Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ЛУТФУЛЛІН Максим Валерійович

УДК 517.95:517.91:512.81

РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГЕБР ЛІ НЕВИСОКИХ РОЗМІРНОСТЕЙ ТА ІНВАРІАНТНІ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
НІКІТІН
Анатолій Глібович
професор, д-р фіз.–мат. наук

Київ — 2004

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ ТА СКОРОЧЕНЬ

A, $A_{m,k}$	— алгебра Лі, m-вимірна алгебра Лі з порядковим номером k
$\mathrm{Aut}(A)$	— група автоморфізмів алгебри Лі A
$AE(3)$	— алгебра Лі групи Евкліда
$AO(3)$	— алгебра Лі групи поворотів
$AO(1,3)$	— алгебра Лі групи Лоренца
$AP(1,3)$	— алгебра Лі групи Пуанкаре
$\mathbb{C}$	— множина комплексних чисел
C_{ab}^{c}	— структурні константи алгебри Лі
δ_{ab}	— символ Кронекера
$\mathrm{Diff}^{R(B)}$	— множина локальних дифеоморфізмів простору змінних x, які зберігають вигляд базисних елементів реалізації $R(B)$
∂_{u_α}	— скорочене позначення для оператора диференціювання $\dfrac{\partial}{\partial u_\alpha}$
∂_{x_i}, ∂_i	— скорочене позначення для оператора диференціювання $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$
e_i	— базисні елементи алгебри Лі
$E(3)$	— група Евкліда
ε_{abc}	— абсолютно антисиметричний тензор третього порядку з $\varepsilon_{123}=1$
$g_{\alpha\beta}$	— метричний тензор простору Мінковського
$\mathrm{Int}(A)$	— група внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі A
$\mathcal{I}$	— мегаідеал
M	— n-вимірний гладкий многовид
$\mathbb{N}$	— множина натуральних чисел
$O(3)$	— група поворотів
$O(1,3)$	— група Лоренца
$P(1,3)$	— група Пуанкаре
$\mathbb{R}$	— множина дійсних чисел
$R(A,N)$	— N-а реалізація алгебри Лі A
$\mathrm{Vect}(M)$	— алгебра Лі гладких векторних полів на многовиді M

ВСТУП

Актуальність теми. Опис реалізацій алгебр Лі векторними полями вперше розглядав Софус Лі. Він виконав класифікацію всіх можливих груп Лі точкових перетворень, що діють у двовимірному комплексному або дійсному просторі без фіксованих точок [90, 93], яка еквівалентна класифікації всіх можливих реалізацій алгебр Лі в класі векторних полів у двовимірному комплексному (дійсному) просторі [79].

Результати були ефективно використані ним для розв'язання задачі групової класифікації лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними та звичайних диференціальних рівнянь [91, 92].

Відомі реалізації більш широких класів алгебр Лі дозволяють ефективно розв'язувати задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними [51, 83, 143, 74], опису гравітаційних полів загального вигляду, інваріантних відносно групи рухів та групи конформних перетворень [14, 15, 102, 34], інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (див., напр. [49, 58, 59, 75, 76, 100, 101, 124, 125, 134, 135, 136]), опису систем звичайних диференціальних рівнянь, що допускають нелінійний принцип суперпозиції [53, 127, 81, 55, 56]. Деякі інші застосування реалізацій алгебр Лі вказано, наприклад, у [79, 83].

Незважаючи на важливість застосувань, проблема повного опису реалізацій алгебр Лі векторними полями не розв'язана навіть у випадку алгебр малої розмірності.

У нещодавно опублікованій роботі С. Вафо Сох та Ф. Магомед [135], проводили класифікацію реалізацій три- та чотиривимірних дійсних алгебр Лі в просторі трьох змінних. Проте, як показано в [117], ця робота містить ряд помилок та некоректних тверджень.

Дослідженням реалізацій алгебр та супералгебр груп Галілея, Пуанкаре, Евкліда та їх застосувань до групового аналізу диференціальних рівнянь приділено значну увагу в роботах В.І. Фущича, А.Г. Нікітіна, Р.З. Жданова, В.І. Лагно, І.А. Єгорченко [86, 68, 62, 70, 72, 139, 10, 145, 142, 108, 109, 110], у роботах П. Вінтерніца та співавторів [115, 121]. Ці дослідження активно продовжуються.

Таким чином, задача класифікації реалізацій алгебр Лі у векторних полях є важливою і актуальною проблемою на сучасному етапі розвитку групових методів дослідження рівнянь математичної фізики та має ряд застосувань.

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є класифікація реалізацій векторними полями дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності не вище чотирьох, комплексних реалізацій алгебр Лі групи поворотів та групи Лоренца та побудова реалізацій алгебр Лі розширень цих груп — груп Евкліда та Пуанкаре, побудова загального вигляду систем диференціальних рівнянь першого порядку, що допускають деякі із знайдених реалізацій алгебр Лі, побудова нових розв'язків рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилася згідно із загальним планом досліджень відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках тем "Аналітичні та симетрійні методи досліджень диференціальних моделей математичної фізики" (номер держреєстрації 0198U001993) та "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Прокласифіковано реалізації дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності не вище чотирьох в просторі довільної скінченної кількості змінних.

2. Побудовано повний перелік нееквівалентних комплексних реалізацій алгебри $AO(3)$ та реалізацій алгебри $AE(3)$ в просторі трьох незалежних та n залежних комплексних змінних.

3. Проведено повну класифікацію комплексних реалізацій алгебри Лі груп Лоренца $O(1,3)$, які використано для опису одного важливого класу реалізацій алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ в просторі чотирьох дійсних незалежних та n залежних комплексних змінних.

4. Отримано повний список диференціальних інваріантів першого порядку для реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності 3 та 4 в просторах з однією незалежною змінною. Описано загальний вигляд інваріантних відносно цих алгебр систем звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано нормальні системи, що інваріантні відносно розв'язних алгебр Лі розмірності 3 та 4.

5. На прикладі однієї з реалізацій алгебри Евкліда $AE(3)$ побудовано повний перелік диференціальних інваріантів першого порядку і знайдено загальний вигляд інваріантної системи диференціальних рівнянь.

6. Побудовано ряд нових точних розв'язків рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу. Проведено відокремлення змінних у системі рівнянь Шредінгера–Максвелла.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. В роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, особистий внесок дисертанта такий. У роботі [18] В.І. Лагну належить постановка задачі та визначення загального напрямку дослідження, дисертанту — доведення теореми та побудова розв'язків рівнянь.

В роботах [12, 146] Р.З. Жданову належить постановка задачі, вибір методу дослідження та уточнення формулювань, доведення результатів проведено дисертантом.

У статті [98] дисертанту належить побудова реалізацій розглянутих алгебр, Р.О. Поповичу — введення поняття мегаідеалу та визначення плану дослідження. У роботі [117] Р.О. Поповичу належить удосконалення техніки класифікації реалізацій, поняття мегаідеалу та класифікація реалізацій простих алгебр Лі, В.М. Бойку — перевірка класифікації алгебр Лі, порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів, М.О. Нестеренко виконала класифікацію алгебр Лі в просторах з чотирма змінними, дисертанту належить класифікація розв'язних алгебр в просторах з довільною скінченною кількістю змінних.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на Всеукраїнській конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 1998), Міжнародній конференції "Modelling and Investigation of Systems Stability" (Київ, 1997), на II, III, IV та V Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1997, 1999, 2001, 2003), науковому семінарі "Алгебраїчні проблеми математичної фізики" Інституту математики НАН України (2002, керівник — професор Ю.С. Самойленко), на наукових семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (1997–2004, керівник — професор А.Г. Нікітін).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в десяти статтях [12, 18, 22, 24, 94, 96, 98, 117, 146, 95] у фахових наукових виданнях. Додатково вони висвітлені у статтях [23, 25] в збірниках наукових праць та матеріалах конференцій [97, 21].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 147 найменування трьох додатків. У основній частині міститься 6 таблиць. Повний обсяг дисертації 161 сторінок, з них список використаних джерел, додатки та таблиці займають 44 сторінки.

Короткий зміст основної частини дисертації. Основна частина дисертації складається з трьох розділів. **Розділ 1** містить огляд літератури за темою дисертаційного дослідження.

Розділ 2 присвячений побудові реалізацій алгебр Лі в класі векторних полів. У підрозділі 2.1 детально сформульована задача класифікації реалізацій алгебр Лі, наведено основні поняття та твердження, які використовуються далі.

Введено означення реалізації алгебри Лі як гомоморфізма цієї алгебри у множину векторних полів на певному гладкому многовиді. Для спрощення алгоритму побудови нееквівалентних реалізацій розрізняємо еквівалентність відносно дифеоморфізмів на многовиді (сильну) та еквівалентність яка використовує також перетворення із множини автоморфізмів розглядуваної алгебри (таку еквівалентність називаємо слабкою).

Для доведення нееквівалентності реалізацій алгебри Лі зручно використати поняття рангу підмножини векторних полів. У цьому підрозділі наводяться твердження які виражають ознаки нееквівалентності з використанням наборів рангів.

Класифікацію реалізацій алгебр Лі проведено відносно слабкої еквівалентності, тому що така класифікація має більше застосувань і може бути представлена в більш компактній формі. Сильна еквівалентність більш зручна для побудови реалізацій алгебр з використанням реалізацій їх підалгебр та перевіряється простіше, ніж слабка еквівалентність.

У підрозділі 2.2 проведена класифікація нееквівалентних реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ в класі векторних полів у просторі довільної скінченної кількості змінних.

У підрозділі 2.3 описано нееквівалентні коваріантні реалізації алгебри Лі $AE(3)$ в просторі $V = X \times U$ комплексних змінних $x = (x_1, x_2, x_3)$ та $u = (u_1, \ldots, u_n)$. При розв'язанні цієї задачі також побудовано всі нееквівалентні реалізації алгебри Лі $AO(3)$ в просторі комплексних змінних $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Змінні x та u розрізняємо як незалежні та залежні, оскільки далі проводимо побудову диференціальних рівнянь з частинними похідними, інваріантних відносно $AE(3)$.

Підрозділ 2.4 присвячений описові нееквівалентних реалізацій алгебри Лоренца $AO(1,3)$ векторними полями у n-вимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$. Оскільки $AO(1,3)$ є прямою сумою $AO_1(3) \oplus AO_2(3)$, для повного опису нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(1,3)$ в векторних полях можна використати класифікацію реалізацій алгебри $AO(3)$. Побудовано 28 нееквівалентних комплексних реалізацій алгебр $AO(1,3)$.

Виходячи із знайдених нееквівалентних наборів операторів $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$, що задовольняють комутаційні співвідношення алгебри $AO(1,3)$, побудовано нееквівалентні коваріантні реалізації алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$, яка діє в просторі $V = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^n$.

Третій розділ присвячено деяким застосуванням алгебраїчних методів до групової класифікації та побудови точних розв'язків систем диференціальних рівнянь.

У підрозділі 3.1 розв'язується задача опису найбільш загального вигляду систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $F_k(t, x, \dot{x}) = 0$, інваріантних відносно розв'язних дійсних алгебр Лі розмірності m ($m = 3$ або 4). Тут F_k — деякі гладкі функції, $k = 1, \ldots, m$. Змінну t вважаємо незалежною, а змінні $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — залежними. Похідну за t позначаємо крапкою над символом $\dot{x}_k = dx_k/dt$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_m)$.

При побудові систем диференціальних рівнянь, інваріантних відносно тривимірних розв'язних алгебр Лі, вважаємо, що у реалізаціях таких алгебр x_1, x_2, x_3 — функції від t, $x_4 = t$ — незалежна змінна. Для кожної з реалізацій алгебр $3A_1, A_{2.1} \oplus A_1, \ldots, A_{3.5}$ побудовано функціональний базис диференціальних інваріантів, який наведено у додаткові Б. Отримані повні набори диференціальних інваріантів описують загальний вигляд нееквівалентних системи трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантних відносно тривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі з точністю до довільної невиродженої заміни змінних.

За допомогою прямої перевірки переконуємося, що такі системи зводяться до нормальної форми тоді, коли ранг відповідної реалізації дорівнює трьом. У цьому випадку такі системи інтегруються в квадратурах у загальному вигляді за допомогою методу Лі.

Побудовано диференціальні інваріанти чотиривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі. Отримано класифікацію інваріантних систем чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку, які можуть бути проінтегровані методом Лі.

У підрозділі 3.2 знайдено загальний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, інваріантних відносно реалізації (2.56) алгебри Евкліда $AE(3)$.

Побудовано базис диференціальних інваріантів для цієї реалізації алгебри Евкліда у просторі трьох незалежних (x_1, x_2, x_3) та n залежних змінних $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$, знайдено також функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку реалізації розширеної алгебри Евкліда утвореної операторами (2.56) і оператором ділатації (3.14) у просторі трьох незалежних та n залежних змінних.

Якщо для деякого диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь відома допустима група Лі, то це дозволяє використати метод симетрійної редукції для побудови точних розв'язків цього рівняння (системи).

У підрозділі 3.3 повністю розв'язано задачу симетрійної редукції узагальнень рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу електромагнітного поля $A(x) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ в просторі Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$\Box A_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A_\nu) = \lambda\, A_\nu A^\nu\, A_\mu \tag{0.1}$$

до систем звичайних диференціальних рівнянь за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3) = AP(1,3) \subset\!\!\!+ \langle D\rangle = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D\rangle$, які не спряжені підалгебрам алгебри $AP(1,3)$.

Для симетрійної редукції рівнянь (0.1), використано лінійну конструкцію $A\tilde{P}(1,3)$-інваріантних анзаців запропоновану у роботах В.І. Фущича, Р.З. Жданова, В.І. Лагна [17, 20, 87, 144].

Отримано редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь і знайдено 11 класів точних розв'язків рівнянь (3.18).

У підрозділі 3.4 отримано загальний вигляд потенціалу $V(t, x_1, x_2)$, для якого двовимірне рівняння Шредінгера

$$i\psi_t + \psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} = V(t, x_1, x_2)\psi \tag{0.2}$$

допускає відокремлення змінних.

Для розв'язання задачі відокремлення змінних у (1+2)-вимірному рівнянні Шредінгера використано метод запропонований в [141, 147].

Одержано чотири класи потенціалів, які задовольняють рівняння Максвелла у вакуумі без струмів, і для яких рівняння (0.2) допускає відокремлення змінних.

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору **Анатолію Глібовичу Нікітіну** за постійну увагу та допомогу в роботі. Автор щиро вдячний доктору фізико-математичних наук Ренату Зуфаровичу Жданову та доктору фізико-математичних наук Віктору Івановичу Лагну за постановку ряду задач, розв'язання яких увійшло в дисертацію і постійну увагу до роботи.

Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

Перший розділ присвячений огляду літератури з теми дисертаційного дослідження.

Необхідним кроком для класифікації реалізацій алгебр Лі є класифікація таких алгебр, тобто класифікація можливих комутаційних співвідношень між базисними елементами та побудова їх груп автоморфізмів.

За теоремою Леві–Мальцева [7, 5] довільна скінченновимірна алгебра Лі над полем характеристики 0 є напівпрямою сумою максимального розв'язного ідеалу та напівпростої підалгебри (яку називають фактором Леві). Цей результат зводить проблему класифікації всіх алгебр Лі до таких задач:

1) класифікація всіх напівпростих алгебр Лі;

2) класифікація всіх розв'язних алгебр Лі;

3) класифікація всіх алгебр, які є напівпрямою сумою напівпростої алгебри Лі та розв'язної алгебри Лі.

Серед вказаних вище задач, тільки задача класифікації всіх напівпростих алгебр Лі повністю розв'язана. Згідно теореми Картана, довільна напівпроста комплексна або дійсна алгебра Лі може бути розкладена в пряму суму ідеалів, які є простими підалгебрами і взаємно-ортогональні відносно форми Картана–Кіллінга. Це зводить проблему класифікації напівпростих алгебр Лі до проблеми класифікації всіх неізоморфних простих алгебр Лі. Така класифікація добре відома [8].

Класифікація розв'язних алгебр Лі повністю проведена лише для алгебр Лі розмірності меншої або рівної шести. Зупинимось на конкретних результатах щодо класифікації алгебр Лі низької розмірності.

Всі можливі комплексні алгебри Лі розмірності не вище чотирьох описано ще С. Лі [93]. У 1918 році Л. Біанкі (L. Bianchi) дослідив тривимірні дійсні алгебри Лі [52]. Суттєво пізніше цю проблему розглянули Х. Лі (H.C. Lee) [88] та Г. Вринчану (G. Vranceanu) [133], отримані ними класифікації еквівалентні класифікації Біанкі. Використовуючи результати С. Лі щодо комплексних структур Г.І. Крючкович [14, 15] прокласифікував чотиривимірні дійсні алгебри Лі, які не містять тривимірного абелевого ідеалу.

Повна, коректна та зручна для використання класифікація дійсних алгебр Лі розмірності не вище чотирьох вперше отримана Г.М. Мубаракзяновим [31]. Модифікація цієї класифікації разом з описом підалгебр та інваріантів алгебр Лі невисоких розмірностей міститься в [113, 114]. Аналогічні результати наводить А.З. Петров в [34]. А саме, після цитування класифікацій Л. Біанкі [52] та Г.І. Крючковича [14] А.З. Петров прокласифікував чотиривимірні дійсні алгебри Лі, що містять тривимірні абелеві ідеали. Незалежно такі результати були також отримані в [54] та [60].

В роботах [28, 29, 30] Г.М. Мубаракзянов продовжив дослідження алгебр невисоких розмірностей. Він прокласифікував всі п'ятивимірні дійсні алгебри Лі, а також шестивимірні розв'язні алгебри з одним лінійно-незалежним ненільпотентним елементом.

Відзначимо, що для шестивимірних розв'язних алгебр Лі розмірність m нільрадикала більша або рівна 3. У випадку $m = 3$ розв'язні алгебри Лі є розкладними. Класифікація шестивимірних нільпотентних алгебр Лі ($m = 6$) була отримана К. Умлауфом (K. Umlauf) [137] над комплексними полями і узагальнена В.В. Морозовим [27] на випадок довільного поля характеристики 0.

П. Турковский (P. Turkowski) прокласифікував всі дійсні алгебри Лі розмірності до 9, які допускають нетривіальний розклад Леві [130, 132]. Він також доповнив класифікацію Мубаракзянова шестивимірних розв'язних алгебр Лі над $\mathbb{R}$, прокласифікувавши дійсні алгебри Лі розмірності 6, які містять чотиривимірний нільрадикал ($m = 4$) [131]. Результати та посилання щодо класифікації семивимірних нільпотентних алгебр Лі можуть бути знайдені в [126].

Відзначимо, що М. МакКаллум (M.A.H. MacCallum) [99] запропонував інший підхід до класифікації структурних констант алгебр Лі, який добре алгоритмізований і може бути використаний для класифікації алгебр Лі більших розмірностей з використанням комп'ютерної алгебри. В цій роботі дано огляд маловідомої літератури по класифікації алгебр Лі низької розмірності та проведено детальне порівняння існуючих класифікацій і класифікації отриманої з допомогою запропонованого автором методу.

У випадку, коли розмірність алгебри не фіксована, достатньо загальні результати отримано тільки щодо класифікації алгебр, нільрадікали яких мають спеціальну структуру (наприклад, є абелевими алгебрами [105], алгебрами Гейзенберга [123], або трикутними алгебрами [128]). Інваріанти таких алгебр, тобто їх узагальнені оператори Казиміра, досліджено в [104, 106, 128, 129].

Результати щодо автоморфізмів напівпростих алгебр Лі добре відомі (див. [7]). Побудові автоморфізмів тривимірних алгебр Лі присвячена робота А. Харві (A. Harvey) [82]. Проте, у цій роботі знайдено не повні групи автоморфізмів, а лише їх зв'язні компоненти одиниці. Зокрема, пропущено особливі випадки $a = -1$ та $b = 0$ для алгебр $A^a_{3.4}$ і $A^b_{3.5}$, коли група автоморфізмів розширяється.

Автоморфізми дійсних чотиривимірних розв'язних алгебр нещодавно опубліковано [57] з деякими неточностями, які були скоректовані після наших зауважень (більш детально про це див. у додаткові А дисертації).

Щодо класифікації реалізацій алгебр Лі найбільш важливі та елегантні результати були отримані самим С. Лі. Він прокласифікував невироджені реалізації алгебр у класі векторних полів в просторі однієї дійсної змінної, однієї комплексної змінної та двох комплексних змінних [89, 90]. Використовуючи геометричні підходи, Лі також одержав реалізації у двох дійсних змінних [93, Vol.3] (сучасний виклад цих результатів див. в [79]). У цій же роботі С. Лі вказує метод повної класифікації всіх алгебр Лі векторних полів у трьох комплексних змінних, проте не наводить відповідних результатів (фактично він подав детально клас примітивних алгебр і розділив непримітивні алгебри на 3 класи, тільки два з яких розглянуто).

Використовуючи класифікацію Лі алгебр векторних полів у двох комплексних змінних, А. Гонзалес-Лопез (A. González-López), Н. Камран (N. Kamran) та П. Олвер вивчили скінченновимірні алгебри Лі диференціальних операторів першого порядку $Q = \xi^i(x)\partial_{x_i} + f(x)$ і прокласифікували всі такі алгебри з двома комплексними змінними [80].

Г. Пост (G. Post) [118, 119, 120] дослідив скінченновимірні алгебри Лі поліноміальних векторних полів від n змінних, які містять векторні поля ∂_{x_i} $(i = \overline{1,n})$ та $x_i\partial_{x_i}$.

Ф. Махомед (F.M. Mahomed) та П. Ліч (P.G.L. Leach) [100] дослідили реалізації тривимірних дійсних алгебр Лі в класі векторних полів Лі двох змінних та використали їх для аналізу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. Аналогічні реалізації для чотиривимірних дійсних алгебр Лі, що не містять комутативної тривимірної підалгебри були розглянуті А. Шмукер (A. Schmucker) та Г. Чіховскім (G. Czichowski) [124]. Н. Черкветеллі (N. Cerquetelli), Н. Чичоли (N. Ciccoli) та М. Нучі (M. Nucci) [58] провели класифікацію реалізацій чотиривимірних алгебр Лі в просторі чотирьох змінних, але отримані результати містить помилки. Відзначимо, що згадані вище роботи [100, 124, 58] фактично повторюють результати С. Лі [93].

С. Вафо Сох (C. Wafo Soh) та Ф. Махомед [135] використали результати Г.М. Мубаракзянова [31] для класифікації реалізацій три- та чотиривимірних дійсних алгебр Лі в просторі трьох змінних та для опису систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають дійсну чотиривимірну алгебру симетрії. Проте внаслідок недосконалого алгоритму та використання некоректних замін змінних їх робота містить ряд помилок. А саме, для тривимірних алгебр Лі три реалізації пропущено, одна з наведених є еквівалентною іншому випадку та одна може бути зведена до трьох простіших випадків. Для чотиривимірних алгебр Лі 34 випадки пропущено та наведено 13 реалізацій, які еквівалентні іншим. Докладний аналіз цих помилок виконано в [117]. Зауважимо, що отримана у даній дисертації класифікація містить у сукупності 25 реалізацій для тривимірних та 154 реалізації для чотиривиміриних розв'язних алгебр Лі. Результати [135] використано у [136] для розв'язання задачі лінеаризації систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, отже результати [136] також містять помилки.

Для групового аналізу значний інтерес становлять дослідження реалізацій алгебр Лі, які є алгебрами інваріантності відомих рівнянь математичної та теоретичної фізики.

Вивченню реалізацій алгебр Галілея, Пуанкаре, Евкліда присвячено ряд робіт київських математиків (В.І. Фущич та його учні) та закордонних вчених (П. Вінтерніц із співавторами).

Коваріантні реалізації алгебр Лі груп $P(1,1)$, $\tilde{P}(1,1)$, $C(1,1)$ побудовані Г. Рідо та П. Вінтерніцом [122]. Для алгебри $AP(1,2)$ у просторі $\mathbb{R}^{1,2}\times\mathbb{R}^1$ такі реалізації прокласифікувала І.А. Єгорченко [139, 140].

В.І. Лагно [84, 85] побудував всі можливі реалізації алгебр $AP(1,1)$, $A\tilde{P}(1,1)$, $AC(1,1)$ та $AP(1,2)$ у просторі з однією залежною змінною.

У [68] досліджено лінійні та нелінійні зображення алгебр Пуанкаре, Галілея та конформної алгебри для електромагнітного поля. В.І. Фущич та Р.З. Жданов [142] знайшли нові реалізації алгебри Галілея, які разом з раніше відомими [121] складають повний опис реалізацій алгебри Галілея в просторі двох залежних та двох незалежних змінних. У роботі [42] вивчено реалізації розширеної алгебри Галілея та деяких її узагальнень у просторі двох незалежних та однієї залежної змінної.

У [62, 72] побудовано реалізації в класі векторних полів Лі алгебр Лі узагальненої групи Пуанкаре $P(n,m)$ та її розширень, які діють як групи перетворень у просторі $\mathbb{R}^{n,m}\times\mathbb{R}^1$ з $m+n$ незалежними змінними та однією залежною змінною. Доведено, що довільна реалізація групи Пуанкаре при $\max\{n,m\}\geqslant 3$ еквівалентна стандартній, в той час як конформна група $C(n,m)$ має нетривіальні нелінійні реалізації. Крім того, отримано лінійні та нелінійні реалізації для $P(2,2)$, $\tilde{P}(1,2)$, $\tilde{P}(2,2)$, $C(1,2)$ та $C(2,2)$.

У статті [10] результати [139, 72] узагальнено на простори $\mathbb{R}^{1,2}\times\mathbb{R}^k$, зокрема, побудовано всі нееквівалентні реалізації алгебр $AO(1,2)$ та $AO(2,2)$, коваріантні реалізації алгебр $AP(1,2)$ та $AP(2,2)$.

У роботах В.І. Лагна, Р.З. Жданова, В.І. Фущича [86, 145] отримано всі нееквівалентні реалізації алгебри $AO(3)$ та коваріантні реалізації алгебри Евкліда $E(3)$ у класі дійсних векторних полів. Також у [145] прокласифіковано реалізації $AO(4)$ та коваріантні реалізації алгебри Евкліда $AE(4)$ в дійсному просторі.

Відзначимо, що у дисертації при дослідженні комплексних реалізацій алгебр $AO(3)$, $AO(1,3)$ та коваріантних реалізацій алгебр $AE(3)$, $AP(1,3)$ використано методи, запропоновані у [10, 86, 145].

Класифікація реалізацій алгебр Лі має ряд застосувань. Зокрема, відомі застосування реалізацій алгебр Лі до опису квазіточно розв'язних моделей в квантовій механіці [138]. Стандартний алгоритм Лі дозволяє за відомими реалізаціями алгебри Лі будувати диференціальні рівняння, інваріантні відносно відповідної групи перетворень, використовуючи поняття диференціальних інваріантів [33, 111, 112]. Розв'язанню цієї задачі присвячено численні роботи.

Так, наприклад, у [38, 39, 69] побудовано диференціальні інваріанти другого порядку для стандартних реалізацій алгебр Евкліда, Пуанкаре, Галілея, конформної та проективної алгебри. Отримані результати застосовані до опису нових класів багатовимірних інваріантних рівнянь.

Диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень в просторах з довільною кількістю залежних і незалежних змінних вивчено в [116]. У статтях [140, 84, 85] описано загальний вигляд диференціальних рівнянь першого і другого порядку, інваріантних відносно алгебр $AP(1,1)$, $A\tilde{P}(1,1)$, $AC(1,1)$ та $AP(1,2)$ у просторі двох (трьох) незалежних та однієї залежної змінної.

Знання групи симетрій диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь дозволяє для побудови точних розв'язків цього рівняння (системи) використовувати метод симетрійної редукції (див., наприклад, [48, 37]). Для багатовимірних рівнянь це інколи єдиний ефективний спосіб отримання класів точних розв'язків.

Багато робіт вітчизняних та іноземних вчених присвячено систематичному дослідженню підгрупової структури груп інваріантності, редукції та побудові точних розв'язків важливих класів рівнянь математичної та теоретичної фізики.

Зокрема, з використанням методу симетрійної редукції отримано широкі класи точних розв'язків ряду нелінійних рівнянь, наприклад, рівнянь ейконала, д'Аламбера, Ліувілля [1, 2, 3, 77, 78], теплопровідності та Шредінгера [4, 65, 73], Монжа–Ампера [46], Борна–Інфельда [45, 61], та ряду інших нелінійних скалярних рівнянь. Використання вказаного методу дозволило також отримати розв'язки нелінійних систем диференціальних рівнянь: рівнянь газової динаміки [26, 36], рівнянь Нав'є–Стокса [35, 63, 64] та Дірака [40, 67, 71, 70], $SU(2)$ рівнянь Янга–Міллса [11, 66, 87, 144].

РОЗДІЛ 2

Реалізації алгебр Лі

Другий розділ дисертації присвячений побудові реалізацій алгебр Лі в класі векторних полів.

У підрозділі 2.1 наведено основні поняття та твердження, які використовуються далі для дослідження реалізацій. Класифікація реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ в просторі довільної скінченної кількості змінних проведена у підрозділі 2.2

Підрозділ 2.3 присвячений побудові комплексних реалізацій алгебри Лі групи поворотів $O(3)$ та алгебри Лі групи Евкліда $E(3)$. У підрозділі 2.4 знайдено всі нееквівалентні комплексні реалізації алгебри Лі $AO(1,3)$ групи Лоренца та побудовано один важливий клас реалізацій алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$.

Основні результати розділу опубліковано у статтях [22, 23, 24, 25, 94, 96, 98, 117].

2.1. Алгебри Лі та їх реалізації: основні поняття та твердження

Нехай A — m-вимірна дійсна алгебра Лі ($m \in \mathbb{N}$) і $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — її базисні елементи, комутаційні співвідношення між якими мають вигляд

$$[e_a, e_b] = C^c_{ab} e_c, \qquad a, b, c = 1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Алгебра Лі однозначно визначається співвідношеннями (2.1), або, що те ж саме, набором структурних констант C_{ab}^{c}.

При побудові нееквівалентних реалізацій розв'язних алгебр малих розмірностей у просторах довільної скінченної кількості змінних використовуємо класифікацію Г.М. Мубаракзянова: нумерація алгебр Лі малої розмірності, вибір базисних елементів і, отже, вигляд комутаційних співвідношень відповідають роботі [31].

Існує єдина з точністю до ізоморфізму одновимірна алгебра Лі A_1. Очевидно, вона є абелевою.

Розрізняють дві двовимірні алгебри Лі. Абелева алгебра є прямою сумою двох алгебр A_1. Будемо позначати її $2A_1$. Будь-яка некомутативна двовимірна алгебра Лі (яку будемо позначати $A_{2.1}$) ізоморфна алгебрі з комутаційним співвідношенням $[e_1, e_2] = e_1$.

Прямі суми одновимірної та двох двовимірних алгебр Лі утворюють два типи тривимірних розкладних дійсних алгебр Лі: $3A_1$ та $A_{2.1} \oplus A_1$. (Розкладною називають алгебру Лі, яка є прямою сумою власних ідеалів.) Тривимірні нерозкладні розв'язні дійсні алгебри Лі визначаються комутаційними співвідношеннями, наведеними в таблиці 2.1.

Існують 8 розкладних чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі $4A_1$, $A_{2.1} \oplus 2A_1$, $A_{2.1} \oplus A_{2.1}$, $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = \overline{1,5})$ та 10 нерозкладних чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі, що визначаються комутаційними співвідношеннями, наведеними в таблиці 2.2.

Зауваження щодо серій алгебр $\mathbf{A_{4.5}}$ та $\mathbf{A_{4.6}}$. Перелік всіх нееквівалентних алгебр розмірності не вище чотирьох добре відомий і використовується в численних роботах. Але виявляється, що загальновизнана класифікація цих алгебр включає певні недоліки, які далі виправляємо.

Розглянемо серію алгебр $\{A_{4.5}^{a_1,a_2,a_3} \mid a_1a_2a_3 \neq 0\}$ породжену алгебрами, для яких ненульові комутаційні співвідношення мають вигляд $[e_1, e_4] = a_1e_1$, $[e_2, e_4] = a_2e_2$, $[e_3, e_4] = a_3e_3$. Дві алгебри з цієї серії з параметрами (a_1, a_2, a_3) та $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існують дійсне число $\lambda \neq 0$ та перестановка (j_1, j_2, j_3) чисел $\{1; 2; 3\}$, що задовольняють умову $\tilde{a}_i = \lambda a_{j_i}$ $(i = \overline{1,3})$ [31].

У роботах [31, 58, 113, 114, 135] множину параметрів нормують, отримуючи умову

$$-1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_1 = 1. \tag{2.2}$$

Але умова (2.2) недостатня для виділення нееквівалентних алгебр, оскільки алгебри $A_{4.5}^{1,-1,b}$ та $A_{4.5}^{1,-1,-b}$ є еквівалентними, незважаючи на те, що їх параметри задовольняють умову (2.2), якщо $|b| \leqslant 1$. Додаткова умова $a_3 \geqslant 0$, якщо $a_2 = -1$, гарантує нееквівалентність для алгебр зі зв'язаними параметрами.

Множину параметрів зручно розбити в три підмножини залежно від кількості рівних параметрів. Кожну з цих підмножин нормуємо окремо. В результаті отримуємо три нееквівалентних випадки:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1;$$
$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 \neq 1, 0;$$
$$-1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 = 1, \qquad a_2 > 0 \ \text{ якщо } a_1 = -1.$$

Аналогічне зауваження справедливе для серії алгебр $\{A_{4.6}^{a,b} \mid \ a \neq 0\}$, що породжена алгебрами, для яких ненульові комутаційні співвідношення мають вигляд $[e_1, e_4] = ae_1$, $[e_2, e_4] = be_2 - e_3$, $[e_3, e_4] = e_2 + be_3$. Дві алгебри з цієї серії з різними параметрами (a, b) та $(\tilde{a}, \tilde{b})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\tilde{a} = -a$, $\tilde{b} = -b$. Традиційно накладають умову на параметр b:

$$b \geqslant 0, \tag{2.3}$$

що не виключає з розгляду еквівалентних алгебр вигляду $A_{4.6}^{a,0}$ та $A_{4.6}^{-a,0}$. Більш коректно використати умову $a > 0$ як обмеження для параметрів цієї серії.

Одним з основних понять, які використовуються у дисертації, є поняття реалізації алгебри Лі в класі векторних полів.

Таблиця 2.1

Нерозкладні тривимірні алгебри Лі

Алгебра	Ненульові комутаційні співвідношення
$A_{3.1}$	$[e_2, e_3] = e_1$
$A_{3.2}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$
$A_{3.3}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$
$A_{3.4}^a$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = ae_2$ $\quad (-1 \leqslant a < 1, a \neq 0)$
$A_{3.5}^b$	$[e_1, e_3] = be_1 - e_2,\ [e_2, e_3] = e_1 + be_2$ $\quad (b \geqslant 0)$

Таблиця 2.2

Чотиривимірні нерозкладні розв'язні алгебри Лі

Алгебра	Ненульові комутаційні співвідношення
$A_{4.1}$	$[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2$
$A_{4,2}^b$	$[e_1, e_4] = be_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$ $\quad (b \neq 0)$
$A_{4.3}$	$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2$
$A_{4.4}$	$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$
$A_{4,5}^{abc}$	$[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2,\ [e_3, e_4] = ce_3$ $\quad (abc \neq 0)$
$A_{4,6}^{ab}$	$[e_1, e_4] = ae_1,\ [e_2, e_4] = be_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + be_3$ $\quad (a > 0)$
$A_{4.7}$	$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$
$A_{4,8}^b$	$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1 + b)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = be_3$ $\quad (\lvert b\rvert \leqslant 1)$
$A_{4,9}^a$	$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2ae_1,\ [e_2, e_4] = ae_2 - e_3,$ $[e_3, e_4] = e_2 + ae_3$ $\quad (a \geqslant 0)$
$A_{4.10}$	$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2,\ [e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1$

Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, а $\mathrm{Vect}(M)$ — алгебра Лі гладких векторних полів вигляду

$$\xi^i(x)\partial_{x_i}, \quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in M, \quad i=1,2,\dots n, \tag{2.4}$$

із стандартним комутатором векторних полів.

Тут і далі $\partial_{x_i}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, функції $\xi^i(x)$ вважаємо довільну кількість разів диференційовними, за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування, якщо не вказано інше.

Означення 2.1. *Реалізацією* R алгебри Лі A в класі векторних полів на M називається гомоморфізм $R\colon A\to\mathrm{Vect}(M)$.

В дисертації розглядаємо лише *точні* реалізації алгебр Лі, тобто такі, для яких $\ker\varphi=\{0\}$.

Для класифікації реалізацій m-вимірної алгебри Лі A безпосереднім шляхом потрібно взяти m лінійно незалежних векторних полів загального вигляду (2.4) і накласти умову, щоб вони задовольняли комутаційні співвідношення (2.1) алгебри A. В результаті отримується система диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку для коефіцієнтів ξ^i, яку необхідно проінтегрувати і розглянути всі можливі випадки. Для кожного випадку розв'язок слід спростити використовуючи перетворення, які не змінюють вигляд комутаційних співвідношень між базисними елементами алгебри Лі.

Недоліком цього шляху є необхідність розв'язувати складну нелінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними. У іншому підході можна послідовно класифікувати реалізації підалгебр, починаючи з одновимірної підалгебри і закінчуючи алгеброю A. При класифікації реалізацій алгебр більшої розмірності використовуються реалізації її підалгебр, ізоморфних вже дослідженим алгебрам меншої розмірності.

У багатьох роботах (див., напр. [135]) реалізації алгебр Лі вивчають з точністю до еквівалентності, яка визначається дифеоморфізмами многовиду M на себе, оскільки вони не змінюють вигляд комутаційних співвідношень (2.1). Разом з тим для спрощення вигляду базисних операторів реалізації використовують заміни базису реалізації, які не змінюють комутаційних співвідношень алгебри Лі (автоморфізми алгебри Лі).

Відмінність між цими двома способами перетворення реалізації виявляється суттєвою у випадку, коли для побудови реалізацій алгебри Лі використовують реалізації її підалгебри.

У цьому розділі розрізняємо сильно та слабо еквівалентні реалізації і використовуємо підхід, що базується на понятті мегаідеалу, що був запропонований у [98, 117]. Це дозволяє значно зменшити громіздкість обчислень, доводити нееквівалентність отриманих реалізацій найпростішим шляхом і, як наслідок, уникнути помилок в класифікації.

Далі формулюємо відповідні означення.

Означення 2.2. Дві реалізації $R_1\colon A \to \mathrm{Vect}(M_1)$ та $R_2\colon A \to \mathrm{Vect}(M_2)$ називаються *сильно еквівалентними,* якщо існує дифеоморфізм f з M_1 на M_2 такий, що $R_2(v) = f_* R_1(v)$ для всіх $v \in A$. Якщо такого дифеоморфізму не існує, то реалізації R_1 та R_2 називаються *сильно нееквівалентними.*

Тут f_* — ізоморфізм з $\mathrm{Vect}(M_1)$ в $\mathrm{Vect}(M_2)$, індукований f. В рамках локального підходу, який застосовується, M можна розглядати як деяку відкриту підмножину $\mathbb{R}^n$ і всі дифеоморфізми є локальними.

Нехай $\mathrm{Aut}(A)$ — група всіх автоморфізмів алгебри A. Алгебра Лі групи $\mathrm{Aut}(A)$ збігається з алгеброю Лі $\mathrm{Der}(A)$ всіх диференціювань алгебри A. $\mathrm{Der}(A)$ містить як ідеал алгебру $\mathrm{Ad}(A)$ внутрішніх диференціювань алгебри A. Алгебра $\mathrm{Ad}(A)$ є алгеброю Лі групи внутрішніх автоморфізмів алгебри A, яку позначаємо $\mathrm{Int}(A)$.

Фіксуючи базис $\{e_\mu, \mu = \overline{1,m}\}$ у A, довільному лінійному відображенню $l : A \to A$ ставимо у відповідність матрицю $\alpha = (\alpha_{\nu\mu})_{\mu,\nu=1}^{m}$ таку, що $l(e_\mu) = \alpha_{\nu\mu} e_\nu$. Тоді кожній групі автоморфізмів алгебри A відповідає підгрупа загальної лінійної групи $GL(m)$ всіх невироджених $m \times m$ матриць над $\mathbb{R}$, а кожній алгебрі диференціювань алгебри A відповідає підалгебра загальної лінійної алгебри $gl(m)$ всіх $m \times m$ матриць.

Означення 2.3. *Мегаідеалом* алгебри A називаємо векторний підпростір алгебри A, який є інваріантним відносно довільних перетворень з $\mathrm{Aut}(A)$.

Оскільки $\mathrm{Int}(A)$ є нормальною підгрупою групи $\mathrm{Aut}(A)$, то очевидно, що будь-який мегаідеал алгебри A є підалгеброю і, більше того, ідеалом в A. Але у випадку, коли $\mathrm{Int}(A) \neq \mathrm{Aut}(A)$ можуть існувати ідеали в A, які не є мегаідеалами. Крім того, кожний мегаідеал $\mathcal{I}$ алгебри A є інваріантним відносно всіх диференціювань алгебри A: $\mathrm{Der}(A)\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, тобто він є характеристичною підалгеброю.

Обидва невласні підпростори алгебри A (сама алгебра A та підпростір, що складається лише з нульового елемента) завжди є мегаідеалами в A.

У додаткові A у вигляді таблиць A.1–A.3 для кожної розв'язної алгебри Лі A розмірності 3 та 4 наведено групу внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(A)$, групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ та мегаідеали алгебри A. Зауважимо, що наведені результати щодо груп автоморфізмів уточнюють результати [82, 57].

Нехай G — деяка підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$.

Означення 2.4. Реалізації R_1 та R_2 називаються *G-еквівалентними*, якщо існує $\varphi \in G$ та дифеоморфізм f з M_1 на M_2 такі, що $R_2(v) = f_* R_1(\varphi(v))$ для всіх $v \in A$.

Якщо $G = \mathrm{Aut}(A)$, то реалізації R_1 та R_2 називаються *слабо еквівалентними*. Обмеження реалізації R на підалгебру A_0 алгебри A називається *реалізацією, індукованою* R та позначається $R\big|_{A_0}$.

У даному розділі класифікація реалізацій алгебр Лі проводиться відносно слабкої еквівалентності, тому, що така класифікація має більше застосувань і може бути представлена в більш компактній формі. Сильна еквівалентність більш зручна для побудови реалізацій алгебр з використанням реалізацій їх підалгебр та перевіряється простіше, ніж слабка еквівалентність. Далі, якщо не вказано інше, під еквівалентністю розуміємо слабку еквівалентність.

Нехай V — підмножина $\mathrm{Vect}(M)$ і $r(x) = \dim\langle V(x)\rangle$, $x \in M$.

Означення 2.5. Загальне значення $r(x)$ на M називається *рангом* V і позначається $\operatorname{rank} V$.

Нехай $\mathcal{I}$ — мегаідеал і R_1 та R_2 — реалізації алгебри A.

Лема 2.1. *Якщо* $R_1\big|_{\mathcal{I}}$ *та* $R_2\big|_{\mathcal{I}}$ *є* $\mathrm{Aut}(A)|_{\mathcal{I}}$*-нееквівалентними, то* R_1 *та* R_2 *є слабо нееквівалентними.*

Доведення. Припустимо, що реалізації R_1 та R_2 є слабо еквівалентними, тобто існує $\varphi \in \mathrm{Aut}A$ та дифеоморфізм f з M на M такі, що $R_2(v) = f_* R_1(\varphi(v))$ для всіх $v \in A$, а отже і для $v \in \mathcal{I}$. А це означає, що $R_1\big|_{\mathcal{I}}$ та $R_2\big|_{\mathcal{I}}$ є $\mathrm{Aut}(A)|_{\mathcal{I}}$-еквівалентними. Із отриманої суперечності випливає справедливість леми.

Наслідок 2.1. Якщо $R_1\big|_{\mathcal{I}}$ та $R_2\big|_{\mathcal{I}}$ є слабо нееквівалентними, то R_1 та R_2 також є слабо нееквівалентними.

Наслідок 2.2. Якщо алгебра A має мегаідеал $\mathcal{I}$ такий, що $\operatorname{rank} R_1(\mathcal{I}) \neq \operatorname{rank} R_2(\mathcal{I})$, то реалізації R_1 та R_2 є слабо нееквівалентними.

2.2. Реалізації дійсних розв'язних алгебр Лі невисоких розмірностей

У цьому підрозділі проведена класифікація нееквівалентних реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ в класі векторних полів. Для цього використовуємо такий підхід.

Для кожної з розглядуваних алгебр знаходимо групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ та множину мегаідеалів алгебри (див. додаток А).

Вибираємо максимальну власну підалгебру B алгебри A. Найбільш простим є випадок, коли B — мегаідеал A. Серед розглянутих у цьому підрозділі алгебр тільки алгебри mA_1, $A_{3.1}$, $A_{3.1} \oplus A_1$ та $2A_{2.1}$ не містять $(m-1)$-вимірних мегаідеалів.

Припустимо, що повний список сильно нееквівалентних реалізацій підалгебри B вже побудовано. Якщо B є мегаідеалом A, а реалізації алгебри A класифікуємо тільки відносно слабкої еквівалентності, то достатньо використовувати тільки $\mathrm{Aut}(A)|_B$-нееквівалентні реалізації B. Для кожної реалізації $R(B)$ з цього списку виконуємо таку процедуру. Знаходимо множину $\mathrm{Diff}^{R(B)}$ локальних дифеоморфізмів простору змінних x, які зберігають реалізації $R(B)$. Подаємо базисний вектор $e_m \notin B$ в найбільш загальному вигляді (2.4) і вимагаємо, щоб він задовольняв комутаційні співвідношення алгебри A з базисними векторами з $R(B)$. В результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів ξ^i і, інтегруючи її, розглядаємо всі можливі випадки. Для кожного випадку зводимо розв'язок до найпростішого вигляду, використовуючи дифеоморфізми з $\mathrm{Diff}^{R(B)}$ та автоморфізми алгебри A.

Останнім кроком є перевірка нееквівалентності побудованих реалізацій. Пов'яжемо N-ту реалізацію $R(A,N)$ алгебри A із впорядкованим набором цілих чисел (r_{Nj}), де r_{Nj} дорівнює рангу базису j-го мегаідеалу $\mathcal{I}_j$ у реалізації $R(A,N)$ з $\dim \mathcal{I}_j > 1$. Реалізації, яким відповідають різні набори рангів, нееквівалентні згідно наслідку 2.2. Нееквівалентність реалізацій, відповідні набори рангів яких збігаються, необхідно доводити іншим шляхом, наприклад, методом від супротивного.

Розглянемо характерні приклади побудови реалізацій розв'язних дійсних алгебр Лі. Відзначимо, що реалізації одно- та двовимірних алгебр Лі та комутативної тривимірної алгебри відомі [93, 16, 41]. Ці результати наводимо тут для повноти класифікації, відповідні доведення будуть використані у подальшому для дослідження алгебр Лі більш високих розмірностей.

$\boldsymbol{A_1}$**.** Базис реалізації одновимірної алгебри Лі A_1 складає єдиний оператор e_1 вигляду (2.4). Згідно теоремі про спрямлювання векторних полів Лі [32], оператор e_1 якщо він не рівний тотожно нулю, зводиться до вигляду $e_1 = \partial_{\tilde{x}_1}$.

$2A_1$. Нехай оператори e_1, e_2, які складають базис алгебри $2A_1$, мають вигляд (2.4). Використовуючи теорему про спрямлювання векторних полів Лі, завжди можемо покласти $e_1 = \partial_{x_1}$. Тоді з комутаційних співвідношень $[e_1, e_2] = 0$ випливає, що коефіцієнти e_2 не залежать від x_1, тобто $e_2 = \tilde{\xi}^i(x_2, \ldots, x_n)\partial_{x_i}$. Можливі два випадки.

Випадок 1. $\operatorname{rank}\langle e_1, e_2\rangle = 2$, тобто не всі $\tilde{\xi}^j$ $(j = 2, \ldots, n)$ рівні нулю. Тоді, використовуючи заміни змінних вигляду $\tilde{x}_1 = x_1 + g^1(x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}_j = g^j(x_2, \ldots, x_n)$, де функції g^1, g^2 є розв'язками рівнянь $\xi^1 + \xi^j g^1_{x_j} = 0$, $\xi^j g^2_{x_j} = 1$, а g^l $(l = 3, \ldots, n)$ — функціонально незалежні розв'язки рівняння $\xi^j g_{x_j} = 0$, зводимо оператори e_1, e_2 до вигляду

$$e_1 = \partial_{\tilde{x}_1}, \qquad e_2 = \partial_{\tilde{x}_2}. \tag{2.5}$$

Випадок 2. $\operatorname{rank}\langle e_1, e_2\rangle = 1$, тобто e_2 має вигляд $e_2 = \xi^1(x_2, \ldots, x_n)\partial_{x_1}$, $\xi^1 \neq \mathrm{const}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\xi^1_{x_2} \neq 0$, тоді, поклавши $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = \xi^1(x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}_l = x_l$, зводимо оператори e_1, e_2 до вигляду

$$e_1 = \partial_{\tilde{x}_1}, \qquad e_2 = \tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_1}. \tag{2.6}$$

Оскільки реалізації (2.5), (2.6) мають різні ранги, то вони нееквівалентні.

$A_{2.1}$. Аналогічно розглядаємо некомутативну двовимірну алгебру Лі. Як і вище, оператор e_1 можна звести до вигляду $e_1 = \partial_{x_1}$. Тоді з комутаційних співвідношень $[e_1, e_2] = e_1$ випливає, що коефіцієнти ξ^i оператора e_2 задовольняють таку систему диференціальних рівнянь:

$$\xi^1_{x_1} = 1, \qquad \xi^j_{x_1} = 0, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Розв'язки цієї системи складають функції

$$\xi^1 = x_1 + \tilde{\xi}^1(x_2, \ldots, x_n), \qquad \xi^j = \tilde{\xi}^j(x_2, \ldots, x_n),$$

отже оператор e_2 має вигляд $e_2 = (x_1 + \tilde{\xi}^1)\partial_{x_1} + \tilde{\xi}^j\partial_{x_j}$.

Якщо всі $\tilde{\xi}^j$ рівні нулю, то e_2 очевидною заміною $\tilde{x} = x_1 + \tilde{\xi}^1$, $x_j = \tilde{x}_j$ зводиться до вигляду $e_2 = x_1\partial_{x_1}$.

Інакше, здійснивши заміну змінних $\tilde{x}_1 = x_1 + \xi^1(x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{x}_j = g^j(x_2, \ldots, x_n)$, де заміна по $\tilde{x}_j$ є "спрямлюючою" для векторного поля $\tilde{\xi}^j\partial_{x_j}$, зведемо e_2 до вигляду $e_2 = x_1\partial_{x_1} + \partial_{x_2}$.

Побудовані реалізації нееквівалентні, оскільки мають різні ранги.

Відзначимо, що при класифікації реалізацій алгебр $2A_1$ та $A_{2.1}$ не використовувалися автоморфізми алгебр, тому побудовані реалізації є сильно нееквівалентними.

Отже, справедлива така теорема.

Теорема 2.1. *Нееквівалентні реалізації одно- та двовимірних дійсних алгебр Лі у просторі довільної скінченної кількості змінних вичерпуються наведеними у таблиці 2.3.*

Таблиця 2.3

Реалізації одно- та двовимірних дійсних алгебр Лі

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
A_1	1	∂_1	
$2A_1$	1	∂_1, ∂_2	
	2	∂_1, $x_2\partial_1$	
$A_{2.1}$	1	∂_1, $x_1\partial_1 + \partial_2$	
$[e_1, e_2] = e_1$	2	∂_1, $x_1\partial_1$	

У таблицях 2.3–2.6 представлено результати класифікації слабонееквівалентних реалізацій розв'язних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ у просторі довільної скінченної кількості змінних.

При побудові таблиць використовуємо такі позначання, скорочення та домовленості.

Для кожної алгебри наведено тільки ненульові комутаційні співвідношення між базисними елементами. В тексті $R(A, N)$ позначає N-ту реалізацію алгебри A відповідно до місця у таблиці.

Сталі параметри серії розв'язних алгебр Лі (напр., $A_{4.2}^b$) позначаємо як a, b або c. Всі інші константи та функції в таблицях є параметрами серій реалізацій. Функції φ, ψ, θ — довільну кількість разів диференційовні дійсні функції, які задовольняють лише умови, які вказано в зауваженнях після відповідної таблиці. Наявність таких приміток для реалізації відмічено в останньому стовпці таблиці. Всі сталі є дійсними. Стала ε набуває тільки двох значень 0 та 1, тобто $\varepsilon \in \{0; 1\}$. Умови для інших сталих параметрів серій реалізацій дано в примітках після відповідних таблиць.

Для кожної серії розв'язних алгебр Лі записуємо спочатку "загальні" нееквівалентні реалізації (точніше, нееквівалентні серії реалізацій, параметрами яких є параметри серії алгебр), що існують для всіх допустимих значень параметрів серії алгебр. Потім записуємо "специфічні" реалізації, які існують або є нееквівалентними "загальним" реалізаціям тільки для деяких "специфічних" наборів значень параметрів. Нумерація "специфічних" реалізацій для кожного "специфічного" набору значень параметрів є продовженням нумерації для "загальних" реалізацій.

В усіх умовах еквівалентності реалізацій, які наведено в зауваженнях після таблиць, $(\alpha_{\mu\nu})$ — невироджена $(r \times r)$-матриця, де r — розмірність розглядуваної алгебри.

Твердження 2.1. *Базисні елементи нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{3.1}$ зводяться до однієї з наступних трійок операторів*

$$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + \partial_3, \tag{2.7}$$

$$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + x_3\partial_2, \tag{2.8}$$

$$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1. \tag{2.9}$$

Доведення. Алгебра $A_{3.1}$ має тільки два ненульові мегаідеали: $\mathcal{I}_1 = \langle e_1 \rangle \sim A_1$, $\mathcal{I}_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \sim A_{3.1}$. Проте, вона містить як ідеал підалгебру $\langle e_1, e_2 \rangle \sim 2A_1$, для якої побудовано дві сильно нееквівалентні реалізації $R(2A_1, N)$, $N = 1, 2$ (див. табл. 2.3). Вони можуть бути доповнені за допомогою одного базисного елемента до реалізацій $A_{3.1}$.

Випадок 1. Для реалізації $R(2A_1, 1)$ маємо $e_1 = \partial_{x_1}$, $e_2 = \partial_{x_2}$. Оператор e_3 шукаємо у загальному вигляді (2.4). З $[e_1, e_3] = 0$ випливає, що $\xi^i_{x_1} = 0$. Тоді з $[e_2, e_3] = e_1$ отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\xi^1_{x_2} = 1, \qquad \xi^j_{x_2} = 0, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Розв'язавши її, знаходимо, що оператор e_3 має вигляд

$$e_3 = (x_2 + \tilde{\xi}^1(x_3, \ldots, x_n))\partial_{x_1} + \tilde{\xi}^j(x_3, \ldots, x_n)\partial_{x_j}. \tag{2.10}$$

Тут $\tilde{\xi}^i$ — довільні гладкі функції змінних $(x_3, \ldots, x_n)$.

Для подальшого спрощення вигляду оператора (2.10) використовуємо дифеоморфізми з $\mathrm{Diff}^{R(2A_1,1)}$:

$$\begin{array}{ll} \tilde{x}_1 = x_1 + h^1(x_3, \ldots, x_n), & \tilde{x}_2 = x_2 + h^2(x_3, \ldots, x_n), \\ \tilde{x}_k = h^k(x_3, \ldots, x_n), & k = 3, \ldots, n \end{array} \tag{2.11}$$

та автоморфізми з множини $\mathrm{Aut}(A_{3.1})$ (див. табл. A.1).

Якщо не всі $\tilde{\xi}^k$ рівні нулю, то оператор (2.10) зводиться до вигляду $e_3 = x_2\partial_{x_1} + \partial_{x_3}$ в результаті виконання заміни (2.11) де $h^l\,(l = 4, \ldots, n)$ — функціонально незалежні розв'язки рівняння $\tilde{\xi}^k h_{x_k} = 0$, а функції h^1, h^2 та h^3 — частинні розв'язки рівнянь $\tilde{\xi}^1 + \tilde{\xi}^k h^1_{x_k} = 0$, $\tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi}^k h^2_{x_k} = 0$, $\tilde{\xi}^k h^3_{x_k} = 1$.Таким чином отримуємо реалізацію (2.7).

Якщо в (2.10) всі $\tilde{\xi}^k$ рівні нулю, то оператор e_3 має вигляд

$$e_3 = (x_2 + \tilde{\xi}^1(x_3, \ldots, x_n))\partial_{x_1} + \tilde{\xi}^2(x_3, \ldots, x_n)\partial_{x_2}.$$

Заміною (2.11), де $h^1 = 0, h^2 = \tilde{\xi}^1(x_3, \ldots, x_n), h^k = x_k$, він зводиться до оператора $e_3 = \tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_1} + \tilde{\xi}^2(\tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)\partial_{\tilde{x}_2}$.

Якщо $\tilde{\xi}^2 = a = \mathrm{const}$, то можемо вибрати третій базисний оператор $\tilde{e}_3 = e_3 - ae_2$. В результаті приходимо до реалізації (2.9).

Якщо ж $\tilde{\xi}^2 \neq \mathrm{const}$, то без обмеження загальності можна вважати $\tilde{\xi}^2_{x_3} \neq 0$, тоді виконавши заміну $\hat{x}_3 = \tilde{\xi}^2$, $\hat{x}_m = \tilde{x}_m$, $m \neq 3$, отримаємо реалізацію (2.8).

Випадок 2. Для реалізації $R(2A_1, 2)$ маємо $e_1 = \partial_{x_1}, e_2 = x_2\partial_{x_1}$. Підставивши оператор e_3 вигляду (2.4) у комутаційні співвідношення $[e_1, e_3] = 0$ та $[e_2, e_3] = e_1$, отримуємо, що

$$e_3 = \xi^1(x_2, \ldots, x_n)\partial_{x_1} - \partial_{x_2} + \xi^k(x_3, \ldots, x_n)\partial_{x_k}, \quad k = 3, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Групу дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}^{R(2A_1,2)}$ складають такі заміни змінних:

$$\tilde{x}_1 = x_1 + h^1(x_2, \ldots, x_n), \ \tilde{x}_2 = x_2, \ y_l = h^l(x_2, \ldots, x_n), \quad l = 3, \ldots, n.$$

Нехай h^1 задовольняє рівняння $\xi^1 - h^1_{x_2} + \xi^k h^1_{x_k} = 0$, а функції h^l — функціонально незалежні розв'язки рівняння $-h_{x_2} + \xi^k h_{x_k} = 0$, тоді оператор (2.12) зводиться до вигляду $e_3 = -\partial_{\tilde{x}_2}$. Таким чином, приходимо до реалізації

$$e_1 = \partial_{x_1}, \quad e_2 = x_2\partial_{x_1}, \quad e_3 = -\partial_{x_2}, \tag{2.13}$$

яка з точністю до перетворень $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = -e_3$, $\tilde{e}_3 = e_2$ еквівалентна реалізації (2.9).

Реалізація (2.7) має ранг 3, отже вона нееквівалентна реалізаціям (2.8) та (2.9), які мають ранг 2. Нееквівалентність двох останніх реалізацій доведемо методом від супротивного.

Припустимо, що ці реалізації еквівалентні. Тоді за означенням 2.4 існує автоморфізм алгебри $A_{3.1}$ та заміна змінних $\hat{x}_i = g^i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, які зводять базис (2.9) до базису (2.8). З цих умов випливає така система рівнянь:

$$\begin{gathered}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})g^1_{x_1} = 1; \quad (\alpha_{12} + \alpha_{32}x_2) - g^1_{x_1} + \alpha_{22}g^1_{x_2} = 0;\\ (\alpha_{13} + x_2\alpha_{33})g^1_{x_1} + \alpha_{23}g^1_{x_2} = g^2; \quad \alpha_{22}g^2_{x_2} = 1; \quad \alpha_{23}g^2_{x_2} = g^3; \quad \alpha_{22}g^3_{x_2} = 0.\end{gathered}$$

Несумісність цієї системи і доводить нееквівалентність реалізацій (2.8) та (2.9). Твердження доведено.

Розглянувши аналогічно випадки алгебр $A_{2.1} \oplus A_1, A_{3.2}, \ldots, A_{3.5}$, переконуємося у справедливості такої теореми.

Теорема 2.2. *Нееквівалентні реалізації тривимірних розв'язних алгебр Лі у просторі довільної скінченної кількості змінних вичерпуються наведеними у таблиці 2.4.*

Таблиця 2.4

Реалізації тривимірних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	N	Реалізації	$(*)$
$3A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3$	
	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2$	
	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2$	$(*)$
	4	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1$	
	5	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi\left(x_2\right)\partial_1$	$(*)$
$A_{2.1} \oplus A_1$	1	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3,\ \partial_2$	
$[e_1, e_2] = e_1$	2	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_2,\ \partial_2$	
	3	$\partial_1, x_1\partial_1,\ \partial_2$	
	4	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ x_2\partial_1$	
$A_{3.1}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + \partial_3$	
$[e_2, e_3] = e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + x_3\partial_2$	
	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1$	
$A_{3.2}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \left(x_1 + x_2\right)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$	
$[e_1, e_3] = e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \left(x_1 + x_2\right)\partial_1 + x_2\partial_2$	
$[e_2, e_3] = e_1 + e_2$	3	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 - \partial_2$	
$A_{3.3}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$	
$[e_1, e_3] = e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2$	
$[e_2, e_3] = e_2$	3	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3$	
	4	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1$	
$A^a_{3.4},\ \lvert a\rvert \leqslant 1,\ a \neq 0, 1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3$	
$[e_1, e_3] = e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + ax_2\partial_2$	
$[e_2, e_3] = ae_2$	3	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 + (1 - a)x_2\partial_2$	
$A^b_{3.5},\ \ b \geqslant 0$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3$	
$[e_1, e_3] = be_1 - e_2$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2$	
$[e_2, e_3] = e_1 + be_2$	3	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ (b - x_2)x_1\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$	

Примітки:

$R(3A_1, 3, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_3)$. Реалізації $R(3A_1, 3, \varphi)$ та $R(3A_1, 3, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= -(\alpha_{11}x_3 + \alpha_{12}\varphi(x_3) - \alpha_{13})/(\alpha_{31}x_3 + \alpha_{32}\varphi(x_3) - \alpha_{33}), \\ \tilde{\varphi} &= -(\alpha_{21}x_3 + \alpha_{22}\varphi(x_3) - \alpha_{23})/(\alpha_{31}x_3 + \alpha_{32}\varphi(x_3) - \alpha_{33}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

$R(3A_1, 5, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_2)$, $\varphi'' \neq 0$. Реалізації $R(3A_1, 5, \varphi)$ та $R(3A_1, 5, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= -(\alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}\varphi(x_2) - \alpha_{23})/(\alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}\varphi(x_2) - \alpha_{13}), \\ \tilde{\varphi} &= -(\alpha_{31}x_2 + \alpha_{32}\varphi(x_2) - \alpha_{33})/(\alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}\varphi(x_2) - \alpha_{13}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Розглянемо тепер побудову реалізацій чотиривимірних алгебр Лі.

$4A_1$. Побудову реалізацій проводимо в залежності від рангу r.

Випадок 1. $r = 4$. Базисні елементи зводяться до вигляду $R(4A_1, 1)$ (див. табл. 2.6).

Випадок 2. $r = 3$. Виберемо базис таким чином, щоб $\operatorname{rank}\langle e_1, e_2, e_3\rangle = 3$, отже e_1, e_2, e_3 можна привести до вигляду $e_1 = \partial_{x_1}$, $e_2 = \partial_{x_2}$, $e_3 = \partial_{x_3}$. Тоді загальний вигляд четвертого базисного елемента такий

$$e_4 = \xi^1(x_4, \ldots, x_n)\partial_{x_1} + \xi^2(x_4, \ldots, x_n)\partial_{x_2} + \xi^3(x_4, \ldots, x_n)\partial_{x_3}.$$

Кількість функціонально незалежних серед коефіцієнтів ξ^1, ξ^2, ξ^3 може дорівнювати 3, 2, або 1. Виберемо такі коефіцієнти новими незалежними змінними. Тоді інші коефіцієнти будуть функціями від них. В результаті отримуємо реалізації $R(4A_1, 2)$, $R(4A_1, 3)$, $R(4A_1, 4)$.

Продовжуючи аналогічні міркування у *випадку 3*, коли ранг реалізації дорівнює 2 та *випадку 4*, коли ранг реалізації дорівнює 1, ми знайшли решту реалізацій алгебри $4A_1$. (Див. табл. 2.6).

Нееквівалентність побудованих реалізацій випливає з наступної леми.

Лема 2.2. *Нехай* $\{e_a\}$ *та* $\{\tilde{e}_a\}$ *— дві реалізації* n*-вимірної комутативної алгебри рангу* r*:*

$$e_p = \partial_{x_p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant r, \quad e_i = \psi^k{}_i \partial_{x_k}, \quad r < i \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant r; \tag{2.16}$$

$$\tilde{e}_q = \partial_{\tilde{x}_q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant r, \quad \tilde{e}_j = \tilde{\psi}^l_j \partial_{\tilde{x}_l}, \quad r < j \leqslant n, \ 1 \leqslant l \leqslant r. \tag{2.17}$$

Якщо ці реалізації еквівалентні, то кількість функціонально незалежних функцій серед $\{\psi^k_i\}$ *та* $\{\tilde{\psi}^k_i\}$ *однакова.*

Доведення. Дві еквівалентні реалізації за допомогою дифеоморфізмів та автоморфізмів можна звести до однієї.

Дифеоморфізм $\tilde{x}_s = g^s(x)$, $1 \leqslant s \leqslant n$, зводить реалізацію (2.16) до

$$e'_p = g^s{}_p \partial_{\tilde{x}_s}, \qquad e'_i = \psi^k{}_i g^s{}_k \partial_{\tilde{x}_s}. \tag{2.18}$$

Автоморфізм $e'_a = \alpha^b{}_a \tilde{e}_b$ зводить реалізацію (2.17) до вигляду

$$\tilde{e}'_a = \alpha^q{}_a \partial_{\tilde{x}_q} + \alpha^j{}_a \tilde{\psi}^l_j \partial_{\tilde{x}_l}. \tag{2.19}$$

Припустимо, що реалізації (2.18) та (2.19) збігаються, тобто реалізації (2.16), (2.17) еквівалентні. Тоді

$$g^s{}_p = \alpha^s{}_p + \tilde{\psi}^s{}_j \alpha^j{}_p, \qquad \psi^k{}_i g^s{}_k = \alpha^s{}_i + \tilde{\psi}^s{}_j \alpha^j{}_i,$$

звідки

$$\Big((\alpha^s{}_k) + (\tilde{\psi}^s{}_j)(\alpha^j{}_p)\Big)(\psi^k{}_i) = (\alpha^s{}_i) + (\tilde{\psi}^s{}_j)(\alpha^j{}_i).$$

З останньої рівності випливає, що кількість функціонально незалежних функцій серед $\{\psi^k_i\}$ та $\{\tilde{\psi}^k_i\}$ однакова. Лему доведено.

$\mathbf{A_{4.7}}$. Алгебра $A_{4.7}$ має чотири ненульові мегаідеали: $\mathcal{I}_1 = \langle e_1 \rangle \sim A_1$, $\mathcal{I}_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \sim 2A_1$, $\mathcal{I}_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \sim A_{3.1}$, $\mathcal{I}_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \sim A_{4.7}$.

Реалізації тривимірного мегаідеалу $\mathcal{I}_3$ можуть бути доповнені за допомогою одного додаткового базисного елемента до реалізацій алгебри $A_{4.7}$. Цей мегаідеал має три слабо нееквівалентні реалізації $R(A_{3.1}, N)$

($N = \overline{1,3}$) в класі векторних полів Лі (див. табл. 2.4). Але, оскільки обмеження $\mathrm{Aut}(A_{4.7})\mathcal{I}_{A_{3.1}}$ не збігається з $\mathrm{Aut}(A_{3.1})$, то для побудови реалізацій алгебри $A_{4.7}$ необхідно використовувати сильно нееквівалентні реалізації алгебри $A_{3.1}$, до яких, крім слабо нееквівалентних, належить реалізація (2.13). Для кожної з цих реалізацій виконуємо таку процедуру. Представляючи четвертий базисний елемент у найбільш загальному вигляді $e_4 = \xi^a(x)\partial_a$ і комутуючи e_4 з іншими базисними елементами, отримуємо лінійну перевизначену систему диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку для визначення функцій ξ^a. Далі розв'язуємо цю систему і спрощуємо її загальний розв'язок за допомогою перетворень $\tilde{x}_a = f^a(x)$ ($a = \overline{1,n}$), які зберігають вигляд e_1, e_2, та e_3 розглядуваної реалізації алгебри $A_{3.3}$. Для знаходження підходящих функцій $f^a(x)$, розв'язуємо додаткову систему диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка отримується з умови $e_i\big|_{x_a\to\tilde{x}_a} = (e_i f^a)(x)\partial_{\tilde{x}_a}$, якщо $\tilde{x}_a = f^a(x)$, $i = \overline{1,3}$. Останнім кроком є доведення нееквівалентності всіх побудованих реалізацій.

Випадок 1. Нехай оператори e_1, e_2, e_3 збігаються з відповідними базисними елементами реалізації $R(A_{3.1}, 2)$. Підставивши оператори e_1, e_2 та e_4 у комутаційні співвідношення $[e_1, e_4] = 2e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$ приходимо до такої системи рівнянь на функції ξ^a:

$$\xi^1_{x_1} = 2, \quad \xi^2_{x_1} = 0, \quad \xi^j_{x_1} = 0, \quad \xi^1_{x_2} = 0, \quad \xi^2_{x_2} = 1, \quad \xi^j_{x_2} = 0, \qquad j = \overline{3,n},$$

звідки отримуємо, що

$$e_4 = (2x_1 + \tilde{\xi}^1(\bar{x}))\partial_{x_1} + (x_2 + \tilde{\xi}^2(\bar{x}))\partial_{x_2} + \tilde{\xi}^j(\bar{x})\partial_{x_j}, \tag{2.20}$$

де $\bar{x} = (x_3, \ldots, x_n)$.

Підставивши оператор (2.20) у співвідношення $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$, одержуємо, що $\tilde{\xi}^2 = 0$, $\tilde{\xi}^3 = -1$. Отже,

$$e_4 = (2x_1 + \tilde{\xi}^1(\bar{x}))\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} - \partial_{x_3} + \tilde{\xi}^k(\bar{x})\partial_{x_k}, \quad k = 4, \ldots, n.$$

Для спрощення вигляду оператора e_4 використаємо ті дифеоморфізми, які не змінюють вигляду операторів e_1, e_2, e_3. Виконавши заміну змінних

$$\tilde{x}_1 = x_1 + f(\bar{x}), \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3, \quad \tilde{x}_l = g^l(\bar{x}), \quad l = 4, \ldots, n,$$

де функція f задовольняє умову $-f_{x_3} + \tilde{\xi}^k f_{x_k} + \tilde{\xi}^1 - 2f = 0$, а g^l — функціонально незалежні розв'язки рівняння $-g_{x_3} + \tilde{\xi}^k g_{x_k} = 0$, зведемо e_4 до вигляду $e_4 = 2\tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_1} + \tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_2} - \partial_{\tilde{x}_3}$. Таким чином, отримали реалізацію $R(A_{4.7}, 3)$.

Випадок 2. Підстановка базисних операторів реалізації $R(A_{3.1}, 3)$ та e_4 у комутаційні співвідношення приводить до суперечливої умови.

Випадок 3. Оператори e_1, e_2, e_3 мають вигляд $R(A_{3.1}, 1)$. Аналогічно до випадку 1 із комутаційних співвідношень $[e_1, e_4] = 2e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$ отримуємо, що оператор e_4 має вигляд (2.20). Далі, із співвідношення $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$ отримуємо такі умови на коефіцієнти $\tilde{\xi}^i$:

$$\tilde{\xi}^1_{x_3} = \tilde{\xi}^2, \quad \tilde{\xi}^2_{x_3} = 1, \quad \tilde{\xi}^3_{x_3} = 1, \quad \tilde{\xi}^k_{x_3} = 0, \qquad k = 4, \ldots, n.$$

Знайшовши загальний розв'язок цієї системи, маємо

$$e_4 = \left(2x_1 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + x_3\hat{\xi}^2(\hat{x}) + \hat{\xi}^1(\hat{x})\right)\partial_{x_1} + (x_2 + x_3 + \hat{\xi}^2(\hat{x}))\partial_{x_2} +$$
$$+ (x_3 + \hat{\xi}^3(\hat{x}))\partial_{x_3} + \hat{\xi}^k(\hat{x})\partial_{x_k}, \qquad \hat{x} = (x_4, \ldots, x_n).$$

В залежності від значень функцій $\hat{\xi}^k$ $(k = \overline{4, n})$ можливі два підвипадки.

Підвипадок 3.1. Якщо не всі $\hat{\xi}^k$ дорівнюють нулю, то виконавши заміну

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1 = x_1 + x_3 g(\hat{x}) + f(\hat{x}), \quad \tilde{x}_2 = x_2 + g(\hat{x}), \\ &\tilde{x}_3 = x_3 + h(\hat{x}), \qquad \tilde{x}_l = u^l(\hat{x}), \qquad l = 4, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.21}$$

де функції f, g, h задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\hat{\xi}^3 + \hat{\xi}^k h_{x_k} - h = 0, \qquad \hat{\xi}^2 + \hat{\xi}^k g_{x_k} - g + h = 0, \\ &\hat{\xi}^1 + \hat{\xi}^3 g + \hat{\xi}^k f_{x_k} - 2f - \tfrac{1}{2}h^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

u^4 — розв'язок рівняння $\hat{\xi}^k u^4_{x_k} = 1$, а u^l $(l = 5, \ldots, n)$ — функціонально незалежні розв'язки рівняння $\hat{\xi}^k u_{x_k} = 0$, зводимо оператор e_4 до вигляду $e_4 = \left(2\tilde{x}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_3^2\right)\partial_{\tilde{x}_1} + (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)\partial_{\tilde{x}_2} + \tilde{x}_3\partial_{\tilde{x}_3} + \partial_{\tilde{x}_4}$. Отже, прийшли до реалізації $R(A_{4.7}, 1)$.

Підвипадок 3.2. Якщо ж всі $\hat{\xi}^k \equiv 0$, то виконавши заміну змінних (2.21), де функції f, g, h задовольняють систему рівнянь (2.22), а $u^l = x_l$ $(l = \overline{4,n})$, зводимо оператор e_4 до вигляду

$$e_4 = \left(2\tilde{x}_1 + \tfrac{1}{2}\tilde{x}_3^2\right)\partial_{\tilde{x}_1} + (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)\partial_{\tilde{x}_2} + \tilde{x}_3\partial_{\tilde{x}_3}.$$

Тобто, отримали реалізацію $R(A_{4.7}, 2)$.

Випадок 4. Оператори e_1, e_2, e_3 мають вигляд (2.13). Комутаційні співвідношення приводять до такої системи на функції ξ^a:

$$\begin{array}{lll} [e_1, e_4] = 2e_1 & \Rightarrow & \xi^1_{x_1} = 2, \quad \xi^2_{x_1} = 0, \quad \xi^k_{x_1} = 0, \\ [e_2, e_4] = e_1 & \Rightarrow & \xi^2 = x_2, \qquad\qquad\qquad\qquad k = \overline{3,n}, \\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3 & \Rightarrow & \xi^1_{x_2} = -x_2, \quad \xi^2_{x_2} = 1, \quad \xi^k_{x_2} = 0, \end{array}$$

загальний розв'язок якої

$$\xi^1 = 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tilde{\xi}^1(\bar{x}), \quad \xi^2 = x_2, \quad \xi^k = \tilde{\xi}^k(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_3, \ldots, x_n).$$

Отже, оператор e_4 має вигляд

$$e_4 = (2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tilde{\xi}^1(\bar{x}))\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + \tilde{\xi}^k(\bar{x})\partial_{x_k}, \tag{2.23}$$

В залежності від значень функцій $\tilde{\xi}^k$ $(k = \overline{3,n})$ можливі два підвипадки.

Підвипадок 4.1. Якщо не всі $\tilde{\xi}^k$ дорівнюють нулю, то заміна

$$\tilde{x}_1 = x_1 + f(\bar{x}), \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_l = u^l(\bar{x}), \qquad l = 3, \ldots, n, \tag{2.24}$$

де функція f визначається з рівняння

$$-2f + \tilde{\xi}^1 + \tilde{\xi}^k f_{x_k} = 0, \tag{2.25}$$

u^3 задовольняє диференціальне рівняння $\tilde{\xi}^k u^3_{x_k} = 1$, а u^l $(l = \overline{4,n})$ — функціонально незалежні розв'язки рівняння $\tilde{\xi}^k u_{x_k} = 0$, зводить оператор (2.23) до вигляду $e_4 = (2\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{x}_2^2)\partial_{\tilde{x}_1} + \tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_2} + \partial_{\tilde{x}_3}$. Таким чином, прийшли до реалізації $R(A_{4.7}, 4)$.

Підвипадок 4.2. Якщо ж всі $\tilde{\xi}^k \equiv 0$, то виконавши заміну змінних (2.24), де функція f задовольняє умову (2.25), а $u^l = x_l$ $(l = \overline{3,n})$, зводимо оператор e_4 до вигляду $e_4 = (2\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{x}_2^2)\partial_{\tilde{x}_1} + \tilde{x}_2\partial_{\tilde{x}_2}$. Отже, отримали реалізацію $R(A_{4.7}, 5)$.

Для доведення нееквівалентності побудованих реалізацій поставимо у відповідність реалізації $R(A_{4.7}, N)$, $(N = \overline{1,5})$ впорядковану трійку чисел (r_{N2}, r_{N3}, r_{N4}), де $r_{Nj} = \operatorname{rank} R(A_{4.7}, N)\big|_{\mathcal{I}_j}$, тобто r_{Nj} дорівнює рангу базисних елементів мегаідеалів $\mathcal{I}_j$ в реалізації $R(A_{4.7}, N)$, $(j = \overline{2,4})$:

$$R(A_{4.7}, 1) \longrightarrow (2,3,4);\;\; R(A_{4.7}, 2) \longrightarrow (2,3,3);$$

$$R(A_{4.7}, 3) \longrightarrow (2,2,3);\;\; R(A_{4.7}, 4) \longrightarrow (1,2,3);\;\; R(A_{4.7}, 5) \longrightarrow (1,2,2).$$

Оскільки усім реалізаціям відповідають різні трійки чисел, то згідно з наслідком 2.2 з леми 2.1 ці реалізації нееквівалентні.

$\mathbf{A_{4.10}}$. Алгебра $A_{4.10}$ має чотири ненульові мегаідеали: $\mathcal{I}_1 = \langle e_1, e_2\rangle \sim 2A_1$, $\mathcal{I}_2 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle \sim A_{3.3}$, $\mathcal{I}_3 = \langle e_1, e_2, e_4\rangle \sim A_{3.5}$, $\mathcal{I}_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle \sim A_{4.10}$. Реалізації двох тривимірних мегаідеалів $\mathcal{I}_2$ та $\mathcal{I}_3$ можна доповнити за допомогою одного додаткового базисного елемента до реалізацій алгебри $A_{4.10}$. Далі з цією метою використовуємо $\mathcal{I}_2$. Цей мегаідеал має чотири нееквівалентні реалізації $R(A_{3.3}, N)$ $(N = \overline{1,4})$ в класі векторних полів Лі (див. табл. 2.4). Шукаємо четвертий базисний елемент у найбільш загальному вигляді $e_4 = \xi^a(x)\partial_a$. Комутуючи e_4 з іншими базисними елементами кожної з цих реалізацій, отримуємо лінійну перевизначену систему диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку для визначення функцій ξ^a.

Таким чином, для реалізації $R(A_{3.3}, 1)$ підстановка операторів у комутаційні співвідношення приводять до такої системи на функції ξ^a:

$$\xi^1_1 = 0, \quad \xi^1_2 = 1, \quad \xi^1_3 = \xi^1 - x_2, \quad \xi^2_1 = -1, \quad \xi^2_2 = 0, \quad \xi^2_3 = \xi^2 + x_1,$$
$$\xi^k_1 = 0, \quad \xi^k_2 = 0, \quad \xi^k_3 = 0, \qquad k = \overline{3,n}.$$

Її загальний розв'язок складають функції:

$$\xi^1 = x_2 + \theta^1(\hat{x})e^{x_3}, \quad \xi^2 = -x_1 + \theta^2(\hat{x})e^{x_3}, \quad \xi^k = \theta^k(\hat{x}), \quad k = \overline{3,n},$$

де θ^a $(a = \overline{1,n})$ — довільна гладка функція змінних $\hat{x} = (x_4, \dots, x_n)$. Вигляд операторів e_1, e_2, та e_3 не змінюють тільки перетворення

$$\tilde{x}_1 = x_1 + f^1(\hat{x})e^{x_3},\ \tilde{x}_2 = x_2 + f^2(\hat{x})e^{x_3},\ \tilde{x}_3 = x_3 + f^3(\hat{x}),\ \tilde{x}_\alpha = f^\alpha(\hat{x}),$$

де f^a $(a = \overline{1,n})$ — довільні гладкі функції $\hat{x}$ та f^α $(\alpha = \overline{4,n})$ є функціонально незалежними. В залежності від значень функцій-параметрів θ^k $(k = \overline{3,n})$ існує три можливих канонічних форми e_4:

$$\exists\,\alpha : \theta^\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow\ e_4 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_4 \quad (\text{реалізація}\ R(A_{4.10}, 1));$$

$$\theta^\alpha = 0,\ \theta^3 \neq \mathrm{const} \Rightarrow\ e_4 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + x_4\partial_3\ (\text{реалізація}\ R(A_{4.10}, 2));$$

$$\theta^\alpha = 0,\ \theta^3 = \mathrm{const} \Rightarrow\ e_4 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + C\partial_3\ (\text{реалізація}\ R(A_{4.10}, 3, C)).$$

Тут C — довільні сталі.

Проведено подібні обчислення для інших реалізації алгебри $A_{3.3}$. Далі для кожної з них наводимо коротко тільки загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь з частинними похідними на коефіцієнти ξ^a, перетворення, які зберігають форму операторів e_1, e_2, e_3 у розглядуваній реалізації алгебри $A_{3.3}$, та відповідну реалізацію алгебри $A_{4.10}$.

$$R(A_{3.3}, 2)\colon\ \xi^1 = x_2,\ \xi^2 = -x_1,\ \xi^k = \theta^k(\bar{x}),\quad k = \overline{3,n},\quad \bar{x} = (x_3, \dots, x_n);$$

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_k = f^k(\bar{x});$$

$R(A_{4.10}, 5)$ якщо $\exists k\colon \theta^k \neq 0$ та $R(A_{4.10}, 6)$ якщо $\theta^k = 0$.

$$R(A_{3.3}, 3)\colon\ \xi^1 = -x_1x_2 + \theta^1(x')e^{x_3},\ \xi^2 = -(1 + x_2^2),\ \xi^k = \theta^k(x');$$

$$\tilde{x}_1 = x_1 + f^1(x')e^{x_3},\ \tilde{x}_2 = x_2,\ \tilde{x}_3 = x_3 + f^3(x'),\ \tilde{x}_\alpha = f^\alpha(x');$$

$$R(A_{4.10}, 4);\quad k = \overline{3,n},\quad \alpha = \overline{4,n},\quad x' = (x_2, x_4, x_5, \dots, x_n).$$

$$R(A_{3.3}, 4)\colon\ \xi^1 = -x_1x_2,\ \xi^2 = -(1 + x_2^2),\ \xi^k = \theta^k(\check{x}),$$

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_k = f^k(\check{x});$$

$$R(A_{4.10}, 7); \qquad k = \overline{3,n}, \quad \check{x} = (x_2, \dots, x_n).$$

Тут θ^a $(a = \overline{1,n})$ — довільні гладкі функції своїх аргументів та f^a $(a = \overline{1,n})$ — такі гладкі функції своїх аргументів, що відповідне перетворення змінних x є невиродженим.

Для доведення нееквівалентності побудованих реалізацій поставимо у відповідність N-тій реалізації впорядковану четвірку цілих чисел (r_{N1}, r_{N2}, r_{N3}, r_{N4}), де $r_{Nj} = \operatorname{rank} R(A_{4.10}, N)\big|_{\mathcal{I}_j}$, ($N = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,4}$):

$$R(A_{4.10}, 1) \longrightarrow (2,3,3,4);\quad R(A_{4.10}, 2) \longrightarrow (2,3,3,3);$$

$$R(A_{4.10}, 3, C) \to (2,3,3,3) \text{ якщо } C \neq 0 \text{ та } R(A_{4.10}, 3, 0) \to (2,3,2,3);$$

$$R(A_{4.10}, 4) \longrightarrow (1,2,2,3);\quad R(A_{4.10}, 5) \longrightarrow (2,2,3,3);$$

$$R(A_{4.10}, 6) \longrightarrow (2,2,2,2);\quad R(A_{4.10}, 7) \longrightarrow (1,1,2,2).$$

Нееквівалентність реалізацій, яким відповідають різні набори чисел, випливає з леми 2.1. Набори рангів мегаідеалів збігаються тільки для двох пар реалізацій: $(R(A_{4.10}, 2), R(A_{4.10}, 3, C))$ та $(R(A_{4.10}, 3, C), R(A_{4.10}, 3, \tilde{C}))$ де $C, \tilde{C} \neq 0$. Нееквівалентність цих реалізацій доводимо іншим способом, тобто методом від супротивного.

Припустимо, що реалізації $R(A_{4.10}, 2)$ та $R(A_{4.10}, 3, C)$ є еквівалентними і зафіксуємо їх базиси, як вказано в таблиці 2.5. Тоді, за означенням еквівалентності існує автоморфізм алгебри $A_{4.10}$ $\tilde{e}_\mu = \alpha_{\nu\mu} e_\nu$ (див. табл. A.3) та заміна змінних $\tilde{x}_a = g^a(x)$, яка перетворює базис $R(A_{4.10}, 2)$ в базис $R(A_{4.10}, 3, C)$. (Тут $\mu, \nu = \overline{1,4}$, $a = \overline{1,n}$.) З цих умов випливає, що функція g^3 задовольняє таку систему диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$g^3_1 = 0, \quad g^3_2 = 0, \quad g^3_3 = 1, \quad x_4 g^3_3 = C$$

з якої слідує суперечливе рівняння $x_4 = C$. Отже ці реалізації є нееквівалентними. Так само одержуємо, що реалізації $R(A_{4.10}, 3, C)$ та $R(A_{4.10}, 3, \tilde{C})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $C = \tilde{C}$.

Провівши аналогічні міркування для решти дійсних чотиривимірних алгебр Лі, переконуємося у справедливості такої теореми.

Теорема 2.3. *Нееквівалентні реалізації дійсних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі вичерпуються наведеними в таблицях 2.5, 2.6.*

Таблиця 2.5

Реалізації дійсних нерозкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$A_{4.1}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2+\partial_4$	
$[e_2,e_4]=e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2+x_4\partial_3$	
$[e_3,e_4]=e_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2$	
	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_2\partial_1+x_4\partial_3-\partial_4$	
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1+x_3\partial_2,\ x_2\partial_1-\partial_3$	
	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_2x_3\partial_1-\partial_2$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ -\partial_2-x_2\partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ -\partial_2$	
$A^b_{4.2},\ \ b\neq 0$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ bx_1\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$	
$[e_1,e_4]=be_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ bx_1\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3$	
$[e_2,e_4]=e_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_4\partial_1+x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2+(b-1)x_4\partial_4-\partial_3$	
$[e_3,e_4]=e_2+e_3$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$	
	5	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (bx_1+x_2x_3)\partial_1+(b-1)x_2\partial_2+x_3\partial_3$	
	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ bx_1\partial_1+(b-1)x_2\partial_2+((b-1)x_3-x_2)\partial_3$	
$b\neq 1$	7	$\partial_1,\ \partial_2,\ e^{(1-b)x_3}\partial_1+x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{x_2}{1-b}\ln\lvert x_2\rvert\partial_1,\ bx_1\partial_1+(b-1)x_2\partial_2$	
$b=1$	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1+x_3\partial_3+\partial_4$	
$A_{4.3}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2+\partial_4$	
$[e_1,e_4]=e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2+x_4\partial_3$	
$[e_3,e_4]=e_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2$	
	4	$\partial_1,\partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_1\partial_1+x_3\partial_3-\partial_4$	
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon e^{-x_3}\partial_1+x_3\partial_2,\ x_1\partial_1-\partial_3,$	
	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1+x_2\partial_2$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+(x_3-x_2)\partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -x_2\ln\lvert x_2\rvert\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2$	
$A_{4.4}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ (x_1+x_2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$	
$[e_1,e_4]=e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ (x_1+x_2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3$	
$[e_2,e_4]=e_1+e_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+x_4\partial_3-\partial_4$	
$[e_3,e_4]=e_2+e_3$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1+x_3\partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$	
	5	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1-\partial_2+x_3\partial_3$	
	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2-x_2\partial_3$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2$	

Продовження табл. 2.5.

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$A_{4.5}^{a,b,c}$, $abc \neq 0$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + cx_3\partial_3 + \partial_4$	
$[e_1, e_4] = ae_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + cx_3\partial_3$	
$[e_2, e_4] = be_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + (a-c)x_3\partial_3 + (b-c)x_4\partial_4$	
$[e_3, e_4] = ce_3$	4	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ ax_1\partial_1 + (a-b)x_2\partial_2 + (a-c)x_3\partial_3$	
$a = b = c = 1$	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_5$	
	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_4$	$(*)$
	7	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2$	$(*)$
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_4$	
	9	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3$	$(*)$
	10	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ x_1\partial_1$	$(*)$
$a = b = 1$,	5	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_1\partial_1 + cx_3\partial_3 + \partial_4$	
$c \neq 1$	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_1\partial_1 + cx_3\partial_3$	
	7	$\partial_1,\ \partial_2,\ e^{(1-c)x_3}\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$	
$-1 \leqslant a < b < 1$,	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon_1 e^{(a-1)x_3}\partial_1 + \varepsilon_2 e^{(b-1)x_3}\partial_2,\ ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + \partial_3$	$(*)$
$c = 1$; $b > 0$	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1 + (a-b)x_2\partial_2 + x_3\partial_3$	
якщо $a = -1$	7	$\partial_1,\ e^{(a-b)x_2}\partial_1,\ e^{(a-1)x_2}\partial_1,\ ax_1\partial_1 + \partial_2$	
$A_{4.6}^{a,b}$, $a > 0$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1 + (bx_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + bx_3)\partial_3 + \partial_4$	
$[e_1, e_4] = ae_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1 + (bx_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + bx_3)\partial_3$	
$[e_2, e_4] = be_2 - e_3$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,$	
		$(ax_1 - x_2x_3)\partial_1 + (b - x_4)x_2\partial_2 + (a - b - x_4)x_3\partial_3 - (1 + x_4^2)\partial_4$	
$[e_3, e_4] = e_2 + be_3$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon e^{(b-a)\arctan x_3}\sqrt{1 + x_3^2}\partial_1 + x_3\partial_2,$	
		$(ax_1 - \varepsilon x_2 e^{(b-a)\arctan x_3}\sqrt{1 + x_3^2}\,)\partial_1 + (b - x_3)x_2\partial_2 - (1 + x_3^2)\partial_3$	
	5	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, ax_1\partial_1 + ((a-b)x_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + (a-b)x_3)\partial_3$	
	6	$\partial_1,\ e^{(a-b)x_2}\cos x_2\partial_1,\ -e^{(a-b)x_2}\sin x_2\partial_1,\ ax_1\partial_1 + \partial_2$	
$A_{4.7}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + \partial_3,\ (2x_1 + \frac{1}{2}x_3^2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3 + \partial_4$	
$[e_2, e_3] = e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + \partial_3,\ (2x_1 + \frac{1}{2}x_3^2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3$	
$[e_1, e_4] = 2e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1 + x_3\partial_2,\ 2x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - \partial_3$	
$[e_2, e_4] = e_2$	4	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$	
$[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	5	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + x_2\partial_2$	

Примітки:

$R(A_{4.5}^{1,1,1}, N, \varphi)$, $\quad N = 6, 7$. Реалізації $R(A_{4.5}^{1,1,1}, N, \varphi)$ та $R(A_{4.5}^{1,1,1}, N, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.14), де $\alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$, $\varphi = \varphi(x_3)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_3)$.

Продовження табл. 2.5.

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$A^b_{4.8}$, $\lvert b\rvert \leqslant 1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ (1+b)x_1\partial_1+x_2\partial_2+bx_3\partial_3+\partial_4$	
$[e_2,e_3]=e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ (1+b)x_1\partial_1+x_2\partial_2+bx_3\partial_3$	
$[e_1,e_4]=(1+b)e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2,\ (1+b)x_1\partial_1+x_2\partial_2+(1-b)x_3\partial_3$	
$[e_2,e_4]=e_2$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1,\ (1+b)x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$	
$[e_3,e_4]=be_3$	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1,\ (1+b)x_1\partial_1+x_2\partial_2$	
$b=1$	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2,\ 2x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_4$	
$b=-1$	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ x_4\partial_1+x_2\partial_2-x_3\partial_3$	
	7	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1+x_2\partial_2$	
$b\neq\pm1$	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (1+b)x_1\partial_1+bx_2\partial_2+\partial_3$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (1+b)x_1\partial_1+bx_2\partial_2$	
$b=0$	8	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_4\partial_3$	
	9	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+C\partial_3$	$(*)$
$A^a_{4.9}$, $a\geqslant 0$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,$	
$[e_2,e_3]=e_1$		$\frac12(4ax_1+x_3^2-x_2^2)\partial_1+(ax_2+x_3)\partial_2+(-x_2+ax_3)\partial_3+\partial_4$	
$[e_1,e_4]=2ae_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,$	
$[e_2,e_4]=ae_2-e_3$		$\frac12(4ax_1+x_3^2-x_2^2)\partial_1+(ax_2+x_3)\partial_2+(-x_2+ax_3)\partial_3$	
$[e_3,e_4]=e_2+ae_3$	3	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1+x_3\partial_2, (2ax_1-\frac12x_2^2)\partial_1+(a-x_3)x_2\partial_2-(1+x_3^2)\partial_3$	
$a=0$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ \frac12(x_3^2-x_2^2+2x_4)\partial_1+x_3\partial_2-x_2\partial_3$	
$A_{4.10}$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_2\partial_1-x_1\partial_2+\partial_4$	
$[e_1,e_3]=e_1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_2\partial_1-x_1\partial_2+x_4\partial_3$	
$[e_2,e_3]=e_2$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_2\partial_1-x_1\partial_2+C\partial_3$	$(*)$
$[e_1,e_4]=-e_2$	4	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ -x_1x_2\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2$	
$[e_2,e_4]=e_1$	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_2\partial_1-x_1\partial_2+\partial_3$	
	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_2\partial_1-x_1\partial_2$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1,\ -x_1x_2\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2$	

Примітки:

$R(A^{1,1,1}_{4.5},N,\varphi)$, $N=9,10$. $\varphi=\varphi(x_2)$, $\varphi''\neq0$. Реалізації $R(A^{1,1,1}_{4.5},N,\varphi)$ та $R(A^{1,1,1}_{4.5},N,\tilde\varphi)$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.15), де $\alpha_{41}=\alpha_{42}=\alpha_{43}=0$, $\tilde\varphi=\tilde\varphi(\tilde x_2)$.

$R(A^{a,b,c}_{4.5},5,(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$, де $-1\leqslant a<b<c=1$; $b>0$, якщо $a=-1$. $\varepsilon_i\in\{0;1\}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\neq(0,0)$ (можливі три варіанти). Всі варіанти є нееквівалентними.

$R(A^0_{4.8}, 9, C)$. $C \neq 0$ (оскільки $R(A^0_{4.8}, 9, 0) = R(A^0_{4.8}, 2)$).

$R(A_{4.10}, 3, C)$. C — довільна дійсна стала.

Таблиця 2.6

Реалізації дійсних розкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$4A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ \partial_4$	
	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1 + x_5\partial_2 + x_6\partial_3$	
	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1 + x_5\partial_2 + \theta(x_4, x_5)\partial_3$	$(*)$
	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1 + \varphi(x_4)\partial_2 + \psi(x_4)\partial_3$	$(*)$
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ x_5\partial_1 + x_6\partial_2$	
	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ x_5\partial_1 + \theta(x_3, x_4, x_5)\partial_2$	$(*)$
	7	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + \varphi(x_3, x_4)\partial_2,\ x_4\partial_1 + \psi(x_3, x_4)\partial_2$	$(*)$
	8	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2,\ \theta(x_3)\partial_1 + \psi(x_3)\partial_2$	$(*)$
	9	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_4\partial_1$	
	10	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ \theta(x_2, x_3)\partial_1$	$(*)$
	11	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ \psi(x_2)\partial_1$	$(*)$
$A_{2.1} \oplus 2A_1$	1	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ \partial_3$	
	2	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3,\ \partial_2,\ \partial_3$	
$[e_1, e_2] = e_1$	3	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + \varphi(x_4)\partial_3,\ \partial_2,\ \partial_3$	$(*)$
	4	$\partial_1,\ x_1\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3$	
	5	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_3,\ \partial_2,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2$	
	6	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_3,\ \partial_2,\ x_3\partial_1$	
	7	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$	
	8	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$	
	9	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$	$(*)$
	10	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1$	
$2A_{2.1}$	1	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2 + \partial_4$	
	2	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2 + x_4\partial_3$	
$[e_1, e_2] = e_1$	3	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + \partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2 + C\partial_3$	$(*)$
$[e_3, e_4] = e_3$	4	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_2,\ \partial_2,\ x_2\partial_2 + x_3\partial_3$	
	5	$\partial_1,\ x_1\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_2$	
	6	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ x_2\partial_1,\ -x_2\partial_2 + \partial_3$	
	7	$\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ x_2\partial_1,\ -x_2\partial_2$	

Продовження табл. 2.6.

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$A_{3.1}\oplus A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\partial_4,\ \partial_2$	
	2	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2+x_5\partial_3,\ \partial_2$	
$[e_2,e_3]=e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\varphi(x_4)\partial_2+x_4\partial_3,\ \partial_2$	$(*)$
	4	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ \partial_2$	
	5	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1,\ \partial_2$	
	6	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\partial_4,\ x_2\partial_1$	
	7	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_3,\ x_2\partial_1$	
	8	$\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\varphi(x_2)\partial_3,\ x_2\partial_1$	$(*)$
$A_{3.2}\oplus A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ \partial_4$	
	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_4\partial_3$	
$[e_1,e_3]=e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2,\ \partial_3$	
$[e_2,e_3]=e_1+e_2$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_4e^{x_3}(x_3\partial_1+\partial_2)$	
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}(x_3\partial_1+\partial_2)$	
	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2,\ \partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2,\ x_3e^{-x_2}\partial_1$	
	9	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2,\ e^{-x_2}\partial_1$	
$A_{3.3}\oplus A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ \partial_4$	
	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ x_4\partial_3$	
$[e_1,e_3]=e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ \partial_3$	
$[e_2,e_3]=e_2$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}(\partial_1+x_4\partial_2)$	
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1$	
	6	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \partial_4$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ x_4\partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \varphi(x_2)\partial_3$	$(*)$
	9	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1$	
$A^a_{3.4}\oplus A_1$	1	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ \partial_4$	
$\lvert a\rvert\leqslant 1,\ \ a\neq 0,1$	2	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ x_4\partial_3$	
$[e_1,e_3]=e_1$	3	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2,\ \partial_3$	
$[e_2,e_3]=ae_2$	4	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1+x_4e^{ax_3}\partial_2$	
	5	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1+e^{ax_3}\partial_2$	
	6	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ e^{x_3}\partial_1$	
	7	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\ \partial_3$	
	8	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\ x_3\lvert x_2\rvert^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$	
	9	$\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\ \lvert x_2\rvert^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$	
$a\neq -1$	10	$\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\ e^{ax_3}\partial_2$	

Продовження табл. 2.6.

Алгебра	N	Реалізація	$(*)$
$A^b_{3.5}\oplus A_1,\ \ b\geqslant 0$	1	$\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,\partial_4$	
	2	$\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,x_4\partial_3$	
$[e_1,e_3]=be_1-e_2$	3	$\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2,\,\partial_3$	
$[e_2,e_3]=e_1+be_2$	4	$\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,x_4e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1-$ $\sin x_3\partial_2)$	
	5	$\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1-$ $\sin x_3\partial_2)$	
	6	$\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,\partial_3$	
	7	$\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,x_3\sqrt{1+x_2^2}\,e^{-b\arctan x_2}\partial_1$	
	8	$\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,\sqrt{1+x_2^2}\,e^{-b\arctan x_2}\partial_1$	

Примітки:

$R(4A_1,3,\theta)$. $\theta=\theta(x_4,x_5)$. Реалізації $R(4A_1,3,\theta)$ та $R(4A_1,3,\tilde\theta)$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde\xi^a=-(\xi^b\alpha_{ba}-\alpha_{4a})/(\xi^c\alpha_{c4}-\alpha_{44}),\tag{2.26}$$

де $\xi^1=x_4$, $\xi^2=x_5$, $\xi^3=\theta(x_4,x_5)$, $\tilde\xi^1=\tilde x_4$, $\tilde\xi^2=\tilde x_5$, $\tilde\xi^3=\tilde\theta(\tilde x_4,\tilde x_5)$, $a,b,c=\overline{1,3}$.

$R(4A_1,4,(\varphi,\psi))$. $\varphi=\varphi(x_4)$, $\psi=\psi(x_4)$. Реалізації $R(4A_1,4,(\varphi,\psi))$ та $R(4A_1,4,(\tilde\varphi,\tilde\psi))$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли задовольняється умова (2.26), де $\xi^1=x_4$, $\xi^2=\varphi(x_4)$, $\xi^3=\psi(x_4)$, $\tilde\xi^1=\tilde x_4$, $\tilde\xi^2=\tilde\varphi(\tilde x_4)$, $\tilde\xi^3=\tilde\psi(\tilde x_4)$.

$R(4A_1,6,\theta)$. $\theta=\theta(x_3,x_4,x_5)$. Реалізації $R(4A_1,3,\theta)$ та $R(4A_1,3,\tilde\theta)$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$(\xi^{ik}\alpha_{k,2+j}-\alpha_{2+i,2+j})\tilde\xi^{jl}=-(\xi^{ik}\alpha_{kl}-\alpha_{2+i,l}),\tag{2.27}$$

де $\xi^{11}=x_3$, $\xi^{12}=x_4$, $\xi^{21}=x_5$, $\xi^{22}=\theta(x_3,x_4,x_5)$, $\tilde\xi^{11}=\tilde x_3$, $\tilde\xi^{12}=\tilde x_4$, $\tilde\xi^{21}=\tilde x_5$, $\tilde\xi^{22}=\tilde\theta(\tilde x_3,\tilde x_4,\tilde x_5)$, $i,j,k,l=1,2$.

$R(4A_1,7,(\varphi,\psi))$. $\varphi=\varphi(x_3,x_4)$, $\psi=\psi(x_3,x_4)$. Реалізації $R(4A_1,7,(\varphi,\psi))$ та $R(4A_1,7,(\tilde\varphi,\tilde\psi))$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли задовольняється умова (2.27), де $\xi^{11}=x_3$, $\xi^{12}=\varphi(x_3,x_4)$, $\xi^{21}=x_4$, $\xi^{22}=\psi(x_3,x_4)$, $\tilde\xi^{11}=\tilde x_3$, $\tilde\xi^{12}=\tilde\varphi(\tilde x_3,\tilde x_4)$, $\tilde\xi^{21}=\tilde x_4$, $\tilde\xi^{22}=\tilde\psi(\tilde x_3,\tilde x_4)$.

$R(4A_1, 8, (\varphi, \psi, \theta))$. $\varphi = \varphi(x_3)$, $\psi = \psi(x_3)$, $\theta = \theta(x_3)$ та вектор-функції (x_3, φ) і (θ, ψ) є лінійно незалежними. Реалізації $R(4A_1, 8, (\varphi, \psi, \theta))$ та $R(4A_1, 8, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли задовольняється умова (2.27), де $\xi^{11} = x_3$, $\xi^{12} = \varphi(x_3)$, $\xi^{21} = \theta(x_3)$, $\xi^{22} = \psi(x_3)$, $\tilde{\xi}^{11} = \tilde{x}_3$, $\tilde{\xi}^{12} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_3)$, $\tilde{\xi}^{21} = \tilde{\theta}(\tilde{x}_3)$, $\tilde{\xi}^{22} = \tilde{\psi}(\tilde{x}_3)$.

$R(4A_1, 10, \theta)$. $\theta = \theta(x_2, x_3)$, функція θ не є лінійною відносно x_2, x_3. Реалізації $R(4A_1, 10, \theta)$ та $R(4A_1, 10, \tilde{\theta})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$(\xi^a \alpha_{1,b+1} - \alpha_{a+1,b+1})\tilde{\xi}^b = -(\xi^a \alpha_{11} - \alpha_{a1}), \tag{2.28}$$

де $\xi^1 = x_2$, $\xi^2 = x_3$, $\xi^3 = \theta(x_2, x_3)$, $\xi^1 = \tilde{x}_2$, $\xi^2 = \tilde{x}_3$, $\xi^3 = \tilde{\theta}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $a, b = \overline{1, 3}$.

$R(4A_1, 11, (\varphi, \theta))$. $\varphi = \varphi(x_2)$, $\psi = \psi(x_2)$ і функції 1, x_2, φ та ψ лінійно незалежні. Реалізації $R(4A_1, 11, (\varphi, \theta))$ та $R(4A_1, 11, (\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}))$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли задовольняється умова (2.28), де $\xi^1 = x_2$, $\xi^2 = \varphi(x_2)$, $\xi^3 = \psi(x_2)$, $\xi^1 = \tilde{x}_2$, $\xi^2 = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2)$, $\xi^3 = \tilde{\psi}(\tilde{x}_2)$.

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 3, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_4)$. Реалізації $R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 3, \varphi)$ і $R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 3, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли
$\tilde{x}_4 = -\alpha_{23} + \alpha_{33} x_4 + \alpha_{43}\varphi, \quad \tilde{\varphi} = -\alpha_{24} + \alpha_{34} x_4 + \alpha_{44}\varphi$
$(\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_4),\ \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0)$.

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 9, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_3)$. Реалізації $R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 9, \varphi)$ та $R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 9, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли
$\tilde{x}_3 = -(\alpha_{33} x_3 - \alpha_{43})/(\alpha_{34} x_3 - \alpha_{44}), \quad \tilde{\varphi} = (\alpha_{33} + \alpha_{34}\tilde{x}_3)\varphi - (\alpha_{23} + \alpha_{24}\tilde{x}_3)$
$(\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_3),\ \alpha_{22} = 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0)$.

$R(2A_{2.1}, 3, C)$. $|C| \leqslant 1$. Якщо $C \neq \tilde{C}$ ($|C| \leqslant 1$, $|\tilde{C}| \leqslant 1$), то реалізації $R(2A_{2.1}, 3, C)$ і $R(2A_{2.1}, 3, \tilde{C})$ нееквівалентні.

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_4)$. Реалізації $R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \varphi)$ та $R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли
$\tilde{x}_4 = -(\alpha_{22} x_4 - \alpha_{32})/(\alpha_{23} x_4 - \alpha_{33})$,

$\tilde{\varphi} = -(\alpha_{44}\varphi + \alpha_{24}x_4 - \alpha_{34})/(\alpha_{23}x_4 - \alpha_{33})$
$(\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_4),\ \alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32},\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0).$

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_2)$. Реалізації $R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \varphi)$ і $R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли
$\tilde{x}_2 = (\alpha_{11}x_2 - \alpha_{41})/\alpha_{44}, \quad \tilde{\varphi} = -(\alpha_{22}\varphi - \alpha_{32})/(\alpha_{23}\varphi - \alpha_{33})$
$(\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2),\ \alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32},\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0).$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_2) \neq 0$. Реалізації $R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \varphi)$ та $R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \tilde{\varphi})$ є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли
$\tilde{x}_2 = -(\alpha_{11}x_2 - \alpha_{21})/(\alpha_{12}x_2 - \alpha_{22}), \quad \tilde{\varphi} = -\varphi/(\alpha_{34}\varphi - \alpha_{44})$
$(\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2),\ \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0,\ \alpha_{33} = 1).$

Таким чином у цьому підрозділі прокласифіковано нееквівалентні реалізації дійсних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ у просторі довільної скінченної кількості змінних. Разом з результатами Р.З. Жданова, В.І. Лагно, В.І. Фущича [10, 86, 145, 70] щодо реалізацій алгебри $AO(3)$ та Р.О. Поповича [117] щодо реалізацій алгебр $sl(2,\mathbb{R})$, $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$, $AO(3) \oplus A_1$ отримана класифікація утворює завершений опис реалізацій дійсних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$.

2.3. Реалізації алгебр Лі $AO(3)$ та $AE(3)$

Розглянемо задачу класифікації нееквівалентних реалізацій алгебри Лі $AE(3)$ групи Евкліда $E(3)$ в просторі $V = X \times U$ комплексних змінних $x = (x_1, \ldots, x_m)$ та $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Змінні x та u ми розрізняємо як незалежні та залежні змінні, враховуючи, що G є групою інваріантності деякої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для $u(x)$.

Відзначимо, що аналогічна задача у просторі дійсних змінних розв'язана у роботах В.І. Лагно, Р.З. Жданова, В.І. Фущича [86, 145, 70], далі використовуємо запропонований там метод.

Векторні поля в просторі V мають загальний вигляд

$$\xi_j(x,u)\partial_{x_j} + \eta_\alpha(x,u)\partial_{u_\alpha}, \tag{2.29}$$

де ξ_j, η_α — деякі гладкі функції змінних x та u, визначені в просторі V; $j = 1, 2, \dots, m$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

Побудова реалізацій проводиться з точністю до еквівалентності, яку визначають дифеоморфізми простору змінних x, u

$$\tilde{x}_j = f_j(x,u), \quad \tilde{u}_\alpha = g_\alpha(x,u), \quad j = 1, 2, \dots, m, \ \ \alpha = 1, 2, \dots, n, \tag{2.30}$$

де f_j, g_α — гладкі функції визначені у просторі V.

Означення 2.6. Лінійно незалежні векторні поля $\mathcal{J}_{ab}$ $(a, b = 1, 2, 3)$ вигляду (2.29) утворюють реалізацію алгебри Лі $AO(3)$ групи поворотів $O(3)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення

$$[\mathcal{J}_{ab}, \mathcal{J}_{cd}] = i(\delta_{ac}\mathcal{J}_{bd} + \delta_{bd}\mathcal{J}_{ac} - \delta_{ad}\mathcal{J}_{bc} - \delta_{bc}\mathcal{J}_{ad}). \tag{2.31}$$

Тут і далі $a, b, c, d = 1, 2, 3$, i — уявна одиниця, δ_{ab} — символ Кронекера (одиничний тензор третього порядку).

Означення 2.7. Лінійно незалежні векторні поля P_a, $\mathcal{J}_{bc}$ $(a, b, c = 1, 2, 3)$ утворюють реалізацію алгебри Лі $AE(3)$ групи Евкліда $E(3)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (2.31) та співвідношення

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, \mathcal{J}_{bc}] = i(\delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c). \tag{2.32}$$

Для побудови реалізацій алгебр $AO(3)$ та $AE(3)$ зручно перейти до базису

$$J_a = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathcal{J}_{bc},$$

де ε_{abc} — абсолютно антисиметричний тензор третього порядку з $\varepsilon_{123} = 1$. Тоді комутаційні співвідношення (2.31), (2.32) набувають вигляду

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \tag{2.33}$$

$$[P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c. \tag{2.34}$$

Алгебра $AE(3)$ є півпрямою сумою алгебри $AO(3)$ та комутативного ідеалу $I = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$.

Нехай

$$P_a = i\partial_{x_a}, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{2.35}$$

Саме такий вигляд операторів трансляцій найбільш часто зустрічається у різних задачах теоретичної та математичної фізики [43].

Підставивши оператори (2.35) та J_a вигляду (2.29) в комутаційні співвідношення (2.34), отримуємо, що оператори J_a мають такий вигляд

$$J_a = -i\varepsilon_{abc}x_b\partial_{x_c} + \zeta_{ab}(u)\partial_{x_b} + A_a, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{2.36}$$

Тут A_a — оператори вигляду $A_a = \tilde{\eta_a}^j(u)\partial_{u_j}$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[A_a, A_b] = i\varepsilon_{abc}A_c, \qquad a, b, c = 1, 2, 3. \tag{2.37}$$

У формулах (2.36) та (2.37) ζ_{ab}, $\tilde{\eta_a}^j$ — довільні гладкі функції.

Теорема 2.4. *Нехай диференціальні оператори A_a вигляду*

$$A_a = {\eta_a}^k(u)\partial_{u_k}, \quad a = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.38}$$

задовольняють комутаційні співвідношення (2.37). Тоді існують заміни змінних

$$v_k = F_k(u), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.39}$$

які зводять дані оператори до однієї з таких трійок операторів:

$$A_a = 0, \qquad a = 1, 2, 3; \tag{2.40}$$

$$A_1 = \sin u_1\partial_{u_1}, \quad A_2 = \cos u_1\partial_{u_1}, \quad A_3 = i\partial_{u_1}; \tag{2.41}$$

$$A_1 = -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2\partial_{u_1} + \cos u_1\partial_{u_2},$$

$$A_2 = -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \tag{2.42}$$
$$A_3 = i\partial_{u_1};$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_3}, \\ A_2 &= -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ A_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\ A_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Доведення. Якщо хоча б один з операторів A_a (наприклад A_3) тотожно дорівнює нулю, то згідно комутаційним співвідношенням (2.37) два інші оператори (A_1, A_2) теж є нульовими.

Нехай A_3 є ненульовим оператором. Тоді, перетвореннями (2.39), оператор A_3 можна звести до вигляду $A_3 = i\partial_{v_1}$. Далі, з комутаційних співвідношень $[A_3, A_1] = iA_2$, $[A_3, A_2] = -iA_1$ випливає, що оператори A_1, A_2 мають вигляд

$$A_1 = (f^k \cos v_1 + g^k \sin v_1)\partial_{v_k}, \quad A_2 = (g^k \cos v_1 - f^k \sin v_1)\partial_{v_k}, \tag{2.46}$$

де f^k, g^k — довільні гладкі функції змінних $v_2, \ldots, v_n$, $k = 1, \ldots, n$.

Випадок 1. $f^j = g^j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n$. Оператори (2.46) за допомогою заміни змінних

$$w_1 = v_1 + V(v_2, \ldots, v_n), \quad w_j = v_j, \qquad j = 2, \ldots, n, \tag{2.47}$$

де $V = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{f^1}{g^1}$, зводяться до операторів

$$A_1 = \tilde{f}\sin w_1\partial_{w_1}, \qquad A_2 = \tilde{f}\cos w_1\partial_{w_1}.$$

Тут $\tilde{f} = \tilde{f}(v_2, \ldots, v_n)$ — довільна гладка функція.

З $[A_1, A_2] = iA_3$, отримуємо, що $\left(\tilde{f}\right)^2 = 1$, тобто $\tilde{f} = \pm 1$, отже

$$A_1 = \pm\sin w_1\partial_{w_1}, \quad A_2 = \pm\cos w_1\partial_{w_1}, \quad A_3 = i\partial_{w_1}.$$

Перетворенням $u_1 = w_1 + \pi$, $u_j = w_j$ ці оператори зводяться до вигляду (2.41).

Випадок 2. Не всі f^j, g^j, $j \geqslant 2$ тотожно дорівнюють нулю. Заміною змінних (2.47), де V є розв'язком рівняння

$$f^1 + f^j\frac{\partial V}{\partial v_j} = \left(g^1 + g^j\frac{\partial V}{\partial v_j}\right)\operatorname{tg} V,$$

зводимо (2.46) до операторів

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{f}\sin w_1\partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n}(\tilde{f}^j\cos w_1 + \tilde{g}^j\sin w_1)\partial_{w_j}, \\ A_2 &= \tilde{f}\cos w_1\partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n}(\tilde{g}^j\cos w_1 - \tilde{f}^j\sin w_1)\partial_{w_j}, \qquad (2.48) \\ A_3 &= i\partial_{w_1}. \end{aligned}$$

Тут $\tilde{f}, \tilde{f}^j, \tilde{g}^j$ — довільні гладкі функції змінних $w_2, \ldots, w_n$.

Підвипадок 2.1. $\tilde{f}^j = 0$, $j = 2, \ldots, n$. З комутаційних співвідношень $[A_1,\ A_2] = iA_3$ для операторів (2.48) випливає $\tilde{f} = \pm 1$, $\tilde{g}^j = 0$. Тому цей випадок зводиться до випадку 1.

Підвипадок 2.2. Не всі $\tilde{f}^j$ $(j = 2, \ldots, n)$ у (2.48) тотожно дорівнюють нулю. Заміна змінних $z_1 = w_1$, $z_j = W^j(w_2, \ldots, w_n)$, де W^2 — деякий розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\tilde{f}^j\frac{\partial W^2}{\partial w_j} = 1$, а $W^3, \ldots, W^n$ — функціонально незалежні розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними $\sum\limits_{j=2}^{n} \tilde{f}^j \dfrac{\partial W}{\partial w_j} = 0$, зводить оператори (2.48) до операторів

$$\begin{aligned} A_1 &= F \sin z_1 \partial_{z_1} + \cos z_1 \partial_{z_2} + \sum_{k=2}^{n} G_k \sin z_1 \partial_{z_k}, \\ A_2 &= F \cos z_1 \partial_{z_1} - \sin z_1 \partial_{z_2} + \sum_{k=2}^{n} G_k \cos z_1 \partial_{z_k}, \\ A_3 &= i \partial_{z_1}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

З комутаційного співвідношення $[A_1,\ A_2] = iA_3$ для операторів (2.49) випливає система диференціальних рівнянь для функцій $F,\ G_k$:

$$\frac{\partial F}{\partial z_2} - F^2 = -1, \quad \frac{\partial G_k}{\partial z_2} - FG_k = 0, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Загальний розв'язок цієї системи визначається однією з таких формул:

(**a**) $F = -\operatorname{cth}(z_2 + c_1), \quad G_k = \dfrac{c_k}{\operatorname{sh}(z_2 + c_1)}$;

(**b**) $F = -\operatorname{th}(z_2 + c_1), \quad G_k = \dfrac{c_k}{\operatorname{ch}(z_2 + c_1)}$;

(**c**) $F = 1, \quad G_k = c_k \exp(z_2)$;

(**d**) $F = -1, \quad G_k = c_k \exp(-z_2)$,

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — довільні гладкі функції змінних $z_3, \ldots, z_n$, $k = 2, \ldots, n$.

Якщо $c_1 \neq 0$, то заміна $\tilde{z}_2 = z_2 + c_1(z_3, \ldots, z_n)$ дозволяє покласти $c_1 \equiv 0$.

Заміна змінних $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$, $y_k = Z^k(z_3, \ldots, z_n)$, $k = 3, \ldots, n$, де Z^3 є розв'язком рівняння $\sum\limits_{k=3}^{n} c_k \dfrac{\partial Z^3}{\partial z_k} = 1$, а $Z^4, \ldots, Z^n$ — функціонально незалежні розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними $\sum\limits_{k=3}^{n} c_k \dfrac{\partial Z}{\partial z_k} = 0$, зводить оператори (2.49) до однієї з таких трійок операторів:

$$(\mathbf{a}) \ A_1 = -\sin y_1 \operatorname{cth} y_2 \partial_{y_1} + \left[\cos y_1 + \alpha \frac{\sin y_1}{\operatorname{sh} y_2} \right] \partial_{y_2} + \varepsilon \frac{\sin y_1}{\operatorname{sh} y_2} \partial_{y_3},$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= -\cos y_1 \operatorname{cth} y_2 \partial_{y_1} + \left[-\sin y_1 + \alpha \frac{\cos y_1}{\operatorname{sh} y_2} \right] \partial_{y_2} + \varepsilon \frac{\cos y_1}{\operatorname{sh} y_2} \partial_{y_3}, \\
A_3 &= i\partial_{y_1}, \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{b}) \quad A_1 &= -\sin y_1 \operatorname{th} y_2 \partial_{y_1} + \left[\cos y_1 + \alpha \frac{\sin y_1}{\operatorname{ch} y_2} \right] \partial_{y_2} + \varepsilon \frac{\sin y_1}{\operatorname{ch} y_2} \partial_{y_3}, \\
A_2 &= -\cos y_1 \operatorname{th} y_2 \partial_{y_1} + \left[-\sin y_1 + \alpha \frac{\cos y_1}{\operatorname{ch} y_2} \right] \partial_{y_2} + \varepsilon \frac{\cos y_1}{\operatorname{ch} y_2} \partial_{y_3}, \\
A_3 &= i\partial_{y_1}, \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{c}) \quad A_1 &= \sin y_1 \partial_{y_1} + [\cos y_1 + \alpha e^{y_2} \sin y_1] \partial_{y_2} + \varepsilon e^{y_2} \sin y_1 \partial_{y_3}, \\
A_2 &= \cos y_1 \partial_{y_1} + [-\sin y_1 + \alpha e^{y_2} \cos y_1] \partial_{y_2} + \varepsilon e^{y_2} \cos y_1 \partial_{y_3}, \\
A_3 &= i\partial_{y_1}, \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{d}) \quad A_1 &= -\sin y_1 \partial_{y_1} + \left[\cos y_1 + \alpha e^{-y_2} \sin y_1\right] \partial_{y_2} + \varepsilon e^{-y_2} \sin y_1 \partial_{y_3}, \\
A_2 &= -\cos y_1 \partial_{y_1} + \left[-\sin y_1 + \alpha e^{-y_2} \cos y_1\right] \partial_{y_2} + \varepsilon e^{-y_2} \cos y_1 \partial_{y_3}, \\
A_3 &= i\partial_{y_1}. \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

Тут α — довільна гладка функція змінних $y_3, \dots, y_n$; $\varepsilon = 0, 1$.

У випадку **(a)**, якщо $\varepsilon \equiv 0$, то

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\sin y_1 \operatorname{cth} y_2 \partial_{y_1} + \left[\cos y_1 + \alpha \frac{\sin y_1}{\operatorname{sh} y_2} \right] \partial_{y_2}, \\
A_2 &= -\cos y_1 \operatorname{cth} y_2 \partial_{y_1} + \left[-\sin y_1 + \alpha \frac{\cos y_1}{\operatorname{sh} y_2} \right] \partial_{y_2}, \\
A_3 &= i\partial_{y_1},
\end{aligned}
$$

і заміна змінних $\tilde{u}_1 = y_1 - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\alpha}{\operatorname{sh} y_2}$, $\tilde{u}_2 = -\operatorname{ar\,cth} \dfrac{\operatorname{ch} y_2}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y_2 + \alpha^2}}$ зводить ці оператори до операторів (2.42).

Якщо в (2.50) $\varepsilon \equiv 1$, то заміна змінних $\tilde{u}_1 = y_1 + f$, $\tilde{u}_2 = g$, $\tilde{u}_3 = h$, де $f(y_2, \dots, y_n)$, $g(y_2, \dots, y_n)$, $h(y_2, \dots, y_n)$ задовольняють таку (сумісну) систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$
\frac{\partial f}{\partial y_2} = -\sin f \operatorname{cth} g, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_3} = (\alpha \sin f - \operatorname{sh} y_2 \cos f) \operatorname{cth} g + \operatorname{ch} y_2,
$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = \cos f, \qquad \frac{\partial g}{\partial y_3} = -\sin f \,\mathrm{sh}\, y_2 - \alpha\cos f,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_2} = \frac{\sin f}{\mathrm{sh}\, g}, \qquad \frac{\partial h}{\partial y_3} = \frac{1}{\mathrm{sh}\, g}(\cos f \,\mathrm{sh}\, y_2 - \alpha \sin f),$$

зводить (2.50) до операторів (2.43).

Неважко переконатися, що випадок **(b)** за допомогою заміни $\tilde{y}_1 = y_1$, $\tilde{y}_2 = y_2 - \frac{i}{2}\pi$, $\tilde{y}_3 = y_3$ можна звести до випадку **(a)**.

У випадку **(c)** якщо $\varepsilon = \alpha = 0$ має місце (2.44).

Якщо ж $\alpha \neq 0$, $\varepsilon = 0$, то, використавши заміну змінних $x_1 = y_1$, $x_2 = -(\alpha e^{y_2})^{-1}$, зводимо (2.52) до операторів

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin x_1 \partial_{x_1} + [-x_2 \cos x_1 + \sin x_1]\,\partial_{x_2}, \\ A_2 &= \cos x_1 \partial_{x_1} + [x_2 \sin x_1 + \cos x_1]\,\partial_{x_2}, \\ A_3 &= i\partial_{x_1}. \end{aligned}$$

Тепер в результаті заміни $\tilde{u}_1 = x_1 + \operatorname{arc\,ctg} x_2$, $\tilde{u}_2 = -\operatorname{ar\,cth}\dfrac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}$ приходимо до операторів (2.42).

Якщо $\varepsilon = 1$, то заміна $x_1 = y_1$, $x_2 = e^{y_2}$, $x_3 = y_3$ зводить (2.52) до операторів

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin x_1 \partial_{x_1} + x_2 [\cos x_1 + \alpha x_2 \sin x_1]\,\partial_{x_2} + x_2 \sin x_1 \partial_{x_3}, \\ A_2 &= \cos x_1 \partial_{x_1} + x_2 [-\sin x_1 + \alpha x_2 \cos x_1]\,\partial_{x_2} + x_2 \cos x_1 \partial_{x_3}, \\ A_3 &= i\partial_{x_1}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Якщо $\alpha = 0$, то ці оператори еквівалентні операторам (2.45).

Якщо ж $\alpha \neq 0$, то заміна змінних $\tilde{u}_1 = x_1 + f$, $\tilde{u}_2 = g$, $\tilde{u}_3 = h$, де функції $f(x_2,\ldots,x_n), g(x_2,\ldots,x_n), h(x_2,\ldots,x_n)$ задовольняють систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = \sin f, x_2\frac{\partial f}{\partial x_3} = (\cos f - 1 - \alpha y_2 \sin f),$$

$$x_2\frac{\partial g}{\partial x_2} = g\cos f, \qquad x_2\frac{\partial g}{\partial x_3} = -g(\sin f + \alpha x_2 \cos f,$$

$$x_2\frac{\partial h}{\partial x_2} = g\sin f, x_2\frac{\partial h}{\partial x_3} = g(\cos f - \alpha x_2 \sin f).$$

зводить оператори (2.54) до операторів (2.45).

Нарешті, випадок **(d)** зводиться до випадку **(c)** за допомогою заміни $\tilde{y}_1 = y_1 + \pi,\ \ \tilde{y}_2 = -y_2,\ \ \tilde{y}_3 = -y_3.$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що отримані трійки операторів (2.40)–(2.45) нееквівалентні між собою. Теорему доведено.

Із доведеної теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 2.3. Алгебра Лі групи поворотів $O(3)$ має п'ять нееквівалентних реалізацій в класі векторних полів Лі вигляду (2.38), які вичерпуються реалізаціями (2.41)–(2.45) із формулювання теореми.

Теорема 2.5. *Нехай диференціальні оператори* J_a $(a = 1, 2, 3)$ *вигляду* (2.36) *разом із операторами* P_a *вигляду* (2.35) *задовольняють комутаційні співвідношення* (2.33), (2.34). *Тоді існують заміни змінних* (2.30), *які зводять дані оператори до однієї з таких трійок операторів:*

$$\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}),\\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}),\\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2});
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}) + \sin u_1\partial_{u_1},\\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}) + \cos u_1\partial_{u_1},\\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + i\partial_{u_1};
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}) + f\partial_{x_1} - i\sin u_1\frac{\partial f}{\partial u_2}\partial_{x_3}\\
&\qquad - \sin u_1 \operatorname{cth} u_2\partial_{u_1} + \cos u_1\partial_{u_2},\\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}) + f\partial_{x_2} - i\cos u_1\frac{\partial f}{\partial u_2}\partial_{x_3}\\
&\qquad - \cos u_1 \operatorname{cth} u_2\partial_{u_1} - \sin u_1\partial_{u_2},\\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + i\partial_{u_1};
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$
\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}) + g\partial_{x_1} - i\left(\sin u_1 \frac{\partial g}{\partial u_2} - \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2}\frac{\partial g}{\partial u_3}\right)\partial_{x_3} \\
&\qquad - \sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_3}, \\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}) + g\partial_{x_2} - i\left(\cos u_1 \frac{\partial g}{\partial u_2} + \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2}\frac{\partial g}{\partial u_3}\right)\partial_{x_3} \\
&\qquad - \cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_3}, \\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + i\partial_{u_1};
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

$$
\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}) + h\partial_{x_1} - i\sin u_1 \frac{\partial h}{\partial u_2}\partial_{x_3} \\
&\qquad + \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}) + h\partial_{x_2} - i\cos u_1 \frac{\partial h}{\partial u_2}\partial_{x_3} \\
&\qquad + \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + i\partial_{u_1};
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

$$
\begin{aligned}
J_1 &= i(x_3\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_3}) + r\partial_{x_1} - iu_2\left(\cos u_1 \frac{\partial r}{\partial u_2} + \sin u_1 \frac{\partial r}{\partial u_3}\right)\partial_{x_3} \\
&\qquad + \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\
J_2 &= i(x_1\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_1}) + r\partial_{x_2} - iu_2\left(\sin u_1 \frac{\partial r}{\partial u_2} - \cos u_1 \frac{\partial r}{\partial u_3}\right)\partial_{x_3} \\
&\qquad + \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\
J_3 &= i(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + i\partial_{u_1}.
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

Тут

$$
f = f_1 \operatorname{ch} u_2 + f_2\left(\operatorname{ch} u_2 \ln|\operatorname{th}\frac{u_2}{2}| - 1\right), \tag{2.61}
$$

$$
h = h_1 e^{-u_2} + h_2 e^{2u_2} \tag{2.62}
$$

де f_1, f_2, h_1, h_2 *— довільні функції змінних* $u_3, \ldots, u_n$*;* $g(u_2, \ldots, u_n)$ *— розв'язок диференціального рівняння*

$$
\operatorname{sh}^{-2} u_2 g_{u_3u_3} + g_{u_2u_2} + \operatorname{cth} u_2 g_{u_2} - 2g = 0; \tag{2.63}
$$

та r задовольняє рівняння

$$u_2^2\left(r_{u_3u_3}+r_{u_2u_2}\right)-2r=0. \tag{2.64}$$

Доведення. Для спрощення вигляду операторів (2.36) будемо використовувати ті із перетворень (2.30), які не змінюють вигляд операторів (2.35). Здійснивши заміну змінних

$$y_a=x_a-iF_a(u),\quad v_j=u_j,\quad a=1,2,3,\quad j=1,\ldots,n,$$

зводимо оператори J_a (2.36) до операторів

$$\begin{aligned} J_1 &= i(y_3\partial_{y_2}-y_2\partial_{y_3})+\alpha\partial_{y_1}+\beta\partial_{y_2}+\gamma\partial_{y_3}+\mathcal{A}_1,\\ J_2 &= i(y_1\partial_{y_3}-y_3\partial_{y_1})+\rho\partial_{y_2}+\sigma\partial_{y_3}+\mathcal{A}_2, \\ J_3 &= i(y_2\partial_{y_1}-y_1\partial_{y_2})+\tau\partial_{y_3}+\mathcal{A}_3, \end{aligned} \tag{2.65}$$

де $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \rho,\ \sigma,\ \tau$ — довільні комплекснозначні гладкі функції змінних $v_1,v_2,\ldots,v_n$. Тут і далі $\mathcal{A}_a=\tilde{\eta}_a{}^j(v_1,v_2,\ldots,v_n)\,\partial_{v_j}$, $(a=1,2,3)$.

Підстановка (2.65) в комутаційні співвідношення (2.33) приводить до системи диференціальних рівнянь

$$\mathcal{A}_2\alpha=-i\gamma,\quad \mathcal{A}_1\rho-\mathcal{A}_2\beta=i\sigma,\quad \mathcal{A}_1\sigma-\mathcal{A}_2\gamma=i(\tau-\alpha-\rho), \tag{2.66}$$

$$\mathcal{A}_3\gamma-\mathcal{A}_1\tau=i\sigma,\quad \mathcal{A}_2\tau-\mathcal{A}_3\sigma=i\gamma; \tag{2.67}$$

$$\alpha-\rho-\tau=0,\quad \mathcal{A}_3\rho=-i\beta,\quad \mathcal{A}_3\alpha=i\beta,\quad \mathcal{A}_3\beta=i(\rho-\alpha-\tau), \tag{2.68}$$

для визначення коефіцієнтів α, β, γ, ρ, σ, τ. Оператори $\mathcal{A}_a$ повинні задовольняти комутаційні співвідношення (2.33) алгебри $AO(3)$. Отже, внаслідок теореми 2.4 вони збігаються з однією з шести трійок операторів (2.40)–(2.45).

Випадок 1. Усі оператори $\mathcal{A}_a$ тотожно дорівнюють нулю, тоді система (2.66)–(2.68) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &\beta=\gamma=\sigma=0, && \tau-\alpha-\rho=0,\\ &\alpha-\rho-\tau=0, && \rho-\alpha-\tau=0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $\alpha = \rho = \tau = 0$. Підстановка отриманого результату в (2.65) приводить до трійки (2.55).

Випадок 2. $\mathcal{A}_3 = i\partial_{u_1}$, тому відповідна цьому оператору підсистема (2.68) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь для функцій $\alpha,\ \beta,\ \rho,\ \tau$ відносно u_1. Її загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} &\alpha = C_0 + C_1 \sin 2v_1 - C_2 \cos 2v_1, \quad \beta = 2C_1 \cos 2v_1 + 2C_2 \sin 2v_1, \\ &\rho = C_0 - C_1 \sin 2v_1 + C_2 \cos 2v_1, \quad \tau = 2C_1 \sin 2v_1 - 2C_2 \cos 2v_1, \end{aligned} \tag{2.69}$$

де $C_0,\ C_1,\ C_2$ — довільні гладкі функції змінних $v_2, \ldots, v_n$.

Підвипадок 2.1. Оператори $\mathcal{A}_i$ мають вигляд (2.41). Тоді заміною змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + R_1 \cos v_1 + R_2 \sin v_1, \\ z_2 &= y_2 + R_2 \cos v_1 - R_1 \sin v_1, \\ z_3 &= y_3 - i\left(C_1 \cos 2v_1 + C_2 \sin 2v_1 + C_1\right) \end{aligned}$$

зводимо оператори (2.65), де $\alpha, \beta, \rho, \tau$ мають вигляд (2.69), до операторів

$$\begin{aligned} J_1 &= i(z_3\partial_{z_2} - z_2\partial_{z_3}) + \tilde{\alpha}\partial_{z_1} + \tilde{\gamma}\partial_{z_3} + \mathcal{A}_1, \\ J_2 &= i(z_1\partial_{z_3} - z_3\partial_{z_1}) + \tilde{\alpha}\partial_{z_2} + \tilde{\sigma}\partial_{z_3} + \mathcal{A}_2, \\ J_3 &= i(z_2\partial_{z_1} - z_1\partial_{z_2}) + \mathcal{A}_3. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Тут $\tilde{\alpha}(v_2, \ldots, v_n),\ \tilde{\gamma}(v_1, \ldots, v_n),\ \tilde{\sigma}(v_1, \ldots, v_n)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів.

Система (2.66) для операторів J_a (2.70) зводиться до трьох диференціальних рівнянь

$$\tilde{\sigma} = -i\mathcal{A}_1\tilde{\alpha}, \quad \tilde{\gamma} = i\mathcal{A}_2\tilde{\alpha}, \quad \mathcal{A}_1\tilde{\sigma} - \mathcal{A}_2\tilde{\gamma} = -2i\tilde{\alpha}. \tag{2.71}$$

Оскільки оператори $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ мають вигляд (2.41) та $\tilde{\alpha}$ не залежить від v_1 то із системи (2.71) випливає, що $\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma} = \tilde{\sigma} = 0$.

Отже, даному підвипадку відповідають формули (2.56).

Підвипадок 2.2. Нехай оператори $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2,\ \mathcal{A}_3$ мають вигляд (2.42). Заміна змінних

$$z_1 = y_1 + R_1 \cos v_1 + R_2 \sin v_1, \qquad z_2 = y_2 + R_2 \cos v_1 - R_1 \sin v_1,$$

$$z_3 = y_3 + \tfrac{1}{2}i\left[\frac{\partial R_2}{\partial v_2} - R_2 \operatorname{cth} v_2\right]\cos 2v_1 - \tfrac{1}{2}i\left[\frac{\partial R_1}{\partial v_2} - R_1 \operatorname{cth} v_2\right]\sin 2v_1$$
$$- \tfrac{1}{2}i\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_2} + R_2 \operatorname{cth} v_2\right),$$

де функції $R_1,\ R_2$ — розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial R_1}{\partial v_2} - R_1 \operatorname{cth} v_2 - 2C_2 = 0, \qquad \frac{\partial R_2}{\partial v_2} - R_2 \operatorname{cth} v_2 + 2C_1 = 0,$$

зводить оператори J_a (2.65) до операторів (2.70).

Система (2.71) для операторів $\mathcal{A}_a$ вигляду (2.42) зводиться до таких трьох рівнянь

$$\tilde{\gamma} = -i\sin v_1 \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial v_2}, \quad \tilde{\sigma} = -i\cos v_1 \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial v_2}, \quad \frac{\partial^2\tilde{\alpha}}{\partial v_2^2} + \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial v_2}\operatorname{cth} v_2 - 2\tilde{\alpha} = 0.$$

З останнього рівняння випливає, що

$$\tilde{\alpha} = f_1 \operatorname{ch} v_2 + f_2\left(\operatorname{ch} v_2 \ln|\operatorname{th}\frac{v_2}{2}| - 1\right),$$

де f_1, f_2 — довільні функції змінних $v_3, \ldots, v_n$. Отже, даному підвипадку відповідають формули (2.57) та (2.61).

Підвипадок 2.3. Нехай оператори $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2,\ \mathcal{A}_3$ мають вигляд (2.43). Заміна змінних

$$z_1 = y_1 + R_1\cos v_1 + R_2 \sin v_1, \qquad z_2 = y_2 + R_2\cos v_1 - R_1\sin v_1,$$
$$z_3 = y_3 + \tfrac{1}{2}i\left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_2} - R_2\operatorname{cth} v_2 + \operatorname{sh}^{-1} v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_3}\right)\cos 2v_1\right.$$
$$+\left(R_1\operatorname{cth} v_2 - \frac{\partial R_1}{\partial v_2} + \operatorname{sh}^{-1} v_2\frac{\partial R_2}{\partial v_3}\right)\sin 2v_1$$
$$\left.-\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_2} + R_2\operatorname{cth} v_2 - \operatorname{sh}^{-1} v_2\frac{\partial R_1}{\partial v_3}\right)\right],$$

де функції $R_1,\ R_2$ — розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial R_2}{\partial v_2} + \frac{1}{\operatorname{sh} v_2}\frac{\partial R_1}{\partial v_3} = \frac{R_2}{\operatorname{th} v_2} - 2C_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial v_2} - \frac{1}{\operatorname{sh} v_2}\frac{\partial R_2}{\partial v_3} = \frac{R_1}{\operatorname{th} v_2} + 2C_2.$$

зводить оператори J_a (2.65) до операторів (2.70).

Система (2.71) у цьому випадку зводиться до рівнянь

$$\tilde{\gamma} = -i\left(\sin v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2} - \frac{\cos v_1}{\operatorname{sh} v_2}\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_3}\right), \quad \tilde{\sigma} = -i\left(\cos v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2} + \frac{\sin v_1}{\operatorname{sh} v_2}\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_3}\right)$$

та рівняння, еквівалентного (2.63). Даному підвипадку відповідає трійка операторів (2.58).

Підвипадок 2.4. Оператори $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ мають вигляд (2.44). Використавши заміну змінних

$$\begin{aligned} &z_1 = y_1 + R_1 \cos v_1 + R_2 \sin v_1, \qquad z_2 = y_2 + R_2 \cos v_1 - R_1 \sin v_1, \\ &z_3 = y_3 + \tfrac{1}{2} i \left[\left(R_2 + \frac{\partial R_2}{\partial v_2}\right)\cos 2v_1 - \left(R_1 + \frac{\partial R_1}{\partial v_2}\right)\sin 2v_1 \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(R_2 - \frac{\partial R_2}{\partial v_2}\right)\right], \end{aligned}$$

де функції R_1, R_2 — розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$R_2 + \frac{\partial R_2}{\partial v_2} + 2C_1 = 0, \quad R_1 + \frac{\partial R_1}{\partial v_2} - 2C_2 = 0,$$

зводимо оператори J_a (2.65) до операторів (2.70).

Система (2.71) набуває вигляду

$$\tilde{\gamma} = -i \sin v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2}, \quad \tilde{\sigma} = -i \cos v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}}{\partial v_2^2} - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2} - 2\tilde{\alpha} = 0.$$

Із останнього рівняння випливає

$$\tilde{\alpha} = h_1 e^{-u_2} + h_2 e^{2u_2},$$

де h_1, h_2 — довільні функції змінних $v_3, \ldots, v_n$. Отже, даному підвипадку відповідають формули (2.59), (2.62).

Підвипадок 2.5. Оператори $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ мають вигляд (2.45). Використавши заміну

$$\begin{aligned} &z_1 = y_1 + R_1 \cos v_1 + R_2 \sin v_1, \qquad z_2 = y_2 + R_2 \cos v_1 - R_1 \sin v_1, \\ &z_3 = y_3 + \tfrac{1}{2} i \left[\left(R_2 + v_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_2} + v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_3}\right)\cos 2v_1\right. \end{aligned}$$

$$- \left(R_1 + v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_3} \right) \sin 2v_1 + \left(R_2 - v_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_2} + v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_3} \right) \Bigg],$$

де функції $R_1,\ R_2$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$R_2 + v_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_2} + v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_3} + 2C_1 = 0, \quad R_1 + v_2 \frac{\partial R_1}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_3} - 2C_2 = 0,$$

зводимо оператори J_a до операторів (2.70).

Система (2.71) у цьому випадку збігається із рівняннями

$$\tilde{\gamma} = -iv_2 \left(\sin v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2} - \cos v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_3} \right), \quad \tilde{\sigma} = -iv_2 \left(\cos v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_2} + \sin v_1 \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial v_3} \right)$$

та рівнянням на $\tilde{\alpha}$, яке еквівалентне (2.64). Отже, даному підвипадку відповідають формули (2.60).

Нееквівалентність отриманих трійок операторів J_a випливає із нееквівалентності операторів $\mathcal{A}_a$. Теорему доведено.

Зауваження. Рівняння (2.63), яке визначає функцію $g(u_2, \ldots, u_n)$ в реалізації (2.58) за допомогою заміни змінних $p = \int \frac{du_2}{\operatorname{sh} u_2}$, $q = u_3$ зводиться до рівняння $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \frac{2g}{\operatorname{sh}^2 p} = 0$.

Наслідок 2.4. Реалізації алгебри Лі $AE(3)$ в класі операторів P_a (2.35) та J_b (2.36) належать до одного із шести класів нееквівалентних реалізацій, які визначаються операторами P_a (2.35) та однією із трійок (2.55)–(2.60) операторів J_b.

2.4. Класифікація реалізацій алгебр Лі $AO(1,3)$

Даний підрозділ присвячено класифікації нееквівалентних реалізацій алгебри Лі групи псевдоповоротів $O(1,3)$, яка діє в просторі $V = X \times U$, де $X = \mathbb{R}^{1,3}$ — простір дійсних змінних x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ з метричним тензором

$$g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}, \tag{2.72}$$

$U = \mathbb{C}^n$ — n-вимірний простір комплексних змінних u_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$.

Означення 2.8. Лінійно незалежні векторні поля $J_{\alpha\beta}$ вигляду (2.29) складають реалізацію алгебри Лі $AO(1,3)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = i(g_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}J_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}J_{\alpha\mu}). \tag{2.73}$$

Тут і далі $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $g_{\mu\nu}$ — метричний тензор (2.72).

Для побудови реалізацій алгебри $AO(1,3)$ використаємо базис

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{23} + i\mathcal{J}_{01}), \quad & B_1 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{23} - i\mathcal{J}_{01}), \\ A_2 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{31} + i\mathcal{J}_{02}), \quad & B_2 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{31} - i\mathcal{J}_{02}), \\ A_3 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} + i\mathcal{J}_{03}), \quad & B_3 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} - i\mathcal{J}_{03}). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Внаслідок (2.73) мають місце такі комутаційні співвідношення:

$$[A_a, A_b] = i\varepsilon_{abc}A_c, \tag{2.75}$$

$$[B_a, B_b] = i\varepsilon_{abc}B_c, \tag{2.76}$$

$$[A_a, B_b] = 0. \tag{2.77}$$

Тут $a, b, c = 1, 2, 3$.

Як випливає з комутаційних співвідношень (2.75)–(2.77), у новому базисі (2.74) алгебра Лі $AO(1,3)$ групи Лоренца $O(1,3)$ зображується як пряма сума двох алгебр Лі $AO(3)$ групи поворотів $O(3)$:

$$AO(1,3) = AO_1(3) \oplus AO_2(3),$$

де

$$AO_1(3) = \langle A_a \mid a = 1, 2, 3\rangle, \quad AO_2(3) = \langle B_a \mid a = 1, 2, 3\rangle.$$

Це дає можливість використати результати теореми 2.4 для повного опису нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(1,3)$ в класі векторних полів Лі (2.38).

Згідно наслідку теореми 2.4 існують п'ять нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(3)$ з базисними елементами A_a, $(a = 1, 2, 3)$, які визначаються формулами (2.41)–(2.45).

Для повної класифікації нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(1,3)$ потрібно отримати всі трійки лінійно незалежних операторів B_b, $(b = 1,2,3)$, які разом з операторами A_a (2.41)–(2.45) задовольняють (2.76), (2.77). Для їх побудови, поряд із перетвореннями (2.30), будемо використовувати перетворення

$$X \to \tilde{X} = \mathcal{V}X\mathcal{V}^{-1}, \quad \text{де} \;\; \mathcal{V} = \exp Y. \tag{2.78}$$

Тут $Y = y_1\mathcal{Q}_1 + y_2\mathcal{Q}_2 + y_3\mathcal{Q}_3$, де y_a — довільні функції змінних $u_4, \ldots, u_n$, оператори $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ (їх явний вигляд наведено нижче) у просторі змінних (u_1, u_2, u_3) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри $AO(3)$. Перетворення (2.78) є *внутрішніми автоморфізмом* алгебри Лі $AO(1,3)$.

Теорема 2.6. *Реалізації алгебри $AO(1,3)$ в класі векторних полів Лі вигляду (2.38) еквівалентні одній з наведених нижче 28 реалізацій, які визначаються операторами A_a, B_b, $(a,b = 1,2,3)$.*

$$\mathbf{I}. \quad A_1 = \sin u_1\partial_{u_1}, \quad A_2 = \cos u_1\partial_{u_1}, \quad A_3 = i\partial_{u_1}. \tag{2.79}$$

Оператори B_b збігаються з однією з таких трійок операторів

$$\mathbf{1}. \quad B_1 = \sin u_2\partial_{u_2}, \quad B_2 = \cos u_2\partial_{u_2}, \quad B_3 = i\partial_{u_2}; \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2}. \quad & B_1 = -\sin u_2 \operatorname{cth} u_3\partial_{u_2} + \cos u_2\partial_{u_3} + \varepsilon\frac{\sin u_2}{\operatorname{sh} u_3}\partial u_4, \\ & B_2 = -\cos u_2 \operatorname{cth} u_3\partial_{u_2} - \sin u_2\partial_{u_3} + \varepsilon\frac{\cos u_2}{\operatorname{sh} u_3}\partial u_4, \\ & B_3 = i\partial_{u_2}, \qquad \varepsilon = 0,1; \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3}. \quad & B_1 = \sin u_2\partial_{u_2} + \cos u_2\partial_{u_3}, \\ & B_2 = \cos u_2\partial_{u_2} - \sin u_2\partial_{u_3}, \\ & B_3 = i\partial_{u_2}; \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4}. \quad & B_1 = \sin u_2\partial_{u_2} + u_3\cos u_2\partial_{u_3} + u_3\sin u_2\partial_{u_4}, \\ & B_2 = \cos u_2\partial_{u_2} - u_3\sin u_2\partial_{u_3} + u_3\cos u_2\partial_{u_4}, \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$B_3 = i\partial_{u_2}.$$

$$\textbf{II}.\quad \begin{aligned} A_1 &= -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ A_2 &= -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Оператори B_b *збігаються з однією з таких трійок операторів*

$$\textbf{1}.\quad \begin{aligned} &B_1 = -\sin u_3 \operatorname{cth} u_4 \partial_{u_3} + \cos u_3 \partial_{u_4} + \varepsilon \frac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial u_5, \\ &B_2 = -\cos u_3 \operatorname{cth} u_4 \partial_{u_3} - \sin u_3 \partial_{u_4} + \varepsilon \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial u_5, \\ &B_3 = i\partial_{u_3}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\textbf{2}.\quad \begin{aligned} &B_1 = \sin u_3 \partial_{u_3} + \cos u_3 \partial_{u_4}, \\ &B_2 = \cos u_3 \partial_{u_3} - \sin u_3 \partial_{u_4}, \\ &B_3 = i\partial_{u_3}; \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\textbf{3}.\quad \begin{aligned} &B_1 = \sin u_3 \partial_{u_3} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_4} + u_4 \sin u_3 \partial_{u_5}, \\ &B_2 = \cos u_3 \partial_{u_3} - u_4 \sin u_3 \partial_{u_4} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_5}, \\ &B_3 = i\partial_{u_3}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\textbf{III}.\quad \begin{aligned} A_1 &= -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ A_2 &= -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Оператори B_b *збігаються з однією з таких трійок операторів*

$$\textbf{1}.\quad \begin{aligned} &B_1 = -\sin u_4 \operatorname{cth} u_5 \partial_{u_4} + \cos u_4 \partial_{u_5} + \varepsilon \frac{\sin u_4}{\operatorname{sh} u_5} \partial u_6, \\ &B_2 = -\cos u_4 \operatorname{cth} u_5 \partial_{u_4} - \sin u_4 \partial_{u_5} + \varepsilon \frac{\cos u_4}{\operatorname{sh} u_5} \partial u_6, \\ &B_3 = i\partial_{u_4}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\textbf{2}.\quad B_1 = \sin u_4 \partial_{u_4} + \cos u_4 \partial_{u_5},$$

$$B_2 = \cos u_4 \partial_{u_4} - \sin u_4 \partial_{u_5}, \tag{2.90}$$
$$B_3 = i\partial_{u_4};$$

3. $$B_1 = \sin u_4 \partial_{u_4} + u_5 \cos u_4 \partial_{u_5} + u_5 \sin u_4 \partial_{u_6},$$
$$B_2 = \cos u_4 \partial_{u_4} - u_5 \sin u_4 \partial_{u_5} + u_5 \cos u_4 \partial_{u_6}, \tag{2.91}$$
$$B_3 = i\partial_{u_4}.$$

4. $$B_1 = \frac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_1} + \cos u_3 \partial_{u_2} - \sin u_3 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_3},$$
$$B_2 = \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_1} - \sin u_3 \partial_{u_2} - \cos u_3 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_3}, \tag{2.92}$$
$$B_3 = i\partial_{u_3};$$

5. $$B_1 = \gamma\frac{\sin u_4}{\operatorname{sh} u_5}\partial_{u_3} - \sin u_4 \operatorname{cth} u_5 \partial_{u_4} + \cos u_4 \partial_{u_5},$$
$$B_2 = \gamma\frac{\cos u_4}{\operatorname{sh} u_5}\partial_{u_3} - \cos u_4 \operatorname{cth} u_5 \partial_{u_4} - \sin u_4 \partial_{u_5}, \tag{2.93}$$
$$B_3 = i\partial_{u_4};$$

6. $$B_1 = \gamma e^{u_5} \sin u_4 \partial_{u_3} + \sin u_4 \partial_{u_4} + \cos u_4 \partial_{u_5},$$
$$B_2 = \gamma e^{u_5} \cos u_4 \partial_{u_3} + \cos u_4 \partial_{u_4} - \sin u_4 \partial_{u_5}, \tag{2.94}$$
$$B_3 = i\partial_{u_4};$$

IV. $$A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2},$$
$$A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \tag{2.95}$$
$$A_3 = i\partial_{u_1}.$$

Оператори B_b збігаються з однією з таких трійок операторів

1. $$B_1 = \sin u_3 \partial_{u_3} + \cos u_3 \partial_{u_4},$$
$$B_2 = \cos u_3 \partial_{u_3} - \sin u_3 \partial_{u_4}, \tag{2.96}$$
$$B_3 = i\partial_{u_3}.$$

2. $$B_1 = \sin u_3 \partial_{u_3} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_4} + u_4 \sin u_3 \partial_{u_5},$$

$$B_2 = \cos u_3 \partial_{u_3} - u_4 \sin u_3 \partial_{u_4} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_5}, \tag{2.97}$$
$$B_3 = i\partial_{u_3}.$$

3. $B_1 = \alpha \cos u_3 \partial_{u_2} + \sin u_3 \partial_{u_3}, \quad B_2 = -\alpha \sin u_3 \partial_{u_2} + \cos u_3 \partial_{u_3},$

$$B_3 = i\partial_{u_3}; \tag{2.98}$$

4. $B_1 = \beta \dfrac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial_{u_2} - \sin u_3 \operatorname{cth} u_4 \partial_{u_3} + \cos u_3 \partial_{u_4} + \varepsilon \dfrac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial u_5,$

$$B_2 = \beta \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial_{u_2} - \cos u_3 \operatorname{cth} u_4 \partial_{u_3} - \sin u_3 \partial_{u_4} + \varepsilon \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_4} \partial u_5,$$
$$B_3 = i\partial_{u_3}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \tag{2.99}$$

5. $B_1 = \beta e^{u_4} \sin u_3 \partial_{u_2} + \sin u_3 \partial_{u_3} + \cos u_3 \partial_{u_4},$

$$B_2 = \beta e^{u_4} \cos u_3 \partial_{u_2} + \cos u_3 \partial_{u_3} - \sin u_3 \partial_{u_4},$$
$$B_3 = i\partial_{u_3}; \tag{2.100}$$

6. $B_1 = \beta u_4 \sin u_3 \partial_{u_2} + \sin u_3 \partial_{u_3} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_4} + u_4 \sin u_3 \partial_{u_5},$

$$B_2 = \beta u_4 \cos u_3 \partial_{u_2} + \cos u_3 \partial_{u_3} - u_4 \sin u_3 \partial_{u_4} + u_4 \cos u_3 \partial_{u_5},$$
$$B_3 = i\partial_{u_3}. \tag{2.101}$$

V.
$$\begin{aligned} A_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\ A_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Оператори B_b збігаються з однією з таких трійок операторів

1. $B_1 = \sin u_4 \partial_{u_4} + u_5 \cos u_4 \partial_{u_5} + u_5 \sin u_4 \partial_{u_6},$

$$B_2 = \cos u_4 \partial_{u_4} - u_5 \sin u_4 \partial_{u_5} + u_5 \cos u_4 \partial_{u_6}, \tag{2.103}$$
$$B_3 = i\partial_{u_4}.$$

2. $B_1 = 2u_2 \partial_{u_1} - 2u_2 u_3 \partial_{u_2} + (u_2^2 - u_3^2 + \dfrac{1}{4}) \partial_{u_3},$

$$B_2 = u_2 \partial_{u_2} + u_3 \partial_{u_3},$$

$$B_3 = i\left(2u_2\partial_{u_1} - 2u_2u_3\partial_{u_2} + (u_2^2 - u_3^2 - \frac{1}{4})\partial_{u_3}\right); \qquad (2.104)$$

$$\mathbf{3}.\quad B_1 = \gamma\frac{\sin u_4}{\operatorname{sh} u_5}(u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) - \sin u_4 \operatorname{cth} u_5\partial_{u_4} + \cos u_4\partial_{u_5},$$
$$B_2 = \gamma\frac{\cos u_4}{\operatorname{sh} u_5}(u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) - \cos u_4 \operatorname{cth} u_5\partial_{u_4} - \sin u_4\partial_{u_5},$$
$$B_3 = i\partial_{u_4}; \qquad (2.105)$$

$$\mathbf{5}.\quad B_1 = \gamma e^{u_5}\sin u_4(u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) + \sin u_4\partial_{u_4} + \cos u_4\partial_{u_5},$$
$$B_2 = \gamma e^{u_5}\cos u_4(u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) + \cos u_4\partial_{u_4} - \sin u_4\partial_{u_5}, \qquad (2.106)$$
$$B_3 = i\partial_{u_4};$$

У формулах (2.93), (2.94), (2.98)–(2.101) *та* (2.105), (2.106) α, β, γ *або ненульові сталі, або дорівнюють відповідно* $\alpha = u_4$, $\beta = u_5$, $\gamma = u_6$.

Доведення. Зупинимося на основних етапах доведення, опускаючи громіздкі обрахунки.

Аналіз комутаційних співвідношень (2.77) показує, що оператори B_b $(b = 1, 2, 3)$ мають такий вигляд:

$$\mathbf{1}.\ B_b = \sum_{j=2}^{n}\xi_{bj}(u_2, \ldots, u_n)\partial_{u_j} \quad \text{для } A_a \ (2.41);$$

$$\mathbf{2}.\ B_b = \sum_{j=3}^{n}\xi_{bj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j} \quad \text{для } A_a \ (2.42);$$

$$\mathbf{3}.\ B_b = \sum_{j=2}^{n}\xi_{bj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j} \quad \text{для } A_a \ (2.44);$$

$$\mathbf{4}.\ B_b = \sum_{k=1}^{3}f_{bk}(u_4, \ldots, u_n)\mathcal{Q}_k + \sum_{j=4}^{n}\xi_{bj}(u_4, \ldots, u_n)\partial_{u_j} \text{ для решти } A_a.$$

У наведених вище формулах f_{bk}, ξ_{bj} — довільні гладкі комплексні функції, а оператори $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ визначаються такими формулами

$$\mathcal{Q}_1 \ = \ \frac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_1} + \cos u_3\partial_{u_2} - \sin u_3 \operatorname{cth} u_2\partial_{u_3},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_2 &= \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial_{u_1} - \sin u_3 \partial_{u_2} - \cos u_3 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_3 &= i\partial_{u_3},
\end{aligned} \qquad (2.107)$$

якщо A_a мають вигляд (2.43), та

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= 2u_2\partial_{u_1} - 2u_2u_3\partial_{u_2} + \left(u_2^2 - u_3^2 + \frac{1}{4}\right)\partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_2 &= u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_3 &= i\left(2u_2\partial_{u_1} - 2u_2u_3\partial_{u_2} + \left(u_2^2 - u_3^2 - \frac{1}{4}\right)\partial_{u_3}\right),
\end{aligned} \qquad (2.108)$$

якщо A_a мають вигляд (2.45). Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що оператори $\mathcal{Q}_a$ задовольняють комутаційні співвідношення для алгебри $AO(3)$: $[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b] = i\varepsilon_{abc}\mathcal{Q}_c$.

У *випадку* **1** оператори B_b діють у просторі змінних $(u_2, u_3, \ldots, u_q)$. Отже, згідно наслідку з теореми 2.4, оператори B_b отримуються з формул (2.41)–(2.45) шляхом формальної заміни u_j на u_{j+1}, $(j = 1, 2, \ldots, q-1)$.

Аналогічно знаходимо вигляд операторів B_b які відповідають *випадку* **2** та *випадку* **3** при $\xi_{b2} \equiv 0$, $\forall b$, оператори B_b отримуються з формул (2.41)–(2.45), шляхом формальної заміни u_j на u_{j+2}. Оператори B_b, що відповідають *випадку* **3** при умові, що всі $f_{bk} \equiv 0$ отримуються з (2.41)–(2.45), за допомогою заміни u_j на u_{j+3}.

Цим випадкам відповідають набори операторів (2.79)–(2.83), (2.84)–(2.87), (2.88)–(2.91), (2.95)–(2.97) та (2.102)–(2.103).

Розглянемо тепер *випадок* **3** (не всі ξ_{b2} дорівнюють нулю).

Позначимо через $\mathcal{T}_a$ оператори

$$\mathcal{T}_a = \sum_{j=3}^{n} \xi_{aj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j}, \quad a = 1, 2, 3.$$

Тепер оператори B_a, що відповідають цьому випадку можна записати у вигляді

$$B_a = b_a(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_2} + \mathcal{T}_a,$$

де обов'язково не всі $\mathcal{T}_a$ дорівнюють нулю. (Якщо всі $\mathcal{T}_a$ рівні нулю, то $[B_a, B_b] = 0$, $\forall\, a, b$.) Перевірка комутаційних співвідношень (2.76) показує, що мають місце рівності

$$\mathcal{T}_1 b_2 - \mathcal{T}_2 b_1 = b_3; \qquad \mathcal{T}_2 b_3 - \mathcal{T}_3 b_2 = b_1; \qquad \mathcal{T}_3 b_1 - \mathcal{T}_1 b_3 = b_2; \tag{2.109}$$

і оператори $\mathcal{T}_a$ задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи поворотів $O(3)$. Отже, згідно наслідку з теореми 2.4 маємо п'ять трійок операторів $\mathcal{T}_a$, які отримуються з формул (2.41)–(2.45), за допомогою формальної заміни u_j на u_{j+2}, $(j = 1, 2, \ldots, q-2)$.

Оскільки $\mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3}$, то за допомогою заміни

$$\tilde{u}_1 = u_1, \quad \tilde{u}_2 = u_2 + f(u_3, \ldots, u_n), \quad \tilde{u}_k = u_k, \qquad k = 3, 4, \ldots, n,$$

де $f = i\displaystyle\int b_3\, du_3$ зводимо B_3 до $B_3 = i\partial_{\tilde{u}_3}$. Тоді (2.109) набуває вигляду

$$\mathcal{T}_1 b_2 = \mathcal{T}_2 b_1, \qquad b_1 = -i\frac{\partial b_2}{\partial u_3}, \qquad b_2 = i\frac{\partial b_1}{\partial u_3}. \tag{2.110}$$

Розв'язавши два останні рівняння, отримуємо вигляд операторів B_a:

$$\begin{aligned} B_1 &= (\alpha_1 \sin u_3 + \alpha_2 \cos u_3)\partial_{u_2} + \mathcal{T}_1, \\ B_2 &= (\alpha_1 \cos u_3 - \alpha_2 \sin u_3)\partial_{u_2} + \mathcal{T}_2, \\ B_3 &= i\partial_{u_3}. \end{aligned}$$

Тут α_1, α_2 — функції змінних $u_4, \ldots, u_n$.

Якщо $\mathcal{T}_1 = \sin u_3 \partial_{u_3}$, $\mathcal{T}_2 = \cos u_3 \partial_{u_3}$, то з рівнянь (2.110) випливає, що $\alpha_1 = 0$, α_2 — довільна функція. Якщо $\alpha_2 = 0$ то отримана реалізація еквівалентна реалізації (2.82). Отже $\alpha_2 = \mathrm{const} \neq 0$ або можна покласти $\alpha_2 = u_4$ і має місце трійка операторів (2.98).

Для решти реалізацій операторів $\mathcal{T}_a$ за допомогою заміни $\tilde{u}_1 = u_1$, $\tilde{u}_2 = u_2 + \varphi(u_4, \ldots, u_n)$, $\tilde{u}_k = u_k$, $k = 3, 4, \ldots, n$, зводимо B_a до вигляду

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_1 \sin u_3 \partial_{u_2} + \mathcal{T}_1, \\ B_2 &= \alpha_1 \cos u_3 \partial_{u_2} + \mathcal{T}_2, \end{aligned}$$

$$B_3 \;=\; i\partial_{u_3}.$$

В залежності від вигляду операторів $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ рівняння (2.110) мають такі розв'язки

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{(1)} & \alpha_1 = \dfrac{\beta}{\operatorname{sh} u_4}, & \text{якщо } \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \text{ отримуються з формул (2.42) та (2.43)},\\
\textbf{(2)} & \alpha_1 = \beta \exp(u_4), & \text{якщо } \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \text{ отримуються з формул (2.44)},\\
\textbf{(3)} & \alpha_1 = \beta u_4, & \text{якщо } \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \text{ отримуються з формул (2.45)},
\end{array}
$$

де β — довільні функції змінних $u_5, \ldots, u_n$. Якщо $\beta = 0$, то приходимо до реалізацій, які еквівалентні побудованим раніше. Тому можна вважати, що $\beta = u_5$ або $\beta = \mathrm{const} \neq 0$. Отримані оператори B_b збігаються із однією з трійок операторів (2.99)–(2.101).

Розглянемо тепер *випадок* **4.**

Оператори B_a можна подати у вигляді

$$B_a = f_a\mathcal{Q}_1 + g_a\mathcal{Q}_2 + h_a\mathcal{Q}_3 + \mathcal{R}_a, \qquad a = 1, 2, 3.$$

Перевірка комутаційних співвідношень (2.76) показує, що оператори $\mathcal{R}_a$ задовольняють співвідношення $[\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b] = i\varepsilon_{abc}\mathcal{R}_c$. Отже, внаслідок теореми 2.4, оператори $\mathcal{R}_a$ отримуються з формул (2.40)–(2.45) в результаті формальної заміни u_j на u_{j+3} .

Якщо $\mathcal{R}_a \equiv 0$, то за допомогою перетворення еквівалентності (2.78), де y_a — довільні функції змінних $u_4, \ldots, u_n$, оператор B_3 зводиться до вигляду

$$B_3 = r(u_4, \ldots, u_n)\mathcal{Q}_3.$$

Відзначимо, що перетворення (2.78) не змінюють вигляд операторів A_a, оскільки $[A_a, \mathcal{Q}_b] = 0, \quad a, b = 1, 2, 3.$

Із комутаційних співвідношень (2.76) випливає, що $r = \pm 1$. За допомогою перетворень (2.78) зводимо оператори B_b до $\;B_b = \mathcal{Q}_b, \;(b = 1, 2, 3)$. Таким чином, отримали (2.92) та (2.104).

Якщо оператори $\mathcal{R}_a$ отримуються з формул (2.41)–(2.45) то використовуючи перетворення (2.78), зводимо B_3 до $B_3 = \mathcal{R}_3$. Далі, з комутаційних співвідношень $[B_3, B_1] = iB_2,\ [B_3, B_2] = -iB_1$ випливає, що

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{a=1}^{3} (G_a \cos u_4 + H_a \sin u_4)\mathcal{Q}_a + \mathcal{R}_1,\\
B_2 &= \sum_{a=1}^{3} (H_a \cos u_4 - G_a \sin u_4)\mathcal{Q}_a + \mathcal{R}_2,\\
B_3 &= \mathcal{R}_3 = i\partial_{u_4},
\end{aligned}
$$

де G_a, H_a — довільні гладкі функції змінних $u_5, \ldots, u_n$.

Використавши автоморфізми (2.78), де y_a — функції змінних $u_5, \ldots, u_n$, перетворюємо коефіцієнти G_a в нуль.

Перевірка виконання комутаційного співвідношення $[B_1, B_2] = B_3$ приводить до таких рівнянь для $H_a,\ \ (a = 1, 2, 3)$:

$$
H_a(\mathcal{R}_1 \cos u_4 - \mathcal{R}_2 \sin u_4) + \cos u_4(\mathcal{R}_1 H_a) - \sin u_4(\mathcal{R}_2 H_a) = 0.
$$

В залежності від вигляду операторів $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ці рівняння мають такі розв'язки

(**a**) $H_a = 0,$ якщо $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ отримуються з формул (2.41),

(**b**) $H_a = \dfrac{\tilde{H}_a}{\operatorname{sh} u_5},$ якщо $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ отримуються з формул (2.42) та (2.43),

(**c**) $H_a = \tilde{H}_a \exp(u_5),$ якщо $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ отримуються з формул (2.44),

(**d**) $H_a = \tilde{H}_a u_5,$ якщо $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ отримуються з формул (2.45).

Тут $\tilde{H}_a$ — довільні функції змінних $u_6, \ldots, u_n$.

Тобто, оператори B_1, B_2, B_3, мають відповідно вигляд

(**a**) $B_1 = \mathcal{R}_1, \qquad B_2 = \mathcal{R}_2, \qquad B_3 = \mathcal{R}_3;$

(**b**) $B_1 = \dfrac{\sin u_4}{\operatorname{sh} u_5}[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_1,$

$$B_2 = \frac{\cos u_4}{\operatorname{sh} u_5}[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_2, \qquad B_3 = \mathcal{R}_3;$$

$$(\mathbf{c}) \quad B_1 = e^{u_5}\sin u_4[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_1,$$
$$B_2 = e^{u_5}\cos u_4[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_2, \qquad B_3 = \mathcal{R}_3;$$

$$(\mathbf{d}) \quad B_1 = u_5\sin u_4[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_1,$$
$$B_2 = u_5\cos u_4[\tilde{H}_1\mathcal{Q}_1 + \tilde{H}_2\mathcal{Q}_2 + \tilde{H}_3\mathcal{Q}_3] + \mathcal{R}_2 \qquad B_3 = \mathcal{R}_3.$$

Випадок **(a)** дає в результаті реалізацію еквівалентну (2.79), (2.81).

Якщо у випадку **(b)** $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ відповідають формулам (2.42), то, використовуючи перетворення (2.78) де y_a залежать від $u_6, \ldots, u_n$, можемо покласти $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = 0$ для $\mathcal{Q}_a$ вигляду (2.107) та $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_3 = 0$ для $\mathcal{Q}_a$ вигляду (2.108). Таким чином, приходимо до (2.93) та (2.105), відповідно. Якщо ж $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ відповідають формулам (2.43), то, використавши перетворення (2.78) позбуваємося $\tilde{H}_a$ і приходимо до (2.89).

У випадку **(c)**, так само як і у випадку **(b)**, можемо покласти $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = 0$ для $\mathcal{Q}_a$ вигляду (2.107) та $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_3 = 0$ для $\mathcal{Q}_a$ вигляду (2.108). В результаті отримаємо відповідно (2.94) та (2.106).

Нарешті у випадку **(d)** за допомогою перетворення (2.78) приходимо до (2.91).

Безпосередньою перевіркою переконуємось у нееквівалентності побудованих реалізацій. Теорему доведено.

Використаємо результати теореми для побудови одного важливого класу реалізацій алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$.

Означення 2.9. Лінійно незалежні векторні поля P_μ, $J_{\alpha\beta}$ вигляду (2.29) складають реалізацію алгебри Лі $AP(1,3)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (2.73) та співвідношення

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha). \tag{2.111}$$

Нехай

$$P_\mu = i\partial_{x_\mu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.112}$$

а оператори $J_{\alpha\beta}$ — це векторні поля Лі загального вигляду

$$J_{\alpha\beta} = \xi^{\alpha\beta\gamma}(x,u)\partial_{x_\gamma} + \eta^{\alpha\beta j}(x,u)\partial_{u_j}, \quad \alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3, \;\; j = 1,2,\dots,n.$$

Тоді оператори P_μ мають фізичний сенс генераторів групи трансляцій у просторі Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$, а відповідна реалізація називається *коваріантною* [44]. Саме коваріантні реалізації групи Пуанкаре найчастіше використовуються у застосуваннях теорії Лі для аналізу конкретних фізичних задач, оскільки саме вони складають групи інваріантності основних рівнянь релятивістської фізики (рівняння Максвелла, Дірака, Вейля, ейконала, Д'Аламбера, Янга–Міллса).

Перевіривши комутаційні співвідношення (2.111), отримуємо, що оператори $J_{\alpha\beta}$ мають такий вигляд

$$\begin{aligned} J_{0a} &= i(x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0}) + \zeta^{0a\gamma}(u)\partial_{x_\gamma} + \tilde{\eta}^{0\alpha j}(u)\partial_{u_j}, \\ J_{ab} &= i(x_b\partial_{x_a} - x_a\partial_{x_b}) + \zeta^{ab\gamma}(u)\partial_{x_\gamma} + \tilde{\eta}^{abj}(u)\partial_{u_j}, \qquad a,b,c = 1,2,3. \end{aligned}$$

Тут $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\tilde{\eta}^{\alpha\beta j}$ — довільні гладкі функції. Обмежимося розглядом випадку, коли $\zeta^{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Отже, будемо досліджувати зображення алгебри Пуанкаре в класі векторних полів Лі (2.112) та

$$J_{0a} = i(x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0}) + \mathcal{J}_{0a}, \quad J_{ab} = i(x_b\partial_{x_a} - x_a\partial_{x_b}) + \mathcal{J}_{ab}, \tag{2.113}$$

де

$$\mathcal{J}_{0a} = \tilde{\eta}^{0\alpha j}(u)\partial_{u_j}, \qquad \mathcal{J}_{ab} = \tilde{\eta}^{abj}(u)\partial_{u_j}. \tag{2.114}$$

Підставивши (2.113) у (2.73), переконуємося, що оператори (2.114) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лоренца, де $J_{\alpha\beta} \to \mathcal{J}_{\alpha\beta}$.

У теоремі 2.6 ми отримали реалізації алгебри Лоренца у базисі (2.74). Для того, щоб провести опис усіх реалізацій алгебри $AP(1,3)$ потрібно доповнити перелік операторів A_a, B_a отриманий у теоремі 2.6 такими

$$\mathbf{I}. \quad A_a = 0, \qquad B_a = 0, \qquad a = 1,2,3; \tag{2.115}$$

$$\mathbf{II}. \quad A_a, \qquad B_b = 0, \qquad b = 1, 2, 3, \tag{2.116}$$

де A_a визначається однією з формул

$$A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad A_3 = i\partial_{u_1}; \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned} &A_1 = -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ &A_2 = -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ &A_3 = i\partial_{u_1}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} &A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ &A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ &A_3 = i\partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned} &A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\ &A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\ &A_3 = i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\mathbf{III}. \quad A_a = 0, \qquad B_b, \qquad a = 1, 2, 3, \tag{2.121}$$

де B_b визначається однією з формул

$$B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = i\partial_{u_1}; \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned} &B_1 = -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ &B_2 = -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ &B_3 = i\partial_{u_1}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned} &B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ &B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ &B_3 = i\partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\ B_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\ B_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{2.125}$$

Оператори A_a, B_b, $(a, b = 1, 2, 3)$ вказаного вигляду очевидно задовольняють співвідношення (2.75)–(2.77), але не утворюють реалізацій алгебри $AO(1, 3)$, оскільки є лінійно залежними.

Перехід до базису операторів (2.114) визначається формулами

$$\mathcal{J}_{0a} = -i(A_a - B_a), \quad \mathcal{J}_{ab} = i\varepsilon_{abc}(A_c + B_c), \quad a, b, c = 1, 2, 3. \tag{2.126}$$

Таким чином формули (2.112), (2.113) та (2.126) разом із формулами (2.79)–(2.106) та (2.115)–(2.125) визначають 39 нееквівалентних реалізацій алгебри Лі групи Пуанкаре $AP(1, 3)$ в розглянутому класі комплексних векторних полів Лі.

2.5. Висновки до розділу 2

У цьому розділі одержано такі результати:

1. Проведено повну класифікацію нееквівалентних реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ в просторі довільної скінченної кількості змінних.
2. Побудовано всі нееквівалентні реалізації алгебри Лі групи поворотів $O(3)$ у просторі довільної скінченної кількості комплексних змінних.
3. У просторі трьох незалежних та n залежних комплексних змінних прокласифіковано коваріантні реалізації алгебри Евкліда $AE(3)$.
4. Прокласифіковано комплексні реалізації алгебри $AO(1, 3)$ групи Лоренца. Цей результат використано для опису важливого класу реалізацій алгебри $AP(1, 3)$ групи Пуанкаре в просторі $\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^n$.

Проведена класифікація нееквівалентних реалізацій дозволяє розв'язати задачі групової класифікації диференціальних рівнянь. Зокрема класифікація реалізацій дійсних алгебр Лі розмірності $m \leqslant 4$ може бути застосована для дослідження таких типів диференціальних рівнянь в дійсних змінних:

– звичайних диференціальних рівнянь порядку $\leqslant 4$,

– систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку,

– узагальнених систем двох диференціальних рівнянь гідродинамічного типу з двома незалежними змінними,

– еволюційних диференціальних рівнянь другого порядку.

У наступному розділі дисертації ці реалізації використано для побудови інваріантних систем трьох та чотирьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Отримані результати можуть бути застосовані для дослідження скінченновимірних алгебр Лі диференціальних операторів першого порядку (див., наприклад, [50, 80, 103].)

Відзначимо, що проведена класифікація дійсних алгебр Лі в просторі довільної скінченної кількості змінних включає як частинний випадок класифікацію реалізацій в просторі трьох змінних, яка досліджувалась у [135]. Детальний аналіз допущених у цій роботі помилок наведено у [117].

Також виходячи з результатів цього розділу можна отримати класифікацію комплексних алгебр Лі такої ж розмірності в просторі довільної скінченної кількості комплексних змінних.

Зокрема, вона включає побудовані С. Лі у [92] реалізації тривимірних алгебр у просторі двох комплексних змінних, які збігаються з реалізаціями $R(3A_1, 5)$, $R(A_{2.1} \oplus A_1, 4)$, $R(A_{3.1}, 3)$, $R(A_{3.2}, 2)$, $R(A_{3.2}, 3)$, $R(A_{3.3}, 2)$, $R(A_{3.3}, 4)$, $R(A^a_{3.4}, 2)$, $R(A^a_{3.4}, 3)$.

Алгебра $A^b_{3.5}$ у класифікації Лі відсутня, оскільки у просторі комплексних змінних вона ізоморфна алгебрі $A^a_{3.4}$. Інші реалізації з таблиці 2.4 існують у просторі більше ніж двох змінних.

Отримані реалізації алгебр $AO(3)$, $AE(3)$, $AO(1,3)$ та $AP(1,3)$ можуть бути застосованими для розв'язання задачі групової класифікації диференціальних рівнянь та їх систем, інваріантних відносно відповідних груп Лі.

Зокрема у наступному розділі дисертації побудовано загальний вигляд систем диференціальних рівнянь з частинними похідними які допускають реалізацію (2.56) алгебри Евкліда в якості алгебри інваріантності.

Відзначимо, що використовуючи результати класифікації реалізацій алгебри $AO(1,3)$ можна отримати всі нееквівалентні реалізації алгебри Лі групи поворотів $O(4)$ у просторі $\mathbb{C}^n$.

Лінійно незалежні векторні поля $J_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ утворюють реалізацію алгебри $AO(4)$, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = i\left(\delta_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} + \delta_{\beta\nu}J_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} - \delta_{\beta\mu}J_{\alpha\nu}\right).$$

Перейшовши до нового базису

$$\mathcal{A}_a = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc} + J_{a4}\right), \quad \mathcal{B}_a = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc} - J_{a4}\right), \tag{2.127}$$

$(a, b, c = 1, 2, 3)$ неважко переконатися, що оператори $\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_b$, задовольняють комутаційні співвідношення (2.75)–(2.77) алгебри $AO(1,3)$.

Отже, для того щоб отримати повний перелік нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(4)$ в просторі $\mathbb{C}^n$ необхідно виконати обернену до (2.127) заміну базису, де оператори $\mathcal{A}_a = A_a$, $\mathcal{B}_b = B_b$, визначаються формулами (2.79)–(2.106).

РОЗДІЛ 3

Груповий аналіз та побудова точних розв'язків систем диференціальних рівнянь

Даний розділ присвячено деяким застосуванням алгебраїчних методів до групової класифікації та побудови точних розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Побудовані у розділі 2 реалізації дозволяють розв'язати задачу опису найбільш загального вигляду диференціальних рівнянь, що допускають відповідну алгебру Лі як алгебру інваріантності.

У цьому розділі така задача розв'язується для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантних відносно три- та чотиривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі та на прикладі однієї з реалізацій алгебри Евкліда, яка розглядається в просторі з n залежними змінними.

У підрозділі 3.1 знайдено функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку для тривимірних та чотиривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі та побудовано канонічний вигляд нееквівалентних інваріантних систем трьох та чотирьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах методом Лі в загальному вигляді.

У підрозділі 3.2 отримано функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку у просторі трьох незалежних та n залежних змінних для реалізації (2.56) алгебри $E(3)$ та відповідної реалізації алгебри $\tilde{E}(3)$.

У підрозділі 3.3 проведено редукцію рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою $\tilde{P}(1,3)$-інваріантних анзаців та побудовано ряд нових розв'язків цих рівнянь. У підрозділі 3.4 досліджено умови про яких система рівнянь Максвелла–Шредінгера допускає розв'язки у відокремлених змінних.

Стисло викладемо основні поняття та твердження, що використовуються в цьому розділі.

Нехай $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ — базис деякої реалізації $R(A)$ алгебри Лі A групи G, яка діє у просторі $V = \langle x, u \rangle$. Змінні $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вважаємо незалежними, а $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — залежними.

Як відомо [32, 33], рівняння

$$F(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{3.1}$$

є інваріантним відносно реалізації $R(A)$, якщо функція F задовольняє співвідношення

$$\mathrm{pr}^{(1)} Q_k F \Big|_{F=0} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.2}$$

Тут $\mathrm{pr}^{(1)} Q_k$ — перше продовження оператора Q_k, $\underset{1}{u} = \{u_{x_i}\}$.

Перше продовження оператора $Q = \xi^j(x,u)\partial_{x_j} + \eta^\alpha(x,u)\partial_{u_\alpha}$ здійснюється за формулою

$$\mathrm{pr}^{(1)} Q = Q + \zeta_j^\alpha \partial_{u_j^\alpha},$$

де $\zeta_j^\alpha = D_j \eta^\alpha - u_k^\alpha D_j \xi^k$, $D_j = \partial_{x_j} + u_j^b \partial_{u^b} + \cdots$ — оператор повного диференціювання.

Функція $F(x, u, \underset{1}{u})$ називається диференціальним інваріантом першого порядку алгебри A з базисними операторами Q_k, якщо

$$\mathrm{pr}^{(1)} Q_k F = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.3}$$

Набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів першого порядку реалізації $R(A)$, через які можна виразити будь-який її диференціальний інваріант першого порядку, називається функціональним базисом диференціальних інваріантів першого порядку реалізації $R(A)$.

Основні результати розділу опубліковано у роботах [18, 96, 25, 21, 97, 95, 12, 146].

3.1. Інваріантні системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

У цьому підрозділі проводимо побудову систем звичайних диференціальних рівнянь

$$F_k(t, x, \dot{x}) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, N, \tag{3.4}$$

які є інваріантними відносно тривимірних ($N = 3$) та чотиривимірних ($N = 4$) розв'язних дійсних алгебр Лі. Змінну t вважаємо незалежною, а змінні $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ — залежними. Похідну за t будемо позначати крапкою над символом $\dot{x}_k = \dfrac{dx_k}{dt}$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N)$.

Зауважимо, що інваріантні рівняння, отримані при різному виборі незалежної змінної у базисних елементах реалізації, еквівалентні між собою. Для спрощення обчислень вибираємо змінні таким чином, щоб канонічні форми реалізацій не містили оператора диференціювання за незалежною змінною. Цьому вибору відповідає найпростіший загальний вигляд інваріантного рівняння.

Довільна реалізація N-вимірної алгебри Лі ($N \leqslant 4$) еквівалентна реалізації, де явно фігурує лише N перших змінних (за виключенням реалізацій $R(4A_1, 2)$, $R(4A_1, 5)$). Тому при відповідному виборі координат та залежної змінної ($t = x_{N+1}$) всі змінні x_i та $\dot{x}_i$, $i = N + 2, \dots$ будуть інваріантами. Отже, диференціальні інваріанти тривимірних (чотиривимірних) розв'язних алгебр Лі шукаємо у просторі з трьома (чотирма) залежними змінними.

Спочатку будуємо диференціальні рівняння, інваріантні відносно тривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі. Будемо вважати, що у реалізаціях таких алгебр (див. табл. 2.4) $x_4 = t$ — незалежна змінна, x_1, x_2, x_3 — функції від t.

Для кожної з реалізацій будуємо функціональний базис диференціальних інваріантів. Повністю відповідних обчислень не наводимо внаслідок їх громіздкості. Як приклад розглянемо реалізацію $R(A^b_{3.5}, 1)$.

Перші продовження базисних операторів цієї реалізації у просторі змінних (t, x_1, x_2, x_3) мають вигляд

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}^{(1)}Q_1 = \partial_{x_1}, \qquad \mathrm{pr}^{(1)}Q_2 = \partial_{x_2},\\ &\mathrm{pr}^{(1)}Q_3 = (bx_1 + x_2)\partial_{x_1} + (-x_1 + bx_2)\partial_{x_2} + \partial_{x_3} + (b\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\partial_{\dot{x}_1}\\ &\qquad + (-\dot{x}_1 + b\dot{x}_2)\partial_{\dot{x}_2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Знайдемо базис диференціальних інваріантів. Для цього потрібно знайти фундаментальний розв'язок відповідної цим операторам систем (3.2). З двох перших рівнянь системи випливає, що розв'язки необхідно шукати у вигляді функцій від $(t, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$. Відомо, що ця задача зводиться до відшукання перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dx_3 = \frac{d\dot{x}_1}{(b\dot{x}_1 + \dot{x}_2)} = \frac{d\dot{x}_2}{(-\dot{x}_1 + b\dot{x}_2)}. \tag{3.6}$$

Лівими частинами перших інтегралів рівнянь (3.6), а отже і базисом інваріантів реалізації $R(A^b_{3.5}, 1)$ є функції t, $\dot{x}_3$, $(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)e^{-2bx_3}$, $x_3 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}$.

Для кожної з реалізацій дійсних тривимірних розв'язних алгебр Лі (див. табл. 2.4) знайдено функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку. Перелік базисних інваріантів наведено в додатку Б у вигляді таблиці B.1.

Далі аналогічно проводимо побудову диференціальних інваріантів чотиривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі. При цьому вважаємо, що у побудованих реалізаціях цих алгебр $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ — функції від t, $x_5 = t$ — незалежна змінна. Розглядаємо лише реалізації, які існують у просторі змінних $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = t\rangle$. Перелік результатів наведено таблицях B.2–B.3.

Отримані повні набори диференціальних інваріантів алгебр Лі описують загальний вигляд нееквівалентних з точністю до довільної невиродженої заміни змінних систем диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантних відносно тривимірних (чотиривимірних) дійсних розв'язних алгебр Лі.

За допомогою прямої перевірки переконуємося, що системи диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантні відносно тривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі, зводяться до нормальної форми тоді, коли ранг відповідної реалізації дорівнює трьом.

Отримані результати сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 3.1. *Нехай система трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку є інваріантною відносно деякої реалізації дійсної тривимірної розв'язної алгебри Лі рангу* 3. *Тоді така система інтегрується в квадратурах за допомогою методу Лі і невироджені заміни змінних, які зводять відповідну реалізацію до однієї з реалізацій, наведених у таблиці 2.4, зводять систему рівнянь до одного із таких випадків:*

$$
\begin{array}{ll}
R(3A_1, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t), \quad \dot{x}_2 = f_2(t), \quad \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{2.1} \oplus A_1, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3}, \quad \dot{x}_2 = f_2(t), \quad \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{3.1}, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t) + x_3 f_2(t), \quad \dot{x}_2 = f_2(t), \quad \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{3.2}, 1) & \dot{x}_1 = [f_1(t) + x_3 f_2(t)]e^{x_3}, \;\; \dot{x}_2 = f_2(t)e^{x_3}, \;\; \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{3.3}, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3}, \quad \dot{x}_2 = f_2(t)e^{x_3}, \quad \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{3.4}, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3}, \quad \dot{x}_2 = f_2(t)e^{a x_3}, \quad \dot{x}_3 = f_3(t); \\
R(A_{3.5}, 1) & \dot{x}_1 = f_1(t)e^{b x_3}\sin(x_3 + f_2(t)), \\
 & \dot{x}_2 = f_1(t)e^{b x_3}\cos(x_3 + f_2(t)), \;\; \dot{x}_3 = f_3(t).
\end{array}
$$

Провівши аналогічні міркування для системи чотирьох рівнянь, інваріантних відносно чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі, переконались у справедливості такої теореми.

Теорема 3.2. *Нехай система чотирьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку є інваріантною відносно деякої реалізації дійсної чотиривимірної розв'язної алгебри Лі рангу* 4*. Тоді така система може бути проінтегрована в квадратурах за допомогою методу Лі і невироджені заміни змінних, які зводять відповідну реалізацію до однієї з реалізацій, наведених у таблицях 2.5–2.6, зводять систему рівнянь до одного із таких випадків:*

$$
\begin{array}{ll}
R(A_{4.1},1) & \dot x_1 = f_1(t) + x_4 f_2(t) + \frac{1}{2} f_3(t) {x_4}^2, \ \dot x_2 = f_2(t) + x_4 f_3(t), \\
& \dot x_3 = f_3(t), \quad \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.2},1) & \dot x_1 = f_1(t) e^{q x_4}, \ \ \dot x_2 = [x_4 + f_2(t)] f_3(t) e^{x_4}, \\
& \dot x_3 = f_3(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.3},1) & \dot x_1 = f_1(t) e^{x_4}, \quad \dot x_2 = x_4\, f_3(t) + f_2(t), \\
& \dot x_3 = f_3(t), \quad \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.4},1) & \dot x_1 = [\frac{1}{2} {x_4}^2 + x_4\, f_2(t) + f_1(t)] f_3(t) e^{x_4}, \\
& \dot x_2 = [x_4 + f_2(t)] f_3(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_3 = f_3(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.5},1) & \dot x_1 = f_1(t) e^{a x_4}, \ \ \dot x_2 = f_2(t) {f_1}^{\frac{b}{a}}(t)\, e^{b x_4}, \\
& \dot x_3 = f_3(t) {f_1}^{\frac{c}{a}}(t)\, e^{c x_4}, \ \ \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.6},1) & \dot x_1 = f_1(t) e^{q x_4}, \quad \dot x_2 = f_3(t) e^{p x_4} \sin(f_2(t) + x_4), \\
& \dot x_3 = f_3(t) e^{p x_4} \cos(f_2(t) + x_4), \quad \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.7},1) & \dot x_1 = [f_1(t) e^{x_4} + x_3 (f_2(t) + x_4)]\, f_3(t) e^{x_4}, \\
& \dot x_2 = [f_2(t) + x_4]\, f_3(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_3 = f_3(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.8},1) & \dot x_1 = [f_1(t) e^{q x_4} + x_3] f_2(t) e^{x_4}, \ \ \dot x_2 = f_2(t) e^{x_4}, \\
& \dot x_3 = f_3(t) e^{q x_4}, \ \ \dot x_4 = f_4(t); \\
R(A_{4.9},1) & \dot x_1 = f_1(t) e^{2 q x_4} + x_3 f_2(t) e^{q x_4} \sin(x_4 + f_3(t)),
\end{array}
$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t)e^{qx_4}\sin(x_4+f_3(t)),$$
$$\dot{x}_3 = f_3(t)e^{qx_4}\cos(x_4+f_3(t)),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$$

$R(A_{4.10},1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3}\sin(x_4+f_2(t)),$
$$\dot{x}_2 = f_1(t)e^{x_3}\cos(x_4+f_2(t)),\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$$

$R(4A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t),\quad \dot{x}_2 = f_2(t),\quad \dot{x}_3 = f_3(t),\quad \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_4},\quad \dot{x}_2 = f_2(t),\quad \dot{x}_3 = f_3(t),\quad \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{2.1}\oplus A_{2.1},1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3},\ \dot{x}_2 = f_2(t)e^{x_4},\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{3.1}\oplus A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)+x_4f_3(t),\ \dot{x}_2 = f_2(t),\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{3.2}\oplus A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = [x_3+f_1(t)]f_2(t)e^{x_3},\ \dot{x}_2 = f_2(t)e^{x_3},\ \dot{x}_3 = f_3(t),$
$$\dot{x}_4 = f_4(t);$$

$R(A_{3.3}\oplus A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3},\ \dot{x}_2 = f_2(t)e^{x_3},\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{3.4}\oplus A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{x_3},\ \dot{x}_2 = f_2(t)e^{ax_3},\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t);$

$R(A_{3.5}\oplus A_1,1)$ $\quad \dot{x}_1 = f_1(t)e^{bx_3}\sin(x_3+f_2(t)),$
$$\dot{x}_2 = f_1(t)e^{bx_3}\cos(x_3+f_2(t)),\ \dot{x}_3 = f_3(t),\ \dot{x}_4 = f_4(t).$$

3.2. Диференціальні рівняння з частинними похідними, інваріантні відносно алгебри $\boldsymbol{AE(3)}$

У цьому підрозділі знайдено загальний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (3.1), які в якості алгебри інваріантності допускають реалізацію (2.56) алгебри Евкліда $AE(3)$. У рівнянні (3.1) F — деяка гладка функція своїх аргументів, яка визначена в просторі $\underset{1}{V} = V \otimes \langle \underset{1}{u} \rangle$, $\underset{1}{u} = \{u_{x_\alpha} | \alpha = 1,2,3\}$.

Спочатку побудуємо базис диференціальних інваріантів першого порядку для реалізації (2.56) у просторі трьох незалежних (x_1, x_2, x_3) та двох залежних змінних (u^1, u^2). Для зручності змінні u^1, u^2 будемо позначати через u, v, а для позначення похідних будемо вживати нижні індекси: $\dfrac{\partial u}{\partial x_a}=u_a$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_a}=v_a$, $a=1,2,3$. У цих позначеннях реалізація (2.56) набуває вигляду

$$P_a=i\partial_{x_a},\qquad a=1,2,3, \tag{3.7}$$

$$J_1=i(x_3\partial_{x_2}-x_2\partial_{x_3})+\sin u\partial_u, \tag{3.8}$$

$$J_2=i(x_1\partial_{x_3}-x_3\partial_{x_1})+\cos u\partial_u, \tag{3.9}$$

$$J_3=i(x_2\partial_{x_1}-x_1\partial_{x_2})+i\partial_u. \tag{3.10}$$

Базис диференціальних інваріантів першого порядку для даної реалізації складатимуть п'ять функцій.

Продовження операторів трансляцій збігаються із цими операторами, а продовження операторів (3.8)–(3.10) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(1)}J_1&=i(x_3\partial_{x_2}-x_2\partial_{x_3})+\sin u\partial_u+u_1\cos u\partial_{u_1}\\&+(u_2\cos u+iu_3)\partial_{u_2}+(u_3\cos u-iu_2)\partial_{u_3}+i(v_3\partial_{v_2}-v_2\partial_{v_3}),\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(1)}J_2&=i(x_1\partial_{x_3}-x_3\partial_{x_1})+\cos u\partial_u-(u_1\sin u+iu_3)\partial_{u_1}\\&-u_2\sin u\partial_{u_2}+(iu_1-u_3\sin u)\partial_{u_3}+i(v_1\partial_{v_3}-v_3\partial_{v_1}),\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{pr}^{(1)}J_3=i\{(x_2\partial_{x_1}-x_1\partial_{x_2})+\partial_u+u_2\partial_{u_1}-u_1\partial_{u_2}+v_2\partial_{v_1}-v_1\partial_{v_2}\}. \tag{3.13}$$

Система (3.3), що відповідає цим операторам, містить рівняння $P_aI=0$, а тому шукані інваріанти не залежать від змінних x_1, x_2, x_3. Задача побудови фундаментального розв'язку системи (3.3) зводиться до відшукання перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{\xi^j(x,u)}=\frac{du_\alpha}{\eta^\alpha(x,u)}=\frac{du_j^\alpha}{\zeta_j^\alpha}.$$

Функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку оператора (3.13) утворюють функції

$$p=\frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{u_3},\qquad q=u-\operatorname{arc\,tg}\frac{u_1}{u_2},\qquad r=u_3,$$

$$s=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{v_3},\qquad f=u-\operatorname{arc\,tg}\frac{v_1}{v_2},\qquad t=v_3,\qquad v.$$

Очевидно, що інваріанти розглядуваної реалізації алгебри Евкліда є функціями цих змінних. Будемо шукати інваріанти операторів $\mathrm{pr}^{(1)}J_1$, $\mathrm{pr}^{(1)}J_2$ у вигляді $F(v,p,q,r,s,t,f)$. Тоді

$$\mathrm{pr}^{(1)}J_1F = \sin u\, XF + \cos u\, YF, \quad \mathrm{pr}^{(1)}J_2F = \cos u\, XF - \sin u\, YF,$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad X &= i(1+p^2)\sin q\partial_p + \left(1+\frac{i}{p}\cos q\right)\partial_q - ipr\sin q\partial_r + \\ &+ i(1+s^2)\sin f\partial_s + \left(1+\frac{i}{s}\cos f\right)\partial_f - ist\sin f\partial_t; \\ Y &= i(1+p^2)\cos q\partial_p - \frac{i}{p}\sin q\partial_q + r(1-ip\cos q)\partial_r + \\ &+ i(1+s^2)\cos f\partial_s - \frac{i}{s}\sin f\partial_f - ist\cos f\partial_t. \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що відповідна система еквівалентна рівнянням $XF=0$, $YF=0$. Отже функція F є інваріантом обох операторів X, Y.

Функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку оператора X утворюють функції

$$\alpha = \frac{p\sin q}{1-ip\cos q} - \frac{s\sin f}{1-is\cos f}, \qquad \kappa = r(1-ip\cos q),$$
$$\rho = r^2(1+p^2), \quad \phi = t(1-is\cos f), \quad \tau = t^2(1+s^2).$$

Інваріанти оператора Y шукаємо у вигляді $G(\alpha,\kappa,\rho,\tau,\phi)$, тоді

$$YG = \tilde{Y}G, \qquad \text{де} \qquad \tilde{Y} = -\alpha\partial_\alpha + \phi\partial_\phi + 2\kappa\partial_\kappa + 2\rho\partial_\rho.$$

Відповідна система має такі перші інтеграли $\dfrac{\kappa}{\rho}$, $\dfrac{\phi}{\sqrt{\rho}}$, $\alpha\phi$, τ.

Ці функції та функція v і є інваріантами операторів X та Y, а отже і операторів P_a, $\mathrm{pr}^{(1)}J_a$ $(a=1,2,3)$, тобто вони є диференціальними інваріантами реалізації (3.7)–(3.10) алгебри Евкліда $AE(3)$.

Повернувшись до початкових позначень, отримуємо, що базис диференціальних інваріантів першого порядку для цієї реалізації складають функції:

$$I_1 = \frac{i(u_1 \sin u + u_2 \cos u) - u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \qquad I_2 = \frac{i(v_1 \sin u + v_2 \cos u) - v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

$$I_3 = \frac{v_3(u_2 \sin u - u_1 \cos u) + u_3(v_1 \cos u - v_2 \sin u) + i(u_1 v_2 - v_1 u_2)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

$$I_4 = v, \qquad I_5 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Відзначимо, що єдиний інваріант, який існує у просторі з однією залежною змінною u, був знайдений І.А. Єгорченко [140].

Найбільш загальний вигляд диференціального рівняння, інваріантного відносно алгебри Евкліда $AE(3)$ з базисними операторами (3.7)–(3.10) такий:

$$\Phi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = 0.$$

Зокрема, інваріантною відносно цієї реалізації алгебри Евкліда буде така система:

$$\begin{aligned} \frac{i(u_1 \sin u + u_2 \cos u) - u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} &= \varphi(I_3, I_4, I_5), \\ \frac{i(v_1 \sin u + v_2 \cos u) - v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} &= \psi(I_3, I_4, I_5). \end{aligned}$$

Провівши аналогічні міркування, які тут не наводимо внаслідок їх громіздкості, ми побудували базис диференціальних інваріантів для цієї реалізації алгебри Евкліда у просторі трьох незалежних (x_1, x_2, x_3) та n залежних змінних $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$:

$$I_1 = \frac{i(u_1^1 \sin u^1 + u_2^1 \cos u^1) - u_3^1}{(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2}, \qquad I_2^k = \frac{i(u_1^k \sin u^1 + u_2^k \cos u^1) - u_3^k}{\sqrt{(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2}},$$

$$I_3^k = \frac{u_3^k(u_2^1 \sin u^1 - u_1^1 \cos u^1) + u_3^1(u_1^k \cos u^1 - u_2^k \sin u^1) + i(u_1^1 u_2^k - u_1^k u_2^1)}{(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2},$$

$$I_4^k = u^k, \qquad I_5^k = (u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Тут верхній індекс позначає номер залежної змінної, а нижні індекси позначають похідні, наприклад: $\dfrac{\partial u^b}{\partial x_a} = u_a^b$.

Знайдемо інваріанти розширеної алгебри Евкліда. Лінійно незалежні диференціальні оператори $P_a,\ J_{bc},\ D\quad (a,b,c=1,2,3)$ вигляду (2.29) складають реалізацію алгебри Лі $A\tilde{E}(3)$ розширеної групи Евкліда $\tilde{E}(3)$ в класі векторних полів Лі, якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення (2.31), (2.32) та співвідношення

$$[P_a, D] = P_a, \qquad [J_{ab}, D] = 0.$$

Реалізацію алгебри Евкліда операторами (3.7)–(3.10) можна доповнити до реалізації розширеної алгебри Евкліда оператором ділатації

$$D = i(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}) + \varepsilon\partial_v, \qquad \varepsilon = 0, 1. \tag{3.14}$$

Шукаємо інваріанти розширеної алгебри Евкліда у просторі трьох незалежних (x_1, x_2, x_3) та двох залежних змінних (u, v) у вигляді функцій від інваріантів I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. У цих змінних продовжений оператор ділатації набуває вигляду

$$\tilde{D} = \varepsilon\partial_{I_4} + iI_1\partial_{I_1} - 2iI_5\partial_{I_5}.$$

Відповідна система має такі перші інтеграли $I_4 + i\varepsilon \ln I_1,\ (I_1)^2 I_5$. Вони та вирази I_2, I_3 є інваріантами реалізації розширеної алгебри Евкліда операторами (3.7)–(3.10) та (3.14).

Аналогічно ми знайшли інваріанти цієї реалізації розширеної алгебри Евкліда у просторі трьох незалежних та n залежних змінних $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$. Це такі функції

$$I_4^k + i\varepsilon \ln I_1, \quad I_2^k, \quad I_3^k, \quad (I_1)^2 I_5^k, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

3.3. Симетрія та точні розв'язки рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу

Електромагнітне поле в просторі Мінковського $\mathbb{R}^{1,3} = \langle x \rangle = \langle x_0, \boldsymbol{x} \rangle = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ описується відомими рівняннями Максвелла, які за допомогою дійсного коваріантного вектор-потенціалу електромагнітного поля $A = (A_0, \boldsymbol{A}) = (A_0, A_1, A_2, A_3),\ A = A(x)$ можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад, [6, 44])

$$\Box A_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A_\nu) = 0. \tag{3.15}$$

Тут і далі використовуємо позначення: $\Box u = g_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu$, $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_{A_\mu} = \dfrac{\partial}{\partial A_\mu}$. Індекси, позначені грецькими літерами, пробігають множину $\{0, 1, 2, 3\}$, піднімання та опускання індексів здійснюється за допомогою метричного тензора $g_{\mu\nu}$ (2.72) простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$.

Природним узагальненням рівняння (3.15) є рівняння [47, 48]

$$\Box A_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A_\nu) = F(A_\nu A^\nu)A_\mu, \tag{3.16}$$

де F – довільна гладка функція своїх аргументів. Якщо $F = -m^2 + \lambda A_\nu A^\nu$, де $m \neq 0$, λ — сталі, то максимальною групою симетрії рівнянь (3.16) буде група Пуанкаре $AP(1,3)$, а у випадку $F = \lambda(A_\nu A^\nu)$ — конформна група $C(1,3)$. При цьому базисні оператори відповідних алгебр Лі вказаних груп мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + A^\mu\frac{\partial}{\partial A_\nu} - A^\nu\frac{\partial}{\partial A_\mu},\\
&D = x_\mu\partial_\mu - A_\mu\frac{\partial}{\partial A_\mu},\\
&K_\mu = 2x^\mu D - (x_\nu x^\nu)\partial_\mu + 2A^\mu x_\nu\frac{\partial}{\partial A_\nu} - 2A_\nu x^\nu\frac{\partial}{\partial A_\mu}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

У цьому підрозділі повністю розв'язано задачу симетрійної редукції системи рівнянь

$$\Box A_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A_\nu) = \lambda A_\nu A^\nu\, A_\mu \tag{3.18}$$

до систем звичайних диференціальних рівнянь за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{A}P(1,3) = AP(1,3) \Subset \langle D\rangle$, які не спряжені підалгебрам алгебри $AP(1,3)$. Тут розглянуто тільки такі алгебри, оскільки за підалгебрами алгебри $AP(1,3)$ симетрійна редукція виконана в [9].

Базис розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{A}P(1,3)$ складають оператори P_μ, $J_{\mu\nu}$, D вигляду (3.17).

Відзначимо, що при $\lambda = 0$ система (3.18) збігається з рівняннями (3.15).

Для симетрійної редукції рівнянь (3.18), будемо використовувати лінійну конструкцію $A\tilde{P}(1,3)$-інваріантних анзаців, за допомогою якої було здійснено редукцію нелінійних рівнянь Дірака [40, 71], Максвелла [19], $SU(2)$-рівнянь Янга–Міллса [17, 20]. Відзначимо, що для редукції рівнянь Янга–Міллса, які записані у коваріантній формі, відомі $AP(1,3)$- та $A\tilde{P}(1,3)$-інваріантні анзаци попередньо було зведено до коваріантного вигляду за допомогою процедури розмноження розв'язків перетвореннями з групи Лоренца (див., наприклад, роботи [87, 144]). Оскільки досліджувана система рівнянь (3.18) теж записана у коваріантній формі, то, слідуючи роботам [17, 20, 87, 144] для її симетрійної редукції використовуємо $AP(1,3)$-інваріантні анзаци, які у нашому випадку мають вигляд

$$A_\mu(x) = \theta(x) a_{\mu\nu}(x) B^\nu(\omega), \tag{3.19}$$

де $B^\nu = B^\nu(\omega)$ — нові невідомі функції змінної $\omega = \omega(x)$,

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu}(x) = {} & (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu)\operatorname{ch}\theta_1 + (d_\mu a_\nu - d_\nu a_\mu)\operatorname{sh}\theta_1 + \\ & + 2(a_\mu + d_\mu)[\theta_2 \cos\theta_3 b_\nu - \theta_2 \sin\theta_3 c_\nu + \theta_2^2 e^{-\theta_1}(a_\nu + d_\nu)] \\ & + (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\sin\theta_3 - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\cos\theta_3 - 2e^{-\theta_1}\theta_2 b_\mu (a_\nu + d_\nu). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Тут a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — компоненти векторів $a = (1,0,0,0)$, $b = (0,1,0,0)$, $c = (0,0,1,0)$, $d = (0,0,0,1)$. Для таких векторів відповідні згортки мають вигляд

$$\begin{aligned} & x_0 = ax, \quad x_1 = -bx, \quad x_2 = -cx, \quad x_3 = -dx, \\ & B_0 = aB, \quad B_1 = -bB, \quad B_2 = -cB, \quad B_3 = -dB. \end{aligned}$$

Далі позначаємо $k = a + d$.

Нижче наведено тривимірні підалгебри розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{A}P(1,3)$, що не спряжені підалгебрам алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ та відповідні значення функцій θ, θ_i $(i = 1,2,3), \omega$. Тут вживаємо позначення $M = P_0 + P_3$, $G_1 = J_{01} - J_{13}$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_3)$. Якщо не вказано інше, то $\alpha, \beta > 0$.

$L_1 = \langle D, P_0, P_3 \rangle$: $\theta = |bx|^{-1}, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = cx(bx)^{-1}$;

$L_2 = \langle J_{12} + \alpha D, P_0, P_3 \rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}},\ \theta_1 = \theta_2 = 0,\ \theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}, \alpha > 0$;

$L_3 = \langle J_{12}, D, P_0 \rangle$: $\theta = |dx|^{-1}, \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}, \omega = \dfrac{(bx)^2 + (cx)^2}{(dx)^2}$;

$L_4 = \langle J_{12}, D, P_3 \rangle$: $\theta = |ax|^{-1}, \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}, \omega = \dfrac{(bx)^2 + (cx)^2}{(ax)^2}$;

$L_5 = \langle J_{03} + \alpha D, P_0, P_3 \rangle$: $\theta = |bx|^{-1},\ \theta_1 = \alpha^{-1} \ln |bx|,\ \theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = \dfrac{cx}{bx}$, $\alpha > 0$;

$L_6 = \langle J_{03} + \alpha D, P_1, P_2 \rangle$: $\theta = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}},\ \theta_1 = \frac{1}{2} \ln |(ax - dx)(kx)^{-1}|$, $\theta_2 = \theta_3 = 0$, $\omega = (1-\alpha) \ln |ax - dx| + (1+\alpha) \ln |kx|, \alpha > 0$;

$L_7 = \langle J_{03} + \alpha D, M, P_1 \rangle$: $\theta = |cx|^{-1}, \theta_1 = \alpha^{-1} \ln |cx|,\ \theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = |kx|^{\alpha} |cx|^{1-\alpha}, \alpha > 0$;

$L_8 = \langle J_{03} + D + 2T, P_1, P_2 \rangle$: $\theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}}, \theta_1 = \frac{1}{2} \ln |ax - dx|, \theta_2 = \theta_3 = 0$, $\omega = kx - \ln |ax - dx|$;

$L_9 = \langle J_{03} + D + 2T, M, P_1 \rangle$: $\theta = |cx|^{-1}, \theta_1 = \ln |cx|,\ \theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = kx - 2 \ln |cx|$;

$L_{10} = \langle J_{03}, D, P_1 \rangle$: $\theta = |cx|^{-1}, \theta_1 = \ln |(ax - dx)(cx)^{-1}|$, $\theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = ((ax)^2 - (dx)^2)(cx)^{-2}$;

$L_{11} = \langle J_{03}, D, M \rangle$: $\theta = |cx|^{-1}, \theta_1 = -\ln |kx(cx)^{-1}|,\ \theta_2 = \theta_3 = 0,\ \omega = cx(bx)^{-1}$;

$L_{12} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_0, P_3\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = -\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\beta \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$;

$L_{13} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \beta D, P_1, P_2\rangle$: $\theta = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{1}{2} \ln |(ax - dx)(kx)^{-1}|$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -\dfrac{1}{2\alpha} \ln |(ax-dx)(kx)^{-1}|$, $\omega = (\alpha-\beta) \ln |ax - dx| + (\alpha + \beta) \ln |kx|$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$;

$L_{14} = \langle J_{12} + \alpha(J_{03} + D + 2T), P_1, P_2\rangle$: $\theta = |ax - dx|^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{1}{2} \ln |ax - dx|$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -\frac{1}{2} \ln |ax - dx|$, $\omega = kx - \ln |ax - dx|$;

$L_{15} = \langle J_{12} + \alpha J_{03}, D, M\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = -\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = \ln[((bx)^2 + (cx)^2)(kx)^{-2}] + 2\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$; $\alpha > 0$;

$L_{16} = \langle J_{03} + \alpha D, J_{12} + \beta D, M\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{1}{2} \ln[((bx)^2 + (cx)^2)(kx)^{-2}]$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = \ln[((bx)^2 + (cx)^2)^{1-\alpha}(kx)^{2\alpha}] + 2\beta \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1$, $|\alpha| + \beta \neq 0$, $\beta \geqslant 0$;

$L_{17} = \langle J_{03} + D + 2T, J_{12} + \alpha T, M\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{1}{2} \ln((bx)^2 + (cx)^2)$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = kx - \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\alpha \geqslant 0$;

$L_{18} = \langle J_{03} + D, J_{12} + 2T, M\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{1}{2} \ln((bx)^2 + (cx)^2)$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = kx + 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$;

$L_{19} = \langle J_{03}, J_{12}, D\rangle$: $\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = -\frac{1}{2} \ln |kx(ax - dx)^{-1}|$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$, $\omega = ((bx)^2 + (cx)^2)|(ax)^2 - (dx)^2|^{-1}$;

$L_{20} = \langle G_1, J_{03} + \alpha D, P_2\rangle$: $\theta = |(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \dfrac{1}{2\alpha} \ln |(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2|$, $\theta_2 = \frac{1}{2} bx(kx)^{-1}$, $\theta_3 = 0$, $\omega = |kx|^{2\alpha}|(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2|^{1-\alpha}$, $0 < |\alpha| \leqslant 1$;

$L_{21} = \langle J_{03} + D, G_1 + P_2, M\rangle$: $\theta = |cx\,kx - bx|^{-1}, \theta_1 = \ln|cx\,kx - bx|,\ \theta_2 = \frac{1}{2}cx,\ \theta_3 = 0, \omega = kx$;

$L_{22} = \langle J_{03} - D + M, G_1, P_2\rangle$: $\theta = |kx|^{-\frac{1}{2}}, \theta_1 = -\frac{1}{2}\ln|kx|,\ \theta_2 = \frac{1}{2}bx(kx)^{-1}$, $\theta_3 = 0,\ \omega = ax - dx + \ln|kx| - (bx)^2(kx)^{-1}$;

$L_{23} = \langle J_{03} + 2D, G_1 + 2T, M\rangle$: $\theta = |cx|^{-1}, \theta_1 = \frac{1}{2}\ln|cx|,\ \theta_2 = -\dfrac{1}{4}kx,\ \theta_3 = 0,\ \omega = [4bx + (kx)^2](cx)^{-1}$;

$L_{24} = \langle J_{03} + 2D, G_1 + 2T, P_2\rangle$: $\theta = |4bx + (kx)^2|^{-1}, \theta_1 = \frac{1}{2}\ln|4bx + (kx)^2|$, $\theta_2 = -\dfrac{1}{4}kx,\ \theta_2 = 0,\ \omega = [ax - dx + bx\,kx + \dfrac{1}{6}(kx)^3]^2[4bx + (kx)^2]^{-3}$.

Коваріантна форма $A\tilde{P}(1,3)$-інваріантних анзаців (3.19)–(3.20) дозволяє здійснити симетрійну редукцію рівнянь Максвелла (3.18) у загальному вигляді.

Теорема 3.3. *Анзац* (3.19) *редукує рівняння* (3.18) *до системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$k_{\mu\gamma}\ddot{B}^\gamma + l_{\mu\gamma}\dot{B}^\gamma + m_{\mu\gamma}B^\gamma = \lambda(B^\gamma B_\gamma)B_\mu. \tag{3.21}$$

При цьому коефіцієнти редукованої системи мають вигляд

$$\begin{aligned} &k_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_1 - G_\mu G_\gamma, \quad l_{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma}F_2 + 2Q_{\mu\gamma} - G_\mu H_\gamma - G_\mu\dot{G}_\gamma, \\ &m_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma}, \qquad \dot{B}^\gamma = \frac{dB^\gamma}{d\omega}, \quad \ddot{B}^\gamma = \frac{d^2B^\gamma}{d\omega^2}, \quad \dot{G}_\gamma = \frac{dG_\gamma}{d\omega}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

де $F_1,\ F_2,\ G_\mu,\ Q_{\mu\gamma},\ H_\gamma,\ R_{\mu\gamma}$ *— деякі гладкі функції змінної* ω, *які визначаються із співвідношень:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = F_1(\omega)\theta^2; \quad \theta\,\Box\omega + 2\frac{\partial\theta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = F_2(\omega)\theta^3; \\ &a_{\nu\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = G_\mu(\omega)\theta, \quad \theta\frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} + 3a_{\nu\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\nu} = H_\mu(\omega)\theta^2; \\ &a^\gamma{}_\mu\frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x^\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\delta} + G_\mu(\omega)a_{\delta\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} - G_\nu(\omega)a_{\delta\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} = Q_{\mu\nu}(\omega)\theta^2; \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$g_{\mu\nu}\Box\theta + 2a^{\gamma}{}_{\mu}\frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial \theta}{\partial x_{\delta}} - a^{\gamma}{}_{\mu}a_{\delta\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{\gamma}\partial x_{\delta}} - a^{\gamma}{}_{\mu}\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x_{\delta}}\frac{\partial \theta}{\partial x^{\gamma}} -$$

$$-a^{\gamma}{}_{\mu}\frac{\partial a_{\delta\nu}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial \theta}{\partial x_{\delta}} + \theta(a^{\gamma}{}_{\mu}\Box a_{\gamma\nu} - a^{\gamma}{}_{\mu}\frac{\partial^2 a_{\delta\nu}}{\partial x^{\gamma}\partial x_{\delta}}) = R_{\mu\nu}(\omega)\theta^3.$$

Доведення. Підставивши анзац (3.19) у ліву частину системи (3.18), отримуємо, що

$$\partial_\beta\partial^\beta A_\mu - \partial^\mu(\partial_\beta A_\beta) = \theta\left(a_{\mu\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta} - a_{\beta\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\right)\ddot{B}^\gamma +$$

$$+\Bigg\{\theta\left(a_{\mu\gamma}\Box\omega + 2\frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta} - a_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_\beta\partial x^\mu} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\right) +$$

$$+2a_{\mu\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x^\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta} - a_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\right)\Bigg\}\dot{B}^\gamma +$$

$$+\Bigg\{a_{\mu\gamma}\Box\theta - a_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^\mu\partial x_\beta} + 2\frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\theta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\beta} -$$

$$-\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\beta}\frac{\partial\theta}{\partial x^\mu} + \theta\left(\Box a_{\mu\gamma} - \frac{\partial^2 a_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu\partial x_\beta}\right)\Bigg\}B^\gamma.$$

Згорнувши ліву частину отриманої рівності з $a^{\mu}{}_{\delta}$ і врахувавши, що

$$a_{\gamma\beta}a^{\gamma}{}_{\alpha} = a_{\beta}{}^{\gamma}a_{\alpha\gamma} = g_{\beta\alpha},$$

приходимо до виразу

$$a^{\mu}{}_{\delta}\left[\partial_\beta\partial^\beta A_\mu - \partial^\mu(\partial_\beta A_\beta)\right] = \theta\Bigg[g_{\delta\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta} - a^{\mu}{}_{\delta}a_{\beta\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\Bigg]\ddot{B}^\gamma +$$

$$+\Bigg\{\theta\Bigg[g_{\delta\gamma}\Box\omega + 2a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta} - a^{\mu}{}_{\delta}a_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_\beta\partial x^\mu} - a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta} -$$

$$-a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\Bigg] + 2g_{\delta\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x^\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta} - a^{\mu}{}_{\delta}a_{\beta\gamma}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}\right]\Bigg\}\dot{B}^\gamma +$$

$$+\left\{g_{\delta\gamma}\Box\theta - a^{\mu}{}_{\delta}a_{\beta\gamma}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{\mu}\partial x_{\beta}} + 2a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\mu\gamma}}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\theta}{\partial x^{\beta}} - a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial x_{\beta}} - \right.$$

$$\left. -a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial\theta}{\partial x^{\mu}} + \theta\left(a^{\mu}{}_{\delta}\Box a_{\mu\gamma} - a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial^2 a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}\partial x_{\beta}}\right)\right\}B^{\gamma}. \tag{3.24}$$

Проробивши цю процедуру з правою частиною рівності (3.18), одержуємо вираз $\lambda\,\theta^3(B_{\gamma}B^{\gamma})B_{\mu}$. Отже, коефіцієнти біля $\ddot{B}^{\gamma}$, $\dot{B}^{\gamma}$, B^{γ} у (3.24) повинні бути виразами вигляду $\theta^3\Omega(\omega)$.

Згорнувши коефіцієнт біля $\ddot{B}^{\gamma}$ з $g^{\delta\gamma} = g_{\delta\gamma}$, одержуємо вираз

$$\theta\left[4\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}} - a^{\mu\gamma}a_{\beta\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\mu}}\right] =$$

$$= \theta\left[4\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}}\right] = 3\theta\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}},$$

звідки випливає, що

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}} = \theta^2 F_1(\omega).$$

Повернувшись до першого коефіцієнта (3.24), бачимо, що і вираз

$$a^{\mu}{}_{\delta}a_{\beta\gamma}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\mu}} = \left(a^{\mu}{}_{\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x^{\mu}}\right)\left(a_{\beta\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\right)$$

має вигляд $\theta^2\tilde{F}_{\delta\gamma}(\omega)$. Оскільки значення $a^{\mu}{}_{\delta}\dfrac{\partial\omega}{\partial x^{\mu}}$ не залежить від позначення індексу μ, то можемо покласти

$$\tilde{F}_{\delta\gamma}(\omega) = G_{\delta}(\omega)G_{\gamma}(\omega).$$

Отже коефіцієнт при $\ddot{B}^{\gamma}$ у (3.24) має вигляд $\theta(g_{\delta\gamma}F_1 - G_{\delta}G_{\gamma})$; тут $\frac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x^{\beta}} = F_1(\omega)\theta^2$, $a_{\beta\gamma}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_{\beta}} = G_{\gamma}(\omega)\theta$.

Провівши аналогічні міркування для двох інших коефіцієнтів у (3.24) переконуємося у справедливості теореми. Теорему доведено.

Згідно з теоремою 3.3, щоб провести повну редукцію системи (3.18) до систем звичайних диференціальних рівнянь за підалгебрами алгебри

$\tilde{A}P(1,3)$ достатньо обчислити коефіцієнти $k_{\mu\gamma}$, $l_{\mu\gamma}$, $m_{\mu\gamma}$ для кожної з підалгебр L_i $(i = 1, 2, \ldots, 24)$. Зупинимося на випадку підалгебри L_2. Тут

$$\theta = ((bx)^2 + (cx)^2)^{-\frac{1}{2}}, \ \theta_1 = \theta_2 = 0, \ \theta_3 = \operatorname{arc\,tg}\frac{cx}{bx},$$
$$\omega = \ln((bx)^2 + (cx)^2) + 2\alpha \operatorname{arc\,tg}\frac{cx}{bx}, \ \alpha > 0;$$

тому

$$\begin{aligned}
a_{\mu\nu} &= a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu + (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\sin\theta_3 - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\cos\theta_3, \\
\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} &= [(b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\cos\theta_3 + (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\sin\theta_3]\frac{\partial\theta_3}{\partial x_\alpha}, \\
\frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= [-(b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\sin\theta_3 + (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\cos\theta_3]\frac{\partial\theta_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\theta_3}{\partial x^\beta} + \\
& [(b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\cos\theta_3 + (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\sin\theta_3]\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x_\alpha \partial x^\beta}.
\end{aligned}$$

Згідно з цим

$$a^\gamma{}_\mu \frac{\partial a_{\gamma\nu}}{\partial x^\delta} = (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\frac{\partial\theta_3}{\partial x^\delta},$$

$$a^\gamma{}_\mu \Box a_{\gamma\nu} = (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu)\frac{\partial\theta_3}{\partial x_\delta}\frac{\partial\theta_3}{\partial x^\delta} + (b_\mu c_\nu - b_\nu c_\mu)\Box\theta_3.$$

Далі, оскільки

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_\delta} = 2\theta^2[c^\delta(cx + \alpha bx) + b^\delta(bx - \alpha cx)],$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta} = -\theta^3(bx\, b^\delta + cx\, c^\delta), \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial x_\delta} = \theta^2(bx\, c^\delta - cx\, b^\delta),$$

то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\delta} = -4(1+\alpha^2)\theta^2, \qquad \Box\omega = 0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_\delta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\delta} = 2\theta^3, \quad \Box\theta = -\theta^3, \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial x_\delta}\frac{\partial\theta_3}{\partial x^\delta} = \theta^2, \quad \Box\theta_3 = 0.$$

Підставивши отримані вище значення в (3.23) переконуємося, що

$$\theta^2 F_1(\omega) = -4\theta^2(1+\alpha^2); \qquad \theta^3 F_2(\omega) = 4\theta^3;$$

$$\theta G_\mu(\omega) = 2(\alpha c_\mu + b_\mu)\theta; \qquad \theta^2 H_\mu(\omega) = \theta(\theta b_\mu) + 3(-b_\mu \theta^2);$$
$$Q_{\mu\nu} = 0; \qquad\qquad R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} - b_\mu b_\nu - c_\mu c_\nu.$$

а отже коефіцієнти $k_{\mu\gamma},\ l_{\mu\gamma},\ m_{\mu\gamma}$ в редукованій системі (3.21) відповідно набувають значень:

$$k_{\mu\gamma} = -4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma} - 4(b_\mu + \alpha c_\mu)(b_\gamma + \alpha c_\gamma),$$
$$l_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma} + 4(b_\mu + \alpha c_\mu)b_\gamma, \qquad m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma.$$

Повний перелік значень коефіцієнтів у редукованих рівняннях наведено в додаткові C.

Аналіз редукованих рівнянь та точні розв'язки рівнянь Максвелла. Використаємо результати редукції системи (3.18) для побудови її точних розв'язків.

Розв'язки редукованих рівнянь шукаємо у вигляді

$$B_\mu = a_\mu f_0 + b_\mu f_1 + c_\mu f_2 + d_\mu f_3, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.25}$$

де $f_\mu = f_\mu(\omega)$ — нові невідомі гладкі функції. Підставимо значення $B_\mu(\omega)$ в редуковані рівняння (3.21) і в отриманих рівняннях зберемо коефіцієнти біля компонент базисних векторів простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$. Прирівнявши ці коефіцієнти у лівих і правих частинах рівнянь (3.21), отримаємо систему чотирьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для визначення функцій $f_\mu(\omega)$.

Процес підстановки (3.25) в (3.21) тут не наводимо, а розглядаємо лише ті редуковані системи, для яких вдалося побудувати розв'язки. При цьому вживаємо позначення

$$\dot f_\mu = \frac{df_\mu}{d\omega}, \quad \ddot f_\mu = \frac{d^2 f_\mu}{d\omega^2}, \quad t = f_0 + f_3, \quad s = f_0 - f_3,$$

символами C_j позначаємо сталі інтегрування. Як правило, розв'язки лінійних редукованих систем, містять довільні функції від ω. Позначаємо такі функції символом $Y(\omega)$.

Випадки $\lambda = 0$ та $\lambda \neq 0$ у рівняннях (3.18) розглядаємо окремо.

Лінійні рівняння Максвелла ($\lambda=0$). Цей випадок відповідає рівнянням (3.15). Зауважимо, що коли $A_\mu = A_\mu(x_0, x_3)$, то система (3.18) при $\lambda = 0$ набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_0 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0 \partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3^2} = 0$$

і її розв'язок визначають функції A_0, A_3, які задовольняють умову

$$\frac{\partial A_0}{\partial x_3} + \frac{\partial A_3}{\partial x_0} = C,$$

та функції

$$A_1 = \varphi_1(x_0 - x_3) + \psi_1(x_0 + x_3), \qquad A_2 = \varphi_2(x_0 - x_3) + \psi_2(x_0 + x_3),$$

де φ_i, ψ_i $(i = 1, 2)$ — довільні гладкі функції, C — стала інтегрування.

Якщо $A_\mu = A_\mu(x_1, x_2)$, то функції A_1, A_2 задовольняють умову

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = C,$$

а функції A_0 та A_3 задовольняють двовимірні рівняння Лапласа.

Нарешті, якщо $A_\mu = A_\mu(x_1, \xi)$, де $\xi = x_0 - x_3$, то вони є розв'язками рівнянь (3.15) тоді, коли

$$A_0 = \varphi_0(\xi) + \varphi_3(x_1, \xi) + C_1 x_1 + C_2,$$
$$A_1 = -\int \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} d\xi - \dot{\varphi}_0(\xi) x_1 + \varphi_1(\xi) + \psi_1(\xi),$$
$$A_2 = \varphi_2(\xi) x_1 + \psi_2(\xi), \quad A_3 = \varphi_3(x_1, \xi),$$

де φ_α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, ψ_1, ψ_2 — довільні гладкі функції своїх аргументів, C_1, C_2 — довільні сталі, $\dot{\varphi}_0 = \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}$. Аналогічний результат отримується і у випадку $A_\mu = A_\mu(x_2, \xi)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

До нових класів розв'язків рівнянь (3.15) приводять ті конформно-неспряжені підалгебри алгебри $\tilde{A}P(1,3)$, які не є підалгебрами алгебри $AP(1,3)$ та не містять підалгебри, спряжені підалгебрам $\langle P_0, P_3 \rangle$,

$\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_2, P_0 + P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_0 + P_3\rangle$. Такими підалгебрами є L_j, де $j = 3, 4, 10, 15, 16, \dots, 24$.

Нижче наводимо редуковані системи, для яких вдалося побудувати загальний розв'язок та відповідні їм розв'язки системи рівнянь (3.15). *Підалгебра* L_{15}. Редукована система має вигляд

$$\ddot{s} - \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\dot{s} + \frac{1}{4}s = 0, \quad 2\alpha\ddot{u} = -e^{\frac{\omega}{2}}(2\ddot{s} + \dot{s}),$$
$$2\ddot{u} - 2\dot{u} = \alpha e^{\frac{\omega}{2}}(2\ddot{s} + \dot{s}), \quad (1+\alpha^2)\left[\ddot{t} - \dot{t} + \frac{t}{4}\right] = -2e^{\frac{\omega}{2}}\ddot{v} - e^{\omega}(2\ddot{s} + \dot{s}),$$

де $u = f_2 - \alpha f_1; v = f_1 + \alpha f_2; \alpha > 0$.

Ця система має такі розв'язки:

$$f_0 = f_3 = \frac{1}{2}e^{\omega/2}(-2Y(\omega) + C_3 + C_4\omega),$$
$$f_1 = [Y(\omega) - \alpha C_2], \quad f_2 = [\alpha Y(\omega) + C_2],$$

тут $\omega = \ln\dfrac{(bx)^2 + (cx)^2}{(kx)^2} + 2\alpha\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{cx}{bx}$.

Підставивши знайдені значення функцій f_μ в (3.25), (3.19) отримуємо такий розв'язок системи (3.15):

$$A_\mu = \frac{1}{(bx)^2 + (cx)^2}\Big\{c_\mu\left(Y(\omega)[cx + \alpha\, bx] + C_2[bx - \alpha\, cx]\right) +$$
$$+ b_\mu\left(Y(\omega)[bx - \alpha\, cx] - C_2[cx + \alpha\, bx]\right)\Big\} + \frac{k_\mu}{kx}\left\{-Y(\omega) + C_3 + C_4\omega\right\}.$$

Підалгебра L_{17}. Редукована система набуває вигляду

$$2(1+\alpha^2)\ddot{t} + \ddot{s} - 2\ddot{v} = 0; \qquad (1+\alpha^2)\ddot{s} + 2\dot{s} + s = 0;$$
$$\ddot{s} + \dot{s} = 2\alpha\ddot{u}; \quad 2\ddot{u} + \alpha\ddot{s} + 2\dot{u} = 0.$$

Тут $u = \alpha f_1 + f_2; v = \alpha f_2 - f_1; \alpha \geqslant 0$. Її загальний розв'язок складають функції

$$t = Y(\omega), \qquad s = E(AF_1 + BF_2),$$
$$f_1 = \frac{E}{2(1+\alpha^2)}\left[\tau F_1 - \rho F_2\right] - Y(\omega) - (C_1\omega + C_2) + \alpha C_3,$$

$$f_2 = \frac{E}{2(1+\alpha^2)}\left[\rho F_1 + \tau F_2\right] + \alpha Y(\omega) + \alpha(C_1\omega + C_2) + C_3,$$

де $E = \exp\left(-\dfrac{\omega}{1+\alpha^2}\right)$, $F_1 = \sin\left(\dfrac{\alpha\omega}{1+\alpha^2}\right)$, $F_2 = \cos\left(\dfrac{\alpha\omega}{1+\alpha^2}\right)$, $\rho = \alpha A + B$, $\tau = \alpha B - A$; A, B — сталі інтегрування. Підставивши отриманий результат у (3.19), приходимо до такого розв'язку системи (3.15):

$$\begin{aligned} A_\mu = {} & \tfrac{1}{2}(a_\mu + d_\mu)Y + \frac{1}{(bx)^2 + (cx)^2}\Bigg\{\tfrac{1}{2}(a_\mu - d_\mu)E(AF_1 + BF_2) + \\ & + \frac{E}{2(1+\alpha^2)}\Bigg((\chi A + \zeta B)[c_\mu F_1 + b_\mu F_2] + (\zeta A - \chi B)[b_\mu F_1 - c_\mu F_2]\Bigg) + \\ & + (Y + C_1\omega + C_2)[c_\mu\chi + b_\mu\zeta] + C_3[c_\mu\zeta + b_\mu\chi]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Тут $\zeta = \alpha cx + bx$; $\chi = \alpha bx - cx$; $\omega = kx - \ln[(bx)^2 + (cx)^2] + 2\alpha \operatorname{arc\,tg} \dfrac{cx}{bx}$.
Підалгебра L_{18}. Редукована система має вигляд

$$-2\ddot{t} - \ddot{s} + 2\ddot{f}_2 = 0; \quad \ddot{s} + s = 0; \quad 2\ddot{f}_1 - \dot{s} = 0; \quad \ddot{s} + 2\dot{f}_1 = 0.$$

Її загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & f_2 = 2Y(\omega), \qquad f_1 = C_1\sin\omega - C_2\cos\omega + C_3, \\ & f_0 = 1/2(C_1\cos\omega + C_2\sin\omega) + C_4\omega + C_5 + Y(\omega), \\ & f_3 = -3/2(C_1\cos\omega + C_2\sin\omega) + C_4\omega + C_5 + Y(\omega). \end{aligned}$$

Підстановка цих функцій у (3.25), (3.19) приводить до такого розв'язку рівнянь (3.15):

$$\begin{aligned} A_\mu = {} & a_\mu\left\{(C_1\cos\omega + C_2\sin\omega)\left[\frac{1}{(bx)^2+(cx)^2} - \frac{1}{2}\right] + C_4\omega + C_5 + Y(\omega)\right\} \\ & + d_\mu\left\{(C_1\cos\omega + C_2\sin\omega)\left[\frac{-1}{(bx)^2+(cx)^2} - \frac{1}{2}\right] + C_4\omega + C_5 + Y(\omega)\right\} \\ & + \frac{1}{(bx)^2+(cx)^2}\Bigg\{c_\mu\left[(C_1\sin\omega - C_2\cos\omega + C_3)cx + 2bxY(\omega)\right] + \\ & + b_\mu\left[(C_1\sin\omega - C_2\cos\omega + C_3)bx - 2cxY(\omega)\right]\Bigg\}, \end{aligned}$$

де $\omega = kx + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{cx}{bx}$.

Підалгебра L_{20} : Редуковані рівняння мають вигляд

$$4\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2\ddot{f}_1 - \epsilon_8(1+\alpha)(2\alpha-1)\omega\dot{f}_1 = 0,$$
$$4\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2\ddot{f}_2 - \epsilon_8(1+\alpha)(2\alpha-1)\omega\dot{f}_2 = 0,$$

$$\epsilon_8\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left[(1-\alpha)\omega^2\ddot{t} - \frac{\alpha-2}{2\alpha}\omega\dot{t} + \frac{1-\alpha}{4\alpha^2}t\right] = (1+\alpha)\left[\omega^2\ddot{s} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\omega\dot{s} + \frac{1}{4\alpha^2}s\right],$$
$$\epsilon_8(1-\alpha)\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left[(1-\alpha)\omega^2\ddot{t} + \frac{1-\alpha-\alpha^2}{\alpha}\omega\dot{t} + \frac{1-3\alpha}{4\alpha^2}t\right] = = (1+\alpha)\left[(1-\alpha)\omega^2\ddot{s} + \frac{\alpha-2}{2\alpha}\omega\dot{s} + \frac{1+\alpha}{4\alpha^2}s\right].$$

Тут $0 < \alpha \leqslant 1$.

При $\alpha = -1$ система несумісна.

При $\alpha = 1$ розв'язок системи складають функції $s = C\omega, \quad t = \dfrac{2C\epsilon_8}{\omega}$, $f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2$. Йому відповідає такий розв'язок рівняння (3.15)

$$A_\mu = C(ax-dx)\frac{(kx)^2}{\Psi} + k_\mu\left\{2C\epsilon_8(kx)^{-2} + C_1\frac{bx}{kx}|\Psi|^{-\frac{1}{2}} + C(bx)^2|\Psi|^{-1}\right\} + +c_\mu C_2|\Psi|^{-\frac{1}{2}} - b_\mu\left\{2C\ bx\ kx\ |\Psi|^{-1} + C_1|\Psi|^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

де $\Psi = (ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2$.

Підалгебра L_{21}. Цій алгебрі відповідає система рівнянь

$$\epsilon_9(\ddot{f}_0 - \ddot{f}_3) + (\omega\dot{f}_2 - \dot{f}_1) + f_2 + 2\omega f_1 + \epsilon_9(f_0 - f_3) = 0;$$
$$-3(1+\omega^2)(f_0 - f_3) = 0;$$
$$2\epsilon_9\omega(\dot{f}_0 - \dot{f}_3) + 2\omega(\omega f_2 - f_1) - 2(1+\omega^2)f_2 = 0;$$
$$\epsilon_9(\dot{f}_0 - \dot{f}_3) + \epsilon_9\omega(f_0 - f_3) + (\omega f_2 - f_1) + (1+\omega^2)f_1 = 0,$$

яка має такі розв'язки: $f_0 = f_3 = Y(\omega), \quad f_1 = C_1, \quad f_2 = -C_1\omega$.

Відповідний розв'язок рівнянь (3.15) такий:

$$A_\mu = |cx\, kx - bx|^{-1}(kx\, c_\mu + cx\, k_\mu - b_\mu)\; C_1 + k_\mu\, Y(kx).$$

Підалгебра L_{22}. Редукована система набуває вигляду

$$\epsilon_5 \ddot{f}_1 = 0, \qquad \epsilon_5 \ddot{f}_2 = 0, \qquad (\epsilon_5 - 1)^2 \ddot{f}_0 = 0, \qquad (\epsilon_5 + 1)^2 \ddot{f}_3 = 0.$$

Загальний розв'язок перших двох рівнянь цієї системи складають функції $f_1 = C_3\omega + C_4$, $f_2 = C_5\omega + C_6$. З останніх рівнянь випливає, що якщо $\epsilon_5 = 1$ то $f_0 = Y(\omega)$ – довільна, $f_3 = C_1\omega + C_2$; якщо ж $\epsilon_5 = -1$ то $f_3 = Y(\omega)$ – довільна, $f_0 = C_1\omega + C_2$.

Після підстановки в анзац (3.19) отримуємо такий розв'язок рівнянь (3.15):

$$\begin{aligned} A_\mu \; = \; & a_\mu \Big\{ \frac{\epsilon_5}{kx}(C_1\omega + C_2 + Y(\omega)) - bx|kx|^{-\frac{3}{2}}(C_3\omega + C_4) \\ & -\epsilon_5 \left[1 + (bx)^2 (kx)^{-2}\right] (C_1\omega + C_2 - Y(\omega)) \Big\} \\ & + d_\mu \Big\{ \frac{\epsilon_5}{kx}(C_1\omega + C_2 + Y(\omega)) - bx|kx|^{-\frac{3}{2}}(C_3\omega + C_4) \\ & + \epsilon_5 \left[1 - (bx)^2 (kx)^{-2}\right] (C_1\omega + C_2 - Y(\omega)) \Big\} + \\ & + b_\mu \left\{ 2\epsilon_5 \frac{bx}{kx}(C_1\omega + C_2 - Y(\omega)) + |kx|^{-\frac{1}{2}}(C_3\omega + C_4) \right\} \\ & + c_\mu |kx|^{-\frac{1}{2}}(C_5\omega + C_6). \end{aligned}$$

Тут $\omega = ax - dx + \ln|kx| - (bx)^2 (kx)^{-1}$.

Таким чином, до переліку властивостей рівнянь Максвелла, які вирізняють їх серед множини лінійних диференціальних рівнянь, слід віднести той факт, що задачу симетрійної редукції вдається розв'язати в повному обсязі. А саме, для всіх нееквівалентних підалгебр розширеної алгебри Пуанкаре відповідні анзаци редукують систему (3.15) до звичайних диференціальних рівнянь, що інтегруються в елементарних функціях. Цей факт є ще одним свідченням унікальності рівнянь Максвелла з точки зору їх теоретико-групових властивостей (див. також [44]).

Нелінійні рівняння Максвелла ($\lambda \neq 0$). Очевидно, що за умови $A_\mu A^\mu = 0$ розв'язками рівняння (3.18) будуть уже знайдені розв'язки рівняння (3.15), які задовольняють цю умову. Тому тут розглянуто редуковані рівняння, для яких має місце співвідношення

$$B_\mu B^\mu \neq 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.26}$$

На відміну від лінійного випадку, тут нам не вдалося проінтегрувати редуковані системи в загальному вигляді. Але для деяких систем, використовуючи подальшу пряму редукцію, побудовано частинні розв'язки.

Наприклад, для *підалгебри* L_1, шукаючи розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g$, приходимо до системи

$$(1+\omega^2)\ddot{f} + 4\omega\dot{f} + 2f = \lambda(h^2+g^2)f, \quad \ddot{h} + \omega\ddot{g} + 2\dot{g} = \lambda(h^2+g^2)h,$$
$$\omega^2\ddot{g} + \omega\ddot{h} + 4\omega\dot{g} + 2\dot{h} + 2g = \lambda(h^2+g^2)g.$$

1) Нехай $g = 0$, тоді останні два рівняння системи набувають вигляду

$$\ddot{h} = \lambda h^3; \tag{3.27}$$

$$\omega\ddot{h} + 2\dot{h} = 0. \tag{3.28}$$

Розв'язком рівняння (3.28) є функція $h = C_1\omega^{-1} + C_2$; підставивши її у рівняння (3.27), знаходимо, що $C_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $C_2 = 0$, тобто $h = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\omega^{-1}$, ($\lambda > 0$). Тепер перше рівняння набуває вигляду

$$(1+\omega^2)\ddot{f} + 4\omega\dot{f} + 2f = 2\omega^{-2}f. \tag{3.29}$$

Шукаємо його розв'язок у вигляді $f = \omega^{-1}u(\omega)$. Після підстановки у рівняння (3.29) отримуємо, що функція u задовольняє рівняння

$$(1+\omega^2)\omega^{-1}\ddot{u} + 2(1-\omega^{-2})\dot{u} = 0,$$

отже $u = C(\operatorname{arc\,tg}\omega - \dfrac{\omega}{1+\omega^2}) + C_1$. Відповідний розв'язок рівнянь (3.18) при $\lambda > 0$ такий

$$A_\mu = |bx|^{-1}\omega^{-1}\left\{k_\mu\left[C_1\left(\operatorname{arc\,tg}\omega - \frac{\omega}{1+\omega^2}\right) + C_2\right] + b_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right\}.$$

Тут $\omega = cx(bx)^{-1}$.
2) Нехай $h = 0$, тоді з останніх двох рівнянь випливає, що

$$\omega^2 \ddot{g} + 4\omega \dot{g} = \lambda g^3; \tag{3.30}$$

$$\omega \ddot{g} + 2\dot{g} = 0. \tag{3.31}$$

Останнє рівняння цілком аналогічне до (3.28), підставивши його розв'язок у (3.30), отримуємо, що $g = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $(\lambda > 0)$. Перше рівняння набуває вигляду

$$(1 + \omega^2)\ddot{f} + 4\omega \dot{f} = 0.$$

Його загальний розв'язок $f = C_1 \left(\operatorname{arc\,tg} \omega + \dfrac{\omega}{1+\omega^2} \right) + C_2$. Отже, відповідний розв'язок рівняння (3.18)

$$A_\mu = |bx|^{-1} \left\{ k_\mu \left[C_1 \left(\operatorname{arc\,tg} \omega + \frac{\omega}{1+\omega^2} \right) + C_2 \right] + c_\mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \right\}, \ \lambda > 0.$$

Тут $\omega = cx(bx)^{-1}$.
Підалгебра L_5. Шукаємо B_μ у вигляді $B_\mu = b_\mu h + c_\mu g$. Редукована система зводиться до двох рівнянь

$$[\ddot{h} + \omega \ddot{g}] + 2\dot{g} = -\lambda(h^2 + g^2)h,$$
$$\omega[\ddot{h} + \omega \ddot{g}] + 2\dot{h} + 4\omega \dot{g} + 2g = -\lambda(h^2 + g^2)h.$$

1) Нехай $h = 0$, тоді g задовольняє систему (3.30)–(3.31), тому $g = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$. Цьому випадку відповідає такий розв'язок рівняння (3.18)

$$A_\mu = |bx|^{-1} c_\mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}, \qquad \lambda > 0.$$

2) Нехай $g = 0$, тоді h задовольняє (3.27)–(3.28), отже $h = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\omega^{-1}$. Відповідний розв'язок рівняння (3.18)

$$A_\mu = |bx|^{-1} b_\mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \omega^{-1}, \qquad \lambda > 0.$$

Тут $\omega = cx(bx)^{-1}$.

Підалгебра L_6. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g$. Тоді

$$\begin{aligned}
&(\alpha - 1)\ddot{f} + \dot{f} = 0,\\
&2\epsilon_6(1-\alpha^2)\ddot{f} - 2\epsilon_6(1-\alpha)\dot{f} = -\lambda(g^2+h^2)f,\\
&4\epsilon_6[(1-\alpha^2)\ddot{g} - \dot{g}] = -[\lambda(g^2+h^2)+\epsilon_6]g,\\
&4\epsilon_6[(1-\alpha^2)\ddot{h} - \dot{h}] = -[\lambda(g^2+h^2)+\epsilon_6]h.
\end{aligned}$$

Якщо $\alpha = 1$, то $f = 0$ і останні два рівняння набувають вигляду

$$4\epsilon_6\dot{g} = [\lambda(g^2+h^2)+\epsilon_6]g, \qquad 4\epsilon_6\dot{h} = [\lambda(g^2+h^2)+\epsilon_6]h. \tag{3.32}$$

Використаємо підстановку

$$g = \rho\cos\psi, \quad h = \rho\sin\psi. \tag{3.33}$$

Тоді з рівнянь (3.32) випливає

$$4\epsilon_6\dot{\rho} = [\lambda\rho^2 + \epsilon_6]\rho, \quad \epsilon_6\rho\dot{\psi} = 0. \tag{3.34}$$

З першого з цих рівнянь маємо

$$\rho = \sqrt{\frac{\epsilon_6}{\lambda}}\sqrt{\frac{Ce^{\frac{\omega}{2}}}{1 - Ce^{\frac{\omega}{2}}}}.$$

Тут $C \neq 0$ (якщо $C = 0$, то $g = h = 0$ і отже не виконується умова (3.26)), тому вираз для ρ можна записати у вигляді

$$\rho = \sqrt{\frac{\epsilon_6}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{C_1 e^{-\frac{\omega}{2}} - 1}}.$$

З другого з рівнянь (3.34) випливає, що $\psi = C_2$.

Відповідний розв'язок рівняння (3.18) такий

$$A_\mu(x) = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}}\{c_\mu \sin C_2 + b_\mu\cos C_2\}\sqrt{\frac{\epsilon_6}{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{C_1 e^{-\frac{\omega}{2}} - 1}},$$

де $\omega = |kx|^2$.

Підалгебра L_7. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g + d_\mu r$. При $\alpha = 1$ маємо таку систему

$$\begin{aligned}
&\ddot{f} - \ddot{r} + \epsilon_5\epsilon_7\dot{h} + 3f - 3r = -\lambda(f^2 - g^2 - h^2 - r^2)f,\\
&2g = -\lambda(f^2 - g^2 - h^2 - r^2)g,\\
&2\epsilon_5\epsilon_7(\dot{f} - \dot{r}) = \lambda(f^2 - g^2 - h^2 - r^2)h,\\
&\ddot{f} - \ddot{r} + \epsilon_5\epsilon_7\dot{h} + 3r - 3f = -\lambda(f^2 - g^2 - h^2 - r^2)r.
\end{aligned}$$

З другого рівняння отримуємо, що $\lambda(f^2-g^2-h^2-r^2) = -2$. Підставимо це значення в усі рівняння, тоді з першого, третього та четвертого рівняння випливає $h = f = r = 0$. Тепер з другого рівняння легко отримати $g = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $\lambda > 0$.

Відповідний розв'язок вихідного рівняння

$$A_\mu = |cx|^{-1} b_\mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}, \qquad \lambda > 0.$$

Підалгебра L_9. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g$. Маємо таку систему для функцій f, h, g:

$$\begin{aligned}
&4\ddot{f} + 2\epsilon_7\ddot{h} + 2\dot{f} + \epsilon_7\dot{h} = \lambda(g^2 + h^2)f,\\
&4\ddot{g} + 6\dot{g} + 2g = \lambda(g^2 + h^2)g, \qquad 0 = \lambda(g^2 + h^2)h.
\end{aligned}$$

З останнього рівняння випливає, що $h = 0$, тому друге рівняння набуває вигляду $4\ddot{g} + 6\dot{g} + 2g = \lambda g^3$. Це рівняння має такі розв'язки

$$1) \quad g = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \,\mathrm{th}\left[\frac{\omega}{2} + C\right], \quad \text{якщо} \quad \mathrm{th}^2\left[\frac{\omega}{2} + C\right] < 1;$$

$$2) \quad g = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \,\mathrm{cth}\left[\frac{\omega}{2} + C\right], \quad \text{якщо} \quad \mathrm{cth}^2\left[\frac{\omega}{2} + C\right] < 1.$$

Перше рівняння має тривіальний розв'язок $f = 0$. Відповідний розв'язок рівнянь (3.18) такий

$$1) \quad A_\mu = \frac{b_\mu}{|cx|} \,\mathrm{th}\left[\frac{kx}{2} - \ln|cx| + C\right],$$

$$2) \quad A_\mu = \frac{b_\mu}{|cx|} \,\mathrm{cth}\left[\frac{kx}{2} - \ln|cx| + C\right].$$

Підалгебра L_{13}. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g$. Редукована система набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2-\beta^2)\ddot{f} - (\alpha-\beta)\dot{f} = -\frac{\lambda}{2\epsilon_6}(g^2+h^2)f,\\
&4(\alpha^2-\beta^2)\ddot{g} - 4\alpha\dot{g} + 4\beta\alpha^{-1}\dot{h} + (1+\alpha^{-2})g = -\frac{\lambda}{\epsilon_6}(g^2+h^2)g,\\
&4(\alpha^2-\beta^2)\ddot{h} - 4\alpha\dot{h} - 4\beta\alpha^{-1}\dot{g} + (1+\alpha^{-2})g = -\frac{\lambda}{\epsilon_6}(g^2+h^2)h,\\
&(\alpha-\beta)\ddot{f} + \dot{f} = 0.
\end{aligned}
$$

Якщо $\alpha = \beta = a$, то $f = 0$ і система зводиться до таких двох рівнянь

$$
\begin{aligned}
&-4a\dot{g} + 4\dot{h} + (1+a^{-2})g = -\frac{\lambda}{\epsilon_6}(g^2+h^2)g,\\
&-4a\dot{h} - 4\dot{g} + (1+a^{-2})h = -\frac{\lambda}{\epsilon_6}(g^2+h^2)h.
\end{aligned}
$$

Здійснивши заміну змінних (3.33) отримуємо такі рівняння

$$
-4a\dot{\rho} + 4\rho\dot{\psi} + (1+a^{-2})\rho = -\lambda\epsilon_6\rho^3, \quad a\rho\dot{\psi} + \dot{\rho} = 0.
$$

Ця система має такий розв'язок

$$
\rho = \sqrt{-\frac{1+a^{-2}}{\lambda\epsilon_6}}\,\left[1 + C_1\exp\left(\frac{\epsilon_6(1+a^{-2})}{2a\lambda}\omega\right)\right]^{-\frac{1}{2}},
$$

$$
\psi = \omega + \frac{2\lambda a}{1+a^{-2}}\epsilon_6\,\ln\left|1 + \frac{1}{C_1}\exp\left(\frac{\epsilon_6(1+a^{-2})}{2a\lambda}\omega\right)\right|.
$$

Тут $\omega = |kx|^{2a}$. Відповідний розв'язок вихідного рівняння (3.18) такий

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x) = \left|(ax)^2-(dx)^2\right|^{-\frac{1}{2}}\,\rho\,\{c_\mu(\sin\theta_1\cos\psi + \cos\theta_1\sin\psi) -\\
-b_\mu(\sin\theta_1\sin\psi - \cos\theta_1\cos\psi)\},
\end{aligned}
$$

де $\theta_1 = -\dfrac{1}{2\alpha}\ln|(ax-dx)(kx)^{-1}|$.

Підалгебра L_{21}. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu g + c_\mu h$.

$$
2\epsilon_9(1-\omega)\dot{f} - 4\epsilon_9\omega f - 2\epsilon_9 f = -\lambda(h^2+g^2)2f,
$$

$$-2\omega(\omega g + h) = \lambda(h^2 + g^2)g, \qquad -2(\omega g + h) = \lambda(h^2 + g^2)h.$$

З останніх двох рівнянь одержуємо $g = \omega\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $h = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $\lambda > 0$. Тоді перше рівняння набуває вигляду

$$(1-\omega)\dot{f} - (2\omega + 1)f = -2\epsilon_9(1+\omega^2)f.$$

В залежності від знаку величини ϵ_9 розв'язками цього рівняння є функції

1. $f \; = C(\omega - 1)^{-7}\exp([1-\omega][\omega+5])$ при $\epsilon_9 = 1$,
2. $f \; = C(\omega - 1)\exp([\omega-1][\omega+1])$ при $\epsilon_9 = -1$.

Відповідний їм розв'язок рівнянь (3.18) має вигляд

$$A_\mu = k_\mu\left\{f - \frac{2}{cx}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\omega|cxkx - bx|^{-1}\right\} + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}|cxkx - bx|^{-1}\{c_\mu + \omega b_\mu\}.$$

Тут $\omega = kx$.

Підалгебра L_{22}. Шукаємо розв'язок у вигляді $B_\mu = k_\mu f + b_\mu h + c_\mu g + d_\mu h$. Оскільки відповідні коефіцієнти у (3.21) містять ϵ_5, то можливі два випадки.

1) $\epsilon_5 = 1$, тоді $f = 0$ і редукована система має вигляд

$$4\ddot{h} = -\lambda(h^2+g^2+r^2)h, \;\; 4\ddot{g} = -\lambda(h^2+g^2+r^2)g, \;\; 4\ddot{r} = -\lambda(h^2+g^2+r^2)r.$$

Ця система має такий частинний розв'язок

$$h = g = r = \pm 2\sqrt{-\frac{2}{3\lambda}} \cdot \frac{1}{\omega + C_1}.$$

2) Якщо $\epsilon_5 = -1$ то $r = 0$ і редукована система має вигляд

$$-4\ddot{f} = \lambda(f^2 - h^2 - g^2)f, \;\; -4\ddot{h} = \lambda(f^2 - h^2 - g^2)h, \;\; -4\ddot{g} = \lambda(f^2 - h^2 - g^2)g.$$

Її частинний розв'язок

$$f = h = g = \pm 2\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\omega + C_2}.$$

Відповідний цим двом випадкам розв'язок рівняння (3.18) можна подати у такому вигляді

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x) \;&=\; \left((1+\epsilon_5)\sqrt{-\frac{2}{3\lambda}}+(1-\epsilon_5)\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)\times\left[-\frac{a_\mu-d_\mu}{2}\cdot\frac{\epsilon_5}{\omega+C_0}+\right.\\
&+\;k_\mu\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega+C_0}\left[|kx|^{-1}-\epsilon_5\left(\frac{bx}{kx}\right)^2\right]-\frac{\epsilon_5|kx|^{-\frac{3}{2}}}{\omega+C_1}\right\}+\\
&+\;c_\mu\cdot\frac{|kx|^{-\frac{1}{2}}}{\omega+C_2}+b_\mu\left.\left\{\frac{bx}{kx}\cdot\frac{\epsilon_5}{\omega+C_0}+\frac{|kx|^{-\frac{1}{2}}}{\omega+C_1}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Тут $\omega = ax-dx+\ln|kx|-(bx)^2(kx)^{-1}$.

На закінчення підрозділу наведемо перелік отриманих розв'язків нелінійної системи (3.18):

$$1)\ A_\mu=\frac{1}{|bx|}\frac{bx}{cx}\left\{k_\mu\left[C_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{cx}{bx}-\frac{bx\,cx}{(bx)^2+(cx)^2}\right)+C_2\right]+b_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right\},$$

$$2)\ A_\mu=|bx|^{-1}\left\{k_\mu\left[C_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{cx}{bx}-\frac{bx\,cx}{(bx)^2+(cx)^2}\right)+C_2\right]+c_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right\},$$

$$3)\ A_\mu=|bx|^{-1}c_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}},$$

$$4)\ A_\mu=|bx|^{-1}b_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\frac{bx}{cx}.$$

У перших чотирьох розв'язках $\lambda>0$.

$$5)\ A_\mu=\{c_\mu\sin C_2+b_\mu\cos C_2\}\left(\epsilon_6\lambda|(ax)^2-(dx)^2|(C_1e^{-\frac{(kx)^2}{2}}-1)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$6)\ A_\mu=|cx|^{-1}b_\mu\sqrt{\frac{2}{\lambda}},\quad \lambda>0,$$

$$7)\ A_\mu=\frac{b_\mu}{|cx|}\operatorname{th}\left[\frac{kx}{2}-\ln|cx|+C\right],$$

$$8)\ A_\mu = \frac{b_\mu}{|cx|}\,\mathrm{cth}\left[\frac{kx}{2} - \ln|cx| + C\right],$$

$$9)\ A_\mu(x) = |(ax)^2 - (dx)^2|^{-\frac{1}{2}}\ \{c_\mu \sin(\theta_1 + \psi) + b_\mu \cos(\theta_1 + \psi)\} \times$$

$$\times\sqrt{-\frac{1 + a^{-2}}{\lambda\epsilon_6}}\ \left[1 + C_1 \exp\left(\frac{\epsilon_6(1 + a^{-2})}{2a\lambda}(kx)^{2a}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

де $\theta_1 + \psi = (kx)^{2a} + \dfrac{2\lambda a\,\epsilon_6}{1 + a^{-2}}\ \ln\left|1 + \dfrac{1}{C_1}\exp\left(\dfrac{\epsilon_6(1 + a^{-2})}{2a\lambda}(kx)^{2a}\right)\right|$
$-\dfrac{1}{2\alpha}\ln\left|\dfrac{ax - dx}{kx}\right|,$

$$10)\ A_\mu = k_\mu\left\{f - \frac{2}{cx}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\omega|cxkx - bx|^{-1}\right\} + \sqrt{\frac{2}{\lambda}}|cxkx - bx|^{-1}\{c_\mu + \omega b_\mu\}.$$

Тут $\omega = kx$, $\lambda > 0$, f набуває значень

$$\begin{aligned} f &= C(\omega - 1)^{-7}\exp([1 - \omega][\omega + 5]) \quad \text{при } \epsilon_9 = 1, \\ f &= C(\omega - 1)\exp([\omega - 1][\omega + 1]) \quad \text{при } \epsilon_9 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11)\ A_\mu(x) = &\left((1 + \epsilon_5)\sqrt{-\frac{2}{3\lambda}} + (1 - \epsilon_5)\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) \times \left[-\frac{a_\mu - d_\mu}{2}\cdot\frac{\epsilon_5}{\omega + C_0} + \right. \\ &+ k_\mu\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega + C_0}\left[|kx|^{-1} - \epsilon_5\left(\frac{bx}{kx}\right)^2\right] - \frac{\epsilon_5|kx|^{-\frac{3}{2}}}{\omega + C_1}\right\} + \\ &\left. + c_\mu\cdot\frac{|kx|^{-\frac{1}{2}}}{\omega + C_2} + b_\mu\left\{\frac{bx}{kx}\cdot\frac{\epsilon_5}{\omega + C_0} + \frac{|kx|^{-\frac{1}{2}}}{\omega + C_1}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Тут $\omega = ax - dx + \ln|kx| - (bx)^2(kx)^{-1}$.

Значення ϵ_5, ϵ_6, ϵ_9 відповідають функціям, наведеним у таблиці C.1.

Відзначимо, що отримані точні розв'язки рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу, можуть бути використані як "пробні" в реальних задачах квантової механіки.

3.4. Відокремлення змінних у системі Шредінгера–Максвелла

У цьому підрозділі отримано загальний вигляд потенціалу $V(t, x_1, x_2)$, для якого двовимірне рівняння Шредінгера

$$i\psi_t + \psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} = V(t, x_1, x_2)\psi \tag{3.35}$$

допускає відокремлення змінних. Одержані результати застосовано для відокремлення змінних у системі Шредінгера–Максвелла.

Для розв'язання задачі відокремлення змінних у (1+2)-вимірному рівнянні Шредінгера використовуємо метод запропонований в [141, 147].

Означення 3.1. [147] Рівняння Шредінгера (3.35) допускає відокремлення змінних в системі координат t, $\omega_a = \omega_a(t, x_1, x_2)$ $(a = 1, 2)$ якщо підстановка

$$\psi = Q(t, x_1, x_2)\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1(t, x_1, x_2))\varphi_2(\omega_2(t, x_1, x_2)), \tag{3.36}$$

зводить рівняння (3.35) до трьох звичайних диференціальних рівнянь

$$i\frac{d\varphi_0}{dt} = U_0(t, \varphi_0; \lambda_1, \lambda_2), \quad \frac{d^2\varphi_a}{d\omega_a^2} = U_a\left(\omega_a, \varphi_a, \frac{d\varphi_a}{\omega_a}; \lambda_1, \lambda_2\right), \tag{3.37}$$

де U_0, U_1, U_2 — деякі гладкі функції, λ_1, λ_2 — довільні дійсні параметри,

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial U_\mu}{\partial \lambda_a}\right\| = 2, \qquad \mu = 0, 1, 2, \quad a = 1, 2. \tag{3.38}$$

Умова (3.38) гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від параметрів λ_1 та λ_2, які називаються сталими відокремлення.

Як показано у [147], систему (3.37) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
&i\frac{d\varphi_0}{dt} = (R_0(t) + \lambda_1 R_1(t) + \lambda_2 R_2(t))\varphi_0,\\
&\frac{d^2\varphi_1}{d\omega_a^2} = (B_{01}(\omega_a) + \lambda_1 B_{a1}(\omega_a) + \lambda_2 B_{a2}(\omega_a))\varphi_a, \qquad a = 1, 2.
\end{aligned}$$

Тут B_{0a}, B_{1a}, B_{2a}, R_0, R_a — гладкі функції своїх аргументів, функції Q, ω_1, ω_2 задовольняють таку перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\omega_{1x_1}\omega_{2x_1} + \omega_{1x_2}\omega_{2x_2} = 0, \tag{3.39}$$

$$B_{1a}(\omega_1)(\omega_{1x_1}^2 + \omega_{1x_2}^2) + B_{2a}(\omega_2)(\omega_{2x_1}^2 + \omega_{2x_2}^2) + R_a(t) = 0, \tag{3.40}$$

$$2(\omega_{ax_1}Q_{x_1} + \omega_{ax_2}Q_{x_2}) + Q(i\omega_{at} + \omega_{ax_1x_1} + \omega_{ax_2x_2}) = 0, \tag{3.41}$$

$$\begin{gathered}\Big(B_{01}(\omega_1)(\omega_{1x_1}^2 + \omega_{1x_2}^2) + B_{02}(\omega_2)(\omega_{2x_1}^2 + \omega_{2x_2}^2)\Big)Q + iQ_t + \\ +Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2} + R_0(t)Q - V(t,x_1,x_2)Q = 0.\end{gathered} \tag{3.42}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (3.39)–(3.41) побудовано у [141]. Він визначається одним з таких чотирьох наборів функцій:

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad \omega_1 = A(t)x_1 + W_1(t), \quad \omega_2 = B(t)x_2 + W_2(t),\\
&\quad Q(t,x_1,x_2) = \exp\left\{-\frac{i}{4}\left[\frac{A'}{A}x_1^2 + \frac{B'}{B}x_2^2\right] - \frac{i}{2}\left[\frac{W_1'}{A}x_1 + \frac{W_2'}{B}x_2\right]\right\};\\
&\text{II.}\quad x_1 = W(t)\mathrm{e}^{\omega_1}\sin\omega_2 + W_1(t), \quad x_2 = W(t)\mathrm{e}^{\omega_1}\cos\omega_2 + W_2(t),\\
&\quad Q(t,x_1,x_2) = \exp\{iR(t,x_1,x_2)\};\\
&\text{III.}\quad x_1 = \tfrac{1}{2}W(t)(\omega_1^2 - \omega_2^2) + W_1(t), \ x_2 = W(t)\omega_1\omega_2 + W_2(t),\\
&\quad Q(t,x_1,x_2) = \exp\{iR(t,x_1,x_2)\};\\
&\text{IV.}\quad x_1 = W(t)\,\mathrm{ch}\,\omega_1\cos\omega_2 + W_1(t), \ x_2 = W(t)\,\mathrm{sh}\,\omega_1\sin\omega_2 + W_2(t),\\
&\quad Q(t,x_1,x_2) = \exp\{iR(t,x_1,x_2)\},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

де A, B, W, W_1, W_2 — довільні гладкі функції, а функція $R = R(t,x_1,x_2)$ визначається формулою

$$R(t,x_1,x_2) = \frac{W'}{4W}\Big((x_1 - W_1)^2 + (x_2 - W_2)^2\Big) + \frac{1}{2}(W_1'x_1 + W_2'x_2).$$

Підставивши вирази для функцій Q, ω_1, ω_2 у рівняння (3.42) одержуємо чотири класи потенціалів $V(t,x_1,x_2)$, для яких можливе відокремлення змінних в рівнянні Шредінгера (3.35) в сенсі означення 3.1:

$$\text{I. } V(t,z_1,z_2) = F_0(t) + A^2F_1(\omega_1) + B^2F_2(\omega_2) + x_1^2\left(\frac{A''}{4A} - \frac{(A')^2}{2A^2}\right) +$$

$$+x_2^2\left(\frac{B''}{4B} - \frac{(B')^2}{2B^2}\right) - x_1\left[\frac{A'W_1'}{A^2} - \frac{W_1''}{2A}\right] - x_2\left[\frac{B'W_2'}{B^2} - \frac{W_2''}{2B}\right], \quad (3.44)$$

$$\text{II. } V(t,x_1,x_2) = F_0(t) + \frac{F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)}{\exp(2\omega_1)W^2} - \frac{W''}{4W}(x_1^2 + x_2^2) +$$

$$+x_1\left[\frac{W_1W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right] + x_2\left[\frac{W_2W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right], \quad (3.45)$$

$$\text{III. } V(t,x_1,x_2) = F_0(t) + \frac{F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)W^2} - \frac{W''}{4W}(x_1^2 + x_2^2) +$$

$$+x_1\left[\frac{W_1W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right] + x_2\left[\frac{W_2W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right], \quad (3.46)$$

$$\text{IV. } V(t,x_1,x_2) = F_0(t) + \frac{F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)}{(\operatorname{sh}^2\omega_1 + \sin^2\omega_2)W^2} - \frac{W''}{4W}(x_1^2 + x_2^2) +$$

$$+x_1\left[\frac{W_1W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right] + x_2\left[\frac{W_2W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right], \quad (3.47)$$

де ω_1 та ω_2 визначено відповідними виразами з (3.43), F_0, F_1, F_2 — довільні функції.

Формули (3.44)–(3.47) визначають загальний вигляд потенціалів $V = V(t,x_1,x_2)$, для яких рівняння Шредінгера може бути розв'язане за допомогою методу відокремлення змінних.

Знайдені потенціали та вирази, що неявно визначають ω_1 і ω_2, можна суттєво спростити, якщо використати перетворення, відносно яких клас рівнянь (3.35) є інваріантним.

За допомогою класичного методу Лі можна довести таку лему.

Лема 3.1. *Перетворення*

$$1) \quad \tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x}_1 = x_1 f, \quad \tilde{x}_2 = x_2 f, \quad \tilde{\psi} = \psi \exp\left\{\frac{if'}{4f}(x_1^2 + x_2^2)\right\},$$

$$\tilde V = \frac{1}{f^2}\left[V + i\frac{f'}{f} + \left(\frac{(f')^2}{2f^2} - \frac{f''}{4f}\right)(x_1^2 + x_2^2)\right];$$

$$2)\quad \tilde t = t,\ \ \tilde x_1 = x_1 + g_1,\ \ \tilde x_2 = x_2 + g_2,\ \ \tilde\psi = \psi\exp\left\{\frac{i}{2}[g_1' x_1 + g_2' x_2]\right\},$$

$$\tilde V = V + \frac{1}{4}\left[(g_1')^2 + (g_2')^2\right] - \frac{1}{2}(g_1'' x_1 + g_2'' x_2);$$

$$3)\quad \tilde t = t,\quad \tilde x_1 = x_1,\quad \tilde x_2 = x_2,\quad \tilde\psi = \psi\exp\{ih\},\quad \tilde V = V + h'.$$

де $f(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h(t)$ *— довільні гладкі функції, а функція* $T(t)$ *визначається з рівняння*

$$dT/dt = f^2, \qquad f(t) \not\equiv 0,$$

утворюють групу еквівалентності класу рівнянь (3.35).

Використаємо перетворення з групи еквівалентності для спрощення вигляду потенціалів (3.44)–(3.47) та виразів для x_1, x_2, ω_1, ω_2 в (3.43). У випадку потенціалу (3.44) покладемо $f = B$, $g_1 = W_1/A$, $g_2 = W_2/B$, а у випадку потенціалів (3.45)–(3.47) $f = 1/W$, $g_1 = -W_1$, $g_2 = -W_2$.

В результаті отримуємо такі вирази для V:

$$1.\ \ V(t, x_1, x_2) = A^2 F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2) + x_1^2\left[\frac{A''}{4A} - \frac{(A')^2}{2A^2}\right], \tag{3.48}$$

$$2.\ \ V(t, x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-2\omega_1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{3.49}$$

$$3.\ \ V(t, x_1, x_2) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{-1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{3.50}$$

$$4.\ \ V(t, x_1, x_2) = (\operatorname{sh}^2\omega_1 + \sin^2\omega_2)^{-1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{3.51}$$

де функції F_1, F_2 є довільними функціями своїх аргументів, а ω_1, ω_2 визначаються відповідно такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &1.\ \ x_1 = \frac{1}{A(t)}\omega_1, \quad x_2 = \omega_2;\\ &2.\ \ x_1 = \mathrm{e}^{\omega_1}\sin\omega_2, \quad x_2 = \mathrm{e}^{\omega_1}\cos\omega_2;\\ &3.\ \ x_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2), \quad x_2 = \omega_1\omega_2;\\ &4.\ \ x_1 = \operatorname{ch}\omega_1\cos\omega_2, \quad x_2 = \operatorname{sh}\omega_1\sin\omega_2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Застосуємо отримані результати для відокремлення змінних у відомій системі Шредінгера–Максвелла

$$(p_0 - eA_0)\psi - (\vec{p} - e\vec{A})^2\psi = 0,$$
$$\Box A_0 - \frac{\partial}{\partial t}(A_{0t} + \mathrm{div}\vec{A}) = 0, \quad \Box\vec{A} + \mathrm{grad}(A_{0t} + \mathrm{div}\vec{A}) = \vec{0},$$

де $p_0 = i\dfrac{\partial}{\partial t}$, $p_a = i\dfrac{\partial}{\partial x_a}$, $a = 1, 2, 3$, $e = \mathrm{const}$, $\Box$ — оператор д'Аламбера.

Розглянемо вирази (3.48)–(3.51) як анзац для векторного потенціалу спеціального вигляду

$$A = (V(t, x_1, x_2), 0, 0, 0).$$

З рівнянь Максвелла у вакуумі без струмів випливає, що функція V задовольняє рівняння

$$V_{x_1x_1} + V_{x_2x_2} = 0, \qquad V_{tx_1} = 0, \qquad V_{tx_3} = 0. \tag{3.53}$$

Після підстановки значень V (3.48)–(3.51) у перше з рівнянь (3.53) отримуємо такі лінійні диференціальні рівняння

$$1.\ A^4F_1'' + F_2'' + 2\left[\frac{A''}{4A} - \frac{(A')^2}{2A^2}\right] = 0, \tag{3.54}$$

$$2.\ F_1'' - 4F_1' + 4F_1 + F_2'' + 4F_2 = 0, \tag{3.55}$$

$$3.\ \frac{F_1'' + F_2''}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} + \frac{4}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^3}\left[F_1 + F_2 - \omega_1 F_1' - \omega_2 F_2'\right] = 0, \tag{3.56}$$

$$4.\ (\mathrm{sh}^2 2\omega_1 + \sin^2 2\omega_2)[F_1 + F_2] + \frac{1}{4}(\mathrm{ch}\, 2\omega_1 - \cos 2\omega_2)^2[F_1'' + F_2'']-$$
$$-(\mathrm{ch}\, 2\omega_1 - \cos 2\omega_2)[F_1'\,\mathrm{sh}\, 2\omega_1 + F_2' \sin 2\omega_2] = 0. \tag{3.57}$$

З цих умов визначаємо функції $F_1 = F_1(\omega_1), F_2 = F_2(\omega_2)$. Розглянемо, наприклад, рівняння (3.55). Продиференціюємо його спочатку за змінною ω_1, потім за змінною ω_2. В результаті отримуємо рівняння

$$F_1''' - 4F_1'' + 4F_1' = 0, \qquad F_2''' + 4F_2' = 0.$$

Загальний розв'язок цих рівнянь складають функції

$$F_1 = e^{2\omega_1}[c_3\omega_1 + c_4] + c_5; \quad F_2 = c_1 \cos 2\omega_2 + c_2 \sin 2\omega_2 + c_6.$$

Підставивши їх у (3.55), отримуємо, що $c_6 = -c_5$. $c_1, c_2, \ldots, c_6$ є сталими інтегрування.

Міркуючи аналогічно у випадках 1, 3, 4, переконуємося, що найбільш загальний вигляд функцій F_1, F_2, які задовольняють рівняння (3.54)–(3.57) такий:

$$1.\ F_1 = c_1\omega_1 + c_3\omega_1^2 + c_4, \quad F_2 = c_2\omega_2 + c_5\omega_2^2 + c_6; \tag{3.58}$$

$$2.\ F_1 = e^{2\omega_1}[c_3\omega_1 + c_4] + c_5, \quad F_2 = c_1 \cos 2\omega_2 + c_2 \sin 2\omega_2 - c_5; \tag{3.59}$$

$$3.\ F_1 = c_1\omega_1 + c_3\omega_1^4 + c_4\omega_1^2 + c_5, \quad F_2 = c_2\omega_2 - c_3\omega_2^4 + c_4\omega_2^2 - c_5; \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} 4.\ F_1 &= c_1 \operatorname{sh} 2\omega_1 + c_3\omega_1 \operatorname{sh} 2\omega_1 + c_4 \operatorname{ch} 2\omega_1 + c_5, \\ F_2 &= c_2 \sin 2\omega_2 + c_3\omega_2 \sin 2\omega_2 - c_4 \cos 2\omega_2 - c_5. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Відзначимо, що з (3.53) та (3.58) випливає умова:

$$c_5 + c_3 A^4 = 0, \qquad A' = 0.$$

Можемо вважати, що з точністю до перетворень еквівалентності $A = 1$. Аналогічно можна покласти рівними нулю сталі доданки у виразах для потенціалів.

Отже потенціали V (3.48)–(3.51) з урахуванням (3.58)–(3.61) можуть бути записані у явному вигляді так:

$$1.\ V = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right); \tag{3.62}$$

$$2.\ V = (c_1 \cos 2\omega_2 + c_2 \sin 2\omega_2)e^{-2\omega_1} + c_3\omega_1; \tag{3.63}$$

$$3.\ V = c_1\frac{\omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + c_2\frac{\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + c_3(\omega_1^2 - \omega_2^2); \tag{3.64}$$

$$4.\ V = \frac{(c_1 + c_3\omega_1) \operatorname{sh} 2\omega_1 + (c_2 + c_3\omega_2) \sin 2\omega_2}{\operatorname{sh}^2 \omega_1 + \sin^2 \omega_2}. \tag{3.65}$$

Оскільки всі потенціали задовольняють рівняння Лапласа (3.53), тобто є гармонічними функціями, то для уникнення громіздкості зручно використати комплексну змінну $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Тоді потенціали набувають вигляду:

1. $V = \mathrm{Re}(c\bar{\omega} + c_3\omega^2)$;
2. $V = \mathrm{Re}(ce^{-2\omega} + c_3\omega)$;
3. $V = \mathrm{Re}(\dfrac{c}{\omega} + c_3\omega^2)$;
4. $V = 2\mathrm{Re}(c \operatorname{cth}\omega + c_3\omega \operatorname{cth}\omega)$,

де $c = c_1 + ic_2$, риска над символом означає комплексну спряженість.

Перейшовши до змінної $z = x_1 + ix_2$, що визначається відповідними формулами з (3.52), отримуємо такий вигляд потенціалів $V(t, x_1, x_2)$:

1. $V = \mathrm{Re}(c\bar{z} + c_3z^2)$, $\quad z = \omega$;
2. $V = \mathrm{Re}(cz^{-2} + c_3\ln z)$, $\quad z = e^{\omega}$;
3. $V = \mathrm{Re}\left(\dfrac{c}{\sqrt{2z}} + 2c_3z\right)$, $\quad z = \frac{1}{2}\omega^2$;
4. $V = \mathrm{Re}\left(\dfrac{cz + c_3z \operatorname{arch} z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$, $\quad z = \operatorname{ch}\omega$.

(У кожному випадку вказано зв'язок між z та ω.)

Здійснимо тепер відокремлення змінних у рівнянні Шредінгера (3.35) з потенціалами (3.62), (3.63) при $c_3 = 0$, (3.64). Після підстановки у рівняння (3.35) анзацу (3.36) з $Q \equiv 1$ отримуємо відповідно рівняння:

$$1.\quad i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} + \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3(\omega_1^2 - \omega_2^2); \tag{3.66}$$

$$2.\quad i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0}e^{2\omega_1} + \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} = c_1\cos 2\omega_2 + c_2\sin 2\omega_2; \tag{3.67}$$

$$3.\quad i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3(\omega_1^4 - \omega_2^4). \tag{3.68}$$

Відокремимо змінні у рівнянні (3.66). Воно розщеплюється на три звичайних диференціальних рівняння

$$i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \lambda + \mu, \tag{3.69}$$

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} = c_1\omega_1 + c_2\omega_1^2 - \lambda, \qquad \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} = c_2\omega_2 - c_3\omega_2^2 - \mu. \tag{3.70}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.69) має вигляд

$$\varphi_0 = C_0 e^{-i(\lambda+\mu)t}, \quad C_0 = \mathrm{const}.$$

Рівняння (3.70) є одновимірними стаціонарними рівняннями Шредінгера для гармонічного осцилятора і, отже, можуть бути точно розв'язані.

В результаті відокремлення змінних у рівнянні (3.67) приходимо до такої системи

$$i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \lambda, \tag{3.71}$$

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} - \lambda e^{2\omega_1} - \mu = 0, \tag{3.72}$$

$$-\frac{\varphi_2''}{\varphi_2} + \tilde{C}_1 \cos 2\omega_2 + \tilde{C}_2 \sin 2\omega_2 - \mu = 0. \tag{3.73}$$

Рівняння (3.72) зводиться до рівняння Хілла з уявними періодом $2\pi i$, рівняння (3.73) — це рівняння Матьє. Тому розв'язки рівняння (3.67) можна подати у вигляді добутку виродженої гіпергеометричної функції і функції Матьє [13].

Нарешті, рівняння (3.68) розщеплюється на такі рівняння

$$i\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \lambda, \;\; \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} - c_1\omega_1 + \lambda\omega_1^2 - c_3\omega_1^4 = \mu, \;\; \frac{\varphi_2''}{\varphi_2} - c_2\omega_2 + \lambda\omega_2^2 + c_3\omega_2^4 = -\mu.$$

Останні два рівняння є квазі-точно розв'язними [138].

3.5. Висновки до розділу 3

У цьому розділі одержано такі результати:

1. Для всіх реалізацій три- та чотиривимирних розв'язних дійсних алгебр Лі знайдено диференціальні інваріанти першого порядку у просторах з однією незалежною змінною. Ці інваріанти описують загальний вигляд звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, що допускають відповідну реалізацію.
2. Прокласифіковано системи трьох (чотирьох) звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, які можуть бути проінтегровані в квадратурах за допомогою методу Лі.
3. Описано системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, інваріантні відносно однієї з реалізацій алгебри Евкліда $AE(3)$ та відповідної реалізації розширеної алгебри Евкліда $A\tilde{E}(3)$ у просторі трьох незалежних та довільної скінченної кількості залежних змінних.
4. З використанням симетрійної редукції за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3)$ побудовано ряд нових точних розв'язків системи рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу.
5. Отримано умови на потенціал V, при яких рівняння Шредінгера (3.35) допускає відокремлення змінних. Проведено відокремлення змінних для системи рівнянь Шредінгера–Максвелла.

ВИСНОВКИ

1. Одержано повну класифікацію реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності не вище чотирьох в просторах довільної скінченної кількості змінних.

2. Побудовано повний перелік нееквівалентних реалізацій алгебри $AO(3)$ в просторі комплексних змінних, повний перелік реалізацій алгебри $AE(3)$ в просторі 3 незалежних та n залежних комплексних змінних.

3. Прокласифіковано комплексні реалізації алгебри Лоренца $AO(1,3)$. Описано важливий клас реалізацій алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$ в просторі 4 дійсних незалежних та n залежних комплексних змінних.

4. Отримано функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку для реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі розмірності 3 та 4 в просторах з однією незалежною змінною. Описано загальний вигляд інваріантних відносно цих алгебр звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано нормальні системи, що інваріантні відносно розв'язних алгебр Лі розмірності 3 та 4.

5. Для однієї з реалізацій алгебри Евкліда $AE(3)$ побудовано повний перелік функціонально-незалежних диференціальних інваріантів першого порядку і знайдено загальний вигляд відповідної інваріантної системи диференціальних рівнянь.

6. Побудовано ряд нових точних розв'язків рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу. Проведено відокремлення змінних у системі рівнянь Шредінгера–Максвелла.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Баранник Л.Ф. О симметрийной редукции и точных решениях уравнения Лиувилля // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 12. — С. 3–5. 19

[2] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 4. — С. 411–416. 19

[3] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 5. — С. 579–584. 19

[4] Баранник А.Ф., Марченко В.А. О точных решениях нелинейного уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$ // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 9. — С. 5–8. 19

[5] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1980. — 456 с. 13

[6] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984. — 600 с. 92

[7] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964. — 356 с. 13, 15

[8] Дынкин Е.Б. Структура полупростых алгебр // Усп. матем. наук. — 1947. — **2**, № 4 (20). — С. 59–127. 13

[9] Егорченко И.А. Симметрийные свойства нелинейных уравнений для комплексного векторного поля. — Киев, 1989. — 39 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.48). 92

[10] Жданов Р.З., Лагно В.И. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1,2)$, $P(2,2)$ // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 4. — С. 447–462. 6, 18, 50

[11] Жданов Р.З., Лагно В.І., Фущич В.І. Редукція самодуальних рівнянь Янга-Міллса. І. Група Пуанкаре // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 4. — С. 456–462. 19

[12] Жданов Р.З., Лутфуллін М.В. Відокремлення змінних у рівнянні Шредінгера з потенціалом, який залежить від часу / Симетрійні та аналітичні методи в нелінійній математичній фізиці. — Київ: Ін-т математики, 1998. — С. 99–104. 8, 83

[13] Камке Э. Справочник по обыкновенным диференциальным уравнениям. — М.: Изд-во иностранной литературы. — 1950. — 328 с. 121

[14] Крючкович Г.И. Класификация трехмерных римановых пространств по группам движений // Усп. матем. наук. — 1954. — **9**, № 1 (59). — С. 3–40. 5, 14

[15] Крючкович Г.И. О движениях в полуприводимых римановых пространствах // Усп. матем. наук. — 1957. — **12**, № 6 (78). — С. 149–156. 5, 14

[16] Лагно В.І. Про нові зображення груп Пуанкаре та Евкліда // Доп. НАН України.—1996. — № 8. — С. 14–19. 28

[17] Лагно В.І. $\tilde{P}(1,3)$-інваріантна редукція рівнянь Янга-Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь // Доп. НАН України. — 1997. — № 7. — С. 21–26. 12, 93

[18] Лагно В.І., Лутфуллін М.В. Редукція рівнянь Максвелла для векторного потенціалу за підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре // Доп. НАН України. — 1998. — № 7. — С. 31–36. 7, 8, 83

[19] Лагно В.І., Смалій В.Ф. $\tilde{P}(1,3)$-інваріантні анзаци для поля Максвелла // Доп. НАН України. — 1996. — № 12. — С. 49–54. 93

[20] Лагно В.I., Фущич В.И. Редукция самодуальных уравнений Янга-Миллса по подгрупам расширеной группы Пуанкаре // Теорет. и мат. физика. — 1997. — **100**, № 3. — С. 416–432. 12, 93

[21] Лутфуллiн М.В. Пiдгрупи розширеної групи Пуанкаре та точнi розв'язки рiвнянь Максвелла для векторного потенцiалу / Thesis of Conference Reports "Modelling and Investigation of System Stabiliti". — Kiev, 1997. — P. 67. 8, 83

[22] Лутфуллiн М.В. Про зображення алгебри Лi групи Евклiда в класi векторних полiв Лi // Вiсник державного унiверситету "Львiвська полiтехнiка". — 1998. — № 337. — С. 44–47. 8, 20

[23] Лутфуллiн М.В. Про зображення алгебри Лi групи поворотiв та групи Лоренца // Збiрник наукових праць Полтавського державного педагогiчного iнституту iм. В.Г. Короленка, серiя "Фiзико-математичнi науки". — 1998. — Випуск 3. — С. 41–44. 8, 20

[24] Лутфуллiн М.В. Реалiзацiї групи Пуанкаре в класi комплексних векторних полiв Лi / Груповi та аналiтичнi методи в математичнiй фiзицi. — Київ: Iн-т математики, 2001. — С. 177–186. 8, 20

[25] Лутфуллiн М.В. Реалiзацiї розв'язних алгебр Лi та iнтегрування систем нелiнiйних звичайних диференцiальних рiвнянь // Збiрник наукових праць Полтавського державного педагогiчного унiверситету iм. В.Г. Короленка, серiя "Фiзико-математичнi науки". — 2000. — Випуск 1(9). — С. 65–72. 8, 20, 83

[26] Меньшиков В.М. Решения уравнения двумерной газовой динамики типа простых волн // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1969. — № 3. — С. 129–134. 19

[27] Морозов В.В. Класификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1958. — № 4 (5). — С. 161–171. 14

[28] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 3 (34). — С. 99–106. 14

[29] Мубаракзянов Г.М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 4 (35). — С. 104–116. 14

[30] Мубаракзянов Г.М. Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1966. — № 6 (55). — С. 95–98. 14

[31] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 1 (32). — С. 114–123. 14, 17, 21, 22

[32] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука. — 1978. — 400 с. 29, 82

[33] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с. 18, 82

[34] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. — 495 с. 5, 14

[35] Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие движения со свободной границей // Докл. АН СССР. — 1972. — **202**, № 2. — С. 302–305. 19

[36] Сухарев М.Г. Инвариантные решения уравнений, описывающих движение жидкости и газа в длинных трудопроводах // Докл. АН СССР. — 1967. — **175**, № 4. — С. 781–787. 19

[37] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ группы Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Киев: Наук. думка. — 1991. — 304 с. 19

[38] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 4. — С. 29–32. 19

[39] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре и конформной алгебры // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 5. — С. 21-22. 19

[40] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 288 с. 19, 93

[41] Фущич В.І., Лагно В.І. Про нові нелінійні рівняння, інваріантні відносно групи Пуанкаре в двовимірному просторі-часі // Доп. НАН України.—1996. — № 11. — С. 60–65. 28

[42] Фущич В.І., Лагно В.І. Лінійні та нелінійні зображення груп Галілея в двовимірному просторі-часі // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 3. — С. 414–423. 18

[43] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с. 52

[44] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с. 76, 92, 105

[45] Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна–Инфельда // Докл. АН СССР. — 1981. — **263**, № 3. — С. 582–586. 19

[46] Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера // Докл. АН СССР. — 1983. — **273**, № 3. — С. 543–546. 19

[47] Фущич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теорет. и мат. физика. — 1985. — **64**, № 1. — С. 41–50. 92

[48] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с. 19, 92

[49] Anderson R.L., Davison S.M. A generalization of Lie's "counting" theorem for second-order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — **48**, — P. 301–315. 5

[50] Baranovskii S.P., Shirokov I.V. Prolongations of vector fields on Lie groups and homogeneous spaces // Teor. Math. Phys. — 2003. — **135**, — P. 510–519. 79

[51] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. — 2001. — **69**, № 1. — P. 43–94. 5

[52] Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni. — Pisa: Spoerri. — 1918. 14

[53] Bountis T.C., Papageorgiou V., Winternitz P. On the integrability of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles // J. Math. Phys. — 1986. — **27**, № 5. — P. 1215–1224. 5

[54] Bratzlavsky F. Sur les algebres et les groupes de Lie résolubles de dimension trois et quatre. — Memoire de Licence, Université Libre de Bruxelles (1959) 14

[55] Carinena J.F., Grabowski J., Marmo G. Some physical applications of systems of differential equations admitting a superposition rule // Rep. Math. Phys. — 2001. — **48**, № 1–2. — P. 47–58. 5

[56] Carinena J.F., Grabowski J., Ramos A. Reduction of time-dependent systems admitting a superposition principle // Acta Appl. Math. — 2001. — **66**, № 1. — P. 67–87. 5

[57] Christodoulakis T., Papadopoulos G.O., Dimakis A., Automorphisms of real four-dimensional Lie algebras and the invariant characterization

of homogeneous 4-spaces // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — **36**. — P. 427–441. (Corregendum J. Phys. A — 2003. — **36**. — P. 2379.) 15, 26, 140

[58] Cerquetelli N., Ciccoli N., Nucci M.C. Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — **9**, № 2. — P. 24–35. 5, 16, 22

[59] Edelstein R.M., Govinder K.S., Mahomed F.M. Solution of ordinary differential equation via nonlocal transformations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — **34**. — P. 1141–1152. 5

[60] Ellis G.F.R., Sciama D.W. On a class of model universes satisfying the perfect cosmological principle / Perspectives in Geometry and Relativity, — Bloomington: Indiana University Press — 1966. 14

[61] Fedorchuk V. Symmetry reduction and exact solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, multidimensional Monge–Ampere and eikonal equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 1995. — **2**, № 3–4. — P. 329–333. 19

[62] Fushchych W.I., Lahno V.I., Zhdanov R.Z. On nonlinear representations of the conformal algebra $AC(2,2)$ // Доп. НАН України.— 1993. — № 9. — С. 44–47. 6, 18

[63] Fushchich W., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 1. — P. 75–98. 19

[64] Fushchych W., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. II // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 2. — P. 158–188. 19

[65] Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**, № 16. — P. 929–933. 19

[66] Fushchich W.I., Shtelen W.M. Conformal symmetry and new exact solutions of SU_2 Yang–Mills theory // Lett. Nuovo Cim. — 1983. — **38**, № 2. — P. 37–40. 19

[67] Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On the conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Phys. Lett. B. — 1985. — **159**, № 2–3. — P. 189–191. 19

[68] Fushchych W.I., Tsyfra I.M., Boyko V.M. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic field // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 2. — P. 210–221. 6, 17

[69] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotations group $O(n)$ and its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$, $G(1,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28**, № 1. — P. 69–92. 19

[70] Fushchych W., Zhdanov R. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 383 p. 6, 19, 50

[71] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Reports. — 1989. — **172**, № 4. — P. 123–174. 19, 93

[72] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Lahno V.I. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 3. — P. 295–308. 6, 18

[73] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. II. Exact solutions. — Montreal, 1988. — 59 p. (Preprint/ Centre de recherches mathematiques; CRM–1544). 19

[74] Gagnon L., Winternitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrodinger equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — **26**. — P. 7061–7076. 5

[75] Gonzalez-Gascon F., Gonzalez-Lopez A. Symmetries of differential equations. IV // J. Math. Phys. — 1983. — **24**, № 8. — P. 2006–2021. 5

[76] Gonzalez-Gascon F., Gonzalez-Lopez A. The inverse problem concerning symmetries of ordinary differential equations // J. Math. Phys. — 1988. — **29**, № 3 — P. 618–621. 5

[77] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. — 1984. — **25**, № 4. — P. 791–806. 19

[78] Grundland A.M., Tuszynski J.A. Symmetry breaking and bifurcation solutions in the classical complex Φ^6 field theory // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**, № 19. — P. 6243–6258. 19

[79] González-López A., Kamran N., Olver P.J. Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. (3) — 1992. — **64**, № 2. — P. 339–368. 5, 16

[80] González-López A., Kamran N., Olver P.J. Lie algebras of differential operators in two complex variables // American J. Math. — 1992. — **114**. — P. 1163–1185. 16, 79

[81] Harnad J., Winternitz P., Anderson R.L. Superposition principles for matrix Riccati equations // J. Math. Phys. — 1983. — **24**, № 5. — P. 1062–1072. 5

[82] Harvey A. Automorphisms of the Bianchi model Lie groups. // J. Math. Phys. —1979. —**20**, № 2. — P. 251–253. 15, 26, 140

[83] Hernádez Heredero R., Olver P.J. Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. — 1996. — **37**. — P. 6419–6438. 5

[84] Lahno V.I. On new relativistically invariant nonlinear equations in two-dimensional space-time // Rep. Math. Phys. — 1998. — **41**, № 3. — P. 271–277. 17, 19

[85] Lahno V.I. Realizations of the Poincaré algebra and Poincaré-invariant equations in three-dimensional space-time // Rep. Math. Phys. — 2000. — **46**, № 1/2. — P. 137–142. 17, 19

[86] Lahno V., Zhdanov R. Towars a classification of realizations of the Euclid algebra $e(3)$ // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – **30**, Part 1. — 2000. – P. 146–150. 6, 18, 50

[87] Lahno V., Zhdanov R., Fushchych W. symmetry reduction and exact solutions of the Yang–Mills equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 1995. — **2**, № 1. — P. 51–72. 12, 19, 93

[88] Lee H.C. Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres // J. Math. Pures Appl. — 1947. — **26**. — P. 251–267. 14

[89] Lie S. Gruppenregister, Gesammetle Abhandlungen, Vol. 5. — Leipzig: B.G. Teubner, 1924, 767–773. 16

[90] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen // Math. Ann. — 1880. — **16**. — P. 441–528; див. також Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6, Leipzig, B.G. Teubner, 1927, 1–94. 5, 16

[91] Lie S. Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. — 1883. — **9**. — P. 371–393. 5

[92] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B.G. Teubner, 1891. 5, 79

[93] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol.1–3. — Leipzig, 1888, 1890, 1893. 5, 14, 16, 28

[94] Lutfullin M. On covariant realizations of the Poincaré group $P(1,3)$ // Rep. Math. Phys. — 2002. — **50**, № 1. — P. 195–209. 8, 20

[95] Lutfullin M. On integrable systems of ODEs // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — **50**, Part 1. — 2004. — P. 176–178. 8, 83

[96] Lutfullin M. Realization of the Euclidian algebra within the class of complex Lie vector field // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — **30**, Part 1. — 2000. — P. 151–156. 8, 20, 83

[97] Lutfullin M. Symmetry reduction of nonlinear equations of classical electrodynamics / Proc. of the Second International Conf. “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” — Kyiv, 1997. — **1**. — P. 232–236. 8, 83

[98] Lutfullin M., Popovych R. Realizations of real 4-dimensional solvable decomposed Lie algebras // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — **43**, Part 2. — 2002. — P. 466–469. 8, 20, 25

[99] MacCallum M.A.H. On the enumeration of the real four-dimensional Lie algebras / On Einstein's Path: essays in honor of Engelbert Schucking. New York: Springer Verlag, 1999. — P. 299–317. 15

[100] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. — 1989. — **30**, № 12. — P. 2770–2777. 5, 16

[101] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Symmetry Lie algebras on nth order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — **151** — P. 80–107. 5

[102] Makaruk H. Real Lie algebras of dimension $d \leqslant 4$ which fulfil the Einstein equations // Rep. Math. Phys. — 1993. — **32**, № 3. — P. 375–383. 5

[103] Milson R. Representations of finite-dimensional Lie algebras by first-order differential operators. Some local results in the transitive case // J. London Math. Soc. (2) — 1995. — **52**, № 2. — P. 285–302. 79

[104] Ndogmo J.-C. Invariants of solvable Lie algebras of dimension six // J. Phys. A — 2000. — **33**, № 11. — P. 2273–2287. 15

[105] Ndogmo J.-C., Winternitz P. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals // J. Phys. A — 1994. — **27**, № 2. — P. 405–423. 15

[106] Ndogmo J.-C., Winternitz P. Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with abelian nilradicals // J. Phys. A — 1994. — **27**, № 8. — P. 2787–2800. 15

[107] Nesterenko M., Boyko V. Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — **43**, Part 2. — 2002. — P. 474–477.

[108] Niederle J., Nikitin A. G. Irreducible representations of the extended Poincare parasuperalgebra // J. Phys. A — 1999. — **32**, № 27. — P. 5141–5155. 6

[109] Nikitin A. G. Wigner induced representation method and the Poincare parasuperalgebra / 5th Wigner Symposium, Word Scientific, — 1998. — P. 227–229. 6

[110] Nikitin A.G., Tretynyk V.V. Irreducible representations of the Poincare parasuperalgebra // J. Phys. A — 1995. — **28**. — P. 1655–1668. 6

[111] Olver P. Differential invariants and invariants differential equations // Lie Groups and Appl. — 1994. — **1**. — P. 177–192. 18

[112] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 18

[113] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. — 1976. — **17**, № 6. — P. 986–994. 14, 22

[114] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1977. — **18**, № 7. — P. 1449–1455. 14, 22

[115] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // J. Math. Phys. — 1975. — **16**, № 18. — P. 1615–1624. 6

[116] Popovych R., Boyko V. Differential invariants and application to Riccati-type systems // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — **43**, Part 1. — 2002. — P. 184–193. 19

[117] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — **36**. — P. 7337–7360 (see math-ph/0301029). 5, 8, 17, 20, 25, 50, 79, 140

[118] Post G. A class of graded Lie algebras of vector fields and first order differential operators // J. Math. Phys. — 1994. — **35**, № 12. — P. 6838–6856. 16

[119] Post G. On the structure of transitively differential algebras // J. Lie Theory. — 2001. — **11**, № 1. — P. 111–128. 16

[120] Post G. On the structure of graded transitive Lie algebras // J. Lie Theory. — 2002. — **12**, № 1. — P. 265–288. 16

[121] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // J. Math. Phys. — 1993. — **34**, № 2. — P. 558–570. 6, 18

[122] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two–dimensional space–time // J. Math. Phys. — 1990. — **31**, № 5. — P. 1095–1105. 17

[123] Rubin J.L., Winternitz P. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — V.26, № 5. — P. 1123–1138. 15

[124] Schmucker A., Czichowski G. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations // J. Lie Theory. — 1998. — **8**, № 1. — P. 129–137. 5, 16

[125] Schwarz F. Solving second-order differential equations with Lie symmetry // Acta Appl. Math. — 2000. — **60**. — P. 39–113. 5

[126] Seeley C. 7-dimensional nilpotent Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — **335**, № 2. — P. 479–496. 15

[127] Shnider S., Winternitz P. Classification of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles // J. Math. Phys. — 1984. — **25**, № 11. — P. 3155–3165. 5

[128] Tremblay S., Winternitz P. Solvable Lie algebras with triangular nilradicals // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**. — P. 789–806. 15

[129] Tremblay S., Winternitz P. Invariants of the nilpotent and solvable triangular Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — **34**. P. 9085–9099. 15

[130] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. — 1988. — **29**, № 10. — P. 2139–2144. 15

[131] Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimension six // J. Math. Phys. — 1990. — **31**, № 6. — P. 1344–1350. 15

[132] Turkowski P. Structure of real Lie algebras // Linear Algebra Appl. — 1992. — **171**. — P. 197–212. 15

[133] Vranceanu G. Lecons de geométrie différentielle. — Bucarest, 1947. — P. 105–111. 14

[134] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations // Nonlinear Dynamics. — 2000. — **22**. — P. 121–133. 5

[135] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — **34**, № 13. — P. 2883–2911. 5, 17, 22, 24, 79

[136] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations // Internat. J. Non-Linear Mech. — 2001. — **36**, № 4. — P. 671–677. 5, 17

[137] Umlauf K.A. Über die Zussammesetzung der endlichen continuierlichen Transformationgruppen, indsbesondere der Gruppen von Range Null. — Leipzig, 1891. 14

[138] Ushveridze A.G., Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics. — Bristol: IOP Publ., 1994. — 465 p. 18, 121

[139] Yehorchenko I.A. Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations / Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kyiv: Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukraine, 1992. — P. 62–66. 6, 17, 18

[140] Yehorchenko I. Differential invariants of nonlinear representation of the Poincaré algebra. Invariant equations / Proc. of the Second International Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics." — Kyiv, 1997. — **1**. — P. 200–205. 17, 19, 90

[141] Zhdanov R.Z. Separation of variables in (1+2)–dimensional Shrödinger equation // J. Math. Phys. — 1997. — **38**, № 2. — P. 245–249 12, 114, 115

[142] Zhdanov R.Z., Fushchych W.I. On new representations of Galilei groups // J. Nonlinear Math. Phys. — 1997. — **4**, № 3–4. — P. 426–435. 6, 17

[143] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A — 1999. — **32**. — P. 7405–7418. 5

[144] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and exact solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang–Mills equations // Modern Nonlinear Optics. Second Edition, Advances in Chemical Physics, **119**. — New York: John Willey & Sons. Inc. — 2001. — P. 269–351. 12, 19, 93

[145] Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. On covariant realizations of the Euclid group // Comm. Math. Phys. — 2000. — **212**, № 3. — P. 535–556. 6, 18, 50

[146] Zhdanov R., Lutfullin M. On separable Schrödinger–Maxwell equation // J. Math. Phys. — 1998. — **39**, № 12. — P. 6454–6458. 8, 83

[147] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the new approarh to variable separation in the time-dependent Shrödinger equation with two space dimensions // J. Math. Phys. — 1995. — **36**, № 10. — P. 5506–5521. 12, 114

Додаток A

Автоморфізми та мегаідеали тривимірних та чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі

У додаткові A наведено автоморфізми та мегаідеали тривимірних та чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі, які були використані для класифікації реалізацій таких алгебр Лі.

А. Харві [82] розглянув задачу побудови автоморфізмів тривимірних розв'язних алгебр Лі. Проте, у його роботі знайдено не повні групи автоморфізмів, а лише їх зв'язні компоненти одиниці. Групи автоморфізмів є незв'язними у випадках $A_{3.4}^{-1}$, $A_{3.5}^{0}$ та $AO(3)$. Випущені дискретні перетворення відповідно мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Автоморфізми дійсних чотиривимірних розв'язних алгебр нещодавно опубліковано [57] з деякими неточностями у випадку алгебри $A_{4.2}^{b}$, які були скоректовані після наших зауважень (див. препринт math-ph/0301029 статті [117]).

Таблиці автоморфізмів та мегаідеалів мають таку структуру.

У першому стовпці вказано алгебру A, ненульові комутаційні співвідношення між її базисними елементами і, де це необхідно, обмеження на параметри алгебри.

У третьому стовпці таблиць виписано матриці, що визначають перетворення з групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$, в яких $\alpha_{\mu\nu}$ — дійсні числа, які крім вказаних явно співвідношень задовольняють умову $\det(\alpha_{\mu\nu}) \neq 0$. Для порівняння у другому стовпці наведено матриці, що відповідають добре відомим перетворенням з групи внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(A)$.

У четвертому стовпці перераховано мегаідеали алгебри A.

Таблиця А.1

Автоморфізми та мегаідеали тривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі

Алгебра	Int(A)	Aut(A)	Мегаідеали
$3A_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$	$\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{2.1} \oplus A_1$ $[e_1, e_2] = e_1$	$\begin{pmatrix} e^{\theta_2} & \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1, e_3\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{3.1}$ $[e_2, e_3] = e_1$	$\begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, де $\alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{3.2}$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & \theta_3 e^{\theta_3} & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{3.3}$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_2$	$\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{3.4}^a$, $a \neq 0$, $-1 \leqslant a < 1$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = ae_2$	$\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{a\theta_3} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$a = -1$		додатково $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$A_{3.5}^b$, $b \geqslant 0$ $[e_1, e_3] = be_1 - e_2$ $[e_2, e_3] = e_1 + be_2$	$\begin{pmatrix} \psi & \varphi & b\theta_1 + \theta_2 \\ -\varphi & \psi & b\theta_2 - \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\psi = e^{b\theta_3}\cos\theta_3$, $\varphi = e^{b\theta_3}\sin\theta_3$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,	$\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$
$b = 0$		додатково $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & -\alpha_{11} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$

Таблиця А.2

Автоморфізми та мегаідеали дійсних чотиривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	Int(A)	Aut(A)	Мегаідеали
$4A_1$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}$	$\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{2.1}\oplus 2A_1$ $[e_1,e_2]=e_1$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_2}&\theta_1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&0&0\\0&1&0&0\\0&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_3,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_3,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$2A_{2.1}$ $[e_1,e_2]=e_1$ $[e_3,e_4]=e_3$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_2}&\theta_1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&e^{\theta_4}&\theta_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\0&0&0&1\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\langle e_1,e_3\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{3.1}\oplus A_1$ $[e_2,e_3]=e_1$	$\begin{pmatrix}1&\theta_3&\theta_2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\gamma&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\0&\alpha_{22}&\alpha_{23}&0\\0&\alpha_{32}&\alpha_{33}&0\\0&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix},$ де $\gamma=\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{3.2}\oplus A_1$ $[e_1,e_3]=e_1$ $[e_2,e_3]=e_1+e_2$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_3}&\theta_3e^{\theta_3}&\theta_1&0\\0&e^{\theta_3}&\theta_2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&0\\0&\alpha_{11}&\alpha_{23}&0\\0&0&1&0\\0&0&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_4\rangle,\langle e_1,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{3.3}\oplus A_1$ $[e_1,e_3]=e_1$ $[e_2,e_3]=e_2$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_3}&0&\theta_1&0\\0&e^{\theta_3}&\theta_2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&0\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&0\\0&0&1&0\\0&0&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}$	$\langle e_4\rangle,\langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$

Продовження табл. А.2.

Алгебра	Int(A)	Aut(A)	Мегаідеали
$A^a_{3.4}\oplus A_1$ $[e_1,e_3]=e_1$ $[e_2,e_3]=ae_2$ $a\neq 0,$ $-1\leqslant a<1$	$\begin{pmatrix} e^{\theta_3} & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & e^{a\theta_3} & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle, \langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_2\rangle, \langle e_1,e_4\rangle,$ $\langle e_4\rangle, \langle e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$a=-1$		додатково $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A^b_{3.5}\oplus A_1,\ b\geq 0$ $[e_1,e_3]=be_1-e_2$ $[e_2,e_3]=e_1+be_2$	$\begin{pmatrix} \psi & \varphi & b\theta_1+\theta_2 & 0 \\ -\varphi & \psi & b\theta_2-\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ де $\psi=e^{b\theta_3}\cos\theta_3,$ $\varphi=e^{b\theta_3}\sin\theta_3$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$b=0$		додатково $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\langle e_4\rangle,\ \langle e_1,e_2\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_4\rangle,$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$

Таблиця А.3

Автоморфізми та мегаідеали дійсних чотиривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	Int(A)	Aut(A)	Мегаідеали
$A_{4.1}$ $[e_2,e_4]=e_1$ $[e_3,e_4]=e_2$	$\begin{pmatrix}1&\theta_4&\frac12\theta_4^2&\theta_2\\0&1&\theta_4&\theta_3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\0&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\0&0&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&0&0&\alpha_{44}\end{pmatrix}$, де $\alpha_{11}=\alpha_{33}\alpha_{44}^2$, $\alpha_{12}=\alpha_{23}\alpha_{44}$, $\alpha_{22}=\alpha_{33}\alpha_{44}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A^b_{4.2}$, $b\neq0$ $[e_1,e_4]=be_1$ $[e_2,e_4]=e_2$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	$\begin{pmatrix}e^{b\theta_4}&0&0&\theta_1\\0&e^{\theta_4}&\theta_4e^{\theta_4}&\theta_2\\0&0&e^{\theta_4}&\theta_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\0&0&\alpha_{22}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, де $(b-1)\alpha_{21}=0$	$\langle e_2\rangle,\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$; $\langle e_1\rangle$ при $b\neq1$
$A_{4.3}$ $[e_1,e_4]=e_1$ $[e_3,e_4]=e_2$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_4}&0&0&\theta_1\\0&1&\theta_4&\theta_3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0&\alpha_{14}\\0&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\0&0&\alpha_{22}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_2\rangle,\langle e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{4.4}$ $[e_1,e_4]=e_1$ $[e_2,e_4]=e_1+e_2$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	$\begin{pmatrix}e^{\theta_4}&\theta_4e^{\theta_4}&\frac12\theta_4^2e^{\theta_4}&\theta_1\\0&e^{\theta_4}&\theta_4e^{\theta_4}&\theta_2\\0&0&e^{\theta_4}&\theta_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\0&\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{24}\\0&0&\alpha_{11}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A^{a_1a_2a_3}_{4.5}$ $[e_1,e_4]=a_1e_1$ $[e_2,e_4]=a_2e_2$ $[e_3,e_4]=a_3e_3$ $a_1a_2a_3\neq0$	$\begin{pmatrix}e^{a_1\theta_4}&0&0&\theta_1\\0&e^{a_2\theta_4}&0&\theta_2\\0&0&e^{a_3\theta_4}&\theta_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, де $\alpha_{ij}(a_i-a_j)=0$, $i,j=1,2,3$	$\langle e_i\rangle, a_i\neq a_j, j\neq i$, $\langle e_i,e_j\rangle$, $a_i,a_j\neq a_k$, $i,j\neq k$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$

Продовження табл. А.3.

Алгебра	Int(A)	Aut(A)	Мегаідеали
$A_{4.6}^{a,b}$, $a>0$ $[e_1,e_4]=ae_1$ $[e_2,e_4]=be_2-e_3$ $[e_3,e_4]=e_2+be_3$	$\begin{pmatrix} e^{a\theta_4} & 0 & 0 & a\theta_1 \\ 0 & \alpha & \beta & b\theta_2+\theta_3 \\ 0 & -\beta & \alpha & b\theta_3-\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ де $\alpha = e^{b\theta_4}\cos\theta_4$, $\beta = e^{b\theta_4}\sin\theta_4$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & -\alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{4.7}$ $[e_2,e_3]=e_1$ $[e_1,e_4]=2e_1$ $[e_2,e_4]=e_2$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	$\begin{pmatrix} e^{2\theta_4} & -\theta_3 e^{\theta_4} & \gamma & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_4} & \theta_4 e^{\theta_4} & \tau \\ 0 & 0 & e^{\theta_4} & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\gamma = -\theta_3 e^{\theta_4}\theta_4 + \theta_2 e^{\theta_4}$, $\tau = \theta_3+\theta_2$	$\begin{pmatrix} \gamma^2 & -\gamma\alpha_{34} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \gamma & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \gamma & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\alpha_{13}=\gamma(\alpha_{24}-\alpha_{34})-\alpha_{23}\alpha_{34}$	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{4.8}^{b}$, $\lvert b\rvert\le 1$ $[e_2,e_3]=e_1$ $[e_1,e_4]=(1+b)e_1$ $[e_2,e_4]=e_2$ $[e_3,e_4]=be_3$	$\begin{pmatrix} \tau & -\theta_3 e^{\theta_4} & \theta_2 e^{b\theta_4} & \sigma \\ 0 & e^{\theta_4} & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{b\theta_4} & \theta_3 b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\tau = e^{(1+b)\theta_4}$, $\sigma = b\theta_2\theta_3+\theta_1(1+b)$	Див. примітку 1	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$; $\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_3\rangle$ при $b\neq 1$
$A_{4.9}^{a}$, $a\ge 0$ $[e_2,e_3]=e_1$ $[e_1,e_4]=2ae_1$ $[e_2,e_4]=ae_2-e_3$ $[e_3,e_4]=e_2+ae_3$	$\begin{pmatrix} \gamma & \beta-\alpha & \alpha+\beta & \theta_1 \\ 0 & \alpha & -\beta & a\theta_2+\theta_3 \\ 0 & \beta & \alpha & a\theta_3-\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\alpha=e^{a\theta_4}\cos\theta_4$, $\gamma=e^{2a\theta_4}$, $\beta=-e^{a\theta_4}\sin\theta_4$	Див. примітку 2	$\langle e_1\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$
$A_{4.10}$ $[e_1,e_3]=e_1$ $[e_2,e_3]=e_2$ $[e_1,e_4]=-e_2$ $[e_2,e_4]=e_1$	$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \theta_1 & \theta_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & \theta_2 & -\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $\gamma_1=e^{\theta_3}\cos\theta_4$, $\gamma_2=e^{\theta_3}\sin\theta_4$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\sigma\alpha_{12} & \sigma\alpha_{11} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$, де $\sigma=\pm 1$	$\langle e_1,e_2\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_4\rangle$, $\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle$

Примітки:

1. Загальний вигляд матриці автоморфізму для алгебри $A^b_{4.8}$ такий

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де компоненти матриці задовольняють умови

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}, \qquad && b\alpha_{12} = -\alpha_{22}\alpha_{34} + \alpha_{32}\alpha_{24}, \\ &\alpha_{13} = \alpha_{33}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{34}, \qquad && (b-1)\alpha_{32} = 0, \quad (b-1)\alpha_{23} = 0. \end{aligned}$$

При $b = \pm 1$ додатково існують перетворення, які визначаються матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{32}\alpha_{23} & \alpha_{32}\alpha_{24} & -\alpha_{23}\alpha_{34} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & b\alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

2. Загальний вигляд матриці автоморфізму для алгебри $A^a_{4.9}$ при $a \neq 0$ такий

$$\begin{pmatrix} {\alpha_{33}}^2 + {\alpha_{32}}^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{33} & -\alpha_{32} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= -\frac{a\alpha_{33}\,\alpha_{34} - a\alpha_{32}\,\alpha_{24} + \alpha_{32}\,\alpha_{34} + \alpha_{33}\,\alpha_{24}}{a^2+1}, \\ \alpha_{13} &= \frac{a\alpha_{32}\,\alpha_{34} + a\alpha_{33}\,\alpha_{24} - \alpha_{33}\,\alpha_{34} + \alpha_{32}\,\alpha_{24}}{a^2+1}. \end{aligned}$$

При $a = 0$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} {\alpha_{22}}^2 + {\alpha_{32}}^2 & -\alpha_{32}\alpha_{34} - \alpha_{22}\alpha_{24} & -\alpha_{22}\alpha_{34} + \alpha_{32}\alpha_{24} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & -\alpha_{32} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} -{\alpha_{22}}^2 - {\alpha_{32}}^2 & \alpha_{32}\alpha_{34} + \alpha_{22}\alpha_{24} & -\alpha_{22}\alpha_{34} + \alpha_{32}\alpha_{24} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{24} \\ & \alpha_{32} & -\alpha_{22} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Додаток В

Диференціальні інваріанти тривимірних та чотиривимірних дійсних розв'язних алгебр Лі

У першій таблиці цього додатку наведено диференціальні інваріанти першого порядку для тривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі у просторі трьох залежних та однієї незалежної змінної. Вважаємо, що у кожній з реалізацій наведених у таблиці 2.4 $x_4 = t$ — незалежна змінна, x_1, x_2, x_3 — функції від t.

У другій та третій таблицях додатку подано диференціальні інваріанти першого порядку відповідно для чотиривимірних нерозкладних та розкладних дійсних алгебр Лі у просторі чотирьох залежних та однієї незалежної змінної, виключаючи дві реалізації $R(4A_1, 2)$, $R(4A_1, 5)$, які не існують у просторах розмірності менше шести. Аналогічно вважаємо, що x_1, x_2, x_3, x_4 — функції від t, $x_5 = t$ — незалежна змінна.

Немає необхідності розглядати інваріанти цих алгебр у просторі з більшою кількістю залежних змінних, оскільки при такому виборі незалежної змінної всі змінні x_i та $\dot{x}_i$, $i = N + 2, \ldots$, будуть інваріантами для будь-якої реалізації розв'язної алгебри Лі розмірності N.

Таблиця В.1

Диференціальні інваріанти дійсних тривимірних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	N	Інваріанти
$3A_1$	1	$t,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	2	$t,\ x_3,\ \dot{x}_1\dot{x}_4 - \dot{x}_2\dot{x}_3,\ \dot{x}_3,$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_1\varphi'(x_3) - \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	4	$t,\ x_2,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	5	$t,\ x_2,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
$A_{2.1} \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_1 e^{-x_3},$
	2	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_1 e^{-\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3}},\ x_3,$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	4	$t,\ x_3,\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_2},\ \dot{x}_3,\ x_3,$
$A_{3.1}$	1	$t,\ x_3 - \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2},\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	2	$t,\ x_3,\ 2\dot{x}_1\dot{x}_3 - \dot{x}_2^2,\ \dot{x}_3,$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
$A_{3.2}$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_2 e^{-x_3},\ (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 x_3)e^{-x_3},$
	2	$t,\ x_3,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_2 e^{-\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}},$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
$A_{3.3}$	1	$t,\ \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2},\ \dot{x}_1 e^{-x_3},\ \dot{x}_3,$
	2	$t,\ x_3,\ \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2},\ \dot{x}_3,$
	3	$t,\ x_2,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
	4	$t,\ x_2,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,$
$A_{3.4}^a$	1	$t,\ \dot{x}_1 e^{-x_3},\ \dfrac{\dot{x}_1^a}{\dot{x}_2},\ \dot{x}_3,$
	2	$t,\ x_3,\ \dfrac{\dot{x}_1^a}{\dot{x}_2},\ \dot{x}_3,$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_3,\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_2},$
$A_{3.5}^b$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)e^{-2bx_3},\ x_3 - \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}$
	2	$t,\ x_3,\ \dot{x}_3,\ (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)e^{-2b\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}}$
	3	$t,\ x_3,\ \dot{x}_3,\ \dfrac{\dot{x}_2}{1 + x_2^2}$

Таблиця В.2

Диференціальні інваріанти чотиривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі

Алгебра	N	Інваріанти
$A_{4.1}$	1	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ x_4\dot x_3-\dot x_2,\ \dot x_1-\dot x_2x_4+\frac12\dot x_3{x_4}^2$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_4\dot x_2-\frac12\dot x_3^2,\ \dot x_1\dot x_4^2-\dot x_2\dot x_3\dot x_4+\frac13\dot x_3^3$
	3	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_1\dot x_3-\frac12\dot x_2^2$
	4	$t,\ \dot x_4,\ \dot x_4\dot x_1-\dot x_2\dot x_3,\ x_3+\frac12{x_4}^2,\ \dot x_3+\dot x_4x_4$
	5	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ x_4,\ \dot x_1+\dot x_2x_3$
	6	$t,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
	7	$t,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_4,\ x_3-\frac12{x_2}^2,\ x_2\dot x_2-\dot x_3$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
$A^b_{4.2},\ \ b\neq 0$	1	$t,\ \dot x_4,\ \dot x_3e^{-x_4},\ \dfrac{\dot x_2}{\dot x_3}-x_4,\ \dot x_1e^{-bx_4}$
	2	$t,\ \dot x_4,\ x_4,\ \dfrac{{\dot x_3}^b}{\dot x_1},\ \dot x_3e^{-\frac{\dot x_2}{\dot x_3}}$
	3	$t,\ \dot x_3,\ \dfrac{\dot x_4}{x_4},\ \dot x_4e^{(b-1)x_3},\ (\dot x_1\dot x_3-\dot x_2\dot x_4)e^{bx_3}$
	4	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_1e^{bx_3},\ \dot x_4,\ x_4$
	5	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dfrac{\dot x_2}{x_2},\ \dfrac{{\dot x_3}^{b-1}}{x_2}$
	6	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dfrac{\dot x_2}{x_2},\ x_2e^{(q-1)\frac{x_3}{x_2}},\ \dfrac{x_3}{x_2}-\dfrac{\dot x_3}{\dot x_2}$
$b\neq 1$	7	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_1e^{bx_3}+(b-1)\dot x_2e^{x_3}$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_2/x_2$
$b=1$	7	$t,\ x_2,\ \dot x_2,\ \dot x_4,\ \dot x_3e^{-x_4}$
$A_{4.3}$	1	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_1e^{-x_4},\ x_4\dot x_3-\dot x_2$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_2\dot x_4-\frac12{\dot x_3}^2,\ \dot x_1e^{-\frac{\dot x_3}{\dot x_4}}$
	3	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ x_4,\ \dot x_1e^{-\frac{\dot x_2}{\dot x_3}}$
	4	$t,\ \dot x_4,\ x_3e^{x_4},\ \dot x_3e^{x_4},\ (\dot x_1\dot x_4-\dot x_2\dot x_3)e^{x_4}$
	5	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \varepsilon\dot x_2+\dot x_1e^{x_3}$
	6	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4\ \ \dot x_2/x_2,$
	7	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ x_2e^{\frac{x_3}{x_2}},\ \dot x_2e^{\frac{\dot x_3}{\dot x_2}},\ \dfrac{\dot x_2}{x_2}$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_2/x_2$
$A_{4.4}$	1	$t,\ \dot x_4,\ \dot x_3e^{-x_4},\ \dfrac{\dot x_2}{\dot x_3}-x_4,\ \dfrac{\dot x_1}{\dot x_3}-\dfrac{x_4\dot x_2}{\dot x_3}+\frac12{x_4}^2$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_3e^{-\frac{\dot x_2}{\dot x_3}},\ \dfrac{\dot x_1}{\dot x_3}-\dfrac{\dot x_2}{\dot x_3}\ln\lvert\dot x_3\rvert+\frac12\ln^2\lvert\dot x_3\rvert$
	3	$2x_3+{x_4}^2,\ (\dot x_1\dot x_4-\dot x_2\dot x_3)e^{x_4},\ x_4\dot x_4+\dot x_3,\ t,\ \dot x_4$
	4	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ (\dot x_1+x_3\dot x_2)e^{x_3}$
	5	$t,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_4,\ \dot x_3e^{x_2}$
	6	$t,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_4,\ {x_2}^2-2x_3,\ x_2\dot x_2-\dot x_3$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_2,\ \dot x_3,\ \dot x_4$

Продовження табл. B.2.

Алгебра	N	Інваріанти
$A_{4.5}^{a,b,c}$, $abc \neq 0$	1	$\frac{\dot{x}_1^b}{\dot{x}_2^a},\ \frac{\dot{x}_1^c}{\dot{x}_3^a},\ \dot{x}_1 e^{-ax_4},\ \dot{x}_4,\ t$
	2	$x_4,\ \frac{\dot{x}_1^b}{\dot{x}_2^a}, \frac{\dot{x}_1^c}{\dot{x}_3^a},\ \dot{x}_4,\ t$
	3	$\frac{x_3^{b-c}}{x_4^{a-c}},\ \frac{x_4^{a+b-c}}{(\dot{x}_1\dot{x}_4 - \dot{x}_2\dot{x}_3)^{b-c}},\ \frac{\dot{x}_3}{x_3},\ \frac{\dot{x}_4}{x_4},\ t$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \frac{\dot{x}_3}{x_3},\ \frac{\dot{x}_2}{x_2},\ \frac{x_2^{a-c}}{x_3^{a-b}}$
$a=b=c=1$	5	$x_3,\ (\dot{x}_1 - \dot{x}_2\dot{x}_3)e^{-x_4},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ t$
	6	$x_3,\ e^{-x_4}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 f'(x_3)),\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ t$
	7	$x_3,\ e^{x_4},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ t$
	8	$t,\ x_2,\ x_3,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	9	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	10	$t,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$a=b=1$,	5	$t,\ x_2,\ \dot{x}_3 e^{-cx_4},\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
	6	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
	7	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2 e^{-x_3}$
$-1 \leqslant a < b < 1$,	5	$t,\ x_4,\ \varepsilon_1(a-1)e^{-bx_3}\dot{x}_2 - \varepsilon_2(b-1)e^{-ax_3}\dot{x}_1,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$c=1$; $b>0$	6	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2/x_2,\ \dot{x}_3^{a-b}/\dot{x}_2$
якщо $a=-1$	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$A_{4.6}^{a,b}$, $a>0$	1	$x_4 - \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3},\ \dot{x}_1 e^{-ax_4},\ \frac{(\dot{x}_3^2+\dot{x}_2^2)^a}{\dot{x}_1^{2b}},\ \dot{x}_4,\ t$
	2	$x_4,\ \dot{x}_1 e^{-a\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3}},\ \frac{(\dot{x}_3^2+\dot{x}_2^2)^a}{\dot{x}_1^{2b}},\ \dot{x}_4,\ t$
	3	$t,\ \frac{x_3 e^{(a-b)\operatorname{arc\,tg}(x_4)}}{\sqrt{1+x_4^2}},$ $\frac{(1+x_4^2)e^{-a\operatorname{arc\,tg}x_4}}{(\dot{x}_1\dot{x}_4 - \dot{x}_2\dot{x}_3)},\ \frac{\dot{x}_4}{(1+x_4^2)},\ \frac{\dot{x}_3}{x_3} - \frac{\dot{x}_4 x_4}{(1+x_4^2)}$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \frac{\dot{x}_3}{x_3^2+1},$ $e^{a\operatorname{arc\,tg}x_3}\left(\dot{x}_1 - \varepsilon\dot{x}_2 e^{(b-a)\operatorname{arc\,tg}x_3}\frac{(x_3+b-a)}{\sqrt{1+x_3^2}}\right)$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_3},\ \frac{(\dot{x}_3^2+\dot{x}_2^2)}{(x_2^2+x_3^2)},$ $(x_2^2+x_3^2)\,e^{2(b-a)\operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_3}}$
	6	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$

Продовження табл. B.2.

Алгебра	N	Інваріанти
$A_{4.7}$	1	$t,\ \dot x_4,\ \dot x_3 e^{-x_4},\ \dot x_3 e^{-\frac{\dot x_2}{\dot x_3}},\ \dfrac{\dot x_2 x_3 - \dot x_1}{\dot x_3^2}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_3 e^{-\frac{\dot x_2}{\dot x_3}},\ \dfrac{\dot x_2 x_3 - \dot x_1}{\dot x_3^2}$
	3	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ (2\dot x_3 \dot x_1 - \dot x_2^2)e^{2x_3}$
	4	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_2 e^{-x_3}$
	5	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
$A^b_{4.8},\ \lvert b\rvert \leqslant 1$	1	$t,\ \dot x_4,\ (\dot x_2 x_3 - \dot x_1)\dot x_2^{-1-q},\ \dot x_2^q/\dot x_3,\ \dot x_2 e^{-x_4}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ (\dot x_2 x_3 - \dot x_1)\dot x_2^{-1-q},\ \dot x_2^q/\dot x_3$
	3	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_3/x_3,\ (2\dot x_1 \dot x_3 - \dot x_2^2)^{1-q}/x_3^2$
	4	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_2 e^{-x_3}$
	5	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
$b=1$	6	$t,\ x_3,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ (2\dot x_1 \dot x_3 - \dot x_2^2)e^{-2x_4}$
$b=-1$	6	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_2 \dot x_3,\ \dot x_2 e^{(\dot x_2 x_3 - \dot x_1)/\dot x_4}$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
$b \neq \pm 1$	6	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dot x_2 e^{-qx_3}$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
$b=0$	3	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \ln\lvert\dot x_2\rvert - \dot x_3/\dot x_4,\ (\dot x_2 x_3 - \dot x_1)/(\dot x_2 x_4) - \ln\lvert\dot x_2\rvert$
	4	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ (\dot x_2 x_3 - \dot x_1)/\dot x_2 - C\ln\lvert\dot x_2\rvert$
$A^a_{4.9},\ a \geqslant 0$	1	$t,\ \dot x_4,\ (x_3 \dot x_2 - \dot x_1)e^{-2qx_4},\ (\dot x_2^2 + \dot x_3^2)e^{-2q \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_2}{\dot x_3}},\ \dfrac{x_3 \dot x_2 - \dot x_1}{\dot x_2^2 + \dot x_3^2}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ (\dot x_2^2 + \dot x_3^2)e^{-2q \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_2}{\dot x_3}},\ \dfrac{x_3 \dot x_2 - \dot x_1}{\dot x_2^2 + \dot x_3^2}$
	3	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_3/(x_3^2+1),\ \dfrac{x_3^2+1}{\dot x_1 \dot x_3 - \frac{1}{2}\dot x_2^2} e^{-2q \operatorname{arc\,tg} x_3}$
$a=0$	4	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \dot x_2^2 + \dot x_3^2,\ \dfrac{x_3 \dot x_2 - \dot x_1}{\dot x_4} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\dot x_2}{\dot x_3}$
$A_{4.10}$	1	$t,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ (\dot x_1^2 + \dot x_2^2)e^{-2x_3},\ x_4 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_1}{\dot x_2}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot x_4,\ \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_1}{\dot x_2} - \dfrac{\dot x_3}{\dot x_4},\ -2x_3 + \ln(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) + 2x_4 \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_1}{\dot x_2}$
	3	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ -2x_3 + \ln(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) + 2C \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_1}{\dot x_2}$
	4	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dfrac{\dot x_2}{1 + x_2^2}$
	5	$t,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ x_3 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot x_1}{\dot x_2}$
	6	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot x_3,\ \dot x_4,\ \dfrac{\dot x_2}{1 + x_2^2}$

Таблиця В.3

Диференціальні інваріанти дійсних розкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі

Алгебра	N	Інваріанти
$4A_1$	1	$t,\ \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1\dot{x}_5-\dot{x}_4\dot{x}_2,\ \dot{x}_1\theta'_{x_4}(x_4,t)+\dot{x}_2\theta'_t(x_4,t)-\dot{x}_3$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1\varphi'(x_4)-\dot{x}_2,\ \dot{x}_1\psi'(x_4)-\dot{x}_3$
	6	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	9	$t,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	10	$t,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	11	$t,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$A_{2.1}\oplus 2A_1$	1	$t,\ \dot{x}_1e^{-x_4},\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_4}-\ln\|\dot{x}_1\|,\ \dfrac{\dot{x}_3}{\dot{x}_5}-\ln\|\dot{x}_1\|$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_4}-\ln\|\dot{x}_1\|,\ \dot{x}_2\varphi'(x_4)-\dot{x}_3$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_3}{x_3},\ \dfrac{\dot{x}_1\dot{x}_4}{\dot{x}_3}-\dot{x}_2$
	6	$t,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_3}{x_3}$
	7	$t,\ x_3,\ \dot{x}_1e^{-x_4},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	9	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	10	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_3},\ \dfrac{\dot{x}_3}{x_3}$
$2A_{2.1}$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ e^{-x_4}\dot{x}_2,\ \dot{x}_1e^{-x_3}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2e^{-\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_4}},\ \dot{x}_3x_4-x_3\dot{x}_4+\dot{x}_4\ln\|\dot{x}_1\|$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1e^{-x_3}\dot{x}_2^C$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_3}{x_3},\ \dot{x}_1e^{-\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3}}$
	5	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	6	$t,\ x_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_2},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_2},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$

Продовження табл. B.3.

Алгебра	N	Інваріанти
$A_{3.1} \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_3 x_4 - \dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	2	$t,\ \dot{x}_3^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_5,\ \dot{x}_3\dot{x}_4 - \dot{x}_2\dot{x}_5,\ x_4,\ \dot{x}_4$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3\varphi'(x_4) - \dot{x}_2,\ 2\dot{x}_1\dot{x}_4 - \dot{x}_3^2,\ \dot{x}_4$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_1\dot{x}_4 - \dot{x}_3\dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	6	$t,\ x_2,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	7	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
	8	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
$A_{3.2} \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_2 e^{-x_3},\ \dot{x}_1\dot{x}_2^{-1} - x_3,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2 e^{-\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}},\ x_4\dot{x}_3 + \left(\dot{x}_1\dot{x}_2^{-1} - x_3\right)\dot{x}_4$
	3	$t,\ \dot{x}_2 e^{-\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}},\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ x_4$
	4	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ x_4,\ \Big((\dot{x}_1 - \dot{x}_2 x_3)(\dot{x}_3 x_4 + \dot{x}_4) - \dot{x}_2(\dot{x}_3 x_4)\Big)e^{-x_3}$
	5	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ x_4,\ \Big(\dot{x}_1 - \dot{x}_2(x_3 + 1)\Big)e^{-x_3}$
	6	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ x_4,\ \dot{x}_2 e^{-x_3}$
	7	$t,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	9	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$A_{3.3} \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1/\dot{x}_2,\ e^{-x_3}\dot{x}_1$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1/\dot{x}_2,\ (-x_3 + \ln|\dot{x}_1|)\dot{x}_4 + \dot{x}_3 x_4$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1/\dot{x}_2$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ e^{-x_3}(-\dot{x}_3\dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_4\dot{x}_3 + \dot{x}_1\dot{x}_4)$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2 e^{-x_3}$
	6	$t,\ x_2,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
	7	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
	8	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_4$
	9	$t,\ x_2,\ x_4,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4$
$A_{3.4}^a \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ e^{-x_3}\dot{x}_1,\ \dot{x}_1^a\dot{x}_2^{-1}$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1^a\dot{x}_2^{-1},\ (-x_3 + \ln|\dot{x}_1|)\dot{x}_4 + \dot{x}_3 x_4$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1^a\dot{x}_2^{-1}$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1 e^{-x_3}(\dot{x}_3 x_4 a + \dot{x}_4) - \dot{x}_2\dot{x}_3 e^{-ax_3}$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ ae^{-x_3}\dot{x}_1 - \dot{x}_2 e^{-ax_3}$
	6	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2 e^{-ax_3}$
	7	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2/x_2$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2/x_2$
	9	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_2/x_2$
$a \neq -1$	10	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_1 e^{-x_3}$

Продовження табл. B.3.

Алгебра	N	Інваріанти
$A^b_{3.5} \oplus A_1$	1	$t,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)e^{-2bx_3},\ \ \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}-x_3$
	2	$t,\ x_4,\ \dot{x}_4,\ \dot{x}_4\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}-x_3\dot{x}_4+\dot{x}_3x_4,\ (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)e^{-2b\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}}$
	3	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)e^{-2b\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}}$
	4	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \left(\dot{x}_1\cos\left(x_3-\operatorname{arc\,tg}\left(b+\dfrac{\dot{x}_4}{x_4\dot{x}_3}\right)\right)-\right.$
		$\left.-\dot{x}_2\sin\left(x_3-\operatorname{arc\,tg}\left(b+\dfrac{\dot{x}_4}{x_4\dot{x}_3}\right)\right)\right)e^{-bx_3}$
	5	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ e^{-bx_3}(\dot{x}_1\cos(x_3-\operatorname{arc\,tg}b)-\dot{x}_2\sin(x_3-\operatorname{arc\,tg}b))$
	6	$t,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{1+x_2^2}$
	7	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{1+x_2^2}$
	8	$t,\ x_3,\ x_4,\ \dot{x}_3,\ \dot{x}_4,\ \dfrac{\dot{x}_2}{1+x_2^2}$

Додаток C

Коефіцієнти редукованих систем (3.21)

У даному додатку наведено значення коефіцієнтів $k_{\mu\gamma}$, $l_{\mu\gamma}$, $m_{\mu\gamma}$ у системах звичайних диференціальних рівнянь (3.21), до яких зводиться система рівнянь Максвелла для векторного потенціалу (3.18) в результаті симетрійної редукції за підалгебрами L_1–L_{24} розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3)$, які не спряжені підалгебрам алгебри $AP(1,3)$.

$$
\begin{aligned}
L_1:\ & k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}(1+\omega^2) - (c_\mu - b_\mu\omega)(c_\gamma - b_\gamma\omega),\\
& l_{\mu\gamma} = -4\omega(g_{\mu\gamma} + b_\mu b_\gamma) + 2(b_\mu c_\gamma + c_\mu b_\gamma),\\
& m_{\mu\gamma} = -2(g_{\mu\gamma} + b_\mu b_\gamma),\\
L_2:\ & k_{\mu\gamma} = -4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma} - 4(b_\mu + \alpha c_\mu)(b_\gamma + \alpha c_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma} = 4g_{\mu\gamma} + 4(b_\mu + \alpha c_\mu)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma,\\
L_3:\ & k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega(1+\omega) - 4\omega(b_\mu - \epsilon_2 d_\mu\sqrt{\omega})(b_\gamma - \epsilon_2 d_\gamma\sqrt{\omega}),\\
& l_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma}(2+5\omega) + 2\epsilon_2\sqrt{\omega}(4d_\mu b_\gamma + 3b_\mu d_\gamma) - 4b_\mu b_\gamma - 10\omega d_\mu d_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2d_\mu d_\gamma + \epsilon_2\omega^{-\frac{1}{2}}d_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma\omega^{-1},\\
L_4:\ & k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega(1-\omega) - 4\omega(b_\mu - \epsilon_3 a_\mu\sqrt{\omega})(b_\gamma - \epsilon_3 a_\gamma\sqrt{\omega}),\\
& l_{\mu\gamma} = 2g_{\mu\gamma}(5\omega - 2) - 4b_\mu b_\gamma - 10a_\mu a_\gamma\omega + 2\epsilon_3\sqrt{\omega}(4a_\mu b_\gamma + 3b_\mu a_\gamma),\\
& m_{\mu\gamma} = 2g_{\mu\gamma} - 2a_\mu a_\gamma + \epsilon_3 a_\mu b_\gamma\omega^{-\frac{1}{2}} - c_\mu c_\gamma\omega^{-1},\\
L_5:\ & k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}(1+\omega^2) - (c_\mu - b_\mu\omega)(c_\gamma - b_\gamma\omega),\\
& l_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma}\omega + 2(b_\mu c_\gamma - c_\mu b_\gamma) -\\
& -2\alpha^{-1}\omega(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) + 4(c_\mu - b_\mu\omega)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2b_\mu b_\gamma - 3\alpha^{-1}(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - \alpha^{-2}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_6\ \ :\ & k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_6(1-\alpha^2)g_{\mu\gamma} - 2\epsilon_6(1-\alpha^2)(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - \\
& -2(1+\alpha^2)(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) - 4\alpha(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma), \\
& l_{\mu\gamma} = -4\epsilon_6 g_{\mu\gamma} + 2(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma) + 2\alpha(a_\mu d_\gamma + d_\mu a_\gamma) + \\
& +2\epsilon_6(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - 2\epsilon_6\alpha(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma), \\
& m_{\mu\gamma} = \epsilon_6(g_{\mu\gamma} - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma), \\
L_7\ \ :\ & k_{\mu\gamma} = -(1-\alpha^2)\omega^2 g_{\mu\gamma} - \omega^2[\alpha\epsilon_5\omega^{-\frac{1}{\alpha}}k_\mu + \\
& +(1-\alpha)\epsilon_7 c_\mu][\alpha\epsilon_5\omega^{-\frac{1}{\alpha}}k_\gamma + (1-\alpha)\epsilon_7 c_\gamma], \\
& l_{\mu\gamma} = (\alpha+2)(1-\alpha)\omega g_{\mu\gamma} + 2\alpha^{-1}(1-\alpha)\omega(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) + \\
& +\epsilon_5\epsilon_7\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}[\alpha^2 k_\mu c_\gamma + (1+\alpha^2)c_\mu k_\gamma] + \omega^{1-\frac{2}{\alpha}}\alpha(1-\alpha)k_\mu k_\gamma + \\
& \omega(\alpha+2)(1-\alpha)c_\mu c_\gamma, \\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 3\alpha^{-1}(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - \alpha^{-2}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - 2c_\mu c_\gamma, \\
L_8\ \ :\ & k_{\mu\gamma} = -4\epsilon_4 g_{\mu\gamma} - [k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)][k_\gamma - \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)], \\
& l_{\mu\gamma} = -2\epsilon_4 g_{\mu\gamma} + \epsilon_4[k_\mu - \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)](a_\gamma - d_\gamma), \\
& m_{\mu\gamma} = 0, \\
L_9\ \ :\ & k_{\mu\gamma} = -4g_{\mu\gamma} - (k_\mu - 2\epsilon_7 c_\mu)(k_\gamma - 2\epsilon_7 c_\gamma), \\
& l_{\mu\gamma} = -6g_{\mu\gamma} - 4(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - 2\epsilon_7(k_\mu c_\gamma - c_\mu k_\gamma) + \\
& +3\epsilon_7(k_\mu - 2\epsilon_7 c_\mu)c_\gamma, \\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - 3(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma, \\
L_{10}:\ & k_{\mu\gamma} = 4\omega(1-\omega)g_{\mu\gamma} - \{\epsilon_4[(a_\mu - d_\mu)\omega + k_\mu] - 2\epsilon_7 c_\mu\omega\}\times \\
& \times\{\epsilon_4[(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma] - 2\epsilon_7 c_\gamma\omega\}, \\
& l_{\mu\gamma} = 2(2-5\omega)g_{\mu\gamma} - 4(1-\omega)(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - \\
& -2\epsilon_4\epsilon_7\{[(a_\mu - d_\mu)\omega + k_\mu]c_\gamma - [(a_\gamma - d_\gamma)\omega + k_\gamma]c_\mu\}, \\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma + 3(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma) - a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma + \\
& +2\epsilon_4\epsilon_7 c_\mu(a_\gamma - d_\gamma), \\
L_{11}:\ & k_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma}\omega^2(1+\omega^2) - \omega^2(c_\mu - \omega b_\mu)(c_\gamma - \omega b_\gamma), \\
& l_{\mu\gamma} = 2\omega[(1-\omega^2)g_{\mu\gamma} + a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma + c_\mu c_\gamma - \omega^2 b_\mu b_\gamma] - \\
& -\epsilon_5\epsilon_7\omega(c_\mu - \omega b_\mu)k_\gamma, \\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - 3(a_\mu d_\gamma - d_\mu a_\gamma - a_\mu a_\gamma) + \\
& +d_\mu d_\gamma + 2\epsilon_5\epsilon_7 c_\mu k_\gamma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12}:\ & k_{\mu\gamma}=-4(1+\beta^2)g_{\mu\gamma}-4(b_\mu+\beta c_\mu)(b_\gamma+\beta c_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma}=4g_{\mu\gamma}+4\alpha\beta(d_\mu a_\gamma-a_\mu d_\gamma)+4(b_\mu+\beta c_\mu)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma}=-g_{\mu\gamma}-\alpha^2(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-b_\mu b_\gamma-c_\mu c_\gamma,\\
L_{13}:\ & k_{\mu\gamma}=4\epsilon_6(\alpha^2-\beta^2)g_{\mu\gamma}-2\epsilon_6(\alpha^2-\beta^2)(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-\\
& -2(\alpha^2+\beta^2)(a_\mu a_\gamma+d_\mu d_\gamma)-4\alpha\beta(a_\mu d_\gamma+d_\mu a_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma}=-4\alpha\epsilon_6 g_{\mu\gamma}-4\epsilon_6\beta\alpha^{-1}(b_\mu c_\gamma-c_\mu b_\gamma)+2\alpha(a_\mu a_\gamma+d_\mu d_\gamma)+\\
& +2\beta(a_\mu d_\gamma+d_\mu a_\gamma)+2\alpha\epsilon_6(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-2\epsilon_6\beta(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma),\\
& m_{\mu\gamma}=\epsilon_6[g_{\mu\gamma}-a_\mu a_\gamma+d_\mu d_\gamma-\alpha^{-2}(b_\mu b_\gamma+c_\mu c_\gamma)],\\
L_{14}:\ & k_{\mu\gamma}=-4\epsilon_4 g_{\mu\gamma}-2(a_\mu a_\gamma+d_\mu d_\gamma)+2\epsilon_4(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma}=-2\epsilon_4 g_{\mu\gamma}-2\epsilon_4(b_\mu c_\gamma-c_\mu b_\gamma)+\epsilon_4[k_\mu-\epsilon_4(a_\mu-d_\mu)](a_\gamma-d_\gamma),\\
& m_{\mu\gamma}=0,\\
L_{15}:\ & k_{\mu\gamma}=-4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma}-4(b_\mu+\alpha c_\mu)(b_\gamma+\alpha c_\gamma)+\\
& +4e^{\frac{1}{2}\omega}[k_\mu(b_\gamma+\alpha c_\gamma)+k_\gamma(b_\mu+\alpha c_\mu)]-4e^\omega k_\mu k_\gamma,\\
& l_{\mu\gamma}=4g_{\mu\gamma}+4\alpha^2(d_\mu a_\gamma-a_\mu d_\gamma)+2e^{\frac{1}{2}\omega}b_\mu k_\gamma+4(b_\mu+\alpha c_\mu)b_\gamma+\\
& +2\alpha e^{\frac{1}{2}\omega}c_\mu k_\gamma-2e^\omega k_\mu k_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma}=-g_{\mu\gamma}-\alpha^2(a_\mu a_\gamma-d_\mu d_\gamma)-b_\mu b_\gamma-c_\mu c_\gamma,\\
L_{16}:\ & k_{\mu\gamma}=-4[(1-\alpha)^2+\beta^2]g_{\mu\gamma}-4[\alpha k_\mu+(1-\alpha)b_\mu+\beta c_\mu]\times\\
& \times[\alpha k_\gamma+(1-\alpha)b_\gamma+\beta c_\gamma],\\
& l_{\mu\gamma}=4(1-\alpha)g_{\mu\gamma}+4(1-\alpha)(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma)-4\alpha(k_\mu b_\gamma-k_\gamma b_\mu)-\\
& -2[\alpha k_\mu+(1-\alpha)b_\mu+\beta c_\mu][k_\gamma-2b_\gamma],\\
& m_{\mu\gamma}=-g_{\mu\gamma}-a_\mu a_\gamma+d_\mu d_\gamma-b_\mu b_\gamma-c_\mu c_\gamma-2(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma)+2b_\mu k_\gamma,\\
L_{17}:\ & k_{\mu\gamma}=-4(1+\alpha^2)g_{\mu\gamma}-[k_\mu-2b_\mu+2\alpha c_\mu][k_\gamma-2b_\gamma+2\alpha c_\gamma],\\
& l_{\mu\gamma}=-4g_{\mu\gamma}-4(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma)+2(b_\mu k_\gamma-k_\mu b_\gamma)+\\
& +2(k_\mu-2b_\mu+2\alpha c_\mu)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma}=-g_{\mu\gamma}-2(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma)-a_\mu a_\gamma-b_\mu b_\gamma-c_\mu c_\gamma+d_\mu d_\gamma,\\
L_{18}:\ & k_{\mu\gamma}=-4g_{\mu\gamma}-(k_\mu+2c_\mu)(k_\gamma+2c_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma}=2(b_\mu k_\gamma-k_\mu b_\gamma)+2(k_\mu+2c_\mu)b_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma}=-g_{\mu\gamma}-2(a_\mu d_\gamma-d_\mu a_\gamma)-a_\mu a_\gamma-b_\mu b_\gamma-c_\mu c_\gamma+d_\mu d_\gamma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{19}:\ & k_{\mu\gamma} = 4\omega^2(\epsilon_6\omega - 1)g_{\mu\gamma} - \omega^2[2b_\mu - \sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\mu - d_\mu) + \epsilon_5 k_\mu)]\times\\
& \times[2b_\gamma - \sqrt{\omega}(\epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma) + \epsilon_5 k_\gamma)],\\
& l_{\mu\gamma} = 4\epsilon_6\omega^2 g_{\mu\gamma} + 2\omega\sqrt{\omega}[\epsilon_5 k_\mu + \epsilon_4(a_\mu - d_\mu)]b_\gamma -\\
& -2\omega^2[a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma + \epsilon_6(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma)],\\
& m_{\mu\gamma} = -g_{\mu\gamma} - b_\mu b_\gamma - c_\mu c_\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}b_\mu[\epsilon_5 k_\gamma + \epsilon_4(a_\gamma - d_\gamma)] -\\
& -\frac{1}{2}\epsilon_6\omega(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) + \frac{1}{2}\omega(a_\mu a_\gamma + d_\mu d_\gamma),\\
L_{20}:\ & k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2 g_{\mu\gamma} - 2\epsilon_8(1-\alpha^2)\omega^2(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) -\\
& -(1+\alpha)^2\omega^{2-\frac{1}{\alpha}}k_\mu k_\gamma - (1-\alpha)^2(a_\mu - d_\mu)(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{2+\frac{1}{\alpha}},\\
& l_{\mu\gamma} = -\epsilon_8(1+\alpha)(2\alpha-1)\omega g_{\mu\gamma} + 4\alpha^{-1}(\alpha^2-1)\epsilon_8\omega(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) -\\
& -\alpha^{-1}\omega[(\alpha^2-1)(\alpha+1)k_\mu k_\gamma\omega^{-\frac{1}{\alpha}} +\\
& +\epsilon_8\left[(1+\alpha)(1-\alpha-\alpha^2)k_\mu(a_\gamma - d_\gamma) + (1-\alpha)(\alpha^2-1)(a_\mu - d_\mu)k_\gamma\right] +\\
& +(1-\alpha)(1-\alpha-\alpha^2)(a_\mu - d_\mu)(a_\gamma - d_\gamma)\omega^{\frac{1}{\alpha}}],\\
& m_{\mu\gamma} = (2\alpha)^{-1}[(1+\alpha)\epsilon_8(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) +\\
& +\epsilon_8\alpha^{-1}(1+\alpha)(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - (2\alpha)^{-1}(1-\alpha)(1-3\alpha)\omega^{\frac{1}{\alpha}}\times\\
& \times(a_\mu - d_\mu)(a_\gamma - d_\gamma) - (2\alpha)^{-1}(1+\alpha)^2 k_\mu k_\gamma\omega^{-\frac{1}{\alpha}}],\\
L_{21}:\ & k_{\mu\gamma} = -k_\mu k_\gamma,\\
& l_{\mu\gamma} = \epsilon_9 k_\mu(c_\gamma\omega - b_\gamma) + 2\epsilon_9 k_\gamma(c_\mu\omega - b_\mu),\\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma}(1+\omega^2) - 3(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu)(1+\omega^2) +\\
& +2\epsilon_9\omega(k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu) - (1+\omega^2)(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma) - k_\mu k_\gamma -\\
& -2(c_\mu\omega - b_\mu)(c_\gamma\omega - b_\gamma) + \epsilon_9 k_\mu c_\gamma,\\
L_{22}:\ & k_{\mu\gamma} = 4\epsilon_5 g_{\mu\gamma} - (a_\mu - d_\mu + \epsilon_5 k_\mu)(a_\gamma - d_\gamma + \epsilon_5 k_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma} = m_{\mu\gamma} = 0,\\
L_{23}:\ & k_{\mu\gamma} = -(16+\omega^2)g_{\mu\gamma} - 16b_\mu b_\gamma - \omega^2 c_\mu c_\gamma + 4\omega(b_\mu c_\gamma + c_\mu b_\gamma),\\
& l_{\mu\gamma} = -4\omega g_{\mu\gamma} + \omega(a_\gamma d_\mu - a_\mu d_\gamma) + 8(b_\mu c_\gamma + b_\gamma c_\mu) - 4\omega c_\mu c_\gamma,\\
& m_{\mu\gamma} = -2g_{\mu\gamma} - 2c_\mu c_\gamma - \tfrac{3}{2}(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - \tfrac{1}{4}(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{24}: k_{\mu\gamma} &= 4\omega(1-36\omega)g_{\mu\gamma} - \left\{\sqrt{|\omega|}\left(\tfrac{1}{2}k_\mu + 2\epsilon_{10}(a_\mu - d_\mu)\right) - \right.\\
&\left. -12\epsilon_{10}\omega b_\mu\right\}\left\{\sqrt{|\omega|}\left(\tfrac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma)\right) - 12\epsilon_{10}\omega b_\gamma\right\},\\
l_{\mu\gamma} &= 2(1-144\omega)g_{\mu\gamma} - 48\omega(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) -\\
&-8\epsilon_{10}\sqrt{|\omega|}(k_\mu b_\gamma - k_\gamma b_\mu) + 16\sqrt{|\omega|}[b_\mu(a_\gamma - d_\gamma) -\\
&-(a_\mu - d_\mu)b_\gamma] - \{\sqrt{|\omega|}[\tfrac{1}{2}k_\mu + 2\epsilon_{10}(a_\mu - d_\mu)] - 12\epsilon_{10}\omega b_\mu\}\times\\
&\times\{-24\epsilon_{10}b_\gamma + (2\sqrt{|\omega|})^{-1}\epsilon_{10}[\tfrac{1}{2}k_\gamma + 2\epsilon_{10}(a_\gamma - d_\gamma)]\},\\
m_{\mu\gamma} &= -32g_{\mu\gamma} - 32b_\mu b_\gamma - 24(a_\mu d_\gamma - a_\gamma d_\mu) - 4(a_\mu a_\gamma - d_\mu d_\gamma).
\end{aligned}
$$

Значення α, β ті ж, що і в перелікові алгебр. Крім того, $\epsilon_j = 1$ при $\varphi > 0$, $\epsilon_j = -1$ при $\varphi < 0$. Значення функцій φ для кожного j наведені в таблиці C.1.

Таблиця C.1

j	φ	j	φ
1	bx	6	$(ax)^2 - (dx)^2$
2	dx	7	cx
3	ax	8	$(ax)^2 - (bx)^2 - (dx)^2$
4	$ax - dx$	9	$cx\, kx - bx$
5	kx	10	$4\,bx + (kx)^2$