які, взагалі кажучи, змінюють структуру множини розв'язків досліджуваних рівнянь. У той же час, наявність високої симетрії в рівнянь (3.36) (зокрема, конформної групи $C(1,3)$) дозволяє ефективно використовувати для побудови точних розв'язків рівнянь Максвелла метод симетрійної редукції.

Тут ми використовуємо систему одиниць, в якій швидкість світла дорівнює одиниці ($c = 1$). Перш за все, детально проаналізуємо симетрійні властивості рівнянь (3.36).

3.4.1. Симетрійні властивості рівнянь Максвелла. Як відзначалося вище, максимальною групою симетрії (в сенсі Лі) рівнянь Максвелла (3.36) є шістнадцятипараметрична група $C(1,3) \bigotimes H$, яка є прямим добутком конформної групи $C(1,3)$, що генерується векторними полями Лі

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad J_{0a} = x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0} + \varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}),\\
&J_{ab} = x_b\partial_{x_a} - x_a\partial_{x_b} + E_b\partial_{E_a} - E_a\partial_{E_b} + H_b\partial_{H_a} - H_a\partial_{H_b},\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu} - 2(E_a\partial_{E_a} + H_a\partial_{H_a}),\\
&K_0 = 2x_0D - x_\mu x^\mu\partial_{x_0} + 2x_a\varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}),\\
&K_a = -2x_aD - x_\mu x^\mu\partial_{x_a} - 2x_0\varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}) -\\
&-2H_a(x_b\partial_{H_b}) - 2E_a(x_b\partial_{E_b}) + 2(x_bH_b)\partial_{H_a} + 2(x_bE_b)\partial_{E_a},
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

та однопараметричної групи H перетворень Хевісайда–Лармора–Райнiча, яка генерується векторним полем

$$
Q = E_a\partial_{H_a} - H_a\partial_{E_a}. \tag{3.39}
$$

У формулах (3.38), (3.39) і далі у цьому підрозділі роботи $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $a, b,\ c = 1, 2, 3$; за індексами, що повторюються, передбачено підсумовування в межах їх зміни: від 0 до 3 за індексами μ, ν та від 1 до 3 за індексами a, b, c; ε_{abc}—повністю антисиметричний тензор третього рангу із $\varepsilon_{123} = 1$; піднімання та опускання індексів μ, ν здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $g_{\mu\nu}$.

Як випливає із формул (3.38), (3.39), дія групи $C(1,3) \bigotimes H$ у просторі $R^{1,3} \times R^6$ ($R^{1,3}$—простір Мінковського незалежних змінних x_0, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, R^6—шестивимірний простір функцій $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$) є проектовною, а самі базисні генератори (3.38), (3.39) цієї групи можна подати у вигляді (3.11).

Справді, тут матриці $S_{\mu\nu}, E$ мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&S_{01} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_{23} \\ -\tilde{S}_{23} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{02} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{13} & 0 \end{pmatrix},\\
&S_{03} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_{12} \\ -\tilde{S}_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{12} \end{pmatrix},\\
&S_{13} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{13} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{13} \end{pmatrix}, \qquad S_{23} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{23} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{23} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

де 0—нульова 3×3–матриця, а

$$\tilde{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

E—одинична 6×6–матриця.

Операторові Q (3.39) відповідає матриця $-A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

0—нульова, а I—одинична 3×3–матриці.

Звідси випливає, що $C(1,3) \bigotimes H$–інваріантні анзаци для полів Максвелла, яким відповідає симетрійна редукція рівнянь (3.36) до систем звичайних диференціальних рівнянь, можна подати у вигляді (3.18):

$$\mathbf{V} = \Lambda(x_0, \mathbf{x}) \tilde{\mathbf{V}}(\omega), \tag{3.42}$$

де

$$\mathbf{V} = \left(E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad H_1 \quad H_2 \quad H_3 \right)^T, \; \tilde{\mathbf{V}} = \left(\tilde{E}_1 \quad \tilde{E}_2 \quad \tilde{E}_3 \quad \tilde{H}_1 \quad \tilde{H}_2 \quad \tilde{H}_3 \right)^T,$$

$\Lambda(x_0, \mathbf{x})$—відома невироджена в деякій області простору $R^{1,3}$ матриця порядку 6, $\tilde{E}_a = \tilde{E}_a(\omega)$, $\tilde{H}_a = \tilde{H}_a(\omega)$—нові невідомі функції змінної $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$.

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що рівняння Максвелла (3.36) інваріантні відносно дії дискретної симетрії Ψ :

$$\Psi : \overline{x}_\mu = -x_\mu, \qquad \overline{\mathbf{E}} = -\mathbf{E}, \qquad \overline{\mathbf{H}} = -\mathbf{H}, \tag{3.43}$$

яка на множині операторів (3.38), (3.39) діє за правилом:

$$P_\mu \to -P_\mu, \; J_{\mu\nu} \to J_{\mu\nu}, \; D \to D, \; K_\mu \to -K_\mu, \; Q \to Q.$$

Порівнявши дії дискретних симетрій Ψ (3.43) та Φ_1 (таблиця 3.1), бачимо, що на множині базисних генераторів алгебри $\tilde{p}(1,3)$ вони збігаються. Тому, використовуючи результати тверджень 3.3.1, 3.3.2, ми можемо покласти параметр j у наведених там значеннях функцій рівним 2, тобто $(-1)^j = 1$.

3.4.2. Конформно–інваріантні анзаци для полів Максвелла. Перш ніж адаптувати результати третього підрозділу цього розділу для побудови точних розв'язків системи (3.36), зупинимося на двох наступних твердженнях.

Твердження 3.4.1 *Якщо* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_0, x_3)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_0, x_3)$, *то рівняння Максвелла (3.36) інтегруються і їх загальний розв'язок визначають функції*

$$\begin{aligned} E_1 &= \varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta), \qquad H_1 = -\varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta), \\ E_2 &= \varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta), \qquad H_2 = \varphi_1(\xi) - \psi_1(\eta), \\ E_3 &= C_1, \qquad\qquad\qquad H_3 = C_2, \end{aligned}$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$*—довільні гладкі функції своїх аргументів,* $\xi = x_0 - x_3$, $\eta = x_0 + x_3$; $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Твердження 3.4.2 *Якщо* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_1, x_2, \xi)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_1, x_2, \xi)$, *де* $\xi = \frac{1}{2}(x_0 - x_3)$, *то рівняння Максвелла (3.36) інтегруються і їх загальний розв'язок визначають функції*

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(R + R^* + T_1 + T_1^*), \quad H_1 = \frac{1}{2}(iR - iR^* - T_2 - T_2^*), \\ E_2 &= \frac{1}{2}(iR - iR^* + T_2 + T_2^*), \quad H_2 = \frac{1}{2}(R + R^* - T_1 - T_1^*), \\ E_3 &= S + S^*, \qquad\qquad\qquad H_3 = iS - iS^*, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \xi^2} \ \ (j = 1, 2), \qquad S = \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + i\frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} + \lambda(z), \\ R &= -2(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + i\frac{\partial \theta_2}{\partial z}) + \xi\frac{d\,\lambda}{d\,z}. \end{aligned}$$

Тут $\theta_j = \theta_j(z, \xi)$, $\lambda(z)$*—довільні аналітичні за змінною* $z = x_1 + ix_2$ *функції;* $j = 1, 2$; $i^2 = -1$.

Доведення обох тверджень проводиться аналогічно, тому тут ми зупиняємося лише на доведенні твердження 3.4.1.

Перепишемо рівняння Максвелла (3.36) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_1}(E_1+H_2)+\partial_{x_2}(E_2-H_1)=(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})E_3,\\
&\partial_{x_1}(E_1-H_2)+\partial_{x_2}(E_2+H_1)=-(\partial_{x_0}+\partial_{x_3})E_3,\\
&\partial_{x_1}(E_2-H_1)-\partial_{x_2}(E_1+H_2)=-(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})H_3,\\
&\partial_{x_1}(E_2+H_1)-\partial_{x_2}(E_1-H_2)=-(\partial_{x_0}+\partial_{x_3})H_3,\\
&(\partial_{x_0}+\partial_{x_3})(E_1+H_2)=\partial_{x_1}(E_3)+\partial_{x_2}(H_3),\\
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})(E_1-H_2)=-\partial_{x_1}(E_3)+\partial_{x_2}(H_3),\\
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})(E_2+H_1)=-\partial_{x_2}(E_3)-\partial_{x_1}(H_3),\\
&(\partial_{x_0}+\partial_{x_3})(E_2-H_1)=\partial_{x_2}(E_3)-\partial_{x_1}(H_3).
\end{aligned}\tag{3.44}$$

Оскільки, згідно з умовою, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(x_0,x_3)$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}(x_0,x_3)$, то система (3.44) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})E_3=0, && (\partial_{x_0}+\partial_{x_3})H_3=0,\\
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})H_3=0, && (\partial_{x_0}+\partial_{x_3})H_3=0,\\
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})(E_1-H_2)=0, && (\partial_{x_0}+\partial_{x_3})(E_1+H_2)=0,\\
&(\partial_{x_0}-\partial_{x_3})(E_2+H_1)=0, && (\partial_{x_0}+\partial_{x_3})(E_2-H_1)=0.
\end{aligned}\tag{3.45}$$

Із перших двох пар рівнянь (3.45) випливає, що $E_3=C_1$, $H_3=C_2$, де $C_1,C_2\in\mathbf{R}$. Третя пара рівнянь (3.45) показує, що

$$E_1-H_2=2\psi_1(x_0+x_3),\qquad E_1+H_2=2\varphi_1(x_0-x_3),$$

тобто,

$$E_1=\varphi_1(\xi)+\psi_1(\eta),\quad H_2=\varphi_1(\xi)-\psi_1(\eta),$$

де $\varphi_1(\xi)$, $\psi_1(\eta)$—довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів, $\xi=x_0-x_3$, $\eta=x_0+x_3$.

Нарешті, з останньої пари рівнянь (3.45) випливає, що

$$E_2=\varphi_2(\xi)+\psi_2(\eta),\qquad H_1=-\varphi_2(\xi)+\psi_2(\eta),$$

де $\varphi_2(\xi)$, $\psi_2(\eta)$—довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів.

Твердження 3.4.1 доведене.

Виходячи із результатів тверджень 3.4.1, 3.4.2, робимо висновок, що для побудови суттєво нових розв'язків рівнянь Максвелла (3.36) потрібно розглянути випадки тих підалгебр конформної алгебри $c(1,3)$, які не приведуть до розв'язків, форма яких розглянута в цих твердженнях. Неважко переконатися, що такими будуть ті із підалгебр L рангу 3 конформної алгебри, для яких виконуються умови

$$< P_0 + P_3 > \not\subset L, \quad < P_0 - P_3 > \not\subset L, \quad < P_0, P_3 > \not\subset L; \qquad (3.46)$$

$$< P_1, P_2 > \not\subset L. \qquad (3.47)$$

Підалгебри рангу 3 конформної алгебри $c(1,3)$, для яких не виконується умова (3.46), приводять до розв'язків із твердження 3.4.2 (ми врахували, що існує такий елемент $g \in \mathrm{C}(1,3)$, для якого виконується рівність $g(P_0 - P_3)g^{-1} = P_0 + P_3$). Підалгебри рангу 3 конформної алгебри, для яких не виконується умова (3.47), приводять до розв'язків, розглянутих в твердженні 3.4.1.

Перевіривши виконання умов (3.46), (3.47) для усіх підалгебр із тверджень 3.2.1–3.2.3 та врахувавши дію дискретної симетрії Φ_1 (таблиця 3.1), ми отримали, що до суттєво нових розв'язків рівнянь Максвелла (3.36) приводить розгляд таких підалгебр рангу 3 конформної алгебри $c(1,3)$:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \langle J_{03}, G_1, P_2 \rangle; \qquad M_2 = \langle G_1, G_2, J_{03} + \alpha J_{12} \rangle, \ \alpha \in \mathbf{R};\\
M_3 &= \langle J_{12}, D, P_0 \rangle; \qquad M_4 = \langle J_{12}, D, P_3 \rangle,\\
M_5 &= \langle J_{03}, D, P_1 \rangle; \qquad M_6 = \langle J_{03}, J_{12}, D \rangle;\\
M_7 &= \langle G_1, J_{03} + \alpha D, P_2 \rangle \ (0 < |\alpha| \leq 1);\\
M_8 &= \langle J_{03} - D + M, G_1, P_2 \rangle; \qquad M_9 = \langle J_{03} + 2D, G_1 + 2T, P_2 \rangle;\\
M_{10} &= \langle J_{12}, S + T, Z \rangle; \quad M_{11} = \langle S + T + J_{12}, Z, G_1 + P_2 \rangle;\\
M_{12} &= \langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + K_0 - P_0, J_{02} - D - \sqrt{3}J_{01},\\
&\quad P_0 + K_0 - 2(K_2 - P_2) \rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{13} &= \langle P_0 + K_0\rangle \oplus \langle J_{12}, K_3 - P_3\rangle;\\
M_{14} &= \langle 2J_{12} + K_3 - P_3, 2J_{13} - K_2 + P_2, 2J_{23} + K_1 - P_1\rangle;\\
M_{15} &= \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3\rangle.
\end{aligned}$$

Тут ми використовуємо позначення $M = P_0 + P_3$, $G_{0j} = J_{0j} - J_{j3}$ $(j = 1, 2)$, $Z = J_{03} + D$, $S = \frac{1}{2}(K_0 + K_3), T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$.

У подальшому ми використовуємо перші десять із перерахованих підалгебр алгебри $c(1, 3)$, для яких матрицю Λ в анзаці (3.42) можна подати у вигляді

$$\Lambda = \exp\{(\ln\theta)E\}\exp(2\theta_1 H_1)\exp(2\theta_2 H_2)\cdot\exp(-\theta_0 S_{03})\exp(\theta_3 S_{12}),$$

де матриці $S_{\mu\nu}$ мають вигляд (3.40).

Отже,

$$\Lambda = \theta\begin{pmatrix} C & G\\ -G & C\end{pmatrix},$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \cosh\theta_0\cos\theta_3 - r_1 & -\cosh\theta_0\sin\theta_3 + r_2 & 2\theta_1\\ \cosh\theta_0\sin\theta_3 + r_2 & \cosh\theta_0\cos\theta_3 + r_1 & 2\theta_2\\ -2s_1 & 2s_2 & 1\end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \sinh\theta_0\sin\theta_3 + r_2 & \sinh\theta_0\cos\theta_3 + r_1 & 2\theta_2\\ -\sinh\theta_0\cos\theta_3 + r_1 & \sinh\theta_0\sin\theta_3 - r_2 & -2\theta_1\\ 2s_2 & 2s_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2[(\theta_1^2 - \theta_2^2)\cos\theta_3 + 2\theta_1\theta_2\sin\theta_3]e^{-\theta_0},\\
r_2 &= 2[(\theta_1^2 - \theta_2^2)\sin\theta_3 - 2\theta_1\theta_2\cos\theta_3]e^{-\theta_0},\\
s_1 &= 2[\theta_1\cos\theta_3 + \theta_2\sin\theta_3]e^{-\theta_0},\\
s_2 &= 2[\theta_1\sin\theta_3 - \theta_2\cos\theta_3]e^{-\theta_0}.
\end{aligned}$$

Виконавши відповідні обчислення і перетворення, приходимо до такого явного вигляду конформно–інваріантного анзацу для полів Максвелла:

$$\begin{aligned}
E_1 = \theta\{&(\tilde{E}_1\cos\theta_3 - \tilde{E}_2\sin\theta_3)\cosh\theta_0 +\\
&+(\tilde{H}_1\sin\theta_3 + \tilde{H}_2\cos\theta_3)\sinh\theta_0 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +2\theta_1\tilde{E}_3+2\theta_2\tilde{H}_3+4\theta_1\theta_2\Sigma_1+2(\theta_1^2-\theta_2^2)\Sigma_2\},\\
E_2 &= \theta\{(\tilde{E}_2\cos\theta_3+\tilde{E}_1\sin\theta_3)\cosh\theta_0+\\
& +(\tilde{H}_2\sin\theta_3-\tilde{H}_1\cos\theta_3)\sinh\theta_0-\\
& -2\theta_1\tilde{H}_3+2\theta_2\tilde{E}_3+4\theta_1\theta_2\Sigma_2-2(\theta_1^2-\theta_2^2)\Sigma_1\},\\
E_3 &= \theta\{\tilde{E}_3+2\theta_1\Sigma_2+2\theta_2\Sigma_1\},\\
H_1 &= \theta\{(\tilde{H}_1 cos\theta_3-\tilde{H}_2\sin\theta_3)\cosh\theta_0-\\
& -(\tilde{E}_1\sin\theta_3+\tilde{E}_2\cos\theta_3)\sinh\ \theta_0+\\
& +2\theta_1\tilde{H}_3-2\theta_2\tilde{E}_3-4\theta_1\theta_2\Sigma_2+2(\theta_1^2-\theta_2^2)\Sigma_1\},\\
H_2 &= \theta\{(\tilde{H}_2\cos\theta_3+\tilde{H}_1\sin\theta_3)\cosh\theta_0+\\
& +(\tilde{E}_1\cos\theta_3-\tilde{E}_2\sin\theta_3)\sinh\theta_0+\\
& +2\theta_1\tilde{E}_3+2\theta_2\tilde{H}_3+4\theta_1\theta_2\Sigma_1+2(\theta_1^2-\theta_2^2)\Sigma_2\},\\
H_3 &= \theta\{\tilde{H}_3+2\theta_1\Sigma_1-2\theta_2\Sigma_2\}.
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= [(\tilde{H}_2-\tilde{E}_1)\sin\theta_3-(\tilde{E}_2+\tilde{H}_1)\cos\theta_3]e^{-\theta_0},\\
\Sigma_2 &= [(\tilde{E}_2+\tilde{H}_1)\sin\theta_3+(\tilde{H}_2-\tilde{E}_1)\cos\theta_3]e^{-\theta_0}.
\end{aligned}
$$

Значення функцій $\theta,\ \theta_\mu,\omega$ для кожної із підалгебр $\mathrm{M}_j\ (j=1,2,\ldots,10)$ ми отримали згідно із результатами тверджень 3.3.1–3.3.3, врахувавши, що в даному випадкові конформна степінь алгебри $k=2:$

$$
\begin{aligned}
M_1 &: \theta=1,\ \theta_0=-\ln|x_0-x_3|,\ \theta_1=-\frac{1}{2}x_1(x_0-x_3)^{-1},\\
& \quad \theta_2=\theta_3=0,\ \omega=x_0^2-x_1^2-x_3^2;\\
M_2 &: \theta=1,\ \theta_0=-\ln|x_0-x_3|,\ \theta_1=-\frac{1}{2}x_1(x_0-x_3)^{-1},\\
& \quad \theta_2=-\frac{1}{2}x_2(x_0-x_3)^{-1},\theta_3=\alpha\ln|x_0-x_3|,\\
& \quad \omega=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2,\quad \alpha\in\mathbf{R};\\
M_3 &: \theta=(x_3)^{-2},\ \theta_0=\theta_1=\theta_2=0,\\
& \quad \theta_3=\arctan\frac{x_2}{x_1},\ \omega=(x_1^2+x_2^2)x_3^{-2};
\end{aligned}
$$

$$M_4 \;:\; \theta=(x_0)^{-2},\ \theta_0=\theta_1=\theta_2=0,$$
$$\theta_3=\arctan\frac{x_2}{x_1},\ \omega=(x_1^2+x_2^2)x_0^{-2};$$
$$M_5 \;:\; \theta=(x_2)^{-2},\ \theta_0=\ln|(x_0+x_3)x_2^{-1}|,\ \theta_1=\theta_2=\theta_3=0,$$
$$\omega=(x_0^2-x_3^2)x_2^{-2};$$
$$M_6 \;:\; (x_1^2+x_2^2)^{-1},\ \theta_0=-\frac{1}{2}\ln|(x_0-x_3)(x_0+x_3)^{-1}|,$$
$$\theta_1=\theta_2=0,\ \theta_3=\arctan\frac{x_2}{x_1},\ \omega=(x_1^2+x_2^2)(x_0^2-x_3^2)^{-1};$$
$$M_7 \;:\; 1)\ \theta=(x_0-x_3)^{-1},\ \theta_0=-\frac{1}{2}\ln|x_0-x_3|,$$
$$\theta_1=-\frac{1}{2}x_1(x_0-x_3)^{-1},\ \theta_2=\theta_3=0,$$
$$\omega=x_0+x_3-x_1^2(x_0-x_3)^{-1},\ \text{для}\ \alpha=-1;$$
$$2)\ \theta=|x_0^2-x_1^2-x_3^2|^{-1},\ \theta_0=\frac{1}{2\alpha}\ln|x_0^2-x_1^2-x_3^2|,$$
$$\theta_1=-\frac{1}{2}x_1(x_0-x_3)^{-1},\ \theta_2=\theta_3=0,$$
$$\omega=2\alpha\ln|x_0-x_3|+(1-\alpha)\ln|x_0^2-x_1^2-x_3^2|,\ \text{для}\ \alpha\neq-1;$$
$$M_8 \;:\; \theta=|x_0-x_3|^{-1},\ \theta_0=-\frac{1}{2}\ln|x_0-x_3|,\ \theta_1=-\frac{1}{2}x_1(x_0-x_3)^{-1},$$
$$\theta_2=\theta_3=0,\ \omega=x_0+x_3-x_1^2(x_0-x_3)^{-1}+\ln|x_0-x_3|;$$
$$M_9 \;:\; \theta=[(x_0-x_3)^2-4x_1]^{-2},\ \theta_0=\frac{1}{2}\ln|(x_0-x_3)^2-4x_1|,$$
$$\theta_1=-\frac{1}{4}(x_0-x_3),\ \theta_2=\theta_3=0,$$
$$\omega=[x_0+x_3-x_1(x_0-x_3)+\frac{1}{6}(x_0-x_3)^3]^2[(x_0-x_3)^2-4x_1]^{-3};$$
$$M_{10} \;:\; \theta=[(x_1-(x_0-x_3)x_2)^2(1+(x_0-x_3)^2)^{-1}]^{-1};$$
$$\theta_0=\frac{1}{2}\ln[(x_1-(x_0-x_3)x_2)^2(1+(x_0-x_3)^2)^{-3}],$$
$$\theta_1=-\frac{1}{2}(x_2+(x_0-x_3)x_1)(1+(x_0-x_3)^2)^{-1},$$
$$\theta_2=\frac{1}{2}(x_1-(x_0-x_3)x_2)(1+(x_0-x_3)^2)^{-1},$$
$$\theta_3=-\arctan(x_0-x_3),\ \omega=[(x_0+x_3)(1+(x_0-x_3)^2)^2-$$
$$-2x_1(x_2+(x_0-x_3)x_1)-(x_0-x_3)(x_1^2(x_0-x_3)^2-x_2^2)]\cdot$$

$$\cdot[x_1 - (x_0 - x_3)x_2]^{-2} - x_0 + x_3.$$

3.4.3. Симетрійна редукція та точні розв'язки рівнянь Максвелла. Процедура симетрійної редукції передбачає підстановку анзаців (3.48) в рівняння (3.36). Але, як показали безпосередні обчислення, для симетрійної редукції рівнянь Максвелла (3.36) зручніше використовувати систему (3.44).

Оскільки випадки усіх підалгебр розглядаються аналогічно, зупинимося детально лише на випадкові підалгебри M_1, для якої анзац (3.48) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
&E_1 + H_2 = fe^{\theta_0} + 4\theta_1\tilde{E}_3 - 4\theta_1^2 e^{-\theta_0}h,\\
&E_1 - H_2 = he^{-\theta_0}, \qquad\qquad E_2 + H_1 = \rho e^{-\theta_0},\\
&E_2 - H_1 = ge^{\theta_0} - 4\theta_1\tilde{H}_3 + 4\theta_1^2 e^{-\theta_0}\rho,\\
&E_3 = \tilde{E}_3 - 2\theta_1 he^{-\theta_0}, \qquad H_3 = \tilde{H}_3 - 2\theta_1\rho e^{-\theta_0},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

де $\theta_0 = -\ln|x_0 - x_3|$, $\theta_1 = -\frac{1}{2}x_1(x_0 - x_3)^{-1}$, а функції $\tilde{E}_3$, $\tilde{H}_3$ та

$$\begin{aligned}
f &= f(\omega) = \tilde{E}_1 + \tilde{H}_2, \qquad\qquad g = g(\omega) = \tilde{E}_2 - \tilde{H}_1,\\
h &= h(\omega) = \tilde{E}_1 - \tilde{H}_2, \qquad\qquad \rho = \rho(\omega) = \tilde{E}_2 + \tilde{H}_1
\end{aligned} \tag{3.50}$$

є довільними гладкими функціями змінної ω (тут $\omega = x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$).

Підстановка анзацу (3.49) у друге та четверте рівняння системи (3.44) приводить до рівнянь

$$\dot{\tilde{E}}_3 = 0, \qquad \dot{\tilde{H}}_3 = 0. \tag{3.51}$$

Тут і далі крапка означає звичайну похідну за зміною ω.

Аналогічно, із шостого та сьомого рівнянь (3.44), врахувавши (3.51), ми отримали рівняння

$$2\omega\dot{h} + 3h = 0, \qquad 2\omega\dot{\rho} + 3\rho = 0. \tag{3.52}$$

а із п'ятого та восьмого рівнянь системи (3.44)— рівняння

$$2\dot{f} - h = 0, \qquad 2\dot{g} + \rho = 0. \tag{3.53}$$

Нарешті, результатом підстановки анзацу (3.49) у перше та третє рівняння (3.44) є рівності

$$4\varepsilon\theta_1[\omega\dot{h} + h + \dot{f}] = 2\xi^{-1}\tilde{E}_3,$$
$$4\varepsilon\theta_1[\dot{g} - \omega\dot{\rho} - \rho] = -2\xi^{-1}\tilde{H}_3, \qquad (3.54)$$

де $\varepsilon = 1$ для $\xi = x_0 - x_3 > 0$ та $\varepsilon = -1$ для $x_0 - x_3 < 0$.

Але , оскільки мають місце співвідношення (3.52), (3.53), то із (3.54) випливає, що

$$\tilde{E}_3 = 0, \qquad \tilde{H}_3 = 0.$$

Отже, підалгебрі M_1 відповідає така редукована система:

$$\begin{aligned} &2\omega\dot{h} + 3h = 0, && 2\omega\dot{\rho} + 3\rho = 0, \\ &2\dot{f} - h = 0, && 2\dot{g} + \rho = 0, \\ &\tilde{E}_3 = 0, && \tilde{H}_3 = 0. \end{aligned} \qquad (3.55)$$

Оскільки усі редуковані системи, як і система (3.55), є лінійними системами звичайних диференціальних рівнянь першого порядку й легко інтегрується в елементарних функціях, ми тут не зупиняємося на їх описові та інтегруванні, а відразу наводимо перелік отриманих інваріантних розв'язків рівнянь Максвелла (3.36), вказуючи у ньому підалгебри, яким відповідають ці розв'язки.

Конформно–інваріантні розв'язки рівнянь Максвелла (3.36)

$$\begin{aligned} M_1: \quad & E_1 = C_2(x_0 - x_3)^{-1} - 2x_3C_1|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}, \\ & E_2 = C_4(x_0 - x_3)^{-1} + 2x_0C_3|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}, \\ & E_3 = 2x_1C_1|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}, \\ & H_1 = -C_4(x_0 - x_3)^{-1} - 2x_3C_3|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}, \\ & H_2 = C_2(x_0 - x_3)^{-1} - 2x_0C_1|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}, \\ & H_3 = 2x_1C_3|x_0^2 - x_1^2 - x_3^2|^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$M_2: \quad E_1 = |\xi|^{-1}\{C_1\cos(\alpha\ln|\xi|) - C_2\sin(\alpha\ln|\xi|) -$$

$$-x_1x_2[h\sin(\alpha\ln|\xi|)+\rho\cos(\alpha\ln|\xi|)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^2-x_1^2+x_2^2)[h\cos(\alpha\ln|\xi|)-\rho\sin(\alpha\ln|\xi|)]\},$$
$$E_2=|\xi|^{-1}\{C_2\cos(\alpha\ln|\xi|)+C_1\sin(\alpha\ln|\xi|)+$$
$$+x_1x_2[\rho\sin(\alpha\ln|\xi|)-h\cos(\alpha\ln|\xi|)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^2+x_1^2-x_2^2)[h\sin(\alpha\ln|\xi|)+\rho\cos(\alpha\ln|\xi|)]\},$$
$$E_3=\varepsilon\{h[x_1\cos(\alpha\ln|\xi|)+x_2\sin(\alpha\ln|\xi|)]+$$
$$+\rho[x_2\cos(\alpha\ln|\xi|)-x_1\sin(\alpha\ln|\xi|)],$$
$$H_1=|\xi|^{-1}\{-C_2\cos(\alpha\ln|\xi|)-C_1\sin(\alpha\ln|\xi|)-$$
$$-x_1x_2[\rho\sin(\alpha\ln|\xi|)-h\cos(\alpha\ln|\xi|)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^2-x_1^2+x_2^2)[h\sin(\alpha\ln|\xi|)+\rho\cos(\alpha\ln|\xi|)]\},$$
$$H_2=|\xi|^{-1}\{C_1\cos(\alpha\ln|\xi|)-C_2\sin(\alpha\ln|\xi|)-$$
$$-x_1x_2[h\sin(\alpha\ln|\xi|)+\rho\cos(\alpha\ln|\xi|)]-$$
$$-\frac{1}{2}(\xi^2+x_1^2-x_2^2)[h\cos(\alpha\ln|\xi|)-\rho\sin(\alpha\ln|\xi|)]\},$$
$$H_3=\varepsilon\{h[x_1\sin(\alpha\ln|\xi|)-x_2\cos(\alpha\ln|\xi|)]+$$
$$+\rho[x_1\cos(\alpha\ln|\xi|)+x_2\sin(\alpha\ln|\xi|)],$$

де $\xi=x_0-x_3,\ h=\omega^{-2}[C_4\cos(\alpha\ln|\omega|)-C_3\sin(\alpha\ln|\omega|)]$,
$\rho=\omega^{-2}[C_3\cos(\alpha\ln|\omega|)+C_4\sin(\alpha\ln|\omega|)],\ \omega=x_\mu x^\mu$,
$\alpha\in\mathbf{R},\ \varepsilon=1$ для $\xi>0$ та $\varepsilon=-1$ для $\xi<0$.

$$M_3:\quad E_a=-\frac{2C_1x_a}{x_3(x_1^2+x_2^2)}+x_a\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12},\quad E_3=x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12},$$
$$H_a=-\frac{2C_3x_a}{x_3(x_1^2+x_2^2)}+x_a\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},\quad H_3=x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},$$

де $A_{ij}=C_i(\ln|\frac{\sqrt{\sigma}-x_3}{\sqrt{\sigma}+x_3}|+2x_3^{-1}\sqrt{\sigma})+C_j$,
$\sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ a=1,2.$

$$M_4:\quad E_a=\varepsilon_{ab}x_b\{\frac{2C_4}{x_0(x_1^2+x_2^2)}-\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34}\},\quad E_3=x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12};$$

$$H_a = -\varepsilon_{ab}x_b\{\frac{2C_2}{x_0(x_1^2+x_2^2)} - \sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12}\}, \quad H_3 = x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},$$

де $A_{ij} = C_i + C_j(\ln|\frac{\sqrt{\sigma}-x_0}{\sqrt{\sigma}+x_0}| + 2x_0^{-1}\sqrt{\sigma})$,

$\sigma = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 > 0,\ a,b = 1,2.$

$$2) E_a = -\varepsilon_{ab}x_b\{\frac{C_4}{x_0(x_1^2+x_2^2)} - \sigma^{-\frac{3}{2}}B_{34}\}, \quad E_3 = x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{12};$$

$$H_a = -\varepsilon_{ab}x_b\{\frac{C_2}{x_0(x_1^2+x_2^2)} - \sigma^{-\frac{3}{2}}B_{12}\}, \quad H_3 = x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{34},$$

де $B_{ij} = C_i + C_j(x_0^{-1}\sqrt{\sigma} - \arctan\frac{\sqrt{\sigma}}{x_0}),\ \sigma = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 > 0,$ $a,b = 1,2.$ Тут ε_{ab} $(a,b=1,2)$ є антисиметричний тензор другого рангу : $\varepsilon_{12} = 1,\ \varepsilon_{21} = -1.$

$M_5 :$ 1) $E_1 = \dfrac{2x_0C_4}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},$

$$E_2 = \frac{2x_3C_2}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12},$$

$$H_1 = -\frac{2x_0C_2}{x_2(x_0^2-x_3^2)} + x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12},$$

$$H_2 = \frac{2x_3C_4}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},$$

$$E_3 = x_2\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{12}, \qquad H_3 = x_2\sigma^{-\frac{3}{2}}A_{34},$$

де $A_{ij} = C_i + C_j(2\frac{\sqrt{\sigma}}{x_2} - \ln|\frac{\sqrt{\sigma}-x_2}{\sqrt{\sigma}+x_2}|),\ \sigma = x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 > 0;$

$$2) E_1 = \frac{x_0C_4}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{34},$$

$$E_2 = \frac{x_3C_2}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{12},$$

$$H_1 = -\frac{x_0C_2}{x_2(x_0^2-x_3^2)} + x_0\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{12},$$

$$H_2 = \frac{x_3C_4}{x_2(x_0^2-x_3^2)} - x_3\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{34},$$

$$E_3 = x_2\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{12}, \qquad H_3 = x_2\sigma^{-\frac{3}{2}}B_{34},$$

де $B_{ij} = C_i + C_j(\dfrac{\sqrt{\sigma}}{x_2} - \arctan\dfrac{\sqrt{\sigma}}{x_2}), \quad \sigma = x_0^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0.$

$M_6:$

$$E_1 = \frac{1}{2}[\frac{\xi(x_1C_2 - x_2C_5) + \eta(x_1C_3 - x_3C_6)}{\xi\eta(x_1^2 + x_2^2)} - $$
$$- \frac{\varepsilon_1\xi(x_1C_1 + x_2C_4) - \varepsilon_2\eta(x_1C_1 - x_2C_4)}{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}],$$
$$E_2 = \frac{1}{2}[\frac{\xi(x_1C_5 + x_2C_2) + \eta(x_1C_6 + x_2C_3)}{\xi\eta(x_1^2 + x_2^2)} + $$
$$+ \frac{\varepsilon_1\xi(x_1C_4 - x_2C_1) + \varepsilon_2\eta(x_1C_4 + x_2C_1)}{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}],$$
$$H_1 = \frac{1}{2}[\frac{\eta(x_1C_6 + x_2C_3) - \xi(x_1C_5 + x_2C_2)}{\xi\eta(x_1^2 + x_2^2)} + $$
$$+ \frac{\varepsilon_1\xi(x_2C_1 - x_1C_4) + \varepsilon_2\eta(x_1C_4 + x_2C_1)}{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}],$$
$$H_2 = \frac{1}{2}[\frac{\xi(x_1C_2 - x_2C_5) - \eta(x_1C_3 - x_2C_6)}{\xi\eta(x_1^2 + x_2^2)} - $$
$$- \frac{\varepsilon_1\xi(x_1C_1 + x_2C_4) + \varepsilon_2\eta(x_1C_1 - x_2C_4)}{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}],$$
$$E_3 = C_1\sigma^{-1}, \qquad H_3 = C_4\sigma^{-1},$$

де $\sigma = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2, \quad \xi = x_0 + x_3, \eta = x_0 - x_3,$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, x_0 + x_3 > 0, \\ -1, x_0 + x_3 < 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1, x_0 - x_3 > 0, \\ -1, x_0 - x_3 < 0. \end{cases}$$

$M_7:$

$$1) E_1 = |\eta|^{-\frac{3}{2}}(C_1 + \frac{1}{4}F) - x_1\eta^{-2}C_2 - \frac{1}{2}\varepsilon|\eta|^{-\frac{1}{2}}f(x_1^2\eta^{-2} - 1),$$
$$E_2 = |\eta|^{-\frac{3}{2}}(C_3 - \frac{1}{4}G) + x_1\eta^{-2}C_4 + \frac{1}{2}\varepsilon|\eta|^{-\frac{1}{2}}g(x_1^2\eta^{-2} + 1),$$
$$H_1 = -|\eta|^{-\frac{3}{2}}(C_3 - \frac{1}{4}G) - x_1\eta^{-2}C_4 - \frac{1}{2}\varepsilon|\eta|^{-\frac{1}{2}}g(x_1^2\eta^{-2} - 1),$$
$$H_2 = |\eta|^{-\frac{3}{2}}(C_1 + \frac{1}{4}F) - x_1\eta^{-2}C_3 - \frac{1}{2}\varepsilon|\eta|^{-\frac{1}{2}}f(x_1^2\eta^{-2} + 1),$$
$$E_3 = \eta^{-1}C_2 + x_1|\eta|^{-\frac{3}{2}}f, \qquad H_3 = \eta^{-1}C_4 + x_1|\eta|^{-\frac{3}{2}}g$$

для $\alpha = -1$. Тут $f = f(\omega),\ g = g(\omega),\ F = F(\omega),\ G = G(\omega)$ довільні гладкі функції, $\dfrac{dF}{d\omega} = f,\ \dfrac{dG}{d\omega} = g,\ \omega = \xi - x_1^2\eta^{-1},$

$$\xi = x_0 + x_3, \quad \eta = x_0 - x_3,$$
$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \ x_0 - x_3 > 0, \\ -1, \ x_0 - x_3 < 0. \end{cases}$$

2) $E_1 = x_3|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_1 + C_2\eta^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}, \ E_2 = x_0|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_3 + C_4\eta^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}},$
$E_3 = -x_1|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_1,$
$H_1 = -x_3|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_3 - C_4\eta^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}, \ H_2 = x_0|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_1 + C_2\eta^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}},$
$H_3 = x_1|\sigma|^{-\frac{3}{2}}C_3$ для $0 < |\alpha| < 1$. Якщо $\alpha = 1$, то
$C_2 = C_4 = 0$. Тут $\sigma = x_0^2 - x_1^2 - x_3^2, \quad \eta = x_0 - x_3.$

$M_8:$
$$E_1 = -x_1\eta^{-2}C_1 + \frac{1}{4}|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_2(\xi + 2\eta - 3x_1^2\eta^{-1} + \ln|\eta|) + +|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_3,$$
$$E_2 = x_1\eta^{-2}C_4 - \frac{1}{4}|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_5(\xi - 2\eta - 3x_1^2\eta^{-1} + \ln|\eta|) + +|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_6,$$
$$H_1 = -x_1\eta^{-2}C_4 + \frac{1}{4}|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_5(\xi + 2\eta - 3x_1^2\eta^{-1} + \ln|\eta|) - -|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_6,$$
$$H_2 = -x_1\eta^{-2}C_1 + \frac{1}{4}|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_2(\xi - 2\eta - 3x_1^2\eta^{-1} + \ln|\eta|) + +|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_3,$$
$$E_3 = \eta^{-1}C_1 + x_1|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_2, \ H_3 = \eta^{-1}C_4 + x_1|\eta|^{-\frac{3}{2}}C_5,$$
де $\xi = x_0 + x_3, \ \eta = x_0 - x_3.$

$M_9:$
1) $E_1 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2 - 4) - 12\eta\omega) - \eta B_{12}],$
$$E_2 = \varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2 + 4) - 12\eta\omega) - \eta B_{34}],$$
$$E_3 = \varphi^{-2}[4A_{12}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} + 6\omega) + 2B_{12}],$$
$$H_1 = -\varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2 - 4) - 12\eta\omega) - \eta B_{34}],$$
$$H_2 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2 + 4) - 12\eta\omega) - \eta B_{12}],$$
$$H_3 = -\varphi^{-2}[4A_{34}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} + 6\omega) + 2B_{34}],$$

де $A_{ij} = (1+36\omega^2)^{-\frac{3}{2}}[C_i\sigma^{\frac{1}{3}}(4\sqrt{1+36\omega^2}-72\omega)+$
$+C_j\sigma^{-\frac{1}{3}}(4\sqrt{1+36\omega^2}+72\omega)],$
$B_{ij} = 16(1+36\omega^2)^{-\frac{1}{2}}(C_i\sigma^{\frac{1}{3}} - C_j\sigma^{-\frac{1}{3}}),$
$\sigma = 6\omega + \sqrt{36\omega^2+1},\ \omega = (\xi - x_1\eta + \frac{1}{6}\eta^3)\varphi^{-\frac{3}{2}},$
$\varphi = 4x_1 - \eta^2 > 0,$
$\xi = x_0 + x_3,\ \eta = x_0 - x_3;$
2) $E_1 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2+4) + 42\eta\omega) - \eta B_{12}],$
$E_2 = \varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2-4) - 42\eta\omega) - \eta B_{34}],$
$E_3 = -\varphi^{-2}[4A_{12}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} + 21\omega) - 2B_{12}],$
$H_1 - \varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2+4) + 42\eta\omega) - \eta B_{34}],$
$H_2 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2-4) + 42\eta\omega) - \eta B_{12}],$
$H_3 = \varphi^{-2}[A_{34}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} + 21\omega) - 2B_{34}],$
де $A_{ij} = (1-36\omega^2)^{-\frac{3}{2}}\{\cos\sigma[72\omega C_j - 4C_i\sqrt{1-36\omega^2}] -$
$-\sin\sigma[72\omega C_i + 4C_j\sqrt{1-36\omega^2}]\},$
$B_{ij} = 16(1-36\omega^2)^{-\frac{1}{2}}[C_i\sin\sigma - C_j\cos\sigma],\ \sigma = \frac{1}{3}\arcsin 6\omega,$
$|6\omega| < 1,\ \varphi = \eta^2 - 4x_1 > 0,\ \omega = (\xi - x_1\eta + \frac{1}{6}\eta^3)\varphi^{-\frac{3}{2}},$
$\xi = x_0 + x_3,\ \eta = x_0 - x_3;$
3) $E_1 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2+4) - 12\eta\omega) - \eta B_{12}],$
$E_2 = \varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2-4) - 12\eta\omega) - \eta B_{34}],$
$E_3 = \varphi^{-2}[-4A_{12}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} - 6\omega) + 2B_{12}],$
$H_1 = -\varphi^{-2}[A_{34}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2+4) - 12\eta\omega) - \eta B_{34}],$
$H_2 = \varphi^{-2}[A_{12}(\varphi^{\frac{1}{2}} - \varphi^{-\frac{1}{2}}(\eta^2-4) - 12\eta\omega) - \eta B_{12}],$
$H_3 = \varphi^{-2}[4A_{34}(\eta\varphi^{-\frac{1}{2}} - 6\omega) - 2B_{34}],$
де $A_{ij} = (36\omega^2-1)^{-\frac{3}{2}}[C_i\sigma^{\frac{1}{3}}(4\sqrt{36\omega^2-1}-72\omega)+$
$+C_j\sigma^{-\frac{1}{3}}(4\sqrt{36\omega^2-1}+72\omega)],$

$$B_{ij} = 16(36\omega^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}[C_i\sigma^{\frac{1}{3}} - C_j\sigma^{-\frac{1}{3}}],$$
$$\sigma = 6\omega + \sqrt{36\omega^2 - 1}, \quad |6\omega| > 1, \quad \varphi = 4x_1 - \eta^2 > 0,$$
$$\omega = (\xi - x_1\eta + \frac{1}{6}\eta^3)\varphi^{-\frac{3}{2}}, \ \xi = x_0 + x_3, \ \eta = x_0 - x_3.$$

$M_{10}:$

$$E_1 = \sigma^{-1}(1+\xi^2)^{-1}\{x_1C_5 - x_2C_6 - (1+\omega^2)^{-1}[\xi x_1(C_1\omega +$$
$$+C_2) + \xi x_2(C_3\omega + C_4) - \frac{1}{2}(1-\xi^2)(x_1(C_1 - \omega C_2) +$$
$$+x_2(C_3 - \omega C_4))]\} + \frac{1}{2}\sigma^{-2}(1+\xi^2)(1+\omega^2)^{-1}[x_1(C_1 - \omega C_2) -$$
$$-x_2(C_3 - \omega C_4)],$$
$$E_2 = \sigma^{-1}(1+\xi^2)^{-1}\{x_1C_6 + x_2C_5 + (1+\omega^2)^{-1}[\xi x_1(C_3\omega +$$
$$+C_4) - \xi x_2(C_1\omega + C_2) + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(x_2(C_1 - \omega C_2) -$$
$$-x_1(C_3 - \omega C_4))]\} + \frac{1}{2}\sigma^{-2}(1+\xi^2)(1+\omega^2)^{-1}[x_1(C_3 - \omega C_4) +$$
$$+x_2(C_1 - \omega C_2)],$$
$$E_3 = \sigma^{-1}(1+\omega^2)^{-1}[C_1(\omega+\xi) + C_2(1-\xi\omega)],$$
$$H_1 = -\sigma^{-1}(1+\xi^2)^{-1}\{x_1C_6 + x_2C_5 + (1+\omega^2)^{-1}[\xi x_1(C_3\omega +$$
$$+C_4) - \xi x_2(C_1\omega + C_2) + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(x_2(C_1 - \omega C_2) -$$
$$-x_1(C_3 - \omega C_4))]\} + \frac{1}{2}\sigma^{-2}(1+\xi^2)(1+\omega^2)^{-1}[x_1(C_3 - \omega C_4) +$$
$$+x_2(C_1 - \omega C_2)],$$
$$H_2 = \sigma^{-1}(1+\xi^2)^{-1}\{x_1C_5 - x_2C_6 - (1+\omega^2)^{-1}[\xi x_1(C_1\omega +$$
$$+C_2) + \xi x_2(C_3\omega + C_4) - \frac{1}{2}(1-\xi^2)(x_1(C_1 - \omega C_2) +$$
$$+x_2(C_3 - \omega C_4))]\} - \frac{1}{2}\sigma^{-2}(1+\xi^2)(1+\omega^2)^{-1}[x_1(C_1 - \omega C_2) -$$
$$-x_2(C_3 - \omega C_4)],$$
$$H_3 = \sigma^{-1}(1+\omega^2)^{-1}[C_3(\omega+\xi) + C_4(1-\xi\omega)],$$

де $\sigma = x_1^2 + x_2^2, \ \omega = \eta(1+\xi^2)\sigma^{-1} - \xi, \ \eta = x_0 + x_3,$
$\xi = x_0 - x_3.$

У наведених вище розв'язках рівнянь Максвелла (3.36) C_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$—довільні дійсні сталі інтегрування.

3.5. Висновки до розділу 3

Системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, які інваріантні відносно конформної групи локальних перетворень $C(1,3)$ та її підгруп (групи Пуанкаре $P(1,3)$ та розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$), займають провідне місце серед модельних систем диференціальних рівнянь сучасної релятивістської фізики. Такими, наприклад, є рівняння Максвелла, Дірака, Кеммера–Деффіна–Петьє, Дірака–Фірца–Паулі, Вейля. Не дивлячись на високі симетрійні властивості цих рівнянь, метод симетрійної редукції, за деякими винятками, не набув систематичного використання для побудови їх точних розв'язків. Це, перш за все, пов'язано з великим обсягом допоміжних обрахунків, які потрібно виконати, щоб побудувати анзац, який буде редукувати досліджувану систему диференціальних рівнянь до системи рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних (наприклад, до системи звичайних диференціальних рівнянь).

Побудована у третьому розділі універсальна лінійна конструкція конформно–інваріантних анзаців дозволяє суттєво зменшити об'єм допоміжних обрахунків, що, на нашу думку, робить розв'язання задачі систематичної редукції $P(1,3)$–, $\tilde{P}(1,3)$– та $C(1,3)$–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь конструктивним.

Ефективність використання побудованих анзаців продемонстровано на прикладові рівнянь Максвелла у вакуумі, для яких отримано 10 нових багатопараметричних сімей точних розв'язків (полів Максвелла). Зауважимо, що побудовані поля Максвелла не є ортогональними. Але простими обрахунками нескладно отримати умови для сталих C_j, при виконанні яких ці поля будуть ортогональними. Так, наприклад, для розв'язку, який відповідає підалгебрі M_1, вимога $\mathbf{EH} = 0$ приводить до рівностей $C_2C_3 = C_1C_4,\ C_1C_3 = 0$, а для розв'язку, який відповідає підалгебрі M_{10} — до рівностей $C_2C_6 = C_4C_5,\ C_1C_6 = C_1C_3 + C_2C_4 + C_3C_5$.

На закінчення коротко підсумуємо отримані результати:

1) побудовано лінійну конструкцію конформно–інваріантних анзаців, яким відповідає симетрійна редукція $P(1,3)$–, $\tilde{P}(1,3)$– та $C(1,3)$–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь;

2) проведено симетрійну редукцію і побудовано 10 нових багатопараметричних розв'язків рівнянь Максвелла у вакуумі.

РОЗДІЛ 4

Симетрійна редукція та точні розв'язки $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського

Четвертий розділ дисертації присвячений використанню високих симетрійних властивостей $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського для побудови їх точних розв'язків.

Загальну постановку задачі та огляд відомих результатів ми поводимо в першому підрозділі розділу. Тут же ми зводимо лінійну форму інваріантних анзаців, яку отримано в третьому розділі, до вигляду, який є зручним для симетрійної редукції саме рівнянь Янга–Міллса.

Процедура симетрійної редукції рівнянь Янга–Міллса за підалгебрами алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ та розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,3)$ до систем звичайних диференціальних рівнянь розглянута в другому підрозділі. Також, в цьому підрозділі ми зупинилися і на симетрійній редукції самодуальних рівнянь Янга–Міллса.

Побудові точних (інваріантних) розв'язків рівнянь Янга–Міллса присвячений третій підрозділ четвертого розділу.

У четвертому підрозділі підведено підсумки та зроблено висновки до четвертого розділу.

Основні результати розділу опубліковані в статтях [33, 38, 155, 162, 209] та оглядові [208].

4.1. Симетрійні властивості рівнянь Янга–Міллса та лінійна форма анзаців

Наріжним каменем у фундамент одного із напрямків сучасної теоретичної фізики, де концепція калібровних полів обумовлена суто фізичними міркуваннями, лягла класична на сьогоднішній день робота Янга–Міллса [198]. Все більшого авторитету набувають переконання, згідно з якими, чотири фундаментальні фізичні взаємодії (гравітаційна, електромагнітна, слаба й сильна) обумовлені саме калібровними полями.

Найпростішим прикладом калібровної теорії в $(1+3)$–вимірному просторі є вільна електромагнітна система із калібровною групою $U(1)$. Вона складається із лінійних рівнянь Максвелла. Найпростішим прикладом неабелевої калібровної групи є $SU(2)$. Ця група відповідає триплету калібровних полів (янг–міллсівських калібровних потенціалів), які є множиною векторних полів $\mathbf{A}_\mu(x) = (A^a_\mu(x), a = 1, 2, 3)$, де $\mu = 1, 2, 3, 4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ у випадку чотиривимірного евклідового простору, та $\mu = 0, 1, 2, 3,\ x = (x_0 = t, x_1, x_2, x_3) = (t, \mathbf{x})$ у випадку простору Мінковського. Матричне векторне поле $A_\mu = A_\mu(x)$ визначається так:

$$A_\mu = e\frac{\sigma_a}{2i}A^a_\mu.$$

Тут σ_a — відомі матриці Паулі

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e —дійсна стала, яку називають калібровною сталою зв'язку.

Із матричних калібровних потенціалів будується матричнозначне калібровне поле напруженості (тензор напруженості поля)

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_\nu - \partial^\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

або, в явній покомпонентній формі,

$$F_{\mu\nu} \equiv e\frac{\sigma_a}{2i}F^a_{\mu\nu}, \quad F^a_{\mu\nu} = \partial^\mu A^a_\nu - \partial^\nu A^a_\mu + ef^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu.$$

У вище наведених виразах і далі $\partial_\mu = \partial_{x_\mu}$, піднімання та опускання індексів μ, ν здійснюється за допомогою метричного тензора простору, де визначені поля Янга–Міллса (зокрема, для випадку евклідового простору підняті й опущені індекси можна не розрізняти), f^a_{bc}—структурні константи, які визначають алгебру Лі калібровної групи (у випадку групи $SU(2)$ $f^a_{bc} = \varepsilon_{abc}$, де ε_{abc}—тривалентний повністю антисиметричний сталий тензор із $\varepsilon_{123} = 1, a, b, c = 1, 2, 3$), і, нарешті, де це спеціально не оговорено, за індексами, що повторюються, передбачено підсумовування в межах їх зміни.

$SU(2)$ рівняння Янга–Міллса отримуються як рівняння Ейлера–Лагранжа із лагранжиану

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

й мають вигляд

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A^\mu, F_{\mu\nu}] = [D_\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{4.1}$$

де $D_\mu = \partial_\mu + A^\mu$—коваріантна похідна.

Неабелеві калібровні теорії, одним із прикладів яких є ця модель, вивчаються вже більше тридцяти років. Точним розв'язкам рівнянь Янга–Міллса (4.1) присвячено багато робіт (див., наприклад, огляд [94] та монографію [62]). При цьому зауважимо, що більш інтенсивно досліджуються рівняння (4.1), де поля Янга–Міллса визначені у просторі Евкліда. Це, перш за все, пов'язано із існуванням для евклідових систем монопольних та інстантонних розв'язів [60, 62]. Відзначимо, що ці та інші важливі класи точних розв'язків системи (4.1) можна отримувати як розв'язки $SU(2)$ самодуальних рівнянь Янга–Міллса

$$F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

В (4.2) для випадку, коли поля Янга–Міллса визначені в евклідовому просторі, $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$ $(\mu, \nu, \lambda, \rho = 1, 2, 3, 4)$ де $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ —чотиривалентний повністю антисиметричний сталий тензор, і рівняння (4.2) складають систему дійсних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Саме властивість самодуальності є однією із визначальних умов інстантонних розв'язків рівнянь (4.1) в евклідовому просторі, які було отримано в результаті використання анзацу, запропонованого т'Офтом [148], Карріганом та Феєрлі [60], Вілчеком [196], Віттеном [197]. Самодуальними є й відомий монопольний розв'язок Прасада–Зоммерфельда [185] та конструкція Атьяха–Хітчіна–Дрінфельда–Маніна [96].

Також добре відомо [94], що самодуальні рівняння Янга–Міллса (4.2) є еквівалентними умові сумісності лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (пар Лакса). Внаслідок цього, вони допускають зведення до добре вивчених інтегровних (методами оберненої задачі розсіювання) рівнянь, як то: рівнянь Ейлера–Арнольда, Бюргерса, Деві–Стюартсона (Чакраварті й інші [106, 107]) та рівнянь Ліувілля й sine–Гордона (Тейфель [193]).

У випадку ж , коли поля Янга–Міллса визначені в просторі Мінковського, $*F_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho}$ $(\mu, \nu, \lambda, \rho = 0, 1, 2, 3)$, і рівняння (4.2) складають систему комплексних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, внаслідок чого використання згаданих вище підходів та результатів для аналізу $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса (4.1) в просторі Мінковського має істотний, але неминучий недолік: побудовані таким чином розв'язки рівнянь (4.1) є комплексними.

З іншого боку, добре відомо [191] (див. також [16]), що рівняння (4.1) мають багату симетрію. А саме, їх максимальною, в класичному розумінні Лі, групою інваріантності є група $G \otimes SU(2)$, де G збігається або із конформною групою $C(1,3)$, якщо поля Янга–Міллса визначені в просторі Мінковського, або із конформною групою $C(4)$, якщо поля Янга–Міллса визначені в просторі Евкліда, або із конформною групою $C(2,2)$, якщо поля Янга–Міллса визначені в псевдоевклідовому просторі із метрикою $(- \ - \ + \ +)$. Зауважимо, що максимальні групи інваріантності самодуальних рівнянь Янга–Міллса (4.2) збігаються із максимальними групами інваріантності відповідних рівнянь (4.1).

Наявність високої симетрії дозволяє, для побудови точних розв'язків рівнянь (4.1) та зведення системи (4.2) до відомих інтегровних рівнянь, ефективно використовувати метод симетрійної редукції. Так, зокрема, Іванова й Попов (див. [151] та цитовану там літературу) використали деякі із підгруп групи $P(2,2)$, яка є підгрупою конформної групи $C(2,2)$, і методом симетрійної редукції звели самодуальні рівняння Янга–Міллса (4.2), визначені в псевдоевклідовому просторі із метрикою $(-\ -\ +\ +)$, до ряду відомих інтегровних систем (як то: рівняння Ернста, Шредінгера, система Ейлера–Калогера–Мозера, тощо). Систематичне вивчення проблеми симетрійної редукції за підгрупами групи Евкліда $E(4)$, яка є підгрупою конформної групи $C(4)$, для системи (4.2) в просторі Евкліда здійснено в роботах Легарі та інших [153, 164]. Також зауважимо, що відомі класичні розв'язки рівнянь (4.1) в просторі Евкліда теж отримуються в симетрійному підході (див., наприклад, [87, 128]). Такими, зокрема є, меронний розв'язок Альфаро–Фубіні–Фурлана [95], який не є самодуальним, та інстантонний розв'язок Бєлавіна–Полякова–Шварца–Тюпкіна [101].

Симетрійна ж редукція $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського, наскільки нам відомо, розглядалася лише в роботі [127] (див., також, [87]). Там, із використанням двох інваріантних анзаців було здійснено симетрійну редукцію рівнянь (4.1) до систем звичайних диференціальних рівнянь і побудовано кілька точних розв'язків цих рівнянь.

Враховуючи сказане вище, бачимо, що для $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського $R^{1,3}$ саме симетрійна редукція є основним генератором точних розв'язків. У зв'язку з цим підвищується інтегрес до систематичного проведення процедури симетрійної редукції цих рівнянь.

4.1.1. Симетрійні властивості $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса. Класичні рівняння Янга–Міллса $SU(2)$ калібровної теорії в просторі Мінковського $R^{1,3}$ складають систему дванадцяти нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, яка має такий явний вигляд:

$$\begin{aligned}&\partial_\nu\partial^\nu \mathbf{A}_\mu - \partial^\mu\partial_\nu \mathbf{A}_\nu + e[(\partial_\nu \mathbf{A}_\nu)\times \mathbf{A}_\mu - \\ &-2(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\times \mathbf{A}_\nu + (\partial^\mu \mathbf{A}_\nu)\times \mathbf{A}^\nu] + e^2\mathbf{A}_\nu \times (\mathbf{A}^\nu \times \mathbf{A}_\mu) = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

У цьому розділі роботи індекси $\mu,\nu,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma = 0,1,2,3$; їх піднімання та опускання здійснюється за допомогою метричного тензора $g_{\mu\nu}$ простору Мінковського, $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_\mu(x_0,\mathbf{x}) = (A^1_\mu(x_0,\mathbf{x}), A^2_\mu(x_0,\mathbf{x}), A^3_\mu(x_0,\mathbf{x}))^{\mathbf{T}}$— вектор–потенціали поля Янга–Міллса (надалі ми називаємо їх просто полями Янга–Міллса).

Як було відзначено вище, рівняння (4.3) мають багату симетрію. А саме, максимальною (в сенсі Лі) групою інваріантності рівнянь (4.3) є група $C(1,3)\otimes SU(2)$, де $C(1,3)$— 15–параметрична група локальних перетворень, яка генерується векторними полями

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x_\mu} \\ J_{\mu\nu} &= x^\mu\partial_{x_\nu} - x^\nu\partial_{x_\mu} + A^{a\mu}\partial_{A^a_\nu} - \partial A^{a\nu}\partial_{A^a_\mu}, \\ D &= x_\mu\partial_{x_\mu} - A^a_\mu\partial_{A^a_\mu}, \\ K_\mu &= 2x^\mu D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_\mu} + 2A^{a\mu}x_\nu\partial_{A^a_\nu} - 2A^a_\nu x^\nu\partial_{A^a_\mu}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

а $SU(2)$—нескінченно–параметрична унітарна група калібровних перетворень з генератором

$$Q = (\varepsilon_{abc}A^b_\mu\omega^c(x_0,\mathbf{x}) + e^{-1}\partial_{x_\mu}\omega^a(x_0,\mathbf{x}))\partial_{A^a_\mu}. \tag{4.5}$$

В (4.4), (4.5) і далі $\partial_{A^a_\mu} = \frac{\partial}{\partial A^a_\mu}$, $\omega^c(x_0,\mathbf{x})$—довільні дійсні гладкі функції, $a,b,c = 1,2,3$, ε_{abc}—повністю антисиметричний тензор третього рангу ($\varepsilon_{123} = 1$).

Неважко переконатися у тому, що векторні поля (4.4) можна подати у вигляді (3.11), якщо покласти

$$
\begin{aligned}
S_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.6) \\
S_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(тут 0—нульова, а I—одинична 3×3–матриці), матрицю E—рівною одиничній матриці порядку 12, а сталу k —степінь конформності алгебри $c(1,3)$ з базисними операторами (4.4), рівною 1.

Одним із можливих застосувань нетривіальної симетрії диференціального рівняння є побудова нових точних розв'язків цього рівняння за вже відомими (метод розмноження розв 'язків [87, 128]).

Для практичного застосування цього методу у нашому випадкові, потрібно знати формули скінченних перетворень, які генеруються операторами (4.4), (4.5). Ці формули відомі [94] і мають такий вигляд:

1) група трансляцій (генератор $X = \tau_\mu P_\mu$)

$$\overline{x}_\mu = x_\mu + \tau_\mu, \overline{A}^d_\mu = A^d_\mu;$$

2) група Лоренца $O(1,3)$

   (a) група поворотів тривимірного евклідового простору (генератор $X = \tau J_{ab}$)

$$\overline{x}_0 \;=\; x_0, \quad \overline{x}_c = x_c, \quad c \neq a, \quad c \neq b,$$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_a &= x_a\cos\tau + x_b\sin\tau,\\
\overline{x}_b &= x_b\cos\tau - x_a\sin\tau,\\
\overline{A}_0^d &= A_0^d, \overline{A}_c^d = A_c^d, \quad c\neq a,\ c\neq b,\\
\overline{A}_a^d &= A_a^d\cos\tau + A_b^d\sin\tau,\\
\overline{A}_b^d &= A_b^d\cos\tau - A_a^d\sin\tau;
\end{aligned}$$

(b) перетворення Лоренца (генератор $X = \tau J_{0a}$)

$$\begin{aligned}
\overline{x}_0 &= x_0\cosh\tau + x_a\sinh\tau,\\
\overline{x}_a &= x_a\cosh\tau + x_0\sinh\tau,\\
\overline{A}_0^d &= A_0^d\cosh\tau + A_a^d\sinh\tau,\\
\overline{A}_a^d &= A_a^d\cosh\tau + A_0^d\sinh\tau,\\
\overline{x}_b &= x_b, \quad \overline{A}_b^d = A_b^d, \quad b\neq a;
\end{aligned}$$

3) група перетворення подібності (генератор $X = \tau D$)

$$\overline{x}_\mu = x_\mu\, e^\tau, \quad \overline{A}_\mu^d = A_\mu^d e^{-\tau}.$$

4) група конформних перетворень (генератор $X = \tau_\mu K^\mu$)

$$\begin{aligned}
\overline{x}_\mu &= (x_\mu - \tau_\mu x_\nu x^\nu)\sigma^{-1}(x_0,\mathbf{x}),\\
\overline{A}_\mu^d &= [g_{\mu\nu}\sigma(x_0,\mathbf{x}) + 2(x_\mu\tau_\nu - x_\nu\tau_\mu +\\
&\quad +2\tau_\alpha x^\alpha\tau_\mu x_\nu - x_\alpha x^\alpha\tau_\mu\tau_\nu - \tau_\alpha\tau^\alpha x_\mu x_\nu]A^{d\nu}.
\end{aligned}$$

5) група калібровних перетворень (генератор $X = Q$)

$$\begin{aligned}
\overline{x}_\mu &= x_\mu,\\
\overline{A}_\mu^d &= A_\mu^d\cos\omega + \varepsilon_{dbc}A_\mu^b n^c\sin\omega + 2n^d n^b A_\mu^b\sin^2\frac{\omega}{2} +\\
&\quad +e^{-1}[\frac{1}{2}n^d\partial_{x_\mu}\omega + \frac{1}{2}(\partial_{x_\mu}n^d)\sin\omega + \varepsilon_{dbc}(\partial_{x_\mu}n^b)n^c].
\end{aligned}$$

У наведених вище формулах $\sigma(x_0,\mathbf{x}) = 1 - \tau_\alpha\tau^\alpha + (\tau_\alpha\tau^\alpha)(x_\beta x^\beta)$, $n^a = n^a(x_0,\mathbf{x})$—складові одиничного вектора, які визначаються із рівності $\omega^a(x_0,\mathbf{x}) = \omega(x_0,\mathbf{x})n^a(x_0,\mathbf{x})$, $a,b,c,d = 1,2,3$.

Виходячи із наведених співвідношень, нескладно отримати формули розмноження розв'язків рівнянь Янга–Міллса вищеперерахованими групами перетворень. Опускаючи досить громіздкі обчислення, ми відразу наводимо отриманий результат.

1) Група трансляцій:

$$A_\mu^a(x) = u_\mu^a(x+\tau).$$

2) Група Лоренца:

$$\begin{aligned} A_\mu^d(x) &= a_\mu u_0^d(ax, bx, cx, dx) + b_\mu u_1^d(ax, bx, cx, dx) + \\ &+ c_\mu u_2^d(ax, bx, cx, dx) + d_\mu u_3^d(ax, bx, cx, dx). \end{aligned}$$

3) Група перетворення подібності:

$$A_\mu^d(x) = e^\tau u_\mu^d(xe^\tau).$$

4) Група конформних перетворень:

$$\begin{aligned} A_\mu^d(x) &= [g_{\mu\nu}\sigma^{-1}(x) + 2\sigma^{-2}(x)(x_\mu\tau_\nu - x_\nu\tau_\mu + 2\tau_\alpha x^\alpha \tau_\mu x_\nu - \\ &- x_\alpha x^\alpha \tau_\mu \tau_\nu - \tau_\alpha \tau^\alpha x_\mu x_\nu)]u^{d\nu}((x - \tau(x_\alpha x^\alpha))\sigma^{-1}(x)). \end{aligned}$$

5) Група калібровних перетворень:

$$\begin{aligned} A_\mu^d(x) &= u_\mu^d \cos\omega + \varepsilon_{dbc} u_\mu^b n^c \sin\omega + 2n^d n^b u_\mu^b \sin^2\frac{\omega}{2} + \\ &+ e^{-1}[\frac{1}{2} n^d \partial_{x_\mu}\omega + \frac{1}{2}(\partial_{x_\mu} n^d)\sin\omega + \varepsilon_{dbc}(\partial_{x_\mu} n^b)n^c]. \end{aligned}$$

Тут $u_\mu^d(x)$—довільний відомий розв'язок рівняння Янга–Міллса, $x = (x_0, \mathbf{x}), \tau, \tau_\mu$ —довільні параметри; $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$—параметри, які задовольняють рівності

$$\begin{aligned} a_\mu a^\mu &= -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1, \\ a_\mu b^\mu &= a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0. \end{aligned}$$

Також використано позначення $x+\tau = \{x_\mu+\tau_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$, $ax = a_\mu x^\mu$, $bx = b_\mu x^\mu$, $cx = c_\mu x^\mu$, $dx = d_\mu x^\mu$.

Отже, якщо використати формули розмноження розв'язків, то кожен частинний розв'язок рівнянь Янга–Міллса розростеться до багатопараметричної сім'ї точних розв'язків цієї системи.

Таблиця 4.1

генератори	Дія Ψ_a		
	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
P_0	$-P_0$	P_0	$-P_0$
P_1	$-P_1$	$-P_1$	P_1
P_k $(k=2,3)$	$-P_k$	P_k	$-P_k$
J_{03}	J_{03}	J_{03}	J_{03}
J_{12}	J_{12}	$-J_{12}$	$-J_{12}$
G_1	G_1	$-G_1$	$-G_1$
G_2	G_2	G_2	G_2
M	$-M$	M	$-M$
T	$-T$	T	$-T$
D	D	D	D
K_0	$-K_0$	K_0	$-K_0$
K_1	$-K_1$	$-K_1$	K_1
K_m $(m=2,3)$	$-K_m$	K_m	$-K_m$

Зупинимося ще на такій властивості рівнянь (4.3). Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що вони, окрім групи $C(1,3)\otimes SU(2)$, допускають також такі три дискретні симетрії:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &: \overline{x}_\mu = -x_\mu, \quad \overline{\mathbf{A}}_\mu = -\mathbf{A}_\mu;\\
\Psi_2 &: \overline{x}_0 = -x_0, \quad \overline{x}_1 = -x_1, \overline{x}_2 = x_2, \ \overline{x}_3 = x_3,\\
&\quad \overline{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0, \ \overline{\mathbf{A}}_1 = -\mathbf{A}_1, \ \overline{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2, \ \overline{\mathbf{A}}_3 = \mathbf{A}_3;\\
\Psi_3 &: \overline{x}_0 = -x_0, \quad \overline{x}_1 = x_1, \overline{x}_2 = -x_2, \ \overline{x}_3 = -x_3,\\
&\quad \overline{\mathbf{A}}_0 = -\mathbf{A}_0, \ \overline{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1, \ \overline{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2, \ \overline{\mathbf{A}}_3 = -\mathbf{A}_3.
\end{aligned}$$

Дія наведених дискретних симетрій на множині генераторів $P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu$ (4.4) задана в таблиці 4.1, де $G_m = J_{0m} - J_{m3}$, $(m = 1, 2)$, $M = P_0 + P_3$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$.

У третьому розділі роботи, під час класифікації підалгебр рангу 3 алгебр $p(1,3)$ та $\tilde{p}(1,3)$, нам довелося обмежити себе у використанні дискретних симетрій Φ_a, дія яких на генератори $P_\mu, J_{\mu\nu}, D$ наведена в таблиці 3.1. Порівнявши таблиці 3.1 та 4.1, переконуємося, що на множині операторів $P_\mu, J_{\mu\nu}, D$ дія дискретних симетрій Φ_a та Ψ_a збігається: $\Phi_a P_\mu = \Psi_a P_\mu$, $\Phi_a J_{\mu\nu} = \Psi_a J_{\mu\nu}$, $\Phi_a D = \Psi_a D$ для всіх $a = 1, 2, 3$. Це дає можливість використовувати дискретні симетрії для спрощення вигляду базисних операторів підалгебр алгебр $p(1,3)$, $\tilde{p}(1,3)$, що і буде надалі враховано.

4.1.2. Анзаци для полів Янга–Міллса. Згідно з результатами третього розділу, конформно–інваріантні анзаци для полів Янга–Міллса, яким відповідає редукція рівнянь (4.3) до систем звичайних диференціальних рівнянь, можна подати в лінійному вигляді

$$\mathbf{A}_\mu(x_0\mathbf{x}) = \Lambda \mathbf{B}_\nu(\omega) \tag{4.7}$$

де $\Lambda = \Lambda(x_0, \mathbf{x})$—деяка відома невироджена матриця порядку 12, $\mathbf{B}_\nu(\omega) = (B^1_\nu(\omega),\ B^2_\nu(\omega), B^3_\nu(\omega))^T$—нові шукані вектор–функції незалежної змінної $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$.

Очевидним є те, що, побудована в твердженнях 3.3.1–3.3.3 форма матриць Λ в анзаці (4.7) є досить незручною для їх практичних прикладань. Тому, як і під час розгляду рівнянь Максвелла, зведемо їх до більш зручного вигляду.

Як випливає із результатів твердження 3.3.1, для пуанкаре–інваріантних анзаців

$$\Lambda = \exp(2\theta_1 H_1)\exp(2\theta_2 H_2)\exp(-\theta_0 S_{03})\exp(\theta_3 S_{12}),$$

де $\theta_\mu = \theta_\mu(x_0, \mathbf{x})$ —відомі гладкі дійсні функції, $H_1 = S_{01} - S_{13}$, $H_2 = S_{02} - S_{23}$, а матриці $S_{\mu\nu}$—матриці (4.6), які реалізують матричне зображення алгебри Лі $o(1,3)$ групи Лоренца $O(1,3)$. Тоді експоненціальне відображення елементів алгебри $o(1,3)$, що є лінійними комбінаціями вказаних матриць, приводить до певних псевдоортогональних матриць.

Прямі обчислення показують, що

$$\Lambda = \begin{pmatrix} [\cosh\theta_0+\Phi] & -2[\Psi_1] & 2[\Psi_2] & [\sinh\theta_0-\Phi] \\ [-2\theta_1 e^{-\theta_0}] & [\cos\theta_3] & [-\sin\theta_3] & [2\theta_1 e^{-\theta_0}] \\ [-2\theta_2 e^{-\theta_0}] & [\sin\theta_3] & [\cos\theta_3] & [2\theta_2 e^{-\theta_0}] \\ [\sinh\theta_0+\Phi] & -2[\Psi_1] & 2[\Psi_2] & [\cosh\theta_0+\Phi] \end{pmatrix},$$

де $\Phi = 2(\theta_1^2+\theta_2^2)e^{-\theta_0}$, $\Psi_1 = \theta_1\cos\theta_3 + \theta_2\sin\theta_3$, $\Psi_2 = \theta_1\sin\theta_3 - \theta_2\cos\theta_3$, запис $[f]$ означає $f \cdot I$, де I—одинична матриця третього порядку.

Отже, пуанкаре–інваріантний анзац (4.7) має такий явний вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \cosh\theta_0\mathbf{B}_0 + \sinh\theta_0\mathbf{B}_3 - 2(\theta_1\cos\theta_3+\theta_2\sin\theta_3)\mathbf{B}_1 + \\ &\quad +2(\theta_1\sin\theta_3-\theta_2\cos\theta_3)\mathbf{B}_2 + 2(\theta_1^2+\theta_2^2)e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3), \\ \mathbf{A}_1 &= \cos\theta_3\mathbf{B}_1 - \sin\theta_3\mathbf{B}_2 - 2\theta_1 e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3), \\ \mathbf{A}_2 &= \sin\theta_3\mathbf{B}_1 + \cos\theta_3\mathbf{B}_2 - 2\theta_2 e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3), \\ \mathbf{A}_3 &= \sinh\theta_0\mathbf{B}_0 + \cosh\theta_0\mathbf{B}_3 - 2(\theta_1\cos\theta_3+\theta_2\sin\theta_3)\mathbf{B}_1 + \\ &\quad +2(\theta_1\sin\theta_3-\theta_2\cos\theta_3)\mathbf{B}_2 + 2(\theta_1^2+\theta_2^2)e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3), \end{aligned} \tag{4.8}$$

де $\mathbf{B}_\mu = \mathbf{B}_\mu(\omega)$, значення функцій θ_μ, ω, які наведені в твердженні 3.3.1

Підставивши анзац (4.8) в рівняння (4.3), ми прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\mathbf{B}_\mu(\omega)$. Якщо ми знайдемо загальний або частинний розв'язок редукованої системи, то, підставивши його в (4.8), отримаємо точний розв'язок рівнянь Янга–Міллса (4.3). Але отриманий так розв'язок матиме неприємну особливість: незалежні змінні x_μ входитимуть до нього асиметрично. У той же час, у рівняннях (4.3) усі незалежні змінні є рівноправними.

Щоб позбутися цього недоліку, використовуємо процедуру розмноження розв'язку перетвореннями із групи Лоренца, які наведені вище, і в результаті приходимо до анзацу

$$\mathbf{A}_\mu(x) = a_{\mu\nu}(x)\mathbf{B}^\nu(\omega), \tag{4.9}$$

де

$$a_{\mu\nu}(x) = (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu)\cosh\theta_0 + (d_\mu a_\nu - d_\nu a_\mu)\sinh\theta_0 +$$
$$+2(a_\mu + d_\mu)[(\theta_1\cos\theta_3 + \theta_2\sin\theta_3)b_\nu + (\theta_2\cos\theta_3 - \theta_1\sin\theta_3)c_\nu +$$
$$+(\theta_1^2 + \theta_2^2)e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu)] + (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\sin\theta_3 - \tag{4.10}$$
$$-(c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\cos\theta_3 - 2e^{-\theta_0}(\theta_1 b_\mu + \theta_2 c_\mu)(a_\nu + d_\nu).$$

Тут, як і вище, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $x = (x_0, \mathbf{x})$, $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$—довільні параметри, які задовольняють співвідношення

$$a_\mu a^\mu = -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1,$$
$$a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0.$$

Тим самим ми записали пуанкаре–інваріантний анзац (4.8) в явно коваріантному вигляді.

Перш ніж навести значення функцій θ_μ, ω в лоренц–розмноженому вигляді, нагадаємо, що використання дискретних симетрій Φ_a $(a = 1, 2, 3)$ дозволяє дещо спростити вигляд підалгебр алгебри $p(1, 3)$, а отже і вигляд відповідних їм анзаців. А саме, дані симетрії дозволяють покласти в підалгебрах L_i^j $(i = 10, 11, 13, 17)$ значення j рівним 2, тобто, у відповідних анзацах $(-1)^j = 1$. Тому значення функцій θ_μ, ω в анзаці (4.9), (4.10) для кожної із підалгебр алгебри $p(1, 3)$, які наведені в твердженні 3.2.1, такі:

$$L_1 : \theta_\mu = 0, \omega = dx; \quad L_2 : \theta_\mu = 0, \omega = ax;$$
$$L_3 : \theta_\mu = 0, \omega = kx; \quad L_4 : \theta_0 = -\ln|kx|,$$
$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \;\; \theta_3 = \alpha\ln|kx|, \quad \omega = (ax)^2 - (dx)^2;$$
$$L_5 : \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = cx;$$
$$L_6 : \theta_0 = -bx, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = cx;$$

$$L_7 : \theta_0 = -bx, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = bx - \ln|kx|;$$

$$L_8 : \theta_0 = \alpha \arctan(bx(cx)^{-1}), \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,$$

$$\theta_3 = -\arctan(bx(cx)^{-1}), \quad \omega = (bx)^2 + (cx)^2;$$

$$L_9 : \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -ax, \quad \omega = dx;$$

$$L_{10} : \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = dx, \quad \omega = ax;$$

$$L_{11} : \theta_0 = \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}kx, \quad \omega = ax - dx;$$

$$L_{12} : \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(bx - \alpha cx)(kx)^{-1},$$

$$\theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = kx;$$

$$L_{13} : \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}cx, \quad \omega = kx; \tag{4.11}$$

$$L_{14} : \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{4}kx, \quad \omega = 4bx + (kx)^2;$$

$$L_{15} : \theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{4}kx, \quad \omega = 4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2;$$

$$L_{16} : \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = -\arctan(bx(cx)^{-1}),$$

$$\omega = (bx)^2 + (cx)^2;$$

$$L_{17} : \theta_0 = \theta_3 = 0, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(cx + (\alpha + kx)bx)(1 + kx(\alpha + kx))^{-1},$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}(bx - cx \cdot kx)(1 + kx(\alpha + kx))^{-1}, \quad \omega = kx;$$

$$L_{18} : \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1},$$

$$\theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = (ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2;$$

$$L_{19} : \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1}, \quad \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = cx;$$

$$L_{20}: \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1},$$

$$\theta_2 = \theta_3 = 0, \quad \omega = \ln|kx| - cx;$$

$$L_{21}: \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}(bx - \ln|kx|)(kx)^{-1},$$

$$\theta_2 = \theta_3 = 0, \qquad \omega = \alpha\ln|kx| - cx;$$

$$L_{22}: \theta_0 = -\ln|kx|, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}bx(kx)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}cx(kx)^{-1},$$

$$\theta_3 = \alpha\ln|kx|, \quad \omega = (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2 - (dx)^2.$$

У формулах (4.11) $ax = a_\mu x^\mu$, $bx = b_\mu x^\mu$, $cx = c_\mu x^\mu$, $dx = d_\mu x^\mu$, $kx = ax + dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Згідно з твердженням 3.3.2, $\tilde{P}(1,3)$–інваріантні анзаци, окрім $P(1,3)$–інваріантних анзаців, вичерпуються анзацами (4.7), де матрицю Λ можна подати у вигляді

$$\Lambda = \exp\{2\theta_1 H_1\}\exp\{\theta_3 S_{12}\}\exp\{-\theta_0 S_{03}\}\exp\{(\ln\theta)E)\}.$$

Тут обов'язково $\theta_1\theta_3 = 0$, $\theta = \theta(x)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$, $\theta_1 = \theta_1(x)$, $\theta_3 = \theta_3(x)$, $x = (x_0, \mathbf{x})$, $H_1 = S_{01} - S_{13}$, $S_{\mu\nu}$—матриці (4.6), E—одинична матриця порядку 12. Безпосередні обчислення показують, що тут

$\Lambda =$

$$= \theta \begin{pmatrix} [\cosh\theta_0 + 2\theta_1^2 e^{-\theta_0}] & 2[-\theta_1\cos\theta_3] & 2[\theta_1\sin\theta_3] & [\sinh\theta_0 + 2\theta_1^2 e^{-\theta_0}] \\ 2[-\theta_1 e^{-\theta_0}] & [\cos\theta_3] & [-\sin\theta_3] & 2[\theta_1 e^{-\theta_0}] \\ [0] & [\sin\theta_3] & [\cos\theta_3] & [0] \\ [\sinh\theta_0 + 2\theta_1^2 e^{-\theta_0}] & 2[-\theta_1\cos\theta_3] & 2[\theta_1\sin\theta_3] & [\cosh\theta_0 - 2\theta_1^2 e^{-\theta_0}] \end{pmatrix},$$

де запис $[f]$ означає $[f] = f \cdot I$, I—одинична матриця третього порядку. Тому анзац (4.7) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= \theta[\cosh\theta_0\mathbf{B}_0+\sinh\theta_0\mathbf{B}_3+2\theta_1^2e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3)+2\theta_1(\sin\theta_3\mathbf{B}_2-\cos\theta_3\mathbf{B}_1)],\\
\mathbf{A}_1 &= \theta[\cos\theta_3\mathbf{B}_1-\sin\theta_3\mathbf{B}_2-2\theta_1e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3)],\\
\mathbf{A}_2 &= \theta[\sin\theta_3\mathbf{B}_1+\cos\theta_3\mathbf{B}_2],\\
\mathbf{A}_3 &= \theta[\sinh\theta_0\mathbf{B}_0+\cosh\theta_0\mathbf{B}_3+2\theta_1e^{-\theta_0}(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_3)+\theta_1(\sin\theta_3\mathbf{B}_2-\cos\theta_3\mathbf{B}_1)].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Анзац (4.12), як і анзац (4.8), процедурою розмноження розв'язків перетвореннями групи Лоренца зводиться до анзацу в явно коваріантній формі:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_\mu(x) = \theta a_{\mu\nu}(x)\mathbf{B}^\nu(\omega) =\\
&= \theta\{(a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu)\cosh\theta_0 + (d_\mu a_\nu - d_\nu a_\mu)\sinh\theta_0 +\\
&+2(a_\mu + d_\mu)[\theta_1\cos\theta_3 b_\nu - \theta_1\sin\theta_3 c_\nu + \theta_1^2 e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu)] +\\
&+(b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\sin\theta_3 - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\cos\theta_3 -\\
&-2e^{-\theta_0}\theta_1 b_\mu(a_\nu + d_\nu)\}\mathbf{B}^\nu(\omega).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

При цьому функції $\theta, \theta_0, \theta_1, \theta_3$ для кожної із підалгебр $\tilde{P}(1,3)$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
F_1 \ &: \ \theta = |bx|^{-1}, \ \ \theta_0 = \theta_1 = \theta_3 = 0, \ \ \omega = cx(bx)^{-1};\\
F_2 \ &: \ \theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}, \ \theta_0 = \theta_1 = 0, \ \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\\
&\quad \omega = \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\alpha\arctan\frac{cx}{bx}, \ \alpha > 0;\\
F_3 \ &: \ \theta = |dx|^{-1}, \ \theta_0 = \theta_1 = 0, \ \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\\
&\quad \omega = ((bx)^2 + (cx)^2)(dx)^{-2};\\
F_4 \ &: \ \theta = |ax|^{-1}, \ \theta_0 = \theta_1 = 0, \ \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\\
&\quad \omega = ((bx)^2 + (cx)^2)(ax)^{-2};\\
F_5 \ &: \ \theta = |bx|^{-1}, \ \theta_0 = \alpha^{-1}\ln|bx|, \ \theta_1 = \theta_3 = 0,\\
&\quad \omega = cx(bx)^{-1}, \ \alpha > 0;\\
F_6 \ &: \ \theta = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}}, \ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|(ax - dx)(kx)^{-1}|,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& && \theta_1 = \theta_3 = 0, \\
& && \omega = (1-\alpha)\ln|ax - dx| + (1+\alpha)\ln|kx|,\ \alpha > 0; \\
F_7 &: && \theta = |cx|^{-1},\ \theta_0 = \alpha^{-1}\ln|cx|, \quad \theta_1 = \theta_3 = 0, \\
& && \omega = |kx|^{\alpha}|cx|^{1-\alpha},\ \alpha > 0; \\
F_8 &: && \theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|ax - dx|,\ \theta_1 = \theta_3 = 0, \\
& && \omega = kx - \ln|ax - dx|; \\
F_9 &: && \theta = |cx|^{-1},\ \theta_0 = \ln|cx|,\ \theta_1 = \theta_3 = 0, \\
& && \omega = kx - 2\ln|cx|; \\
F_{10} &: && \theta = |cx|^{-1},\ \theta_0 = \ln|(ax - dx)(cx)^{-1}|, \\
& && \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \omega = ((ax)^2 - (dx)^2)(cx)^{-2}; \qquad (4.14) \\
F_{11} &: && \theta = |cx|^{-1},\ \theta_0 = -\ln|kx(cx)^{-1}|, \\
& && \theta_1 = \theta_3 = 0, \quad \omega = cx(bx)^{-1}; \\
F_{12} &: && \theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = -\alpha\arctan\frac{cx}{bx},\ \theta_1 = 0, \\
& && \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx}, \quad \omega = \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\beta\arctan\frac{cx}{bx}, \\
& && \alpha \neq 0,\ \beta > 0; \\
F_{13} &: && \theta = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|(ax - dx)(kx)^{-1}|, \\
& && \theta_1 = 0, \quad \theta_3 = -\frac{1}{2\alpha}\ln|(ax - dx)(kx)^{-1}|, \\
& && \omega = (\alpha - \beta)\ln|ax - dx| + (\alpha + \beta)\ln|kx|,\ \alpha \neq 0,\ \beta > 0; \\
F_{14} &: && \theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|ax - dx|,\ \theta_1 = 0, \\
& && \theta_3 = -\frac{1}{2}\ln|ax - dx|, \quad \omega = kx - \ln|ax - dx|; \\
F_{15} &: && \theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = -\alpha\arctan\frac{cx}{bx},\ \theta_1 = 0, \\
& && \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx}, \\
& && \omega = \ln[((bx)^2 + (cx)^2)(kx)^{-2}] + 2\alpha\arctan\frac{cx}{bx}; \\
F_{16} &: && \theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln[((bx)^2 + (cx)^2)(kx)^{-2}],
\end{aligned}
$$

$$\theta_1 = 0,\ \theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\quad \omega = \ln[((bx)^2+(cx)^2)^{1-\alpha}(kx)^{2\alpha}] +$$
$$+2\beta\arctan\frac{cx}{bx},$$
$$0 \le |\alpha| \le 1,\ |\alpha|+\beta \ne 0;$$

$$F_{17}\ :\ \theta = ((bx)^2+(cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln((bx)^2+(cx)^2),\ \theta_1 = 0,$$
$$\theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\quad \omega = kx - \ln((bx)^2+(cx)^2) +$$
$$+2\alpha\arctan\frac{cx}{bx},\ \alpha\in\mathbf{R};$$

$$F_{18}\ :\ \theta = ((bx)^2+(cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln((bx)^2+(cx)^2),\ \theta_1 = 0,$$
$$\theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\quad \omega = kx + 2\arctan\frac{cx}{bx};$$

$$F_{19}\ :\ \theta = ((bx)^2+(cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln|kx(ax-dx)^{-1}|,\quad \theta_1 = 0,$$
$$\theta_3 = \arctan\frac{cx}{bx},\quad \omega = ((bx)^2+(cx)^2)|(ax)^2-(dx)^2|^{-1};$$

$$F_{20}\ :\ \theta = |(ax)^2-(bx)^2-(dx)^2|^{-\frac{1}{2}},$$
$$\theta_0 = \frac{1}{2\alpha}\ln|(ax)^2-(bx)^2-(dx)^2|,\quad \theta_1 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1},$$
$$\theta_3 = 0,\quad \omega = |kx|^{2\alpha}|(ax)^2-(bx)^2-(dx)^2|^{1-\alpha},\ 0<|\alpha|\le 1;$$

$$F_{21}\ :\ \theta = |cx\,kx - bx|^{-1},\ \theta_0 = \ln|cx\,kx-bx|,\quad \theta_1 = \frac{1}{2}cx,$$
$$\theta_3 = 0,\quad \omega = kx;$$

$$F_{22}\ :\ \theta = |kx|^{-\frac{1}{2}},\ \theta_0 = -\frac{1}{2}\ln|kx|,\quad \theta_1 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1},$$
$$\theta_3 = 0,\quad \omega = ax - dx + \ln|kx| - (bx)^2(kx)^{-1};$$

$$F_{23}\ :\ \theta = |cx|^{-1},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|cx|,\quad \theta_1 = -\frac{1}{4}kx,$$
$$\theta_3 = 0,\quad \omega = [4bx+(kx)^2](cx)^{-1};$$

$$F_{24}\ :\ \theta = |4bx+(kx)^2|^{-1},\ \theta_0 = \frac{1}{2}\ln|4bx+(kx)^2|,\ \theta_1 = -\frac{1}{4}kx,$$
$$\theta_1 = 0,\quad \omega = [ax-dx+bx\,kx+\frac{1}{6}(kx)^3]^2[4bx+(kx)^2]^{-3}.$$

Зауважимо, що із реалізації (4.4) векторних полів $P_\mu, J_{\mu\nu}, D$ випливає, що тут $k=1$. Також, як і у випадку алгебри $AP(1,3)$, ми скористалися тим, що дискретні симетрії Φ_a $(a=1,2,3)$ дозволяють у підалгебрах

F_i $(i = 8, 9, 17, 18, 21, 22, 23, 24)$ покласти $j = 2$, а тому у відповідних значеннях функцій θ, θ_μ $(\mu = 0, 1, 3), \omega$ має місце $(-1)^j = 1$.

Перейдемо тепер до симетрійної редукції рівнянь Янга–Міллса.

4.2. Симетрійна редукція $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса

Отримані у попередньому підрозділі анзаци (4.9)–(4.11) мають явно коваріантну форму. Це дозволяє провести симетрійну редукцію рівнянь (4.3) у загальному вигляді. Важливу роль в цих анзацах відіграє множник $a_{\mu\nu}$, який має ряд властивостей тензора другого порядку. Так, безпосередніми обчисленнями переконуємося, що мають місце такі рівності:

$$a_\mu^\gamma a_{\gamma\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
a_\mu^\gamma \frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x_\delta} &= -(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)\frac{\partial \theta_0}{\partial x_\delta} + (b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu)\frac{\partial \theta_3}{\partial x_\delta} + \\
&+2e^{-\theta_0}[(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)\cos\theta_3 - (k_\mu c_\nu - k_\nu c_\mu)\sin\theta_3]\frac{\partial \theta_1}{\partial x_\delta} + \\
&+2e^{-\theta_0}[(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)\sin\theta_3 + (k_\mu c_\nu - k_\nu c_\mu)\cos\theta_3]\frac{\partial \theta_2}{\partial x_\delta},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
&a_\mu^\gamma(\partial_\gamma\partial^\gamma)a_{\gamma\nu} = (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu)\frac{\partial \theta_0}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_0}{\partial x^\gamma} - \\
&-(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)(\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_0 + 2e^{-\theta_0}k_\mu b_\nu[((\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_1)\cos\theta_3 + \\
&((\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_2)\sin\theta_3 - 2\frac{\partial \theta_1}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_3}{\partial x^\gamma}\sin\theta_3 + 2\frac{\partial \theta_2}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_3}{\partial x^\gamma}\cos\theta_3] + \\
&+2e^{-\theta_0}k_\mu c_\nu[((\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_2)\cos\theta_3 - ((\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_1)\sin\theta_3 - \\
&-2\frac{\partial \theta_1}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_3}{\partial x^\gamma}\cos\theta_3 - 2\frac{\partial \theta_2}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_3}{\partial x^\gamma}\sin\theta_3] + \\
&+4e^{-2\theta_0}k_\mu k_\nu(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_1}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_2}{\partial x^\gamma}) + (b_\mu b_\nu + c_\mu c_\nu)\frac{\partial \theta_3}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \theta_3}{\partial x^\gamma} + \\
&+(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu)(\partial_\gamma\partial^\gamma)\theta_3, \quad (\partial_\gamma\partial^\gamma) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Нагадаємо, що у співвідношеннях (4.15)–(4.17) і далі $\mu, \nu, \gamma, \ \delta, \sigma = 0, 1, 2, 3$; $g_{\mu\nu}$— метричний тензор простору Мінковського, $k_\mu = a_\mu + d_\mu$, піднімання та опускання індексів здійснюється за допомогою метричного тензора $g_{\mu\nu}$. Також, для функцій змінної ω першу та другу похідну будемо позначати за допомогою крапок. Наприклад, для функції $f = f(\omega)$ маємо $\dfrac{d\,f}{d\,\omega} = \dot{f}, \ \dfrac{d^2\,f}{d\,\omega^2} = \ddot{f}$.

Теорема 4.2.1 *Анзац (4.9) редукує систему (4.3) до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку*

$$\begin{aligned} &k_{\mu\gamma}\ddot{\mathbf{B}}^\gamma + l_{\mu\gamma}\dot{\mathbf{B}}^\gamma + m_{\mu\gamma}\mathbf{B}^\gamma + eg_{\mu\nu\gamma}\dot{\mathbf{B}}^\nu \times \mathbf{B}^\gamma + \\ &+eh_{\mu\nu\gamma}\mathbf{B}^\nu \times \mathbf{B}^\gamma + e^2\mathbf{B}_\gamma \times (\mathbf{B}^\gamma \times \mathbf{B}_\mu) = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

При цьому коефіцієнти редукованої системи мають вигляд

$$\begin{aligned} &k_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_1 - G_\mu G_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_2 + 2S_{\mu\gamma} - G_\mu H_\gamma - G_\mu \dot{G}_\gamma, \\ &m_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma} - G_\mu \dot{H}_\gamma, \\ &g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}G_\nu + g_{\nu\gamma}G_\mu - 2g_{\mu\nu}G_\gamma, \\ &h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\gamma}H_\nu - g_{\mu\nu}H_\gamma) - T_{\mu\nu\gamma}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

де $F_1, F_2, G_\mu, H_\mu, S_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, T_{\mu\nu\gamma}$—деякі функції незалежної змінної ω, які визначаються із співвідношень

$$\begin{aligned} &F_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}, \quad F_2 = (\partial_\mu\partial^\mu)\omega, \quad G_\mu = a_{\gamma\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\gamma}, \\ &H_\mu = \frac{\partial a_{\gamma\mu}}{\partial x_\gamma}, \qquad S_{\mu\nu} = a_\mu^\gamma \frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x_\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\delta}, \\ &R_{\mu\nu} = a_\mu^\gamma(\partial_\delta\partial^\delta)a_{\gamma\nu}, \quad T_{\mu\nu\gamma} = a_\mu^\delta\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_\sigma}a_{\sigma\gamma} + a_\nu^\delta\frac{\partial a_{\delta\gamma}}{\partial x_\sigma}a_{\sigma\mu} + a_\gamma^\delta\frac{\partial a_{\delta\mu}}{\partial x_\sigma}a_{\sigma\nu}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Доведення. Підставивши анзац (4.9) в рівняння (4.3) безпосередніми обрахунками переконуємося, що мають місце такі рівності

$$\begin{aligned} &\partial_\nu\partial^\nu\mathbf{A}_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu\mathbf{A}_\nu) = ((\partial_\nu\partial^\nu)a_{\mu\gamma} - \frac{\partial^2 a_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu\partial x_\nu})\mathbf{B}^\gamma + \\ &+(2\frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} + a_{\mu\gamma}(\partial_\nu\partial^\nu)\omega - \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} - \\ &-a_{\nu\gamma}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_\nu\partial x^\mu})\dot{\mathbf{B}}^\gamma + (a_{\mu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} - a_{\nu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu})\ddot{\mathbf{B}}^\gamma; \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$(\partial_\nu \mathbf{A}_\nu) \times \mathbf{A}_\mu - 2(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu) \times \mathbf{A}_\nu + (\partial^\mu \mathbf{A}_\nu) \times \mathbf{A}^\nu =$$
$$= (a_{\mu\gamma} \frac{\partial a_{\nu\alpha}}{\partial x_\nu} - 2 \frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} a_{\nu\gamma} + \frac{\partial a_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} a^\nu_\gamma) \mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma + \tag{4.22}$$
$$+ (a_{\mu\gamma} a_{\nu\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} - 2 a_{\mu\alpha} a_{\nu\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} + a_{\nu\alpha} a^\nu_\gamma \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu}) \dot{\mathbf{B}}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma;$$
$$\mathbf{A}_\nu \times (\mathbf{A}^\nu \times \mathbf{A}_\mu) = a_{\nu\beta} a^\nu_\alpha a_{\mu\gamma} \mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma). \tag{4.23}$$

Тут $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$.

Згорнемо далі обидві частини отриманих виразів з $a^\mu_\delta \neq 0$. Тоді, згідно з (4.15), для (4.23) маємо

$$a^\mu_\delta \mathbf{A}_\nu \times (\mathbf{A}^\nu \times \mathbf{A}_\mu) = a^\mu_\delta a_{\nu\beta} a^\nu_\alpha a_{\mu\gamma} \mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma) =$$
$$= g_{\beta\alpha} g_{\delta\gamma} \mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma) = \mathbf{B}_\alpha \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}_\delta).$$

Звідси випливає, що, в результаті згортки з a^μ_δ обох частин рівностей (4.21) та (4.22), в правих частинах отриманих рівностей стоятимуть вирази, в яких коефіцієнти біля $\mathbf{B}^\gamma, \dot{\mathbf{B}}^\gamma, \ddot{\mathbf{B}}^\gamma$, $\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma, \dot{\mathbf{B}}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma$ будуть функціями лише змінної ω.

Зупинимося спочатку на рівності (4.21). В результаті вказаної згортки, в правій частині біля $\mathbf{B}^\gamma, \dot{\mathbf{B}}^\gamma, \ddot{\mathbf{B}}^\gamma$ виникнуть коефіцієнти

$$\mathbf{B}^\gamma \;:\; a^\mu_\delta (\partial_\nu \partial^\nu) a_{\mu\gamma} - a^\mu_\delta \frac{\partial^2 a_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu \partial x_\nu} = F_{\delta\gamma}(\omega); \tag{4.24}$$
$$\dot{\mathbf{B}}^\gamma \;:\; 2 a^\mu_\delta \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} + g_{\delta\gamma} (\partial_\nu \partial^\nu) \omega - a^\mu_\delta \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} -$$
$$- a^\mu_\delta \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} - a^\mu_\delta a_{\nu\gamma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\nu \partial x^\mu} = G_{\delta\gamma}(\omega); \tag{4.25}$$
$$\ddot{\mathbf{B}}^\gamma \;:\; g_{\delta\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} - a^\mu_\delta a_{\nu\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} = H_{\delta\gamma}(\omega). \tag{4.26}$$

Розглянемо коефіцієнт (4.26). Згорнувши функцію $H_{\delta\gamma}(\omega)$ з метричним тензором $g^{\delta\gamma} = g_{\delta\gamma}$, маємо

$$g^{\delta\gamma} H_{\delta\gamma}(\omega) = 4 \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} - a_{\mu\delta} a^\delta_\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} =$$
$$= 4 \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = 4 \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} = 3 \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu}.$$

Звідси випливає, що $\dfrac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial\omega}{\partial x^\nu}$ є деякою функцією змінної ω:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} = F_1(\omega), \tag{4.27}$$

а тому

$$a^\mu_\delta a_{\nu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}a_{\nu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = \tilde{H}_{\delta\gamma}(\omega),$$

й отже

$$a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} = G_\delta(\omega). \tag{4.28}$$

Врахувавши (4.27) та (4.28), приходимо до рівності

$$H_{\delta\gamma}(\omega) = g_{\delta\gamma}F_1 - G_\delta G_\gamma,$$

тобто, з точністю до позначення індексів функція $H_{\delta\gamma}(\omega)$ збігається із значенням коефіцієнта $k_{\mu\gamma}$ (4.19).

В результаті згортки з метричним тензором $g^{\delta\gamma}$ коефіцієнта (4.25), має місце рівність

$$\begin{aligned} g^{\delta\gamma}G_{\delta\gamma}(\omega) = 2a^\mu_\delta\frac{\partial a^\delta_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} + 4(\partial_\nu\partial^\nu)\omega - \\ -a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\nu} - a_{\mu\delta}\frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} - a_{\mu\delta}a^\delta_\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x_\mu\partial x_\nu}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Скориставшись співвідношенням (4.15), неважко переконатися, що

$$a^\mu_\delta\frac{\partial a^\delta_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(a^\mu_\delta a^\delta_\mu) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^\beta_\beta) = 0. \tag{4.30}$$

Також, справедливою є рівність

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}[a_{\mu\delta}a^\delta_\nu\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}] = \frac{\partial a_{\mu\delta}}{\partial x_\nu}a^\delta_\nu\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} + a_{\mu\delta}\frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} + a_{\mu\delta}a^\delta_\nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x_\mu\partial x_\nu}.$$

Далі, оскільки

$$\frac{\partial a_{\mu\delta}}{\partial x_\nu}a^\delta_\nu\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} = \frac{\partial a^\delta_\mu}{\partial x_\nu}a_{\nu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu},$$

то, перепозначивши індекси μ та ν, переконуємося, що

$$\frac{\partial a_{\mu\delta}}{\partial x_\nu} a^\delta_\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = a_{\mu\delta} \frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu},$$

а тому

$$\begin{aligned} a_{\mu\delta} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\nu} + a_{\mu\delta} \frac{\partial a^\delta_\nu}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} [a_{\mu\delta} a^\delta_\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu}] - \\ - a_{\mu\delta} a^\delta_\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} [g_{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu}] - g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Врахувавши (4.29), (4.30) та (4.31), отримуємо, що

$$g^{\delta\gamma} G_{\delta\gamma}(\omega) = 4(\partial_\nu \partial^\nu)\omega - g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 3(\partial_\nu \partial^\nu)\omega.$$

Отже,

$$(\partial_\nu \partial^\nu)\omega = F_2(\omega). \tag{4.32}$$

Далі, справедливими є рівності

$$\begin{aligned} a_{\mu\delta} \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} + a_{\mu\delta} a_{\nu\gamma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = a_{\mu\delta} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (a_{\nu\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}) = \\ = a_{\mu\delta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} G_\gamma(\omega) = a_{\mu\delta} \dot{G}_\gamma(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} = \dot{G}_\gamma(\omega) G_\delta(\omega). \end{aligned}$$

Тому із (4.25) випливає, що

$$2a^\mu_\delta \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} - G_\delta \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x^\nu} = \tilde{G}_{\delta\gamma}(\omega). \tag{4.33}$$

Згорнувши (4.33) із тензором $g_{\mu\nu}$, маємо

$$g_{\mu\nu} \tilde{G}_{\delta\gamma}(\omega) = g_{\mu\nu} G_\delta(\omega) (2 \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\nu}),$$

тобто

$$\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = H_\nu(\omega), \tag{4.34}$$

і

$$a^\mu_\delta \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} = S_{\delta\gamma}(\omega). \tag{4.35}$$

Врахувавши (4.28), (4.32), (4.34) та (4.35), переконуємося, що коефіцієнт біля $\dot{\mathbf{B}}^\gamma$ в редукованій системі (4.18) збігається із $l_{\mu\gamma}$ (4.19).

Нарешті, оскільки

$$a_{\mu\delta}\frac{\partial^2 a_{\mu\gamma}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = a_{\mu\delta}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\nu}) = a_{\mu\delta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(H_\gamma(\omega)) = G_\delta(\omega)\dot{H}_\gamma(\omega),$$

то із (4.24) випливає, що

$$a^\mu_\delta(\partial_\nu\partial^\nu)a_{\mu\gamma} = R_{\delta\gamma}(\omega),$$

а тому функція $F_{\delta\gamma}(\omega)$ (4.24) з точністю до позначень індексів збігається із $m_{\mu\gamma}$ (4.19).

Дослідження рівності (4.22) проводиться аналогічно дослідженню рівності (4.21). Відзначимо лише, що в результаті згортки із a^μ_δ відразу отримуємо, що в редукованій системі (4.18) коефіцієнт біля $\dot{\mathbf{B}}^\nu \times \mathbf{B}^\gamma$ збігається із $g_{\mu\nu\gamma}$ (4.19).

Теорема доведена.

Доведена теорема зводить проблему симетрійної редукції рівнянь Янга–Міллса (4.3) за підалгебрами алгебри $p(1,3)$ до підстановки відповідних значень функції $a_{\mu\nu}$ (4.10) у співвідношення (4.20). Ми опускаємо досить громіздкі обрахунки і відразу наводимо знайдені коефіцієнти (4.19) у редукованому рівнянні (4.18) для кожної із підалгебр алгебри $p(1,3)$:

$$\begin{aligned}
L_1 \ &: \ k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - d_\mu d_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = 0,\\
&\quad\ g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}d_\nu + g_{\nu\gamma}d_\mu - 2g_{\mu\nu}d_\gamma, \quad h_{\mu\nu\gamma} = 0;\\
L_2 \ &: \ k_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = 0,\\
&\quad\ g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}a_\nu + g_{\nu\gamma}a_\mu - 2g_{\mu\nu}a_\gamma, \quad h_{\mu\nu\gamma} = 0;\\
L_3 \ &: \ k_{\mu\gamma} = k_\mu k_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = 0,\\
&\quad\ g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma, \quad h_{\mu\nu\gamma} = 0;\\
L_4 \ &: \ k_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma}\omega - a_\mu a_\gamma(\omega+1)^2 - d_\mu d_\gamma(\omega-1)^2 -\\
&\quad\ -(a_\mu d_\gamma + a_\gamma d_\mu)(\omega^2 - 1),\\
&\quad\ l_{\mu\gamma} = 4(g_{\mu\gamma} + \alpha(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma)) - 2k_\mu(a_\gamma - d_\gamma + k_\gamma\omega),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& && m_{\mu\gamma} = 0,\\
& && g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu + k_\nu\omega) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu + k_\mu\omega) -\\
& && -2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma + k_\gamma\omega)),\\
& && h_{\mu\nu\gamma} = \frac{\epsilon}{2}[g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma] + \alpha\epsilon[(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu)k_\gamma +\\
& && +(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)k_\mu + (b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)k_\nu];\\
L_5 &:&& k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - c_\mu c_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = -\epsilon c_\mu k_\gamma, \quad m_{\mu\gamma} = 0,\\
& && g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma,\\
& && h_{\mu\nu\gamma} = \frac{\epsilon}{2}(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma);\\
L_6 &:&& k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - c_\mu c_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = 0,\\
& && m_{\mu\gamma} = -(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma), \quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma,\\
& && h_{\mu\nu\gamma} = -[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)b_\gamma + (a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)b_\mu +\\
& && +(a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)b_\nu];\\
L_7 &:&& k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - (b_\mu - \epsilon k_\mu e^\omega)(b_\gamma - \epsilon k_\gamma e^\omega),\\
& && l_{\mu\gamma} = -2(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) + \epsilon e^\omega(b_\mu - \epsilon k_\mu e^\omega)k_\gamma,\\
& && m_{\mu\gamma} = -(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma),\\
& && g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(b_\nu - \epsilon k_\nu e^\omega) + g_{\nu\gamma}(b_\mu - \epsilon k_\mu e^\omega) -\\
& && -2g_{\mu\nu}(b_\gamma - \epsilon k_\gamma e^\omega), \quad h_{\mu\nu\gamma} = -[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)b_\gamma +\\
& && +(a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)b_\nu];\\
L_8 &:&& k_{\mu\gamma} = -4\omega(g_{\mu\gamma} + c_\mu c_\gamma), \quad l_{\mu\gamma} = -4(g_{\mu\gamma} + c_\mu c_\gamma),\\
& && m_{\mu\gamma} = -\frac{1}{\omega}(\alpha^2(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) + b_\mu b_\gamma),\\
& && g_{\mu\nu\gamma} = 2\sqrt{\omega}(g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma),\\
& && h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}(g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma) + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}((a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)b_\gamma +\\
& && +(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)b_\nu);\\
L_9 &:&& k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - d_\mu d_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = 0,\\
& && m_{\mu\gamma} = b_\mu b_\gamma + c_\mu c_\gamma,\\
& && g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}d_\nu + g_{\nu\gamma}d_\mu - 2g_{\mu\nu}d_\gamma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & & h_{\mu\nu\gamma} = a_\gamma(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) + a_\mu(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma) + \\
& & & +a_\nu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu); \\
& L_{10} & : \quad & k_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = 0, \\
& & & m_{\mu\gamma} = -(b_\mu b_\gamma + c_\mu c_\gamma), \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma} a_\nu + g_{\nu\gamma} a_\mu - 2 g_{\mu\nu} a_\gamma, \\
& & & h_{\mu\nu\gamma} = -[d_\gamma(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) + d_\mu(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma) + \\
& & & +d_\nu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)]; \qquad (4.36) \\
& L_{11} & : \quad & k_{\mu\gamma} = -(a_\mu - d_\mu)(a_\gamma - d_\gamma), \quad l_{\mu\gamma} = 2(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma), \\
& & & m_{\mu\gamma} = 0, \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu) - 2 g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma), \\
& & & h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[(k_\gamma(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) + k_\mu(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma) + \\
& & & +k_\nu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)]; \\
& L_{12} & : \quad & k_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = -\omega^{-1} k_\mu k_\gamma, \quad m_{\mu\gamma} = -\alpha^2 \omega^{-2} k_\mu k_\gamma, \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma} k_\nu + g_{\nu\gamma} k_\mu - 2 g_{\mu\nu} k_\gamma, \\
& & & h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}\omega^{-1}(g_{\mu\gamma} k_\nu - g_{\mu\nu} k_\gamma) + \alpha\omega^{-1}((k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu) c_\gamma + \\
& & & +(k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu) c_\mu + (k_\gamma b_\mu - k_\mu b_\gamma) c_\nu); \\
& L_{13} & : \quad & k_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = 0, \quad m_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma} k_\nu + g_{\nu\gamma} k_\mu - 2 g_{\mu\nu} k_\gamma, \\
& & & h_{\mu\nu\gamma} = -((k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu) c_\gamma + (k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu) c_\mu + \\
& & & +(k_\gamma b_\mu - k_\mu b_\gamma) c_\nu); \\
& L_{14} & : \quad & k_{\mu\gamma} = -16(g_{\mu\gamma} + b_\mu b_\gamma), \quad l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = h_{\mu\nu\gamma} = 0, \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = 4(g_{\mu\gamma} b_\nu + g_{\nu\gamma} b_\mu - 2 g_{\mu\nu} b_\gamma), \\
& L_{15} & : \quad & k_{\mu\gamma} = -16[(1+\alpha^2) g_{\mu\gamma} + (c_\mu - \alpha b_\mu)(c_\gamma - \alpha b_\gamma)], \\
& & & l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = h_{\mu\nu\gamma} = 0, \\
& & & g_{\mu\nu\gamma} = -4[g_{\mu\gamma}(c_\nu - \alpha b_\nu) + g_{\nu\gamma}(c_\mu - \alpha b_\mu) - \\
& & & -2 g_{\mu\nu}(c_\gamma - \alpha b_\gamma)];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{16} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -4\omega(g_{\mu\gamma} + c_\mu c_\gamma), \quad l_{\mu\gamma} = -4(g_{\mu\gamma} + c_\mu c_\gamma) - 2\epsilon k_\gamma c_\mu \sqrt{\omega}, \\
&\quad m_{\mu\gamma} = -\omega^{-1} b_\mu b_\gamma, \quad g_{\mu\nu\gamma} = 2\sqrt{\omega}(g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma), \\
&\quad h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[\epsilon(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}(g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma)]; \\
L_{17} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \ \ l_{\mu\gamma} = -\frac{2\omega + \alpha}{\omega(\omega+\alpha)+1} k_\mu k_\gamma, \\
&\quad m_{\mu\gamma} = -4k_\mu k_\gamma (1 + \omega(\alpha + \omega))^{-2}, \\
&\quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma, \\
&\quad h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(\alpha + 2\omega)(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma)(1 + \omega(\alpha+\omega))^{-1} - \\
&\quad -2(1 + \omega(\omega+\alpha))^{-1}((k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)c_\gamma + \\
&\quad +(k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu)c_\mu + (k_\gamma b_\mu - k_\mu b_\gamma)c_\nu); \\
L_{18} \ &: \ k_{\mu\gamma} = 4\omega g_{\mu\gamma} - (k_\mu\omega + a_\mu - d_\mu)(k_\gamma\omega + a_\gamma - d_\gamma), \\
&\quad l_{\mu\gamma} = 6g_{\mu\gamma} + 4(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - 3k_\gamma(k_\mu\omega + a_\mu - d_\mu), \\
&\quad m_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \quad g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}(k_\nu\omega + a_\nu - d_\nu) + \\
&\quad +g_{\nu\gamma}(k_\mu\omega + a_\mu - d_\mu) - 2g_{\mu\nu}(k_\gamma\omega + a_\gamma - d_\gamma)), \\
&\quad h_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma); \\
L_{19} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - c_\mu c_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = 2\epsilon k_\gamma c_\mu, \quad m_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \\
&\quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma, \quad h_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{20} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - (c_\mu - \epsilon k_\mu)(c_\gamma - \epsilon k_\gamma), \\
&\quad l_{\mu\gamma} = 2\epsilon k_\gamma c_\mu - 2k_\mu k_\gamma, \ \ m_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \\
&\quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(\epsilon k_\nu - c_\nu) + g_{\nu\gamma}(\epsilon k_\mu - c_\mu) - 2g_{\mu\nu}(\epsilon k_\gamma - c_\gamma), \\
&\quad h_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma); \\
L_{21} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - (c_\mu - \alpha\epsilon k_\mu)(c_\gamma - \alpha\epsilon k_\gamma), \\
&\quad l_{\mu\gamma} = 2(\epsilon k_\gamma c_\mu - \alpha k_\mu k_\gamma), \quad m_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma, \\
&\quad g_{\mu\nu\gamma} = -g_{\mu\gamma}(c_\nu - \alpha\epsilon k_\nu) - g_{\nu\gamma}(c_\mu - \alpha\epsilon k_\mu) + \\
&\quad +2g_{\mu\nu}(c_\gamma - \alpha\epsilon k_\gamma), \quad h_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma); \\
L_{22} \ &: \ k_{\mu\gamma} = -4\omega g_{\mu\gamma} - (a_\mu - d_\mu + k_\mu\omega)(a_\gamma - d_\gamma + k_\gamma\omega),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l_{\mu\gamma} = 4[2g_{\mu\gamma} + \alpha(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma) - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma - \omega k_\mu k_\gamma],\\
&m_{\mu\gamma} = -2k_\mu k_\gamma, \quad g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu + k_\nu\omega) +\\
&+g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu + k_\mu\omega) - 2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma + k_\gamma\omega)),\\
&h_{\mu\nu\gamma} = \frac{3\epsilon}{2}(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma) - \epsilon\alpha[k_\gamma(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) +\\
&+(k_\mu(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma) + k_\nu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)].
\end{aligned}
$$

У наведених вище формулах (4.36) $\epsilon = 1$ для $kx > 0$, та $\epsilon = -1$ для $kx < 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Теорема 4.2.2 *Анзац (4.13) редукує систему (4.3) до системи (4.18). При цьому коефіцієнти редукованої системи мають вигляд*

$$
\begin{aligned}
&k_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_1 - G_\mu G_\gamma,\\
&l_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_2 + 2Q_{\mu\gamma} - G_\mu H_\gamma - G_\mu \dot{G}_\gamma,\\
&m_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma},\\
&g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}G_\nu + g_{\nu\gamma}G_\mu - 2g_{\mu\nu}G_\gamma,\\
&h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\gamma}H_\nu - g_{\mu\nu}H_\gamma) - T_{\mu\nu\gamma},
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

де $F_1, G_\mu, F_2, Q_{\mu\gamma}, H_\gamma, R_{\mu\gamma}, T_{\mu\nu\gamma}$—деякі функції незалежної змінної ω, які визначаються із співвідношень

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = F_1(\omega)\theta^2; \quad \theta\Box\omega + 2\frac{\partial\theta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = F_2(\omega)\theta^3;\\
&a_{\nu\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = G_\mu(\omega)\theta, \quad \theta\frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} + 3a_{\nu\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\nu} = H_\mu(\omega)\theta^2;\\
&a_\mu^\gamma\frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x^\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\delta} + G_\mu(\omega)a_{\delta\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} - G_\nu(\omega)a_{\delta\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} = Q_{\mu\nu}(\omega)\theta^2;\\
&g_{\mu\nu}\Box\theta + 2a_\mu^\gamma\frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x^\delta}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} - a_\mu^\gamma a_{\delta\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^\gamma\partial x_\delta} - a_\mu^\gamma\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_\delta}\frac{\partial\theta}{\partial x^\gamma} - a_\mu^\gamma\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} +\\
&+\theta(a_\mu^\gamma\Box a_{\gamma\nu} - a_\mu^\gamma\frac{\partial^2 a_{\delta\nu}}{\partial x^\gamma\partial x_\delta}) = R_{\mu\nu}(\omega)\theta^3;\\
&a_\mu^\delta\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_\gamma}a_{\gamma\sigma} + a_\nu^\delta\frac{\partial a_{\delta\sigma}}{\partial x_\gamma}a_{\gamma\mu} + a_\sigma^\delta\frac{\partial a_{\delta\mu}}{\partial x_\gamma}a_{\gamma\nu} = T_{\mu\nu\sigma}(\omega)\theta,
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Доведення. Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми 4.2.1. Тому тут ми зупинимося лише на деяких його етапах.

Як і під час доведення теореми 4.2.1 в результаті підстановки анзацу (4.13) в ліву частину рівнянь (4.3) ми приходимо до системи, яка містить функції $\mathbf{B}^\gamma$, їх похідні $\dot{\mathbf{B}}^\gamma, \ddot{\mathbf{B}}^\gamma$, векторні добутки $\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma$, $\dot{\mathbf{B}}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma, \mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma)$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ та відповідні коефіцієнти біля них. Знову відправною точкою в доведенні є коефіцієнт біля $\mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma)$:

$$\mathbf{A}_\nu \times (\mathbf{A}^\nu \times \mathbf{A}_\mu) = \theta^3 a_{\nu\beta} a^\nu_\alpha a_{\mu\gamma} \mathbf{B}^\beta \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}^\gamma). \tag{4.39}$$

В результаті згортки обох частин рівності (4.39) з $a^\mu_\delta \neq 0$, приходимо до рівності

$$a^\mu_\delta \mathbf{A}_\nu \times (\mathbf{A}^\nu \times \mathbf{A}_\mu) = \theta^3 \mathbf{B}_\alpha \times (\mathbf{B}^\alpha \times \mathbf{B}_\delta).$$

Звідси випливає, що, в результаті згортки з a^μ_δ, в редукованій системі всі коефіцієнти матимуть вигляд

$$\theta^3 F(\omega), \tag{4.40}$$

де $F(\omega)$—деяка дійсна функція незалежної змінної ω. Зупинимося більш детально на випадкові коефіцієнта біля $\ddot{\mathbf{B}}^\gamma$. В результаті підстановки анзаца (4.15) в рівняння (4.3) і згортки з a^μ_δ ми, згідно з (4.40), приходимо до рівності

$$\theta[g_{\delta\gamma} \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} - a^\mu_\delta a_{\nu\gamma} \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}] = \theta^3 F_{\delta\gamma}(\omega). \tag{4.41}$$

Згорнувши обидві частини рівності (4.41) з метричним тензором $g^{\delta\gamma} = g_{\delta\gamma}$, маємо

$$\begin{aligned} g^{\delta\gamma}\theta^3 F_{\delta\gamma} &= \theta[4 \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} - a_{\mu\delta} a^\delta_\nu \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}] = \\ &= \theta[4 \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}] = 3\theta \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} = \theta^2 F_1(\omega), \tag{4.42}$$

а тому

$$\theta a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}a_{\nu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=\theta^3\tilde{F}_{\delta\gamma}(\omega),$$

отже

$$a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}=\theta G_\delta(\omega). \tag{4.43}$$

Врахувавши (4.42), (4.43), переконуємося, що

$$F_{\delta\gamma}(\omega)=g_{\delta\gamma}F_1-G_\delta G_\gamma,$$

тобто з точністю до позначення індексів функція $F_{\delta\gamma}(\omega)$ збігається з коефіцієнтами $k_{\mu\gamma}$ (4.37).

Випадки решти коефіцієнтів (4.37) розглядаються аналогічно.

Теорему доведено.

Використовуючи результати теореми 4.2.2, ми отримали повний перелік редукованих систем за підалгебрами рангу 3 алгебри $\tilde{p}(1,3)$. Перелік коефіцієнтів (4.37) в редукованих системах для кожної із підалгебр F_j $(j=1,2,\ldots,24)$ алгебри $\tilde{p}(1,3)$ наведено в додаткові 2.

На закінчення підрозділу розглянемо симетрійну редукцію самодуальних рівнянь Янга–Міллса

$$F_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \tag{4.44}$$

де $F_{\mu\nu}=\partial^\mu\mathbf{A}_\nu-\partial^\nu\mathbf{A}_\mu+e\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{A}_\nu$—тензор поля Янга–Міллса, $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$— антисиметричний тензор четвертого рангу; $\mu,\nu,\gamma,\delta=0,1,2,3$. Як відзначалося вище, симетрія самодуальних рівнянь Янга–Міллса така ж, як і рівнянь (4.3). Тому для їх редукції ми можемо використовувати анзаци (4.9) та (4.13). Мають місце теореми.

Теорема 4.2.3 *Анзац (4.9) редукує самодуальні $SU(2)$ рівняння Янга–Міллса (4.44) до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку*

$$T_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\delta\gamma}T^{\delta\gamma}, \tag{4.45}$$

де

$$T_{\mu\nu} = G_\mu(\omega)\dot{\mathbf{B}}_\nu - G_\nu(\omega)\dot{\mathbf{B}}_\mu - H_{\mu\nu\gamma}(\omega)\mathbf{B}^\gamma + e\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu, \tag{4.46}$$

а функції $G_\mu(\omega), H_{\mu\nu\gamma}(\omega)$ *визначаються згідно з такими формулами:*

$$\begin{aligned} G_\mu(\omega) &= a_{\nu\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}, \\ H_{\mu\nu\gamma}(\omega) &= a_\mu^\delta \frac{\partial a_{\delta\gamma}}{\partial x_\sigma} a_{\sigma\nu} - a_\nu^\delta \frac{\partial a_{\delta\gamma}}{\partial x_\sigma} a_{\sigma\mu}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Теорема 4.2.4 *Анзац (4.13) редукує самодуальні* $SU(2)$ *рівняння Янга–Міллса (4.44) до системи звичайних диференціальних рівнянь (4.45), (4.46), де функції* $G_\mu(\omega)$ $H_{\mu\nu\gamma}(\omega)$ *визначаються із співвідношень*

$$\theta G_\gamma = a_{\mu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}, \tag{4.48}$$

$$\theta^2 H_{\mu\nu\gamma} = \theta(a_\mu^\delta \frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_\sigma} a_{\sigma\gamma} - a_\gamma^\delta \frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_\delta} a_{\delta\mu} + g_{\mu\nu} a_{\sigma\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x_\sigma} - g_{\gamma\nu} a_{\delta\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta}).$$

<u>Доведення.</u> Підставимо анзац (4.13) в тензор $F_{\mu\nu}$ із рівняння (4.44) і згорнемо отриманий вираз з $a_\sigma^\mu a_\delta^\nu$:

$$\begin{aligned} a_\sigma^\mu a_\delta^\nu F_{\mu\nu} = \theta(g_{\delta\gamma} a_\delta^\mu \frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} - g_{\sigma\gamma} a_\delta^\nu \frac{\partial\omega}{\partial x^\nu})\dot{\mathbf{B}}^\gamma + \\ +[g_{\delta\gamma} a_\sigma^\mu \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu} - g_{\sigma\gamma} a_\delta^\nu \frac{\partial\theta}{\partial x^\nu} + \\ +a_\sigma^\mu a_\delta^\nu \theta(\frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x^\nu})]\mathbf{B}^\gamma + e\theta^2 \mathbf{B}_\sigma \times \mathbf{B}_\delta. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\theta = 1$ (випадок анзацу (4.9)). Тоді в (4.49) коефіцієнт біля $\mathbf{B}_\sigma \times \mathbf{B}_\delta$ є сталою величиною, а тому коефіцієнти біля $\dot{\mathbf{B}}^\gamma$ та $\mathbf{B}^\gamma$ є деякими функціями змінної ω:

$$\dot{\mathbf{B}}^\gamma \; : \; g_{\delta\gamma} a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} - g_{\sigma\gamma} a_{\nu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = G(\omega),$$

$$\mathbf{B}^\gamma \; : \; a_\delta^\nu \frac{\partial a_{\nu\gamma}}{\partial x_\mu} a_{\mu\sigma} - a_\sigma^\mu \frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\nu} a_{\nu\delta} = H_{\delta\gamma\sigma}(\omega).$$

Коефіцієнт біля $\mathbf{B}^\gamma$ збігається з точністю до позначень індексів із $H_{\mu\nu\gamma}$ (4.47), а в коефіцієнті $G(\omega)$ біля $\dot{\mathbf{B}}^\gamma$ можна додатково покласти

$$a_{\mu\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} = G_\sigma(\omega).$$

Нехай тепер має місце анзац (4.13). Тоді в (4.49) коефіцієнт біля $\mathbf{B}_\sigma \times \mathbf{B}_\delta$ дорівнює $e\theta^2$. Тому коефіцієнти біля $\mathbf{B}_\gamma, \dot{\mathbf{B}}_\gamma$ будуть деякими функціями вигляду

$$\theta^2 F(\omega).$$

Звідси і випливають формули (4.48).

Теореми доведені.

Результати редукції самодуальних рівнянь Янга–Міллса, що відповідають підалгебрам алгебр $p(1,3)$ та $\tilde{p}(1,3)$, наведені у додаткові 3.

4.3. Точні розв'язки $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса

Процедура побудови інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними передбачає наявність розв'язків редукованих рівнянь. Тому тут ми попередньо проводимо інтегрування редукованих систем звичайних диференціальних рівнянь, а далі, використовуючи отримані розв'язки, проводимо побудову інваріантних розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса (4.3).

Зауважимо, що на відміну від випадку рівнянь Максвелла (які були розглянуті в третьому розділові роботи), де були побудувані загальні розв'язки усіх отриманих редукованих систем, системи звичайних диференціальних рівнянь (4.18)–(4.20), (4.36) проінтегрувати у загальному вигляді нам не вдалося. Тому довелося обмежитися побудовою їх частинних розв'язків. Для цього ми використали метод, який полягає у зведенні цих систем рівнянь до систем з меншою кількістю рівнянь за допомогою спеціально підібраних підстановок. Відзначимо, що висока ефективність використання анзаца, запропонованого т'Офтом для полів Янга–Міллса, обумовлена саме тим, що він редукує систему дванадцяти диференціальних рівнянь з частинними похідними до одного нелінійного хвильового рівняння.

Розглянемо детально випадок системи (4.18)–(4.20), яка відповідає підалгебрі L_8.

Покладаємо

$$\mathbf{B}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_3 h(\omega), \tag{4.50}$$

де $f(\omega)$, $g(\omega)$, $h(\omega)$—нові невідомі гладкі функції змінної ω,

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \qquad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T.$$

Підставивши $\mathbf{B}_\mu$ (4.50) у рівняння (4.18), де коефіцієнти (4.19) для випадку алгебри L_8 наведені у переліковві (4.36), ми приходимо до рівняння

$$\begin{aligned}
&a_\mu \mathbf{e}_1[-4\omega\ddot{f} - 4\dot{f} - \frac{\alpha^2}{\omega}f + \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}g\,h + e^2(h^2+g^2)f] + \\
&+d_\mu \mathbf{e}_2[-4\omega\ddot{g} - 4\dot{g} - \frac{\alpha^2}{\omega}g - \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,h + e^2(h^2-f^2)g] + \\
&+b_\mu \mathbf{e}_3[-4\omega\ddot{h} - 4\dot{h} + \omega^{-1}h - \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,g + e^2(g^2-f^2)h] = 0,
\end{aligned}$$

яке еквівалентне такій системі звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} + \frac{\alpha^2}{\omega}f - \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}g\,h - e^2(h^2+g^2)f = 0, \\
&4\omega\ddot{g} + 4\dot{g} + \frac{\alpha^2}{\omega}g + \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,h - e^2(h^2-f^2)g = 0, \\
&4\omega\ddot{h} + 4\dot{h} - \omega^{-1}h + \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,g - e^2(g^2-f^2)h = 0.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Тим самим анзац (4.50) звів систему (4.18), яка містить дванадцять рівнянь, до системи (4.51) трьох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Покладемо далі

$$\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega). \tag{4.52}$$

Підстановка анзацу (4.52) в рівняння (4.18), коефіцієнти якого взято із переліку (4.36) для L_8, де $\alpha = 0$, приводить до системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} - e^2g^2f = 0, \\
&4\omega\ddot{g} + 4\dot{g} - \omega^{-1}g = 0,
\end{aligned}$$

в якій друге рівняння є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку.

В результаті аналогічних міркувань ми звели ряд систем (4.18) до систем, які містять три або два рівняння. Нижче ми наводимо підстановки для $\mathbf{B}_\mu(\omega)$ та відповідні системи диференціальних рівнянь, розв'язки яких будемо шукати. Номери наведених систем збігаються із значеннями індексів j у позначенні підалгебр L_j алгебри $p(1,3)$.

1.
$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_3 h(\omega),\\
&\ddot{f} - e^2(g^2+h^2)f = 0,\\
&\ddot{g} + e^2(f^2-h^2)g = 0,\\
&\ddot{h} + e^2(f^2-g^2)h = 0.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_\mu = b_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) + d_\mu \mathbf{e}_3 h(\omega),\\
&\ddot{f} + e^2(g^2+h^2)f = 0,\\
&\ddot{g} + e^2(f^2+h^2)g = 0,\\
&\ddot{h} + e^2(f^2+g^2)h = 0.
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),\\
&\ddot{f} - e^2 g^2 f = 0,\\
&\ddot{g} = 0.
\end{aligned}$$

8.1.$(\alpha = 0)$
$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),\\
&4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} - e^2 g^2 f = 0,\\
&4\omega\ddot{g} + 4\dot{g} - \omega^{-1} g = 0.
\end{aligned}$$

8.2.
$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_3 h(\omega),\\
&4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} - \frac{\alpha^2}{\omega} f - \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}} g\, h - e^2(h^2+g^2)f = 0,
\end{aligned}$$

$$4\omega\ddot{g} + 4\dot{g} + \frac{\alpha^2}{\omega}g + \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,h + e^2(f^2 - h^2)g = 0,$$
$$4\omega\ddot{h} + 4\dot{h} - \omega^{-1}h + \frac{2\alpha e}{\sqrt{\omega}}f\,g + e^2(f^2 - g^2)h = 0.$$

14.1.
$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_3 h(\omega),\\ &16\ddot{f} - e^2(h^2 + g^2)f = 0,\\ &16\ddot{g} + e^2(f^2 - h^2)g = 0,\\ &16\ddot{h} + e^2(f^2 - g^2)h = 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

14.2
$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),\\ &16\ddot{f} - e^2 g^2 f = 0,\\ &\ddot{g} = 0. \end{aligned}$$

15.1.
$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega) +\\ &+(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(\alpha c_\mu + b_\mu)\mathbf{e}_3 h(\omega),\\ &16(1+\alpha^2)\ddot{f} - e^2(h^2 + g^2)f = 0,\\ &16(1+\alpha^2)\ddot{g} + e^2(f^2 - h^2)g = 0,\\ &16(1+\alpha^2)\ddot{h} + e^2(f^2 - g^2)h = 0. \end{aligned}$$

15.2.
$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + (1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(\alpha c_\mu + b_\mu)\mathbf{e}_2 g(\omega),\\ &16(1+\alpha^2)\ddot{f} - e^2\, f\, g^2 = 0,\\ &\ddot{g} = 0. \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),\\ &4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} - e^2\, g^2\, f = 0,\\ &4\omega\ddot{g} + 4\dot{g} - \omega^{-1} g = 0. \end{aligned}$$

18. $$\mathbf{B}_\mu = b_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),$$
$$4\omega \ddot{f} + 6\dot{f} + e^2\, g^2\, f = 0,$$
$$4\omega \ddot{g} + 6\dot{g} + e^2\, f^2\, g = 0.$$

19. $$\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),$$
$$\ddot{f} - e^2\, g^2\, f = 0,$$
$$\ddot{g} = 0.$$

20. $$\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),$$
$$\ddot{f} - e^2\, g^2\, f = 0,$$
$$\ddot{g} = 0.$$

21. $$\mathbf{B}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + b_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),$$
$$\ddot{f} - e^2\, g^2\, f = 0,$$
$$\ddot{g} = 0.$$

22. $(\alpha = 0)$ $$\mathbf{B}_\mu = b_\mu \mathbf{e}_1 f(\omega) + c_\mu \mathbf{e}_2 g(\omega),$$
$$4\omega \ddot{f} + 8\dot{f} + e^2\, g^2\, f = 0,$$
$$4\omega \ddot{g} + 8\dot{g} + e^2\, f^2\, g = 0.$$

Таким чином, комбінуючи симетрійну редукцію для зменшення кількості незалежних змінних та пряму редукцію для зменшення кількості залежних змінних, ми звели $SU(2)$ рівняння Янга–Міллса (4.3) до порівняно простих систем звичайних диференціальних рівнянь (4.53).

Далі ми коротко зупиняємося на процедурі інтегрування рівнянь (4.53).

Підстановка $f = 0,\ g = h = u(\omega)$ зводить систему 1 до рівняння

$$\ddot{u} = e^2 u^3, \tag{4.54}$$

яке інтегрується в еліптичних функціях. Зауважимо також, що рівняння

(4.54) має розв'язок, який визначається і в елементарних функціях:

$$u = \sqrt{2}(e\omega - C)^{-1}, \ C \in \mathbf{R}.$$

Система 2, де $f = g = h = u(\omega)$ зводиться до рівняння

$$\ddot{u} + 2e^2u^3 = 0,$$

яке також інтегрується в еліптичних функціях.

Проінтегрувавши друге рівняння системи 5, маємо

$$g = C_1\omega + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Якщо $C_1 \neq 0$, то константою C_2 можна знехтувати, і тому ми покладаємо $C_2 = 0$. За цієї умови перше рівняння системи 5 набуває вигляду

$$\ddot{f} - e^2C_1^2\omega^2 f = 0. \tag{4.55}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.55), яке є спорідненим рівнянню Бесселя, визначає функція

$$f = \sqrt{\omega}Z_{\frac{1}{4}}(\frac{i\,e}{2}C_1\omega^2).$$

Тут вжито позначення $Z_\nu(\omega) = C_3J_\nu(\omega) + C_4Y_\nu(\omega)$, де J_ν, Y_ν—функції Бесселя, C_3, C_4—довільні дійсні сталі.

Якщо ж $C_1 = 0, \ C_2 \neq 0,$ то загальний розв'язок першого рівняння системи 5 має вигляд

$$f = C_3\cosh(C_2e\,\omega) + C_4\sinh(C_2e\,\omega),$$

де $C_3, \ C_4$—довільні дійсні сталі.

Нарешті, якщо $C_1 = C_2 = 0,$ то загальним розв'язком першого рівняння системи 5 є функція $f = C_3\omega + C_4, \ C_3, \ C_4 \in \mathbf{R}.$

Далі, загальний розв'язок другого рівняння системи 8.1 має вигляд

$$g = C_1\sqrt{\omega} + C_2(\sqrt{\omega})^{-1},$$

де $C_1,\ C_2$—довільні сталі інтегрування. Підстановка знайденого значення функції g в перше рівняння системи 8.1 приводить до диференціального рівняння

$$4\omega^2\ddot{f} + 4\omega\dot{f} - e^2(C_1\omega + C_2)^2 f = 0. \tag{4.56}$$

У загальному випадкові, коли $C_1 \cdot C_2 \neq 0$, рівняння (4.56) є спорідненим рівнянню Уіттекера [17, 28]. Тут ми обмежуємося розглядом випадків, коли $C_1 \cdot C_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
a)\quad & C_1 \neq 0, \quad C_2 = 0,\\
& f = Z_0[\frac{i\,e}{2}C_1\omega];\\
b)\quad & C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0,\\
& f = C_3\omega^{\frac{eC_2}{2}} + C_4\omega^{-\frac{eC_2}{2}};\\
c)\quad & C_1 = C_2 = 0,\\
& f = C_3\ln\omega + C_4,
\end{aligned}$$

де $C_3,\ C_4$—довільні сталі інтегрування.

Аналіз рівнянь 14.1 та 14.2 показав, що вони зводяться до рівнянь 1 та 5 відповідно, якщо в останніх покласти $\frac{e}{4}$ замість e. Аналогічно, поклавши в системах 1 та 5 $\frac{e}{4}(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ замість e, ми прийдемо до систем 15.1 та 15.2 відповідно.

Нарешті, система 22 ($\alpha = 0$) підстановкою $f = g = u(\omega)$ зводиться до рівняння

$$\omega\ddot{u} + 2\dot{u} + \frac{e^2}{4}u^3 = 0,$$

яке є рівнянням Емдена–Фаулера [17, 28] і має частинний розв'язок $u = e^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}$.

Системи 8.2 та 18 нам проінтегрувати не вдалося, а системи 19, 20, 21 збігаються із системою 5, як і система16—із системою 8.1.

Підстановка отриманих значень функцій f, g, h у вирази (4.53) для $\mathbf{B}_\mu$ з подальшою підстановкою останніх в анзац (4.9)–(4.11) приводить нас до інваріантних розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса (4.3). Зауважимо, що розв'язкам рівнянь 5, 8.1, 14.2, 15.2, 16, 19, 20, 21, де $g = 0$, відповідають абелеві розв'язки $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса. Такими розв'язками ми тут нехтуємо і нижче наводимо лише **неабелеві** розв'язки рівнянь Янга–Міллса (тобто такі розв'язки, де $\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu \neq 0$).

1. $\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{e}_2 b_\mu + \mathbf{e}_3 c_\mu)\sqrt{2}(edx - \lambda)^{-1};$
2. $\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{e}_2 b_\mu + \mathbf{e}_3 c_\mu)[\lambda sn(\frac{\sqrt{2}}{2}e\lambda dx)dn(\frac{\sqrt{2}}{2}e\lambda dx)][cn\frac{\sqrt{2}}{2}e\lambda dx)]^{-1};$
3. $\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{e}_2 b_\mu + \mathbf{e}_3 c_\mu)\lambda[cn(e\lambda dx)]^{-1};$
4. $\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{e}_1 b_\mu + \mathbf{e}_2 c_\mu + \mathbf{e}_3 c_\mu)\lambda cn(e\lambda ax);$
5. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}\sqrt{cx}Z_{\frac{1}{4}}[\frac{i}{2}e\lambda(cx)^2] + \mathbf{e}_2 b_\mu \lambda cx;$
6. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}[\lambda_1 \cosh(e\lambda cx) +$
   $+\lambda_2 \sinh(e\lambda cx)] + \mathbf{e}_2 b_\mu \lambda;$
7. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu Z_0[\frac{i}{2}e\lambda((bx)^2 + (cx)^2)] +$
   $+\mathbf{e}_2(b_\mu cx - c_\mu bx)\lambda;$
8. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu[\lambda_1((bx)^2 + (cx)^2))^{\frac{e\lambda}{2}} + \lambda_2((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{e\lambda}{2}} +$
   $+\mathbf{e}_2(b_\mu cx - c_\mu bx)\lambda((bx)^2 + (cx)^2)^{-1};$
9. $\mathbf{A}_\mu = [\mathbf{e}_2(\frac{1}{8}(d_\mu - k_\mu(kx)^2) + \frac{1}{2}b_\mu kx) +$
   $+\mathbf{e}_3 c_\mu]\lambda sn(\frac{e\sqrt{2}}{8}\lambda(4bx + (kx)^2)) \cdot$
   $\cdot dn(\frac{e\sqrt{2}}{8}\lambda(4bx + (kx)^2))(cn(\frac{e\sqrt{2}}{8}\lambda(4bx + (kx)^2)))^{-1};$
10. $\mathbf{A}_\mu = [\mathbf{e}_2(\frac{1}{8}(d_\mu - k_\mu(kx)^2) + \frac{1}{2}b_\mu kx) + \mathbf{e}_3 c_\mu] \cdot$
    $\cdot\lambda[cn(\frac{e\sqrt{2}\lambda}{8}(4bx + (kx)^2))]^{-1};$
11. $\mathbf{A}_\mu = [\mathbf{e}_2(\frac{1}{8}(d_\mu - k_\mu(kx)^2) + \frac{1}{2}b_\mu kx) + \mathbf{e}_3 c_\mu] \cdot$
    $\cdot 4\sqrt{2}(e(4bx + (kx)^2) - \lambda)^{-1};$

12. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu \sqrt{4bx + (kx)^2} Z_{\frac{1}{4}}(\frac{ie\lambda}{8}(4bx + (kx)^2)^2) +$
$+\mathbf{e}_2 c_\mu \lambda(4bx + (kx)^2);$

13. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu(\lambda \cosh(\frac{e\lambda}{4}(4bx + (kx)^2)) +$ (4.57)
$+\lambda_2 \sinh(\frac{e\lambda}{4}(4bx + (kx)^2))) + \mathbf{e}_2 c_\mu \lambda;$

14. $\mathbf{A}_\mu = \{\mathbf{e}_2(d_\mu - \frac{1}{8}k_\mu(kx)^2 - \frac{1}{2}b_\mu kx) +$
$+\mathbf{e}_3(\alpha c_\mu + b_\mu + \frac{1}{2}k_\mu kx)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\} \cdot$
$\cdot \lambda sn[\frac{e\lambda\sqrt{2}}{8}(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}] \cdot$
$\cdot dn[\frac{e\lambda\sqrt{2}}{8}(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}] \cdot$
$\cdot \{cn[\frac{e\lambda\sqrt{2}}{8}((4\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}]\}^{-1};$

15. $\mathbf{A}_\mu = \{\mathbf{e}_2(d_\mu - \frac{1}{8}k_\mu(kx)^2) - \frac{1}{2}b_\mu kx) +$
$+\mathbf{e}_3(\alpha c_\mu + b_\mu + \frac{1}{2}k_\mu kx)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\} \cdot$
$\cdot \{cn[\frac{e\lambda}{4}(4\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}]\}^{-1};$

16. $\mathbf{A}_\mu = \{\mathbf{e}_2(d_\mu - \frac{1}{8}k_\mu(kx)^2 - \frac{1}{2}b_\mu kx) +$
$+\mathbf{e}_3(\alpha c_\mu + b_\mu + \frac{1}{2}k_\mu kx)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\} \cdot$
$\cdot 4\sqrt{2}(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}[e(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)]^{-1};$

17. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu\{\sqrt{4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2} Z_{\frac{1}{4}}(\frac{ie\lambda}{8}(4(\alpha bx - cx) +$
$+\alpha(kx)^2)^2)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\} +$
$+\mathbf{e}_2(\alpha c_\mu + b_\mu + \frac{1}{2}k_\mu kx)\lambda(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}};$

18. $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu\{cn[\frac{e\lambda}{4}(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2)] +$
$+\lambda_2 \sinh[\frac{e\lambda}{4}(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(4(\alpha bx - cx) + \alpha(kx)^2]\} +$

$$\mathbf{e}_2(\alpha c_\mu + b_\mu + \frac{1}{2}k_\mu kx)\lambda(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}};$$

19. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1} Z_0[\frac{ie\lambda}{2}((bx)^2 + (cx)^2)] + \mathbf{e}_2(b_\mu cx - c_\mu bx)\lambda;$$

20. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}[\lambda_1((bx)^2+(cx)^2)^{\frac{e\lambda}{2}} + \lambda((bx)^2+(cx)^2)^{-\frac{e\lambda}{2}}] + +\mathbf{e}_2(b_\mu cx - c_\mu bx)\lambda((bx)^2+(cx)^2)^{-1};$$

21. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}\sqrt{cx} Z_{\frac{1}{4}}(\frac{ie\lambda}{2}(cx)^2) + \mathbf{e}_2(b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1})\lambda cx;$$

22. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}[\lambda_1 \cosh(\lambda ecx) + \lambda_2 \sinh(\lambda ecx)] + +\mathbf{e}_2(b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1})\lambda;$$

23. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}\sqrt{\ln|kx| - cx} Z_{\frac{1}{4}}(\frac{ie\lambda}{2}(\ln|kx| - cx)^2) + +\mathbf{e}_2(b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1})\lambda(\ln|kx| - cx);$$

24. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}[\lambda_1 \cosh(\lambda e(\ln|kx| - cx)) + \lambda_2 sh(\lambda e(\ln|kx| - cx))] + +\mathbf{e}_2[b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1})\lambda;$$

25. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}\sqrt{\alpha\ln|kx| - cx} Z_{\frac{1}{4}}(\frac{ie\lambda}{2}(\alpha\ln|kx| - cx)^2) + +\mathbf{e}_2(b_\mu - k_\mu bx - \ln|kx|)(kx)^{-1})\lambda(\alpha\ln|kx| - cx);$$

26. $$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{e}_1 k_\mu |kx|^{-1}[\lambda_1 \cosh(\lambda e(\alpha\ln|kx| - cx)) + +\lambda_2 \sinh(\lambda e(\alpha\ln|kx| - cx))] + +\mathbf{e}_2(b_\mu - k_\mu(bx - \ln|kx|^{-1})(kx)^{-1})\lambda;$$

27. $$\mathbf{A}_\mu = \{\mathbf{e}_1(b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1}) + +\mathbf{e}_2(c_\mu - k_\mu cx(kx)^{-1})\}e^{-1}(x_\nu x^\nu)^{-\frac{1}{2}};$$

28. $$\mathbf{A}_\mu = \{\mathbf{e}_1(b_\mu - k_\mu bx(kx)^{-1}) + \mathbf{e}_2(c_\mu - k_\mu cx(kx)^{-1})\}f(x_\nu x^\nu),$$

де $w\ddot{f} + 2w\dot{f} + (e^2\frac{f^3}{4}) = 0,$

$$\omega = x_\nu x^\nu = (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2 - (dx)^2.$$

У наведених вище розв'язках (4.57) $Z_\alpha(\omega)$—функція Бесселя, $sn(\omega)$, $dn(\omega), cn(\omega)$—еліптичні функції Якобі з модулем $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$—довільні дійсні сталі.

Добре відомо [59], що інваріантні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними надають певну інформацію щодо структури більш широких класів розв‘язків цих рівнянь. Це дозволяє, використовуючи відомі розв'язки, здійснювати побудову нових розв'язків досліджуваних рівнянь.

Так, розв'язки 5, 6 (4.57) можуть бути узагальненими і записаними у вигляді

$$\mathbf{A}_\mu = k_\mu \mathbf{B}(kx, cx) + b_\mu \mathbf{C}(kx, cx), \tag{4.58}$$

де $kx = k_\mu x^\mu,\ cx = c_\mu x^\mu,\ k_\mu = a_\mu + d_\mu$.

Підстановка функції (4.58) в рівняння (4.3) та подальше розщеплення отриманої рівності за лінійно–незалежними чотиривекторами із компонентами $k_\mu,\ b_\mu,\ c_\mu$ приводить до системи

$$\begin{aligned} &1. \quad \mathbf{C}_{\omega_1\omega_1} = 0,\\ &2. \quad \mathbf{C} \times \mathbf{C}_{\omega_1} = 0,\\ &3. \quad \mathbf{B}_{\omega_1\omega_1} + e\mathbf{C}_{\omega_0} \times \mathbf{C} + e^2 \mathbf{C} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Тут $\omega_0 = kx,\ \omega_1 = cx$, індекси $\omega_0,\ \omega_1$ означають частинні похідні за змінними $\omega_0,\ \omega_1$ відповідних порядків.

Загальний розв‘язок перших двох рівнянь (4.59) визначає одна із наведених нижче функцій:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I.} \quad \mathbf{C} = \mathbf{f}(\omega_0),\\ &\mathrm{II.} \quad \mathbf{C} = (\omega_1 + v_0(\omega_0))\mathbf{f}(\omega_0), \end{aligned}$$

де $v_0, \mathbf{f}_0$—довільні гладкі дійсні функції змінної ω_0.

Нехай має місце перший із розв'язків. Підстановка значення I в третє рівняння (4.59) приводить до рівності

$$\mathbf{B}_{\omega_1\omega_1} + e\mathbf{f}_{\omega_0} \times \mathbf{f} + e^2 \mathbf{f}(\mathbf{f}\mathbf{B}) - e^2 \mathbf{f}^2 \mathbf{B} = 0. \tag{4.60}$$

Оскільки рівність (4.60) не містить похідної функції $\mathbf{B}$ за змінною ω_0, будемо її розглядати як систему звичайних диференціальних рівнянь для незалежної змінної ω_1. Домноживши ліву частину рівності (4.60) на $\mathbf{f}$ справа, приходимо до рівності

$$(\mathbf{B}\,\mathbf{f})_{\omega_1\omega_1} = 0,$$

звідки отримуємо, що

$$\mathbf{B}\mathbf{f} = v_1(\omega_0)\omega_1 + v_2(\omega_0). \tag{4.61}$$

Тут v_1, v_2—довільні гладкі дійсні скалярні функції змінної ω_0.

Врахувавши (4.61), систему (4.60) можемо записати у вигляді

$$\mathbf{B}_{\omega_1\omega_1} - e^2\mathbf{f}^2\mathbf{B} = e\,\mathbf{f} \times \mathbf{f}_{\omega_0} - e^2(v_1\omega_1 + v_2)\mathbf{f}.$$

Прийшли до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку неважко проінтегрувати. Її загальний розв‘язок визначає функція

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \;&=\; \mathbf{g}(\omega_0)\cosh(e|\mathbf{f}|\omega_1) + \mathbf{h}(\omega_0)\sinh(e|\mathbf{f}|\omega_1) + \\ &+e^{-1}|\mathbf{f}|^{-2}\mathbf{f}_{\omega_0} \times \mathbf{f} + |\mathbf{f}|^{-2}(v_1\omega + v_2)\,\mathbf{f}, \end{aligned} \tag{4.62}$$

де $\mathbf{g}, \mathbf{h}$—довільні гладкі функції. Підстановка (4.62) в (4.61) приводить до таких умов для функцій $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{f}\,\mathbf{g} = 0, \qquad\qquad \mathbf{f}\,\mathbf{h} = 0. \tag{4.63}$$

Отже, поклавши $\mathbf{C}_{\omega_1} = 0$ ми отримали загальний розв‘язок системи (4.60) у вигляді (4.62), (4.63). Підстановка (4.62) в (4.58) приводить до такого сімейства точних розв‘язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса (4.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu \;&=\; k_\mu\{\mathbf{g}(kx\cosh(e|\mathbf{f}|cx) + \mathbf{h}(kx)\sinh(e|\mathbf{f}|cx) + \\ &+e^{-1}|\mathbf{f}|^{-2}\dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{f} + (v_1(kx)cx + v_2(kx))\mathbf{f}\} + b_\mu\mathbf{f}, \end{aligned}$$

де $\mathbf{f}(kx)$, $\mathbf{g}(kx)$, $\mathbf{h}(kx)$, $v_1(kx), v_2(kx)$—довільні гладкі функції, які задовольняють умови (4.63), $\dot{\mathbf{f}} = \dfrac{d\mathbf{f}}{d\omega_0}$, $\omega_0 = kx$.

Випадок II, де $\mathbf{C} = (\omega_1 + v_0(\omega_0))\mathbf{f}(\omega_0)$ розглядається аналогічно. В результаті ми отримали ще одну сім'ю точних розв'язків рівнянь Янга–Міллса (4.3):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\mu &= k_\mu\{(cx + v_0(kx))^{\frac{1}{2}}[\mathbf{g}(kx)J_{\frac{1}{4}}(\frac{ie}{2}|\mathbf{f}|(cx + v_0(kx))^2) + \\
&\quad +\mathbf{h}(kx)Y_{\frac{1}{4}}(\frac{ie}{2}|\mathbf{f}|(cx + v_0(kx))^2)] + (v_1(kx)cx + v_2(kx))\mathbf{f} + \\
&\quad +e^{-1}|\mathbf{f}|^{-2}\dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}\} + b_\mu(cx + v_0(kx))\mathbf{f},
\end{aligned}$$

де $\mathbf{f}(kx)$, $\mathbf{g}(kx)$, $\mathbf{h}(kx)$, $v_0(kx)$, $v_1(kx), v_2(kx)$—довільні гладкі функції, які задовольняють умову (4.63), $J_{\frac{1}{4}}(\omega)$, $Y_{\frac{1}{4}}(\omega)$—функції Бесселя.

Інший ефективний анзац для поля Янга–Міллса отримується з анзацу (4.58) заміною cx на bx:

$$\mathbf{A}_\mu = k_\mu\mathbf{B}(kx, bx) + b_\mu\mathbf{C}(kx, bx). \tag{4.64}$$

Підстановка анзацу (4.64) в рівняння Янга–Міллса (4.3) приводить до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для функцій $\mathbf{B}, \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{\omega_1\omega_1} - \mathbf{C}_{\omega_0\omega_1} - e(\mathbf{B} \times \mathbf{C}_{\omega_1} + 2\mathbf{B}_{\omega_1} \times \mathbf{C} + \\
&+\mathbf{C} \times \mathbf{C}_{\omega_0}) + e^2\mathbf{C} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Проінтегрувавши систему (4.65) в припущенні, що $\mathbf{C} = \mathbf{f}(\omega_0)$, та підставивши отримані результати в анзац (4.64), ми отримали ще таку сім'ю точних розв'язків рівнянь Янга–Міллса:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\mu &= k_\mu\{(\mathbf{g}(kx) + |\mathbf{f}(kx)|^{-1}\mathbf{g}(kx) \times \mathbf{f}(kx)\, bx)\cos(e|\mathbf{f}(kx)|bx) + \\
&\quad +(\mathbf{h}(kx) + |\mathbf{f}(kx)|^{-1}\mathbf{f}(kx) \times \mathbf{f}(kx)\, bx)\sin(e|\mathbf{f}(kx)|bx) + \\
&\quad +e^{-1}|\mathbf{f}(kx)|^{-2}\dot{\mathbf{f}}(kx) \times \mathbf{f}(kx) + (v_1(kx)bx + v_2(kx)\mathbf{f}(kx)\} + \\
&\quad +b_\mu\mathbf{f}(kx),
\end{aligned}$$

де $\mathbf{f}(kx)$, $\mathbf{g}(kx)$, $\mathbf{h}(kx)$, $v_1(kx), v_2(kx)$—довільні гладкі функції, які задовольняють умову (4.63).

4.4. Висновки до розділу 4

У четвертому розділі, з використанням лінійної конструкції $P(1,3)$– та $\tilde{P}(1,3)$–інваріантних анзаців, здійснено систематичне проведення процедури симетрійної редукції $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського до систем звичайних диференціальних рівнянь. Подальший аналіз редукованих систем дозволив отримати ряд багатопараметричних сімей точних розв'язків цих рівнянь.

Слід відзначити, що коваріантна форма інваріантних анзаців для полів Янга–Міллса, яка використовувалася у цьому розділі, містить інформацію щодо структури більш широких класів розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса, які не можна отримати в класичному підході Лі. Вибір такої форми анзаців дозволяє проводити редукцію $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса та самодуальних рівнянь Янга–Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь у загальному вигляді, не використовуючи конкретних значень функцій, що входять в анзаци, які відповідають певним підалгебрам алгебр $p(1,3)$ та $\tilde{p}(1,3)$.

Саме з використанням анзаца (4.9), (4.10), в роботі [202] було отримано ряд нових умовно–інваріантних розв'язків рівнянь (4.3).

На закінчення коротко підсумовуємо отримані результати:

1) побудовано коваріантну форму інваріантних анзаців для полів Янга–Міллса, яка дозволяє проводити редукцію $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського до систем звичайних диференціальних рівнянь у загальному вигляді;

2) здійснено систематичну процедуру $P(1,3)$– та $\tilde{P}(1,3)$–інваріантної редукції $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса та самодуальних рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського до систем звичайних диференціальних рівнянь;

3) побудовано ряд багатопараметричних сімей точних розв'язків (неабелевих) $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського.

РОЗДІЛ 5

Реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре, Евкліда та Галілея в класі векторних полів Лі

П'ятий розділ дисертації присвячений побудові реалізацій в класі лінійних диференціальних операторів (векторних полів Лі) алгебр Лі ряду груп локальних перетворень простору залежних та незалежних змінних (груп Пуанкаре $P(n,m)$, Евкліда $E(k)$ та їх природних узагальнень— груп Галілея, розширених груп Евкліда та Пуанкаре, конформних груп).

Особливу роль в різних прикладаннях відіграють, так звані, коваріантні реалізації алгебр Лі перерахованих вище груп, в яких $max\{n,m\} \leq 3,\ k \leq 4$. Тому, оскільки коваріантні реалізації алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$ вивчено в [134], ми акцентуємо тут увагу на реалізаціях алгебр Лі груп $P(1,2), P(2,2), E(3), E(4)$, які є групами інваріантності ряду важливих модельних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь (див., наприклад, [75, 82, 83, 87, 120, 128, 134, 166]).

У першому підрозділі ми вводимо в розгляд основні означення та поняття, якими користуємося далі.

Вивченню реалізацій алгебр Лі конформної групи $C(n,m)$ та її підгруп у випадку, коли простір змінних містить одну залежну змінну, присвячений другий підрозділ розділу.

Коваріантні реалізації алгебр Лі груп Евкліда $E(3), E(4)$ в просторі з довільною кількістю залежних змінних описано в третьому підрозділі розділу. Аналогічна задача для алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,2)$ та $P(2,2)$ розв'язана в четвертому підрозділі п'ятого розділу.

В п'ятому і шостому підрозділах розділу ми розглядаємо й нековаріантні реалізації груп Пуанкаре та Галілея в просторах малої розмірності, з подальшим використанням отриманих реалізацій для побудови нових пуанкаре– та галілей–інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Основні результати розділу опубліковано в статтях [18, 20, 32, 77, 78, 119, 135], [158]–[160],[210].

5.1. Основні означення та поняття

У першому підрозділі розділу ми формулюємо означення та розглядаємо твердження й ряд понять, які необхідні для подальшої роботи.

Нехай $V = X \times U \cong R^p \times R^q$ є $p+q$–вимірний простір дійсних змінних x_i $(i = 1, \ldots, p)$ та u_j $(j = 1, \ldots, q)$, які надалі ми розрізняємо як незалежні (x_i) та залежні $(u_j = u_j(x_1, \ldots, x_p))$ змінні, G—локальна група перетворень, яка діє в V й векторні поля Лі якої мають вигляд

$$Q = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^i(x,u)\partial_{u_j}, \tag{5.1}$$

де ξ^i, η^j—деякі дійсні гладкі функції змінних $x = (x_1, \ldots, x_p)$ та $u = (u, \ldots, u_q)$, визначені в деякій області простору V, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Розрізняючи змінні x та u, ми враховуємо, що G є групою інваріантності деякої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_q(x)$.

Добре відомо [7], що дослідження зображень групи перетворень Лі G зводиться до вивчення зображень її алгебри Лі AG. У нашому випадкові базисними елементами алгебр Лі є диференціальні оператори першого порядку (векторні поля Лі) вигляду (5.1). Довільна алгебра Лі однозначно визначається певним набором дійсних чисел (структурними константами). Тобто, якщо $AG = \langle Q_1, ..., Q_N \rangle$, то існують N^2 дійсних чисел C^c_{ab} таких, що для довільних базисних елементів Q_a, Q_b алгебри AG має місце рівність

$$[Q_a, Q_b] = C^c_{ab} Q_c,\ a, b, c = 1, ..., N. \tag{5.2}$$

Означення 5.1.1 *Якщо N лінійно незалежних диференціальних операторів першого порядку Q_a вигляду (5.1) задовольняють комутаційні співвідношення (5.2), то ми говоримо, що оператори Q_a реалізують зображення векторними полями Лі алгебри Лі AG або є реалізацією алгебри Лі AG в класі векторних полів Лі.*

Надалі ми реалізації в класі векторних полів Лі алгебри Лі AG називаємо просто реалізаціями алгебри Лі AG. З означення випливає, що проблема опису усіх реалізацій даної алгебри Лі AG зводиться до розв'язування співвідношень (5.2) в класі лінійних диференціальних операторів першого порядку (5.1) для фіксованих структурних констант C^c_{ab}. Відомо [51], що співвідношення (5.2) не змінюються в результаті довільної невиродженої заміни змінних x, u.

$$\begin{aligned} y_\alpha &= f_\alpha(x, u), \qquad \alpha = 1, ..., p, \\ v_\beta &= g_\beta(x, u), \qquad \beta = 1, ..., q, \end{aligned} \tag{5.3}$$

де f_α, g_β - гладкі визначені в V функції. Звідси випливає, що на множині реалізацій векторними полями Лі алгебри AG можна ввести таке бінарне відношення: дві реалізації $\langle Q_1, \ldots, Q_N \rangle$ та $\langle \bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_N \rangle$ алгебри AG називаються еквівалентними, якщо існують такі оборотні перетворення (5.3), які трансформують ці реалізації одна в одну. Ці перетворення утворюють групу (її називають групою дифеоморфізмів), а бінарне відношення є відношенням еквівалентності, яке розбиває множину всіх реалізацій алгебри AG на класи $A_1, A_2, \ldots, A_r$ еквівалентних реалізацій. Отже, для опису всіх реалізацій алгебри AG достатньо побудувати по одному представникові кожного із цих класів $A_j,\ j = 1, \ldots, r$.

Зупинимося коротко на алгебрах Лі, реалізації яких будуть вивчатися в даному розділі.

(I) У другому підрозділі ми будемо розглядати реалізації алгебри Пуанкаре $p(n,m)$ та її узагальнень (розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(n,m)$ й конформної алгебри $c(n,m)$) для випадку однієї залежної функції, а в четвертому підрозділі — реалізації алгебр Пуанкаре $p(1,2), p(2,2)$ для випадку довільного числа залежних функцій. Оскільки $p(1,2), p(2,2)$ є частинними випадками алгебри $p(n,m)$, сформулюємо потрібні означення для останньої алгебри.

У випадку розгляду реалізацій алгебри Пуанкаре $p(n,m)$, $V = X \times U \cong R^{n,m} \times R^q$ є $n+m+q$— вимірним простором дійсних змінних x_i $(i = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m)$ та u_j $(j = 1, \ldots, q)$, де $R^{n,m}$—псевдоевклідовий простір з метричним тензором

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \ \alpha = \beta = 1, \ldots, n, \\ -1, \ \alpha = \beta = n+1, \ldots, n+m, \\ 0, \ \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{5.4}$$

Означення 5.1.2 *Будемо говорити, що лінійно незалежні диференціальні оператори*

$$\begin{aligned} P_\mu &= \xi^{(1)}_{\mu\alpha}(x,u)\partial x_\alpha + \eta^{(1)}_{\mu i}(x,u)\partial u_i, \\ J_{\alpha\beta} &= \xi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(x,u)\partial x_\gamma + \eta^{(2)}_{\alpha\beta i}(x,u)\partial u_i \end{aligned} \tag{5.5}$$

реалізують алгебру $p(n,m)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha, \\ &[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = g_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}J_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}J_{\alpha\mu}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Означення 5.1.3 *Кажуть, що лінійно незалежні диференціальні оператори $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ (5.5) та оператор*

$$D = \xi^{(3)}_\gamma(x,u)\partial x_\gamma + \eta^{(3)}_i(x,u)\partial u_i \tag{5.7}$$

реалізують розширену алгебру Пуанкаре $\tilde{p}(n,m)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (5.6) та співвідношення

$$[D, J_{\alpha\beta}] = 0, \qquad [P_\alpha, D] = P_\alpha. \tag{5.8}$$

Означення 5.1.4 *Кажуть, що лінійно незалежні диференціальні оператори*
P_μ, $J_{\alpha\beta}$ *(5.5),* D *(5.7) та оператори*

$$K_\mu = \xi^{(4)}_{\mu\gamma}(x,u)\partial x_\gamma + \eta^{(4)}_i(x,u)\partial u_i \tag{5.9}$$

реалізують конформну алгебру $c(n,m)$*, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (5.6), (5.8) та співвідношення*

$$\begin{aligned}&[K_\alpha, K_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}K_\gamma - g_{\alpha\gamma}K_\beta,\\ &[P_\alpha, K_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}), \quad [D, K_\alpha] = K_\alpha.\end{aligned} \tag{5.10}$$

У наведених вище виразах та співвідношеннях (5.5) –(5.10) $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+m$; $\xi^{(1)}_{\mu\alpha}, \xi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}, \xi^{(3)}_\gamma, \xi^{(4)}_{\mu\gamma}, \eta^{(1)}_{\mu i}, \eta^{(2)}_{\alpha\beta i}, \eta^{(3)}_i, \eta^{(4)}_i$—деякі дійсні гладкі функції змінних $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ та $u = (u_1, \ldots, u_q)$, визначені в просторі V, $i = 1, \ldots, q$, $g_{\mu\nu}$—метричний тензор (5.4).

(II) У третьому підрозділі ми будемо розглядати реалізації алгебр Евкліда $e(3)$ та $e(4)$, тому сформулюємо означення для загального випадку алгебри Евкліда $e(p)$. Тут, як і раніше, $V = X \times U \cong R^p \times R^q$, але R^p—евклідовий простір.

Означення 5.1.5 *Будемо говорити, що лінійно незалежні диференціальні оператори*

$$\begin{aligned}P_a &= \xi^{(1)}_{ab}(x,u)\partial x_\beta + \eta^{(1)}_{ai}(x,u)\partial u_i,\\ J_{ab} &= \xi^{(2)}_{abc}(x,u)\partial x_c + \eta^{(2)}_{abi}(x,u)\partial u_i\end{aligned} \tag{5.11}$$

реалізують алгебру Евкліда $e(p)$*, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення*

$$\begin{aligned}&[P_a, P_b] = 0, \quad [J_{bc}, P_a] = \delta_{ba}P_c - \delta_{ca}P_b,\\ &[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

У наведених вище виразах (5.11) та співвідношеннях (5.12) $a, b, c, d = 1, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, q$, $\xi^{(1)}_{ab}, \xi^{(2)}_{abc}, \eta^{(1)}_{ai}, \eta^{(2)}_{abi}$—деякі дійсні гладкі функції змінних $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $u = u(u_1, \ldots, u_q)$, δ_{ab}—символ Кронеккера.

Із означень 5.1.2, 5.1.5 видно, що алгебри Пуанкаре та Евкліда мають таку властивість: кожна з них є напівпрямою сумою комутативного ідеалу I та деякої напівпростої алгебри Лі L, тобто, $p(n,m) = I \subset\!\!\!\!+ L$ $(L = o(n,m))$, $e(p) = I \subset\!\!\!\!+ L$ $(L = o(p))$. Зауважимо, що таку ж структуру мають і такі важливі алгебри Лі математичної фізики, як алгебри Галілея. Для всіх цих алгебр, базис комутативного ідеалу I складають генератори трансляцій P_i, при цьому $\dim I = \dim X = p$, тобто, розмірність простору незалежних змінних збігається з розмірністю ідеалу (не зменшуючи загальності міркувань можемо покласти у випадку алгебри $p(n,m)$ $n+m=p$).

Нехай

$$P_i = \xi^i_\alpha(x,u)\partial_{x_\alpha} + \eta^i_j(x,u)\partial_{u_j}, \tag{5.13}$$

де ξ^i_α, η^i_j—гладкі в $V = X \times U$ функції, $i = 1,2,\ldots,n$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, $j = 1,2,\ldots,q$, $n \le p$, M—матриця складена з коефіцієнтів в операторах (5.13) біля похідних $\partial_{x_\alpha}, \partial_{u_j}$:

$$M = \begin{Vmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \ldots & \xi^1_p & \eta^1_1 & \eta^1_2 & \ldots & \eta^1_q \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \ldots & \xi^2_p & \eta^2_1 & \eta^2_2 & \ldots & \eta^2_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \ldots & \xi^n_p & \eta^n_1 & \eta^n_2 & \ldots & \eta^n_q \end{Vmatrix}. \tag{5.14}$$

Лема 5.1.1 *Якщо* $\operatorname{rank} M = n$ $(n \le p)$, *то існують такі перетворення (5.3), які зводять оператори P_i (5.13) до операторів*

$$P_i = \partial_{x_i},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Доведення. Доведення проводимо методом математичної індукції за i. Нехай $i = 1$. Тоді матриця M складається з єдиного рядка, в якому є хоча б один ненульовий в V елемент (має місце одновимірна алгебра Лі з оператором P_1 вигляду (5.13)). Згідно з теоремою про спрямлювання векторних полів Лі [51], тут ми завжди можемо покласти

$$P_1 = \partial_{x_1}.$$

Нехай лема має місце і для $i = n-1$. Тоді матриця M має форму

$$M = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \xi_3^p & \dots & \xi_{n-2}^n & \xi_{n-1}^n & \xi_n^n & \dots & \xi_p^n & \eta_1^n & \dots & \eta_q^n \end{array} \right\|,$$

в якій, внаслідок комутативності алгебри I, функції ξ_α^n, η_j^n залежать від змінних $x_n, x_{n+1}, \dots, x_p$, $u_1, \dots, u_q$. Окрім цього, оскільки rank $M = n$, хоча б одна з функцій $\xi_n^n, \xi_{n+1}^n, \dots, \xi_p^n, \eta_1^n, \dots, \eta_q^n$ відмінна від нуля. Покажемо, що, не зменшуючи загальності міркувань, можемо вважати $\xi_n^n \neq 0$.

Нехай $\xi_n^n = 0$, але $\xi_l^n \neq 0$ $(n < l \leq p)$. Тоді, поклавши

$$\bar{x}_i = x_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \bar{x}_n = x_l, \ \ \bar{x}_{n+1} = x_{n+1},$$
$$\bar{x}_{n+2} = x_{n+2}, \dots, \bar{x}_{l-1} = x_{l-1}, \ \ \bar{x}_l = x_n, \ \ \bar{x}_{l+1} = x_{l+1},$$
$$\bar{x}_{l+2} = x_{l+2}, \dots, \bar{x}_p = x_p, \ \ \bar{u}_j = u_j \ \ (j = 1, \dots, q),$$

отримуємо, що у перетвореному операторі P_i коефіцієнт біля $\partial_{\bar{x}_n}$ відмінний від нуля. Тобто (повернувшись до початкових позначень) $\xi_n^n \neq 0$.

Якщо всі $\xi_i^n = 0$, то існує $\eta_l^n \neq 0$ $(1 \leq l \leq q)$, і до шуканого результату приводить заміна

$$\bar{x}_i = x_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \ \ \bar{x}_n = u_l, \ \ \bar{x}_{n+1} = x_{n+1},$$
$$\bar{x}_{n+2} = x_{n+2}, \dots, \bar{x}_p = x_p, \ \ \bar{u}_1 = u_1, \dots, \bar{u}_{l-1} = u_{l-1},$$
$$\bar{u}_l = x_n, \ \ \bar{u}_{l+1} = u_{l+1}, \dots, \bar{u}_q = u_q.$$

Отже, $P_i = \partial_{x_i}$ $(i = 1, 2 \dots, n-1)$, $P_n = \xi_\alpha^n \partial_{x_\alpha} + \eta_j^n \partial_{u_j}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, p;$ $\beta = 1, 2, \dots, q)$, причому $\xi_n^n \neq 0, \xi_\alpha^n, \eta_j^n$— гладкі функції змінних $x_n, x_{n+1}, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q$.

Перетворення (5.3), які мають вигляд

$$\bar{x}_i = x_i + f^i(x_n, x_{n+1}, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q),$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_n = f^n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q),\\
&\bar{x}_k = f^k(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q),\\
&\bar{u}_j = g^j(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q),
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

де $i = 1, 2, \ldots, n-1,\ k = n+1, n+2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, q$, залишають вигляд операторів $P_i = \partial_{x_i}\ \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ незмінним. Поклавши в (5.15) функції f^i, f^n, f^k, g^j рівними розв'язкам системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$
\begin{aligned}
&\xi_i^n + \xi_n^n \frac{\partial f^i}{\partial x_n} + \xi_k^n \frac{\partial f^i}{\partial x_k} + \eta_j^n \frac{\partial f^i}{\partial u_j} = 0,\\
&\xi_n^n \frac{\partial f^n}{\partial x_n} + \xi_k^n \frac{\partial f^n}{\partial x_k} + \eta_j^n \frac{\partial f^n}{\partial u_j} = 1,\\
&\xi_n^n \frac{\partial f^k}{\partial x_n} + \xi_k^n \frac{\partial f^k}{\partial x_k} + \eta_j^n \frac{\partial f^k}{\partial u_j} = 0,\\
&\xi_n^n \frac{\partial g^j}{\partial x_n} + \xi_k^n \frac{\partial g^j}{\partial x_k} + \eta_j^n \frac{\partial g^j}{\partial u_j} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

зводимо оператор P_n до оператора $P_n = \partial_{\bar{x}_n}$. Повернувшись до початкових позначень, переконуємося в справедливості твердження леми і для $i = n$.

Зауважимо, що існування розв'язків системи (5.15) випливає із загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку [13, 31], в рамках припущень щодо гладкості функцій $\xi_\alpha^n, \eta_j^n, f^i, f^n$, f^k, g^n. Також в (5.6) $i = 1, 2, \ldots, n-1,\ k = n+1,\ n+2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$, n—фіксований індекс, підсумовування передбачено за нижніми індексами k, j.

Лему доведено.

Означення 5.1.6 *Реалізації алгебр Евкліда $e(p)$ та Пуанкаре $p(n, m)$ $(n + m = p)$ будемо називати коваріантними, якщо базисні елементи $P_i\ \ (i = 1, \ldots, p)$ задовольняють умову*

$$
\operatorname{rank} M = p, \tag{5.17}
$$

де M—матриця (5.14), складена для операторів P_i.

Саме коваріантні реалізації вказаних алгебр Лі і будуть вивчатися в даному розділі. Оскільки, згідно з результатами леми 5.1.1, при виконанні умови (5.17) існують перетворення (5.3), які зводять генератори трансляцій до вигляду $P_i = \partial_{x_i}$, ми у подальшому будемо базуватися на цьому факті.

5.2. Коваріантні реалізації конформної алгебри $c(n, m)$

У другому підрозділі ми вивчаємо коваріантні реалізації алгебр $p(n, m)$, $\tilde{p}(n, m)$, $c(n, m)$ для випадку однієї залежної функції.

Тут $V = X \times U = R^{n,m} \times R^1$, де $X \cong R^{n,m}$—псевдоевклідовий простір дійсних змінних $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ з метричним тензором (5.4), $U \cong R^1 = \langle u \rangle$. Як і раніше розрізняємо x та $u(x)$ як незалежні та залежну змінні відповідно. Векторні поля Лі мають вигляд

$$Q = \xi_\mu(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta(x, u)\partial_u, \tag{5.18}$$

де ξ_μ, η —гладкі дійсні функції змінних x, u, визначені в деякій області простору V.

Досліджуючи реалізації в класі операторів (5.18) деякої алгебри Лі, ми тим самим розглядаємо реалізації відповідної групи Лі в класі груп перетворень Лі, тобто розглядаємо її як групу перетворень

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, a), \quad \mu = 1, \ldots, n + m, \\ u' &= g(x, u, a), \end{aligned} \tag{5.19}$$

де $a = \{a_N, N = 1, \ldots, r\}$—групові параметри (наприклад, у випадку групи Пуанкаре $P(n, m)$ групові параметри зберігають квадратичну форму $S(x) = g_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$, де $\alpha, \beta = 1, \ldots, n + m$, $g_{\alpha\beta}$—метричний тензор (5.4), і тут $r = 1, \ldots, n + m + C^2_{n+m}$).

Означення 5.2.1 *Реалізацію групи перетворень Лі (5.19) називаємо лінійною, якщо функції* f_μ, g *задовольняють умову* $f_\mu = f_\mu(x, a)$,

$g = \tilde{g}(x,a)u$, $\mu = 1, 2, \ldots, n+m$. Якщо ці умови не виконуються, то реалізація групи називається нелінійною.

Означення 5.2.2 *Реалізацію алгебри Лі в класі векторних полів Лі (5.18) називаємо лінійною, якщо коефіцієнти її базисних елементів задовольняють умови:*

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n+m, \quad \eta = \tilde{\eta}(x)u.$$

Якщо вказані умови не виконуються, то реалізація називається нелінійною.

Використовуючи рівняння Лі [51, 57], неважко встановити, що нелінійній реалізації алгебри Лі відповідає нелінійна реалізація групи Лі, і навпаки.

Перетворення (5.3) (група дифеоморфізмів) у нашому випадку набувають вигляду

$$\bar{x}_\alpha = F_\alpha(x,u), \qquad \bar{u} = G(x,u), \tag{5.20}$$

де $\alpha = 1, 2, \ldots, n+m$, F_α, G —довільні гладкі оборотні дійсні функції, визначені в просторі V.

Зауваження 5.2.1. Пд час визначення типу реалізацій векторними полями Лі розглядуваних алгебр Лі, потрібно враховувати перетворення (5.20). Як було відзначено вище, опис реалізацій зводиться до побудови представників класів еквівалентних реалізацій. Тому, маючи нелінійну реалізацію, обов'язково потрібно переконатися, чи не існує заміна (5.20), яка зводить її до лінійної.

5.2.1. Реалізації алгебр, для яких $\max\{n,m\} \geq 3$. Розглянемо спочатку реалізації алгебри Пуанкаре $p(n,m)$ та її узагальнень, якщо $\max\{n,m\} \geq 3$. Говорячи про реалізації алгебр Лі в класі векторних полів Лі, ми маємо тут на увазі векторні поля Лі (5.18).

Теорема 5.2.1 *Довільна коваріантна реалізація алгебри* $p(n,m)$, *де* $\max\{n,m\} \geq 3$, *є еквівалентною стандартній реалізації*

$$P_\alpha = \partial_{x_\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} x_\gamma \partial_{x_\beta} - g_{\beta\gamma} x_\gamma \partial_{x_\alpha}, \tag{5.21}$$

де $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n+m$, $g_{\alpha\beta}$*—метричний тензор (5.4).*

Доведення. Згідно з результатами леми 5.1.1, можемо покласти $P_\alpha = \partial_{x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n+m$. Підставивши оператори

$$P_\alpha = \partial_{x_\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta\gamma}(x,u)\partial_{x_\gamma} + \eta_{\alpha\beta}(x,u)\partial_u$$

в другу групу комутаційних співвідношень (5.6) і прирівнявши в отриманих виразах коефіцієнти біля лінійно незалежних операторів $\partial_{x_\alpha}, \partial_u$, ми приходимо до такої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для визначення функцій $\xi_{\alpha\beta\gamma}$, $\eta_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\mu} &= g_{\mu\alpha} g_{\gamma\beta} - g_{\mu\beta} g_{\gamma\alpha}, \\ \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} &= 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \mu = 1, \ldots, n+m. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned} &\xi_{\alpha\beta\gamma} = x_\alpha g_{\gamma\beta} - x_\beta g_{\gamma\alpha} + F_{\alpha\beta\gamma}(u), \\ &\eta_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}(u). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Тут $F_{\alpha\beta\gamma} = -F_{\beta\alpha\gamma}$, $G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha}$—довільні гладкі функції, α, β, $\gamma = 1, \ldots, n+m$.

Перевіряємо тепер третю групу комутаційних співвідношень (5.6) для $1 \leq \alpha, \beta, \mu, \nu \leq n$, $\beta = \mu$. Прирівнявши коефіцієнти в отриманих виразах біля ∂_u, ми приходимо до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь для функцій $G_{\mu\nu}(u)$:

$$G_{\alpha\nu} = G_{\alpha\beta} \frac{dG_{\beta\nu}}{du} - G_{\beta\nu} \frac{dG_{\alpha\beta}}{du}. \tag{5.23}$$

Тут підсумовування за β відсутнє.

Оскільки $\alpha, \beta, \nu = 1, \ldots, n$ входять в (5.23) довільно, то перепозначаючи їх, приходимо ще до таких рівнянь:

$$G_{\beta\nu} = G_{\beta\alpha}\frac{dG_{\alpha\nu}}{du} - G_{\alpha\nu}\frac{dG_{\beta\alpha}}{du}, \tag{5.24}$$

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\nu}\frac{dG_{\nu\beta}}{du} - G_{\nu\beta}\frac{dG_{\alpha\nu}}{du}, \tag{5.25}$$

де також відсутнє підсумовування за α і ν.

Домноживши (5.23) на $G_{\alpha\nu}$, (5.24) на $G_{\beta\nu}$, (5.25) на $G_{\alpha\beta}$ і додавши отримані рівності, отримуємо

$$G^2_{\alpha\mu} + G^2_{\beta\mu} + G^2_{\alpha\beta} = 0,$$

звідки випливає, що $G_{\alpha\nu} = G_{\beta\gamma} = G_{\alpha\beta} = 0$.

Отже, якщо індекси α, β, ν задовольняють умову $1 \leq \alpha, \beta, \nu \leq n$, то $G_{\alpha\beta} = 0$ для всіх $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$, а для визначення функцій $F_{\alpha\beta\gamma}(u)$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, загальний розʼязок якої має вигляд

$$F_{\alpha\beta\gamma} = F_\alpha(u)g_{\beta\gamma} - F_\beta(u)g_{\alpha\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n,$$

де $F_\alpha(u)$—довільна гладка функція.

Таким чином оператори $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ при $1 \leq \alpha,\ \beta \leq n$, які задовольняють комутаційні співвідношення (5.6), мають такий найбільш загальний вигляд:

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad J_{\alpha\beta} = (x_\alpha + F_\alpha(u))\partial_{x_\beta} - (x_\beta + F_\beta(u))\partial_{x_\alpha}.$$

Здійснивши заміну змінних

$$\begin{aligned} \bar{x}_\mu &= x_\mu + F_\mu(u), \quad \mu = 1, \ldots, n \\ \bar{x}_A &= x_A, \qquad A = n+1, \ldots, n+m, \\ \bar{u} &= u \end{aligned}$$

та повернувшись до початкових позначень, ми приходимо до реалізації (5.21), де $1 \leq \alpha,\ \beta \leq n$.

Розглянемо третю групу комутаційних співвідношень (5.6) для $J_{\alpha\beta}$, $J_{\alpha A}$, де $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, $n+1 \leq A \leq n+m$:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\alpha A}] = [x_\alpha \partial x_\beta - x_\beta \partial x_\alpha, g_{\alpha\gamma} x_\gamma \partial x_A - g_{A\gamma} x_\gamma \partial x_\alpha + \\ + F_{\alpha A\gamma}(u)\partial x_\gamma + G_{\alpha A}(u)\partial u] = x_A \partial x_\beta - x_\beta \partial x_A, \tag{5.26}$$

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\alpha A}] = J_{\beta A}. \tag{5.27}$$

Прирівнявши праві частини рівностей (5.26), (5.27), переконуємося, що $F_{\alpha A\gamma} = G_{\alpha A} = 0$. Отже оператори $J_{\alpha A} = -J_{A\alpha}$, де $\alpha = 1, \ldots, n$, $A = n+1, \ldots, n+m$ мають вигляд (5.21).

Аналогічно, перевіривши третю групу комутаційних співвідношень (5.6) для генераторів $J_{\alpha A}$, J_{AB}, де $1 \leq \alpha \leq n$, $n+1 \leq A, B \leq n+m$, отримуємо, що $F_{AB\gamma} = 0$, $A, B = n+1, \ldots, n+m$. Отже оператори J_{AB} мають форму

$$J_{AB} = x_B \partial x_A - x_A \partial x_B + G_{AB}(u)\partial u, \quad A, B = n+1, \ldots, n+m.$$

Але, оскільки для $\alpha = 1, \ldots, n$, $\;A, B = n+1, \ldots, n+m$

$$[J_{\alpha A}, J_{\alpha B}] = -J_{AB},$$

то

$$G_{AB} = 0, \quad A,\ B = n+1, \ldots, n+m.$$

Тим самим ми показали, що існує заміна змінних (5.20), яка зводить довільну коваріантну реалізацію алгебри Пуанкаре $p(n,m)$, де $\max\{n,m\} \geq 3$, до стандартної реалізації (5.21).

Теорему доведено.

Зауваження 5.2.2. Алгебра Пуанкаре $p(n,m)$ містить як підалгебру алгебру Евкліда $e(n)$ з базисними елементами $P_\alpha, J_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. Як випливає із доведення теореми 5.2.1, довільна коваріантна реалізація алгебри Евкліда $e(n)$, де $n \geq 3$, є еквівалентною стандартній реалізації

$$P_\alpha = \partial x_\alpha, \quad J_{\beta\gamma} = x_\beta \partial x_\gamma - x_\gamma \partial x_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

Наслідок 5.2.1 *Довільна коваріантна реалізація розширеної алгебри Пуанкаре* $\tilde{p}(n,m)$, *де* $\max\{n,m\} \geq 3$, *є еквівалентною реалізації*

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \partial_{x_\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_{x_\beta} - g_{\beta\gamma}x_\gamma\partial_{x_\alpha}, \\ D &= x_\alpha\partial_{x_\alpha} + \varepsilon u\partial_u. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Тут $\varepsilon = 0, 1$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n+m$; $g_{\alpha\beta}$*—метричний тензор (5.4).*

Доведення. Із теореми 5.2.1 випливає, що реалізація алгебри Пуанкаре $p(n,m)$ перетвореннями (5.20) може бути завжди зведеною до вигляду (5.21). Тому перевірка першої групи комутаційних співвідношень (5.8) для оператора

$$D = \xi_\mu(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta(x,u)\partial_u$$

приводить до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x_\alpha} = \delta_{\mu\alpha}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x_\alpha} = 0,$$

де $\delta_{\mu\alpha}$—символ Кронеккера, $\mu, \alpha = 1, \ldots, n+m$.

Проінтегрувавши систему, отримуємо, що

$$\xi_\mu = x_\mu + F_\mu(u), \quad \eta = G(u),$$

де $F_\mu(u), G(u)$—довільні гладкі функції.

Із виконання другої групи комутаційних співвідношень (5.8) випливає, що

$$g_{\mu\gamma}F_\gamma\partial_{x_\nu} - g_{\nu\gamma}F_\gamma\partial_{x_\mu} = 0, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, n+m,$$

тому $F_\gamma = 0$, $\gamma = 1, \ldots, n+m$. Таким чином, загальна форма оператора D така:

$$D = x_\mu\partial_{x_\mu} + G(u)\partial_u.$$

Якщо $G(u) = 0$, то приходимо до реалізації (5.28), де $\varepsilon = 0$. Якщо ж $G(u) \neq 0$, то заміна змінних

$$\bar{x}_\mu = x_\mu, \ \mu = 1, \ldots, n+m, \ \bar{u} = \int (G(u))^{-1}du$$

зводить реалізацію алгебри $\tilde{p}(n,m)$ до вигляду (5.28), де $\epsilon = 1$.

Наслідок доведено.

Наслідок 5.2.2 *Довільна коваріантна реалізація конформної алгебри $c(n,m)$, де* $\max \geq 3$, *є еквівалентною одній із таких реалізацій:*

1) *оператори $P_\mu, J_{\alpha\beta}, D$ мають вигляд (5.28), а оператори K_α—*

$$K_\alpha = 2g_{\alpha\beta}x_\beta D - (g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu)\partial_{x_\alpha}; \tag{5.29}$$

2) *оператори $P_\mu, J_{\alpha\beta}, D$ мають вигляд (5.28), де $\varepsilon = 1$, а оператори K_α—*

$$K_\alpha = 2g_{\alpha\beta}x_\beta D - (g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \pm u^2)\partial_{x_\alpha}. \tag{5.30}$$

Доведення наслідку 5.2.2 проводиться аналогічно доведенню наслідка 5.2.1, тому тут ми його не наводимо.

Зауваження 5.2.3. Безпосередньою перевіркою можна переконатися в тому, що нелінійна реалізація (5.28), (5.30) конформної алгебри не зводиться перетвореннями (5.20) до лінійної реалізації. Відзначимо, що конформна алгебра з базисними операторами (5.28), (5.30) є алгеброю інваріантності рівняння ейконала [87, 128]

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\nu} \pm 1 = 0$$

та системи д'Аламбера–ейконала [136]

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\nu} \pm 1 = 0,\\ &g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \pm (n+m-1)u^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Також відзначимо той факт, що група Пуанкаре $P(n,m)$ перетворень (5.19) не має суттєво нелінійних коваріантних реалізацій.

5.2.2. Реалізації алгебр, для яких $\max\{n,\ m\} < 3$**.** Коваріантні реалізації алгебр $p(1,1), \tilde{p}(1,1), c(1,1)$ в класі векторних полів Лі для випадку однієї залежної функції повністю описані Рідо та Вінтернітцом

[189]. Вони, зокрема, отримали, що реалізації алгебри Пуанкаре вичерпуються стандартною реалізацією (5.21) та реалізацією

$$P_1 = \partial_{x_1}, \quad P_2 = \partial_{x_2}, \quad J_{12} = x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2} + u\partial_u, \tag{5.31}$$

які є лінійними. При цьому, до нелінійних реалізацій алгебр $\tilde{p}(1,1)$, $c(1,1)$ приводять розширення реалізації алгебри Пуанкаре $p(1,1)$ з операторами (5.31). Нелінійну реалізацію алгебри Пуанкаре $p(1,2)$

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x_\mu}, \qquad J_{12} = x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2} + \partial_u, \\ J_{13} &= x_1\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_1} + \cos u\partial_u, \\ J_{23} &= x_2\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_2} - \sin u\partial_u \end{aligned} \tag{5.32}$$

отримала в дещо іншому вигляді Єгорченко [200]. Виявляється, що коваріантні реалізації алгебри $p(1,2)$ еквівалентні або реалізації (5.32) або стандартній реалізації.

Залишається розглянути реалізації алгебри Пуанкаре $p(2,2)$.

Теорема 5.2.2 *Довільна коваріантна реалізація алгебри Пуанкаре* $p(2,2)$ *є еквівалентною реалізації*

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x_\mu}, \quad \mu = 1,2,3,4; \\ J_{12} &= x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} + \varepsilon\partial_u, \\ J_{13} &= x_1\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_1} + \varepsilon\cos u\partial_u, \\ J_{14} &= x_4\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_4} \mp \varepsilon\sin u\partial_u, \\ J_{23} &= x_3\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_3} + \varepsilon\sin u\partial_u, \\ J_{24} &= x_4\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_4} \pm \varepsilon\cos u\partial_u, \\ J_{34} &= x_4\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_4} \pm \varepsilon\partial_u, \end{aligned} \tag{5.33}$$

де $\varepsilon = 0, 1$.

Доведення. Так як і під час доведення теореми 5.2.1, отримуємо, що оператори $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ можуть бути зведеними до операторів

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x_\mu}, \qquad J_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}x_\alpha\partial_{x_\nu} - g_{\nu\alpha}x_\alpha\partial_{x_\mu} + \\ &\quad + F_{\mu\nu\alpha}(u)\partial_{x_\alpha} + G_{\mu\nu}(u)\partial_{x_\nu}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

де $F_{\mu\nu\alpha} = -F_{\nu\mu\alpha}$, $G_{\mu\nu} = -G_{\mu\nu}$—довільні гладкі функції, μ, ν, $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Розглянемо трійку операторів J_{12}, J_{13}, J_{23}. Із виконання другої групи комутаційних співвідношень (5.6) випливає система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій G_{12}, G_{13}, G_{23}:

$$\begin{aligned} G_{23} &= G_{13}\frac{dG_{12}}{du} - G_{12}\frac{dG_{13}}{du}, \\ G_{13} &= G_{12}\frac{dG_{23}}{du} - G_{23}\frac{dG_{12}}{du}, \\ G_{12} &= G_{13}\frac{dG_{23}}{du} - G_{23}\frac{dG_{13}}{du}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Домноживши перше рівняння системи (5.35) на G_{23}, друге— на G_{13} і третє— на G_{12}, та додавши отримані рівності, приходимо до рівності

$$G_{12}^2 = G_{13}^2 + G_{23}^2. \tag{5.36}$$

Розглянемо окремо випадки $G_{12} \neq 0$ та $G_{12} = 0$.

Випадок 1, $G_{12} \neq 0$. Загальний розв'язок алгебраїчного рівняння (5.36) має вигляд

$$G_{12} = f(u), \quad G_{13} = f(u)\cos g(u), \quad G_{23} = f(u)\sin g(u), \tag{5.37}$$

де $f(u), g(u)$ довільні гладкі функції.

Підстановка (5.37) в (5.34) приводить до рівняння

$$f^2\frac{dg}{du} = f.$$

Оскільки $f(u) = G_{12} \neq 0$, то можемо записати

$$\frac{dg}{du} = f^{-1}.$$

Отже, система (5.35) набуває вигляду

$$G_{12} = \left(\frac{dg}{du}\right)^{-1}, \quad G_{13} = \cos(g)\left(\frac{dg}{du}\right)^{-1}, \quad G_{23} = \sin(g)\left(\frac{dg}{du}\right)^{-1},$$

де $g = g(u)$—довільна гладка функція.

Заміна змінних

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3,4, \quad \bar{u} = g(u),$$

яка не впливає на загальну структуру операторів $P_\mu, J_{\mu\nu}$ (5.34), зводить оператори J_{12}, J_{13}, J_{23} до операторів

$$\begin{aligned} J_{12} &= x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} + \partial_u + \tilde{F}_{12\alpha}(u)\partial_{x_\alpha}, \\ J_{23} &= x_3\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_3} + (\sin u)\partial_u + \tilde{F}_{23\alpha}(u)\partial_{x_\alpha}, \\ J_{13} &= x_3\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3} + (\cos u)\partial_u + \tilde{F}_{13\alpha}(u)\partial_{x_\alpha}, \end{aligned} \tag{5.38}$$

де $\tilde{F}_{12\alpha}, \tilde{F}_{23\alpha}, \tilde{F}_{13\alpha}$ $(\alpha = 1,2,3,4)$ є довільними гладкими функціями.

Підстановка операторів (5.38) в другу групу комутаційних співвідношень (5.6) приводить до системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\tilde{F}_{\alpha\beta\gamma}$, загальний розв'язок якої має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{121} &= \frac{dV}{du} + W, & \tilde{F}_{122} &= \frac{dW}{du} - V, \\ \tilde{F}_{123} &= \frac{dQ}{du}, & \tilde{F}_{131} &= \frac{dV}{du}\cos u - Q, \\ \tilde{F}_{132} &= \frac{dW}{du}\cos u, & \tilde{F}_{133} &= \frac{dQ}{du}\cos u - V, \\ \tilde{F}_{231} &= \frac{dV}{du}\sin u, & \tilde{F}_{232} &= \frac{dW}{du}\sin u - Q, \\ \tilde{F}_{233} &= \frac{dQ}{du}\sin u - W, & \tilde{F}_{214} &= R, \\ \tilde{F}_{134} &= R\cos u - C_1 \sin u, & \tilde{F}_{234} &= R\sin u + C_1\cos u. \end{aligned}$$

Тут V, W, Q, R—довільні гладкі функції змінної u, C_1—довільна дійсна стала.

Заміна змінних

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - V(u), \qquad \bar{x}_2 = x_2 - W(u), \\ \bar{x}_3 &= x_3 - Q(u), \quad \bar{x}_4 = x_4 - \int R(u)du, \quad \bar{u} = u \end{aligned}$$

зводить оператори J_{12}, J_{23}, J_{13} до операторів

$$J_{12} = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} + \partial_u,$$

$$J_{13} = x_3\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3} - C_1 \sin u\partial_u + \cos u\partial_u, \qquad (5.39)$$
$$J_{23} = x_3\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_3} - C_1 \sin u\partial_u + \sin u\partial_u,$$

а решта базисних елементів алгебри $p(2,2)$ має вигляд (5.34).

Перевіривши другу групу комутаційних співвідношень (5.6) для операторів $J_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1,2,3,4)$ вигляду (5.34) (для $\mu = 1,2,3$, $\nu = 4$) та (5.39), ми отримуємо систему для визначення функцій $F_{\mu 4\alpha}, G_{\mu 4}$ $(\alpha = 1,2,3,4;\ \mu = 1,2,3)$, загальний розв'язок якої має вигляд

$$G_{14} = \mp \sin u, \quad G_{24} = \pm \cos u, \quad G_{34} = \pm 1, \quad C_1 = 0,$$
$$F_{141} = F_{242} = F_{343} = C_2, \quad F_{\alpha 4\beta} = 0, \quad \alpha = \beta,$$

де C_2—довільна дійсна стала.

Підстановка отриманого результату в (5.34), (5.39) та використання заміни змінних

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha, \ \ \alpha = 1,2,3, \ \ \bar{x}_4 = x_4 + C_2, \ \ \bar{u} = u$$

приводить нас до операторів $J_{\alpha 4}$ $(\alpha = 1,2,3)$, які мають вигляд (5.33), де $\varepsilon = 1$.

Випадок 2, $G_{12} = 0$. У цьому випадкові із (5.36) випливає, що $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0$. Перевіривши комутаційні співвідношення для операторів J_{12}, J_{14} та J_{12}, J_{24} переконуємося, що $G_{14} = G_{24}$, а з комутування операторів J_{13}, J_{23} випливає, що $G_{34} = 0$, тобто і $G_{14} = G_{24} = 0$.

Підстановка операторів $J_{\mu\nu}$ (5.34), де $G_{\mu\nu} = 0,\ \mu, \nu = 1,2,3,4$, в комутаційні співвідношення (5.6) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для функцій $F_{\mu\nu\alpha}$, загальний розв'язок якої має вигляд

$$F_{\mu\nu\alpha} = F_\mu(u) g_{\nu\alpha} - F_\nu(u) g_{\mu\alpha}, \ \ \mu, \nu, \alpha = 1,2,3,4,$$

де $F_\mu(u)$—довільні гладкі функції.

Отже оператори (5.34) набувають вигляду

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \ \ J_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x_\gamma + F_\gamma(u))\partial_{x_\beta} - g_{\beta\gamma}(x_\gamma + F_\gamma(u))\partial_{x_\alpha}.$$

Застосувавши до отриманих операторів заміну змінних

$$\bar{x}_\mu = x_\mu + F_\mu(u), \quad \mu = 1,2,3,4, \quad \bar{u} = u,$$

ми приходимо до формул (5.33), де $\varepsilon = 0$.

Теорему доведено.

Наслідок 5.2.3 *Довільна коваріантна реалізація розширеної алгебри Пуанкаре* $\tilde{\mathfrak{p}}(2,2)$ *є еквівалентною одній із таких реалізацій:*

1) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ *мають вигляд (5.33), де* $\varepsilon = 1, D = x_\mu \partial_{x_\mu}$;

2) $P_\mu, J_{\alpha,\beta}$ *мають вигляд (5.33) де* $\varepsilon = 0$, $D = x_\mu \partial_{x_\mu} + \varepsilon_1 u \partial_u$, $\varepsilon_1 = 0, 1$.

Наслідок 5.2.4 *Довільна коваріантна реалізація конформної алгебри* $c(2,2)$ *є еквівалентною одній із таких реалізацій:*

1) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ *мають вигляд (5.33), де* $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} D &= x_\alpha \partial_{x_\alpha} + \varepsilon_1 u \partial_u, \quad \varepsilon_1 = 0, 1, \\ K_\alpha &= 2 g_{\alpha\beta} x_\beta D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_\alpha}; \end{aligned}$$

2) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ *мають вигляд (5.33), де* $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} D &= x_\alpha \partial_{x_\alpha} + u \partial_u, \\ K_\alpha &= 2 g_{\alpha\beta} x_\beta D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \pm u^2) \partial_{x_\alpha}; \end{aligned}$$

3) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ *мають вигляд (5.33), де* $\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned} D &= x_\alpha \partial_{x_\alpha} + u \partial_u, \\ K_1 &= 2x_1 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_1} + 2(x_2 + x_3 \cos u \mp x_4 \sin u) \partial_u, \\ K_2 &= 2x_2 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_2} - 2(x_1 - x_3 \sin u \mp x_4 \cos u) \partial_u, \\ K_3 &= -2x_3 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_3} + 2(\pm x_4 + x_1 \cos u - x_2 \sin u) \partial_u, \\ K_4 &= -2x_4 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_4} + 2(\mp x_4 \pm x_1 \sin u \mp x_2 \cos u) \partial_u, \end{aligned}$$

де $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$.

Доведення наслідків 5.2.3, 5.2.4 проводиться аналогічно доведенню наслідку 5.2.1, і тут ми на ньому зупинятися не будемо.

Використовуючи результати доведених тверджень, наведемо явний вигляд нееквівалентних реалізацій розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,2)$ та конформної алгебри $c(1,2)$.

$\tilde{p}(1,2)$:

1) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ мають вигляд (5.21),

$$D = x_\mu \partial_{x_\mu} + \varepsilon u \partial_u, \quad \varepsilon = 0, 1.$$

2) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ мають вигляд (5.32),

$$D = x_\mu \partial_{x_\mu}.$$

$c(1,2)$:

1) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ мають вигляд (5.21),

$$\begin{aligned} D &= x_\mu \partial_{x_\mu} + \varepsilon u \partial_u, \quad \varepsilon = 0, 1, \\ K_\alpha &= 2 g_{\alpha\beta} x_\beta D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_\alpha}; \end{aligned}$$

2) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ мають вигляд (5.21),

$$\begin{aligned} D &= x_\mu \partial_{x_\mu} + u \partial_u, \\ K_\alpha &= 2 g_{\alpha\beta} x_\beta D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \pm u^2) \partial_{x_\alpha}; \end{aligned}$$

3) $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ мають вигляд (5.32),

$$\begin{aligned} D &= x_\mu \partial_{x_\mu}, \\ K_1 &= 2 x_1 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_1} + 2(x_2 + x_3 \cos u) \partial_u, \\ K_2 &= -2 x_2 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_2} + 2(-x_1 + x_3 \sin u) \partial_u, \\ K_3 &= -2 x_3 D - (g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu) \partial_{x_3} - 2(x_1 \cos u + x_2 \sin u) \partial_u. \end{aligned}$$

Тут $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3$.

Очевидно, що суттєво нелінійними є друга реалізація для алгебри $p(1,2)$ та друга і третя реалізація для алгебри $c(1,2)$.

5.3. Реалізації алгебр Евкліда $e(3)$ та $e(4)$

У цьому підрозділі ми розглядаємо коваріантні реалізації алгебр Евкліда $e(3)$ та $e(4)$ для випадку довільної скінченної кількості залежних змінних. Тут $V = X \times U \cong R^m \times R^n$, де $X \cong R^m$—m–вимірний евклідовий простір дійсних змінних $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $U \cong R^n$—простір дійсних змінних $u = (u_1, \ldots, u_n)$, які ми як і раніше розрізняємо як незалежні x та залежні $u = u(x)$ змінні. При цьому $m = 3$ для алгебри $e(3)$ та $m = 4$ для алгебри $e(4)$.

Згідно з означенням 5.1.5, векторні поля Лі P_a $(a = 1, 2, 3)$, J_{ab} $(a, b = 1, 2, 3;\ a < b)$ вигляду (5.11) реалізують алгебру Евкліда $e(3)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (5.12).

Поклавши

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{23}, \quad \mathcal{J}_2 = -\mathcal{J}_{13}, \quad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{12},$$

переконуємося, що мають місце комутаційні співвідношення

$$[P_a,\ P_b] = 0, \tag{5.40}$$

$$[\mathcal{J}_a,\ P_b] = \varepsilon_{abc} P_c, \tag{5.41}$$

$$[\mathcal{J}_a,\ \mathcal{J}_b] = \varepsilon_{abc} \mathcal{J}_c, \tag{5.42}$$

де

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} \ \ 1, & (abc) = \text{цикл}\,(123), \\ -1, & (abc) = \text{цикл}\,(213), \\ \ \ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.3.1. Реалізації алгебри Лі $e(3)$. Перш за все зупининимося на розгляді реалізацій алгебри Лі $o(3)$ групи поворотів $\mathrm{O}(3)$.

З класичної теорії зображень добре відомо, що існує нескінченно багато матричних зображень алгебри Лі групи поворотів $\mathrm{O}(3)$ [11]. Природне відношення еквівалентності на множині матричних зображень алгебри

$o(3)$ визначається так:

$$\mathcal{J}_a \to \tilde{V}\mathcal{J}_a\tilde{V}^{-1},$$

де $\tilde{V}$ є довільною сталою несингулярною матрицею. У випадку реалізації зображень $\mathcal{J}_a$ у формі диференціальних операторів першого порядку (див., наприклад, [76])

$$\mathcal{J}_a = -(J_a\mathbf{u})\partial_{\mathbf{u}}, \tag{5.43}$$

де $\mathbf{u}$ —вектор–стовпець відповідної розмірності, вказане вище відношення еквівалентності передбачає, що зображення алгебри $o(3)$ розглядається в межах класу векторних полів Лі (5.43) з точністю до довільних взаємнооднозначних лінійних перетворень

$$\mathbf{u} \to \mathbf{v} = \tilde{V}\mathbf{u}.$$

Нижче ми покажемо, що такі зображення, прокласифіковані з точністю до довільних взаємнооднозначних перетворень змінних

$$v_i = F_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.44}$$

вичерпуються лише двома нееквівалентними реалізаціями.

Теорема 5.3.1 *Нехай диференціальні оператори першого порядку*

$$\mathcal{J}_a = \eta_{ai}(u)\partial_{u_i}, \quad a = 1, 2, 3 \tag{5.45}$$

задовольняють комутаційні співвідношення (5.42) алгебри Лі групи поворотів $O(3)$. Тоді вони всі є або нульовими, тобто

$$\mathcal{J}_a = 0, \quad a = 1, 2, 3, \tag{5.46}$$

або існують перетворення (5.44) , які зводять їх до однієї із двох трійок операторів:

1. $$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ \mathcal{J}_2 &= -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2}, \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\mathcal{J}_3 = \partial_{u_1};$$

2. $$\begin{aligned} &\mathcal{J}_1 = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3}, \\ &\mathcal{J}_2 = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3}, \\ &\mathcal{J}_3 = \partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Доведення. Якщо хоча б один з операторів $\mathcal{J}_a$ (наприклад $\mathcal{J}_3$) тотожно дорівнює нулю, то згідно з комутаційними співвідношеннями (5.42), два інші оператори $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ теж тотожно дорівнють нулю й ми приходимо до формул (5.46).

Нехай $\mathcal{J}_3$ є ненульовим оператором. Тоді, використавши перетворення (5.44), ми можемо звести оператор $\mathcal{J}_3$ до оператора $\mathcal{J}_3 = \partial_{v_1}$ (має бути $\bar{\mathcal{J}}_3$, але для спрощення позначень ми зберігаємо початкові позначення). Далі, з комутаційних співвідношень $[\mathcal{J}_3,\ \mathcal{J}_1] = \mathcal{J}_2,\ [\mathcal{J}_3,\ \mathcal{J}_2] = -\mathcal{J}_1$ випливає, що коефіцієнти операторів $\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2$ задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь відносно v_1

$$\frac{d\eta_{2i}}{dv_1} = \eta_{3i}, \quad \frac{d\eta_{3i}}{dv_1} = -\eta_{2i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

загальний розв'язок якої можна подати у вигляді

$$\eta_{2i} = f_i \cos v_1 + g_i \sin v_1, \quad \eta_{3i} = g_i \cos v_1 - f_i \sin v_1, \tag{5.49}$$

де $f_i,\ g_i$—довільні гладкі функції змінних $v_2, \ldots, v_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Випадок 1. $f_j = g_j = 0, \quad j \geq 2$.

У цьому випадкові оператори $\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2$ зводяться до операторів

$$\mathcal{J}_1 = f \cos v_1 \partial_{v_1}, \quad \mathcal{J}_2 = -f \sin v_1 \partial_{v_1},$$

де $f = f(v_2, \ldots, v_n)$—довільна гладка функція.

Перевіривши виконання комутаційного співвідношення $[\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2] = \mathcal{J}_3$ приходимо до умови, що $f^2 = -1$, яка не має сенсу в дійсній області.

Випадок 2. Не всі $f_j,\ g_j,\ j \geq 2$ тотожно дорівнюють нулеві.

Заміною змінних

$$w_1 = v_1 + V(v_2, \dots, v_n), \quad w_j = v_j, \quad j = 2, \dots, n$$

ми зводимо оператори $\mathcal{J}_a,\ a = 1, 2, 3$ з коефіцієнтами (5.49) до операторів

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \tilde f \sin w_1 \partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n} (\tilde f_j \cos w_1 + \tilde g_j \sin w_1) \partial_{w_j}, \\
\mathcal{J}_2 &= \tilde f \cos w_1 \partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n} (\tilde g_j \cos w_1 - \tilde f_j \sin w_1) \partial_{w_j}, \qquad (5.50) \\
\mathcal{J}_3 &= \partial_{w_1}.
\end{aligned}$$

Тут $\tilde f, \tilde f_j, \tilde g_j$—довільні гладкі функції змінних $w_2, \dots, w_n$.

Підвипадок 2.1. Не всі $\tilde f_j$ тотожно дорівнють нулю.

Заміна змінних

$$z_1 = w_1, \quad z_j = W_j(w_2, \dots, w_n), \quad j = 2, \dots, n,$$

де W_2—частинний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними

$$\sum_{j=2}^{n} \tilde f_j \partial_{w_j} W_2 = 1,$$

а $W_3, \dots, W_n$—функціонально незалежні перші інтеграли диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\sum_{j=2}^{n} \tilde f_j \partial_{w_j} W = 0,$$

зводить оператори (5.50) до операторів

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= F \sin z_1 \partial_{z_1} + \cos z_1 \partial_{z_2} + \sum_{j=2}^{n} G_j \sin z_1 \partial_{z_j}, \\
\mathcal{J}_2 &= F \cos z_1 \partial_{z_1} - \sin z_1 \partial_{z_2} + \sum_{j=2}^{n} G_j \cos z_1 \partial_{w_j}, \qquad (5.51) \\
\mathcal{J}_3 &= \partial_{z_1}.
\end{aligned}$$

Підставивши оператори (5.51) в комутаційне співвідношення $[\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2] = \mathcal{J}_3$ і прирівнявши коефіцієнти біля лінійно незалежних операторів $\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_n}$, приходимо до такої системи диференціальних рівнянь для функцій $F,\ G_2, \ldots, G_n$:

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} - F^2 = 1, \quad \frac{\partial G_j}{\partial z_2} - FG_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Проінтегрувавши ці рівняння, отримуємо, що

$$F = \tan(z_2 + c_1), \quad G_j = \frac{c_j}{\cos(z_2 + c_1)},$$

де $c_1, \ldots, c_n$—довільні гладкі функції $z_3, \ldots, z_n,\ \ j = 2, \ldots, n$.

Замінивши, якщо це необхідно, $z_2 + c_1(z_3, \ldots, z_n)$ на z_2, ми можемо вважати, що c_1 тотожно дорівнює нулеві. Нарешті, виконавши заміну

$$\begin{aligned} y_a &= z_a, \quad a = 1, 2, 3 \\ y_k &= Z_k(z_3, \ldots, z_n), \quad k = 4, \ldots, n, \end{aligned}$$

де Z_k—функціонально незалежні інтеграли диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\sum_{j=3}^{n} G_j \partial_{z_j} Z = 0,$$

переконуємося, що можемо покласти $G_k = 0,\ k = 4, \ldots, n$.

Згідно з цим, оператори (5.51) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \sin y_1 \tan y_2 \partial_{y_1} + \cos y_1 \partial_{y_2} + \frac{\sin y_1}{\cos y_2}(f\partial_{y_2} + g\partial_{y_3}), \\ \mathcal{J}_2 &= \cos y_1 \tan y_2 \partial_{y_1} - \sin y_1 \partial_{y_2} + \frac{\cos y_1}{\cos y_2}(f\partial_{y_2} + g\partial_{y_3}), \\ \mathcal{J}_3 &= \partial_{y_1}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

де $f,\ g$—довільні гладкі функції змінних $y_3, \ldots, y_n$.

Якщо $g \equiv 0$, то заміна змінних

$$\tilde{u}_1 = y_1 - \arctan\frac{f}{\cos y_2}, \quad \tilde{u}_2 = -\arctan\frac{\sin y_2}{\sqrt{\cos^2 y_2 + f^2}}, \quad \tilde{u}_k = y_k,$$

де $k = 3, \ldots, n$, зводить оператори (5.52) до вигляду (5.47).

Якщо в (5.52) $g \not\equiv 0$, замінивши y_3 на $\tilde{y}_3 = \int g^{-1} dy_3$, а y_2 на $\tilde{y}_2 = -y_2$, приходимо до операторів

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= -\sin\tilde{y}_1 \tan\tilde{y}_2 \partial_{\tilde{y}_1} - \left(\cos\tilde{y}_1 - \alpha\frac{\sin\tilde{y}_1}{\cos\tilde{y}_2}\right)\partial_{\tilde{y}_2} + \frac{\sin\tilde{y}_1}{\cos\tilde{y}_2}\partial_{\tilde{y}_3}, \\
\mathcal{J}_2 &= -\cos\tilde{y}_1 \tan\tilde{y}_2 \partial_{\tilde{y}_1} + \left(\sin\tilde{y}_1 + \alpha\frac{\cos\tilde{y}_1}{\cos\tilde{y}_2}\right)\partial_{\tilde{y}_2} + \frac{\cos\tilde{y}_1}{\cos\tilde{y}_2}\partial_{\tilde{y}_3}, \qquad (5.53) \\
\mathcal{J}_3 &= \partial_{\tilde{y}_1}.
\end{aligned}$$

Тут α—довільна гладка функція змінних $\tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_n$. Нарешті, заміною змінних

$$\tilde{u}_1 = \tilde{y}_1 + f, \quad \tilde{u}_2^2 = g, \quad \tilde{u}_3 = h, \quad \tilde{u}_k = \tilde{y}_k,$$

де $k = 3, \ldots, n$, а $f(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$, $g(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$, $h(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ задовольняють сумісну перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}_2} = \sin f \tan g, \quad \frac{\partial f}{\partial\tilde{y}_3} = \sin\tilde{y}_2 - \alpha\sin f\tan g - \cos\tilde{y}_2\cos f\tan g, \\
&\frac{\partial g}{\partial\tilde{y}_2} = \cos f, \quad \frac{\partial g}{\partial\tilde{y}_3} = \sin f\cos\tilde{y}_2 - \alpha\cos f, \\
&\frac{\partial h}{\partial\tilde{y}_2} = -\sin f\sec g, \quad \frac{\partial h}{\partial\tilde{y}_3} = (\cos f\cos\tilde{y}_2 + \alpha\sin f)\sec g,
\end{aligned}$$

ми зводимо оператори (5.53) до вигляду (5.48).

Підвипадок 2.2. $f_j = 0, \ j = 2, \ldots, n.$

Підставивши оператори (5.50), де $f_j = 0$, в комутаційне співвідношення $[\mathcal{J}_1, \ \mathcal{J}_2] = \mathcal{J}_3$ та прирівнявши коефіцієнти біля лінійно незалежних операторів $\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_n}$, приходимо до системи алгебраїчних рівнянь

$$-f^2 = 1, \quad fg_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Оскільки функція f є дійсною функцією, то отримана система є несумісною.

Теорему доведено.

Зауважимо, що у випадку реалізації групи поворотів $O(3)$ як групи перетворень простору сферичних функцій, базисні елементи її алгебри Лі збігаються з операторами (5.47) [11]. Звідси випливає, що простір зображення $\mathcal{V}$ алгебри Лі (5.47) є прямою сумою підпросторів V_{2i+1} сферичних функцій порядку l. Окрім цього, якщо ми розглядаємо $O(3)$ як групу перетворень простору узагальнених сферичних функцій [11], то оператори (5.48) складають базис відповідної алгебри Лі.

Також відзначимо, що із теореми 5.3.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 5.3.1 *Нееквівалентні реалізації алгебри $o(3)$ вичерпуються двома реалізаціями, базисні оператори яких збігаються з трійками операторів (5.47) та (5.48).*

Тепер, грунтуючись на результатах теореми 5.3.1, неважко отримати опис всіх нееквівалентних коваріантних реалізацій алгебри Евкліда $e(3)$.

Теорема 5.3.2 *Довільна коваріантна реалізація алгебри $e(3)$ є еквівалентною одній із таких реалізацій:*

1. $$P_a = \partial_{x_a}, \quad J_a = -\varepsilon_{abc} x_b \partial_{x_c}, \quad a = 1, 2, 3; \tag{5.54}$$

2. $$\begin{aligned} & P_a = \partial_{x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \\ & J_1 = -x_2\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_2} + f\partial_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial u_2}\sin u_1 \partial_{x_3} \\ & \qquad - \sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ & J_2 = -x_3\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3} + f\partial_{x_2} - \frac{\partial f}{\partial u_2}\cos u_1 \partial_{x_3} \\ & \qquad - \cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ & J_3 = -x_1\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_1} + \partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{5.55}$$

3. $$\begin{aligned} & P_a = \partial_{x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \\ & J_1 = -x_2\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_2} + g\partial_{x_1} - (\sin u_1 g_{u_2} + \cos u_1 \sec u_2 g_{u_3})\partial_{x_3} - \\ & \qquad - \sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3}, \end{aligned} \tag{5.56}$$

$$J_2=-x_3\partial_{x_1}+x_1\partial_{x_3}+g\partial_{x_2}-(\cos u_1 g_{u_2}-\sin u_1\sec u_2 g_{u_3})\partial_{x_3}-$$
$$-\cos u_1\tan u_2\partial_{u_1}+\sin u_1\partial_{u_2}+\cos u_1\sec u_2\partial_{u_3},$$
$$J_3=-x_1\partial_{x_2}+x_2\partial_{x_1}+\partial_{u_1}.$$

Тут $f=f(u_2,\ldots,u_n)$ *задано формулою*

$$f=\alpha\sin u_2+\beta\left(\sin u_2\ln\frac{\sin u_2+1}{\cos u_2}-1\right), \tag{5.57}$$

α, β*—довільні гладкі функції змінних* $u_3,\ldots,u_n$*, а* $g=g(u_2,\ldots,u_n)$ *—розв'язок лінійного диференціальниого рівняння з частинними похідними*

$$\cos^2 u_2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial u_3^2}-\sin u_2\cos u_2\,\frac{\partial g}{\partial u_2}+2\cos^2 u_2\, g=0. \tag{5.58}$$

Доведення. Згідно з лемою 5.1.1, оператори трансляцій P_a перетвореннями (5.3) можуть бути зведеними до операторів $P_a=\partial_{x_a}$ $(a=1,2,3)$. Підставивши оператори

$$P_a=\partial_{x_a},\quad J_a=\xi_{ab}(x,u)\partial_{x_b}+\eta_{ai}(x,u)\partial_{u_i}$$

в комутаційні співвідношення (5.41) та прирівнявши коефіцієнти біля лінійно незалежних операторів ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, ∂_{x_3}, $\partial_{u_1},\ldots,\partial_{u_n}$, приходимо до системи диференціальних рівнянь для функцій $\xi_{ab}(x,u)$, $\eta_{ai}(x,u)$:

$$\frac{\partial\xi_{ac}}{\partial x_b}=-\varepsilon_{abc},\quad \frac{\partial\eta_{ai}}{\partial x_b}=0,\quad a,b,c=1,2,3,\ i=1\ldots,n,$$

проінтегрувавши яку, переконуємося, що оператори J_a мають вигляд

$$J_a=-\varepsilon_{abc}x_b\partial_{x_c}+j_{ab}(u)\partial_{x_b}+\tilde\eta_{ai}(u)\partial_{u_i},\quad a=1,2,3, \tag{5.59}$$

де j_{ab}, $\tilde\eta_{ab}$—довільні гладкі функції.

Підстановка (5.59) в комутаційні співвідношення (5.42) показує, що оператори $\mathcal{J}_a=\tilde\eta_{ai}\partial_{u_i}$, $(a=1,2,3)$, задовольняють (5.42) і $J_a\to\mathcal{J}_a$.

Отже, згідно з теоремою 5.3.1, ми отримуємо, що довільна коваріантна реалізація алгебри $e(3)$ є еквівалентною одній із таких реалізацій:

$$P_a = \partial_{x_a}, \quad J_a = -\varepsilon_{abc} x_b \partial_{x_c} + j_{ab}(u)\partial_{x_b} + \mathcal{J}_a, \quad a = 1, 2, 3, \tag{5.60}$$

де оператори $\mathcal{J}_a$ збігаються з однією із трійок операторів (5.46)–(5.48).

Здійснивши заміну змінних

$$y_a = x_a + F_a(u), \quad v_i = u_i, \quad a = 1, 2, 3, \ i = 1, \ldots, n,$$

ми зводимо оператори J_a (5.60) до операторів

$$\begin{aligned} J_1 &= -y_2\partial_{y_3} + y_3\partial_{y_2} + A\partial_{y_1} + B\partial_{y_2} + C\partial_{y_3} + \mathcal{J}_1, \\ J_2 &= -y_3\partial_{y_1} + y_1\partial_{y_3} + F\partial_{y_2} + G\partial_{y_3} + \mathcal{J}_2, \\ J_3 &= -y_1\partial_{y_2} + y_2\partial_{y_1} + H\partial_{y_3} + \mathcal{J}_3, \end{aligned} \tag{5.61}$$

де $A, \ B, \ C, \ F, \ G, \ H$ —довільні гладкі функції змінних $v_1, \ldots, v_n$. Підстановка операторів (5.61) в комутаційні співвідношення (5.42) приводить до такої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \mathcal{J}_2 A = -C, & 6) \ \mathcal{J}_3 C - \mathcal{J}_1 H = G, \\ 2) \quad \mathcal{J}_3 F = -B, & 7) \ \mathcal{J}_1 G - \mathcal{J}_2 C = H - A - F, \\ 3) \quad \mathcal{J}_3 A = B, & 8) \ \mathcal{J}_3 B = F - A - H, \\ 4) \quad \mathcal{J}_1 F - \mathcal{J}_2 B = G, & 9) \ A - F - H = 0. \\ 5) \quad \mathcal{J}_2 H - \mathcal{J}_3 G = C, & \end{array} \tag{5.62}$$

Провівши далі аналіз системи (5.62) для кожного із наборів операторів $\mathcal{J}_a$, отриманих в теоремі 5.3.1, ми з точністю до еквівалентності приходимо до реалізацій (5.54)–(5.56) алгебри $e(3)$.

Теорема доведена.

З теореми 5.3.2, зокрема, випливає, що кожна реалізація алгебри Евкліда, яка задовольняє умову (5.17), де $p = 3$, може бути зведеною до вигляду

$$P_a = \partial_{x_a}, \quad J_a = -\varepsilon_{abc} x_b \partial_{x_c} + j_{ab}(u)\partial_{x_b} + \tilde{\eta}_{ai}(u)\partial_{u_i}, \quad a = 1, 2, 3.$$

Якщо в наведених формулах

$$j_{ab}(u) = 0, \quad \eta_{ai}(u) = -\Lambda_{aij} u_j, \quad a, b = 1, 2, 3, \ i = 1, \ldots, n,$$

де $\Lambda_{aij} = \text{const}$, приходимо до реалізації

$$P_a = \partial_{x_a}, \quad J_a = -\varepsilon_{abc} x_b \partial_{x_c} + \mathcal{J}_a, \quad a = 1, 2, 3 \tag{5.63}$$

де $\mathcal{J}_a = -\Lambda_{aij} u_j \partial_{u_i}$.

Реалізації алгебри Евкліда з операторами (5.63) в класичній теорії лінійних зображень називають *коваріантними* зображеннями. Тому природним є запозичення цієї термінології для реалізацій алгебр Пуанкаре та Евкліда, якщо має місце умова (5.17).

5.3.2. Про коваріантні реалізації алгебри Лі групи Евкліда E(4). Тут $V = X \times U \cong R^4 \times R^n$, комутаційні співвідношення (5.12) для випадку алгебри Лі групи поворотів E(4) набувають вигляду

$$[P_\alpha, \ P_\beta] = 0, \tag{5.64}$$

$$[J_{\mu\nu}, \ P_\alpha] = \delta_{\mu\alpha} P_\nu - \delta_{\nu\alpha} P_\mu, \tag{5.65}$$

$$[J_{\alpha\beta}, \ J_{\mu\nu}] = \delta_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} + \delta_{\beta\nu} J_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\nu} J_{\beta\mu} - \delta_{\beta\mu} J_{\alpha\nu}, \tag{5.66}$$

де $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Будемо розглядати коваріантні реалізації в класі векторних полів Лі

$$\begin{aligned} P_\mu &= \xi_{\mu\nu}(x, u)\partial_{x_\nu} + \eta_{\mu i}(x, u)\partial_{u_i}, \\ J_{\mu\nu} &= \xi_{\mu\nu\alpha}(x, u)\partial_{x_\alpha} + \eta_{\mu\nu i}(x, u)\partial_{u_i} \end{aligned}$$

алгебри Лі (5.64)– (5.66). Тут $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}, \ \mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3, 4$, а $i = 1, \ldots, n$.

Оскільки ми розглядаємо коваріантні реалізації, то оператори P_μ задовольняють умову (5.17), де $p = 4$. Тому, згідно з лемою 5.1.1, вони можуть бути зведеними до вигляду $P_\mu = \partial_{x_\mu}, \ \mu = 1, 2, 3, 4$. Перевіривши комутаційні співвідношення (5.65), отримуємо, що оператори $J_{\mu\nu}$ мають таку структуру:

$$J_{\mu\nu} = x_\nu \partial_{x_\mu} - x_\mu \partial_{x_\nu} + f_{\mu\nu\alpha}(u)\partial_{x_\alpha} + g_{\mu\nu i}(u)\partial_{u_i} \tag{5.67}$$

де $f_{\mu\nu\alpha}, g_{\mu\nu i}$— довільні гладкі функції.

Далі ми обмежуємося розглядом випадку, коли в (5.67) $f_{\mu\nu\alpha} \equiv 0$. Це відповідає тому, що група перетворень O(4) (яка породжується генераторами $J_{\mu\nu}$) діє в просторі V проектовно.

Отже векторні поля Лі $J_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$J_{\mu\nu} = x_\nu \partial_{x_\mu} - x_\mu \partial_{x_\nu} + \mathcal{J}_{\mu\nu}, \tag{5.68}$$

де

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu i}(u)\partial_{u_i} \tag{5.69}$$

й, окрім цього, $g_{\mu\nu i}(u) = -g_{\nu\mu i}(u)$. Підставивши (5.68) в (5.66), ми переконуємося, що оператори $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ (5.69) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи поворотів O(4)

$$[\mathcal{J}_{\alpha\beta},\ \mathcal{J}_{\mu\nu}] = \delta_{\alpha\mu}\mathcal{J}_{\beta\nu} + \delta_{\beta\nu}\mathcal{J}_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\nu}\mathcal{J}_{\beta\mu} - \delta_{\beta\mu}\mathcal{J}_{\alpha\nu}. \tag{5.70}$$

Це дає можливість для повного опису нееквівалентних реалізацій алгебри $o(4)$ в класі векторних полів Лі (5.68) використати результати теореми 5.3.1, оскільки добре відомим є факт, що алгебра Лі $o(4)$ є прямою сумою двох алгебр Лі $o(3)$. Для цього виберемо базис алгебри $o(4)$ у такому вигляді:

$$\mathcal{J}_a^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathcal{J}_{bc} \pm \mathcal{J}_{a4}\right), \tag{5.71}$$

де індекси a, b, c набувають значень 1, 2, 3. Згідно з (5.70), векторні поля Лі $\mathcal{J}_a^-$, $\mathcal{J}_a^+$ задовольняють комутаційні співідношення

$$[\mathcal{J}_a^+,\ \mathcal{J}_b^+] = \varepsilon_{abc}\mathcal{J}_c^+, \tag{5.72}$$

$$[\mathcal{J}_a^+,\ \mathcal{J}_b^-] = 0, \tag{5.73}$$

$$[\mathcal{J}_a^-,\ \mathcal{J}_b^-] = \varepsilon_{abc}\mathcal{J}_c^-. \tag{5.74}$$

Теорема 5.3.3 *Довільна реалізація алгебри Лі $o(4)$ в класі векторних полів Лі (5.69) описується формулами (5.71) та однією із формул 1–6,* *які наведені нижче.*

1. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_1^- = -\sin u_3 \tan u_4 \partial_{u_3} - \cos u_3 \partial_{u_4},$
   $\mathcal{J}_2^- = -\cos u_3 \tan u_4 \partial_{u_3} + \sin u_3 \partial_{u_4},$
   $\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_3};$
2. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_1^- = -\sin u_3 \tan u_4 \partial_{u_3} - \cos u_3 \partial_{u_4} - \sin u_3 \sec u_4 \partial_{u_5},$
   $\mathcal{J}_2^- = -\cos u_3 \tan u_4 \partial_{u_3} + \sin u_3 \partial_{u_4} - \cos u_3 \sec u_4 \partial_{u_5},$
   $\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_3};$
3. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_1^- = \sec u_2 \cos u_3 \partial_{u_1} + \sin u_3 \partial_{u_2} - \tan u_2 \cos u_3 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_2^- = -\sec u_2 \sin u_3 \partial_{u_1} + \cos u_3 \partial_{u_2} + \tan u_2 \sin u_3 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_3};$
4. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_1^- = -\sin u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} - \cos u_4 \partial_{u_5} - \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_6},$
   $\mathcal{J}_2^- = -\cos u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} + \sin u_4 \partial_{u_5} - \cos u_4 \sec u_5 \partial_{u_6},$
   $\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_4};$
5. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$

$$\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$$
$$\mathcal{J}_1^- = k \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_3} - \sin u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} - \cos u_4 \partial_{u_5},$$
$$\mathcal{J}_2^- = k \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_3} - \cos u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} + \sin u_4 \partial_{u_5},$$
$$\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_4};$$

6. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
$$\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$$
$$\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$$
$$\mathcal{J}_1^- = u_6 \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_3} - \sin u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} - \cos u_4 \partial_{u_5},$$
$$\mathcal{J}_2^- = u_6 \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_3} - \cos u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} + \sin u_4 \partial_{u_5},$$
$$\mathcal{J}_3^- = \partial_{u_4},$$

де $k = \mathrm{const},\ k \neq 0$.

Доведення. Зупинимося на основних етапах доведення, опускаючи громіздкі обрахунки.

Згідно з теоремою 5.3.1, мають місце дві нееквівалентні реалізації алгебри $o(3)$ з базисними елементами $\mathcal{J}_1^+, \mathcal{J}_2^+, \mathcal{J}_3^+$:

$$\begin{aligned}
1.\quad & \mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2}, \\
& \mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2}, \\
& \mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1}; \\
2.\quad & \mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3}, \\
& \mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3}, \\
& \mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1}.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Для повної класифікації нееквівалентних реалізацій алгебри $o(4)$ потрібно описати всі трійки операторів $\mathcal{J}_1^-, \mathcal{J}_2^-, \mathcal{J}_3^-$, які разом з операторами (5.75) задовольняють (5.73), (5.74). Аналіз комутаційних співвідношень (5.73) показує, що для операторів $\mathcal{J}_1^-, \mathcal{J}_2^-, \mathcal{J}_3^-$ мають місце такі вирази:

1. $\mathcal{J}_a^- = \sum_{i=3}^{n} f_{ai}(u_3, \ldots, u_n) \partial_{u_i},$

$$2.\quad \mathcal{J}_a^- = \sum_{b=1}^{3} f_{ab}(u_4,\ldots,u_n)\mathcal{Q}_b + \sum_{i=4}^{n} f_{ai}(u_4,\ldots,u_n)\partial_{u_i},$$

де f_{ij}—довільні гладкі функції, а

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \sec u_2 \cos u_3 \partial_{u_1} + \sin u_3 \partial_{u_2} - \tan u_2 \cos u_3 \partial_{u_3},\\
\mathcal{Q}_2 &= -\sec u_2 \sin u_3 \partial_{u_1} + \cos u_3 \partial_{u_2} + \tan u_2 \sin u_3 \partial_{u_3},\\
\mathcal{Q}_3 &= \partial_{u_3}.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що оператори $\mathcal{Q}_a$ задовольняють комутаційні співвідношення для алгебри $o(3)$. Звідси ми робимо висновок, що для випадку 1 з (5.75) оператори $\mathcal{J}_a^-$ отримуються з формул (5.75), де замість u_i записано відповідно u_{i+2}.

Нехай тепер має місце друга реалізація (5.75) алгебри $o(3)$.

Випадок 1. $f_{ai} = 0, \quad a = 1,2,3, \quad i = 4,\ldots,n$. У цьому випадку ми можемо звести $\mathcal{J}_1^-$ до вигляду

$$\mathcal{J}_1^- = \tilde{r}(u_4,\ldots,n)\mathcal{Q}_1$$

за допомогою перетворення еквівалентності

$$X \to \tilde{X} = \mathcal{V}X\mathcal{V}^{-1}, \quad \mathcal{V} = \exp\left\{\sum_{a=1}^{3} F_a\mathcal{Q}_a\right\}, \tag{5.76}$$

де F_a—довільні функції змінних $u_4,\ldots,u_n$. Відзначимо, що перетворення (5.76) не змінюють вигляду операторів $\mathcal{J}_a^+$, оскільки $[\mathcal{J}_a^+,\ \mathcal{Q}_b] = 0$, $a,b = 1,2,3$.

З комутаційних співвідношень (5.74) випливає, що $\tilde{r} = 1$, а отже $\mathcal{J}_2^- = \mathcal{Q}_2, \quad \mathcal{J}_3^- = \mathcal{Q}_3$. Ми прийшли до таких операторів $\mathcal{J}_a^-$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1^- &= \sec u_2 \cos u_3 \partial_{u_1} + \sin u_3 \partial_{u_2} - \tan u_2 \cos u_3 \partial_{u_3},\\
\mathcal{J}_2^- &= -\sec u_2 \sin u_3 \partial_{u_1} + \cos u_3 \partial_{u_2} + \tan u_2 \sin u_3 \partial_{u_3},\\
\mathcal{J}_3^- &= \partial_{u_3}.
\end{aligned}$$

Випадок 2. Не всі f_{ai} тотожно дорівнюють нулеві. Такі оператори $\mathcal{J}_1^-, \mathcal{J}_2^-, \mathcal{J}_3^-$ можуть бути зведеними до операторів

$$\mathcal{J}_a^- = f_a(u_4,\ldots,u_n)\mathcal{Q}_1 + g_a(u_4,\ldots,u_n)\mathcal{Q}_2 + h_a(u_4,\ldots,u_n)\mathcal{Q}_3 + \mathcal{Z}_a,$$

де $a = 1, 2, 3,$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= -\sin u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} - \cos u_4 \partial_{u_5} - \varepsilon \sin u_4 \sec u_5 \partial_{u_6},\\
\mathcal{Z}_2 &= -\cos u_4 \tan u_5 \partial_{u_4} + \sin u_4 \partial_{u_5} - \varepsilon \cos u_4 \sec u_5 \partial_{u_6},\\
\mathcal{Z}_3 &= \partial_{u_4},
\end{aligned}$$

$\varepsilon = 0, 1.$

Тепер перетвореннями (5.76) ми зводимо оператор $\mathcal{J}_3^-$ до оператора $\mathcal{Z}_3 = \partial_{u_4}$. Далі, з комутаційних співвідношень

$$[\mathcal{J}_3^-,\ \mathcal{J}_1^-] = \mathcal{J}_2^-, \quad [\mathcal{J}_3^-,\ \mathcal{J}_2^-] = -\mathcal{J}_1^-$$

випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1^- &= \sum_{a=1}^{3} (G_a \cos u_4 + H_a \sin u_4) \mathcal{Q}_a + \mathcal{Z}_1,\\
\mathcal{J}_2^- &= \sum_{a=1}^{3} (H_a \cos u_4 - G_a \sin u_4) \mathcal{Q}_a + \mathcal{Z}_2,
\end{aligned}$$

де G_a, H_a—довільні гладкі функції змінних $u_5, \ldots, u_n$.

Використавши перетворення еквівалентності (5.76), де F_a—функції змінних $u_5, \ldots, u_n$, ми позбуваємося коефіцієнтів G_a. Виконання комутаційного співвідношення $[\mathcal{J}_1^-,\ \mathcal{J}_2^-] = \mathcal{J}_3^-$ приводить до таких рівнянь для H_1, H_2, H_3:

$$\frac{\partial H_a}{\partial u_5} - \tan u_5 H_a = 0, \quad a = 1, 2, 3.$$

Звідси випливає, що

$$H_a = \tilde{H}_a \sec u_5, \quad a = 1, 2, 3,$$

де $\tilde{H}_a$—довільні функції змінних $u_6, \ldots, u_n$. Отже, оператори $\mathcal{J}_a^-$ мають вигляд

$$\mathcal{J}_1^- = \sum_{a=1}^{3} \sin u_4 \sec u_5 \tilde{H}_a \mathcal{Q}_a + \mathcal{Z}_1,$$

$$\mathcal{J}_2^- = \sum_{a=1}^{3} \cos u_4 \sec u_5 \tilde{H}_a \mathcal{Q}_a + \mathcal{Z}_2,$$
$$\mathcal{J}_3^- = \mathcal{Z}_3.$$

Якщо $\varepsilon = 1$, то, використавши перетворення (5.76), де F_a залежать від $u_6, \ldots, u_n$, ми позбуваємося $\tilde{H}_a$ і приходимо до $\mathcal{J}_a^- = \mathcal{Z}_a$, $a = 1, 2, 3$. Якщо $\varepsilon = 0$, то, використавши перетворення (5.76), де F_a залежать від $u_6, \ldots, u_n$, покладаємо $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = 0$. За умови $\tilde{H}_3 = 0$ ми приходимо до реалізації, яка наведена в пункті 2 формулювання теореми. Якщо $\tilde{H}_3 = \mathrm{const} \neq 0$, ми приходимо до формул 5. Нарешті, якщо $\tilde{H}_3 \neq \mathrm{const}$, то з точністю до заміни змінних ми маємо формули 6 із формулювання теореми.

Теорему доведено.

Як випливає із доведеної теореми, формули (5.71) та 1–6 із формулювання теореми 5.3.3 визначають шість нееквівалентних реалізацій алгебри Лі групи Евкліда $E(4)$, базис якої складають елементи $P_\mu = \partial_{x_\mu}$ та (5.68), (5.69). Для того щоб отримати всі можливі реалізації алгебри $e(4)$, в межах зроблених припущень, ми повинні перелік реалізацій алгебри $o(4)$ з теореми 5.3.3 доповнити такими трьома реалізаціями операторів $\mathcal{J}_a^-$, $\mathcal{J}_a^+$:

1. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_a^- = 0;$
2. $\mathcal{J}_1^+ = -\sin u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} - \sin u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_2^+ = -\cos u_1 \tan u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} - \cos u_1 \sec u_2 \partial_{u_3},$
   $\mathcal{J}_3^+ = \partial_{u_1},$
   $\mathcal{J}_a^- = 0;$
3. $\mathcal{J}_a^+ = 0, \quad \mathcal{J}_a^- = 0,$

де $a = 1, 2, 3$. Тим самим ми отримали дев'ять нееквівалентних реалізацій алгебри Лі групи Евкліда $E(4)$.

Відзначимо, що базисні генератори груп Евкліда, які реалізуються на множині розв'язків рівняння Дірака та самодуальних рівнянь Янга–Міллса в евклідовому просторі $\mathbf{R}^4$, можуть бути зведеними до форми генераторів групи поворотів, яка визначається формулами (5.68), (5.69) та формулами 4 із формулювання теореми 5.3.3.

5.4. Реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,2)$ та $P(2,2)$

У підрозділі 5.4 ми зупиняємося на коваріантних реалізаціях алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,2)$ та $P(2,2)$ для довільної кількості залежних функцій. Тут $V = X \times U \cong R^{p,q} \times R^n$, де $X \cong R^{p,q}$—псевдоевклідовий дійсний простір незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_{p+q})$ з метричним тензором (5.4) ($p = 1$, $q = 2$ для алгебри $p(1,2)$ та $p = q = 2$ для алгебри $p(2,2)$), $U \cong R^n$—простір залежних дійснозначних змінних $u = u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$.

Під час розгляду реалізацій алгебри Пуанкаре $p(1,2)$ використовуємо загальноприйняте позначення незалежних змінних $x = (x_0, x_1, x_2)$, та базисних операторів даної алгебри: P_μ, $J_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{5.77}$$

$$[P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha, \tag{5.78}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}, \tag{5.79}$$

де

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

$\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2.$

Розгляд розпочинаємо із вивчення реалізацій алгебри Лі псевдоортогональної групи $O(1,2)$ та групи Пуанкаре $P(1,2)$.

5.4.1. Реалізації алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,2)$. Базис алгебри $o(1,2)$ складають елементи $J_{\mu\nu}$, які задольняють комутаційні співвідношення (5.79). Як і під час розгляду реалізацій алгебри $o(3)$, вивчимо релізації алгебри $o(1,2)$ в класі векторних полів Лі

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu i}(u)\partial_{u_i},\ \mu,\nu = 0,1,2,\ \ i = 1,\ldots,n, \tag{5.80}$$

з точністю до еквівалентності, яку визначають довільні взаємнооднозначні перетворення змінних

$$v_i = F_i(u),\ i = 1,\ldots,n. \tag{5.81}$$

Теорема 5.4.1 *Нехай диференціальні оператори (5.80) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі псевдоортогональної групи $O(1,2)$ (5.79). Тоді існують перетворення (5.81), які зводять дані оператори до однієї із таких трійок операторів:*

1. $$\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0,\ \mu,\nu = 0,1,2; \tag{5.82}$$
2. $$\mathcal{J}_{01} = \sin u_1 \partial_{u_1},\ \mathcal{J}_{02} = \cos u_1 \partial_{u_1}, \mathcal{J}_{12} = \partial_{u_1}; \tag{5.83}$$
3. $$\begin{gathered}\mathcal{J}_{01} = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},\\ \mathcal{J}_{02} = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},\\ \mathcal{J}_{12} = \partial_{u_1};\end{gathered} \tag{5.84}$$
4. $$\begin{gathered}\mathcal{J}_{01} = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},\\ \mathcal{J}_{02} = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},\\ \mathcal{J}_{12} = \partial_{u_1}.\end{gathered} \tag{5.85}$$

Доведення теореми має досить громіздкий вигляд і проводиться міркуваннями, які аналогічні тим, що були використані під час доведення теореми 5.3.1. Тому тут ми на ньому не зупиняємося.

З теореми 5.4.1 та означення 5.1.2 випливає, що в класі векторних полів Лі алгебра $o(1,2)$ має три нееквівалентні реалізації (5.83)–(5.85).

Використовуючи результати теореми 5.4.1, опишемо нееквівалентні коваріантні реалізації алгебри Пуанкаре $p(1,2)$.

Теорема 5.4.2 *Довільна коваріантна реалізація алгебри $p(1,2)$ є еквівалентною одній із таких реалізацій:*

1. $P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad J_{0a} = x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0}, \quad J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2},$
   $\mu = 0,1,2,\ a = 1,2;$
2. $P_\mu = \partial_{x_\mu},\ \mu = 0,1,2;$
   $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + \sin u_1\partial_{u_1},$
   $J_{02} = x_2\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_2} + \cos u_1\partial_{u_1},$
   $J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} + \partial_{u_1},$
3. $P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad \mu = 0,1,2;$
   $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + f_{u_2}\sin u_1\partial_{x_0} + f\partial_{x_2} +$
   $\quad + \sin u_1 \tanh u_2\partial_{u_1} - \cos u_1\partial_{u_2},$
   $J_{02} = x_2\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_2} + f_{u_2}\cos u_1\partial_{x_0} - f\partial_{x_1} +$
   $\quad + \cos u_1 \tanh u_2\partial_{u_1} + \sin u_1\partial_{u_2},$
   $J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} + \partial_{u_1};$
4. $P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad \mu = 0,1,2;$
   $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + (\sin u_1 g_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 g_{u_3})\partial_{x_0} +$
   $+g\partial_{x_2} + \sin u_1 \tanh u_2\partial_{u_1} - \cos u_1\partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2\partial_{u_3},$
   $J_{02} = x_2\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_2} + (\cos u_1 g_{u_2} - \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 g_{u_3})\partial_{x_0} -$
   $-g\partial_{x_1} + \cos u_1 \tanh u_2\partial_{u_1} + \sin u_1\partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2\partial_{u_3},$
   $J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} + \partial_{u_1}.$

Тут $f = f(u_2,\ldots,u_n)$ задана формулою

$$f = \theta\sinh u_2 + \sigma[1 + \sinh u_2 \arctan(\sinh u_2)],$$

θ, σ — довільні гладкі функції від $u_3, \ldots, u_n$, а $g = g(u_2, \ldots, u_n)$ — розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$\cosh^2 u_2 \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u_3^2} + \sinh u_2 \cosh u_2 \frac{\partial g}{\partial u_2} - 2\cosh^2 u_2 \ g = 0.$$

Доведення теореми 5.4.2 грунтується на результатах теореми 5.4.1 і проводиться аналогічно доведенню теореми 5.3.2. Тому тут ми на ньому не зупиняємося.

Зауважимо, що перша реалізація є стандартною реалізацією алгебри $p(1,2)$, а друга реалізація збігається з реалізацією, яка отримана в [200].

5.4.2. Про коваріантні реалізації алгебри $p(2,2)$. У даному пункті $V = X \times U \cong R^{2,2} \times R^n$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$. Комутаційні співвідношення (5.6) для базисних елементів $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ $(\mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ алгебри $p(2,2)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} &[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha, \\ &[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu},] = g_{\alpha\nu} J_{\beta\mu} + g_{\beta\mu} J_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} - g_{\beta\nu} J_{\alpha\mu}, \end{aligned} \tag{5.86}$$

де $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 1, 2, \\ -1, & \mu = \nu = 3, 4, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{5.87}$$

Згідно з лемою 5.1.1, для випадку коваріантних реалізацій алгебри $p(2,2)$ існують перетворення (5.3), які зводять генератори трансляцій до операторів $P_\mu = \partial_{x_\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$. Із виконання другої групи комутаційних співвідношень (5.86) випливає, що оператори $J_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$J_{\mu\nu} = x^\nu \partial_{x_\mu} + x^\mu \partial_{x_\nu} + f_{\mu\nu\alpha}(u) \partial_{x_\alpha} + g_{\mu\nu i}(u) \partial_{u_i}, \tag{5.88}$$

де $\mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3, 4, \ i = 1, \ldots, n$, піднімання та опускання індексів здійснюється за допомогою метричного тензора (5.87).

Надалі ми обмежуємося випадком, коли в (5.88) $f_{\mu\nu\alpha}(u) \equiv 0$, тобто генератори (5.88) визначають псевдоортогональну групу $O(2,2)$, дія якої в просторі V є проектовною. Отже векторні поля Лі $J_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$J_{\mu\nu} = x^{\nu}\partial_{x_{\mu}} + x^{\mu}\partial_{x_{\nu}} + \mathcal{J}_{\mu\nu}, \tag{5.89}$$

де

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu i}(u)\partial_{u_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.90}$$

й окрім цього $g_{\mu\nu i}(u) = -g_{\mu\nu i}(u)$.

Підстановка операторів (5.89) в третю групу комутаційних співвідношень (5.86) показує, що оператори $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі псевдоортогональної групи $O(2,2)$:

$$[\mathcal{J}_{\alpha\beta}, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = g_{\alpha\nu}\mathcal{J}_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}\mathcal{J}_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}\mathcal{J}_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}\mathcal{J}_{\alpha\mu}, \tag{5.91}$$

$\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4,$ $g_{\mu\nu}$—метричний тензор (5.87).

Для подальшого вивчення реалізацій алгебри $p(2,2)$, ми використали той факт, що алгебра $o(2,2)$ є прямою сумою двох алгебр $o(1,2)$. Для цього ми перейшли до такого базису алгебри $o(2,2)$:

$$\begin{aligned}
&B_1 = -\tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{23}), \quad && C_1 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{14} - \mathcal{J}_{23}),\\
&B_2 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{24} - \mathcal{J}_{13}), && C_2 = -\tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{13} + \mathcal{J}_{24}),\\
&B_3 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{34}), && C_3 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34}),
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Згідно з (5.91) B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned}
&[B_2, B_1] = B_3, \quad && [B_3, B_1] = B_2, \quad && [B_2, B_3] = B_1,\\
&[C_2, C_1] = C_3, && [C_3, C_1] = C_2, && [C_2, C_3] = C_1,\\
&[B_i, C_k] = 0 && (i, k = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Далі неважко переконатися, співставивши базисним операторам $J_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2)$ алгебри $o(1,2)$, які задовольняють комутаційні співвідношення (5.79), оператори B_i, C_i за правилом

$$J_{01} \to B_1(C_1), \quad J_{02} \to B_2(C_2), \quad J_{12} \to B_3(C_3),$$

що оператори B_i та C_i $(i = 1, 2, 3)$ складають базис двох алгебр $o(1,2)$.

Теорема 5.4.3 *Довільна реалізація алгебри Лі $o(2,2)$ може бути отриманою із формул (5.89) та однієї із формул, які наведені нижче:*

1. $B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_2 \partial_{u_2}, \quad C_2 = \cos u_2 \partial_{u_2}, \quad C_3 = \partial_{u_2};$
2. $B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_2 \tanh u_3 \partial_{u_2} - \cos u_2 \partial_{u_3},$
   $C_2 = \cos u_2 \tanh u_3 \partial_{u_2} + \sin u_2 \partial_{u_3},$
   $C_3 = \partial_{u_2};$
3. $B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_2 \tanh u_3 \partial_{u_2} - \cos u_2 \partial_{u_3} + \sin u_2 \mathrm{sech} u_3 \partial_{u_4},$
   $C_2 = \cos u_2 \tanh u_3 \partial_{u_2} + \sin u_2 \partial_{u_3} + \cos u_2 \mathrm{sech} u_3 \partial_{u_4},$
   $C_3 = \partial_{u_2};$
4. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_3 \partial_{u_3}, \quad C_2 = \cos u_3 \partial_{u_3}, \quad C_3 = \partial_{u_3};$
5. $B_1 = \sin u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \cos u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_3 \mathrm{tanh} u_4 \partial_{u_3} - \cos u_3 \partial_{u_4},$
   $C_2 = \cos u_3 \mathrm{tanh} u_4 \partial_{u_3} + \sin u_3 \partial_{u_4},$
   $C_3 = \partial_{u_3};$
6. $B_1 = \sin u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \cos u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_1 = \sin u_3 \mathrm{tanh} u_4 \partial_{u_3} - \cos u_3 \partial_{u_4} + \sin u_3 \mathrm{sech} u_4 \partial_{u_5},$
   $C_2 = \cos u_3 \mathrm{tanh} u_4 \partial_{u_3} + \sin u_3 \partial_{u_4} + \cos u_3 \mathrm{sech} u_4 \partial_{u_5},$

$C_3 = \partial_{u_3}$;

7. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = \partial_{u_3}$;

$C_2 = \varepsilon(\mathrm{sech} u_2 \mathrm{sech} u_3 \partial_{u_1} + \cosh u_3 \partial_{u_2} - \tanh u_2 \mathrm{sech} u_3 \partial_{u_3})$,

$C_3 = -\varepsilon(\mathrm{sech} u_2 \cosh u_3 \partial_{u_1} + \sinh u_3 \partial_{u_2} - \tanh u_3 \cosh u_3 \partial_{u_3})$,

$\varepsilon = \pm 1$;

8. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = \sin u_4 \partial_{u_4}, \quad C_2 = \cos u_4 \partial_{u_4}, \quad C_3 = \partial_{u_4}$;

9. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = \theta \sin u_4 (\varepsilon_1 \partial_{u_3} + \partial_{u_4} + \varepsilon_2 Q)$,

$C_2 = \theta \cos u_4 (\varepsilon_1 \partial_{u_3} + \partial_{u_4} + \varepsilon_2 Q)$,

$C_3 = \partial_{u_4}$,

де $Q = \mathrm{sech} u_2 \cosh u_3 \partial_{u_1} + \sinh u_3 \partial_{u_2} - \tanh u_2 \cosh u_3 \partial_{u_3}$,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0,\ \theta = k = \mathrm{const} \neq 0$ *або* $\theta = u_5$;

10. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = (\theta_1 \cos u_4 + \theta_2 \sin u_4) \partial_{u_3} + \sin u_4 \partial_{u_4}$,

$C_2 = (\theta_2 \cos u_4 - \theta_1 \sin u_4) \partial_{u_3} + \cos u_4 \partial_{u_4}$,

$C_3 = \partial_{u_4}$,

де θ_1, θ_2 *задовольняють одну з умов:*

1) $\theta_1 = k_1 = \text{const} \neq 0,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = u_5$;

2)$\theta_1 = u_5,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = f(u_5)$

або $\theta_2 = u_6$, f*-довільна гладка функція*;

11. $B_1 = \sin u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = (\theta_1 \cos u_4 + \theta_2 \sin u_4) Q + \sin u_4 \partial_{u_4}$,

$C_2 = (\theta_2 \cos u_4 - \theta_1 \sin u_4) Q + \cos u_4 \partial_{u_4}$,

$C_3 = \partial_{u_4}$,

де $Q = \text{sech} u_2 \text{cosh} u_3 \partial_{u_1} + \text{sinh} u_3 \partial_{u_2} - \text{tanh} u_2 \text{cosh} u_3 \partial_{u_3}$;

а θ_1, θ_2 *задовольняють одну з умов:*

1) $\theta_1 = k_1 = \text{const} \neq 0,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = u_5$;

2)$\theta_1 = u_5,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = f(u_5)$

або $\theta_2 = u_6$, f*-довільна гладка функція*;

12. $B_1 = \sin u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_3 = \partial_{u_1}$;

$C_1 = (\theta_1 \cos u_4 + \theta_2 \sin u_4)(\partial_{u_3} + Q) + \sin u_4 \partial_{u_4}$,

$C_2 = (\theta_2 \cos u_4 - \theta_1 \sin u_4))(\partial_{u_3} + Q) + \cos u_4 \partial_{u_4}$,

$C_3 = \partial_{u_4}$,

де $Q = \text{sech} u_2 \text{cosh} u_3 \partial_{u_1} + \text{sinh} u_3 \partial_{u_2} - \text{tanh} u_2 \text{cosh} u_3 \partial_{u_3}$;

а θ_1, θ_2 *задовольняють одну з умов:*

1) $\theta_1 = k_1 = \text{const} \neq 0,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = u_5$;

2)$\theta_1 = u_5,\ \theta_2 = k_2 = \text{const}$ *або* $\theta_2 = f(u_5)$

або $\theta_2 = u_6$, f*-довільна гладка функція*;

13. $B_1 = \sin u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$B_2 = \cos u_1 \text{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \text{sech} u_2 \partial_{u_3}$,

$$B_3 = \partial_{u_1};$$
$$C_1 = \sin u_4 \mathrm{tanh} u_5 \partial_{u_4} - \cos u_4 \partial_{u_5} + \varepsilon \sin u_4 \mathrm{sech} u_5 \partial_{u_6},$$
$$C_2 = \cos u_4 \mathrm{tanh} u_5 \partial_{u_4} + \sin u_4 \partial_{u_5} + \varepsilon \cos u_4 \mathrm{sech} u_5 \partial_{u_6},$$
$$C_3 = \partial_{u_4}, \quad \varepsilon = 0, 1;$$

14. $B_1 = \sin u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$
$$B_2 = \cos u_1 \mathrm{tanh} u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$$
$$B_3 = \partial_{u_1};$$
$$C_1 = \theta \sin u_4 \mathrm{sech} u_5 (\varepsilon_1 \partial_{u_3} + \varepsilon_2 Q) + \sin u_4 \mathrm{tanh} u_5 \partial_{u_4} -$$
$$- \cos u_4 \partial_{u_5},$$
$$C_2 = \theta \cos u_4 \mathrm{sech} u_5 (\varepsilon_1 \partial_{u_3} + \varepsilon_2 Q) + \cos u_4 \mathrm{tanh} u_5 \partial_{u_4} +$$
$$+ \sin u_4 \partial_{u_5},$$
$$C_3 = \partial_{u_4},$$
де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0,\ \theta = k = \mathrm{const} \neq 0$ *або* $\theta = u_6$;
$$\theta = \mathrm{sech} u_2 \mathrm{cosh} u_3 \partial_{u_1} + \mathrm{cosh} u_3 \partial_{u_2} - \mathrm{tanh} u_2 \mathrm{sinh} u_3 \partial_{u_3}.$$

Доведення теореми грунтується на результатах, які отримані в теоремі 5.4.1. А саме, згідно з теоремою 5.4.1, мають місце три нееквівалентні реалізації алгебри $o(1, 2)$ з базисними елементами B_1, B_2, B_3:

1. $B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1};$
2. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 p_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \partial_{u_1};$ (5.94)
3. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$
   $B_1 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$
   $B_2 = \partial_{u_1}.$

Для повного опису нееквівалентних реалізацій $o(2, 2)$ ми повинні отримати всі трійки операторів C_1, C_2, C_3, які разом з операторами (5.94) задовольняють співвідношення (5.93).

Оскільки подальші міркування збігаються з тими, які були використані під час доведення теореми 5.3.3, то тут ми їх не наводимо, а лише відзначимо таке: з теореми випливає, що формули (5.92) та 1–14 із формулювання теореми визначають нееквівалентні коваріантні реалізації алгебри Пуанкаре $p(2,2)$, яка має базисні елементи $P_\mu = \partial_{x_\mu}$ $(\mu = 1,2,3,4)$ та (5.89), (5.90). При цьому дія відповідної псевдоортогональної групи $O(2,2)$ в просторі V є проектовною. Щоб отримати повний перелік таких реалізацій алгебри $p(2,2)$, ми повинні доповнити отриманий в теоремі перелік ще такими реалізаціями операторів B_a, C_a $(a = 1,2,3)$:

1. $B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_a = 0, \quad a = 1,2,3;$
2. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} - \cos u_1 \partial_{u_2},$
   $B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2},$
   $B_3 = \partial_{u_1},$
   $C_a = 0, \quad a = 1,2,3;$
3. $B_1 = \sin u_1 \tanh u_2 \partial_{u_2} - \cos u_1 \partial_{u_2} + \sin u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$
   $B_2 = \cos u_1 \tanh u_2 \partial_{u_1} + \sin u_1 \partial_{u_2} + \cos u_1 \mathrm{sech} u_2 \partial_{u_3},$
   $B_3 = \partial_{u_1};$
   $C_a = 0, \quad a = 1,2,3;$
4. $B_a = 0, \ C_a = 0, \quad a = 1,2,3.$

5.5. Реалізації алгебри Пуанкаре та нові нелінійні інваріантні рівняння

У даному підрозділі ми вивчаємо нековаріантні реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре $P(1,1)$, $P(1,2)$ та розширеної групи Пуанкаре $\widetilde{P}(1,1)$ в класі векторних полів для випадку однієї залежної функції, з подальшим використанням отриманих результатів для побудови загального вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними, алгебри інваріантності яких збігаються з новими реалізаціями цих алгебр.

Розглянемо спочатку реалізації алгебр $p(1,1)$, $\widetilde{p}(1,1)$.

Будемо позначати генератори трансляцій, перетворень Лоренца та дилатації через P_0, P_1, K, D відповідно, тобто $p(1,1) = \langle P_0, P_1\rangle \subset\!\!\!+ \langle K\rangle$, $\widetilde{p}(1,1) = p(1,1) \subset\!\!\!+ \langle D\rangle$. Ці генератори задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_0, K] = P_1, \quad [P_1, K] = P_0, \quad [P_\mu, D] = P_\mu \quad (\mu = 0, 1). \tag{5.95}$$

Генератори P_0, P_1, K, D реалізуються в класі векторних полів Лі

$$Q = \xi(t,x,u)\partial_x + \tau(t,x,u)\partial_t + \eta(t,x,u)\partial_u, \tag{5.96}$$

де функції ξ, τ, η—довільні дійсні гладкі функції, визначені в просторі $V = X \times U \cong R^{1,1} \times R^1$, де $X = \langle t, x\rangle$— простір незалежних змінних, а $U = \langle u\rangle$—простір залежних змінних $u = u(t,x)$. Вивчаємо реалізації з точністю до еквівалентності, яку визначає група дифеоморфізмів в просторі V

$$\bar{x} = f(t,x,u), \quad \bar{t} = g(t,x,u), \quad \bar{u} = h(t,x,u). \tag{5.97}$$

Розгляд розпочинаємо з опису реалізацій операторів трансляцій, які генерують комутативний ідеал.

Лема 5.5.1 *Існують перетворення (5.97), які зводять генератори P_0, P_1 до однієї з двох таких пар операторів:*

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x; \tag{5.98}$$

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t. \tag{5.99}$$

Доведення. Із результатів леми 5.1.1 випливає, що генератори трансляцій завжди можна звести до операторів

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u.$$

Уведемо в розгляд матрицю

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & \xi & \eta \end{pmatrix},$$

складену з коефіцієнтів біля похідних в генераторах P_0, P_1. Очевидно, що можливі лише два випадки: $\operatorname{rank} M = 2$ або $\operatorname{rank} M = 1$. Першому випадку відповідає реалізація (5.98) (див., лему 5.1.1). Залишається розглянути випадок, коли $\operatorname{rank} M = 1$. У цьому випадкові $\xi = \eta = 0$, $\tau \neq \mathrm{const}$ (інакше порушується умова лінійної незалежності операторів P_0, P_1). Якщо $\tau_x \neq 0$, то поклавши

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = \tau, \quad \bar{u} = u,$$

приходимо до (5.99). Якщо $\tau_x = 0$, то обов'язково $\tau_u \neq 0$, і перетвореннями (5.97) знову зводимо оператори P_0, P_1 до операторів (5.99).

Лему доведено.

Коваріантні реалізації алгебри $p(1,1)$ та її узагальнень було вивчено в роботі [189]. Тому для повного опису реалізацій алгебри $p(1,1)$ потрібно розширити реалізацію (5.99) операторів P_0, P_1 до алгебр $p(1,1)$ і $\widetilde{p}(1,1)$ векторними полями K, D вигляду (5.96).

Отже, нехай $P_0 = \partial_t, P_1 = x\partial_t$. З виконання комутаційних співвідношень (5.95) випливає, що

$$K = (xt + \tau(u))\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x + \eta(u)\partial_u.$$

Здійснивши заміну змінних вигляду

$$\bar{t} = t + g(x,u), \qquad \bar{x} = x, \qquad \bar{u} = h(x,u),$$

з відповідно підібраними функціями g та h, переконуємося, що має місце один клас реалізації алгебри $p(1,1)$, який можна подати у такому вигляді:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t, \quad K = x\,t\,\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x. \tag{5.100}$$

Отримана реалізація алгебри $p(1,1)$ допускає розширення до реалізації алгебри $\tilde{p}(1,1)$, якщо її доповнити оператором дилатації D вигляду (5.96). З виконання комутаційних співвідношень (5.95) випливає, що

$$D = (t + \tau(u)\sqrt{|x^2 - 1|})\partial_t + \eta(u)\partial_u.$$

Неважко показати, що існують перетворення (5.97), які залишають вигляд (5.100) операторів P_0, P_1, K незмінним, а оператор D зводять до вигляду

$$D = \bar{t}\partial_{\bar{t}} + \epsilon\bar{u}\partial_{\bar{u}}, \quad \epsilon = 0, 1.$$

Отже ми отримали дві нееквівалентні реалізації алгебри $\tilde{p}(1,1)$:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_t, \quad K = xt\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x, \quad D_1 = t\partial_t \tag{5.101}$$

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = x\partial_x, \quad K = xt\partial_t + (x^2 - 1)\partial_x, \quad D_2 = t\partial_t + u\partial_u. \tag{5.102}$$

Неважко переконатися у тому, що, на відміну від коваріантних реалізацій, реалізації (5.101), (5.102) розширеної алгебри Пуанкаре $\widetilde{p}(1,1)$ не допускають розширення до реалізацій конформної алгебри $c(1,1)$.

Має місце таке твердження.

Теорема 5.5.1 *З точністю до дії перетворень (5.97) реалізації алгебр* $p(1,1)$, $\tilde{p}(1,1), c(1,1)$ *вичерпуються реалізаціями отриманими в роботі [189], а також реалізаціями (5.100), (5.101), (5.102).*

Коротко зупинимося ще на нековаріантних реалізаціях алгебри $p(1,2)$ для випадку однієї залежної функції.

Тут $V = X \times U$, де $U \cong R^1 = \langle u \rangle$, $X \cong R^{1,2} = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$. Векторні поля Лі мають вигляд

$$Q = \xi^\mu(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta(x,u)\partial_u, \tag{5.103}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2)$, $\mu = 0, 1, 2$, ξ^μ, η—довільні дійсні гладкі функції визначені в V.

Базисні оператори $P_\mu, J_{\mu\nu}$ алгебри $p(1,2)$ задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,\ [P_\mu, J_{\nu\gamma}] = g_{\mu\nu}P_\gamma - g_{\mu\gamma}P_\nu,$$
$$[J_{\mu\nu}, J_{\gamma\beta}] = g_{\mu\beta}J_{\nu\gamma} + g_{\nu\gamma}J_{\mu\beta} - g_{\mu\gamma}J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\gamma}. \tag{5.104}$$

У співвідношеннях (5.104) $\mu, \nu, \gamma, \beta = 0, 1, 2$, $g_{\mu\nu}$—метричний тензор простору Мінковського $R^{1,2}$.

Реалізації алгебри $p(1,2)$ в класі векторних полів Лі (5.103) досліджуємо з точністю до еквівалентності, яку визначає дія групи дифеоморфізмів

$$x_\mu \to \bar{x}_\mu = f_\mu(x,u), \quad u \to \bar{u} = g(x,u), \tag{5.105}$$

де f_μ, g —довільні гладкі функції своїх аргументів у просторі V.

Оскільки $p(1,2) = o(1,2) \oplus T$, де $T = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ —комутативний ідеал, ми розпочинаємо вивчення реалізацій алгебри $p(1,2)$ з розгляду реалізацій операторів трансляцій P_μ.

Нехай оператори P_μ мають вигляд (5.103).

Лема 5.5.2 *Існують перетворення (5.105), які зводять оператори P_μ $(\mu = 0, 1, 2)$ до однієї з таких трійок операторів:*

$$\begin{array}{llll}
(a) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = \partial_{x_1}, & P_2 = \partial_{x_2};\\
(b) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = \partial_{x_1}, & P_2 = x_2\partial_{x_0} + u\partial_{x_1};\\
(c) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = \partial_{x_1}, & P_2 = h(x_2)\partial_{x_0} + \varphi(x_2)\partial_{x_1};\\
(d) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = x_1\partial_{x_0}, & P_2 = \partial_{x_2};\\
(e) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = x_1\partial_{x_0}, & P_2 = \psi(x_1)\partial_{x_0};\\
(g) & P_0 = \partial_{x_0}, & P_1 = x_1\partial_{x_0}, & P_2 = x_2\partial_{x_0};
\end{array} \tag{5.106}$$

де φ, ψ, h —довільні достатньо гладкі функції своїх аргументів і, внаслідок лінійної незалежності операторів P_μ, $\frac{d\psi}{dx_1} \neq const$, $\frac{dh}{dx_2}$ та $\frac{d\varphi}{dx_2}$ одночасно не є сталими.

Доведення леми аналогічне доведенню лем 5.1.1 та 5.5.1, тому тут ми його не наводимо.

Тепер, для класифікації реалізацій алгебри $p(1,2)$, потрібно провести розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ операторами псевдоповоротів $J_{\mu\nu}$ вигляду (5.103). Очевидно, що оскільки усі реалізації (5.106) ідеалу T є нееквівалентними між собою, то і відповідні їм реалізації алгебри $p(1,2)$ будуть теж нееквівалентними.

Відзначимо, що задача розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ для першої трійки (5.106) операторів P_μ розглядалася в роботі [200]. Там було отримано, що оператори $J_{\mu\nu}$ збігаються з одним із таких двох наборів операторів:

$$J_{\mu\nu} = g_{\mu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\nu} - g_{\nu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\mu} \quad (\mu,\nu,\gamma = 0,1,2); \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned} J_{01} &= x_0\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_0} + \sin u\partial_u, \\ J_{02} &= x_0\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_0} + \cos u\partial_u, \\ J_{12} &= -x_1\partial_{x_2} + x_2\partial_{x_1} + \partial_u. \end{aligned} \tag{5.108}$$

Провівши розширення ідеалу T до алгебри $p(1,2)$ для решти випадків реалізацій генераторів P_μ (5.106), ми отримали ряд нових реалізацій алгебри $p(1,2)$, які наведені в наступній теоремі.

Теорема 5.5.2 *З точністю до еквівалентності реалізації алгебри* $p(1,2)$ *вичерпуються реалізаціями (5.106) (a), (5.107); (5.106) (a), (5.108), та такими реалізаціями:*

1. P_μ *вигляду (5.106) (b),* $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + u\partial_{x_2} + x_2\partial_u$,
   $J_{02} = x_0x_2\partial_{x_0} + x_0u\partial_{x_1} + (x_2^2 - 1)\partial_{x_2} + x_2u\partial_u$,
   $J_{12} = -x_1x_2\partial_{x_0} - x_1u\partial_{x_2} - ux_2\partial_{x_2} - (1+u^2)\partial_u$;

2. P_μ *вигляду (5.106) (c), де* $h(x_2) = x_2$, $J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + \varphi\partial_{x_2}$,
   $J_{02} = x_0x_2\partial_{x_0} + x_0\varphi\partial_{x_1} + \varphi^2\partial_{x_2} + a\partial_{x_0} + b\partial_{x_1} + q\partial_u$,
   $J_{12} = -x_1x_2\partial_{x_0} - x_1\varphi\partial_{x_1} - x_2\varphi\partial_{x_2} + \alpha\partial_{x_0} + \beta\partial_{x_1} + p\partial_u$,

де $\varphi = \pm\sqrt{x_2^2 - 1}$, $|x_2| > 1$, *а функції* $a, b, \alpha, \beta, p, q$ *—набувають таких значень:*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad a = \beta = const,\ \alpha = b = \epsilon e^{-2u},\ q = -x_2,\ p = \varphi,\ \epsilon = 0, 1;\\
&2) \quad a = \beta = \lambda \left[\frac{u}{1 - u^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| \right] + \lambda_2,\ a = b = \frac{\lambda_1}{1 - u^2},\\
&\qquad q = \varphi - x_2 u,\ p = \varphi u - x_2,\ \lambda_1, \lambda_2 = const;\\
&3) \quad a = -\beta = \lambda x_2 \varphi,\ b = \lambda x_2^2,\ \alpha = -\lambda \varphi^2,\ q = p = 0,\ \lambda = const;\\
&4) \quad a = -\beta = x_2 u \varphi,\ b = x_2^2 u,\ \alpha = -\varphi^2 u,\ q = p = 0;
\end{aligned}
$$

3. P_μ *вигляду (5.106) (е),* $J_{12} = \psi \partial_{x_1}$,

$$J_{01} = (x_0 x_1 + B\psi)\partial_{x_0} - \psi^2 \partial_{x_1} + (C x_1 + D\psi)\partial_{x_2} + A\psi \partial_u,$$

$$J_{02} = (x_0 \psi - x_1 B)\partial_{x_0} + x_1 \psi \partial_{x_1} + (C\psi - x_1 D)\partial_{x_2} - A x_1 \partial_u,$$

де $\psi = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$, $|x_1| < 1$, *а змінні* A, B, C, D *набувають таких значень:*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad A = B = C = D = 0; \quad 2) A = \sqrt{|x_2|} g(u),\\
&\qquad B = x_2,\ C = 2x_2,\ D = x_2 \sqrt{|x_2|} f(u);\\
&3) \quad a = x_2 f(u), \quad B = 0, \quad C = x_2, \quad D = x_2^2 g(u)
\end{aligned}
$$

де f *і* g *—довільні гладкі функції змінної* u;

4. P_μ *вигляду (5.106) (g),* $J_{12} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$,

$$J_{01} = x_0 x_1 \partial_{x_0} + (x_2^2 - 1)\partial_{x_1} + x_1 x_2 \partial_{x_2} + x_2 \theta \partial_{x_0} + x_2 \rho \partial_u,$$

$$J_{02} = x_0 x_2 \partial_{x_0} + x_1 x_2 \partial_{x_1} + (x_2^2 - 1)\partial_{x_2} - x_1 \theta \partial_{x_0} - x_1 \rho \partial_u,$$

де $\omega = x_1^2 + x_2^2$, *а функції* θ *і* ρ *набувають таких значень:* $\theta = f(u)(1 - \omega^{-1})$, $\rho = 0$, f *—довільна гладка функція, або* $\theta = 0$, $\rho = \omega^{-1}\sqrt{|\omega - 1|}$.

Доведення теореми проводиться аналогічно доведенню аналогічних теорем, які розглядалися раніше. Відзначимо лише, що генератори P_μ вигляду (5.106) (d) розширення до реалізації алгебри $p(1,2)$ не допускають.

Використаємо реалізації, отримані в теоремах 5.5.1 та 5.5.2, для побудови нових пуанкаре–інваріантних рівнянь.

Процедура побудови інваріантних рівнянь в класичному підході Лі є стандартною. Так, нехай $X_a, a = 1, \ldots, N$ складають базис алгебри Лі AG групи симетрії G, що діє в просторі V. Нехай випадку V є простором $\{x, t, u\}$, а всі X_a мають вигляд (5.96). Розглядаємо рівняння

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}) = 0, \tag{5.109}$$

де F—довільна гладка функція. Рівняння (5.109) буде інваріантним відносно групи G, якщо функція F задовольняє співвідношення [51, 57]

$$\underset{2}{X_a} F = 0, \quad \forall\ a. \tag{5.110}$$

Тут $\underset{2}{X_a}$—другі продовження операторів X_a. Розв'язавши систему (5.110), ми отримаємо множину елементарних диференціальних інваріантів $J_k(x, t, u, u_\mu, u_{\mu\nu})$ $(\mu, \nu = x, t)$, а найбільш загальна форма інваріантного рівняння (5.109) матиме вигляд

$$\Phi(J_1, \ldots, J_s) = 0.$$

Отже, щоб отримати найбільш загальний вигляд рівняння, інваріантного відносно групи G, потрібно знайти множину всіх елементарних диференціальних інваріантів даної групи. Оскільки число змінних у співвідношеннях (5.109), (5.110) дорівнює 8, алгебри $p(1,1)$ та $\tilde{p}(1,1)$ є розв'язними, загальні орбіти продовжених груп є три– та чотиривимірними відповідно, то ми отримаємо п'ять для групи $P(1,1)$ та чотири для групи $\tilde{P}(1,1)$ функціонально незалежних елементарних диференціальних інваріантів [13, 31].

1) Випадок алгебри $p(1,1)$ з базисними операторами (5.100)

Тут $\underset{2}{P_0} = P_0$, $\underset{2}{P_1} = P_1 - 2u_{tx}\partial_{u_{xx}} - u_{tt}\partial_{u_{tx}}$,

$$\underset{2}{K} = K - (tu_t + 2xu_x)\partial_{u_x} - xu_t\partial_{u_t} - -2(u_x + 2xu_{xx} + tu_{xt})\partial_{u_{xx}} -$$

$$-(u_t + tu_{tt} + 3xu_{tx})\partial_{u_{tx}} - 2xu_{tt}\partial_{u_{tt}},$$

тому базис фундаментальних розв'язків системи, відповідної системі (5.110), складають функції

$$\begin{aligned} J_1 &= u, \quad J_2 = u_t^2(x^2-1), \quad J_3 = u_{tt}(x^2-1), \\ J_4 &= (x^2-1)^2(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) - x(x^2-1)u_t^2, \\ J_5 &= (x^2-1)^3(u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2) + 2x(x^2-1)^2 \times \\ &\quad \times(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) - x^2(x^2-1)u_t^2, \end{aligned} \tag{5.111}$$

а найбільш загальне $P(1,1)$–інваріантне рівняння (5.109) має вигляд

$$\Phi(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5) = 0. \tag{5.112}$$

2) Випадок алгебри $\tilde{p}(1,1)$ з базисними операторами (5.101)

Врахувавши, що найбільш загальне $P(1,1)$–інваріантне рівняння (5.109) має вигляд (5.112), і що

$$\underset{2}{D_1} = D_1 - u_t\partial_{u_t} - 2u_{tt}\partial_{u_{tt}} - u_{tx}\partial_{u_{tx}},$$

ми отримали такі чотири елементарні диференціальні інваріанти для алгебри $\tilde{p}(1,1)$ з операторами (5.101):

$$\Sigma_1 = J_1,\ \Sigma_2 = J_2^{-1}J_3,\ \Sigma_3 = J_2^{-1}J_4,\ \Sigma_4 = J_2^{-1}J_5, \tag{5.113}$$

де значення J_k наведені в (5.111).

3) Випадок алгебри $\tilde{p}(1,1)$ з базисними операторами (5.102)

Тут $\underset{2}{D_2} = D_1 + u_x\partial_{u_x} - u_{tt}\partial_{u_{tt}} + u_{xx}\partial_{u_{xx}}$,

а тому алгебра $\tilde{p}(1,1)$ має такі чотири елементарні диференціальні інваріанти другого порядку:

$$\Sigma_1 = J_1J_3, \quad \Sigma_2 = J_2, \quad \Sigma_3 = J_4, \quad \Sigma_4 = J_5, \tag{5.114}$$

де значення J_k наведені в (5.111). Найбільш загальне $\tilde{P}(1,1)$–інваріантне рівняння (5.109) має вигляд

$$\Phi(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4) = 0, \tag{5.115}$$

де $\Sigma_k \quad (k = \overline{1,4})$ набувають значень (5.113) у випадку алгебри $\tilde{p}(1,1)$ з операторами (5.101), або (5.114) у випадку алгебри $\tilde{p}(1,1)$ з операторами (5.102).

На закінчення підрозділу зупинимося ще на побудові нових пуанкаре–інваріантних рівнянь

$$\Phi(x_\mu, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2,$$

де $\underset{1}{u} = \{u_{x_\mu} | \mu = 0, 1, 2\}$, $\underset{2}{u} = \{u_{x_\mu x_\nu} | \mu, \nu = 0, 1, 2\}$.

Для реалізації (5.106) (a), (5.107) ця проблема повністю розв'язана в [74, 132], а для реалізації (5.106) (a), (5.108) — в [200].

Нам вдалося отримати ще чотири із семи диференціальних інваріантів для останньої реалізації із теореми 5.5.2, в якій $\theta = \rho = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= u, \;\; \mathcal{J}_2 = u_{x_0}^2 u_{x_0 x_0}, \; \mathcal{J}_3 = (\Sigma_1 - 1) u_{x_0}^2, \\ \mathcal{J}_4 &= \Sigma_1^{-1}[(1-\Sigma_1)^3(2\Sigma_1\Sigma_2 u_{x_0}^2 + (1-\Sigma_1)\Sigma_2^2 + \Sigma_3^2) + u_{x_0}^4(\Sigma_1 - 1)^2\Sigma_1^2], \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= x_1^2 + x_2^2, \\ \Sigma_2 &= x_1(u_{x_1}u_{x_0x_0} - u_{x_0}u_{x_0x_1}) + x_2(u_{x_2}u_{x_0x_0} - u_{x_0}u_{x_0x_2}), \\ \Sigma_3 &= x_2(u_{x_1}u_{x_0x_0} - u_{x_0}u_{x_0x_1}) - x_1(u_{x_2}u_{x_0x_0} - u_{x_0}u_{x_0x_2}). \end{aligned}$$

5.6. Реалізації алгебр Галілея та нові нелінійні інваріантні рівняння

Говорячи про групу Галілея у двохвимірному просторі–часі, ми маємо на увазі локальну групу перетворень у просторі $V = R^2 \times U$, де

$R^2 = \langle t, x\rangle$—простір двох незалежних дійсних змінних, а $U = \langle u\rangle$—простір дійсних скалярних функцій $u = u(t, x)$. Будемо вивчати реалізації алгебр Галілея в класі диференціальних операторів першого порядку, які у нашому випадку мають вигляд (5.96) Відношення еквівалентності визначає група дифеоморфізмів (5.97)

У подальшому розгляді реалізацій ми використовуємо таку класифікацію алгебр Галілея (див., напр., [72]).

Класичною алгеброю Галілея називається алгебра $g_1(1,1) = \langle T, P, G\rangle$, базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення

$$[T, P] = 0, \quad [T, G] = -P; \tag{5.116}$$

$$[P, G] = 0. \tag{5.117}$$

Спеціальною алгеброю Галілея називається алгебра $g_2(1,1) = g_1(1,1) \supset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (5.116), (5.117), та співвідношення

$$[D, P] = -P, \quad [D, G] = G, \quad [D, T] = -2T. \tag{5.118}$$

Повною алгеброю Галілея називається алгебра $g_3(1,1) = \langle T, P, G, D, S\rangle$, базисні оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (5.116)–(5.118) та співвідношення

$$[S, G] = 0, \quad [S, P] = G, \quad [T, S] = D, \quad [D, S] = 2S. \tag{5.119}$$

Нехай M—оператор, який задовольняє такі комутаційні співвідношення:

$$[M, T] = [M, P] = [M, G] = [M, D] = [M, S] = 0, \tag{5.120}$$

$$[G, P] = M. \tag{5.121}$$

Алгебри $\tilde{g}_1(1,1) = \langle T, P, M, G\rangle$, $\tilde{g}_2(1,1) = \langle T, P, M, G, D\rangle$, $\tilde{g}_3(1,1) = \langle T, P, M, G, D, S\rangle$, базисні оператори яких задовольняють комутаційні співвідношення (5.116), (5.118)–(5.121), називаються розширеною класичною алгеброю Галілея, розширеною спеціальною алгеброю Галілея та розширеною повною алгеброю Галілея (алгеброю Шредінгера) відповідно.

Розгляд розпочинаємо із реалізацій алгебр $g_1(1,1)$ $g_2(1,1)$, $g_3(1,1)$. Спочатку проведемо класифікацію реалізацій класичної, спеціальної та повної алгебр Галілея. Оскільки спеціальна алгебра Галілея отримується з класичної за допомогою доповнення останньої оператором D, а повна алгебра Галілея— доповненням спеціальної оператором S, то розгляд розпочинаємо з алгебри $g_1(1,1) = \langle T, P\rangle \dot{+} \langle G\rangle$, яка містить комутативний ідеал $I = \langle T, P\rangle$.

Лема 5.6.1 *Нехай T, P—лінійно незалежні оператори вигляду (5.96). Існують перетворення (5.97), які зводять ці оператори до однієї з таких пари операторів:*

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x; \tag{5.122}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\partial_t. \tag{5.123}$$

Доведення леми 5.6.1 аналогічне доведення леми 5.5.1.

Теорема 5.6.1 *Нееквівалентні реалізації класичної алгебри Галілея $g_1(1,1)$ вичерпуються реалізаціями*

$$\begin{array}{llll}
g_1^1(1,1): & T = \partial_t, & P = -\partial_x, & G = t\partial_x; \\
g_1^2(1,1): & T = \partial_t, & P = -\partial_x, & G = u\partial_t + t\partial_x; \\
g_1^3(1,1): & T = \partial_t, & P = -\partial_x, & G = t\partial_x + u\partial_u; \\
g_1^4(1,1): & T = \partial_t, & P = -x\partial_t, & G = x\,t\partial_t + x^2\partial_x.
\end{array}$$

Доведення. Для доведення теореми потрібно здійснити розширення ідеалу I оператором G. Під час побудови представників класів еквівалентних реалізацій, будемо використовувати ті із перетворень (5.97), які залишають вигляд операторів T, P незмінним.

Нехай оператори T, P мають вигляд (5.122), а оператор G—вигляд (5.96). Перевіривши виконання комутаційних співвідношень (5.116), (5.117), переконуємося, що

$$G = \tau(u)\partial_t + (t + \xi(u))\partial_x + \eta(u)\partial_u. \tag{5.124}$$

Найбільш загальна заміна змінних, яка залишає вигляд операторів T, P незмінним, має вигляд

$$\bar{t} = t + h(u), \quad \bar{x} = x + g(u), \quad \bar{u} = f(u). \tag{5.125}$$

Якщо в (5.124) $\eta = 0$, то, поклавши в (5.125) $h = \xi$, зводимо оператор G до вигляду $G = \tilde{\tau}(\bar{u})\partial_{\bar{t}} + \bar{t}\partial_{\bar{x}}$. Якщо $\tilde{\tau}(\bar{u}) = 0$, то має місце реалізація $g_1^1(1,1)$. Якщо $\tilde{\tau}(\bar{u}) \neq 0$, $\tilde{\tau}_{\bar{u}} \neq 0$, то, поклавши в (5.125) $f = \tilde{\tau}$, приходимо до реалізації $g_1^2(1,1)$. Нарешті, якщо $\tilde{\tau} = k = const$, то $G = k\partial_{\bar{t}} + \bar{t}\partial_{\bar{x}}$, тобто G є лінійною комбінацією операторів T та $\bar{t}\partial_{\bar{x}}$, що відповідає реалізації $g_1^1(1,1)$.

Якщо в (5.124) $\eta \neq 0$, то поклавши в (5.125) функції h, g, f рівними розв'язкам системи

$$\eta\frac{\partial h}{\partial u} + \tau = 0, \quad \xi + \eta\frac{\partial g}{\partial u} = h, \quad \eta\frac{\partial f}{\partial u} = 1,$$

приходимо до реалізації $g_1^3(1,1)$. Неважко переконатися, що серед замін (5.125) не існують такі, які зводять реалізації $g_1^1(1,1), g_1^2(1,1)$, $g_1^3(1,1)$ одна в одну.

Якщо оператори T, P мають вигляд (5.123), то аналогічний розгляд приводить до однієї реалізації $g_4^4(1,1)$, нееквівалентність якої отриманим вище є очевидною.

Теорема доведена.

Наслідок 5.6.1 *Нееквівалентні реалізації спеціальної алгебри Галілея* $g_2(1,1)$ *вичерпуються реалізаціями*

$$\begin{aligned} g_2^1(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -\partial_x, G = t\partial_x, \\ & D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u,\ \textit{де } \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{5.126}$$

$$\begin{aligned} g_2^2(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -\partial_x, G = t\partial_x + u\partial_u, \\ & D = 2t\partial_t + x\partial_x + u(\lambda - \ln|u|)\partial_u, \lambda \in R; \end{aligned} \tag{5.127}$$

$$\begin{aligned} g_2^3(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -x\partial_x, G = x\,t\partial_x + x^2\partial_x, \\ & D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u,\ \textit{де } \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{5.128}$$

$$g_2^4(1,1): \quad T=\partial_t,\ P=-\partial_x, G=u\partial_t+t\partial_x,$$
$$D=2t\partial_t+x\partial_x+3u\partial_u.$$

Наслідок 5.6.2 *Нееквівалентні реалізації повної алгебри Галілея* $g_3(1,1)$ *вичерпуються реалізаціями*

$$g_3^1(1,1): \quad T,P,G,D \text{ вигляду (5.126), де } \varepsilon=0,\ S=t^2\partial_t+t\,x\partial_x;$$
$$g_3^2(1,1): \quad T,P,G,D \text{ вигляду (5.126), де } \varepsilon=1,$$
$$S=t^2\partial_t+(t\,x+\varepsilon_1u^3)\partial_x+u(t+\lambda u^2)\partial_u,$$
$$\text{де } \varepsilon_1=\pm1, \lambda\in R \text{ або } \varepsilon_1=0, \lambda=0,\pm1;$$
$$g_3^3(1,1): \quad T,P,G,D \text{ вигляду (5.127), } S=t^2\partial_t+t\,x\partial_x+$$
$$+[ux+(\lambda-\ln|u|\,t)]\partial_u,\ \lambda\in R;$$
$$g_3^4(1,1): \quad T,P,G,D \text{ вигялду (5.128), де } \varepsilon=0,\ S=t^2\partial_t+x\,t\partial_x.$$

Для доведення наслідку 5.6.1 потрібно кожну з отриманих в теоремі 5.6.1 реалізацій класичної алгебри Галілея розширити оператором D (5.96) до реалізації спеціальної алгебри Галілея, вимагаючи виконання співвідношень (5.118). Аналогічно, для доведення наслідку 5.6.2, доповнюємо отримані реалізації спеціальної алгебри Галілея оператором S (5.96), вимагаючи виконання співвідношень (5.119). Відзначимо, що реалізації $g_2^3(1,1)$, де $\varepsilon=1$, та $g_2^4(1,1)$ не допускають розширення до реалізацій повної алгебри Галілея.

Тепер розглянемо реалізації алгебр $\widetilde{g}_1(1,1)$, $\widetilde{g}_2(1,1)$, $\widetilde{g}_3(1,1)$. Тут ми проводимо опис реалізацій розширених алгебр Галілея, використовуючи той же алгоритм, що і для опису реалізацій алгебр Галілея. Оскільки алгебра $\tilde{g}_1(1,1)=\langle T,P,M\rangle\mathbin{+\!\!\!\!\supset}\langle G\rangle$ містить комутативний ідеал $\tilde{I}=\langle T,P,M\rangle$, розгляд розпочинаємо із класифікації реалізацій $\tilde{I}$.

Лема 5.6.2 *Нехай* T,P,M *— лінійно незалежні оператори вигляду (5.96). Існують перетворення (5.97), які зводять ці оператори до однієї з трійок операторів:*

$$T=\partial_t,\quad P=-\partial_x,\quad M=u\partial_u; \tag{5.129}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -\partial_x, \quad M = \alpha(u)\partial_t + \beta(u)\partial_x; \tag{5.130}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\,\partial_t, \quad M = \gamma(x)\partial_t, \ \frac{d\gamma}{dx} \neq const; \tag{5.131}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\,\partial_t, \quad M = 2u\partial_t; \tag{5.132}$$

$$T = \partial_t, \quad P = -x\,\partial_t, \quad M = 2\partial_u. \tag{5.133}$$

Тут $\alpha(u), \beta(u)$ — довільні дійсні функції, що одночасно не є сталими.

Доведення леми є аналогічним доведенню леми 5.5.1.

Теорема 5.6.2 *Нееквівалентні реалізації розширеної класичної алгебри Галілея $\tilde{g}_1(1,1)$ вичерпуються реалізаціями*

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}_1^1(1,1) : T = \partial_t, P = -\partial_x, \quad M = u\partial_u, \qquad G = t\partial_x + xu\partial_u;\\
&\tilde{g}_1^2(1,1) : T = \partial_t, P = -\partial_x, \quad M = \varphi\partial_t + u\partial_x, G = x\varphi\partial_t + (t + xu)\partial_x +\\
&\qquad\qquad + (u^2 + \varphi)\partial_u,
\end{aligned}$$

де $\varphi = 0$, або $\varphi = \varphi(u)$ задовольняє співвідношення $2\varphi(C\varphi - 1) = u^2$, $C = const \in R$;

$$\tilde{g}_1^3(1,1) : T = \partial_t, P = -x\partial_t, M = \gamma(x)\partial_t, G = xt\partial_t + (x^2 - \gamma(x))\partial_x,$$

де функція $\gamma = \gamma(x)$ $\left(\frac{d\gamma}{dx} \neq 0\right)$ задовольняє співвідношення $C\gamma^2 + 2\gamma = x^2$, $C = const \in R$;

$$\tilde{g}_1^4(1,1) : T = \partial_t, P = -x\partial_t, \ M = 2u\partial_t, \ G = tx\partial_t + (x^2 - 2u)\partial_x + ux\partial_u.$$

Для доведення теореми потрібно кожну із реалізацій (5.129)–(5.133) доповнити оператором G (5.96) до реалізацій розширеної класичної алгебри Галілея $\tilde{g}_1(1,1)$. Усі міркування є аналогічними тим, які ми використали під час доведення теореми 5.6.1, тому тут ми їх не наводимо.

Наслідок 5.6.3 *Нееквівалентні реалізації розширеної спеціальної алгебри Галілея $\tilde{g}_2(1,1)$ вичерпуються реалізаціями*

$$\tilde{g}_2^1(1,1) : \quad T = \partial_t, \ P = -\partial_x, \ M = u\partial_u, \ G = t\partial_x + x\,u\partial_u, \tag{5.134}$$

$$
\begin{aligned}
& D = 2t\partial_t + x\partial_x + \lambda u\partial_u,\ \ \textit{де}\ \lambda \in R; \\
\tilde{g}_2^2(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -\partial_x,\ M = \varphi\partial_t + u\partial_x, \\
& G = x\varphi\partial_t + (t + x\,u)\partial_x + (u^2 + \varphi)\partial_u, \qquad (5.135)\\
& D = 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u,\ \ \textit{де}\ \varphi = 0\ \textit{або}\ \varphi = -\frac{1}{2}u^2; \\
\tilde{g}_2^3(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -x\partial_t,\ M = \frac{1}{2}x^2\partial_t,\ G = x\,t\partial_t + \frac{1}{2}x^2\partial_x, \\
& D = 2t\partial_t + x\partial_x + \varepsilon u\partial_u,\ \ \textit{де}\ \varepsilon = 0, 1; \\
\tilde{g}_2^4(1,1): \quad & T = \partial_t,\ P = -x\partial_t,\ M = 2u\partial_t, \\
& G = t\,x\partial_t + (x^2 - 2u)\partial_x + u\,x\partial_u, \\
& D = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u.
\end{aligned}
$$

Наслідок 5.6.4 *Нееквівалентні реалізації розширеної повної алгебри Галілея* $\tilde{g}_3(1,1)$ *вичерпуються реалізаціями*

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_3^1(1,1): \quad & T, P, M, G, D\ \textit{вигляду}\ \ \textit{(5.134)},\ \ S = t^2\partial_t + tx\partial_x + \\
& +(\frac{1}{2}x^2 + \lambda t)u\partial_u, \quad \lambda \in R; \\
\tilde{g}_3^2(1,1): \quad & T, P, M, G, D\ \textit{вигляду}\ \ \textit{(5.135)},\ \textit{де}\ \varphi = -\frac{1}{2}u^2, \\
& S = \left(t^2 - \frac{1}{4}x^2u^2\right)\partial_t + \left(xt + \frac{1}{2}x^2u\right)\partial_x + \left(t + \frac{1}{2}xu\right)u\partial_u.
\end{aligned}
$$

Для доведення наслідків 5.6.3, 5.6.4, як і у випадку наслідків 5.6.1, 5.6.2, потрібно спочатку розширити отримані в теоремі 5.6.2 реалізації розширеної класичної алгебри Галілея до реалізацій розширеної спеціальної алгебри Галілея, а отримані реалізації останньої — до реалізацій розширеної повної алгебри Галілея. Зауважимо, що реалізації $\tilde{g}_2^3(1,1), \tilde{g}_2^4(1,1)$ розширеної спеціальної алгебри Галілея не допускають розширення до реалізацій розширеної повної алгебри Галілея.

На закінчення підрозділу наведемо перелік інваріантних рівнянь вигляду (5.109) для ряду отриманих реалізацій алгебр Галілея.

(1) Рівняння, інваріантні відносно класичних алгебр Галілея, мають вигляд

$$\Psi(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4, \mathcal{J}_5) = 0,$$

де функції $\mathcal{J}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ збігаються з одним із таких наборів функцій:

$$\begin{aligned}
g_1^1(1,1) \quad &: \quad \mathcal{J}_1 = u,\ \mathcal{J}_2 = u_x, \mathcal{J}_3 = u_t u_{xx} - u_x u_{tx},\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_4 = u_{tt}u_{xx} - u_x^2,\ \mathcal{J}_5 = u_{xx};\\
g_1^2(1,1) \quad &: \quad \mathcal{J}_1 = u,\ \mathcal{J}_2 = u_x^{-2}(u_t^2 + 2u_x),\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_3 = u_x^{-3}[u_t^2 u_{xx} - 2u_t u_x u_{tx} + u_x^2 u_{tt}],\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_4 = u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2,\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_5 = u_t u_x^{-4}[u_x^2 u_{tt} - 2u_t u_x u_{tx} + u_t^2 u_{xx}] + u_x^{-3}[u_t u_{xx} - u_x u_{tx}];\\
g_1^3(1,1) \quad &: \quad \mathcal{J}_1 = u_t + u u_x, \mathcal{J}_2 = u_x,\ \mathcal{J}_3 = u_t u_{xx} - u_x u_{tx},\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_4 = u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2,\ \mathcal{J}_5 = u_{xx};\\
g_1^4(1,1) \quad &: \quad \mathcal{J}_1 = u,\ \mathcal{J}_2 = x u_t,\ \mathcal{J}_3 = x^2 u_{tt},\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_4 = x^3[u_t^2 + x(u_t u_{tx} - u_x u_{tt})],\\
&\quad\ \ \mathcal{J}_5 = x^4[u_t^2 + 2x(u_t u_{tx} - u_x u_{tt}) - x^2(u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2)].
\end{aligned}$$

(2) Рівняння, інваріантні відносно розширених класичних алгебр Галілея, мають вигляд

$$\Phi(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4) = 0,$$

де функції Σ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ збігаються з одним із таких наборів функцій:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1^1(1,1) \quad &: \quad \Sigma_1 = u_t + \frac{1}{2}u_x^2, \Sigma_2 = u_x u_{xx} + u_{tx},\\
&\quad\ \ \Sigma_3 = u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2,\ \Sigma_4 = u_{xx};\\
\tilde{g}_1^2(1,1)(\varphi = 0) \quad &: \quad \Sigma_1 = u^{-2}u_x^{-1}[u_x - 2u u_t],\ \Sigma_2 = (u u_x^{-1})^3 u_{xx},\\
&\quad\ \ \Sigma_3 = (u u_x)^{-3}[u^2 u_x^3 - u^4 u_t u_x^2 + u_t u_{xx} - u_x u_{tx}],\\
&\quad\ \ \Sigma_4 = u^{-1}u_x^{-3}[u_x^2 u_{tt} - 2u_t u_x u_{tx} + u_t^2 u_{xx}];\\
\tilde{g}_1^3(1,1)(\gamma = \frac{x^2}{2}) \quad &: \quad \Sigma_1 = u,\ \Sigma_2 = x^2 u_t,\\
&\quad\ \ \Sigma_3 = x^4 u_{tt},\ \Sigma_4 = x^5[x(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}) - 2u_t^2];
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}^4_1(1,1) \quad : \quad & \Sigma_1 = (4u - x^2)u^{-2},\ \Sigma_2 = u^4 u_t^{-4}(u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2), \\
& \Sigma_3, \Sigma_4\text{- функціонально–незалежні інтеграли} \\
& \text{диференціального рівняння з частинними} \\
& \text{похідними першого порядку} \\
& L \cdot F(\theta, \sigma, \rho) = 0, \\
& \text{де} \\
L \ = \ & \theta\sqrt{4\theta - \alpha\theta^2}\partial_\theta - \sigma(\sqrt{4\theta - \alpha\theta^2} + 4\rho)\partial_\sigma + \\
& +[\theta\sigma - 2\rho\sqrt{4\theta - \alpha\theta^2} - 2\sigma^{-1}(\beta\theta^{-4} + \rho^2)]\partial_\rho.
\end{aligned}
$$

Змінні θ, σ, ρ та параметри α, β мають такий вигляд:

$$
\theta = u, \sigma = u_t^{-3}u_{tt},\ \rho = u_t^{-3}(u_x u_{tt} - u_t u_{tx}),\ \alpha = \Sigma_1,\ \beta = \Sigma_2.
$$

5.7. Висновки до розділу 5

Теорія про реалізації даної групи перетворень в скінченновимірному просторі змінних за заданими структурними константами цієї групи була розвинута ще С. Лі [169]–[171]. Було доведено, що заданим структурним сталим завжди відповідає деяка реалізація певної групи з тими ж структурними константами. Таким чином питання про існування довільних реалізацій даної групи було розв'язано ще тоді. Залишилося їх лише прокласифікувати. Хоча така класифікація не створює ніяких принципових затруднень, історично розвиток цієї теорії пішов дещо в іншому напрямку. Більш цікавим виявилося питання про те, чи можна вибрати лінійні реалізації даної групи (останні, які відомо, називаються лінійними зображеннями). Вимога лінійності—це додаткова вимога, тому теорія лінійних зображень інтенсивно розвивалася й відокремилися як окрема наука, внаслідок великої кількості властивостей, притаманних саме лінійним зображенням.

Відмова від вимоги лінійності, очевидно, зменшить кількість властивостей вже нелінійних реалізацій даної групи. З іншого боку, внаслідок меншої кількості властивостей, у цьому випадкові вдається зробити дещо більше, ніж у випадку лінійних зображень.

У цьому розділі ми побудували всі (неперервно–диференційовані) реалізації груп $o(3), o(1,2), o(4), o(2,2)$. Також отримано в просторах невисокої розмірності всі реалізації груп Пуанкаре та Галілея, що дозволило здійснити побудову нових нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Зокрема, побудовані в п'ятому підрозділі $P(1,1)$– та $\tilde{P}(1,1)$–інваріантні рівняння, разом з рівняннями отриманими в [189], дають повний перелік $P(1,1)$–, $\tilde{P}(1,1)$– та $C(1,1)$–інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в двовимірному просторі–часі.

Результати, отримані в третьому підрозділі розділу, дозволяють зробити такі висновки щодо структури реалізацій алгебри Лі групи поворотів для випадку довільної скінченновимірної кількості (n) функцій:

- якщо $n = 1$, то реалізації алгебри Лі групи поворотів не існують;
- не існують реалізації алгебри $o(3)$ в класі дійсних ненульових 2×2 матриць. Єдина реалізація для $n = 2$ є істотно нелінійною;
- у випадку $n = 3$ існують дві різні реалізації, одна з яких є істотно нелінійною;
- якщо $n > 3$, то алгебра $o(3)$ не має нових реалізацій і кожна її реалізація може бути зведеною до лінійної форми.

На закінчення стисло підсумуємо основні результати цього розділу:

1) описані всі коваріантні реалізації алгебр Лі групи Пуанкаре $P(n,m)$, розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(n,m)$, конформної групи $C(n,m)$ для випадку однієї залежної функції;
2) побудовані усі реалізації алгебр Лі груп поворотів $O(3), O(4)$ та псевдоповоротів $O(1,2)$, $O(2,2)$ для випадку довільної скінченної кількісті функцій;

3) отримано нові коваріантні реалізації алгебр Лі груп $E(3), E(4)$, $P(1,2), P(2,2)$ для випадку довільної скінченної кількості залежних функцій;

4) побудовано усі реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре в просторах невисокої розмірності, що дозволило завершити опис усіх пуанкаре–інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в двовимірному просторі–часі;

5) описано усі реалізації алгебр Лі груп Галілея в просторах малої розмірності, що дозволило отримати нові класи галілей–інваріантних рівнянь з частинними похідними другого порядку в двовимірному просторі–часі.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена розробці і розвиненню методів сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь. Автором вперше одержано такі наукові результати:

1. Запропоновано й обгрунтовано новий конструктивний метод розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь.
2. Повністю розв'язано задачу групової класифікації для двовимірного рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом загального вигляду.
3. Повністю розв'язано задачу групової класифікації для загального двовимірного квазілінійного рівняння еволюційного типу.
4. Побудовано універсальну лінійну конструкцію конформно–інваріантних анзаців для довільного векторного поля, яким відповідає редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь.
5. З використанням побудованих анзаців отримано багатопараметричні сім'ї конформно–інваріантних розв'язків системи рівнянь Максвелла у вакуумі.
6. Здійснено повну процедуру симетрійної редукції $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського до систем звичайних диференціальних рівнянь за підгрупами групи Пуанкаре та розширеної групи Пуанкаре.
7. Отримано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського.

8. Проведено повний опис коваріантних реалізацій алгебр Лі групи Пуанкаре $P(n,m)$, розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(n,m)$ та конформної групи $C(n,m)$ у випадку однієї залежної функції.
9. Побудовано усі реалізації алгебр Лі груп $O(3), O(4)$ та $O(1,2)$, $O(2,2)$ в класі векторних полів Лі у довільному скінченновимірному просторі дійсних змінних.
10. Знайдено нові коваріантні реалізації алгебр Лі груп Евкліда $E(3), E(4)$ та Пуанкаре $P(1,2), P(2,2)$ у випадку довільної скінченної кількості залежних змінних.
11. Отримано нові (нековаріантні) реалізації алгебр Лі груп Пуанкаре та Галілея в просторах малої розмірності, що дало можливість побудувати ще невідомі класи пуанкаре– та галілей–інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку у двовимірному просторі–часі.

Запропонований в роботі метод групової класифікації диференціальних рівнянь дозволяє розширити коло рівнянь, для яких повне розв'язання задачі групової класифікації є конструктивним. Результати групової класифікації нелінійних рівнянь еволюційного типу дозволяють здійснити повний груповий аналіз таких рівнянь з нетривіальними симетрійними властивостями, що особливо є актуальним внаслідок використання рівнянь цього типу для опису процесів різної природи.

Побудована лінійна конструкція конформно–інваріантних анзаців, яким відповідає симетрійна редукція конформно–інваріантних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь, значно скорочує об'єм рутинної обчислювальної роботи, яку потрібно виконати під час дослідження конкретних систем. Зокрема, її використання дозволило здійснити побудову ряду багатопараметричних сімей точних розв'язків

$SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса в просторі Мінковського, для яких використання інших методів інтегрування виявилося малоефективним.

Нарешті, нові реалізації алгебр Лі ряду груп локальних перетворень можуть бути використаними для побудови загальних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, які матимуть нетривіальні симетрійні властивості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.

[2] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. —1987. — Т. 293, № 5. — С. 1033–1035.

[3] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 34 / Итоги науки и техники.— М.:ВИНИТИ АН СССР, 1989. — С. 3–83.

[4] Баранник Л.Ф. О симметрийной редукции и точных решениях уравнения Лиувилля // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989. — № 12. — С. 3–5.

[5] Баранник Л.Ф., Марченко В.А. О точных решениях нелинейного уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$ // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 9.— С. 5–8.

[6] Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех. — 1952. — Т. 16, вып. 1. — С. 67–78.

[7] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

[8] Биркгоф Г. Гидродинамика. — М.: Изд–во иностр.лит., 1963. — 400 с.

[9] Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды, вып. 7. — Новосибирск, 1971.— С. 212–214.

[10] Бытев В.О. Групповые свойства уравнения Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. — 1975. — Т. 3, № 5. — С. 13–17.

[11] Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. — М.: Физматгиз, 1958. — 370 с.

[12] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. — М.: Мир, 1981. — 336 с.

[13] Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. — К.: Радянська школа, 1941. — 415 с.

[14] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.

[15] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двухмерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 7. — С. 1215–1223.

[16] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. — 760 с.

[17] Зайцев В.Ф., Полянин А,Д, Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.

[18] Жданов Р.З., Лагно В.І. Про нові зображення алгебр Лі групи Пуанкаре $P(1,2)$ // Вісн. ДУ "Львівська політехніка": Прикл. матем.— 1998. — № 333. — С. 26–29.

[19] Жданов Р.З., Лагно В.І. Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом // Доп. НАН України. Матем., природознавство, техн. науки.—2000. —№ 3. — С. 12–16.

[20] Жданов Р.З., Лагно В.И. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1,2)$ и $P(2,2)$/ /Укр. мат. журн. — 2000.—Т. 52, № 4. — С. 447–462.

[21] Жданов Р.З., Смалій В.Ф., Лагно В.І. Пуанкаре–інваріантні анзаци для полів Максвелла // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 4. — С. 5–7.

[22] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. мат. журн.—1996. — Т. 48, № 5. — С. 595–602.

[23] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[24] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 178, № 3. — С. 566 – 68.

[25] Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 6. — С. 1226–1228.

[26] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[27] Калоджеро Ф., Дегаспис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений. — М.: Мир, 1985. — 472 с.

[28] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

[29] Катков В.Л. Групповая классификация решений уравнений Хопфа // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1965. — № 6. — С. 105–106.

[30] Костенко В.Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. — Львів: Вид–во Льв. ун–ту, 1959. — 22 с.

[31] Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

[32] Лагно В.І. Про нові зображення груп Пуанкаре та Евкліда // Доп. НАН України. Матем., природознавство, техн. науки.— 1996. — № 8. — С. 14–18.

[33] Лагно В.І. $\tilde{P}(1,3)$–інваріантна редукція рівнянь Янга–Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь // Доп. НАН України. Матем., природознавство, техн. науки.—1997. — № 7. — С. 21–26.

[34] Лагно В.І. Конформно–інваріантний розв'язок рівнянь Максвелла // Праці Інституту математики НАН України.—1998.— Т. 19.— С.123–129.

[35] Лагно В.І. Про конформно–інваріантні анзаци для довільного векторного поля // Праці Інституту математики НАН України.—2001.—Т. 36.— С.126–135.

[36] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.

[37] Лагно В.І., Смалій В.Ф. $\tilde{P}(1,3)$–інваріантні анзаци для поля Максвелла // Доп. НАН України. Матем., природознавство, техн. науки.— 1996. — № 12. — С.49–54.

[38] Лагно В.И., Фущич В.И. Редукция самодуальных уравнений Янга–Милсса по подгруппам расширенной группы Пуанкаре // Теор. мат. физика.—1997. — Т. 100, № 3. — С. 416–432.

[39] Ленский Э.В. О груповых свойствах уравнений движения нелинейной вязко–пластичной среды // Вестн. Моск. ун–та. Мат. Мех. — 1966. — № 5. — С. 116–125.

[40] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 5, вып. 2. — С. 141–156.

[41] Мелешко С.В. Групповая классификация уравнений движений газа в постоянном поле сил // Прикл. мех. и техн. физика.— 1996. —Т. 37, № 1. — С. 42–47.

[42] Меньшиков В.М. Решения уравнения двумерной газовой динамики типа простых волн. // Журн. прикл. мех. и техн. физ.— 1969. — № 3. — С.129–134.

[43] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. Высш. Учебн. Завед. — 1963. — № 1 (32). — С.114–123.

[44] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. Высш. Учебн. Завед. — 1963. — № 3(34). — С. 99–106.

[45] Мустаев А.Ф., Хабиров С.В. Винтовые движения газа, инвариантные относительно равномерного движения системы отсчёта // Прикл. матем. и мех.— 2001. — Т. 65, вып. 5. — С. 854–861.

[46] Овсянников Л.В. Группы и инвариантно–групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 3.— С. 439–442.

[47] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[48] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3.— С. 126–145.

[49] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд–во СОА СССР, 1962. — 238 с.

[50] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. — Новосибирск:Изд–во НГУ, 1966. — 140 с.

[51] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978. — 400 с.

[52] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. — 368 с.

[53] Овсяников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика //Прикл. матем. и мех. — 1994. —Т. 58, вып. 4.—С. 30–55.

[54] Овсянников Л.В. Регуляные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. — 1995. —Т. 343, № 2.—С. 156–159.

[55] Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ дифференциальных уравений механики // Общая механика. Т. 2 /Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1975. — С.5–52.

[56] Овсянников Л.В., Чупахин А.П. Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. матем. и мех.— 1996. — Т. 60, вып. 6.—С. 990–999.

[57] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[58] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.

[59] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.

[60] Прасад М.К. Инстантоны и монополи в теориях калибровочных полей Янга–Миллса // Геометрические идеи в физике. — М.: Мир, 1983. — С. 64–96.

[61] Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие движения // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, № 2. — С.302 –305.

[62] Раджамаран Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

[63] Свирщевский С.Р. Групповая классификация и инвариантные решения нелинейных полигармонических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 10. — С.1772–1781.

[64] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1967. — 440 с.

[65] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн.— 1990. — Т. 42, № 10.— С. 1370–1376.

[66] Серова М.М. О точных решениях уравнения Буссинеска // Теоретико–алгебраические методы в задачах математической физики. — К.: Ин–т математики АН УССР. — 1983. — С. 55–58.

[67] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 10. — Р. 1262–1270.

[68] Соколов Ю.Д. О некоторых частных решениях уравнения Буссинеска // Укр. мат. журн. — 1956. —Т. 8, № 1. — С. 48–54.

[69] Сухарев М.Г. Инвариантные решения уравнений, описывающих движение жидкости и газа в длинных трубопроводах // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 781–787.

[70] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. —Т. 39, № 1. — С. 116–123.

[71] Фущич В.И. Условные симметрии уравнений математической физики // Укр. мат. журн. — 1991. —Т. 43, № 12. — С.1456–1470.

[72] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — К.: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[73] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989. — № 4. — С. 19–34.

[74] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989. — № 5. — С. 46–53.

[75] Фущич В.И., Жданов Р.З. Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака // Физика элементар. частиц и атомн. ядра. — 1988. — Т. 19, вып. 5. — С. 1154– 1196.

[76] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. — К.: Наук. думка, 1992. — 288 с.

[77] Фущич В.І., Лагно В.І. Про нові нелінійні рівняння, інваріантні відносно групи Пуанкаре в двовимірному просторі–часі // Доп. НАН України. Матем., природознавство, техн. науки.— 1996. — № 11. — С. 60—65.

[78] Фущич В.І., Лагно В.І. Лінійні та нелінійні зображення груп Галілея в двовимірному просторі–часі // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 3. — С. 414–423.

[79] Фущич В.И., Наконечный В.В. Теоретико–алгебраический анализ уравнений Ламе // Укр. мат. журн. — 1980. —Т. 32, № 2. — С. 267–273.

[80] Фущич В.И., Никитин А.Г. Групповые свойства уравнений Максвелла // Теоретико–групповые методы в математической физике. — К.:Ин–т математики АН УССР, 1978. — С. 45–80.

[81] Фущич В.И., Никитин А.Г. О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения // Докл. АН СССР. — 1978. —Т. 238, № 1. — С. 46–49.

[82] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.— К.: Наук. думка, 1983. — 200 с.

[83] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[84] Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики // Укр. мат. журн. — 1976. —Т. 28, № 6. — С. 844–849.

[85] Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнениях уравнения Борна–Инфельда // Докл. АН СССР.— 1981. —Т. 263, № 3. — С. 582–586.

[86] Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера // Докл. АН СССР.— 1983. —Т. 273, № 3. — С. 543–546.

[87] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[88] Фущич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теор. мат. физика.— 1985. —Т. 64, № 1. — С. 41–50.

[89] Хабиров С.В. К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН.— 1995. — Т. 341, № 6. — С. 764–766.

[90] Хабиров С.В. Подмодель вращательных движений газа в однородном поле сил // Прикл. матем. и мех.— 1998. — Т. 62, вып. 2. — С. 263–271.

[91] Хабиров С.В. Течение газа со спиральными поверхностями уровня // Прикл. мех. и техн. физ.— 1999. — Т. 40, № 2. — С. 34–39.

[92] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.—534 с.

[93] Штелень В.М. Групповой анализ нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с уравнением Шредингера // Укр. мат. журн.— 1981. —Т. 26, № 2. — С. 323–326.

[94] Actor A. Classical solutions of $SU(2)$ Yang-Mills theories /Revs. Mod. Phys. — 1979. —Vol. 51, № 3. — P. 461–525.

[95] de Alfaro V., Fubini S., Furlan G. A new classical solution of the Yang–Mills field equations // Phys. Lett. B. — 1976. — Vol. 65, № 2. — P. 163–166.

[96] Atiyah M.F., Hitchin N.J., Drinfeld V.G., Manin Yu. I. Construction of instantons / Phys. Lett. A. — 1978. — Vol. 65, № 3. — P. 185–187.

[97] Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Kovalev V.F. Water redistribution in irrigated soil profiles: invariant solutions of the governing equation // Nonlinear Dynamics. — 1997. — Vol. 13. — P. 395–409.

[98] Barannik L.F., Lahno H.O. Symmetry reduction of the Bousinesq equation to ordinary differential equations // Rep. Math. Phys. — 1996. — Vol. 38, № 1. — P. 1–9.

[99] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1.—P. 43–94.

[100] Bateman H. The transformation of the electrodynamical equations // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223–264.

[101] Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu. S. Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations // Phys. Lett. B. — 1975. — Vol. 59, № 1. — P. 85–87.

[102] Bluman G.W., Cole J. The general solution of the heat equation // J. Mat. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 1.— P. 1025–1042.

[103] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity Methods for Differential Equations. — Berlin:Springer, 1974. — 332 p.

[104] Bluman G., Kumei S. Symmetries and Differential Equations. — Berlin:Springer, 1989. — 610 p.

[105] Boussinesq J. Recherches theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltres daus le sot et sur le debit des sources // J. Math. Pur. Appl. — 1904. — Vol. 10, № 1. — P.5–78.

[106] Chakravarty S., Ablowitz M.J. Reductions of self–dual Yang–Mills fields and classical systems // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 65, № 9. — P. 1085–1087.

[107] Chakravarty S., Kent S.L., Newmen E.T. Some reductions of the self–dual Yang–Mills equations to integrable systems in 2 + 1 dimensions // J. Math. Phys. — 1995. — Vol. 36, № 2. — P. 763–772.

[108] Changzheng Qu. Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method // IMA J. Appl. Math. — 1999. — Vol. 62.— P.283–302.

[109] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second–order evolution equations with convection terms // Euro. J. Appl. Math.— 1998. — Vol. 9.— P. 527–542.

[110] Clarkson P., Kruskal M.D. New similarity solutions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.

[111] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions // SIAM J. Appl. Math. —- 1994. — Vol. 54, № 6. — P. 1693–1719.

[112] CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1./ Editor N.Ibragimov. — CRC Press. — 1994—400 p.

[113] Cuningham E. The principle of relativity in electrodynamics and an extention there of // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8.— P. 77–98.

[114] Damianou P.A., Sophocleous C. Symmetry group classification of three–dimensional Hamiltonian systems // Appl. Math. Lett. — 2000. — Vol. 13. — P. 63–70.

[115] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion–convection equations // Phys. Lett. A. — 1994. — Vol. 190. — P. 149–154.

[116] El–labany S.K., Elhanbaly A.M., Sabry R. Group classification and symmetry reduction of variable coefficient nonlinear diffusion–

convection equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35. — P. 8055–8063.

[117] Fedorchuk V. Symmetry reduction and exact solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, multidimensional Monge–Ampere and eikonal equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3–4. — P. 329–333.

[118] Fushchich W.I., Barannik L.F., Lagno V.I. Invariants of one–parameter subgroups of the conformal group $C(1, n)$ //Доп. АН України.Матем., природознавство, техн. науки. — 1993. — № 3. — С.45–48.

[119] Fushchych W.I., Lagno V.I., Zhdanov R.Z. On nonlinear representation of the conformal algebra $AC(2, 2)$ // Доп. АН України. Матем., природознавство, техн. науки.— 1993. — № 9. — С. 44–47.

[120] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. — Dordrecht: Reidel, 1987. — 214 p.

[121] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Symmetry of Equations of Quantum Mechanic. — New York: Allerton Press, 1994. — 460 p.

[122] Fushchich W.I., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I. //J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. —Vol. 1, № 1. — P. 75–98.

[123] Fushchich W.I., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. II. //J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. —Vol. 1, № 2. — P. 158–188.

[124] Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear manydimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations //J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. —Vol. 16, № 15. — P. 3645–3656.

[125] Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation //J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. —Vol. 20, № 16. — P. 929–933.

[126] Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. Nuovo cim. — 1982. — Vol. 34, № 16. — P.498–502.

[127] Fushchich W.I., Shtelen W.M. Conformal symmetry and new exact solutions of SU_2 Yang–Mills theory // Lett. Nuovo cim. — 1983. — Vol. 38, № 2. — P.37–40.

[128] Fushchich W., Shtelen W. and Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 c.

[129] Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On the conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Phys. Lett. B. — 1985.—Vol. 159, № 2–3. — P. 189–191.

[130] Fushchych W.I. and Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math.Gen. — 1987. — Vol. 20, № 2. — L45-L48.

[131] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. and Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys.— 1994. — Vol. 1, № 2.—P. 210–221.

[132] Fushchych W.I., Yehorchenko I.A. Second–order differential invariants of the rotations group $O(n)$ and its extensions: $E(n), P(1, n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — Vol. 38, № 1. — P. 69–92.

[133] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Reports. — 1989. — Vol. 172, № 4. — P. 123 – 174.

[134] Fushchych W., Zhdanov R. Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Dirac Equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 383 p.

[135] Fushchych W., Zhdanov R. and Lahno V. On linear and non–linear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields // J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 3. — P. 295–308.

[136] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. and Yehorchenko I.A. On the reduction of the nonlinear multidimensional wave equations and compatibility of the d'Alambert–Hamilton system // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — Vol. 161. — P. 352–360.

[137] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. II. Exact solutions. — Monthreal, 1988. — 59 p. (Preprint / Center de recherches mathematiques; CRM—1544).

[138] Gandarias M.L. Classical point symmetries for a porous medium equation // J. Phys. A: Math. Gen.— 1996. — Vol. 29. — P. 607–633.

[139] Gandarias M.L. Nonclassical symmetries of a porous medium equation with absorption // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — Vol. 30. — P. 6081–6091.

[140] Gandarias M.L. New symmetries for a model of fast diffusion // Phys. Lett. A.— 2001. — Vol. 286, № 2–3. — P. 153–160.

[141] Gandarias M.L., Bruzon M.S. Nonclassical symmetries for a family of Cahn–Hilliard equations // Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 263. —- P.331–337.

[142] Geurts M.L., Martini R., Post G.F. Symmetries of the WDVV equations // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72, № 1–2. — P. 67–75.

[143] Goard J., Broadbridge P. Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction–diffusion equations in two spatial dimensions // Nonl. Analysis. Theory, Methods and Appl. — 1996. — Vol. 26, № 4.— P. 735–754.

[144] Grassi V., Leo R.A., Soliani G., Tempesta P. A group analysis of the 2D Navier–Stokes–Fourier equations // Physica A:Statist. Mech. Appl. — 2001. — Vol. 293. — P. 421–434.

[145] Güngor F. Group classification and exact solutions of a radially symetric porousmedium equation // Int. J. Nonlin. Mech. — 2002. — Vol. 37, № 2. — P. 245–255.

[146] Grundland A.M., Sheftel M.B., Winternitz P. Invariant solutions of hydrodynamic–type equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — Vol. 33. — P. 8193–8215.

[147] Heredero R.H., Olver P.J. Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. — 1996. —Vol. 37.— P. 6419–6438.

[148] t'Hooft G. Computation of the quantum effects due to a fourdimensional pseudoparticle // Phys. Rev. — 1976. — Vol. D 14, № 12. — P. 3432–3450.

[149] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32, № 11. — P. 2988–2995.

[150] Ibragimov N.H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. — Chichester, New York: John Willey. — 1999. — 60 p.

[151] Ivanova T.A., Popov A.D. Some new integrable equations from the self–dual Yang–Mills equations // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 205. — P. 158–166.

[152] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form–preserving transformations of one–dimensional wave equations with

dissipation // Int. J. Nonlin. Mech.— 2001. — Vol. 36. — P. 987–997.

[153] Kovalyov M., Legare M., Gagnon L. Reductions by isometries of the self–dual Yang–Mills equations in four–dimensional Euclidean space // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34, № 7. — P. 3245–3268.

[154] Lagno V.I. Group analysis of some class of nonlinear evolution equations // Proceedings of the International Conference "Mogran 2000: Modern Group Analysis for the New Millennium"(Ufa, Russia, 27 September–03 October, 2000). — Ufa.USATU Publishers. — 2001. —P. 105–110.

[155] Lahno V. On Poincare–invariant reduction and exact solutions of the Yang–Mills equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1996. — Vol. 3, № 3–4. — P. 291–295.

[156] Lahno V. Conformally invariant ansatze for the Maxwell field // J. Nonlin. Math. Phys.— 1997. — Vol. 4, № 3–4. — P.392–400.

[157] Lahno V. Symmetry reduction and exact solutions of the $SU(2)$ Yang–Mills equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, 7–13 July 1997). — Kyiv: Institute of Mathematics. — 1997. — Vol. 2. — P. 313–320.

[158] Lahno V.I. On new Galilei–invariant equations in two–dimensional space–time// J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31, № 42. — P. 8511–8519.

[159] Lahno V. On new relativistically invariant nonlinear equations in two–dimensional space–time // Rep. Math. Phys. — 1998. — Vol. 41, № 3. — P. 271–277.

[160] Lahno V.I. Realizations of the Poincaré algebra and Poincaré–invariant equations in three–dimensional space–time // Rep. Math. Phys. — 2000. — Vol. 46, № 2. — P. 137–142.

[161] Lahno V., Onyshchenko A. The Ovsjannikov's theorem on group classification of a linear hyperbolic type partial differential equation revisited // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2000. — Vol. 30, Part 1. — P. 141–145.

[162] Lahno V., Zhdanov R., Fushchych W. Symmetry reduction and exact solutions of the Yang–Mills equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 1. — P.51–72.

[163] Larmor I. Collected Papers. — London:Clarendon Press, 1928. — 275 p.

[164] Legaré M. Symmetry reduction of the Lax pair of the four–dimensional Euclidean self–dual Yang–Mills equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1996. — Vol. 3, № 3–4. — P. 266–285.

[165] Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.

[166] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen // Arch. Math. — 1881.— Vol. 6, Helf 3. — P. 328–368.

[167] Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten // Math. Ann. — 1885. — Vol. 25, № 1.— P. 71–151.

[168] Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann.— 1888. —Vol. 32. — P. 213–281.

[169] Lie S. Vorlesungen úber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: Teubner, 1891. — 400 p.

[170] Lie S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen. — Leipzig: Teubner, 1893. — 805 p.

[171] Lie S., Engel F. Theorie der transformations gruppen. Bd. 1–3.— Leipzig: Teubner, 1888,1890,1893.

[172] Lorentz G.A. Electromagnetic Phenomena in a system Moving with Any Velocity Smaller then Thut of Light // Proc. Acad. Sci., Amsterdam. — 1904. — Vol. 6.— P. 809–830.

[173] Lutfullin M. On Covariant realizations of the Poincaré group $P(1,3)$ // Rep. Math. Phys. — 2002. — Vol. 50, № 1. — P. 195–209.

[174] Manale J.M. Group classification of the two–dimensional Navier–Stokes–type equations // Int. J. Nonlin. Mech. — 2000. — Vol. 35. — P. 627–644.

[175] Meleshko S.V. Group Classification of two–dimensional stable viscous gas equations // Int. J. Nonlin. Mech.—1998. — Vol. 34, №3.—P.449–456.

[176] Meleshko S.V. Group classification of two–dimensional steady viscous gas dynamics equations with arbitrary state equations // J. Phys. A:Math. Gen.—2002. — Vol. 35—P. 3115–3533.

[177] Morgan A.G. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations // Quart. J. Math. Oxford. — 1952. — Vol. 3, № 12. — P. 250–259.

[178] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.

[179] Olver P.J., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 114 A, № 3. — P. 107–112.

[180] Olver P.J., Rosenau P. Group–invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47, № 2. —- P. 263–278.

[181] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.

[182] Ozer T. On the symmetry group properties of equations of nonlocal elasticity // Mech. Research Comm. — 1999. — Vol. 26, № 6. — P. 725–733.

[183] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1624.

[184] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three– and four–dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1977. — Vol. 18, № 7. — P. 1449–1455.

[185] Prasad M.K., Sommerfield C.M. Exact classical solution for the t'Hooft monopole and Julia–Zee dyon // Phys. Rev. Lett. — 1975. — Vol. 35, № 12. — P. 760–762.

[186] Poincaré H. Sur la dynamique de l'electron // Comptes Rendus Acad. Sci. — 1905. — Vol. 140. — P. 1504–1506.

[187] Poincaré H. Sur la dynamique de l'electron // Rendiconti del Circolo Mathem. di Palermo. — 1906. — Vol. 21. — P. 129–160.

[188] Rainich G.I. On the symmetry of Maxwell equations // Trans. Am. Math. Soc.—1925. — Vol. 27. — P. 106–109.

[189] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two–dimensional space–time// J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31, № 5. — P. 1095–1105.

[190] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two–dimensional space–time Schrödinger group // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34. — P. 558–569.

[191] Schwarz F. Symmetry of $SU(2)$ invariant Yang–Mills theories // Lett. Math. Phys. — 1982. — Vol. 6, № 5. — P. 355–359.

[192] Sophocleous C. On cyclic symmetries of n–dimensional nonlinear wave equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — Vol. 33. — P. 8319–8330.

[193] Tafel J. Two–dimensional reductions of the self–dual Yang–Mills equations in self–dual spaces // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34. — P. 1892–1907.

[194] Turkowski P. Low–dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. — 1988. —Vol. 29. — P. 2139–2144.

[195] Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimensional six // J. Math. Phys. – 1990. — Vol. 31. — P. 1344–1350.

[196] Wilczek F. Geometry and interaction of instantons // Quark. Confin. and Field Theory. — New York:Willey, 1977. — P. 211–219.

[197] Witten E. Some exact multi–instanton solutions of classical Yang–Mills theory // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38, № 3. – P. 121–124.

[198] Yang C.N., Mills R.L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // Phys. Rev.— 1954—Vol. 96.—P. 191–195.

[199] Yang C.M., Verburg K., Bveye P. Group classification and symmetry reductions of the non–linear diffusion–convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Nonlin. Mech.— 1994—Vol. 29, № 3.—P. 273–278.

[200] Yehorchenko I.A. Nonlinear representations of the Poincaré algebra and invariant equations // Symmetry Analysis of

Equations of Mathematical Physics. — Kiev: Institute of Mathematics, 1992. —P.62–66.

[201] Zayed E.M.E., Zedan H.A. Direct approach for group classification for nonlinear filtration problem // Chaos. Solitons and Fractals. — 2002. — Vol. 13. — P. 331–336.

[202] Zhdanov R.Z., Fushchych W.I. Conditional symmetry and new classical solutions of the Yang–Mills equations // J. Phys. A: Math. Gen.— 1995. — Vol. 28. — P. 6253–6263.

[203] Zhdanov R.Z., Fushchych W.I. On new representations of Galilei groups // J. Nonlin. Math. Phys.— 1997. — Vol. 4, № 3. — P. 426–435.

[204] Zhdanov R.Z., Lagno V.I. On separability criteria for a time-invariant Fokker–Planck equation // Доп. АН України. Матем., природознавство, техн. науки. — 1993. — № 2. — P. 18–21.

[205] Zhdanov R.Z., Lahno V. I. On the new exact solutions of the Yang–Mills equations // Доп. АН України. Матем., природознавство, техн. науки. — 1994. — № 8. — С. 26–31.

[206] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Physica D. — 1998. — Vol. 122. — P. 178–186.

[207] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32.— P. 7405–7418.

[208] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and exact solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang–Mills equations // Modern Nonlinear Optics. Second Edition, Advances in Chemical Physics, Volume 119/ Edited by Myron W. Evans. Series Editors I. Prigogine and Stuart A. Rice. —New York:John Wiley & Sons. Inc., 2001. — P. 269– 351.

[209] Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. Reduction of the self–dual Yang–Mills equations. I. The Poincare group // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 74, № 4. — С. 456–462.

[210] Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. On covariant realizations of the Euclid group // Commun. Math. Phys. — 2000. —Vol. 212. — P. 535–556.

[211] Zhdanov R.Z., Roman O. On preliminary symmetry classification on nonlinear Schrödinger equations with some applications to Doebner–Goldin models // Rep. Math. Phys.— 2000. —Vol. 45, № 2. — P. 273–291.

[212] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M. and Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 238. — P. 101–123.

Додаток 1. Інваріантні розв'язки нелінійних рівнянь еволюційного типу

1.1. $u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln|u_x|),\ \lambda \neq 0,$

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \lambda^{-1}\partial_t, \quad e_4 = e^{\lambda t}\partial_x;$$

$\langle e_3 \rangle\ :\ u = \pm \int \exp[C_1 \exp(\lambda x) - x - \lambda^{-1}]dx + C_2,$

$\lambda \neq 0,\ C_1, C_2 \in R;$

$\langle e_1 \rangle\ :\ u = \pm \exp[C \exp(\lambda t) - x - \lambda^{-1}], \quad C \in R, \quad \lambda \neq 0;$

$\langle e_1 + \alpha e_3 \rangle\ :\ u = \exp(-x)\varphi(\omega), \quad \omega = \alpha x - \lambda t,\ \alpha \cdot \lambda \neq 0,$

функція φ задовольняє рівняння

$\alpha^2\varphi'' + (\lambda - 2\alpha)\varphi' - \lambda(\alpha\varphi' - \varphi)\ln|\alpha\varphi' - \varphi| + \varphi = 0;$

$\langle e_1 + \epsilon e_4 \rangle\ :\ u = \pm|1 + \epsilon\exp(\lambda t)| \cdot$

$\cdot \exp[\dfrac{-x + C_1\exp(\lambda t) - (1+\lambda)\epsilon t \exp(\lambda t)}{1 + \epsilon\exp(\lambda t)} +$

$+\dfrac{1 + \epsilon\exp(\lambda t)\ln|1 + \epsilon\exp(\lambda t)|}{\lambda(1 + \epsilon\exp(\lambda t)}], \quad \lambda \neq 0, \quad \epsilon = \pm 1;$

$\langle e_2 + \epsilon e_3 \rangle\ :\ u = \epsilon\lambda t + \varphi(x), \quad \lambda \neq 0,\ \epsilon = \pm 1,$

функція φ задовольняє рівняння

$\varphi'' - \lambda\varphi'(x + \ln|\varphi'|) - \epsilon\lambda = 0.$

1.2. $u_t = u_{xx} + \lambda\exp(-u_x), \quad \lambda \neq 0,$

$$e_1 = \partial_t, e_2 = \partial_u,\ e_3 = \partial_x,\ e_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + (u + x)\partial_u;$$

$\langle e_1 \rangle\ :\ u = (x - \lambda^{-1}C_1)\ln|C_1 - \lambda x| - x + C_2,$

$C_1, C_2 \in R,\ \lambda \neq 0;$

$$\langle e_4\rangle \ : \ u = x\varphi(\omega) + x\ln|x|, \ \omega = tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^2\varphi'' + (2\omega - 1)\varphi' + \exp(2\omega\varphi' - \varphi - 1) + 1 = 0;$$

$$\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle \ : \ u = \epsilon t + \int \ln[C_1\exp(\epsilon x) + \epsilon\lambda]dx + C_2,$$

$$\lambda \neq 0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad C_1, C_2 \in R;$$

$$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle \ : \ u = \varphi(\omega), \quad \omega = x - \alpha t,$$

функція φ визначається із рівності

$$\int \frac{\exp(\varphi')d\varphi'}{\alpha^{-1}\lambda + \varphi'\exp(\varphi')} = -\alpha\omega + C_1, \quad \alpha\lambda \neq 0, \ C_1 \in R.$$

1.3. $u_t = u_{xx} + 2\ln|u_x|,$

$$e_1 = \partial_x, \ e_2 = \partial_u, \ e_3 = \partial_t, \ e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u;$$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u = \varphi(x), \ \int \frac{d\varphi'}{\ln|\varphi'|} = -2x + C_1, \ C_1 \in R;$$

$$\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle \ : \ u = C_1 + \epsilon x, \quad \epsilon = \pm 1, \ C_1 \in R;$$

$$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle \ : \ u = \varphi(\omega), \quad \omega = t - \alpha x,$$

$$\int \frac{d\varphi'}{\varphi' - 2\ln|\alpha\varphi'|} = \alpha^{-2}\omega + C_1, \ \alpha \neq 0, \ C_1 \in R;$$

$$\langle e_4\rangle \ : \ u = t\varphi(\omega) + t\ln(t), \quad \omega = tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^3\varphi'' + \omega(6\omega - 1)\varphi' + 2\ln|\varphi'| - \varphi + 3\ln|\omega| + 2\ln 2 - 1 = 0.$$

1.4. $u_t = u_{xx} - u_x\ln|u_x| + \lambda u_x, \quad \lambda \in R,$

$$e_1 = \partial_u, \ e_2 = \partial_x, \ e_3 = \partial_t, \ e_4 = t\partial_t + u\partial_u;$$

$$\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle \ : \ u = \epsilon(x + \lambda t) + C_1, \quad \epsilon = \pm 1, \ C_1 \in R, \ \lambda \in R;$$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u = \pm\int \exp(C_1\exp x + \lambda)dx + C_2, \ \lambda C_1 \neq 0, \ C_2 \in R;$$

$$\langle e_4\rangle \ : \ u = \pm\exp[(x + \ln t + C_1)t^{-1} + \lambda], \quad \lambda \neq 0, \quad C_1 \in R;$$

$$\langle e_3+\alpha e_1\rangle \ : \ u=\alpha t+\varphi(x),$$
$$\int \frac{d\varphi'}{\alpha+\varphi'(\lambda+\ln|\varphi'|)}=x+\mathrm{C}_1, \quad \alpha\lambda\neq 0, \ C_1\in R;$$
$$\langle e_3+\alpha e_4\rangle \ : \ u=e^{\alpha t}\varphi(\omega), \quad \omega=x-\frac{1}{2}\alpha t^2,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi''+(\lambda-\ln|\varphi'|)\varphi'-\alpha\varphi=0, \quad \lambda\alpha\neq 0.$$

1.5. $u_t=u_{xx}+\lambda|u_x|^{\frac{2k-2}{2k-1}}, \ \lambda\neq 0, \ k\neq 0, \frac{1}{2}, 1,$

$$e_1=\partial_t, \ e_2=\partial_x, \ e_3=\partial_u, \ e_4=t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x+ku\partial_u;$$

$$\langle e_1\rangle \ : \ u=\pm\frac{2k-1}{2\lambda k}\left|C_1-\frac{\lambda x}{2k-1}\right|^{2k}+C_2, \ C_1,C_2\in R,$$
$$\lambda\neq 0, \ k\neq 0, \frac{1}{2}, 1;$$
$$\langle e_4\rangle \ : \ u=t^k\varphi(\omega), \quad \omega=tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^2\varphi''+\lambda 2^{\frac{2k-2}{2k-1}}|\omega|^{\frac{3k-3}{2k-1}}|\varphi'|^{\frac{2k-2}{2k-1}}+\omega(6\omega-1)\varphi'-k\varphi=0,$$
$$\lambda\neq 0, k\neq 0, \frac{1}{2}, 1;$$
$$\langle e_1+\epsilon e_3\rangle \ : \ u=\epsilon t+\varphi(x),$$
$$\int \frac{d\varphi'}{\epsilon-\lambda|\varphi'|^{\frac{2k-2}{2k-1}}}=x+C_1, \quad C_1\in R, \ \epsilon=\pm 1, \ \lambda\neq 0;$$
$$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle \ : \ u=\lambda t+\epsilon x+C_1, \quad C_1\in R, \ \epsilon=\pm 1, \ \lambda\neq 0;$$
$$\langle e_1+\epsilon e_2+\alpha e_3\rangle \ : \ u=\alpha t+\varphi(\omega), \ \omega=x-\epsilon t,$$
$$\int \frac{d\varphi'}{\alpha-\epsilon\varphi'-\lambda|\varphi'|^{\frac{2k-2}{2k-1}}}=\omega+C_1,$$
$$\alpha\lambda\neq 0, \quad \epsilon=\pm 1, \quad C_1\in R.$$

1.6. $u_t=u_{xx}+\frac{1}{4t}u_x^2,$

$$e_1=\partial_u, \ e_2=\partial_x, \ e_3=x\partial_u-\frac{1}{2}\ln(t)\partial_x, \ e_4=2t\partial_t+x\partial_x+2u\partial_u;$$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u = -x^2\ln^{-1}(t) - 2\int\frac{dt}{\ln t} + C_1, \ C_1\in R;$$
$$\langle e_4\rangle \ : \ u = t\varphi(\omega), \quad \omega = tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^3\varphi'' + \omega^3(\varphi')^2 + \omega(6\omega - 1)\varphi' - \varphi = 0.$$

1.7. $u_t = u_{xx} - uu_x + \lambda|u_x|^{\frac{3}{2}}, \ \lambda \neq 0,$

$$e_1 = \partial_x, \ e_2 = \partial_t, \ e_3 = t\partial_x + \partial_u, \ e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u;$$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u = 2\lambda t^{-\frac{1}{2}} + t^{-1}(x + C_1), \quad \lambda\neq 0, \quad C_1\in R;$$
$$\langle e_4\rangle \ : \ u = t^{-\frac{1}{2}}\varphi(\omega), \quad \omega = tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^{\frac{3}{2}}\varphi'' + 2\varphi\varphi' + (6\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}})\varphi' + 2\sqrt{2}\lambda\omega^{\frac{3}{2}}|\varphi'|^{\frac{3}{2}} - $$
$$-\frac{1}{2}\omega^{-\frac{3}{2}}\varphi = 0;$$

$$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle \ : \ u = \epsilon t + \varphi(\omega), \ \omega = x - \frac{1}{2}\epsilon t^2,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi'' + \lambda|\varphi'|^{\frac{3}{2}} - \varphi\varphi' - \epsilon = 0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \lambda\neq 0;$$

$$\langle e_2\rangle \ : \ u = \varphi(x), \quad \varphi' = \varphi^2 f(\varphi),$$
$$\int\frac{df}{1 - \lambda|f|^{\frac{1}{2}} - 2f} = \ln|\varphi| + C_1, \quad C_1\in R.$$

1.8. $u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{|u_x|}, \ \lambda > 0, \ m\neq 0,$

$$e_1 = \partial_u, \ e_2 = \partial_t, \ e_3 = t\partial_u + \lambda\partial_x, \ e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u;$$

$$\langle e_2\rangle \ : \ u = \varphi(x), \quad \varphi' = x^2\psi(x),$$
$$\int\frac{d\psi}{2\psi + m\sqrt{|\psi|} + \lambda^{-1}} = -\ln|x| + C_1,$$
$$\lambda > 0, \ m\neq 0, \ C_1\in R;$$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u=\lambda^{-1}tx+\frac{2mt^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\lambda}}+C_1,$$
$$\lambda>0,\quad m\neq 0,\quad C_1\in R;$$
$$\langle e_4\rangle \ : \ u=t^{\frac{3}{2}}\varphi(\omega),\quad \omega=tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^3\varphi''+\omega(6\omega-1)\varphi'+\sqrt{2}m\omega^{-\frac{3}{2}}|\varphi'|^{\frac{1}{2}}+\lambda^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}=0;$$
$$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle \ : \ u=\varphi(\omega)+\frac{1}{2}\epsilon t^2,\quad \omega=x-\epsilon\lambda t,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi''+\lambda\varphi'+m|\varphi'|^2+\lambda^{-1}\omega=0,$$
$$\epsilon=\pm 1,\ \lambda>0,\ m\neq 0.$$

1.9. $u_t=u_{xx}-\dfrac{\lambda}{4}(1-q)t^{-\frac{1}{2(1+q)}}u_x^2,\quad \lambda\neq 0,\quad |q|\neq 1,$

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_u,\ e_2=\partial_x,\ e_3=x\partial_u+\lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x,\\ e_4 &= 2t\partial_t+x\partial_x+(1+q)u\partial_u,\quad |q|\neq 1,\quad \lambda=0.\end{aligned}$$

1.9.1. $q=0:$

$$\langle e_3\rangle \ : \ u=2\lambda^{-1}\sqrt{t}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}x^2t^{-\frac{1}{2}}+C_1,\quad C_1\in R,\ \lambda\neq 0;$$
$$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle \ : \ u=\lambda^{-1}\sqrt{t}-\epsilon\lambda^{-2}\ln|\epsilon+\lambda\sqrt{t}|+$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda\sqrt{t}+\epsilon)^{-1}x^2+C_1,$$
$$\lambda\neq 0,\quad \epsilon=\pm 1,\quad C_1\in R;$$
$$\langle e_4\rangle \ : \ u=\sqrt{t}\varphi(\omega),\quad \omega=tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^3\varphi''-\lambda\omega^3(\varphi')^2+\omega(6\omega-1)\varphi'-\frac{1}{2}\varphi=0,\ \lambda\neq 0;$$
$$\langle e_2+\alpha e_4\rangle \ : \ u=\frac{x}{2\alpha}\ln t-\frac{\lambda}{8\alpha^2}\sqrt{t}\ln^2 t+\sqrt{t}\varphi(\omega),$$
$$\omega=t^{-\frac{1}{2}}x-\frac{\lambda}{2\alpha}\ln t,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi''-\frac{\lambda}{4}(\varphi')^2+\frac{1}{2}(\omega+\alpha^{-1}\lambda)\varphi'-\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{2\alpha}\omega=0,\ \alpha\lambda\neq 0.$$

1.9.2. $q \neq 0:$

$$\langle e_3\rangle \;:\; u = \frac{1}{2\lambda}x^2 t^{\frac{1}{2}(q-1)} + \frac{2}{\lambda(1+q)}t^{\frac{1}{2}(q+1)} + C_1,$$

$\lambda \neq 0, \quad |q| \neq 0, 1, \quad C_1 \in R;$

$$\langle e_4\rangle \;:\; u = t^{\frac{1}{2}(1+q)}\varphi(\omega), \; \omega = tx^{-2},$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4\omega^3\varphi'' - \lambda(1-q)\omega^3(\varphi')^3 + \omega(6\omega-1)\varphi' - \frac{1}{2}(1+q)\varphi = 0,$$

$\lambda \neq 0, \quad |q| \neq 0, 1;$

$$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle \;:\; u = \frac{1}{2}x^2(\lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)} + \epsilon)^{-1} + \int \frac{dt}{\epsilon + \lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)}} + C_1,$$

$\epsilon = \pm 1, \; \lambda \neq 0, \; |q| = 0, 1, \; C_1 \in R.$

1.10. $u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2 + (\lambda - \alpha)(1+\alpha^2)^{-1},$
$\lambda \in R, \; \alpha = \alpha(t), \; \dot{\alpha} \neq 0, \; (1+\alpha^2)\ddot{\alpha} = 2q(\dot{\alpha})^2,$

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_u, \; e_2 = \partial_x, \; e_3 = x\partial_u + \alpha\partial_x, \\ e_4 &= -(\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + (q-\alpha)x\partial_x + (2qu - \frac{1}{2}x^2)\partial_u, \quad (q>0); \end{aligned}$$

$$\langle e_2\rangle \;:\; u = \int \frac{(\lambda-\alpha)}{1+\alpha^2}dt + C_1, \; C_1 \in R,$$

$$\langle e_4\rangle \;:\; u = \frac{\alpha x^2}{2(1+\alpha^2)} + \varphi(\omega)\exp(-2q\arctan\alpha),$$

$$\omega = \frac{x^2}{1+\alpha^2}\exp(2q\arctan\alpha),$$

функція φ задовольняє рівняння

$$4p\omega\varphi'' - 2\omega(\varphi')^2 + 2(p - q\omega)\varphi' + 2q\varphi - \frac{1}{2}\omega + \lambda p = 0,$$

$p \in R, \; p \neq 0, \; \lambda \in R, \; q > 0.$

1.11. $u_t = x^{1-k}|u_x|^{-k}u_{xx} + \beta x^{-k}|u_x|^{1-k}, \; \beta \neq \frac{k-1}{k-2}, \; k \neq 0, 2,$

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x, \; e_2 = \partial_t, \; e_3 = -u\partial_u + kx\partial_x, \; e_4 = \partial_u, \quad (k \neq 0);$$

$$\langle e_2\rangle\ :\ u=C_1x^{1-\beta}+C_2,\quad \text{якщо}\ \ \beta\neq 1,$$

$$u=C_1\ln x+C_2,\quad \text{якщо}\ \ \beta=1,\ C_1\neq 0,\ C_2\in R;$$

$$\langle e_3\rangle\ :\ u=\pm k|x|^{-\frac{1}{k}}|C_1+(k^{-1}\pm\beta)t|^{\frac{1}{k}},$$

$$C_1\in R,\ \beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ k\neq 0,2;$$

$$\langle e_1\rangle\ :\ u=\varphi(\omega),\ \omega=(tx^{-1})^{\frac{1}{k}},$$

$$\int\frac{d\varphi'}{|\varphi'|[|k|\beta\pm(k+1)\mp|k|^{2-k}|\varphi'|^k]}=-\ln\omega+C_1;$$

$$\beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ k\neq 0,2,\ C_1\in R,$$

$$\langle e_1+\alpha e_3\rangle\ :\ u=t^{\alpha}\varphi(\omega),\quad \omega=xt^{\alpha k-1},$$

$$\alpha\neq 0,\ \beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ k=0,2,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\omega\varphi''+\beta|\varphi'|-\alpha\omega^k|\varphi'|^k\varphi-(\alpha k-1)\omega^{k+1}\varphi'|\varphi'|^k=0;$$

$$\langle e_1+\epsilon e_4\rangle\ :\ u=\varphi(\omega)-\epsilon\ln t,\quad \epsilon=\pm 1,\ \beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ k\neq 0,2,$$

$\omega=tx^{-1}$, функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi''+\omega^{-1}(\beta|\varphi'|+2\varphi')-\omega^{k-2}|\varphi'|^k(\varphi'-\epsilon\omega^{-1})=0;$$

$$\langle e_2+\epsilon e_4\rangle\ :\ u=C_1\exp(\epsilon x)+\epsilon t+C_2,\quad \text{якщо}\ \ k=1,\ \beta=0,$$

$$\epsilon=\pm 1,\ C_1>0,\ C_2\in R,$$

$$u=\varphi(x)+\epsilon t,$$

$$\int\frac{d\varphi'}{\epsilon|1-k|^{2-k}|\varphi'|^k-k\varphi'-\beta|1-k||\varphi'|}=\frac{1}{1-k}\ln|x|+C_1,$$

$$\epsilon=\pm 1,\ k\neq 0,1,2,\ \beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ C_1\in R;$$

$$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle\ :\ u=\exp(-\epsilon t)\varphi(\omega),\quad \omega=\ln x-\epsilon kt,$$

$$\beta\neq\frac{k-1}{k-2},\ k\neq 0,2,\ \epsilon=\pm 1,$$

функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi''+\epsilon\exp(\omega)|\varphi'|^k(\varphi+k\varphi')-\varphi'+\beta|\varphi'|=0.$$

1.12. $u_t = x^{-1}u_x^{-2}u_{xx} + \beta x^{-2}u_x^{-1},\ \beta \neq \frac{5}{4},$

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x,\quad e_2 = \partial_t,\quad e_3 = -u\partial_u + 2x\partial_x,\quad e_4 = \partial_u;$$

$\langle e_2\rangle\ :\ u = C_1x^{1-\beta} + C_2,\ \beta \neq 1, \dfrac{5}{4},\ C_1 \neq 0,\ C_2 \in R;$

$u = C_1 \ln x + C_2,$ якщо $\beta = 1, C_1 \neq 0,\ C_2 \in R;$

$\langle e_3\rangle\ :\ u = \pm|x|^{-\frac{1}{2}}|C_1 + (6-4\beta)t|^{\frac{1}{2}},\ \beta \neq \dfrac{5}{4},\ C_1 \in R;$

$\langle e_1\rangle\ :\ u = \varphi(\omega),\ \omega = \sqrt{|tx^{-1}|},$

$\displaystyle\int \frac{d\varphi'}{\varphi'[(\varphi')^2 - 6 + 4\beta]} = \frac{1}{2}\ln\omega + C_1,\ \beta \neq \frac{5}{4}, C_1 \in R;$

$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle\ :\ u = t^\alpha\varphi(\omega),\quad \omega = xt^{2\alpha-1},$

функція φ задовольняє рівняння

$\omega\varphi'' + (1-2\alpha)\omega^3(\varphi')^3 - \alpha\omega^2(\varphi')^2\varphi + \beta\varphi' = 0,\quad \beta \neq \dfrac{5}{4},\ \alpha \neq 0;$

$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle\ :\ u = \varphi(\omega) - \epsilon\ln t,\quad \omega = tx^{-1},$

функція φ задовольняє рівняння

$\omega\varphi'' - \omega(\varphi')^3 + \epsilon(\varphi')^2 + (2-\beta)\varphi' = 0,$

$\varphi' \neq 0,\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \dfrac{5}{4};$

$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle\ :\ u = \varphi(\xi) + \epsilon t,\ \xi = x^{-1},$

де $\displaystyle\varphi = \int \frac{d\xi}{C_1 - \epsilon\ln|\xi|} + C_2,$ якщо $\beta = 2;$

$\displaystyle\int \frac{d\varphi'}{\varphi'(\epsilon\varphi' + \beta - 2)} = \ln|\xi| + C_1,$ якщо $\beta \neq 2, \dfrac{5}{4},$

$\epsilon = \pm 1,\quad C_1, C_2 \in R;$

$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle\ :\ u = \exp(-\epsilon t)\varphi(\omega),\ \omega = x\exp(-2\epsilon t),$

функція φ задовольняє рівняння

$\omega\varphi'' + 2\epsilon\omega^3(\varphi')^3 + \epsilon\omega^2(\varphi')^2 + \beta\varphi' = 0,$

$\varphi' \neq 0,\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \dfrac{5}{4}.$

1.13. $u_t = x^2 u^{-1} \exp(v) u_{xx} + (\beta - v^2) \exp\, v, v = x u^{-1} u_x, \beta \neq -2,$

$$e_1 = -t\partial_t - u\partial_u,\ e_2 = \partial_t,\ e_3 = x\partial_x,\ e_4 = xu\partial_u;$$

$\langle e_2 \rangle :\ u = C_1 |x|^\beta \exp(C_2 x + \beta - 1), C_1 \neq 0, \beta \neq -2, C_2 \in R;$

$\langle e_1 \rangle\ :\ u = t\varphi(x),\ \varphi = \exp(x\psi - 1),$

$\psi = \psi(\xi),\ \xi = x^{-1},$

$\psi = \int (1 - \ln |C_1 \xi^\beta + 1| d\xi + C_2,\ C_1 \neq 0,\ \beta \neq -2,\ C_1 \in R;$

$\langle e_1 + \alpha e_3 \rangle\ :\ u = t\varphi(\omega),\ \ \omega = xt^\alpha,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq -2,$

функція φ задовольняє рівняння

$\omega^2 \varphi^{-1} \varphi'' - \omega^2 \varphi^{-2} (\varphi')^2 - (\varphi + \alpha\omega\varphi') \exp(-\omega\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0;$

$\langle e_1 + \epsilon e_4 \rangle\ :\ u = t^{1-\epsilon x} \varphi(x),\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2,$

функція φ задовольняє рівняння

$x^2 \varphi'' - x^2 \varphi^{-1} (\varphi')^2 + \beta\varphi - (1 - \epsilon x)\varphi^2 \exp(-x\varphi^{-1}\varphi') = 0;$

$\langle e_2 + \epsilon e_4 \rangle\ :\ u = \exp(-\epsilon t x)\varphi(x),\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2,$

функція φ задовольняє рівняння

$x^2 \varphi^{-1} \varphi'' - x^2 \varphi^{-2} (\varphi')^2 + \epsilon x \varphi \exp(-x\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0;$

$\langle e_2 + \epsilon e_3 \rangle\ :\ u = \varphi(\omega),\ \omega = xe^{-\epsilon t},$

функція φ задовольняє рівняння

$\omega^2 \varphi^{-1} \varphi'' - \omega^2 \varphi^{-2} (\varphi')^2 + \epsilon\omega\varphi' \exp(-\omega\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0,$

$\epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2.$

1.14. $u_t = t^3 u_x^2 u_{xx} + t u_x^2,$

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x,\ e_2 = \partial_x,\ e_3 = -u\partial_u + \frac{1}{2} t\partial_t,\ e_4 = \partial_u;$$

$\langle e_3 \rangle\ :\ u = t^{-2} \varphi(x),\ (\varphi')^2 (\varphi'' + 1) + 2\varphi = 0;$

$\langle e_1 \rangle\ :\ u = \int f(\omega) d\omega + C_1,\ \omega = t^{-2} x^2,$

$$\omega[4f^2+2f+1]\exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4f+1}{\sqrt{3}}\right]=C_2,$$
$$C_1, C_2 \in R, \quad C_2 \neq 0;$$

$\langle e_1+\alpha e_3\rangle$: якщо $\alpha=2$, то $u=x^2\varphi(t)$,

$$\varphi[4t^4\varphi^2+2t^2\varphi+1]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4t^2\varphi+1}{\sqrt{3}}\right]=C_1,$$

$C_1\neq 0$,

якщо $\alpha\neq 0, 2$, то $u=t^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}\varphi(\omega)$, $\omega=t^{-2}|x|^{2-\alpha}$,

функція φ задовольняє рівняння

$$(2-\alpha)^4\omega^{\frac{4-4\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')\varphi''+(2-\alpha)^3(1-\alpha)\omega^{\frac{2-3\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')^3+$$
$$+(2-\alpha)^2\omega^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')^2-\frac{2\alpha}{2-\alpha}\varphi+2\omega\varphi'=0;$$

$\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$: $u=\varphi(\omega)-\epsilon\ln t$, $\omega=t^{-2}x^2$,

функція φ задовольняє рівняння

$$16\omega^2(\varphi')^2\varphi''+8\omega(\varphi')^3+4\omega(\varphi')^2+2\omega\varphi'+\epsilon=0, \quad \epsilon=\pm 1;$$

$\langle e_2+\epsilon e_4\rangle$: $u=\frac{1}{2}t^2+\epsilon x+C_1$, $\epsilon=\pm 1$, $C_1\in R$;

$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$: $u=t^{-2}\varphi(\omega)$, $\omega=\epsilon x-2\ln t$,

функція φ задовольняє рівняння

$$(\varphi')^2(\varphi''+1)+2\varphi'+2\varphi=0, \ \epsilon=\pm 1.$$

Відзначимо, що редуковане рівняння, яке відповідає підалгебрі $\langle e_3\rangle$, заміною змінних

$$x=\bar\varphi-\bar x, \qquad \varphi=\bar x^2, \ \bar\varphi=\bar\varphi(\bar x),$$

зводиться до рівняння

$$\bar\varphi''=\frac{1}{4\bar x}(\bar\varphi'-1)[((\bar\varphi'-1)^2+1)^2+3],$$

яке інтегрується двома квадратурами і загальний розв'язок якого визначається із співвідношень

$$\bar\varphi=\int\psi(\bar x)d\bar x+\bar x+C_1,$$

$$\psi[(\psi^2+1)^2+3]^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\psi^2+1}{\sqrt{3}}\right]=C_2\bar{x},$$
$$C_1, C_2 \in R, \quad C_2 \neq 0.$$

1.15. $u_t = \lambda t u_{xx} + u_x \ln|tu_x|,\ \lambda \neq 0,$

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x,\ e_2 = \partial_x,\ e_3 = -u\partial_u + t\partial_x,\ e_4 = \partial_u;$$

$\langle e_3\rangle\ :\ u = \pm\exp[\lambda + C_1 t^{-1} - x t^{-1}],\ \lambda \neq 0,\ C_1 \in R;$

$\langle e_1\rangle\ :\ u = \int[\lambda \pm \exp(C_1\omega^{\lambda^{-1}})]d\omega + C_2,$

$\omega = \exp\left(-\frac{x}{t}\right),\ C_1, C_2 \in R,\ \lambda C_1 \neq 0;$

$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle\ :\ u = t^{\alpha}\varphi(\omega),\ \omega = xt^{-1} + \alpha\ln t,\quad \alpha\lambda \neq 0,$

функція φ задовольняє рівняння

$\lambda\varphi'' + \varphi'\ln|\varphi'| + (\omega - \alpha)\varphi' - \alpha\varphi = 0;$

$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle\ :\ u = \varphi(\omega) - \epsilon\ln t,\quad \omega = tx^{-1},\quad \epsilon = \pm 1,$

функція φ задовольняє рівняння

$\lambda\omega^3\varphi'' - \omega\varphi'\ln|\omega^2\varphi'| + (2\lambda\omega^2 - 1)\varphi' + \epsilon\omega^{-1} = 0,\quad \lambda \neq 0;$

$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle\ :\ u = \epsilon t(\ln t - 1) + \epsilon x + C_1,\quad \epsilon = \pm 1,\ C_1 \in R;$

$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle\ :\ u = \exp\{\frac{1}{\epsilon + t}[t(\lambda - \epsilon\ln t) +$

$+(1 + \epsilon t - \epsilon\lambda)\ln(t + \epsilon)] - x + C_1\},$

$\epsilon = \pm 1,\quad \lambda \neq 0,\quad C_1 \in R.$

Зауважимо, що ряд наведених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку допускає зниження порядку на одиницю. Також, ми не наводили окремих значень інтегралів, якщо їх не можна обчислити в загальному вигляді (для довільних параметрів).

Додаток 2. Редукція рівнянь Янга–Міллса (4.3) за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре

$$
\begin{aligned}
F_1 \ : \ \ & k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}(1+\omega^2) - (c_\mu - b_\mu\omega)(c_\gamma - b_\gamma\omega),\\
& l_{\mu\gamma} = -4\omega(g_{\mu\gamma} + b_\mu b_\gamma) + 2(b_\mu c_\gamma + c_\mu b_\gamma),\\
& m_{\mu\gamma} = -2(g_{\mu\gamma} + b_\mu b_\gamma),\\
& g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_1[g_{\mu\gamma}(c_\nu - b_\nu\omega) + g_{\nu\gamma}(c_\mu - b_\mu\omega) - 2g_{\mu\nu}(c_\gamma - b_\gamma\omega)],\\
& h_{\mu\nu\gamma} = \frac{3}{2}\epsilon_1[g_{\mu\nu}b_\gamma - g_{\mu\gamma}b_\nu];\\
F_2 \ : \ \ & k_{\mu\gamma} = -8g_{\mu\gamma} - 4(b_\mu + c_\mu)(b_\gamma + c_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma} + 4(b_\mu + c_\mu)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma,\\
& g_{\mu\nu\gamma} = 2g_{\mu\gamma}(b_\nu + c_\nu) + 2g_{\nu\gamma}(b_\mu + c_\mu) - 4g_{\mu\nu}(b_\gamma + c_\gamma),\\
& h_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\nu}b_\gamma - g_{\mu\gamma}b_\nu;\\
F_3 \ : \ \ & k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega(1+\omega) - 4\omega(b_\mu - \epsilon_2 d_\mu\sqrt{\omega})(b_\gamma - \epsilon_2 d_\gamma\sqrt{\omega}),\\
& l_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma}(2+5\omega) + 2\epsilon_2\sqrt{\omega}(4d_\mu b_\gamma + 3b_\mu d_\gamma) - 4b_\mu b_\gamma -\\
& \qquad -10\omega d_\mu d_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2d_\mu d_\gamma + \epsilon_2\omega^{-\frac{1}{2}}d_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma\omega^{-1},\\
& g_{\mu\nu\gamma} = 2\sqrt{\omega}[g_{\mu\gamma}(b_\nu - \epsilon_2 d_\nu\sqrt{\omega}) + g_{\nu\gamma}(b_\mu - \epsilon_2 d_\mu\sqrt{\omega}) -\\
& -2g_{\mu\nu}(b_\gamma - \epsilon_2 d_\gamma\sqrt{\omega})],\\
& h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[g_{\mu\gamma}(b_\nu\omega^{-\frac{1}{2}} - 3\epsilon_2 d_\nu) - g_{\mu\nu}(b_\gamma\omega^{-\frac{1}{2}} - 3\epsilon_2 d_\gamma)];\\
F_4 \ : \ \ & k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega(1-\omega) - 4\omega(b_\mu - \epsilon_3 a_\mu\sqrt{\omega})(b_\gamma - \epsilon_3 a_\gamma\sqrt{\omega}),\\
& l_{\mu\gamma} = 2g_{\mu\gamma}(5\omega - 2) - 4b_\mu b_\gamma - 10a_\mu a_\gamma\omega +
\end{aligned}
$$

$$+2\epsilon_3\sqrt{\omega}(4a_\mu b_\gamma + 3b_\mu a_\gamma),$$

$$m_{\mu\gamma} = 2g_{\mu\gamma} - 2a_\mu a_\gamma + \epsilon_3 a_\mu b_\gamma \omega^{-\frac{1}{2}} - c_\mu c_\gamma \omega^{-1},$$

$$g_{\mu\nu\gamma} = 2\sqrt{\omega}[g_{\mu\gamma}(b_\nu - \epsilon_3 a_\nu\sqrt{\omega}) + g_{\nu\gamma}(b_\mu - \epsilon_3 a_\mu\sqrt{\omega}) -$$

$$-2g_{\mu\nu}(b_\gamma - \epsilon_3 a_\gamma\sqrt{\omega})],$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[g_{\mu\gamma}(b_\nu\omega^{-\frac{1}{2}} - 3\epsilon_3 a_\nu) - g_{\mu\nu}(b_\gamma\omega^{-\frac{1}{2}} - 3\epsilon_3 a_\gamma);$$

$$F_5 \;:\; k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}(1+\omega^2) - (c_\mu - b_\mu\omega)(c_\gamma - b_\gamma\omega),$$

$$l_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega + 2(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma) -$$

$$-2\alpha^{-1}\omega(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) + 4(c_\mu - b_\mu\omega)b_\gamma$$

$$m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2b_\mu b_\gamma - 3\alpha^{-1}(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) -$$

$$-\alpha^{-2}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma),$$

$$g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_1[g_{\mu\gamma}(c_\nu - b_\nu\omega) + g_{\nu\gamma}(c_\mu - b_\mu\omega) - 2g_{\mu\nu}(c_\gamma - b_\gamma\omega),$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{3}{2}\epsilon_1(g_{\mu\gamma}b_\nu - g_{\mu\nu}b_\gamma) + \epsilon_1\alpha^{-1}[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)b_\gamma +$$

$$+(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)b_\nu];$$

$$F_6 \;:\; k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_6(1-\alpha^2)g_{\mu\gamma} - 2\epsilon_6(1-\alpha^2)(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) -$$

$$-2(1+\alpha^2)(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) - 4\alpha(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma),$$

$$l_{\mu\gamma} = -4\epsilon_6 g_{\mu\gamma} + 2(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) + 2\alpha(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma) +$$

$$+2\epsilon_6(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - 2\epsilon_6\alpha(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma),$$

$$m_{\mu\gamma} = \epsilon_6(g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma),$$

$$g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_4(1-\alpha)[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu) -$$

$$-2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5(1+\alpha)[g_{\mu\gamma}k_\nu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma],$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{\epsilon_4}{2}[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) - g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)] -$$

$$-\frac{\epsilon_5}{2}[g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma];$$

$$F_7 \;:\; k_{\mu\gamma} = -(1-\alpha^2)\omega^2 g_{\mu\gamma} - \omega^2[\alpha\epsilon_5\omega^{-\frac{1}{\alpha}}k_\mu +$$

$$+(1-\alpha)\epsilon_7 c_\mu][\alpha\epsilon_5\omega^{-\frac{1}{\alpha}}k_\gamma + (1-\alpha)\epsilon_7 c_\gamma],$$

$$l_{\mu\gamma} = (\alpha+2)(1-\alpha)\omega g_{\mu\gamma} + 2\alpha^{-1}(1-\alpha)\omega(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) +$$

$$+\epsilon_5\epsilon_7\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}[\alpha^2 k_\mu c_\gamma + (1+\alpha^2)c_\mu k_\gamma] + \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\alpha(1-\alpha)k_\mu k_\gamma +$$

$$\omega(\alpha+2)(1-\alpha)c_\mu c_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 3\alpha^{-1}(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) -$$
$$-\alpha^{-2}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - 2c_\mu c_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = \alpha\epsilon_5\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}[g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma] +$$
$$+(1-\alpha)\omega\epsilon_7[g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{3}{2}\epsilon_7[g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma] + \epsilon_7\alpha^{-1}[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)c_\gamma +$$
$$+(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)c_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)c_\nu];$$
$$F_8 \;:\; k_{\mu\gamma} = -4\epsilon_4 g_{\mu\gamma} - [k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)][k_\gamma - \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)],$$
$$l_{\mu\gamma} = -2\epsilon_4 g_{\mu\gamma} + \epsilon_4[k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)](a_\gamma - d_\gamma),$$
$$m_{\mu\gamma} = 0, \quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}[k_\nu - \epsilon_4(a_\nu - d_\nu)] +$$
$$+g_{\nu\gamma}[k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)] -$$
$$-2g_{\mu\nu}[k_\gamma - \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{1}{2}\epsilon_4[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) - g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)];$$
$$F_9 \;:\; k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma} - (k_\mu - 2\epsilon_7 c_\mu)(k_\gamma - 2\epsilon_7 c_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = -6g_{\mu\gamma} - 4(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - 2\epsilon_7(k_\mu c_\gamma - c_\mu k_\gamma) + v$$
$$+3\epsilon_7(k_\mu - 2\epsilon_7 c_\mu)c_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - 3(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(k_\nu - 2\epsilon_7 c_\nu) + g_{\nu\gamma}(k_\mu - 2\epsilon_7 c_\mu) - 2g_{\mu\nu}(k_\gamma - 2\epsilon_7 c_\gamma),$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{3}{2}\epsilon_7[g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma] + \epsilon_7[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)c_\gamma +$$
$$+(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)c_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)c_\nu];$$
$$F_{10} \;:\; k_{\mu\gamma} = 4\omega(1-\omega)g_{\mu\gamma} - \{\epsilon_4[(a_\mu - d_\mu)\omega + k_\mu] - 2\epsilon_7 c_\mu\omega\} \times$$
$$\times\{\epsilon_4[(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma] - 2\epsilon_7 c_\gamma\omega\},$$
$$l_{\mu\gamma} = 2(2-5\omega)g_{\mu\gamma} - 4(1-\omega)(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) -$$
$$-2\epsilon_4\epsilon_7\{[(a_\mu - d_\mu)\omega + k_\mu]c_\gamma - [(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma]c_\mu\},$$
$$m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma + 3(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma +$$
$$+2\epsilon_4\epsilon_7 c_\mu(a_\gamma - d_\gamma), \quad g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_4\{g_{\mu\gamma}[(a_\nu - d_\nu)\omega + k_\nu] +$$

$$+g_{\nu\gamma}[(a_\mu - d_\mu)\omega + k_\mu] - 2g_{\mu\nu}[(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma]\} -$$
$$-2\epsilon_7\omega[g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_4[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) - g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)] -$$
$$-\frac{3}{2}\epsilon_7[g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma] - \epsilon_7[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)c_\gamma +$$
$$+(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)c_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)c_\nu];$$

$$F_{11} \; : \; k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}\omega^2(1+\omega^2) - \omega^2(c_\mu - \omega b_\mu)(c_\gamma - \omega b_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = 2\omega[(1-\omega^2)g_{\mu\gamma} + a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma + c_\mu c_\gamma - \omega^2 b_\mu b_\gamma] -$$
$$-\epsilon_5\epsilon_7\omega(c_\mu - \omega b_\mu)k_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - 3(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma - a_\mu a_\gamma) +$$
$$+d_\mu d_\gamma + 2\epsilon_5\epsilon_7 c_\mu k_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_7\omega[g_{\mu\gamma}(c_\nu - \omega b_\nu) + g_{\nu\gamma}(c_\mu - \omega b_\mu) - 2g_{\mu\nu}(c_\gamma - \omega b_\gamma)],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[g_{\mu\gamma}(\epsilon_5 k_\nu - 3\epsilon_7 c_\nu) - g_{\mu\nu}(\epsilon_5 k_\gamma - 3\epsilon_7 c_\gamma)] +$$
$$+\epsilon_7[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)c_\gamma + (a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)c_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)c_\nu];$$

$$F_{12} \; : \; k_{\mu\gamma} = -4(1+\beta^2)g_{\mu\gamma} - 4(b_\mu + \beta c_\mu)(b_\gamma + \beta c_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma} + 4\alpha\beta(d_\mu a_\gamma - a_\mu d_\gamma) + 4(b_\mu + \beta c_\mu)b_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - \alpha^2(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = 2[g_{\mu\gamma}(b_\nu + \beta c_\nu) + g_{\nu\gamma}(b_\mu + \beta c_\mu) - 2g_{\mu\nu}(b_\gamma + \beta c_\gamma)],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -g_{\mu\gamma}b_\nu + g_{\mu\nu}b_\gamma + \alpha[(d_\mu a_\nu - a_\mu d_\nu)c_\gamma +$$
$$+(d_\nu a_\gamma - a_\nu d_\gamma)c_\mu + +(d_\gamma a_\mu - a_\gamma d_\mu)c_\nu];$$

$$F_{13} \; : \; k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_6(\alpha^2 - \beta^2)g_{\mu\gamma} - 2\epsilon_6(\alpha^2 - \beta^2)(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) -$$
$$-2(\alpha^2 + \beta^2)(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) - 4\alpha\beta(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = -4\alpha\epsilon_6 g_{\mu\gamma} - 4\epsilon_6\beta\alpha^{-1}(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma) +$$
$$+2\alpha(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) + +2\beta(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma) +$$
$$+2\alpha\epsilon_6(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - 2\epsilon_6\beta(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma),$$
$$m_{\mu\gamma} = \epsilon_6[g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma - \alpha^{-2}(b_\mu b_\gamma + c_\mu c_\gamma)],$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_4(\alpha - \beta)[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu) -$$

$$-2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)] + \epsilon_5(\alpha+\beta)[g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma],$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{1}{2}\epsilon_4[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) - g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)] -$$

$$-\frac{1}{2}\epsilon_5(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma) + \frac{1}{2\alpha}[(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu)(\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) -$$

$$-\epsilon_5 k_\gamma) + (b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)(\epsilon_4(a_\mu - d_\mu) - \epsilon_5 k_\mu) +$$

$$+(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)(\epsilon_4(a_\nu - d_\nu) - \epsilon_5 k_\nu)];$$

$$F_{14} \;:\; k_{\mu\gamma} = -4\epsilon_4 g_{\mu\gamma} - 2(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) + 2\epsilon_4(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma),$$

$$l_{\mu\gamma} = -2\epsilon_4 g_{\mu\gamma} - 2\epsilon_4(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma) +$$

$$+\epsilon_4[k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)](a_\gamma - d_\gamma),$$

$$m_{\mu\gamma} = 0, \quad g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma -$$

$$-\epsilon_4[g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu) - 2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)],$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{1}{2}\epsilon_4(g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu) - g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma)] +$$

$$+\frac{1}{2}\epsilon_4[(b_\mu c_\nu - c_\mu c_\nu)(a_\gamma - d_\gamma) +$$

$$+(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)(a_\mu - d_\mu) + (b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu)(a_\nu - d_\nu)];$$

$$F_{15} \;:\; k_{\mu\gamma} = -4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma} - 4(b_\mu + \alpha c_\mu)(b_\gamma + \alpha c_\gamma) +$$

$$+4e^{\frac{1}{2}\omega}[k_\mu(b_\gamma + \alpha c_\gamma) + k_\gamma(b_\mu + \alpha c_\mu)] - 4e^\omega k_\mu k_\gamma,$$

$$l_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma} + 4\alpha^2(d_\mu a_\gamma - a_\mu d_\gamma) + 2e^{\frac{1}{2}\omega}b_\mu k_\gamma +$$

$$+4(b_\mu + \alpha c_\mu)b_\gamma + 2\alpha e^{\frac{1}{2}\omega}c_\mu k_\gamma - 2e^\omega k_\mu k_\gamma,$$

$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - \alpha^2(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma,$$

$$g_{\mu\nu\gamma} = 2[g_{\mu\gamma}(b_\nu + \alpha c_\nu - e^{\frac{1}{2}\omega}k_\nu) + g_{\nu\gamma}(b_\mu + \alpha c_\mu - e^{\frac{1}{2}\omega}k_\mu) -$$

$$-2g_{\mu\nu}(b_\gamma + \alpha c_\gamma - e^{\frac{1}{2}\omega}k_\gamma)],$$

$$h_{\mu\nu\gamma} = -g_{\mu\gamma}b_\nu + g_{\mu\nu}b_\gamma + \alpha[(d_\mu a_\nu - a_\mu d_\nu)c_\gamma +$$

$$+(d_\nu a_\gamma - a_\nu d_\gamma)c_\mu + (d_\gamma a_\mu - a_\gamma d_\mu)c_\nu];$$

$$F_{16} \;:\; k_{\mu\gamma} = -4[(1-\alpha)^2 + \beta^2]g_{\mu\gamma} - 4[\alpha k_\mu + (1-\alpha)b_\mu + \beta c_\mu] \times$$

$$\times[\alpha k_\gamma + (1-\alpha)b_\gamma + \beta c_\gamma],$$

$$l_{\mu\gamma} = 4(1-\alpha)g_{\mu\gamma} + 4(1-\alpha)(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) -$$

$$-4\alpha(k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu) - 2[\alpha k_\mu + (1-\alpha)b_\mu + \beta c_\mu][k_\gamma - 2b_\gamma],$$

$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma -$$
$$-2(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) + 2b_\mu k_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = 2\alpha[g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma] + 2(1-\alpha)[g_{\mu\gamma}b_\nu +$$
$$+g_{\nu\gamma}b_\mu - 2g_{\mu\nu}b_\gamma] + 2\beta(g_{\mu\gamma}c_\nu + g_{\nu\gamma}c_\mu - 2g_{\mu\nu}c_\gamma),$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\gamma}k_\nu - g_{\mu\nu}k_\gamma) - (g_{\mu\gamma}b_\nu - g_{\mu\nu}b_\gamma) +$$
$$+(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)b_\gamma + (a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)b_\nu;$$

$$F_{17} \; : \; k_{\mu\gamma} = -4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma} - [k_\mu - 2b_\mu + 2\alpha c_\mu][k_\gamma - 2b_\gamma + 2\alpha c_\gamma],$$
$$l_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma} - 4(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) + 2(b_\mu k_\gamma - k_\mu b_\gamma) +$$
$$+2(k_\mu - 2b_\mu + 2\alpha c_\mu)b_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - 2(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - a_\mu a_\gamma - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma + d_\mu d_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}[k_\nu - 2b_\nu + 2\alpha c_\nu] + g_{\nu\gamma}[k_\mu - 2b_\mu + 2\alpha c_\mu] -$$
$$-2g_{\mu\nu}[k_\gamma - 2b_\gamma + 2\alpha c_\gamma], \quad h_{\mu\nu\gamma} = -g_{\mu\gamma}b_\nu + g_{\mu\nu}b_\gamma +$$
$$+(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)b_\gamma + (a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)b_\nu;$$

$$F_{18} \; : \; k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma} - (k_\mu + 2c_\mu)(k_\gamma + 2c_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = 2(b_\mu k_\gamma - k_\mu b_\gamma) + 2(k_\mu + 2c_\mu)b_\gamma,$$
$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - 2(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - a_\mu a_\gamma - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma + d_\mu d_\gamma,$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(k_\nu + 2c_\nu) + g_{\nu\gamma}(k_\mu + 2c_\mu) - 2g_{\mu\nu}(k_\gamma + 2c_\gamma),$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -g_{\mu\gamma}b_\nu + g_{\mu\nu}b_\gamma + (a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)b_\gamma +$$
$$+(a_\nu d_\gamma - d_\nu a_\gamma)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - d_\gamma a_\mu)b_\nu;$$

$$F_{19} \; : \; k_{\mu\gamma} = 4\omega^2(\epsilon_6\omega - 1)g_{\mu\gamma} - \omega^2[2b_\mu - \sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\mu - d_\mu) + \epsilon_5 k_\mu] \times$$
$$\times[2b_\gamma - \sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5 k_\gamma)],$$
$$l_{\mu\gamma} = 4\epsilon_6\omega^2 g_{\mu\gamma} + 2\omega\sqrt{\omega}[\epsilon_5 k_\mu + \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)]b_\gamma -$$
$$-2\omega^2[a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma + \epsilon_6(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma)],$$
$$m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}b_\mu[\epsilon_5 k_\gamma + \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)] -$$
$$-\frac{1}{2}\epsilon_6\omega(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) + \frac{1}{2}\omega(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma),$$
$$g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}\omega[2b_\nu - \sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\nu - d_\nu) + \epsilon_5 k_\nu)] +$$

$$+g_{\nu\gamma}\omega[2b_\mu-\sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\mu-d_\mu)+\epsilon_5k_\mu]-$$
$$-2g_{\mu\nu}\omega[2b_\gamma-\sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma)+\epsilon_5k_\gamma],$$
$$h_{\mu\nu\gamma}=-(g_{\mu\gamma}b_\nu-g_{\mu\nu}b_\gamma)+\frac{1}{4}\sqrt{\omega}[g_{\mu\gamma}(\epsilon_5k_\nu+\epsilon_1(a_\nu-d_\nu))-$$
$$-g_{\mu\nu}(\epsilon_5k_\gamma+\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma)];$$

$$F_{20}\ :\ k_{\mu\gamma}=4\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2g_{\mu\gamma}-2\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-$$
$$-(1+\alpha)^2\omega^{2-\frac{1}{\alpha}}k_\mu k_\gamma-(1-\alpha)^2(a_\mu-d_\mu)(a_\gamma-d_\gamma)\omega^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}},$$
$$l_{\mu\gamma}=-\epsilon_8(1+\alpha)(2\alpha-1)\omega g_{\mu\gamma}+$$
$$+4\alpha^{-1}(\alpha^2-1)\epsilon_8\omega(a_\mu d_\gamma-a_\gamma d_\mu)-$$
$$-\alpha^{-1}\omega[(\alpha^2-1)(\alpha+1)k_\mu k_\gamma\omega^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}+$$
$$+\epsilon_8(1+\alpha)(1-\alpha-\alpha^2)k_\mu(a_\gamma-d_\gamma)+$$
$$+\epsilon_8(1-\alpha)(\alpha^2-1)(a_\mu-d_\mu)k_\gamma+$$
$$+(1-\alpha)(1-\alpha-\alpha^2)(a_\mu-d_\mu)(a_\gamma-d_\gamma)\omega^{\frac{1}{\alpha}}],$$
$$m_{\mu\gamma}=(2\alpha)^{-1}[(1+\alpha)\epsilon_8(a_\mu d_\gamma-a_\gamma d_\mu)+$$
$$+\epsilon_8\alpha^{-1}(1+\alpha)(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-(2\alpha)^{-1}(1-\alpha)(1-3\alpha)\omega^{\frac{1}{\alpha}}\times$$
$$\times(a_\mu-d_\mu)(a_\gamma-d_\gamma)-(2\alpha)^{-1}(1+\alpha)^2k_\mu k_\gamma\omega^{-\frac{1}{\alpha}}],$$
$$g_{\mu\nu\gamma}=\epsilon_5g_{\mu\gamma}\omega[(1+\alpha)k_\nu\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}+\epsilon_8(1-\alpha)(a_\nu-d_\nu)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}]+$$
$$+\epsilon_5g_{\nu\gamma}\omega[(1+\alpha)k_\mu\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}+\epsilon_8(1-\alpha)(a_\mu-d_\mu)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}]-$$
$$-2\epsilon_5g_{\mu\nu}\omega[(1+\alpha)k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}+\epsilon_8(1-\alpha)(a_\gamma-d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}],$$
$$h_{\mu\nu\gamma}=(4\alpha)^{-1}\epsilon_5\{g_{\mu\gamma}[(1-3\alpha)\epsilon_8(a_\nu-d_\nu)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}-$$
$$-(1+\alpha)k_\nu\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}]-g_{\mu\nu}[(1-3\alpha)\epsilon_8(a_\gamma-d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}-$$
$$-(1+\alpha)k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}]\};$$

$$F_{21}\ :\ k_{\mu\gamma}=-k_\mu k_\gamma,$$
$$l_{\mu\gamma}=\epsilon_9k_\mu(c_\gamma\omega-b_\gamma)+2\epsilon_9k_\gamma(c_\mu\omega-b_\mu),$$
$$m_{\mu\gamma}=-2g_{\mu\gamma}(1+\omega^2)-3(a_\mu d_\gamma-a_\gamma d_\mu)(1+\omega^2)+$$
$$+2\epsilon_9\omega(k_\mu b_\gamma-k_\gamma b_\mu)-(1+\omega^2)(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-k_\mu k_\gamma-$$
$$-2(c_\mu\omega-b_\mu)(c_\gamma\omega-b_\gamma)+\epsilon_9k_\mu c_\gamma,$$

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}k_\nu + g_{\nu\gamma}k_\mu - 2g_{\mu\nu}k_\gamma, \\
& h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{3}{2}\epsilon_9[g_{\mu\gamma}(c_\nu\omega - b_\nu) - g_{\mu\nu}(c_\gamma\omega - b_\gamma)] + \\
& +(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)(c_\gamma\omega - b_\gamma) + (a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)(c_\mu\omega - b_\mu) + \\
& +(a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)(c_\nu\omega - b_\nu) - \\
& -(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)c_\gamma - (k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu)c_\mu - (k_\gamma b_\mu - k_\mu b_\gamma)c_\nu;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{22} \ : \ & k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_5 g_{\mu\gamma} - (a_\mu - d_\mu + \epsilon_5 k_\mu)(a_\gamma - d_\gamma + \epsilon_5 k_\gamma), \\
& l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = 0, \\
& g_{\mu\nu\gamma} = g_{\mu\gamma}(a_\nu - d_\nu + \epsilon_5 k_\nu) + g_{\nu\gamma}(a_\mu - d_\mu + \epsilon_5 k_\mu) - \\
& -2g_{\mu\nu}(a_\gamma - d_\gamma + \epsilon_5 k_\gamma), \quad h_{\mu\nu\gamma} = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{23} \ : \ & k_{\mu\gamma} = -(16 + \omega^2)g_{\mu\gamma} - 16b_\mu b_\gamma - \omega^2 c_\mu c_\gamma + 4\omega(b_\mu c_\gamma + c_\mu b_\gamma), \\
& l_{\mu\gamma} = -4\omega g_{\mu\gamma} + \omega(a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma) + 8(b_\mu c_\gamma + b_\gamma c_\mu) - 4\omega c_\mu c_\gamma, \\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - \frac{3}{2}(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - \frac{1}{4}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma), \\
& g_{\mu\nu\gamma} = \epsilon_7[(g_{\mu\gamma}(4b_\nu - \omega c_\nu) + g_{\nu\gamma}(4b_\mu - \omega c_\mu) - \\
& -2g_{\mu\nu}(4b_\gamma - \omega c_\gamma)], \\
& h_{\mu\nu\gamma} = -\frac{3}{2}\epsilon_7(g_{\mu\gamma}c_\nu - g_{\mu\nu}c_\gamma) + \frac{1}{2}\epsilon_7[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)c_\gamma + \\
& +(a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)c_\mu + (a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)c_\nu];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{24} \ : \ & k_{\mu\gamma} = 4\omega(1 - 36\omega)g_{\mu\gamma} - \{\sqrt{|\omega|}(\frac{1}{2}k_\mu + 2\epsilon_{10}(a_\mu - d_\mu)) - \\
& -12\epsilon_{10}\omega b_\mu\}\{\sqrt{|\omega|}(\frac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma) - 12\epsilon_{10}\omega b_\gamma\}, \\
& l_{\mu\gamma} = 2(1 - 144\omega)g_{\mu\gamma} - 48\omega(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - \\
& -8\epsilon_{10}\sqrt{|\omega|}(k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu) + 16\sqrt{|\omega|}[b_\mu(a_\gamma - d_\gamma) - \\
& -(a_\mu - d_\mu)b_\gamma] - \{\sqrt{|\omega|}[\frac{1}{2}k_\mu + 2\epsilon_{10}(a_\mu - d_\mu)] - 12\epsilon_{10}\omega b_\mu\} \times \\
& \times\{-24\epsilon_{10}b_\gamma + (2\sqrt{|\omega|})^{-1}\epsilon_{10}[\frac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma)]\}, \\
& m_{\mu\gamma} = -32g_{\mu\gamma} - 32b_\mu b_\gamma - 24(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - 4(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma), \\
& g_{\mu\nu\gamma} = \sqrt{|\omega|}[g_{\mu\gamma}(\frac{1}{2}k_\nu + 2\epsilon_{10}(a_\nu - d_\nu)) + \\
& +g_{\nu\gamma}(\frac{1}{2}k_\mu + 2\epsilon_{10}(a_\mu - d_\mu)) - 2g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma))] -
\end{aligned}
$$

$$-12\epsilon_{10}\omega[g_{\mu\gamma}b_\nu + g_{\nu\gamma}b_\mu - 2g_{\mu\nu}b_\gamma],$$
$$h_{\mu\nu\gamma} = -6\epsilon_{10}[g_{\mu\gamma}b_\nu - g_{\mu\nu}b_\gamma] + 2\epsilon_{10}[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)b_\gamma +$$
$$+(a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)b_\mu + (a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma)b_\nu].$$

Значення α, β такі ж, як і в (4.14). Тут $\epsilon_k = 1$ при $\varphi > 0$, $\epsilon_k = -1$ при $\varphi < 0$. Значення функцій φ для кожного k наведено в додаткові 3.

Додаток 3. Симетрійна редукція самодуальних $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса

3.1. $P(1,3)$—інваріантна редукція

L_1: $G_\mu = d_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = 0;$

L_2: $G_\mu = a_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = 0;$

L_3: $G_\mu = k_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = 0;$

L_4: $G_\mu = \varepsilon[a_\mu - d_\mu + k_\mu\omega], \quad H_{\mu\nu\gamma} = -\varepsilon[(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)k_\gamma +$
$+\alpha(k_\nu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\mu) - k_\mu(b_\gamma c_\mu - c_\gamma b_\nu))];$

L_5: $G_\mu = c_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon(a_\mu d_\nu - d_\mu a_\nu)k_\gamma;$

L_6: $G_\mu = c_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = (a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu)b_\nu - (a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)b_\mu;$

L_7: $G_\mu = b_\mu - \varepsilon k_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = (a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu)b_\nu - (a_\nu d_\gamma - a_\gamma d_\nu)b_\mu;$

L_8: $G_\mu = 2c_\mu\sqrt{\omega}, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\{(c_\mu b_\nu - c_\nu b_\mu)b_\gamma -$
$-\alpha[(d_\mu a_\gamma - a_\mu d_\gamma)b_\nu - (d_\nu a_\gamma - a_\nu d_\gamma)b_\mu]\};$

L_9: $G_\mu = d_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = a_\mu(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma) - a_\nu(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma);$

L_{10}: $G_\mu = a_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = (b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma)d_\nu - (b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)d_\mu;$

L_{11}: $G_\mu = a_\mu - d_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}[(b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)k_\mu - (b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma)k_\nu];$

L_{12}: $G_\mu = k_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \omega^{-1}\{(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma -$
$-\alpha[(k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu)c_\nu - (k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu)c_\mu]\};$

L_{13}: $G_\mu = k_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = (k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu)c_\nu - (k_\nu b_\gamma - k_\gamma b_\nu)c_\mu;$

L_{14}: $G_\mu = 4b_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(b_\mu k_\nu - b_\nu k_\mu)k_\gamma;$

L_{15}: $G_\mu = 4(\alpha b_\mu - c_\mu), \quad H_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2}(b_\mu k_\nu - b_\nu k_\mu)k_\gamma;$

L_{16}: $G_\mu = 2c_\mu\sqrt{\omega}, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \epsilon(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma - \frac{1}{\sqrt{\omega}}(b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu)b_\gamma;$

L_{17}: $G_\mu = k_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = (1+\omega(\omega+\alpha))^{-1}\{2(b_\nu c_\mu - b_\mu c_\nu)k_\gamma +$
$+(k_\mu c_\nu - k_\nu c_\mu)b_\gamma + (k_\nu b_\mu - k_\mu b_\nu)c_\gamma +$
$+(\alpha+\omega)(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma + \omega(k_\mu c_\nu - k_\nu c_\mu)c_\gamma\}$;

L_{18}: $G_\mu = \varepsilon(k_\mu\omega - a_\mu - d_\mu)$,
$H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon[(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma + (a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma]$;

L_{19}: $G_\mu = c_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon[(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma + (a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma]$;

L_{20}: $G_\mu = \varepsilon k_\mu - c_\mu, H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma - (k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma]$;

L_{21}: $G_\mu = \varepsilon\alpha k_\mu - c_\mu, \quad H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon[(a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma - (k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma]$;

L_{22}: $G_\mu = \varepsilon(k_\mu\omega - a_\mu - d_\mu)$,
$H_{\mu\nu\gamma} = \varepsilon\{(k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu)b_\gamma + (k_\mu c_\nu - k_\nu c_\mu)c_\gamma +$
$+\alpha[(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma)k_\nu - (b_\nu c_\gamma - c_\nu b_\gamma)k_\mu] + (a_\mu d_\nu - a_\nu d_\mu)k_\gamma\}$;

Тут $\varepsilon = 1$ для $kx > 0$ та $\varepsilon = -1$ для $kx < 0$. Значення параметрів α, β наведені в (4.11).

3.2. $\tilde{P}(1,3)$—інваріантна редукція

F_1 : $G_\gamma = \epsilon_1(c_\gamma - b_\gamma\omega), \quad H_\gamma = -\epsilon_1 b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = 0$;

F_2 : $G_\gamma = 2(b_\gamma + c_\gamma), \quad H_\gamma = -b_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = (b_\delta c_\sigma - b_\sigma c_\delta)c_\gamma$;

F_3 : $G_\gamma = 2\sqrt{\omega}(b_\gamma - \epsilon_2\sqrt{\omega}d_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_2 d_\gamma$,
$S_{\delta\sigma\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\omega}}(c_\sigma b_\delta - b_\sigma c_\delta)c_\gamma$;

F_4 : $G_\gamma = 2\sqrt{\omega}(b_\gamma - \epsilon_3\sqrt{\omega}a_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_3 a_\gamma$,
$S_{\delta\sigma\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\omega}}(c_\sigma b_\delta - b_\sigma c_\delta)c_\gamma$;

F_5 : $G_\gamma = \epsilon_1(c_\gamma - b_\gamma\omega), \quad H_\gamma = -\epsilon_1 b_\gamma$,
$S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_1\alpha^{-1}[b_\sigma(d_\delta a_\gamma - d_\gamma a_\delta) - b_\delta(d_\sigma a_\gamma - d_\gamma a_\sigma)]$;

F_6 : $G_\gamma = \epsilon_4(1-\alpha)(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5(1+\alpha)k_\gamma$,
$H_\gamma = -\dfrac{1}{2}\epsilon_6[\epsilon_5(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_4 k_\gamma]$,
$S_{\delta\sigma\gamma} = \dfrac{1}{2}[\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) - \epsilon_5 k_\gamma](a_\sigma d_\delta - a_\delta d_\sigma)$;

$$F_7:\ G_\gamma=\omega[\epsilon_5\alpha k_\gamma\omega^{-\frac{1}{\alpha}}+\epsilon_7(1-\alpha)c_\gamma],\quad H_\gamma=-\epsilon_7c_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\epsilon_7\alpha^{-1}[c_\sigma(a_\gamma d_\delta-d_\gamma a_\delta)-c_\delta(a_\gamma d_\sigma-d_\gamma a_\sigma)];$$

$$F_8:\ G_\gamma=k_\gamma-\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma),\quad H_\gamma=-\frac{1}{2}\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma),$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\frac{1}{2}\epsilon_4[(a_\gamma-d_\gamma)(a_\sigma d_\delta-a_\delta d_\sigma)];$$

$$F_9:\ G_\gamma=k_\gamma-2\epsilon_7c_\gamma,\quad H_\gamma=-\epsilon_7c_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\epsilon_7[c_\sigma(a_\gamma d_\delta-d_\gamma a_\delta)-c_\delta(a_\gamma d_\sigma-d_\gamma a_\sigma)];$$

$$F_{10}:\ G_\gamma=\epsilon_4[(a_\gamma-d_\gamma)\omega+k_\gamma]-2\epsilon_7c_\gamma\omega,\quad H_\gamma=-\epsilon_7c_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma)(a_\sigma d_\delta-a_\delta d_\sigma)-\epsilon_7c_\sigma(a_\gamma d_\delta-d_\gamma a_\delta)+$$
$$+\epsilon_7c_\delta(a_\gamma d_\sigma-d_\gamma a_\sigma);$$

$$F_{11}:\ G_\gamma=\epsilon_7\omega(c_\gamma-b_\gamma\omega),\quad H_\gamma=-\epsilon_7c_\gamma,\quad S_{\delta\sigma\gamma}=\epsilon_7[(c_\sigma(a_\gamma d_\delta-d_\gamma a_\delta)-$$
$$-c_\delta(a_\gamma d_\sigma-d_\gamma a_\sigma)]-\epsilon_5k_\gamma(a_\sigma d_\delta-d_\sigma a_\delta);$$

$$F_{12}:\ G_\gamma=2(b_\gamma+\beta c_\gamma),\quad H_\gamma=-b_\gamma,\quad S_{\delta\sigma\gamma}=c_\gamma(c_\sigma b_\delta-c_\delta b_\sigma)-$$
$$-\alpha[c_\sigma(d_\delta a_\gamma-a_\delta d_\gamma)-c_\delta(d_\sigma a_\gamma-a_\sigma d_\gamma)];$$

$$F_{13}:\ G_\gamma=\epsilon_4(\alpha-\beta)(a_\gamma-d_\gamma)+\epsilon_5(\alpha+\beta)k_\gamma,$$
$$H_\gamma=-\frac{1}{2}\epsilon_6[\epsilon_4k_\gamma+\epsilon_5(a_\gamma-d_\gamma)],$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\frac{1}{2}[\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma)-\epsilon_5k_\gamma](a_\sigma d_\delta-a_\delta d_\sigma)-\frac{1}{2\alpha}[(\epsilon_4(a_\sigma-d_\sigma)-\epsilon_5k_\sigma)\cdot$$
$$\cdot(b_\delta c_\gamma-c_\delta b_\gamma)-(\epsilon_4(a_\delta-d_\delta)-\epsilon_5k_\delta)(b_\sigma c_\gamma-c_\sigma b_\gamma)];$$

$$F_{14}:\ G_\gamma=k_\gamma-\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma),\quad H_\gamma=-\frac{1}{2}\epsilon_4(a_\gamma-d_\gamma),$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=\frac{1}{2}\epsilon_4[(a_\gamma-d_\gamma)(a_\sigma d_\delta-a_\delta d_\sigma)-(a_\sigma-d_\sigma)(b_\delta c_\gamma-c_\delta b_\gamma)+$$
$$+(a_\delta-d_\delta)(b_\sigma c_\gamma-c_\sigma b_\gamma)];$$

$$F_{15}:\ G_\gamma=2(b_\gamma+\alpha c_\gamma-k_\gamma e^{\frac{1}{2}\omega}),\quad H_\gamma=-b_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=c_\gamma(c_\sigma b_\delta-c_\delta b_\sigma)-\alpha[c_\sigma(d_\delta a_\gamma-a_\delta d_\gamma)-c_\delta(d_\sigma a_\gamma-a_\sigma d_\gamma)];$$

$$F_{16}:\ G_\gamma=2[(1-\alpha)b_\gamma+\alpha k_\gamma+\beta c_\gamma],\ H_\gamma=-b_\gamma,\ S_{\delta\sigma\gamma}=c_\gamma(c_\sigma b_\delta-c_\delta b_\sigma)-$$
$$-k_\gamma(a_\sigma d_\delta-a_\delta d_\sigma)+b_\sigma(d_\delta a_\gamma-a_\delta d_\gamma)-b_\delta(d_\sigma a_\gamma-a_\sigma d_\gamma);$$

$$F_{17}:\ G_\gamma=k_\gamma-2b_\gamma+2\alpha c_\gamma,\quad H_\gamma=-b_\gamma,\quad S_{\delta\sigma\gamma}=b_\sigma(d_\delta a_\gamma-a_\delta d_\gamma)-$$
$$-b_\delta(d_\sigma a_\gamma-a_\sigma d_\gamma)+c_\gamma(c_\sigma b_\delta-c_\delta b_\sigma);$$

$$F_{18}:\ G_\gamma=k_\gamma+2c_\gamma,\quad H_\gamma=-b_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma}=b_\sigma(d_\delta a_\gamma-a_\delta d_\gamma)-b_\delta(d_\sigma a_\gamma-a_\sigma d_\gamma)+c_\gamma(c_\sigma b_\delta-c_\delta b_\sigma);$$

$$F_{19}: \; G_\gamma = 2b_\gamma\omega - \epsilon_6\omega\sqrt{\omega}(\epsilon_4 k_\gamma + \epsilon_5(a_\gamma - d_\gamma)), \quad H_\gamma = -b_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega}[\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) - \epsilon_5 k_\gamma](d_\delta a_\sigma - a_\delta d_\sigma) + c_\gamma(b_\delta c_\sigma - c_\delta b_\sigma);$$

$$F_{20}: \; G_\gamma = \epsilon_5\omega[(1+\alpha)k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(1-\alpha)(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}],$$
$$H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_5[k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}}],$$
$$S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_5[\frac{1}{2\alpha}(k_\gamma\omega^{-\frac{1}{2\alpha}} + \epsilon_8(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{2\alpha}})(a_\sigma d_\delta - d_\sigma a_\delta) +$$
$$+ b_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta)\omega^{-\frac{1}{2\alpha}}];$$

$$F_{21}: \; G_\gamma = k_\gamma, \;\; H_\gamma = -\epsilon_9[c_\gamma\omega - b_\gamma], \;\; S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_9[(c_\sigma\omega - b_\sigma)(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) -$$
$$-(c_\delta\omega - b_\delta)(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] + c_\sigma(k_\delta b_\gamma - k_\gamma b_\delta) - c_\delta(k_\sigma b_\gamma - k_\gamma b_\sigma);$$

$$F_{22}: \; G_\gamma = a_\gamma - d_\gamma + \epsilon_5 k_\gamma, \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\epsilon_5 k_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma} = \epsilon_5[b_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta) - \frac{1}{2}k_\gamma(a_\delta d_\sigma - d_\delta a_\sigma)];$$

$$F_{23}: \; G_\gamma = \epsilon_7(4b_\gamma - \omega c_\gamma), \quad H_\gamma = -\epsilon_7 c_\gamma, \quad S_{\delta\sigma\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_7[c_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\gamma a_\delta) -$$
$$- c_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] - \frac{1}{2}k_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta);$$

$$F_{24}: \; G_\gamma = \sqrt{|\omega|}[\frac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma)] - 12\epsilon_{10}\omega b_\gamma, \quad H_\gamma = -4\epsilon_{10}b_\gamma,$$
$$S_{\delta\sigma\gamma} = 2\epsilon_{10}[b_\sigma(a_\gamma d_\delta - d_\delta a_\delta) - b_\delta(a_\gamma d_\sigma - d_\gamma a_\sigma)] - \frac{1}{2}k_\gamma(k_\delta b_\sigma - k_\sigma b_\delta).$$

Тут $\epsilon_k = 1$ при $\varphi > 0$ та $\epsilon_k = -1$ при $\varphi < 0$. Значення функцій φ для кожного k наведені нижче, а значення параметрів α, β ті ж, що і в (4.14).

k	φ	k	φ
1	bx	6	$(ax)^2 - (dx)^2$
2	dx	7	cx
3	ax	8	$(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2$
4	$ax - dx$	9	$cx\,kx - bx$
5	kx	10	$4\,bx + (kx)^2$